SH.A.SAIPNAZAROV,
M.T.ORTIQOVA,
J.A.USAROV

MOLIYAVIY MATEMATIKA

TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

Sh.A.Saipnazarov, M.T.Ortiqova, J.A.Usarov

MOLIYAVIY MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent – 2021

UO‘K: 330.101.541(072)
KBK 65.012.2ya7
S 56

Sh.A.Saipnazarov, M.T.Ortiqova, J.A.Usarov. Moliyaviy matematika. O‘quv qo‘llanma. – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2021 – 234 b.

ISBN 978-9943-7629-9-2

Mazkur o‘quv qo‘llanmada moliyaviy matematikaning asosiy tushunchalari haqida ma’lumot berish bilan bir qatorda investitsiyaning daromadliligini oddiy va murakkab foiz stavkalari bo‘yicha hisoblash, moliyaviy investitsiya savatini diversifikatsiyalash, valyutalar konversiyasidan keladigan daromadlarni hisoblash usullari va foizlarni jamg‘arish, uzluksiz ustama foizlarda jamg‘arma koeffisiyenti va diskontlash, to‘lovlar oqimi, moliyaviy rentalar va ularni jamg‘arish, qarzlarni to‘lash rejalarini ishlab chiqish, investorning riskka munosabati, lotereyaning foydaliligini hisoblash, riskning miqdoriy bahosi, sug‘urtaviy rentalar va ularning narxini hisoblash, shaxs sug‘urtasi, badallar summasi bo‘yicha pensiya miqdorini hisoblash usullari bayon etiladi.

O‘quv qo‘llanma iqtisod yo‘nalishidagi oliy o‘quv yurtlarining bakalavriat talabalari uchun mo‘ljallangan.

***

В учебном пособии подробно изложены основные понятия финансовой математики. Учебное пособие также содержит расчеты по оценке эффективности и риска инвестиций, по диверсификации портфеля ценных бумаг, по наращению и дисконтированию денежных потоков по фиксированным, плавающим и непрерывным процентным ставкам, а также, по построению оптимальных планов погашения кредита. В последних трех главах учебного пособия излагаются способы применения долгосрочных финансовых исчислений в лизинге и в страховании жизни и пенсий.

Учебное пособие предназначено студентам бакалавриата экономических вузов.

***

The basic concepts of financial mathematics are stated in the textbook. The Textbook also contains calculations on assessment of efficiency and risk of investments, on diversification of investment portfolio, on accumulation and discounting of cash flows by fixed, floating and continuous interest rates, and on amortization of credit. It is stated methods of application of long-term financial calculations in leasing and in life insurance and pensions in the final three chapters of the textbook.

The textbook is oriented for bachelor degree students of economic universities.

UO‘K: 330.101.541(072)
KBK 65.012.2ya7

Taqrizchilar: f-m.f.n., dotsent R.A.Abdikarimov.
f-m.f.n., dotsent A.R.Gulamov.

ISBN 978-9943-7629-9-2

KIRISH

Biznes bilan yuqori saviyada shug‘ullanish, har qanday operatsiyani amalga oshirishda moliyaviy natijalarning mumkin bo‘lgan barcha variantlarini baholay olishni talab qiladi. Shuning uchun bu soha bo‘yicha elementar ma’lumotlarning o‘zi etarli bo‘lmaydi. Hozirgi sharoitda moliyaviy hisoblar usulikasini chuqur egallash talab qilinadi. Shu maqsadda Respublikamizning ko‘pgina oliy o‘quv yurtlarida moliyaviy hisoblarga tegishli bo‘lgan turli mavzu va muammolarni qamrab oluvchi fanlar o‘rganilmoqda.

Xususan, ba’zi hisob usullari “kredit”, “moliyaviy menejment”, “qimmatbaho qog‘ozlar bo‘yicha operatsiyalar” va hokazo fanlar yordamida o‘rganiladi. Lekin, moliyaviy hisoblarning to‘liq tizimlashtirilgan, umumiy usulologiyaga tayanuvchi kurslari hali o‘z ifodasini topgani yo‘q. Bunday hisob-kitoblarning barchasiga matematik apparatni tatbiq etish, moliyaviy hisoblarga xos bo‘lgan muammolardan xolos etadi. Shuning uchun “moliyaviy matematika” deb nomlanuvchi fanni o‘rganish zarurati kelib chiqadi. Amaliy aniq masalalarni yechishga yordam beruvchi asosiy tushunchalar bilan tanishamiz.

“Foiz” so‘zi (lotinchadan procentum - yuzdan bir) ikki xil ma’noda qo‘llaniladi: 1) matematik ma’nosi – bu qandaydir miqdorning yuzdan bir qismi, abstrakt holda – sonning yuzdan bir qismi. Masalan, 12 sonining 3 foizi

$$\frac{3}{100}\cdot 12 = 0,36$$

2) iqtisodiy ma’nosi – bu qarz beruvchi (kreditor) tomonidan qarz oluvchi (debitor)ga taklif etilgan ssuda, kredit uchun foydalaniladigan to‘lovni ifoda etadi.

To‘lov qiymati odatda qarz miqdoridan olinadigan “foiz” sifatida aniqlanadi. Masalan, agar korxona 2000000 so‘m 5 foizli kredit olgan bo‘lsa, iqtisodiy ma’noda to‘lov miqdori

$$\frac{5}{100}\cdot 2000000 = 100000$$ so‘mni tashkil etadi.

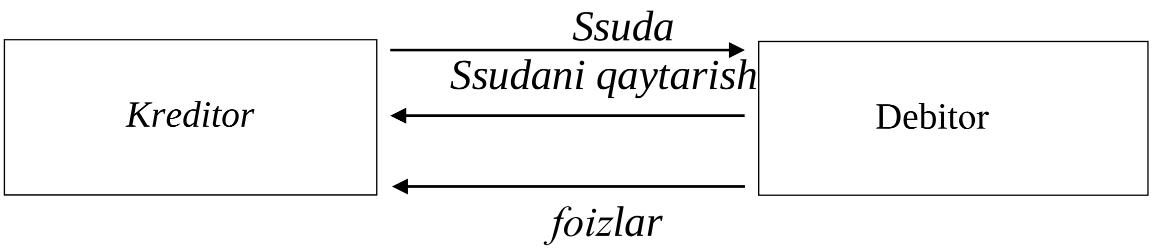
Kredit olish – bu moliyaviy almashtirish (operasiya)larning eng keng tarqalgan turlaridan biridir. Bankda omonat hisoblarini ochish, bank tomonidan depozit sertifikatlarini chiqarish, veksellarni hisobga olish, bank tomonidan beriladigan kredit va boshqalar kredit operasiyalariga misol bo‘ladi. Darslikda bu operatsiyalarning moliyaviy hisoblar sxemasiga mos keluvchi miqdoriy tomoniga e’tibor beriladi.

Umumiy holda oddiy kredit operatsiyalar, ya’ni qarz berish (ssuda, kredit) ikkita shaxsning ishtirokidan iborat bo‘ladi.

Kreditorlar – pul yoki boshqa to‘lov vositasini taklif etuvchi shaxslar.

Debitorlar – ma’lum muddatga qarz oluvchi shaxslar.

Qarz oluvchi qarz beruvchiga ma’lum muddat ichida olingan kreditdan foiz ko‘rinishida to‘laydi. Buni quyidagi sxemada tasvirlash mumkin:



Kredit operatsiyalar miqdoriy jihatdan quyidagi asosiy parametrlar orqali xarakterlanadi: P – taklif etiladigan mablag‘ (kredit mablag‘i); T – taklif etiladigan davr (muddat); I – “foiz” - kredit uchun to‘lov mablag‘i; S – kreditning to‘la narxi (to‘lov mablag‘i).

Demak, quyidagi asosiy tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$S = P + I \qquad \text{(a)}$$

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, kredit uchun to‘lov mablag‘i I, taklif etiladigan kredit mablag‘idan olinadigan foiz ko‘rinishida aniqlanadi. Bu foiz munosabati foiz “stavkasi” deb yuritiladi:

$$i = \frac{I}{P} \cdot 100 \qquad \text{(b)}$$

ba’zi hollarda foiz “stavkasi” birning qismlarida o‘lchanadi. Bunday holda

$$i = \frac{I}{P} \qquad \text{(v)}$$

Misol. Yarim yilga 200000 so‘m 100000 so‘m qaytarish evaziga kreditga berilgan bo‘lsa, yarim yillik foiz stavkasi qancha bo‘ladi?

Yechish: bu yerda $P = 2\,0\,0\,0$ so‘m, $I = 100000$ so‘m. Demak, $i = \frac{I}{P} = \frac{100000}{200000} = 0{,}5$ yoki foizda $i = 50\%$.

Foiz stavkasi ko‘rsatilgan muddat uchun hisoblanadi. Bu dalil quyidagicha yoziladi:

$$i = i_T \quad \text{(bu yerda } T \text{ – kredit davri).}$$

Bu bog‘liqlikni quyidagicha ko‘rsatish mumkin:

$$i_{\circ} \leftrightarrow P, \qquad T \leftrightarrow I, \qquad t_I \leftrightarrow P+I\,.$$

Darhaqiqat, kreditlar muddati keng diapazonda o‘zgaradi (kunlardan o‘n yillarga qadar). Foiz stavkasi odatda faqat tayanch davr uchun ko‘rsatiladi. Eng keng tarqalgani yillik tayanch davridir. Bunday holda yillik tayanch foiz stavkasi haqida gapiriladi. Agar operatsiya davri cho‘zilsa, u holda bu davrda foiz stavkasi operatsiyalarning maxsus shartlari orqali aniqlanadi. Bu shart, o‘z navbatida, foiz stavkasi va foizning hisoblash sxemasini aniqlashga yordam beradi. Operatsiyalar turiga qarab, hisoblashlarning katta sondagi turli sxemalari mavjud. lekin ular asosan ikkita, oddiy va murakkab foizlar sxemasiga tayanadi.

Moliyaviy matematika predmeti

Har qanday moliyaviy operatsiya, investitsion loyiha yoki tijorat kelishuvlari bir qancha shartlar bajarilishini talab qiladi va bu operatsiyada qatnashuvchi tomonlarning roziligi bilan amalga oshiriladi. Bu shartlarga quyidagi miqdoriy kattaliklar kiradi: pul mablag‘lari, vaqt parametrlari, foiz stavkalari, hisob stavkalari va boshqa qo‘shimcha kattaliklar. Sanab o‘tilgan har bir kattalik turli ko‘rinishlarda tasavvur qilinishi mumkin. Masalan, to‘lovlar bir marotabali yoki ko‘p marotabali, vaqt bo‘yicha o‘zgarmas yoki o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin. Foiz stavkalarining turli ko‘rinishlari va ustama foiz to‘lashning o‘nlab usullari mavjud.

Vaqt to‘lovlarning qayd etilgan muddat ko‘rinishida, daromadlarning kelib tushish intervallari, qarzlarning to‘lash momentlari ko‘rinishida va hokazo kabi belgilanadi. Bitta moliyaviy operatsiya ramkasida sanab o‘tilgan ko‘rsatkichlar qandaydir mantiqqa bo‘ysunuvchi o‘zaro bog‘liq sistemani tashkil etadi. Bu sistemaning parametrlari ko‘p bo‘lganligi uchun chekli aniq natijalari ba’zan ma’lum bo‘lmaydi. Sistemada bitta kattalik qiymatining katta yoki kichik hajmda o‘zgarishi bu operatsiya natijasiga ta’sir ko‘rsatadi.

Demak, bunday sistemalar miqdoriy moliyaviy tahlilning obyekti bo‘lishi shart.

Bu tahlilning amaliyotda tekshirilgan usullari moliyaviy matematikaning predmetini tashkil etadi. Miqdoriy moliyaviy tahlil turli masalalarni yechishga qaratilgan. Bu masalalarni ikkita katta guruhga ajratish mumkin: an’anaviy yoki “klassik” va yangi noan’anaviy, ularning qo‘yilishi va uzluksiz ishlab chiqilishi keyingi ikki-uch o‘nyilliklarda kuzatilmoqda.

Miqdoriy moliyaviy tahlil aniqlik va noaniqlik shartlarida qo‘llaniladi. Birinchi holda tahlil uchun berilganlar oldindan ma’lum va fiksirlangan deb hisoblanadi. Masalan, oddiy obligatsiyani chiqarishda barcha parametrlar – muddat, kuponli daromadlilik, sotib olish tartibi kabi parametrlar kelishib olinadi. Pul o‘sishi, foiz stavkasining darajasi, valyuta kursi tebranishining noaniqligi tahlilni qiyinlashtiradi.

Moliyaviy matematika qanday predmet ekanligini oson anglash maqsadida quyidagi oddiy masalaning qo‘yilishiga doir misol keltiramiz.

Faraz qilaylik, D mln. so‘m miqdoridagi investitsiyadan quyidagicha mablag‘ keladigan bo‘lsin: 3 oydan so‘ng A mln. so‘m, 8 oydan so‘ng B mln. so‘m va ikki yil mobaynida har oyda S mln. so‘m. Investitsiyaning daromadliligi yillik murakkab foiz stavkasi bo‘yicha qanday bo‘ladi?

Moliyaviy matematika ramkasi etarli darajada keng – elementar foiz hisobidan tortib, murakkab hisoblargacha, masalan, obligatsiyani samarali chiqarishda turli omillarga ta’sirini baholash yoki moliyaviy investitsiya savatini diversifikatsiyalash (investitsiyalarni obyektlar bo‘yicha taqsimlash) yo‘li bilan tavakkalchilik usullarini qisqartirish va h.k.

Moliyaviy matematikaning asosiy masalalariga quyidagilar kiradi:

- har bir moliyaviy operatsiyada ishtirok etuvchi tomonlar uchun oxirgi moliyaviy operatsiya natijalarini o‘lchash;
- qarzlarni to‘lash, moliyaviy operatsiyalarning bajarilish rejalarini ishlab chiqish;
- moliyaviy operatsiyalar asosiy parametrlarining oxirgi natijalarga bog‘liqligini o‘lchash.

Moliyaviy operatsiyalarda pul miqdori vaqtning aniq momentlariga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun shartnomalarda to‘lovlarning muddatlari ko‘rsatiladi. Vaqt faktori asosan uzoq muddatli operasiyalarda katta o‘rin egallaydi. Vaqt faktori ba’zan pul miqdoridan ham yuqori baholanadi. Masalan, 5 yil dan so‘ng 1000000 so‘m pulni olish vaqtning qanchalik muhimligini bildiradi. Hozirgi 1000000 so‘m bilan 5 yildan keyingi 1000000 so‘m teng kuchli bo‘lmaydi.

I bob. ODDIY FOIZLAR

Oddiy foizlar formulasi

Faraz qilaylik, P pul mablag‘i i foiz stavkasi bilan T muddatga investitsiya qilingan bo‘lsin. Demak, investor berilgan muddat oxirida o‘zining P miqdoridagi mablag‘ini va asosiy mablag‘ning i foiz stavkasi bo‘yicha olingan foizlaridan keladigan foydani oladi. Oddiy foizlar ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$I = P \cdot i \cdot T \tag{1.1.1}$$

bunda I – oddiy foizlar, P – asosiy investitsiya mablag‘i, i – berilgan muddatdagi foiz stavkasi, T – foiz stavkasiga mos muddat.

Agar (1.1.1) formulada i yillik foiz stavkasini ifodalasa, T davr yillarda ko‘rsatilishi kerak.

1 – misol. 300 million so‘m yillik 16% stavkada qarzga berilgan. 2 yildan keyingi oddiy foizlar topilsin.

Yechish. $I = 300000000 \cdot 0{,}16 \cdot 2 = 96000000.$ Agar P – asosiy mablag‘ (bank omonati, kredit va boshqalar), I – muddat oxirida bu mablag‘ga investitsiya qilingan foizlar bo‘lsa, u holda,

$$S = P + I \tag{1.1.2}$$

dastlabki P mablag‘ning jamg‘arilgan qiymati deb yuritiladi.

$$S = P(1 + iT) \tag{1.1.3}$$

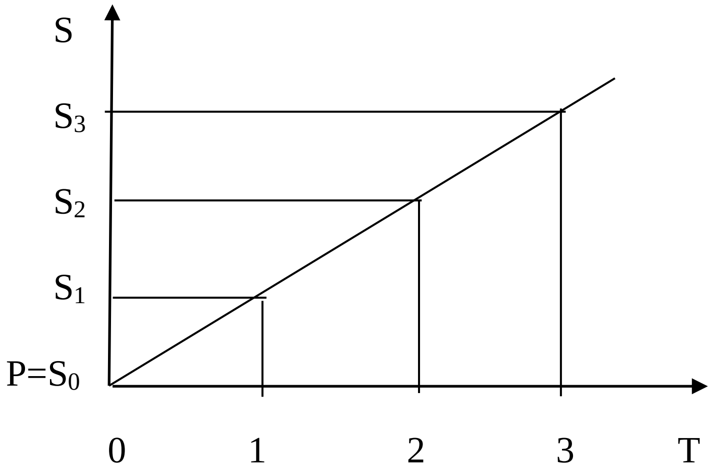
formula esa oddiy foiz formulasi deyiladi.

$$a(T) = 1 + i \cdot T \tag{1.1.4}$$

kattalik esa o‘sish koeffitsiyenti yoki ko‘paytuvchi deb nomlanadi. (1.1.3) va (1.1.4) dan

$$S = P \cdot a(T) \tag{1.1.5}$$

(1.1.3) yoki (1.1.5) formuladan ko‘rinib turibdiki, jamg‘arilgan mablag‘ S ning qiymati T davrga bog‘liq, ya’ni vaqtning funksiyasidir. Bu funksiya chiziqli funksiya bo‘lib, uning grafigi 1 – rasmda tasvirlangan.



1-rasm

(1.1.1) – (1.1.3) formulalar oddiy foizlarning asosiy tenglamalari deb yuritiladi. Ular beshta P, S, I, i, T kattaliklar bilan bogʻlangan. Birinchi uchta kattalikdan boshqa barcha uchta kattalikning berilishi boshqa kattaliklarni bir qiymatli aniqlaydi. Ularning har biri (1.1.1) – (1.1.3) tenglamalarni yechish bilan amalga oshiriladi.

2-misol. Ssuda uchun uch oyga berilgan 100 million soʻmning foizi 12 million soʻmni tashkil etsa, yillik foiz stavkasi qanday?

Yechish: $I = 12$ million soʻm, $P = 100$ million soʻm, $T = 3/12 = 1/4$, (1.1.1) tenglamadan

$$i = \frac{I}{P\cdot T} = \frac{12}{100\cdot 1/4} = 0{,}48 \quad \text{yoki} \quad i = 48\%.$$

3-misol. Har yarim yilda bank yiliga 5% li omonat boʻyicha 50 dollar toʻlaydi. Bankka qoʻyilgan pul miqdori qancha?

Yechish. $I = 50$ dollar, $i = 0{,}05$, $T = 1/2$. (1.1.1) tenglamadan

$$P = \frac{I}{i\cdot T} = \frac{50}{0{,}05\cdot 1/2} = 2000 \text{ dollar.}$$

4-misol. Bankka qoʻyilgan 200 million soʻm pul uchun 20% dan toʻlansa, uning miqdori ikki marta ortishi uchun necha yil kerak boʻladi?

Yechish: $S = P(1+iT)$ formuladan

$$T = \frac{S-P}{P\cdot i} = \frac{400-200}{200\cdot 0{,}2} = 5 \text{ yil.}$$

1.2. Aniq va oddiy foizlar

Biz yuqorida ko‘rgan barcha misollarda investirlash muddati yillarda, oylarda va h.k. ifodalandi. Bu muddatlar birinchi va oxirgi kunlarning kalendardagi sanalari orqali berilishi mumkin. Bunday holda (1.1.1) oddiy foiz formulasidan foydalanish uchun muddat sifatida ssudalar kunining sonini yildagi kunlar soniga nisbatini olish lozim, ya’ni

$$yildagi\, muddat = \frac{ssudalar\, kunining\, soni}{yildagi\, kunlar\, soni} \quad \text{yoki} \quad T = \frac{D}{Y}.$$

Bunga asoslangan holda hisoblashlarning turli variantlari mavjud.

Yildagi kunlar soni (Y) 360 ga teng deb olinsa, bunday holda oddiy foizlar, agar 365 deb olinsa, u holda aniq foizlar deb yuritiladi, ya’ni

$$T_{odat} = \frac{D}{360}, \quad T_{aniq} = \frac{D}{365}, \quad \frac{D}{360} > \frac{D}{365}, \quad \text{demak,} \;\; T_{odat} > T_{aniq}.$$

Bundan tashqari investirlash muddati uchun kunlar sonini aniqlashning yana ikkita usuli mavjud. Ko‘rsatilgan muddatda aniq kunlar sonini hisoblash keng tarqalgan bo‘lib, yildagi har bir kunning tartib nomerini berilgan (Ilova 1) jadval yordamida hisoblash mumkin. Kabisa yili uchun har bir kun nomeriga 29 fevraldan so‘ng 1 qo‘shiladi. d_1 va d_2 sanalarga mos yildagi kunlar nomerini $N(d_1)$ va $N(d_2)$ hamda ikkita sanalar orasidagi kunlar soni

$$D = N(d_2) - N(d_1) \text{ (oddiy yil uchun)}$$

$$D = N(d_2) - N(d_1) + 1$$ (kabisa yili uchun, agar 29 fevral sanalar orasiga tushsa) formulalar yordamida hisoblanadi.

5-misol. 13 fevral va 7 aprel orasidagi aniq kunlar soni topilsin (oddiy yil uchun).

Yechish: (Ilova.1) jadvaldan 13 fevralga 44-kun, 7 aprelga 97-mos keladi. U holda, bu sanalar orasidagi kunlar soni

97 – 44 = 53 kun.

Bundan tashqari sanalar orasidagi kunlar sonining taqribiy qiymatini aniqlash usuli ham mavjud. Bunda har bir oy 30 kun deb hisoblanadi.

6-misol. 5 mart va 28 sentyabr orasidagi taqribiy kunlar soni topilsin.

Yechish: Darhaqiqat, bu sanalar orasida 6 oy bo‘lib (5 martdan 5 sentyabrgacha), yana 23 kun qolyapti. Ravshanki, berilgan sanalar orasidagi kunlar soni $(6\cdot 30)+23 = 203$ ga teng.

Demak, aniq va oddiy foizlarni hamda investirlash muddati uchun aniq va taqribiy kunlar sonini hisobga olib, oddiy foizlarni hisoblashning quyidagi to‘rtta usulini hosil qilamiz:

1. Aniq kunlar sonidagi oddiy foizlar.
2. Aniq kunlar sonidagi aniq foizlar.
3. Taqribiy kunlar sonidagi oddiy foizlar.
4. Taqribiy kunlar sonidagi aniq foizlar.

Birinchi usul bank faoliyatida eng ko‘p qo‘llaniladi, ikkinchi va uchinchi usullar undan kamroq qo‘llaniladi, to‘rtinchi usuldan deyarli foydalanilmaydi.

1.3. Joriy qiymat

Investitsiya qiymati P va foiz stavkasi i ni bilgan holda vaqtning ixtiyoriy momentida jamg‘arilgan S summaning qiymatini oddiy foiz bo‘yicha

$$S = P(1+i\cdot T)$$

formula yordamida hisoblash mumkin. Ayrim hollarda bunga teskari bo‘lgan masalani hal qilishga to‘g‘ri keladi. T muddatdan so‘ng S jamg‘armaning qiymatiga ko‘ra, i foiz stavkasi bo‘yicha P ni ushbu formuladan topamiz.

$$P = \frac{S}{1+i\cdot T} \qquad (1.3.1)$$

P ning qiymati S summaning joriy qiymati deb yuritiladi. Joriy qiymatni hisoblash jarayoni berilgan foiz stavkasi bo‘yicha diskontirlash deyiladi:

$$v = \frac{1}{1+i\cdot T}, \qquad (1.3.2)$$

bu tenglik T muddat uchun oddiy foiz stavkasi i bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi deyiladi. (1.3.1) va (1.3.2) dan

$$P = S\cdot v$$

formulani yozishimiz mumkin.

7-misol. Investor 115 million so‘mni jamg‘arish uchun 15% li yillik oddiy foiz stavkasi bo‘yicha qanday miqdordagi pulni a) bir yilga; b) ikki yilga; v) to‘rt yilga qo‘yish kerak.

Yechish: $S=115$ million so‘m, $i=15\%$.

a) $P=\frac{115}{1+0{,}15}=100$ million so‘m,

b) $P=\frac{115}{1+0{,}15\cdot 2}=88{,}46$ million so‘m,

v) $P=\frac{115}{1+0{,}15\cdot 4}=71{,}875$ million so‘m.

Joriy qiymat vaqtning boshlang‘ich momentida hisoblanganligi uchun, go‘yo u vaqtga bog‘liq emasdek tuyuladi.

$$P=\frac{S}{1+i\cdot T}$$

formuladan P ning T ga bog‘liq ekanligi ko‘rinib turibdi. Darhaqiqat, joriy qiymat vaqtga bog‘liq bo‘lgan S jamg‘arma, ya’ni $S=S(T)$ uchun hisoblanadi. Yuqoridagi formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(T)=\frac{S(T)}{1+i\cdot T}.$$

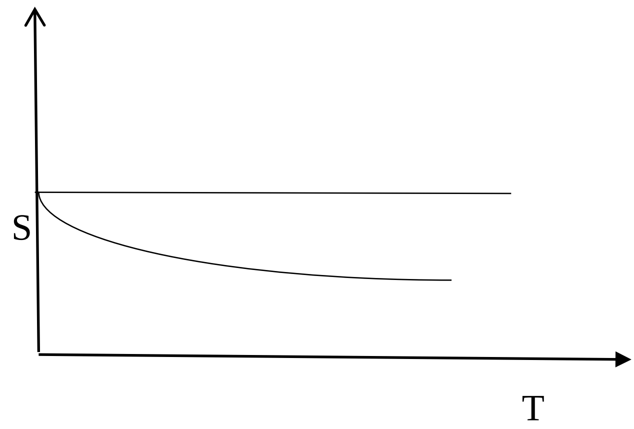
Agar $S(T)=1,$ ya’ni vaqtning ixtiyoriy qiymatida birlik jamg‘armadan iborat bo‘lsa, u holda joriy qiymat diskont ko‘paytuvchi bilan bir xil bo‘ladi.

$$v(T)=\frac{1}{1+i\cdot T}=P(T)$$

Vaqtning ixtiyoriy momentidagi joriy qiymat va jamg‘arma orasidagi bog‘lanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$P(T)=S(T)\cdot v(T)$$

S jamg‘armaning fiksirlangan qiymatida joriy qiymat T ning o‘sishi bilan kamayadi. Haqiqatan, investitsiya muddati ortsa, zarur bo‘lgan jamg‘armani yig‘ish uchun mablag‘ (kapital) kamayadi. $P=P(T)$ ning grafigi 2-rasmda ko‘rsatilgan.



2-rasm

Joriy qiymat (joriy narx) moliyaviy muammolarni tahlil qilishda muhim o‘rin egallaydi. Bunday muammolar, masalan, naqd pul bilan to‘lash kerakmi yoki kredit olish kerakmi? – degan muqobillar orasida vujudga keladi.

8-misol. Investor 50 mln. pul birligidagi naqd pulga yoki bir yildan so‘ng 54 mln. p.b.ga kvartira sotib olishi mumkin. Agar investor hisobida bankda 50 mln. p.b.dan kam bo‘lmagan pul bo‘lsa va bank yiliga 7% to‘lasa, u holda qaysi muqobil afzal bo‘ladi?

Yechish: 50 mln. so‘m va 54 mln. so‘mlar vaqtning turli momentlariga bog‘liq bo‘lganligi uchun ularni biz taqqoslay olmaymiz. Ammo yil oxirida 54 mln. p.b. so‘mni olish uchun yil boshida bankka

$P = \frac{54000000}{1,07} = 50467300$ p.b. qo‘yish kerak.

Shunday qilib, joriy qiymat naqd to‘lanadigan qiymatdan katta, ya’ni $50467300 > 50000000$.

Demak, bunday holda naqd pul to‘lab kvartirani olish afzal ekan. Bularni taqqoslash foiz stavkasiga bog‘liq. Agar bank 7% dan emas, balki 9% dan to‘laganda edi, $P = 54000000/1,09 = 49541300$ p.b bo‘lardi. Bu holda kvartirani bir yildan so‘ng olish kerak bo‘ladi.

Agar berilgan muddat ichida operatsiyalar oddiy foiz bo‘yicha bir necha marta o‘zgaruvchi stavkalar bilan amalga oshirilsa, u holda jamg‘arilgan umumiy mablag‘

$$S = P(1+T_1 i_1)\cdot(1+T_2 i_2)\cdot ... \cdot(1+T_i i_i)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda i_i − “stavkalar”, T_i − ssuda muddatlari $(T_i = \frac{D_i}{Y};$ D_i − ssuda kunlarining soni, $Y = 360$ yoki $Y = 365)$.

Agar ustama foizning muddatlari va vaqt bo‘yicha foiz stavkalar o‘zgarmasa, u holda $S = P(1+Ti)^m$, bu yerda m – pul tushimining takrorlanishlar soni.

1.4. Diskont va hisob stavkasi

Turli moliyaviy operaysiyalarda qimmatbaho qog‘oz kursini tovar narxidan chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan pul miqdori diskont deyiladi.

Aytaylik, 100 ming so‘mlik vekselni 5 oy muddatga olgan shaxs, pul zarurligidan vekselni sotib olgandan 2 oy o‘tgach bankka qaytarib sotdi. Endi bank bu shaxsga 100 ming so‘m emas, to‘lov muddatini hisobga olgan holda, masalan, 94 ming so‘m to‘laydi. Bunday holda diskont qiymati 100 – 94 = 6 ming so‘m yoki veksel narxining 6%ini tashkil etadi. Ya’ni bankning hisob stavkasi 3 oy uchun 6%ni tashkil etadi deb aytamiz.

Umumiy holda berilgan muddat uchun hisob stavkasi deb, vekselni to‘liq narxi va uni sotib olish narxi ayirmasining, ya’ni diskontni uning to‘la narxiga nisbatiga aytiladi.

$$d = \frac{D}{S} = \frac{S-P}{S}, \qquad (1.4.1)$$

bunda S – to‘lov uchun berilgan qarz miqdori; P – sotib olish narxi; D – diskont kattaligi.

Ma’lumki, diskont va hisob stavkasi hamda sotib olish narxining qiymatlari berilgan qarz muddatining uzunligiga bog‘liq bo‘lganligi uchun (1.4.1) formulani qat’iy holda

$$d_1 = \frac{D_1}{S} = \frac{S-P_1}{S} \qquad (1.4.2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu formuladan

$$D_1 = S \cdot d_1, \qquad (1.4.3)$$

$$P_1 = S \cdot (1 - d_1) \qquad (1.4.4)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Banklar odatda, ya’ni ma’lum fiksirlangan muddatda, hisob stavkasini qoidaga ko‘ra bir yilga ko‘rsatishadi. Bunday hisob stavkasi yillik hisob stavkasi deyiladi.

Ma’lum muddat uchun hisob stavkasi va yillik stavka orasidagi bog‘lanish ushbu formuladan topiladi.

$$d_t = d \cdot t \qquad (1.4.5)$$

bunda d − yillik hisob stavkasi; t – to‘lovgacha qolgan yillardagi muddat. Shunday qilib, yuqoridagi formulalar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$D_t = S \cdot d \cdot t \qquad (1.4.6)$$

$$P_t = S \cdot (1 - d \cdot t) \qquad (1.4.7)$$

(1.4.5 – 1.4.7) formulalar yordamida aniqlanadigan hisob stavkasi oddiy va bank diskonti deb yuritiladi. $V_t = 1 - d \cdot t$ kattalik t muddat uchun d hisob stavkasi bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi deyiladi.

9-misol. Agar bankning hisob stavkasi to‘lovgacha qolgan 4 oy muddat uchun veksel narxining 8% ini tashkil etsa, yillik hisob stavkasi va to‘lovgacha bo‘lgan oy uchun vekselning narxini toping. Vekselning belgilangan muddat uchun narxi 100 ming so‘m.

Yechish: (1.4.5) formuladan

$$d = \frac{d_1}{t} = {}^{8}\!/_{1/3} = 24\%,$$ bu yerda $t = 4$ oy yoki $t = 1/3$.

Vekselning narxi $P = S \cdot (1 - d \cdot t) = 100 \cdot (1 - 24/100 \cdot 1/3) = 92$ ming so‘m.

10-misol. Veksel 2013 yil 10 yanvarda chiqarilgan bo‘lib, to‘lov muddati 2013 yil 10 oktyabrgacha. Veksel bo‘yicha yillik kirim 12%. Agar veksel 2013 yil 10 mayda 10% hisob stavkasi bo‘yicha hisobga olingan bo‘lsa, u holda vekselni sotib olish narxi qancha? To‘lovgacha bo‘lgan muddat uchun vekselning hisob narxi 100 ming so‘m.

Yechish: 2013 yil 10 yanvardan 10 oktyabrgacha aniq kunlar soni (Ilova 1) jadval bo‘yicha $283 - 10 = 273$ kun. To‘lov muddatining yillardagi uzunligi $T = \frac{273}{360} = 0{,}75$ yil. U holda vekselning umumiy narxi $S = P \cdot (1 + i \cdot T) = 100 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 0{,}75) = 109$ ming so‘m.

Agar veksel 10 maydan hisobga olinsa, u holda to‘lovgacha bo‘lgan muddat $283 - 130 = 153$ kun bo‘ladi yoki $t = \frac{153}{360} = 0{,}42.$

Bunday holda $d = 10\%$ hisob stavkasi bo‘yicha vekselning yillik hisob narxi $P = S \cdot (1 - d \cdot t) = 109 \cdot (1 - 0{,}1 \cdot 0{,}42) = 104{,}422$ ming so‘m.

1.5. Hisob va foiz stavkalarining ekvivalentligi

Diskont va diskont stavkasi ham, foiz va foiz stavkasiga o‘xshagan kredit operatsiyalarining parametrlari kabi bo‘ladi, lekin hisob sxemalarining yo‘nalishi bo‘yicha farq qiladi. Foizni va foiz stavkasini hisoblashda boshlang‘ich narx (joriy) tayanch kattalik bo‘lib, diskont va hisob stavkasini hisoblashda esa oxirgi jamg‘arma miqdori tayanch kattalik bo‘lib xizmat qiladi. Endi yuqorida aytilgan gaplar uchun quyidagi tengliklarni yozamiz. $T = t_2 - t_1$ davr uchun foizlar $I_T = S - P$ ni tashkil etadi. Bu davr uchun foiz stavkasi $i_T = \frac{I_T}{P} = \frac{S-P}{P}$, ikkinchi tomondan shu davr uchun hisob stavkasi esa $d_T = \frac{D_T}{S} = \frac{S-P}{S}$. Shunday qilib, ixtiyoriy t davr uchun foiz va hisob stavkasi ikkita boshlang‘ich (P) va oxirgi (S) jamg‘armalarni o‘zaro bog‘laydi, ya’ni

$$S = P \cdot (1 + it) \tag{1.5.1}$$

$$P = S \cdot (1 - dt) \tag{1.5.2}$$

Bu munosabatlardan

$$(1 + it) \cdot (1 - dt) = 1 \tag{1.5.3}$$

yoki

$$1 - dt = \frac{1}{1 + it}$$

kelib chiqadi, bundan i_t va d_t larni bog‘lovchi tengliklarni olamiz:

$$dt = \frac{it}{1 + it} \tag{1.5.4}$$

va

$$it = \frac{dt}{1 - dt} \tag{1.5.5}$$

Agar it va dt lar i va d yillik stavkalarga mos keluvchi oddiy foiz va hisob stavkalari, ya’ni $t = 1$ va $d_t = d \cdot t$ bo‘lsa, u holda bir yil uchun

$$d = \frac{i}{1+i}, \tag{1.5.6}$$

$$i = \frac{d}{1-d} \tag{1.5.7}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Bu munosabatlar diskont haqida yana bir talqin berish imkonini beradi. Aytaylik, birlik jamg'arma *i* foiz stavkasi bo'yicha investitsiya qilinayotgan bo'lsin. U holda yil oxirida bu jamg'arma foizlari i ni tashkil etadi, bu kattalikning joriy qiymati esa

$$\frac{i}{1+i} = d$$

ga teng bo'ladi. (1.5.7) formula ham xuddi shuni beradi: $(1-d)\cdot i = d.$ Boshqacha aytganda diskontga ham foiz kabi qarash mumkin, lekin bunda yil oxirida emas, balki yil boshida to'lanadi, shuning uchun ba'zan diskont stavkasini oldindan beriladigan foiz stavkasi deb yuritiladi.

Foiz stavkasi va hisob stavkalari kredit operatsiyalarining turli ikki tomonini ifoda etadi. (1.5.4–1.5.5) formulalar bu kattaliklardan ixtiyoriy bittasini bitta davr uchun topish imkonini beradi. Ayrim hollarda bu formulalarni hisob va foiz stavkalarining ekvivalentlik shartlari deb yuritiladi.

$P = S\cdot(1-d\cdot t)$ formula hisob stavkasidan kelib chiqib joriy qiymatni hisoblashning yana boshqa usulini beradi.

Agar i – *t* muddatga mos keluvchi foiz stavkasi bo'lsa, u holda $P = \frac{S}{1+i\cdot t}$ formula xuddi shu natijani beradi, ya'ni *i* va *d* ning ekvivalentligi $\frac{i}{1+i\cdot t} = 1-d\cdot t$ tenglikning bajarilishini bildiradi.

11-misol. 100 ming so'mning bir yildan so'ng olinadigan a) foiz stavkasi 8%; b) hisob stavkasi 8% bo'lgan holdagi joriy qiymati topilsin.

Yechish: a) 8% li foiz stavkasi uchun $S=100$ ming so'm, $i=0{,}08,$ $t=1$ yil. $P = \frac{S}{1+i\cdot t} = \frac{100}{1+0{,}08} = 92{,}59$ ming so'm.

b) 8% li hisob stavkasi uchun $S=100$ ming so'm, $d=0{,}08,$ $t=1$ yil. $P = S\cdot(1-d\cdot t) = 100(1-0{,}08) = 92$ ming so'm.

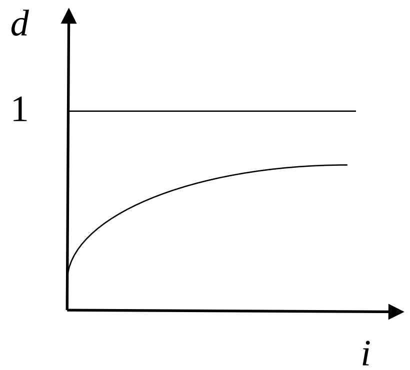
12-misol. Faraz qilaylik, oddiy yillik foiz stavkasi 12% bo‘lsin, a) bir oy; b) yarim yil muddatlar uchun ekvivalent yillik hisob stavkalari topilsin.

Yechish: a) bu holda $i = 0{,}12,\ t = 1/12, \quad d \cdot t = \dfrac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}$ tenglamadan

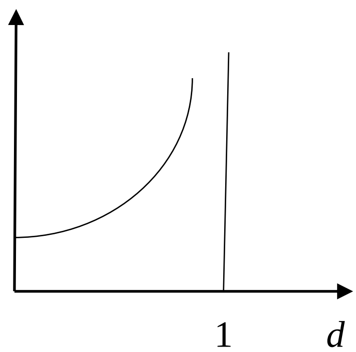
$$d = \frac{i}{1 + i \cdot t} = \frac{0{,}12}{1 + 0{,}12 \cdot 1/12} = \frac{0{,}12}{1 + 0{,}01} = 0{,}118.$$

b) bu yerda $i = 0{,}12,\ t = 6/12 = 0{,}5, \quad d = \dfrac{i}{1 + i \cdot t} = \dfrac{0{,}12}{1 + 0{,}12 \cdot 0{,}5} = \dfrac{0{,}12}{1{,}06} = 0{,}113.$

Bir yillik davr uchun $d = d(i)$ va $i = i(d)$ grafiklarni keltiramiz.



3-rasm.



4-rasm.

Endi oddiy foizda o‘zgaruvchi stavkalarni ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, inflyatsiya oddiy foiz stavkasini tez-tez o‘zgartirib turadigan bo‘lsin. $(t_\circ;\ t_\circ + T)$ davr uchun shartnomada vaqtning $t_1 < t_2 \ldots < t_{m-2} < t_{m-1}$ momentlarida yillik stavkalar $m-1$ marta o‘zgaradigan bo‘lsin. $t_\circ + T = t_m$ deb belgilab shartnoma davri $(t_\circ;\ t_m)$ni o‘zgarmas yillik stavkalarda m ta intervallarga shunday bo‘lamizki, $(t_\circ;\ t_1)$ intervalda foiz stavkasi $j_\circ$, $(t_1; t_2)$ ga $j_1, \ldots, (t_{m-1}; t_m)$ intervalda foiz stavkasi j_{m-1} ga teng bo‘lsin.

Quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema: Agar boshlang‘ich jamg‘arma $S(t_\circ)$ yuqorida ko‘rsatilganidek, o‘zgaruvchi yillik foiz stavkalarda oddiy foizga qo‘yilgan bo‘lib, oraliq operatsiyalar mavjud bo‘lmasa, u holda har bir $(t_\circ; t_m)$ intervaldagi o‘sish koeffitsiyenti

$$A(t_\circ; t_m) = \frac{S(t_m)}{S(t_\circ)} = 1 + \sum_{S=0}^{m-1} (t_{S+1} - t_S)\, j_S$$

dan iborat bo‘ladi.

Isbot: (1.1.2) formulaga asosan

$$S(t_m) = S(t_\circ) + I(t_\circ, t_m, S(t_\circ)), \qquad (*)$$

bu yerda $I(t_\circ, t_m, S(t_\circ))$ boshlang‘ich jamg‘arma $P = S(t_\circ)$ ning $(t_\circ; t_m)$ intervaldagi orttirmasi, $I(t_\circ; t_m) = \dfrac{I(t_\circ, t_m, S(t_\circ))}{S(t_\circ)}$ esa nisbiy orttirmasi.

Biz bilamizki, boshlang‘ich jamg‘arma $S(t_\circ)$ ni har bir $(t_S; t_{S+1})$ intervaldagi oddiy foiz bo‘yicha o‘sishi boshqa intervaldagi foiz o‘sishiga bog‘liq bo‘lmaydi. $(t_S; t_{S+1})$ intervaldagi absolyut orttirmasini $I(t_\circ; t_m, S(t_\circ))$, nisbiy orttirmasini esa $i(t_S; t_{S+1}) = \dfrac{I(t_S, t_{S+1}, S(t_\circ))}{S(t_\circ)}$ bilan belgilaymiz. U holda har bir $(t_\circ; t_m)$ intervaldagi absolyut orttirma har bir qism intervallardagi absolyut orttirmalar yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$I(t_\circ, t_m, S(t_\circ)) = \sum_{S=0}^{m-1} I(t_S, t_{S+1}, S(t_\circ)), \qquad (a)$$

bu formulaning ikkala qismini $S(t_\circ)$ ga bo‘lib, $i(t_\circ, t_m) = \sum\limits_{S=0}^{m-1} i(t_S, t_{S+1})$ ni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, $(t_\circ; t_m)$ intervaldagi nisbiy orttirma har bir qism intervallardagi nisbiy orttirmalar yig‘indisiga teng bo‘ladi (oddiy foizlar bo‘yicha)

$$I(t; S(0)) = S(0) \cdot i \cdot t$$

formula asosan har qanday $S = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ uchun

$$i(t_S, t_{S+1}) = (t_{S+1} - t_S) \cdot j_S. \qquad (b)$$

Bundan (a) formulaga ko‘ra,

$$i(t_0, t_m) = \sum_{S=0}^{m-1} (t_{S+1} - t_S) \cdot j_S, \qquad (v)$$

(b) formula geometrik nuqtai nazardan, asoslari (t_S, t_{S+1}) va balandliklari j_S bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzini ifodalaydi (5-rasm). Demak,

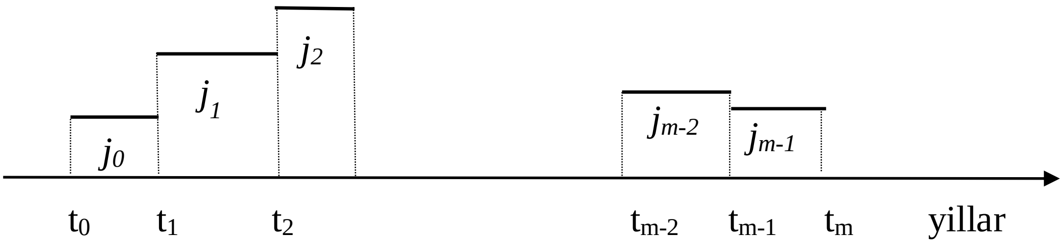
$$I(t_\circ, t_m, S(t_\circ)) = S(t_\circ) \sum_{S=0}^{m-1} (t_{S+1} - t_S) \cdot j_S.$$

Bu formulani (*) ga qo‘yib,

$$S(t_m) = S(t_\circ) + S(t_\circ)\sum_{S=0}^{m-1}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S$$

yoki $A(t_\circ, t_m) = \dfrac{S(t_m)}{S(t_\circ)} = 1 + \sum\limits_{S=0}^{m-1}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S$ ni hosil qilamiz.

Teorema isbot bo‘ldi.



5 – rasm.

13-misol. Birinchi yili 60%, keyingi har bir yarim yilda 10% dan ortib boradigan shartnoma asosida oddiy foiz bo‘yicha ko‘payadigan sxema asosida 2,5 yil uchun o‘sish koeffisiyenti topilsin.

Yechish: bu yerda dastlabki qism interval uzunligi 1 yildan, birinchi, ikkinchi, uchinchi qism intervallar uzunligi yarim yillardan iborat. Shartnomaga ko‘ra,

$$j_\circ = 0{,}60, \quad j_1 = 0{,}70, \quad j_2 = 0{,}80, \quad j_3 = 0{,}90.$$

Shuning uchun teoremaga asosan,

$$A(2,5) = 1 + \sum_{S=0}^{3}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S =$$
$$= 1 + 1\cdot 0,60 + 0,5\cdot 0,70 + 0,5\cdot 0,80 + 0,5\cdot 0,90 = 2,80.$$

Demak, vekselni belgilangan muddatdan oldin sotishda uning narxini belgilash uchun quyidagi teoremani isbotlash zarur.

Teorema. Vaqt uzunligi bir yilga teng bo‘lgan $(0,\ 1)$ intervalni qaraymiz va yillik hisob stavkasi d, bir yilning qismlaridagi vaqtni t, joriy (dastlabki) qiymat $P = S(0)$ ning orttirilgan (o‘sgan) qiymatini $S = S(1)$ bilan belgilaymiz. U holda $S(t)$ ning $t < 1$ bo‘lgandagi $S(1)$ va d bilan ifodalangan qiymati

$$S(t) = S(1)\cdot[1-(1-t)d], \quad 0 \le t \le 1 \qquad (**)$$

formuladan iborat bo‘ladi.

Isbot. $S(t)$ ning $S(0)$ va i orqali ifodalangan (1.1.3) formulasiga koʻra,

$$S(t) = S(0)\cdot(1+i\cdot t)$$

tenglikni yozib, bu tenglikka

$S(0) = \dfrac{S(1)}{1+i}$, $\dfrac{1}{1+i} = 1-d$, $\dfrac{i}{1+i} = d$ ifodalarni qoʻyib,

$$S(t) = \frac{S(1)}{1+i}(1+t\cdot i) = S(1)\cdot(1/1+i + t\cdot i/1+i = S(1)\cdot(1-d+t\cdot d) =$$

$$= S(1)[1-(1-t)d]$$

ni hosil qilamiz. Teorema isbot boʻldi.

Shunday qilib, agar t ga bogʻliq holda muddat belgilanishidan shartnomaga qadar vaqt oraligʻida $S(0)$ ni $I(t) = S(0)\cdot t\cdot i$ miqdorga ortishi natijasida hosil qilingan jamgʻarma $S(t)$ boʻlsa, u holda $S(1)$ dan $D(1-t) = S(1)\cdot(1-t)d$ diskontni ushlab qolish natijasida $S(t)$ hosil qilinadi.

Ushbu vekselni qaraylik:

2000 doll. 1- sentyabr 2014 -yil. London.. 60 kundan soʻng koʻrsatilgan sanada Janob A. ning taklifiga binoan 2000 doll. ni 11% yillik foiz stavkasi boʻyicha toʻlashni boʻynimga olaman. Imzo Janob B.

Vekselning nominal (dastlabki) qiymati 2000 doll. Real qiymati esa $2000\cdot(1+0{,}11\cdot 60/365) = 2036{,}16$ dollar. Toʻlash muddati 2014-yil 31-oktyabrda tugaydigan taqdirda ham uni diskont bilan muddatidan oldin sotish mumkin.

Aytaylik, Janob A. vekselni bankka 2014-yil 2-oktyabrda yillik hisob stavkasi 9,5% boʻlgan diskont bilan sotishni rejalashtirdi. Bank qanday narxda sotib olishni va Janob A. ning hamda bankning bu operatsiyadan koʻrgan foydasini hisoblaylik. Bunday holda vekselni sotishgacha 29 kun qolgan boʻladi.

Demak, $2036{,}16\cdot(1-29/365\cdot 0{,}095) = 2020{,}79$ doll. Shuning uchun Janob A. va bank uchun foyda normasi mos ravishda quyidagi koʻrinishlarda boʻladi:

$$\frac{2020{,}79-2000}{2000}\cdot\frac{365}{31}\cdot 100=12{,}24\%,$$
$$\frac{2036{,}16-2020{,}79}{2020{,}79}\cdot\frac{365}{29}\cdot 100=9{,}57\%.$$

$[1-(1-t)d]$ kattalik diskont koeffitsiyenti deyiladi. Bu ifoda manfiy bo‘laolmaydi. Shuning uchun

$$d\le\frac{1}{1-t}, \qquad 0\le t<1$$

munosabat bajariladi. Bu munosabat shuni ko‘rsatadiki, vekselni hisobga olishda uni sotish muddatiga uzoq vaqt qolgan holda katta ***d*** diskont bilan to‘lash ayrim hollarda vekselni 0 yoki manfiy (zarar ko‘rish) narxda sotishga olib kelishi mumkin. Masalan, $d=200\%$ va $t=0{,}5$ bo‘lsa, vekselni hisobga olishda hech narsa bermaydi.

I bobga doir masalalar

1. 500 million so‘m miqdordagi depozit bankka 3 yil muddatga qo‘yilgan. Agar yillik foiz stavkasi 80% bo‘lsa, oddiy foiz bo‘yicha jamg‘arilgan pul miqdorini toping.

2. Investor 100 mln. so‘mni jamg‘arish uchun 15% li yillik oddiy foiz stavkasi bo‘yicha qanday miqdordagi pulni 5 yilga qo‘yishi kerak.

3. 25 million so‘mning bir yildan so‘ng olinadigan hisob stavkasi 10% bo‘lgan holdagi joriy qiymatini toping.

4. Omonatchi 50 million so‘mni 100 mln. so‘m qilish maqsadida bankka 60% li oddiy foiz stavkasi bo‘yicha qo‘ydi. Bu pulni olish uchun qancha kun kerak bo‘ladi?

5. Vekselning nominal narxi 500 ming so‘m bo‘lib, muddat tugashiga 90 kun qolganda 16% hisob stavkasi bo‘yicha hisobga olindi. Vekselning diskontirlangan qiymati va diskont qiymatini toping?

6. Tijorat banki tomonidan berilgan veksel bo‘yicha veksel egasi bir yildan so‘ng 220 ming so‘m olishi ma’lum bo‘lsa, vekselni sotib olishda bankka qancha pul berilgan. Vekselning daromadliligi 120%.

7. Firma bankdan 8 mln. so‘m ssudani yarim yilga olganligi ma’lum bo‘lib, qarz miqdori 10 mln. so‘mni tashkil etgan bo‘lsa, foiz stavkasi qanday bo‘lgan?

8. Agar bankning hisob stavkasi to‘lovgacha qolgan 4 oy muddat uchun veksel narxining 10%ini tashkil etsa, yillik hisob stavkasi va to‘lovgacha bo‘lgan oy uchun vekselning narxini toping. Vekselning belgilangan muddat uchun narxi 120 ming so‘m.

9. Firma 100 mln. so‘m miqdorda qarz olishni rejalashtirmoqda. Bankning yillik foiz stavkasi 30%. Firma qaytarishi kerak bo‘lgan pul miqdori 150 mln. so‘m bo‘lsa, firma qarzni qancha muddatga olishi lozim bo‘ladi?

10. Firma o‘zgaruvchi stavkalar bilan bir yilga 10 mln. so‘m qarz oldi. Birinchi yarim yil uchun 20%, qolgan yarim yilning 4 oyi uchun 15% va qolgan 2 oy uchun 40% stavka bo‘yicha qarz to‘lanishi ma’lum. Bir yil mobaynidagi oddiy foiz bo‘yicha umumiy qarz miqdorini toping.

II bob. MURAKKAB FOIZLAR

2.1. Yillik murakkab foizlar

Aytaylik, omonatga qo‘yilgan pul uchun bank yiliga i foiz stavkasi bo‘yicha to‘laydigan va bu stavka ikki yil davom etadigan bo‘lsin. Berilgan $t_0 = 0$ vaqtda omonat egasi boshlang‘ich $S(0)$ omonat bo‘yicha hisob ochishi va uni to‘ldirishi yoki xohlagan paytda hisobni yopishi mumkin.

Agar omonat egasi bir yildan so‘ng hisobni yopgan bo‘lsa, u holda quyidagi miqdorda pul oladi

$$S(1) = S(0) \cdot (1+i) \tag{2.1.1}$$

Faraz qilaylik, omonat egasi bu pulni yana bir yilga qo‘ygan bo‘lsin. U holda ikkinchi yil oxirida

$$S(2) = S(1) \cdot (1+i) = S(0) \cdot (1+i)^2 = S(0) \cdot (1+2i+i^2) \tag{2.1.2}$$

miqdorda pul oladi.

Agar omonat egasi o‘z omonatini oddiy foizga qo‘yganda edi, u holda omonatchi $S(0) \cdot i^2$ ga kam bo‘lgan pulni, ya’ni $S(0) \cdot (1+2i)$ miqdordagi pulni olgan bo‘lardi. Bu qo‘shimcha $[S(0) \cdot i]i$ ga o‘sishni, ikkinchi yil oxirida birinchi yil uchun foizlar $S(0) \cdot i$ miqdorga qo‘shilgan foydaga nisbatan qo‘shib berishni, ya’ni ikkinchi yilga reinvestrlashni ifodalaydi. Qo‘shilgan foydaning boshlang‘ich pul miqdori bilan birlashmasini foizlarni kapitallashtirish deyiladi.

Yiliga bir marta foizlar kapitallashtiriladigan hol uchun o‘sish qiymatini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik, $S(0)$ boshlang‘ich pul miqdori i yillik foiz stavkasi bo‘yicha n yilga qo‘yilgan bo‘lib, bu davrda hech qanday pul qo‘shilmagan va olinmagan bo‘lsin. Bunday holda birinchi yil oxirida foizlar $S(0) \cdot i$ ga, o‘sish miqdori esa

$$S(1) = S(0) + S(0) \cdot i = S(0)(1+i)$$

ga teng bo‘ladi. Ikkinchi yil oxirida o‘sish miqdori

$$S(2) = S(0)(1+i)^2$$

va n - yil oxirida o‘sgan (ortgan) umumiy pul (jamg‘arma) miqdori

$$S(n) = S(n-1) + S(n-1)i = S(n-1)(1+i)$$

ga teng bo‘ladi. $S(n-1)$ ni $S(n-2)$, $S(n-2)$ni $S(n-3)$ va h.k orqali ifodalab,

$$S(n) = S(0)\cdot(1+i)^n, \qquad n = 1,2,...$$

(2.1.3)

formulani, ya’ni i yillik stavkaga ega bo‘lgan murakkab foiz bo‘yicha o‘sish qiymatini yozamiz:

$$\frac{S(n)}{S(0)} = (1+i)^n. \tag{2.1.4}$$

Bu nisbat o‘sish koeffitsiyenti deb yuritiladi. Uni $A(0,n)$ bilan belgilaymiz:

$$A(0,n) = \frac{S(n)}{S(0)} = (1+i)^n$$

(2.1.3) formula faqat n ning butun qiymatlarida o‘rinli ekanligini ko‘rsatgan edik, endi bu formulani n ning barcha nomanfiy qiymatlarida ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni (2.1.3) formulani umumlashtiramiz.

Buning uchun investitsiya muddatini va vaqtni yillarda o‘lchab, t muddat uchun dastlabki $S(t_0)$ jarg‘armaning o‘sish qiymatini yozamiz:

$$S(t) = S(t_0)\cdot(1+i)^{t-t_0}, \qquad t \geq t_0, \tag{2.1.5}$$

(t_0,t) intervaldagi o‘sish koeffitsiyenti

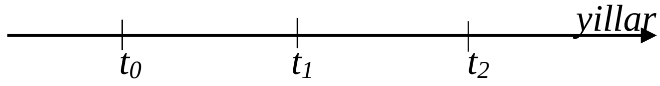
$$A(t_0,t) = (1+i)^{t-t_0}, \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.6}$$

Agar $t = t_0$ bo‘lsa, barcha i larda $A(t_0,t) = 1$ bo‘ladi. Agar $t_0 = 0$ va $t = n$ bo‘lsa, bu formulalar mos ravishda (2.1.3) va (2.1.4) formulalar bilan bir xil bo‘ladi.

Teorema (bozorning barqarorlik prinsipi).

Agar soliq va boshqa xarajatlar hisobga olinmasa, u holda qandaydir oraliqda o‘sish koeffitsiyenti shu intervalning tashkil etuvchilaridan iborat bo‘lgan qism intervallaridagi o‘sish koeffisientlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Isbot. Soddalik uchun (t_0,t_2) intervalni (t_0,t_1) va (t_1,t_2) qism intervallarga ajratamiz.



$$A(t_0,t_2)=\frac{S(t_2)}{S(t_0)} \Leftrightarrow S(t_2)=S(t_0)\cdot A(t_0,t_2) \qquad (2.1.7)$$

Ikkinchi tomondan

$$S(t_1)=S(t_0)\cdot A(t_0,t_1),$$

$$S(t_2)=S(t_1)\cdot A(t_1,t_2)=S(t_0)\cdot A(t_0,t_1)\cdot A(t_1,t_2) \qquad (2.1.8)$$

(2.1.7) va (2.1.8) lardan

$$A(t_0,t_2)=A(t_0,t_1)\cdot A(t_1,t_2)\,. \qquad (2.1.9)$$

Yuqoridagi teorema moliyaviy operatsiyalarda taqriban o‘rinli bo‘ladi, chunki bunda soliqlar, shartnomalarni qayta ko‘rib chiqish va boshqa faktorlar hisobga olinmaydi.

Endi bir yil mobaynida ustama haq yozilishining bir nechta davrlarini ko‘rib chiqaylik. Ustama haq yozilishining bir yildan kichik bo‘lgan davrini qaraymiz. Aytaylik, bir yil mobaynida m marta ustama haq yoziladigan bo‘lsin. Ko‘p uchraydigan ustama haq yozilish davrlari va unga mos m ning qiymatlari ushbu jadvalda berilgan:

Ustama haq yozilish davri	1 yil	1 hafta	1 oy	2 oy	3 oy	4 oy	6 oy	12 oy
m	365	52	12	6	4	3	2	1

Faraz qilaylik, g_m - bir yilda m marta ustama haq yozilishdagi murakkab foiz stavkasi bo‘lsin. U holda n yil uchun ustama haq yozilish davrlarining soni $m{\cdot}n$ bo‘ladi. (2.1.4) formulaga asosan

$$A(0,n)=(1+g_m)^{mn}, \qquad n=1,2,... \qquad (2.1.10)$$

Buni quyidagicha umumlashtirish mumkin:

$$A(t_0,t_0+T)=(1+g_m)^{mT}\ , \qquad T\geq 0\,. \qquad (2.1.11)$$

Kelajakdagi pul miqdorining boshlang‘ich narxini hisoblash operatsiyasi matematik diskontirlash deyiladi.

$$S(t_0)=\frac{S(t_0+T)}{1+i(t_0)T},$$

bunda $S(t_0)$ - t_0 vaqtda investitsiya qilinadigan boshlang‘ich pul miqdori; $S(t_0+T)$ - T vaqt o‘tgandan keyingi pul miqdori; $i(t_0)$ - t_0 vaqtdagi foiz stavkasi; $\frac{1}{1+i(t_0)T}$ - diskont ko‘paytuvchisi.

1-misol. Investor yarim yilda 200 mil. so‘m pul olishi uchun yiliga 50% to‘laydigan korxonaga qancha pul o‘tkazishi lozim?

Yechish: $S(0)=\frac{200000000}{1+0{,}5\cdot 0{,}5}=160000000$ (so‘m).

2-misol. Boshlang‘ich omonat $S(0)=250$ mil. so‘m pul 4 yil muddatga 35% stavka bo‘yicha murakkab foizga qo‘yilgan. Jamg‘arilgan oxirgi pul miqdorining yillar bo‘yicha qanday o‘zgarishi qanday bo‘ladi:

Katta inflyatsiya davrlarida omonatchi bilan kelishgan holda bank o‘zining murakkab foiz bo‘yicha stavkalarini tez-tez o‘zgartirib turadi. Bunday holdagi o‘zgarib turuvchi stavkalarni murakkab foizning qalqib turuvchi stavkalari deb yuritiladi. Bu holda qo‘shilgan umumiy pul miqdorini aniq hisoblab bo‘lmaydi. Ba’zi hollarda ustama haq yozilishining biridan ikkinchisiga o‘tishi shartnomada qarab chiqiladi (oldindan foiz stavkalarini belgilagan holda). Agar kelishilgan holdagi foiz stavkalari $j_1, j_2, ..., j_k$ va shu stavkalar bo‘yicha ustama haq yozilish davrlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ bo‘lsa, u holda butun davr mobaynidagi jamg‘arma koeffitsiyenti

$$(1+j_1)^{n_1}\cdot(1+j_2)^{n_2}\cdot ...\cdot(1+j_k)^{n_k} \quad (2.1.12)$$

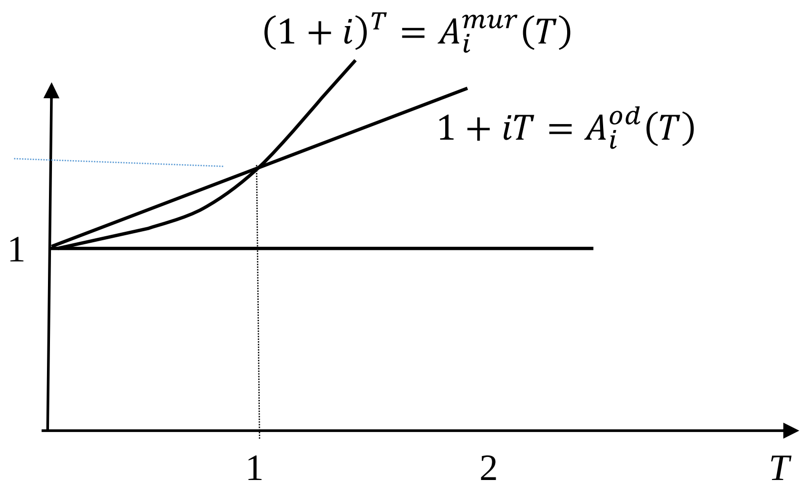
formuladan topiladi.

2.2. Oddiy va murakkab foizlarni taqqoslash

Oddiy va murakkab foizlar bo‘yicha jamg‘arma koeffitsiyent-larini taqqoslaymiz. Quyidagi jadvalda yillik 8% stavka va 365 kun tayanch vaqt uchun oddiy va murakkab foizlar bo‘yicha jamg‘arma koeffitsiyentlari keltirilgan:

Jamg‘arma Koeffisiyenti	Ssuda muddati						
	30 kun	180 kun	1 yil	5 yil	10 yil	50 yil	100 yil
$1+iT$	1,00657	1,0394	1,08	1,40	1,80	5,0	9,0
$(1+i)^T$	1,00635	1,0392	1,08	1,47	2,16	46,9	2200

6-rasmda T muddatga bog‘liq bo‘lgan jamg‘arma koeffitsiyentlarining grafiklari bir xil yillik i stavka bilan oddiy va murakkab foizlar uchun berilgan.



6-rasm

Agar $T=1$ bo‘lsa, jamg‘arma koeffitsiyentlari ustma-ust tushadi va $1+i$ ga teng. Har qanday i da T kattalikka bog‘liq bo‘lgan quyidagi ikkita qarama-qarshi tengsizliklar o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

$$1+iT > (1+i)^T, \text{ agar } 0 < T < 1 \text{ bo‘lsa,} \qquad (2.2.1)$$

$$1+iT < (1+i)^T, \text{ agar } T > 1 \text{ bo‘lsa.} \qquad (2.2.2)$$

Bu tengsizliklar Bernulli tengsizligining o‘zginasidir. Ularning to‘g‘riligini isbotlash uchun hosiladan foydalanamiz. Buning uchun

$$f(i) = 1 + iT - (1+i)^T$$

Belgilash kiritib, i bo‘yicha f dan hosila olamiz.

$$f'(i) = T - T(1+i)^{T-1} = T(1-(1+i)^{T-1}).$$

Agar $0 < T < 1$ bo‘lsa, $f'(i) > 0,$ ya’ni $f(i)$ funksiya o‘suvchi, agar $T > 1$ bo‘lsa $f'(i) < 0,$ ya’ni funksiya kamayuvchi bo‘ladi. Bulardan yuqoridagi tengsizliklarning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi bir xil i foiz stavkasida boshlang‘ich pul miqdorining ikki marta ko‘payishini oddiy va murakkab foizlar uchun ko‘ramiz. Har ikkala hol uchun jamg‘arma koeffitsiyentlarini ikkiga tenglashtirib,

$$1 + iT_2 = 2, \quad T_2^{od} = \frac{1}{i} \text{ (oddiy foiz uchun)}$$

$$(1+i)^{T_2} = 2, \; T_2^{mur} = \frac{ln\,2}{ln(1+i)} \text{ (murakkab foiz uchun)}$$
tengliklarni hosil qilamiz.

Endi ustama haq to‘lash davri T ning butun bo‘lmagan qiymatidagi jamg‘armani hisoblashni ko‘raylik. Agar T butun bo‘lmasa,

$$T = [T] + \{T\},$$

bunda $[T]$ - T ning butun qiymati, $\{T\}$ - T ning kasr qismi. Bunday holda, birinchidan, jamg‘arma ushbu umumiy formula yordamida hisoblanadi:

$$S(T) = S(0)\cdot(1+i)^T, \quad T > 0. \qquad (2.2.3)$$

Ikkinchi tomondan, T ning butun qismida murakkab foiz bo‘yicha, kasr qismida esa oddiy foiz bo‘yicha foiz qo‘shilib boradi. Bunday holda

$$S(T) = S(0)\cdot(1+i)^{[T]}\cdot(1+\{T\}i), \quad T > 0. \qquad (2.2.4)$$

(2.2.1) tengsizlikka binoan, jamg‘arilgan pul miqdori (2.2.2) ga nisbatan (2.2.4) da ko‘proq bo‘ladi. Bu shuni ko‘rsatadiki, omonatchilar uchun (2.2.4) qulay, bank uchun esa (2.2.1) usul qulay.

2.3. Nominal va samarali foiz stavkalari

Inflyatsiya sharoitida foizlar bir yil mobaynida bir necha marta, bir kunda, haftada, har oyda, har kvartalda va h.k. o‘zgarib turadi.

Moliyaviy shartnomalarda, odatda yillik stavka belgilanadi va ustama haq to‘lash davrlar soni m ko‘rsatiladi.

Ta’rif. Agar yillik foiz stavka $i^{(m)}$ ga mos keluvchi $j_{\frac{1}{m}}$ foiz stavkasi davr uzunligi $T = \frac{1}{m}$ yildan iborat bo‘lgan ustama haq to‘lash davri uchun

$$j_{\frac{1}{m}} = \frac{i^{(m)}}{m}, \quad m = 1,2,3,... \qquad (2.3.1)$$

ni tashkil etsa, u holda bunday yillik $i^{(m)}$ foiz stavkasi nominal foiz stavkasi deyiladi.

Agar T investitsiya davri yillarda o‘lchansa, u holda jamg‘arma miqdori

$$S(T) = S(0)\cdot(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mT} \qquad (2.3.2)$$

dan iborat bo‘ladi, bunda mT – T yil mobaynidagi ustama haq to‘lash davrlarining soni.

Agar m qancha katta bo‘lsa, jamg‘arma koeffitsiyenti shuncha tez o‘sishi ko‘rinib turibdi, ya’ni

$$A(T) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mT}.$$

1-misol. 10 mln. so‘m 2 yilga 120% yillik stavka bo‘yicha investitsiya qilingan. Shu vaqt ichida jamg‘arilgan pul miqdori va uning ustama haq to‘lovining orttirmasi topilsin: a) har yilda; b) har yarim yilda; v) har kvartalda; g) har oyda.

Yechish: bu yerda $S(0)=10^7$ so‘m; $T=2$, $i^{(m)}=120\%$, $m=1, 2, 4, 12$.

Qo‘yilgan savolga javoblar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Hol	m	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{2m}$	$S(2)$ mln. so‘m	$I(2)=S(2)-S(0)$
a)	1	$(1+\frac{1,2}{1})^2 = 4,8400$	48,400	38,400
b)	2	$(1+\frac{1,2}{2})^4 = 6,5538$	65,536	55,536
v)	4	$(1+\frac{1,2}{4})^8 = 8,1573$	81,573	71,573
g)	12	$(1+\frac{1,2}{12})^{24} = 9,8497$	98,497	88,495

Biz, ustama haq to‘lash chastotasi m ning o‘sishi bilan jamg‘arma koeffitsiyentining, ya’ni absolyut yillik daromad o‘sishining guvohi bo‘lamiz. Real nisbiy daromadni taqqoslash uchun bir yil mobaynida bir va m marta ustama foiz to‘lashda yangi tushuncha – samarali foiz stavkasini kiritamiz.

Ta’rif. nominal $i^{(m)}$ stavka uchun i_{sam} – samarali yillik stavka bir yilga mos ravishda quyidagi ikkita jamg‘arma koeffitsiyentlarining tenglik shartidan topiladi:

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1+i_{sam}. \qquad (2.3.3)$$

Bundan $i^{(1)} = i_{sam} = j_1$ kelib chiqadi.
(2.3.3) dan yillik samarali stavka

$$i_{sam} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \qquad (2.3.4)$$

moliyaviy ma'no jihatidan, bir yilda m marta qo'llanadigan $\frac{i^{(m)}}{m}$ stavkaga ekvivalent bo'ladi.

Faraz qilaylik, bank murakkab foiz bilan 120% nominal stavka bo'yicha ustama haq to'laydigan bo'lsin. Bunday holda kundalik foizlarni kapitallashtirishdagi samarali stavka quyidagiga teng bo'ladi:

$$i_{sam} = (1+\frac{1{,}2}{365})^{365} - 1 = 1{,}00329^{365} - 1 = 2{,}316,$$

har oy uchun kapitallashtirishda esa

$$i_{sam} = (1+\frac{1{,}2}{12})^{12} - 1 = 1{,}10^{12} - 1 = 2{,}138.$$

Demak, bularning farqi ancha katta.

Amalda bir yilda m marta ustama haq to'lash AQSh da bevosita (2.3.2) formula bo'yicha amalga oshiriladi; Yevropa davlatlarida esa dastlab (2.3.4) formula bo'yicha i_{sam} hisoblanib, so'ngra jamg'arma miqdori

$$S(T) = S(0)\cdot(1+i_{сам})^T \qquad (2.3.5)$$

formuladan topiladi.

Agar shartnoma tuzishda i_{sam} va m berilgan bo'lsa, u holda $i^{(m)}$ nominal stavka

$$i^{(m)} = m[(1+i_{sam})^{\frac{1}{m}} - 1] \qquad (2.3.6)$$

formuladan hisoblanadi.

Ta'rif. Agar ikkita yillik nominal stavkalarga yillik samarali stavkalar mos tushsa, bunday yillik nominal stavkalar ekvivalent deyiladi.

$$\left(1+\frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}=1+i_{sam}. \qquad (2.3.7)$$

2-misol. Yarim yillik ustama foiz to‘lash bo‘yicha nominal foiz stavkasini, unga ekvivalent bo‘lgan har oyda ustama foiz to‘lanadigan 24% li nominal stavka bo‘yicha hisoblang.

Yechish: Shartga ko‘ra $i^{(12)}=0{,}24$, unga ekvivalent bo‘lgan $i^{(2)}$ ni topish kerak. Ta’rifga ko‘ra

$$\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}=\left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{12}=1{,}2682,$$

bundan

$$i^{(2)}=(\sqrt{1{,}2682}-1)\cdot 2=0{,}25=25\%.$$

Nyuton binomi yordamida samarali stavkaning taqribiy hisoblash formulasini yozishimiz mumkin:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3+\ldots+x^m=\sum_{s=0}^{m}C_m^s x^s, \qquad (2.3.8)$$

bu yerda m - butun musbat son, x - ixtiyoriy haqiqiy son,

$C_m^s=\dfrac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{s!}$ - binomial koeffitsiyent.

x ning kichik va m ning juda katta bo‘lmagan qiymatlarida (masalan, $x\le 0{,}10,\ m\le 6$) $(1+x)^m$ ning qiymatini quyidan baholash mumkin:

$$(1+x)^m\approx 1+mx+\frac{m(m+1)}{2}x^2. \qquad (2.3.9)$$

Bu formulani $i_{sam}=(1+\dfrac{i^{(m)}}{m})^m-1$ formulaga tatbiq etib, ushbu bahoga ega bo‘lamiz:

$$i_{sam}=i^{(m)}+\frac{m-1}{2m}[i^{(m)}]^2 \qquad (2.3.10)$$

Nyuton binomidagi tashlab yuborilgan barcha hadlar nomanfiyligini hisobga olib, barcha $m\ge 2$ uchun

$$i_{sam}\ge i^{(m)} \qquad (2.3.11)$$

tengsizlikni yozamiz.

2.4. Murakkab yillik hisob stavkasi

Agar oldindan belgilangan yillik murakkab stavka d ning qiymati murakkab foiz bo‘yicha i yillik stavkaga ekvivalent bo‘lsa, u holda d ni yillik murakkab hisob stavkasi deb yuritamiz.

Qaralayotgan bu sxema uchun t_0 momentda to‘lanadigan 1 pul birligiga, t_0-1 momentdagi to‘lanadigan $(1-d)$ pul birligiga yoki t_0-2 momentda to‘lanadigan $(1-d)^2$ va h.k pul birligiga ekvivalent bo‘ladi.

Haqiqatan, t_0 momentda jamg‘arilgan barcha to‘lovlar miqdori 1 pul birligiga teng:

$$1=(1-d)(1+i)=(1-d)^2(1+i)^2=\ldots=(1-d)^n(1+i)^n \qquad (2.4.1)$$

Umuman, har qanday $T>0$ uchun $t_0=0$ dan T momentga qadar 1 pul birligi

$$(1-d)^T(1+i)^T=1 \qquad (2.4.2)$$

ni tashkil etadi. Murakkab hisob stavkasi uchun hozirgi $t\in(0,T)$ momentdagi $S(t)$ pul miqdori keyin to‘lanadigan $S(T)$ miqdor bilan quyidagicha bog‘langan:

$$S(t)=S(T)(1-d)^{T-t},\ \ d<1, \qquad (2.4.3)$$

oddiy foiz uchun

$$S(t)=S(T)[1-(T-t)d],\quad (T-t)d<1. \qquad (2.4.4)$$

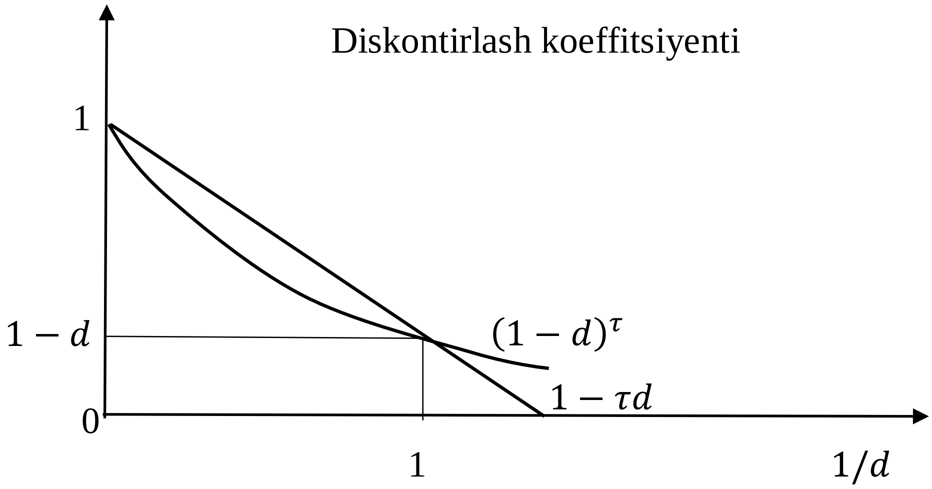
To‘lovga qadar vaqtni $\tau=T-t$ bilan belgilaymiz (τ - yillarda ifodalanadi). U holda diskont ko‘paytuvchi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\frac{S(T-\tau)}{S(T)}=\begin{cases}1-\tau d & \textit{oddiy hisob stavkasi uchun}\\ (1-d)^{\tau} & \textit{murakkab hisob stavkasi uchun}\end{cases} \qquad (2.4.5)$$

Quyidagi jadvalda $d=0{,}10$ va τ ning bir qancha qiymatlari uchun diskont ko‘paytuvchilarning qiymatlari keltirilgan.

	τ (yillarda)						
	$1/12$	$2/12$	$6/12$	1	2	5	10
$1-\tau d$	0,9917	0.9833	0,9500	0,9000	0,8000	0,5000	0
$(1-d)^{\tau}$	0,9913	0,9826	0,9487	0,9000	0,8100	0,5905	0,3487

Oddiy va murakkab foiz uchun diskont ko‘paytuvchining τ ga bog‘liq ravishda o‘zgarishi 7-rasmda ko‘rsatilgan.



7-rasm

Yuqorida nominal va samarali foiz stavkalari haqida tushuncha bergan edik, endi bu tushunchani diskont stavkalari uchun kiritamiz.

Ta’rif. Faraz qilaylik, diskontirlash bir yilda m marta amalga oshiriladigan bo‘lsin. Agar har bir davr boshida ustama haq to‘lash $\frac{d^{(m)}}{m}$ stavka bo‘yicha diskontirlash amalga oshiriladigan bo‘lsa, u holda murakkab yillik hisob stavkasi $d^{(m)}$ nominal deyiladi.

(2.4.3) formulaga o‘xshash nominal hisob stavkasi uchun hozirgi $t \in (0,T)$ momentdagi $S(t)$ pul miqdori va keyin to‘lanadigan $S(T)$ miqdor orasidagi bog‘lanish formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$S(t) = S(T)(1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{(T-t)m} \qquad (2.4.6)$$

Nominal $d^{(m)}$ hisob stavkasi uchun murakkab samarali hisob stavkasi d_{sam} ushbu tenglikdan topiladi.

$$1 - d_{сам} = (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{m} \qquad (2.4.7)$$

Aytaylik, $d^{(m)}$ - diskontning yillik hisob stavkasi, $i^{(m)}$ - nominal yillik foiz stavkasi bo‘lsin. Ustama haq to‘lashning boshlang‘ich davrida *S* so‘m investitsiya qilingan bo‘lsin deb hisoblaymiz, unda $\frac{Cd^{(m)}}{m}$ foiz qo‘shiladi, davr uzunligi $\frac{1}{m}$ ga teng bo‘lgan davr oxirida investor boshlang‘ich *S* so‘mni oladi. Faraz qilaylik, keyingi davrda $\frac{Cd^{(m)}}{m}$ so‘m investiysiya qilingan bo‘lsin, u holda investitsiya davrida $\frac{Cd^{(m)}}{m}\cdot\frac{d^{(m)}}{m}$ so‘m ustama pul qo‘shiladi, ustama pul to‘lashning oxirgi davrida investor $\frac{Cd^{(m)}}{m}$ so‘mni oladi va bu jarayonni cheksiz marta davom ettirish mumkin.

Bu nazariy sxema shuni ko‘rsatadiki, investitsiya qilingan *S* so‘m uchun $\frac{1}{m}$ yildan so‘ng quyidagi mablag‘ni olishi mumkin.

$$C + C\frac{d^{(m)}}{m} + C\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^2 + \ldots = \frac{C}{1-\frac{d^{(m)}}{m}}, \qquad (2.4.8)$$

bunda $d^{(m)} < m.$

Shuning uchun $\frac{1}{m}$ yil uchun jamg‘arma koeffitsiyentining $d^{(m)}$ orqali ifodasi

$$A\left(\frac{1}{m}, d^{(m)}\right) = \frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}},$$

$i^{(m)}$ orqali ifodasi esa

$$A\left(\frac{1}{m}, i^{(m)}\right) = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}, \quad m = 1,2,3,\ldots.$$

Agar

$$\frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{i^{(m)}}{m} \qquad (2.4.9)$$

tenglik bajarilsa, $d^{(m)}$ va $i^{(m)}$ stavkalar ekvivalent bo‘ladi.
(2.4.9) dan quyidagi moliyaviy interpretatsiyalarni hosil qilamiz:

$$d^{(m)} = i^{(m)}(1 - \frac{d^{(m)}}{m}) \qquad (2.4.10)$$

$$i^{(m)} = d^{(m)}(1 + \frac{i^{(m)}}{m}), \quad m = 1,2,3,\ldots, \qquad (2.4.11)$$

bu yerda, (2.4.10) dagi $d^{(m)}$ - kattalik $i^{(m)}$ to‘lovning narxini ifodalaydi. (2.4.11) dagi $i^{(m)}$ - kattalik esa $\frac{1}{m}$ yil davomida jamg‘arilgan $d^{(m)}$ to‘lovning narxini ifodalaydi.

(2.4.11) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}} \qquad (2.4.12)$$

(2.4.12) dan

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} + \frac{1}{m} \qquad (2.4.13)$$

ni hosil qilamiz, bundan

$$d^{(m)} < i^{(m)}, \quad m = 1,2,3\ldots \ . \qquad (2.4.14)$$

(2.4.13) dan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema: $m \to \infty$ da $d^{(m)}$ va $i^{(m)}$ stavkalar umumiy limitga ega, biz uni δ bilan belgilaymiz:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta \qquad (2.4.15)$$

Bu tabiiy natija, uzluksiz foiz to‘lashga o‘tganda, boshlang‘ich va oxirgi davrda ustama foiz to‘lashlar farqi yo‘qoladi.

$i = 6\%$ hol uchun $d^{(m)}$ va $i^{(m)}$ qiymatlarni jadvalda tasvirlaymiz:

	m					
	1	2	4	6	12	∞
$1-\tau\ d$	0,9917	0.9833	0,9500	0,9000	0,8000	0,5000
$(1-d)^{\tau}$	0,9913	0,9826	0,9487	0,9000	0,8100	0,5905

2.5. Valyutalar konversiyasi va foizlarni jamg‘arish

Pul resurslarining konversiya bilan va konversiyasiz foizlarini jamg‘arishning quyidagi to‘rtta varianti mavjud bo‘lishi mumkin:

Konversiyasiz: dollar $\rightarrow$ dollar;

Konversiyali: dollar $\rightarrow$ so‘m $\rightarrow$ so‘m $\rightarrow$ dollar;

Konversiyasiz: so‘m $\rightarrow$ so‘m;

Konversiyali: so‘m $\rightarrow$ dollar $\rightarrow$ dollar $\rightarrow$ so‘m.

Valyuta konversiyasi bilan jamg‘arish operasiyasining ikkita (kurs o‘zgarishi va foizlarni jamg‘arish) daromad manbai mavjud.

Ko‘p hollarda valyutalarni ikki karrali konvertirlash (operatsiyaning boshi va oxirida) noqulay sharoitda yutqazishga olib kelishi mumkin.

Shu bilan bog‘liq bo‘lgan ikkita masalani hal qilamiz. Operatsiya oxirida jamg‘arilgan pul miqdorini topamiz va uning daromadliligini konversiya bilan ikkita variant uchun aniqlaymiz:

1 – variant: dollar $\rightarrow$ so‘m $\rightarrow$ so‘m $\rightarrow$ dollar.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

P_v – dollardagi depozit mablag‘i (depozit - kredit muassasalariga saqlash uchun joylashtirilgan pul mablag‘lari yoki qimmatli qog‘ozlar);

P_c – so‘mlardagi depozit mablag‘lari;

S_v – dollardagi jamg‘arilgan pul miqdori;

S_c – so‘mlardagi jamg‘arilgan pul miqdori;

$k_\circ$ –operatsiya boshidagi almashtirish kursi (dollar kursining so‘mlardagi qiymati);

k_1 –operatsiya oxiridagi almashtirish kursi;

n - depozit muddati;

i - so‘mlar miqdori uchun jamg‘arma stavkasi;

j - dollar miqdori uchun jamg‘arma stavkasi.

Operatsiya uchta qadamni ko‘zda tutadi: valyutani so‘mga almashtirish, bu summaga qo‘yilgan jamg‘arma foizlar va nihoyat, dastlabki valyutaga konvertatsiya qilish, oxirgi jamg‘arilgan valyutadagi pul miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$S_v = P_v \; k_\circ \; (1+ni)\cdot 1/k_1 \qquad (2.5.1)$$

$$m = \frac{k_\circ}{k_1}(1+ni) = \frac{1+ni}{k_1 / k_\circ} \qquad (2.5.2)$$

(2.5.2) formula ikki karrali konvertirlashni hisobga olgandagi jamg‘arma ko‘paytuvchisini ifodalaydi. Stavkaning o‘sishi bilan jamg‘arma ko‘paytuvchisi chiziqli ortadi, o‘z navbatida esa oxirgi kursning o‘sishi uni kamaytiradi.

1-misol. 1000 dollarni so‘mlardagi depozitga joylashtirish ko‘zda tutilgan bo‘lsin. Depozit boshida 1 dollarni sotish kursi 2600 so‘m, operatsiya oxirida sotib olish kursi 2650 so‘mni tashkil etdi. Foiz stavkalari $i = 20\%$, $j = 15\%$. Depozit muddati 3 oy. Valyutadagi jamg‘arilgan oxirgi pul miqdori topilsin.

$$S_v = 1000 \cdot \frac{2600}{2650}(1 + 3/12 \cdot 20/100) = 1030{,}19.$$

O‘z navbatida dastlabki dollarning dollar stavkasidagi jamg‘arma qiymati

$$S_v = 1000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) = 1037{,}5.$$

Endi operatsiyaning daromadliligini o‘lchash masalasini ko‘rib chiqamiz. Operatsiya davomida daromadlilikni o‘lchash uchun oddiy yillik foiz stavkasi i_{sam} ni qabul qilamiz.

$$i_{sam} = \frac{S_V - P_v}{P_V n}$$

Bu formuladagi S_V o‘rniga uning (2.5.1) formuladagi qiymatini qo‘yamiz.

$$i_{sam} = \frac{[k_\circ / k_1 (1 + ni) - 1]}{n} = \frac{m-1}{n}$$

Valyuta kurslarini xarakterlovchi oxirgi va birinchi valyuta kurslari nisbatini $k = k_1 / k_\circ$ deb belgilaymiz. k $n$ing ortishi bilan operatsiyaning samaraliligi tushib ketadi. $k = 1$ bo‘lganda $i_{sam} = i$, $k > 1$ bo‘lganda $i_{sam} < i$. Pul egasi uchun eng yaxshi holat $k < 1$ bo‘lganda $i_{sam} > i$.

2 – variant. so‘m $\rightarrow$ dollar $\rightarrow$ dollar $\rightarrow$ so‘m.

Bunday holda

$$S_c = \frac{P_c}{k_\circ}(1+nj)k_1 = P_c(1+nj)\frac{k_1}{k_\circ} \qquad (2.5.3)$$

2-misol. 1 mln. so‘mni dollardagi depozitga joylashtirish lozim bo‘lsin. boshqa shartlar 1 – misoldagi kabi. Muddat oxiridagi so‘mlarda jamg‘arilgan pul miqdori topilsin.

$$S_c = 1000000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) \cdot 2650 / 2600 = 1070192$$

To‘g‘ridan-to‘g‘ri so‘mlardagi depozit bo‘yicha investitsiya qiymati

$$S_c = 1000000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}20) = 1050000.$$

Endi operatsiyaning samaraliligini tahlil qilaylik. Operatsiyaning daromadliligi

$$i_{sam} = \frac{S_c - P_c}{P_c n},$$

bundan

$$i_{sam} = (k_1 / k_\circ (1 + nj) - 1) / n = \frac{k(1 + nj) - 1}{n} \qquad (2.5.4)$$

Agar $k = 1$ bo‘lsa, $i_{sam} = j$, $k > 1$ da $i_{sam} > j$, $k < 1$ bo‘lsa, $i_{sam} < j$, xususiy holda $k = \frac{1}{1 + nj}$ bo‘lsa, u holda $i_{sam} < 0$, ya’ni operatsiya hech qanday daromad bermaydi.

2.6. Pul mablag‘larini jamg‘arishda soliq va inflyatsiyani hisobga olish

Oldingi bandlarda jamg‘arilgan pul miqdorlarini hisoblash usullarida soliqlar va inflyatsiya hisobga olinmagan edi. Endi bu miqdorlarni hisobga olganimizda jamg‘arma yig‘indisi qanday o‘zgarishini ko‘ramiz.

Bir qancha davlatlarda berilgan foizlardan soliq olinadi, bu o‘z navbatida jamg‘arilgan pul miqdorini va depozit operatsiyalari daromadliligining kamayishiga olib keladi. Soliq to‘lanmasdan oldingi jamg‘arma miqdorini *S*, uni hisobga olgandan keyingi miqdorini S'' bilan belgilaymiz. Faraz qilaylik, ustama foizga soliq stavkasi *g*, umumiy soliq miqdori *G* bo‘lsin.

Ustama muddat uchun, ya’ni barcha foizlar miqdoridan yoki ketma-ket davrlar bo‘yicha, masalan, har yilning oxirida olinishi mumkin.

Barcha muddat uchun oddiy foiz stavkasi bo‘yicha umumiy soliq miqdori va jamg‘arma miqdorini hisoblaymiz:

$$G = Pnig$$

$$S'' = S - (S - P)g = P[1 + n(1 - g)i] \qquad (2.6.1)$$

(2.6.1) formulaning to‘g‘riligini isbotlaymiz. Ta’rifga ko‘ra,

$$S'' = S - (S - P)g = S - Sg + Pg =$$
$$= (1 - g)S + Pg = (1 - g)P(1 + ni) + Pg =$$
$$= P(1 - g)(1 + ni) + Pg = P[1 + n(1 - g)i]$$

Demak, jamg‘arma miqdorini hisoblashda soliq hisobga olinsa, *i* foiz stavkasini $(1 - g)i$ ga qadar kamayishiga olib kelar ekan.

Endi bu hisoblarni murakkab foiz stavkasi uchun bajaramiz. Murakkab foiz bo‘yicha umumiy soliq

$$G = (S - P)g = P[(1 + i)^n - 1]g, \qquad (2.6.2)$$

soliq to‘langandan keyingi jamg‘arma miqdori

$$S'' = S - G = P[(1 - g)(1 + i)^n + g] \qquad (2.6.3)$$

Ikkinchi hol bo‘yicha umumiy soliq miqdori har bir o‘tgan yillar uchun aniqlanadi. Bu kattalik o‘zgaruvchi bo‘lib, jamg‘arma miqdorining o‘sishi bilan soliq miqdori ham o‘sadi.

t - *y*il uchun umumiy soliq miqdorini hisoblaymiz:

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = P[(1 + i)^t - (1 + i)^{t-1}]g = P(1 + i)^{t-1}ig$$

Barcha muddat uchun olingan soliq miqdori yuqorida hosil qilingan soliq miqdoriga teng bo‘ladi. Buni isbotlaymiz.

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = P[(1 + i)^t - (1 + i)^{t-1}]g = P(1 + i)^{t-1}ig,$$

$$\sum_t G_t = Pig\sum (1 + i)^{t-1}$$

Geometrik progressiyaning $n - 1$ ta hadining yig‘indisi formulasiga ko‘ra

$$\sum_t (1 + i)^{t-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Buni yuqoridagi formulaga qo‘ysak,

$$\sum_t G_t = Pig \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = P[(1 + i)^n - 1]g = G.$$

Demak, soliqni qaysi holda to‘lanishi uning umumiy qiymatiga ta’sir qilmaydi. Soliq to‘lovchi uchun soliqni qachon to‘lashining ahamiyati yo‘q.

Misol: Ustama foizga soliq stavkasi 10%, yillik foiz stavkasi 30%, foizning qo‘shilish muddati 3 yil. Ssudaning boshlang‘ich qiymati 5 mln. so‘m bo‘lsa, jamg‘arilgan pul miqdorlarini soliq to‘lanmagan va soliq to‘langan hollar uchun oddiy va murakkab foiz stavkalari bo‘yicha hisoblang.

Yechish: Oddiy foiz bo‘yicha soliq hisobga olinmagan holda

$S = P(1+ni) = 5(1+3\cdot 0{,}3) = 5\cdot 1{,}9 = 9{,}5$ mln. so‘m,

soliq hisobga olingandan so‘ng

$S'' = 5[(1+3(1-0{,}1)\cdot 0{,}3) = 9{,}05$ mln. so‘m.

Murakkab foiz bo‘yicha soliq to‘lanmagan holda $S = 10{,}98$ mln. so‘m, soliq to‘langandan so‘ng

$S'' = 5[(1-0{,}1)(1+0{,}3)^3 + 0{,}1] = 10{,}3865$ mln. so‘m.

Yuqorida jamg‘arma qiymatlarini hisoblash usullarida barcha pul kattaliklari nominal narx bo‘yicha hisoblandi. Bu operatsiyalarda belgilangan muddatda xaridor pulining qiymati tushib ketish hollari hisobga olinmadi. Hozirgi sharoitda pul muomalalarida inflyatsiya katta o‘rin egallaydi.

Inflyatsiyani ikki hol uchun hisobga olish zarur: jamg‘arilgan pul miqdorini hisoblashda va moliyaviy operatsiyaning real daromadliligini (samaradorligi) o‘lchashda.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$S -$ nominal bo‘yicha jamg‘arma pul miqdori;

$C -$ pul qadrsizlangandan keyingi jamg‘arma pul miqdori;

$I_p -$ narx indeksi;

$I_c -$ belgilangan muddatda pulning sotib olish qobiliyatini xarakterlovchi indeks.

$$C = S\cdot I_c$$

tenglikning bajarilishi ravshan.

Pulning sotib olish qobiliyatini xarakterlovchi indeks narx indeksi bilan teskari bog‘lanishda bo‘ladi, ya’ni

$$I_c = \frac{1}{I_p}.$$

Faraz qilaylik, bugun 150 ming so‘m olindi. Keyingi ikki yil mobaynida narx 50% oshdi. Bunday holda sotib olish indeksi $I_c = \frac{1}{1{,}5}$

bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, 150 ming so‘mning real sotib olish qobiliyati ikki yildan so‘ng $150 \cdot \frac{1}{1,5} = 100$ ming so‘mni tashkil etadi.

Narx indeksi va inflyatsiya sur’atini bog‘lash qiyin emas. Inflyatsiya sur’ati h deb berilgan muddatda narxning nisbiy o‘zgarishiga aytiladi. U odatda foizlarda o‘lchanadi va

$$h = 100(I_p - 1)$$

kabi aniqlanadi. O‘z navbatida $I_p = (1 + \frac{h}{100})$. Masalan, berilgan muddatda inflyatsiya sur’ati 40% bo‘lsa, u holda narx 1,4 marta ortganini bildiradi.

Inflyatsiya zanjirli jarayon hisoblanadi.

Bir qancha davrlardagi narx indeksi narxning zanjirli indekslari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi:

$$I_p = \prod_1^n (1 + \frac{h_t}{100}), \tag{2.6.4}$$

bunda $h_t -$ t davrdagi inflyatsiya sur’ati. Agar $h -$ bir davr uchun o‘zgarmas inflyatsiya sur’ati bo‘lsa, u holda bunday n ta davrlar uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

$$I_p = (1 + \frac{h}{100})^n \tag{2.6.5}$$

Agar jamg‘arma oddiy foizlarda amalga oshirilayotgan bo‘lsa, u holda sotib olish qobiliyatini hisobga olgan holdagi jamg‘arma qiymati quyidagiga teng bo‘ladi:

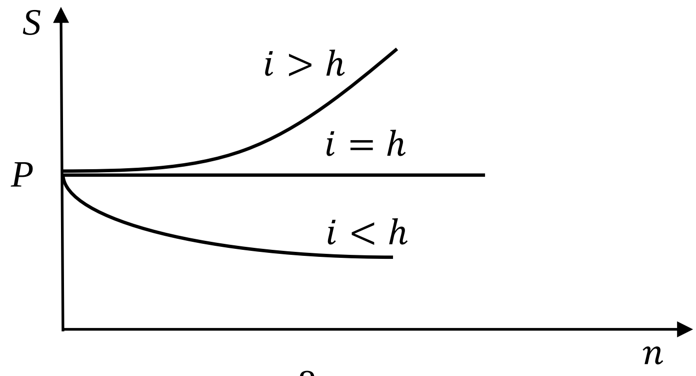
$$\text{C} = \frac{S}{I_p} = P \cdot \frac{1+ni}{I_p} = P \cdot \frac{1+ni}{(1+\frac{h}{100})^n} \tag{2.6.6}$$

Bu formuladan ko‘rinib turibdiki, $1 + ni > I_p$ shart bajarilgandagina pul inflyatsiyasini hisobga olgan holda jamg‘arilgan pul miqdori ortadi.

Murakkab foiz bo‘yicha *S* ni hisoblaymiz:

$$\text{C} = \frac{S}{I_p} = P \cdot \frac{(1+i)^n}{I_p} = P \cdot \left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n \tag{2.6.7}$$

Endi i va h ning P ga qanday ta’sir ko‘rsatishini aniqlaylik, agar $i = \frac{h}{100}$ bo‘lsa, $C = P$, ya’ni jamg‘arilgan pul miqdori inflyatsiya bilan qoplanadi, mablag‘ni real o‘sishi yuz bermaydi, agar $\frac{h}{100} > i$ bo‘lsa, u holda jamg‘armaning yemirilishi kutiladi, ya’ni real pul miqdori boshlang‘ich pul miqdoridan kam bo‘ladi. $\frac{h}{100} < i$ bo‘lgan holdagina real o‘sish yuz beradi. Bu holatlarni quyidagi rasmda ko‘rish mumkin:



8-rasm

Pul egalari inflyatsiya natijasida pulning qadrsizlanishini xohlamaydilar va bu yo‘qotishni kompensatsiya qilishni talab qiladilar. Bu yo‘sinda eng keng tarqalgani foiz stavkasini oshirish hisoblanib, u inflyaysiya mukofoti deb ataladi. Natijaviy kattalik brutto-stavka deyiladi (G‘arb davlatlarining moliyaviy adabiyotlarida bunday stavkani nominal stavka deb yuritishadi).

Inflyatsiyani to‘la kompensasiya qilish sharoitida brutto-stavka r ni aniqlaymiz. Murakkab foiz stavka bo‘yicha jamg‘arishda brutto-stavkani quyidagi tenglikdan topamiz:

$$1 + r = (1 + i)(1 + \frac{h}{100}),$$

bundan

$$r = i + \frac{h}{100} + i\frac{h}{100} \qquad (2.6.8)$$

$i\frac{h}{100}$ kichik son bo‘lganligi uchun buni hisobga olmasa ham bo‘ladi, bunday holda

$$r = i + \frac{h}{100} \qquad (2.6.9)$$

Oddiy foiz bo‘yicha jamg‘arish formulasidan $1 + nr = (1 + ni)\, I_p$ tenglikni yozamiz.

Agar r e’lon qilingan stavka, ya’ni inflyatsiyani hisobga olgan holdagi daromadlilik bo‘lsa (yoki brutto-stavka), u holda daromadlilikning real ko‘rsatkichini yillik foiz stavkasi bo‘yicha aniqlash mumkin. (2.6.8) dan

$$i = \frac{1+r}{1+\frac{h}{100}} - 1 \qquad (2.6.10)$$

Agar brutto-stavka soddalashtirilgan formula yordamida aniqlanadigan bo‘lsa, $1+r = (1+i)(1+\frac{h}{100})$ bo‘ladi.

2.7. Foiz stavkalarining o‘rta qiymati

Agar moliyaviy operatsiyada foiz stavkalari vaqt bo‘yicha o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda o‘rta qiymat yordamida stavkalarning barcha qiymatlarini umumlashtirish mumkin. Ta’rif bo‘yicha barcha stavkalarni o‘rta qiymatga almashtirish jamg‘arma yoki diskontirlash natijasini o‘zgartirmaydi.

Oddiy stavkadan boshlaymiz. Faraz qilaylik, $n_1, n_2, ..., n_k$ ketma-ket davrlar uchun $i_1, i_2, ..., i_k$ oddiy foiz stavkalari bo‘yicha ustama foiz to‘lanadigan bo‘lsin. Izlangan o‘rta qiymatni quyidagi tenglikdan topamiz:

$$1 + N\bar{i} = 1 + \sum_t n_t i_t ,$$

bundan

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t i_t}{N} \qquad (2.7.1)$$

bu yerda $N = \sum n_t -$ ustama foizlar jamg‘arilishining umumiy muddati.

Shunga o‘xshash hisob stavkasining o‘rta qiymatini topamiz.

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t d_t}{N} \qquad (2.7.2)$$

Agar stavkalar vaqt bo‘yicha murakkab foiz stavkalari uchun o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda jamg‘arma ko‘paytuvchilari tengligiga asosan

$$(1+\bar{i})^N = (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} ...$$

bundan

$$\bar{i} = \sqrt[N]{(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} ...} - 1 \qquad (2.7.3)$$

Misol. Agar birinchi ikki yil uchun ssudaga 15% stavka, qolgan uch yil uchun u 20%ni tashkil etsa, ssudaning berilgan muddati uchun o‘rtacha stavkani toping.

$$\bar{i} = \sqrt[5]{1{,}15^2 \cdot 1{,}2^3} - 1 \approx 0{,}18 \quad \text{yoki } 18\%.$$

Endi bir qancha birjinsli operatsiyalarda ssudalar summasi va foiz stavkalari bilan farq qiladigan o‘rta qiymatlarni topish masalasini ko‘ramiz. Izlanayotgan o‘rta stavkani foizlarni jamg‘arishdan keyingi mos summalarning tenglik shartidan topamiz. Agar oddiy foizlar qo‘llanilayotgan bo‘lsa va bu operatsiyalar muddati bir xil bo‘lsa, u holda

$$\sum P_t(1+n\bar{i}) = \sum P_t(1+ni_t)$$

bundan

$$\bar{i} = \frac{\sum P_t\, i_t}{\sum P_t} \tag{2.7.4}$$

Birjinsli ssuda operasiyalari uchun murakkab foiz stavkalari qo‘llaniladigan holni qaraylik. Operatsiya muddatlari bir xil (n) bo‘lsin. Jamg‘arma ko‘paytuvchilariga mos keluvchi tenglikdan

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t(1+i_t)^n}{\sum P_t}} - 1 \tag{2.7.5}$$

2.8. Moliyaviy operatsiyalarning samaradorligi

Moliyaviy operatsiya deganda biz operatsiya boshi va oxirida mos ravishda S_0 va S pul mablag‘lariga ega bo‘lishni tushunamiz. Bizning maqsadimiz $S - S_0$ ayirmani maksimallashtirishdan iboratdir. Operatsiyaning asosiy tavsifi uning samaradorligi hisoblanadi.

Operatsiya samaradorligining turlari

Operatsiya samaradorligi $d = (S - S_0)/S_0 = \dfrac{S}{S_0} - 1$ tenglamadan topiladi. Ma’lumki, biz S/S_0 ni jamg‘arma koeffitsiyenti deb ataymiz. Ko‘rinib turibdiki, jamg‘arma koeffitsiyenti va samaradorlik bir-biri bilan qat’iy bog‘langan. Shuning uchun ayrim hollarda samaradorlik deganda jamg‘arma koeffitsiyentini tushunamiz.

Yuqoridagi tartibda aniqlangan samaradorlikni nominal samaradorlik deb ham atashadi. Bunday tarzda aniqlash operatsiyaning samaradorlik davri uzunligini (davomiyligini) hisobga olmaydi. Shuning uchun operatsiyaning real samaradorligi tushunchasi kiritiladi. Operatsiyaning real samaradorligi deb $d_2 = [S/(1+j) - S_0] = [S/(1+j)/S_0] - 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi kattalikka aytiladi, bunda $j -$ operatsiya davridagi inflyatsiya kattaligi. Inflyaysiya operatsiyaning oxirgi qiymatini $(1+j)$ marta qadrsizlantiradi.

Ayrim hollarda moliya operatsiyalari vaqt bo‘yicha bir qancha kichik operatsiyalarga ajraladi. Masalan, aksiya egasi uni sotib olgandan so‘ng shunday qulay paytni kutadiki, uni sotib bu vaqtda u dividendilar oladi. Bunday samaradorlikni joriy samaradorlik deb yuritishadi.

Buni chuqurroq tushuntirish uchun yana bir misol keltiramiz: qandaydir fuqaro shahardan uy sotib oladi va uni ta’mirlab sotishni rejalashtiradi. Ammo qulay vaziyatni kutib uyni sotish o‘rniga ijaraga berdi. Uyni ijaraga berishdan keladigan daromad bu - joriy samaradorlik. Barcha operatsiyalardan keladigan daromadni to‘la samaradorlik deb ataymiz.

To‘lovlar oqimi va uning samaradorligi

Aytaylik, $\{R_k, t_k\} -$ to‘lovlar oqimi bo‘lsin, bunda $R_k -$ to‘lovlar, $t_k -$ vaqt momentlari. Agar $A = \sum_k R_k / (1+j)^{t_k}$ tenglik bajariladigan bo‘lsa, u holda qaralayotgan to‘lovlar oqimining hozirgi qiymati A daromadlilik darajasi j ga teng bo‘lgan samaradorlikka ega deyiladi. Agar oqim R to‘lovlar va muddat uzunligi n bo‘lgan rentani tashkil etsa, u holda renta hozirgi (joriy) qiymati A bo‘lgan j samaradorlik darajasiga ega deyiladi, agar $R(1+j)^n = A$ o‘rinli bo‘lsa.

Ko‘rinib turibdiki, agar R kattalashsa, A ning qiymati o‘sadi. Buni boshqacha talqin qilish mumkin: rentaning samaradorligini oshirish uchun uning yillik to‘lovini oshirish kerak.

Bu mulohazalarni abadiy renta misolida oson ko‘rish mumkin, darhaqiqat uning uchun abadiy rentaning samaradorligi $j = \frac{R}{A}$. Shuni ta’kidlash joizki, bu tarzda aniqlangan to‘lovlar oqimining samaradorligi faqat to‘lovlargagina bog‘liq bo‘ladi, buni to‘lovlar oqimining ichki daromadliligi deb yuritiladi.

Oniy samaradorlik

Faraz qilaylik, t momentdagi kapital jamg‘arma $S(t)$, qisqa Δt vaqtdagi keyingi jamg‘arma $S(t+\Delta t)$ bo‘lsin, u holda $[t, t+\Delta t]$ kesmadagi o‘rtacha daromad $\bar{d}$ yillik foizlar ulushida quyidagi tenglamadan topiladi.

$$S(t+\Delta t) = S(t)(1+\bar{d})^{\Delta t}$$

Δt kichik bo‘lganda (cheksiz kichik miqdor) $(1+\bar{d})^{\Delta t} = 1+\bar{d}\cdot\Delta t$ taqribiy tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $S(t+\Delta t) = S(t)(1+\bar{d}\Delta t)$. Bundan $\bar{d}$ ni topib, $\Delta t \to 0$ limitga o‘tsak,

$$d = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[S(t+\Delta t)-S(t)]}{S(t)\cdot\Delta t} = \frac{S'(t)}{S(t)} = [\ln S(t)]'.$$

Shunday qilib, operatsiyaning oniy samaradorligi jamg‘arma natural logarifmining vaqt bo‘yicha hosilasiga teng ekan.

Xususiy holda, agar oniy samaradorlik o‘zgarmas bo‘lsa, vaqt bo‘yicha jamg‘arma quyidagi eksponent bo‘yicha o‘sadi:

$$S(t) = S(0)e^{dt}$$

1-misol. Jamg‘arma vaqt bo‘yicha o‘zgarmas γ tezlikda o‘sadi, ya’ni

$$S(t) = S_0(1+\gamma t),$$

vaqtning ixtiyoriy qiymatidagi oniy samaradorlik topilsin.

Yechish: Izlanayotgan oniy samaradorlikni $d(t)$ bilan belgilaymiz:

$$d(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{[S_0(1+\gamma t)]'}{S_0(1+\gamma t)} = \frac{\gamma}{1+\gamma t}.$$

Shunday qilib, samaradorlik vaqt o‘tishi bilan kamayadi. Bu tushunarli hol – jamg‘armaning orttirmasi vaqt birligi ichida o‘zgarmas va uning qiymati $S_0\gamma$ ga teng, jamg‘armaning o‘zi esa o‘sadi.

2-misol. Oniy samaradorlikning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi ushbu $d(t)=a\cdot t$ formula yordamida berilgan, bunda $a-$ o‘zgarmas. Vaqt bo‘yicha jamg‘arma o‘zgarishini toping.

Yechish: $S'(t)=S(t)d(t)=S(t)at$ tenglamani yozamiz. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir:

$$\int\frac{dS(t)}{S(t)}=a\int tdt$$

$$\ln S(t)=\frac{at^2}{2}+\ln c$$

$$\ln\frac{S(t)}{c}=\frac{at^2}{2},\ S(t)=ce^{\frac{a^2}{2}}.$$

II bobga doir masalalar

1. Omonatchi 500 mln. so‘mni bankka yillik 40% stavka bo‘yicha murakkab foizga qo‘ygan bo‘lsa, ikki yildan so‘ng jamg‘arilgan pul miqdorini toping?

2. Mijoz bankka 2,5 mln. so‘mni yillik 9,5 foiz stavkasi bo‘yicha qo‘ydi. U 2 yilu 270 kundan so‘ng qancha pul oladi.

3. Bankka qo‘yilgan 600 ming so‘mga har kvartalda 12% yillik murakkab ustama foiz qo‘shiladi. 14 oy mobaynida jamg‘arilgan pul miqdori qancha bo‘ladi?

4. Bankka 2,5 yilga 800 ming so‘m pul qo‘yilgan. Murakkab hisob stavkasi yiliga 15% bo‘lsa, jamg‘arilgan pul miqdorini toping?

5. Murakkab foiz bo‘yicha 4 yilga qo‘yilgan pul miqdori 20 mln. so‘mni tashkil etishi uchun hozir bankka qancha pul qo‘yish kerak?

6. 100 mln. so‘m 2 yilga 64% yillik stavkada ssuda berilgan. Kutilayotgan yillik inflyatsiya 24% ga teng. Inflyatsiyani hisobga olgan holdagi jamg‘arilgan pul miqdorini va real foiz stavkasini toping?

7. Shartnoma kreditga ikki yil muddatga berilgan 1 mln. so‘m uchun quyidagi murakkab stavkalarni qarab chiqadi: birinchi yarim yilda 30%, ikkinchi yarim yilda 40%, ikkinchi yil yillik 100% to‘lanadi. Jamg‘arilgan pul miqdorini toping?

8. Birinchi yil kvartalda ssuda bo‘yicha foiz stavkasi 20% va plyus 3% marjinal xarajat va ikkinchi yilning birinchi yarim yilida

30% va plyus marjinal xarajat 2% ni tashkil etsa, jamg‘arma koeffitsiyentini toping?

9. 1500 dollarni so‘mlik depozit bo‘yicha almashtirish ko‘zda tutilmoqda. Depozit muddatining boshlanishida dollarni sotish kursi 2150 so‘m, operatsiya oxirida sotib olish kursi 2200 so‘m, foiz stavkasi 10%. Depozit muddati 4 oy bo‘lsa, valyutada jamg‘arilgan mablag‘ miqdori topilsin.

10. 1,5 mln. so‘mni valyuta depozit bo‘yicha almashtirish talab qilinadi. Muddat boshida dollarni sotish kursi 2150 so‘m, operatsiya oxirida esa 2200 so‘m. Foiz stavkasi 10%. Depozit muddati 4 oy bo‘lsa, so‘mlarda jamg‘arilgan mablag‘ miqdori topilsin.

11. Kapital jamg‘armaning 0, 1, 2, 4 vaqt momentlaridagi jamg‘arma mos ravishda 100, 200, 300, 400 ga teng. Alohida oraliqlar uchun samaradorlik va o‘rtacha samaradorlikni (yillik foizlarda) toping.

Ko‘rsatma: $0,1,2,...,t$ vaqt momentlariga oid jamg‘armalar $S_0, S_1, S_2, ..., S_t$, u holda o‘rtacha samaradorlik, masalan, $[0,2]$ oraliqda $(1+d)^2 = S_1/S_0$ tenglamadan topiladi.

12. Turg‘unlik davrida, ya’ni ittifoq davrida yengil mashina sotib olish juda mushkul bo‘lgan. Janob A. 1977-yil “Jiguli” avtomashinasini 8000 rublga sotib oldi. Kirakashlik qilib (u paytda mumkin emas), oyiga “toza” 300 rubl ishladi, ikki yildan so‘ng esa janob A. mashinasini 8200 rublga sotdi. Joriy va to‘la samaradorlikni toping (benzin va boshqa xarajatlar hisobga olinmasin).

13. Operatsiya boshidagi 100 pul birligi, operatsiya oxirida 200 pul birligini tashkil etdi. Agar inflyatsiya 10% ga teng bo‘lsa, operatsiyaning real samaradorligini toping.

14. Operatsiyaning 20% hisob stavkasiga ekvivalent bo‘lgan jamg‘arma foizini hisoblang.

15. To‘lovlar oqimining hozirgi qiymati 200000 so‘m, agar bu oqim rentani tashkil etib, yillik to‘lov 100000 so‘mni tashkil etsa, ichki samaradorlik necha foizni tashkil etadi?

III bob. UZLUKSIZ USTAMA FOIZLAR VA UZLUKSIZ DISKONTLASH

3.1. Uzluksiz ustama foizlar to‘lash modeli

Bank faoliyatida, ayniqsa, ishlab chiqarishning elektron usullari va moliyaviy operatsiyalarni hisobga olishda bir sutka yoki bir necha soatda foizlar qo‘shilishi mumkin. Masalan, Toshkentdagi tijorat banki Andijonda joylashgan bankka 12 soatga qarz berishi mumkin. Andijon banki shu vaqtga bankning hisob stavkasi bo‘yicha foiz to‘laydi. Demak, bundan qisqa vaqt oralig‘ida ustama foiz to‘lash masalasi kelib chiqadi, ya’ni gap uzluksiz ustama foizlar haqida boradi. Avvalgi boblarda biz turli vaqt oraliqlarida ustama foiz qo‘shilishining modellari bilan tanishgan edik.

Endi uzluksiz ustama foizlar qo‘shilishining matematik modelini tuzamiz. Uzluksiz model amaliy tatbiqlari usullarini ko‘ramiz, hamda diskont va uzluksiz ustama foizlar natijalarini taqqoslaymiz. Qisqalik uchun, “uzluksiz foizlar” deb yuritamiz.

Tayanch davri qilib, bir yilni qabul qilamiz va bir yil mobaynida butun sondagi ustama foiz to‘lash davrini m, to‘lash davri uzunligini esa $h=\frac{1}{m}$ yil $(m=1,2,3\ldots)$ bilan belgilaymiz.

U holda $i^{(m)}=i^{(\frac{1}{h})}$ tenglikni hisobga olib samarali yillik stavka orasidagi bog‘lanish formulasini yozamiz.

$$1+i_{\backslash sam}=(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m=[1+hi^{(1/h)}]^{1/h}, \qquad m=1,2,3,\ldots; \qquad 0<h\le 1, \quad (3.1.1)$$

soddalik uchun $i^{1/h}=i_h$ deb belgilaymiz, bu yerda i_h - h yil uzunligidagi bir davr uchun ustama foiz to‘lashning nominal foiz stavkasi.

Agar (3.1.1) da $h=m=1$ bo‘lsa,

$$i_{sam}=i^{(1)}=i_1\,. \qquad (3.1.2)$$

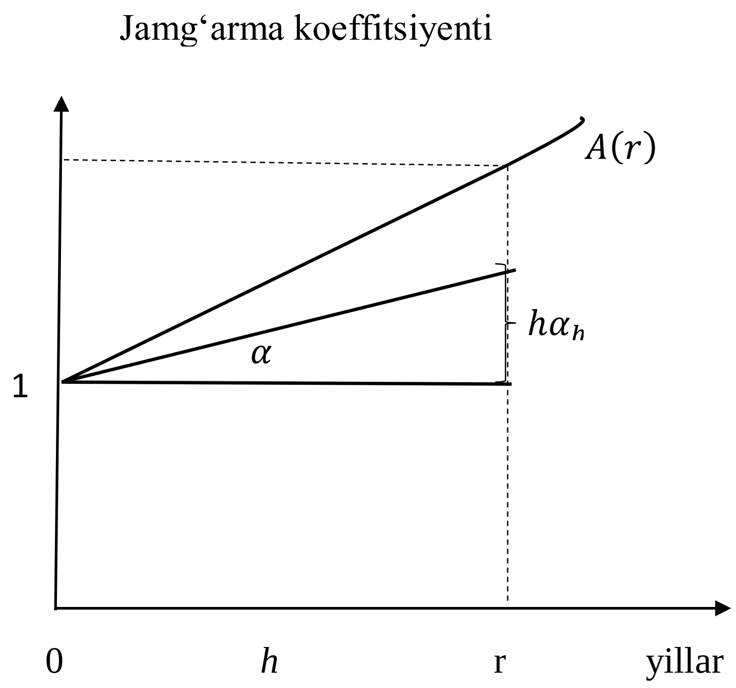
(3.1.2) dagi samarali yillik stavkani i deb belgilash qulay. Endi matematik oydinlashtirish kiritamiz. Buning uchun jamg‘arma koeffitsiyenti $A(h)$ ni har qanday $(t, t+h)$ $h=\frac{1}{m}$ uzunlikdagi davr uchun qaralayotgan $(0,T)$ intervalda quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$A(h)=\begin{cases} 1+hi_h & \textit{oddiy foizlar uchun} \\ (1+i_h)^h \approx 1+hi_h & \textit{murakkab foizlar uchun} \end{cases}$$

h kichik bo‘lganda oddiy va murakkab foizlar uchun jamg‘arma koeffitsiyentlari bir-biridan juda kam farq qiladi. $A(0)=1$ bo‘lsa, u holda

$$\Delta A(h)=A(h)-A(0)\approx hi_h .$$

$\Delta A(h)$ - kichik vaqt h uchun 1 pul birligiga jamg‘arma koeffitsiyentining orttirmasi (9-rasmda h va τ yillarda o‘lchanadi).



9-rasm

Agar $A(\tau)$ 0 nuqtada o‘ng tomondan differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $A'(0)=tg\alpha\approx i_h$, bunda α burchak $\tau=0$ nuqtada $A(\tau)$ ga o‘tkazilgan urinmaning og‘ish burchagini ifodalaydi. Agar samarali stavka i fiksirlangan bo‘lsa, u holda nominal stavka i_h $m\to\infty$ va $h=\frac{1}{m}\to 0$ da musbat bo‘lgan holda monoton kamayadi. Shuning uchun $i_h = i^{(1/h)}$ musbat limit qiymat mavjud bo‘ladi, uni δ bilan belgilaymiz:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = i^{(\infty)} = \lim_{h\to 0} i^{(h)} = i_0 = \delta \qquad (3.1.3)$$

T*a’rif*: $m\to\infty$ da nominal stavka $i^{(m)}$ ning limiti δ o‘sish kuchi yoki bir yil ustama foiz to‘lash mobaynidagi jamg‘armaning intensivligi deyiladi. δ kattalikni uzluksiz ustama foiz to‘lashdagi nominal yillik stavka deb yuritish mumkin.

Teorema: Samarali yillik stavka i va nominal yillik stavka quyidagi munosabatda bog‘langan

$$1 + i = e^{\delta} \qquad (3.1.4)$$

Isbot: Analiz kursidan ma’lumki,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x, \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (3.1.5)$$

bunda $e = 2{,}71828\ldots$.

Shuning uchun

$$1 + i = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m = e^{\delta}.$$

Natija

$$\delta = \ln(1+i). \qquad (3.1.6)$$

teoremaga ikkilangan quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema: Samarali yillik stavka d diskontirlash va nominal yillik stavka δ quyidagicha bog‘langan:

$$1 - d = \vartheta = e^{-\delta}. \qquad (3.1.7)$$

Isbot: $1 - d_{sam} = (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^m$ formuladan,

$\lim_{m\to\infty} (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^m = \lim_{m\to\infty} e^{-d^{(m)}} = e^{-\lim_{m\to\infty} d^{(m)}} = e^{-\delta}$. Teorema isbot bo‘ldi.

(3.1.6) formula va $d = \frac{i}{1+i}$ munosabat quyidagi jadvalni tuzish imkonini beradi. Jadvaldagi qiymatlar quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi: $d < \delta < i$ va bunda kichik i larda $0{,}10$ gacha ularning qiymatlari bir-biriga juda yaqin bo‘ladi. i *n*ing qiymati o‘sishi bilan ular orasidagi farq tez o‘sadi, agar $i = 1{,}00$ bo‘lsa, u holda $\delta \approx 0{,}7i$, $d = 0{,}5i.$

d	δ	i
0,00990	0,00995	0,01
0,04761	0,04879	0,05
0,09091	0,09531	0,10
0,16667	0,18232	0,20
0,20000	0,22314	0,25
0,33333	0,40547	0,50
0,42857	0,55962	0,75
0,50000	0,69315	1,00
0,60000	0,91629	1,50
0,66667	1,09861	2,00

Masala. Yuqoridagi jadvalda i ning har bir qiymati uchun $m = 2{,}4{,}6{,}12{,}52$ bo‘lganda, $d^{(m)}$, $i^{(m)}$ qiymatlar hisoblansin. Hisoblash programmasi kompyuterda tuzilsin va natijalar chiqarilsin.

1-misol. Agar boshlang‘ich $S(0) = 10^6$ so‘m pul $i^{(m)} = 25\%$ o‘zgarmas stavka bo‘yicha reinvestirlanayotgan bo‘lsa, u holda 5 yilga jamg‘arilgan pul miqdorini m ning quyidagi qiymatlari uchun aniqlang.

a) yilda 1 marta, b) yiliga 2 marta, v) uzluksiz, g) i_{sam} qiymatini uzluksiz foiz stavkasi uchun hisoblang.

Yechish: a) $S(5) = (1 + 0{,}25)^5 \cdot 10^6 \, сум = 3{,}05 \cdot 10^6 \, сум,$

b) $S(5) = (1 + \frac{0{,}25}{2})^{10} \cdot 10^6 \, сум = 3{,}25 \cdot 10^6 \, сум,$

v) $S(5) = (e^{0{,}25})^5 \cdot 10^6 \, сум = 3{,}49 \cdot 10^6 \, сум,$

g) $i_{сам} = (e^{0{,}25})^5 - 1 = 0{,}284025$.

2-misol. $\tau = 1$ yil uchun o‘zgarmas $i^{(m)} = 1$ stavka bo‘yicha reinvestirlashda har yil, har kvartal, har oy, har soat, har minut va uzluksiz hollar uchun $A(\tau)$ jamg‘arma koeffitsiyenti hisoblansin. Har bir hol uchun i_{sam} ni hisoblaymiz. Natijalar ushbu jadvalda berilgan:

Ustama haq to‘lash davri	*m*	$A(1)=(1+\frac{1}{m})^m$	$i_{сам}=A(1)-1$
har yilda	1	$(1+\frac{1}{1})^1=2$	1
har kvartalda	4	$(1+\frac{1}{4})^4=2{,}441406$	1,441406
har oyda	12	$(1+\frac{1}{12})^{12}=2{,}613035$	1,613035
har kunda	360	$(1+\frac{1}{360})^{3604}=2{,}714516$	1,714516
har soatda	8640	$(1+\frac{1}{8640})^{8640}=2{,}718125$	1,718125
har minutda	518400	$(1+\frac{1}{518400})^{518400}=2{,}718276$	1,718276
uzluksiz	∞	$e=2{,}718282$	1,718282

3.2. Uzluksiz ustama foizlarda jamg‘arma koeffitsiyenti va diskontirlash

Faraz qilaylik, t_0 momentda o‘zgarmas samarali *i* yillik stavka bo‘yicha $S(t_0)$ hajmda mablag‘ investisiya qilinadigan bo‘lsin. U holda murakkab foiz bo‘yicha $t=t_0+\tau$ momentdagi jamg‘arma qiymati (*AV – Accumulated Value*)

$$S(t)=AV[S(t_0)]=S(t_0)(1+i)^{\tau}=S(t_0)e^{\delta\tau},\ \ \tau>0 \qquad (3.2.1)$$

ni tashkil etadi. Bunda vaqt yillarda o‘lchanadi, *i* va $\delta=\ln(1+i)$ lar esa o‘nli kasrlardan iborat.

Agar bizga keyingi $t>t_0$ momentdagi $S(t)$ mablag‘ni olish zarur bo‘lsa, u holda uning hozirgi *t* momentdagi keltirilgan qiymati yoki joriy qiymati (*PV – Present Value*) quyidagiga teng bo‘ladi:

$$S(t_0)=PV[S(t\ \ )]=S(t\ \ )(1+i)^{-\tau}=S(t\ \ )e^{-\delta\tau},\ \ \tau>0 \qquad (3.2.2)$$

Teorema. O‘zgarmas samarali yillik stavka *i* va nominal yillik stavka $\delta=\ln(1+i)$ larda jamg‘arma koeffitsiyenti faqat jamg‘arish davri τ ning uzunligiga bog‘liq bo‘lib,

$$A(\tau)=\frac{S(t_0+\tau)}{S(t_0)}=e^{\delta\tau},\ \ \tau\geq 0 \qquad (3.2.3)$$

diskontirlash koeffitsiyenti esa

$$\vartheta(\tau) = \frac{S(t_0)}{S(t_0 + \tau)} = e^{-\delta\tau} = \frac{1}{A(\tau)}, \qquad \tau \geq 0 \qquad (3.2.4)$$

ga teng bo‘ladi.

Yuqoridagi formulalardan,

$$\vartheta(\tau) = A(-\tau) \quad \text{va} \quad \vartheta(-\tau) = A(\tau)$$

tengliklarni yozamiz. Bundan qaralayotgan hollarda jamg‘arma koeffitsiyenti va diskontirlash o‘zaro almashinuvchi kattaliklar ekanligi kelib chiqadi. Demak, matematik nuqtai nazardan qaraganda faqat bittasidan foydalanish mumkin. lekin ko‘rgazmalilik uchun har ikkalasidan foydalanish qulaydir.

Shunday qilib, ham diskont, ham uzluksiz murakkab ustama foizlarda quyidagi fundamental munosabat o‘rinli

$$A(\tau) \cdot \vartheta(\tau) = 1, \qquad \tau \geq 0\,. \qquad (3.2.5)$$

Xususan, $\tau = 1$ bo‘lganda (3.2.3)-(3.2.5) tengliklardan

$$A(1) = e^{\delta} = 1 + i\,, \qquad (3.2.3a)$$

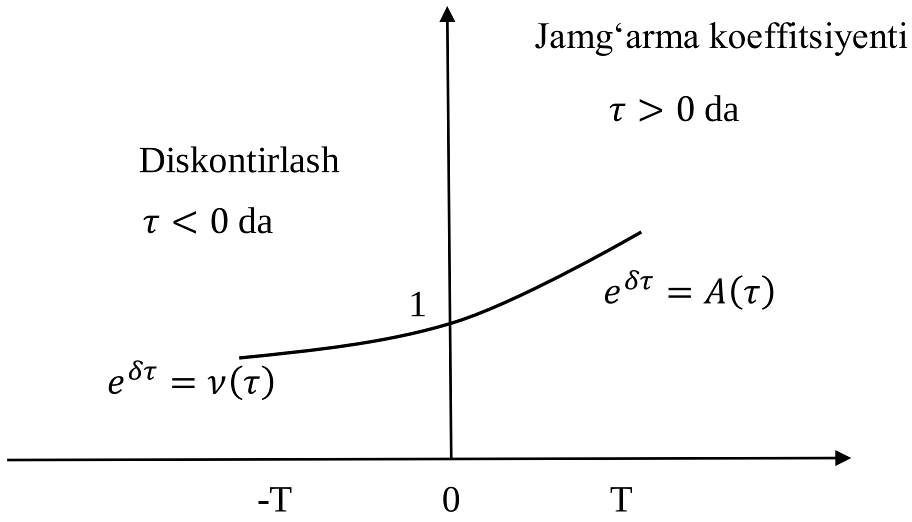
$$\vartheta = \vartheta(1) = e^{-\delta} = \frac{1}{1+i}\,, \qquad (3.2.4a)$$

$$(1+i)\vartheta = 1 \qquad (3.2.5a)$$

tengliklarni yozishimiz mumkin. Agar $e^{\delta\tau}$ funksiya $\tau \in (-T, T)$ intervalda berilgan bo‘lsa, u holda $\tau > 0$ da u jamg‘arma koeffitsiyenti $A(\tau)$ bilan, $\tau < 0$ da esa diskontirlash $\vartheta(\tau)$ bilan mos keladi:

$$e^{\delta\tau} = \begin{cases} \vartheta(\tau), & agar \quad -T < \tau \leq 0 \\ A(\tau), & agar \quad 0 \leq \tau < T \end{cases}.$$

Shuning uchun tayanch vaqt birligida jamg‘arma intensivligi $A'(0) = \delta$ dan iborat bo‘ladi.



10-rasm

3-misol. Bir yil uchun o‘zgarmas o‘sish intensivligi $\delta = 10\%$ bo‘lganda uzluksiz ustama foiz bo‘yicha bankka 2000 dollar pul qo‘yilgan bo‘lsin. Jamg‘arilgan pul miqdori $S(t)$ ni t vaqt oxirida $t = 1,2,3,5$ va 10 larda hisoblaymiz.

Yechish: Bu yerda $S(t) = 2000e^{0,1t}$, natijalarni ushbu jadvalda keltiramiz:

t, yil	0	1	2	3	5	10
$S(t)$, dollar	2000	2210,34	2442,81	2699,72	3297,44	5436,56

4-misol. Faraz qilaylik, jamg‘arma qiymati 1000 dollar bo‘lgan pulni janob A. bank depoziti bo‘yicha 2 yildan so‘ng, o‘zgarmas intensivlik δ bo‘lganda olish zarur bo‘lgan joriy pul miqdori, jamg‘arma qiymati 1200 dollar bo‘lgan pulni janob B. depozit bo‘yicha 4 yildan so‘ng xuddi shunday δ intensivlik bo‘yicha olish kerak bo‘lgan joriy pul miqdoriga teng bo‘lsa, δ ning qiymatni toping.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra,

$$1000e^{-2\delta} = 1200e^{-4\delta},$$

bundan $e^{2\delta} = 1,2,\quad \delta = 0,5\ln 1,2 = 0,09116,$ ya’ni $\delta = 9,1\%$.

5-misol. A. kreditorga B. quyidagi veksel bo‘yicha qarzini to‘lash kerak:

1000 doll. 01.01.06,
2500 doll. 01.01.07,
3000 doll. 01.07.07.

Qarz miqdori $C(t)$ ning joriy qiymatini yiliga $\delta = 0{,}06$ bo‘lganda a) 01.01.04 va b) 01.04.05 momentlar uchun hisoblang.

Yechish:

$$a)\quad C(01.01.04) = 1000\vartheta(2) + 2500\vartheta(3) + 3000\vartheta(3{,}5) = $$
$$= 1000e^{-0,12} + 2500e^{-0,18} + 3000e^{-0,21} = 5406{,}85 \text{ dollar.}$$

$$б)\quad C(01.04.05) = 1000\vartheta(1{,}25) + 2500\vartheta(1{,}75) + 3000\vartheta(2{,}25) = 5798{,}89 \text{ doll.}$$

3.3. Jamg‘arma intensivligi o‘zgaruvchi bo‘lgan holdagi tahlili

Hozirgi paytda bir qancha markazlarni jahon sistemasi bilan birlashtiruvchi juda ko‘p elektron birjalar faoliyat ko‘rsatmoqda. Bu markazlar Nyu-York, London, Frankfurt va Tokioda joylashgan. Ularda moliyaviy operatsiyalar sutka bo‘ylab, bir sekundda ko‘p marta amalga oshiriladi. Bu tebranishlar odatda uncha katta bo‘lmaydi, ba’zan valyuta kursi sakrashi mumkin. Valyuta kursini tahlil va prognoz qilish hamda ular bilan bog‘liq bo‘lgan qimmatbaho qog‘ozlar orasida ko‘p murakkab muammolar kelib chiqishi mumkin. Bularning barchasi oddiy omonat va depozit bo‘yicha foiz stavkalariga o‘z ta’sirini o‘tkazadi. Shuning uchun δ va boshqa foiz stavkalari vaqtga bog‘liqligining analitik modeli zarur. Shu maqsadda jamg‘arma koeffitsiyentini $(t, t+h)$ intervalda qaraymiz va,

$$A(t,t) = 1, \quad A(t, t+h) = 1 + hi_h(t), \quad h > 0 \tag{3.3.1}$$

deb qabul qilamiz. Bu yerda $i_h(t)$ - t vaqtdagi nominal foiz stavkasining oniy qiymati bo‘lib, u faqat h jamg‘arma intervalining uzunligiga bog‘liq bo‘lmay, balki t momentga ham bog‘liq. Shuning uchun jamg‘arma koeffitsiyenti $A(t, t+h)$ faqat h ga emas, balki t ga ham bog‘liq. Qaralayotgan intervaldagi har qanday t uchun ushbu limit mavjud deb hisoblaymiz:

$$\lim_{h \to +0} i_h(t) = \delta(t) \tag{3.3.2}$$

bu yerda $\delta(t)$ - t momentdagi o‘sish intensivligining oniy qiymati (3.3.1) va (3.3.2) lardan

$$\delta(t) = \lim_{h \to +0} \frac{A(t,t+h)-1}{h} = \frac{\partial A(t,\omega)}{\partial \omega}\Big|_{\omega=t}, \qquad (3.3.3)$$

bu yerda $\frac{\partial A(t,\omega)}{\partial \omega}\Big|_{\omega=t}$ - $A(t,\omega)$ funksiyaning ikkinchi argumenti bo‘yicha $\omega = t$ nuqtadagi ixtiyoriy fiksirlangan t dagi hosilasini bildiradi.

Quyidagi fundamental teoremani isbotlash mumkin.

Teorema. $\delta(t)$ va $A(t_0,t)$ larni $t \ge t_0$ da uzluksiz funksiyalar deb hisoblaymiz va bu intervalda bozordagi barqarorlik sharti bajarilsin. U holda $t_0 \le t_1 \le t_2$ uchun

$$A(t_1,t_2) = \exp\{\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds\} \qquad (3.3.4)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: $S(t)$ - vaqtning funksiyasi va uzluksiz bo‘lganligi uchun

$$S(t_2) = S(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t_2}\delta(s)ds}, \quad S(t_1) = S(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t_1}\delta(s)ds},$$

$$S(t_2) = S(t_1)\cdot e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds} = S(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t_1}\delta(s)ds}\cdot e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds} = S(t_1)\cdot e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds},$$

bundan

$$A(t_1;t_2) = \frac{S(t_2)}{S(t_0)} = e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds} = \exp\{\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds\}.$$

Teorema isbot bo‘ldi.

Natija. Agar $\nu(t_1;t_2)$ - t_2 momentdan t_1 momentgacha diskontirlash bo‘lsa, u holda

$$\nu(t_1;t_2) = \frac{1}{A(t_1,t_2)} = \exp\{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds, \qquad (3.3.5)$$

xususiy holda, agar $t \ge t_0$ da $\delta(t) = \delta = const$ bo‘lsa,

$$A(t_1;t_2) = e^{(t_2-t_1)\delta} = \frac{1}{\nu(t_1,t_2)}. \qquad (3.3.6)$$

6-misol. Aytaylik, vaqt yillarda o‘lchanib, yaqin 5 yil ichida $\delta(t)$ ning qiymatlari haqida quyidagicha bashorat qilinadi.

$$S(t)=\begin{cases}0{,}20, & 0\le t<2\\ 0{,}15, & 2\le t<4\\ 0{,}10, & 4\le t\le 5\end{cases}$$

$A(0,t)$ va $v(0,t)$ larni topamiz.

Yechish. $0\le t<2$ da $\int\limits_0^t \delta(s)ds=0{,}20\int\limits_0^t ds=0{,}20t$,

$2\le t<4$ da $\int\limits_0^t \delta(s)ds=\int\limits_0^2 \delta(s)ds+\int\limits_2^t \delta(s)ds=0{,}40+0{,}15(t-2)=0{,}10+0{,}15t$,

$4\le t\le 5$ da $\int\limits_0^t \delta(s)ds=\int\limits_0^{42} \delta(s)ds+\int\limits_4^t \delta(s)ds=0{,}70+0{,}10(t-4)=0{,}30+0{,}10t$.

Shuning uchun

$$A(0;t\ )=\frac{1}{v(0,t\ )}=\begin{cases}\exp\{0{,}20t\}, & 0\le t<2\\ \exp\{0{,}10+0{,}15t, & 2\le t<4\\ \exp\{0{,}30+0{,}10t\}, & 4\le t\le 5\end{cases}$$

Endi $S(t)$ chiziqli funksiya bo‘lgan holda, δ ning o‘zgarmas holi uchun bozorning barqarorlik prinsipi usulidan foydalanish mumkin. Asosiy $[0,T]$ intervalni *n* ta qism intervallarga bo‘lamiz. $0=t_0<t_1<\ t_2<...<t_n\ =T$ va $\tau_j\ =t_{j+1}-t_j$ uzunlikdagi $(t_j;t_{j+1})$ intervalda o‘sish kuchini o‘zgarmas deb hisoblab, uni δ_j deb olamiz $(j=0,1,2,\ .\ .n.-1)$. Jamg‘arma koeffitsiyenti har bir qism interval $(t_j;t_{j+1})$ da $A\ (t_j;t_{j+1})=e^{\tau_j\delta_j}$ ga teng bo‘ladi. Bozorning barqarorlik prinsipiga ko‘ra, $m=0,\ 1,\ ...,\ n$ da

$$A\ (0,\ t_m)=\prod_{j=1}^{m-1}A(t_j,\ t_{j+1})\ =\ \exp\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\tau_j\delta_j\right\}, \tag{3.3.7}$$

(bu yerda va bundan keyin $\prod\limits_{j=0}^{-1}=1,\ \sum\limits_{j=0}^{-1}=0$ deb qabul qilamiz). Shuning uchun, agar $t\in(t_m,\ t_{m+1})$ bo‘lsa, u holda

$$A\ (0,\ t)\ =\ A\ (0,\ t_m)\cdot A\ (t_m,\ t)\ \ =\exp\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\tau_j\delta_j+(t-t_m)\delta_m\right\}. \tag{3.3.8}$$

Endi $[0, T]$ da o‘sish kuchi δ *n*ing o‘rta qiymati tushunchasini kiritamiz: $\bar{\delta} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\tau_j \cdot \delta_j}{T}$. U holda (3.3.7) ga ko‘ra

$$A(0, T) = \exp\left\{\sum_{j=0}^{n-1} \tau_j \delta_j\right\} = e^{\bar{\delta} T} \tag{3.3.9}$$

III bobga doir masalalar

1. Faraz qilaylik, joriy pul qiymati 1000 dollar bo‘lgan pulni janob Ali bank depoziti bo‘yicha 2 yildan so‘ng, o‘zgarmas intensivlik δ bo‘lganda olish zarur bo‘lgan jamg‘arma pul miqdori, joriy qiymati 2700 dollar bo‘lgan pulni janob Vali depozit bo‘yicha 4 yildan so‘ng xuddi shunday δ intensivlik bo‘yicha olish kerak bo‘lgan pul miqdoriga teng bo‘lsa, δ ning qiymati topilsin.

2. O‘zgarmas o‘sish intensivligi $\delta = 10\%$ bo‘lganda uzluksiz ustama foiz bo‘yicha bankka 2 mln. so‘m pul qo‘yilgan bo‘lsin. 10 yildan so‘ng jamg‘arilgan pul miqdori qancha bo‘ladi?

3. Murakkab hisob stavkasi $d = 15\%$ ga ekvivalent bo‘lgan $(\ln 0{,}85 \approx -1{,}6)$ bir yil mobaynidagi uzluksiz ustama foiz bo‘yicha o‘sish kuchi topilsin.

4. Agar boshlang‘ich pul miqdori $i^{(m)} = 20\%$ o‘zgarmas stavka bo‘yicha reinvestirlanayotgan bo‘lsa, u holda 5 yil uchun i_{sam} qiymatini uzluksiz foiz stavkasi uchun hisoblang.

5. O‘n yil uchun o‘sish kuchi $\delta = 10\%$ bo‘lganda uzluksiz ustama foiz bo‘yicha bankka qo‘yilgan pulning jamg‘arma koeffitsiyenti topilsin.

6. Boshlang‘ich pul miqdori 500 ming so‘m bo‘lib, uzluksiz ustama foiz uchun o‘sish intensivligi uzluksiz va uning qiymati $\delta(t) = 0{,}8t$ ga teng. 5 yildan so‘ng jamg‘arilgan pul miqdori topilsin.

7. O‘sish kuchi chiziqli, ya’ni $\delta_t = \delta + at$ (a –vaqt birligidagi o‘sish kuchi) bo‘lib, jamg‘arma muddati n ga teng bo‘lsa. Shu davrda jamg‘arilgan miqdor bilan boshlang‘ich miqdor orasidagi bog‘lanish formulasi topilsin.

8. O‘sish kuchi eksponsional bo‘yicha o‘zgaradigan, ya’ni $\delta_t = \delta a^t$ (δ – o‘sish kuchining boshlang‘ich qiymati, a – o‘zgarmas o‘sish sur’ati) bo‘lganda jamg‘arma ko‘paytuvchisi topilsin.

Ko‘rsatma: jamg‘arma ko‘paytuvchisi $q = e^{\int_0^n \delta_t dt}$.

9. Faraz qilaylik, o‘sish kuchining boshlang‘ich qiymati 8%, foiz stavkasi uzluksiz va chiziqli o‘zgaradi, yillik o‘sish 2% ($a = 0{,}02$). Jamg‘arma muddati 5 yil. Jamg‘arma ko‘paytuvchisi topilsin.

10. Boshlang‘ich o‘sish kuchi 8%, foiz stavkasi uzluksiz va eksponsional o‘zgaradi, yillik o‘sish 20% ($a = 1{,}2$). Jamg‘arma muddati 5 yil. Jamg‘arma ko‘paytuvchisi topilsin.

IV bob. TO‘LOVLAR OQIMI, KAPITAL MABLAG‘LARNI REJALASHTIRISH

4.1. Moliyaviy rentalar

Moliyaviy operatsiyalar ba’zan bir marotabali to‘lovlardan tashkil topib, bu to‘lovlar ketma-ketligi, ya’ni to‘lovlar oqimi turli ishoralarga ega bo‘lishi mumkin. Bunga misol qilib qarz uchun to‘lov, arenda to‘lovi, ishlab chiqarishga yoki qimmatbaho qog‘ozlarga ajratilgan mablag‘lar va hokazolarni olish mumkin.

Faraz qilaylik, shartnoma bo‘yicha moliyaviy operatsiya vaqtning $t_\circ$ momentida boshlanib, t_n momentida tugasin. R_k miqdordagi pulni to‘lash esa t_k momentda sodir bo‘lsin, $k = 0,1,2,...,n$. Shunga ko‘ra, $t_\circ < t_1 < t_2 < ... < t_n$. Nazariy tahlilda odatda $t_0 = 0$ deb qabul qilinadi. Biz bu bobda eng oddiy, lekin keng qo‘llaniladigan, mukammal o‘rganilgan to‘lovlar oqimini ko‘ramiz. Umumiy to‘lovlar haqida keyingi boblarda ma’lumot beramiz.

Ta’rif. Agar barcha R_k to‘lovlar bir xil ishoraga ega va vaqtning bir xil $t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ..., n$ oralig‘ida sodir bo‘lsa, u holda (belgilashga bog‘liq bo‘lmagan holda) bunday to‘lovlar ketma-ketligi moliyaviy renta yoki annuitet deyiladi. Rentalarni tahlil qilishda qulaylik uchun barcha to‘lovlarni musbat deb hisoblaymiz. Bunga misol qilib, kvartira uchun to‘lov, iste’mol kreditlarini to‘lash bo‘yicha badallar, pensiya, uzviy ravishda bank depoziti bo‘yicha yoki qimmatbaho qog‘ozlar bo‘yicha foizlar to‘lovi va hokazolarni olish mumkin. Dastlab yillik to‘lovlar qaralgan, shuning uchun “annuitet” so‘zi (anno - yil) lotinchadan kelib chiqqan. Keyinchalik bir xil vaqt oralig‘idagi bir xil ishorali to‘lovlar kiritildi.

Endi rentalarning asosiy parametrlarini tahlil qilamiz. Buning uchun dastlab tayanch vaqt birligini tanlash va rentalar bo‘yicha barcha hisob-kitoblarni amalga oshirishga yordam beruvchi o‘zgarmas samarali murakkab i foiz berish lozim. Bunda ustama foiz usuli va boshqa texnik ma’lumotlar ko‘rsatiladi. So‘ngra rentaning hadi - R_k ni berish kerak. Agar barcha to‘lovlar bir xil, ya’ni $R_k = R$ bo‘lsa, u holda bunday renta o‘zgarmas, aks holda o‘zgaruvchi deyiladi. O‘zgaruvchi rentaning hadlari oldindan berilgan qoida bo‘yicha o‘zgarishi mumkin. Biz hozircha o‘zgarmas rentalarni o‘rganish bilan cheklanamiz.

Undan so‘ng rentaning davri τ ni yoki to‘lovlar davrini, ya’ni ikki to‘lovlar ketma-ketligi orasidagi kalendar uzunligidagi davr, yana n ta to‘lovlarni berish bilan $n\tau$ - rentalarning kalendar muddatini hosil qilamiz. Nazariy tahlilda ba’zan τ tayanch vaqt birligi qilib olinadi, bunda $t_k = k,\ \ k = 1,2,3,\ldots,n$, to‘lovlar soni n esa renta muddati bilan mos tushadi.

Rentani to‘lash bir yilda bir marta yoki l marta, ustama foiz to‘lovi esa yiliga bir marta yoki *m* marta amalga oshirilishi mumkin. Bu – diskret (l,m) karrali renta bo‘lib, biz faqat $l = m$ bo‘lgan holni qaraymiz. Agar to‘lov yoki ustama foiz tez-tez (masalan, bir haftada) amalga oshiriladigan bo‘lsa, ularni uzluksiz deb tahlil qilish va *uzluksiz* renta deb nomlash mumkin. Agar to‘lov har bir davr oxirida amalga oshirilsa, u holda bunday rentani *postnumerando* yoki *oddiy*, agar davr boshida amalga oshirilsa, u holda *prenumerendo* yoki *oldindan to‘lash* deyiladi.

Ba’zan to‘lovlar har bir davrning o‘rtasida amalga oshiriladi, bunga misol qilib har oydagi to‘lovlardan iborat bo‘lgan har bir pensioner uchun belgilangan kundagi pensiyaning to‘lanishini olish mumkin.

Muddat nuqtai nazaridan renta shartsiz, ya’ni oldindan birinchi va oxirgi to‘lovlar sanasi kelishib olinadigan va shartli, ya’ni birinchi va oxirgi to‘lovlar sanasi qandaydir hodisaning yuz berishi yoki yuz bermasligiga bog‘liq bo‘lgan rentalarga bo‘linadi. Shartli rentaga pensiya misol bo‘ladi, unga to‘lov insonning ma’lum yoshga etganidan keyin amalga oshiriladi va uning o‘limidan so‘ng to‘xtatiladi. Shartli rentaning tahlili sug‘urtaviy matematikaning fundamental bo‘limlaridan biridir. Busiz sug‘urta firmalarining qonuniy faoliyatlari va nafaqa fondlarini yo‘lga qo‘yish mumkin emas.

Darhaqiqat, shartli rentani hisoblash qandaydir hodisaning ehtimoli bilan bog‘liq va hech bo‘lmaganda ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning elementlari haqidagi bilimni talab qiladi. Hozircha biz shartsiz rentalarni qarab chiqamiz. Shartsiz rentani o‘rganish o‘z navbatida shartli rentani mukammal o‘rganish imkonini beradi.

Agar $n=\infty$ bo‘lsa, u holda bunga mos keluvchi renta *abadiy* (perpetuity) renta deyiladi. $n=\infty$ hol nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy jihatdan ham qiziqish uyg‘otadi. Bunga misol qilib, Britaniyaning XIX asrdayoq chiqarilgan “obligatsiyasi”ni olish mumkin. Bunga bir yilda bir marta yiliga 2,5% to‘lanadi va obligatsiya egasining xohishiga ko‘ra xohlagan paytda sotib olinishi mumkin.

Agar renta davri ustama foiz davri bilan ustma-ust tushsa, u holda bunday rentani oddiy, aks holda umumiy renta deb yuritiladi.

4.2. Diskontirlash koeffitsiyentlari va rentalarni jamg‘arish

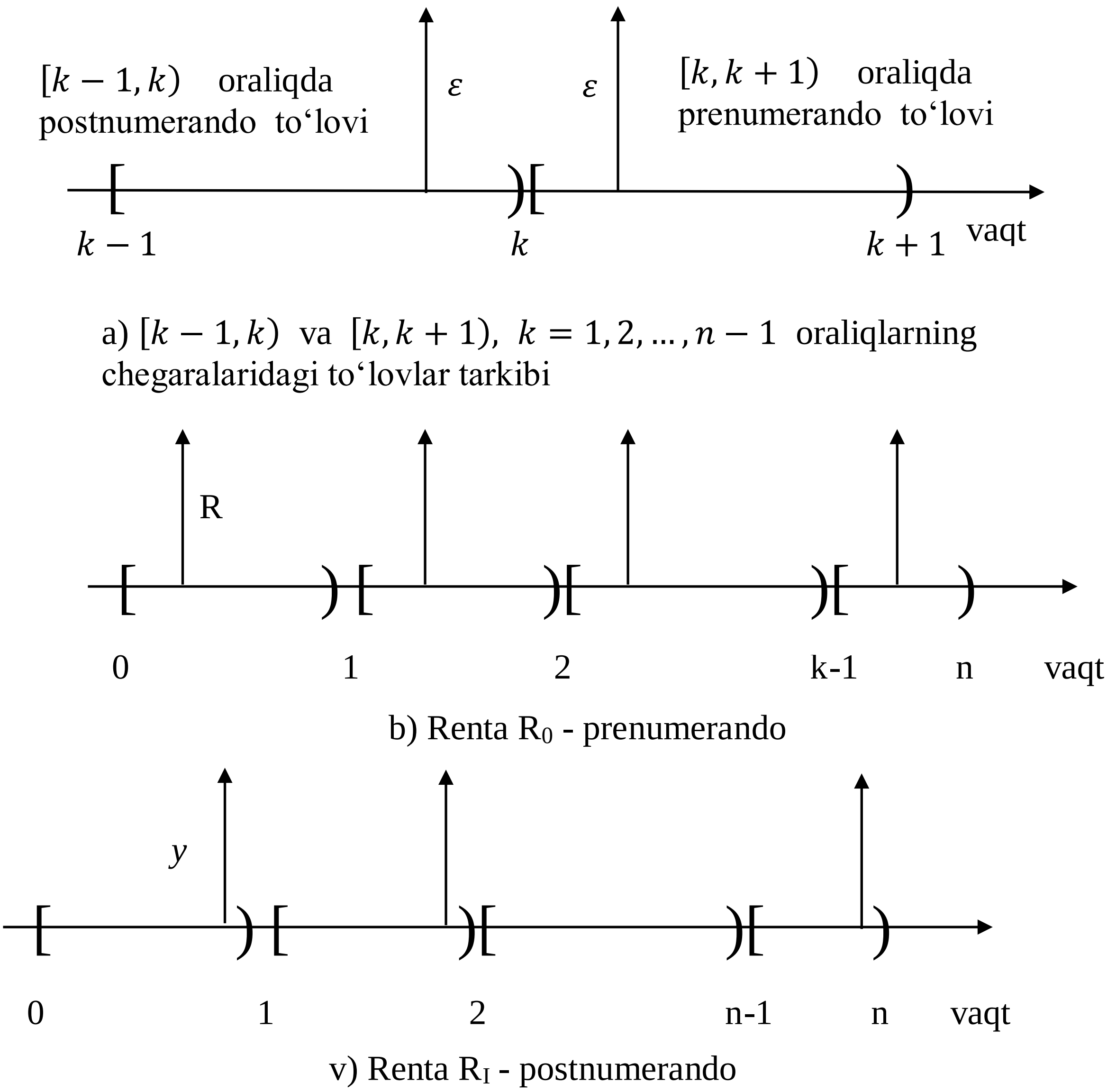
Rentaning davri τ ni tayanch vaqt sifatida qabul qilamiz, u holda uning muddati n birlikni tashkil etadi, bunda n ixtiyoriy butun son, $n\geq 1$.

Aytaylik, rentaning har bir hadi R pul birligiga, tayanch vaqt birligi uchun murakkab foiz stavkasi esa i (samarali stavka) bo‘lsin. Qisqalik uchun prenumerando rentani R_0, postnumerando rentani esa R_1 bilan belgilaymiz. Qulaylik uchun $t_\circ$ momentni 0 deb qabul qilamiz. Oraliqlarning chegaralaridagi to‘lovlarning matematik modelidan qutilish maqsadida shartnoma muddatidan iborat bo‘lgan $[0,n)$ oraliqni bir-biri bilan kesishmaydigan uzunligi 1 ga teng bo‘lgan oraliqlarga bo‘lamiz:

$$[0,\ 1),\ \ [1,\ \ 2),\ldots,[n-1,n)$$

Oraliqlar chap qismining oxiri bu oraliqqa kiradi, o‘ng qismining oxiri esa kirmaydi.

Ko‘rgazmalilik uchun musbat kichik ε sonni tanlaymiz va $[k-1,\ k)$ oraliqda postnumerando to‘lovi $k-\varepsilon$ momentda, $[k,\ k+1)$ oraliqda esa prenumerando to‘lovi $k+\varepsilon,\ \ k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$ momentda yuz beradi deb olamiz.



11-rasm

$k-\varepsilon$ momentning $[k-1,k)$ oralig‘ida postnumerando, $k+\varepsilon$, $k=1,2,\dots,n-1$ momentning $[k,k+1)$ oralig‘ida esa prenumerando to‘lovi yuz beradi deb olamiz.

Masalan, rentaning davri bir oy bo‘lsin, postnumerando to‘lovi birinchi, prenumerado esa oyning oxirgi ish kunida yuz beradi. Bunday holda matematik modelni

$$\varepsilon=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{30}\approx 0{,}01$$

deb olish mumkin. Bundan ko‘rinib turibdiki, ε hisobga olinmaydigan darajada kichik.

Aytaylik, barcha R_0 renta to‘lovlarining t muddatga keltirilgan yig‘indi qiymati $S_0(t)$, R_1 renta uchun esa $S_1(t)$ bo‘lsin, $0 \le t \le n$. Endi bu rentalarning yig‘indi qiymati uchun shartnoma boshida 0 momentdagi renta haqida (joriy qiymat yoki *PV*- renta) va *n* momentda shartnoma oxiridagi renta haqida (jamg‘arilgan qiymat yoki *AV*- renta) formulalarni keltirib chiqaramiz. Bu qiymatlar rentani sotish va sotib olish narxini to‘g‘ri aniqlash uchun kerak bo‘ladi.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$PV(R_0) = S_0(0), \qquad AV(R_0) = S_0(n),$$

$$PV(R_1) = S_1(0), \qquad AV(R_1) = S_1(n).$$

Barcha to‘lovlarni 0 momentga keltiramiz, geometrik progresiya hadlari yig‘indisi formulasi yordamida prenumerando va postnumerendo rentalarning joriy qiymatini topamiz.

$$S_0(0) = R\left(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}\right) = R\frac{1-v^n}{1-v} = R\frac{1-v^n}{d} \qquad (4.2.1)$$

$$S_1(0) = R(v + v^2 + \cdots + v^n) = Rv\frac{1-v^n}{1-v} = Rv\frac{1-v^n}{d} = R\frac{1-v^n}{i} \qquad (4.2.2)$$

bu yerda $v = \dfrac{1}{1+i} = 1-d$ (diskontirlash koeffitsiyenti).

Rentaning 0 momentdagi qiymatidan *n* momentdagi qiymatiga o‘tib prenumerando va postnumerando rentalarining jamg‘arilgan qiymatini hosil qilamiz.

$$S_0(n) = (1-i)^n S_0(0) = Rv^{-n}\frac{1-v^n}{d} \qquad (4.2.3)$$

$$S_1(n) = (1+i)^n S_1(0) = Rv^{-n}\frac{1-v^n}{i} \qquad (4.2.4)$$

R=1 pul birligiga teng bo‘lganda rentaning narxi uchun xalqaro moliyaviy amaliyotda maxsus belgilashlar keng qo‘llaniladi.

Postnumerando va prenumerando rentalarning diskontirlash koeffitsiyentlari mos ravishda

$$a_{n|i} = \frac{S_1(0)}{R} = v + v^2 + \cdots + v^n$$

$$\ddot{a}_{n|i} = \frac{S_0(0)}{R} = 1 + v + \cdots + v^{n-1} \qquad (4.2.5)$$

bulardan

$$a_{n|i} = \frac{1-v^n}{i}, \quad \ddot{a}_{n|i} = \frac{1-v^n}{d} \qquad (4.2.6)$$

n momentdagi postnumerando va prenumerando rentalarning jamg‘arma qiymatlarini mos ravishda quyidagicha belgilaymiz.

$$S_{n|i} = AV_{a|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1,,$$

$$\ddot{S}_{n|i} = AV_{\ddot{a}|i} = (1+i)^{n} + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) \qquad (4.2.7)$$

bundan ko‘rinadiki,

$$S_{n|i} = v^{-n}\frac{1-v^n}{i},, \quad \ddot{S}_{n|i} = v^{-n}\frac{1-v^n}{d} \qquad (4.2.8)$$

$a_{n|i}$ va $\ddot{a}_{n|i}$ kattaliklar rentaning diskontirlash koeffitsiyentlari, $S_{n|i}$ va $\ddot{S}_{n|i}$ kattaliklar esa rentaning jamg‘arma koeffitsiyentlari deb yuritiladi.

1-misol. Aytaylik, renta har kvartalda, foizlar ham har kvartalda bir kvartal uchun $i = 1,\ 5,\ 10,\ 20\%$ stavka bo‘yicha to‘lanadigan bo‘lsin. Quyidagi jadvallarda diskontirlash koeffitsiyenti $a_{n|i}$ postnumerando va jamg‘arma koeffitsiyenti $s_{n|i}$ postnumerando qiymatlari $n = 4,\ 20,\ 50,\ 100$ va i ning berilgan qiymatlari uchun ko‘rsatilgan.

a_{ni}	i			
	0,01	0,05	0,10	0,20
a_{4i}	3,9020	3,5459	3,1699	2,5887
a_{20i}	18,0456	12,4622	8,5136	4,8696
a_{50i}	39,1961	18,2559	9,9148	4,9995
a_{100i}	63,0289	19,8479	9,9993	5,0000

S_{ni}	i			
	0,01	0,05	0,10	0,20
S_{4i}	4,060	4,31	4,64	5,37
S_{20i}	22,019	33,07	57,28	186,7
S_{50i}	64,463	209,35	1164	45497
S_{100i}	170,481	2610,02	137796	$4{,}141\cdot10^8$

Jadvallarga e’tibor bersak, i ning qiymati o‘sishi bilan $a_{n|i}$ qiymatining kamayishini, $S_{n|i}$ qiymatining esa o‘sishini kuzatishimiz mumkin.

Endi rentaning diskontirlash va jamg‘arma koeffitsiyentlarining xossalari bilan tanishamiz. Qulaylik uchun tayanch vaqt birinchi rentaning davriga teng deb hisoblaymiz.

1) Agar $i=0$ bo‘lsa, u holda $v=1$ va har qanday $n\ (n=1,2,\ldots)$ uchun

$$a_{n|i}=\ddot{a}_{n|i}=S_{n|i}=\ddot{S}_{n|i}=1+1+\cdots+1=n \qquad (4.2.9)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2) $n=0$ va $n=1$ bo‘lgan holni qaraymiz: $n=0$ bo‘lgan hol to‘lov yo‘qligini bildiradi. Bunday holda

$$a_{0|i}=\ddot{a}_{0|i}=S_{0|i}=\ddot{S}_{0|i}=0 \qquad (4.2.10)$$

$n=1$ bo‘lganda (4.2.5)ga ko‘ra

$$a_{1|i}=v, \qquad \ddot{a}_{1|i}=1 \qquad (4.2.11)$$

Bu natijani (4.2.6) dan ham olish mumkin edi.

3) $n\geq 1$ da

$$\ddot{a}_{n|i}=1+a_{n-1|i} \qquad (4.2.12)$$

tenglik o‘rinli.

$n\geq 2$ bo‘lganda bu tenglikni isboti

$$\ddot{a}_{n|i}=1+\left(v+v^2+\cdots+v^{n-1}\right)$$

tenglikdan, $n=1$ bo‘lganda esa (4.2.10) tenglikdan kelib chiqadi.

4) $$\ddot{a}_{n|i}=1+\left(v+v^2+\cdots+v^n\right)-v^n=1+a_{n|i}-v^n$$

$$\ddot{S}_{n|i}=\frac{1}{v^n}+\left(\frac{1}{v^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{v}+1\right)-1=\frac{1}{v^n}+S_{n|i}-1 \qquad (4.2.13)$$

$i>0$ va har qanday $n\geq 1$ bo‘lganda

$$\ddot{a}_{n|i}=(1+i)a_{n|i},, \qquad \ddot{S}_{n|i}=(1+i)S_{n|i} \qquad (4.2.14)$$

$$S_{n+1|i}=1+\ddot{S}_{n|i} \qquad (4.2.15)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Isbot.

$$\ddot{a}_{n|i}=\frac{v\left(1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}\right)}{v}=\frac{a_{n|i}}{v}=(1+i)a_{n|i}$$

$$\ddot{S}_{n|i}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\dots+(1+i)=(1+i)\left((1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\dots+1\right)=(1+i)S_{n|i}$$

$$S_{n+1|i}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\dots+(1+i)+1=1+\ddot{S}_{n|i}$$

5) (4.2.14) dan $i>0$ va $n>1$ uchun

$$\ddot{a}_{n|i}>a_{n|i},\qquad \ddot{S}_{n|i}>S_{n|i} \tag{4.2.16}$$

Bu moliyaviy nuqtai nazardan prenumerando to‘lov ketma-ketligining oluvchi uchun qulay ekanligini bildiradi.

6) (4.2.16) dan

$$1=ia_{n|i}+v^n \tag{4.2.17}$$

$$1=d\ddot{a}_{n|i}+v^n \tag{4.2.18}$$

Bu tengliklar (4.2.6) dan kelib chiqadi. (4.2.17) va (4.2.18) formulalarga quyidagicha moliyaviy talqin berish mumkin: 1 pul birligi miqdorida qarzni qoplashni, bu esa o‘z navbatida oy oxirida $1, 2, \dots, n-1$ marta har bir oyda i pul birligi miqdorida to‘lov va oy oxirida n marta $(1+i)$ pul birligi miqdorida qaytarishni bildiradi.

Shunga o‘xshash (4.2.18) formula 1 pul birligi miqdorida qarzni qoplashni, oy boshida $1, 2, \dots, n-1, n$ marta har bir oyda d pul birligi miqdorida to‘lov va oy oxirida 1 pul birligi miqdorida qaytarishini bildiradi.

1. Agar $i>0$ va n cheksiz o‘sib borsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} v^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n}=0$$

Bundan abadiy rentaning joriy qiymati

$$a_{\infty|i}=\lim_{n\to\infty}a_{n|i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-v^n}{i}=\frac{1}{i}$$

$$\ddot{a}_{\infty|i}=\lim_{n\to\infty}\ddot{a}_{n|i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-v^n}{d}=\frac{1}{d} \tag{4.2.19}$$

Demak, joriy qiymat to‘lovlar soni chegaralanmagan holda ham chekli ekan. Inflyatsiya katta bo‘lgan holda pulning qadrsizlanishi tezroq yuzaga keladi.

2-misol. $R=1$ mln. so‘mdan yiliga abadiy renta to‘lanadigan bo‘lsin. Yillik stavka $i=5, 10, 100\%$ bo‘lganda bu rentaning postnumerando va prenumerando joriy qiymatlari topilsin.

Yechish. Bu yerda

$$a_{\infty|0,05} = \frac{1}{0,05} = 20, \qquad a_{\infty|0,10} = \frac{1}{0,10} = 10, \qquad a_{\infty|1} = 1, \qquad \ddot{a}_{\infty|i} = (1+i)a_{\infty|i}$$

bo'lganligi uchun

$$\ddot{a}_{\infty|0,05} = 21, \quad \ddot{a}_{\infty|0,10} = 11, \quad \ddot{a}_{\infty|1} = 2.$$

Demak, abadiy ($n = \infty$) rentaning postnumerando va prenumerando joriy qiymatlari mos ravishda 20, 10 va 1 mln. so'm, 21, 11 va 2 mln. so'mni tashkil etar ekan.

2. $i > 0$ bo'lganda abadiy renta uchun

$$\ddot{a}_{\infty|i} - a_{\infty|i} = \frac{1}{d} - \frac{1}{i} = 1 \tag{4.2.20}$$

3. (4.2.19) ni quyidagicha yozish mumkin

$$ia_{\infty|i} = 1, \; d\ddot{a}_{\infty|i} = 1 \tag{4.2.21}$$

3-misol. Pensiya fondi o'zining a'zolariga har oyda 100000 so'm pul to'lab turishi uchun pensiya fondiga qanday miqdordagi pulni qo'yish lozim bo'ladi. Qulaylik uchun pensiya fondi o'zgarmas $i = 0,5\%$ stavka bo'yicha o'z pulini har oyda investitsiya qilishi mumkin deb hisoblaymiz.

Yechish. Abadiy renta modelidan foydalanamiz. Bunda oylik to'lov $R = 100000$, $i = 0,005$. Oylik renta qanday usulda to'lanishi aytilmagan, shuning uchun biz har ikkala holni, ya'ni to'lovni har oy oxiri va har oy boshi uchun hisoblaymiz.

Birinchi holda

$$S_1(0) = \frac{R}{i} = \frac{100000}{0,005} = 2 \cdot 10^7 = 20 \text{ mln. so'm.}$$

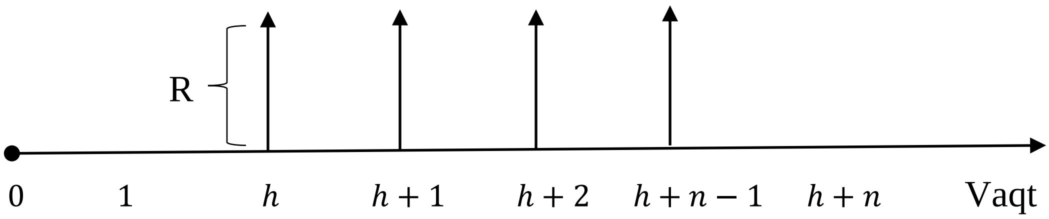
$$S_2(0) = \frac{R}{d} = \frac{R(1+i)}{i} = 2 \cdot 10^7 \cdot 1,005 = 20 \text{ mln 100 ming so'm.}$$

Tekshirish uchun (4.2.20) munosabatdan foydalanish mumkin.

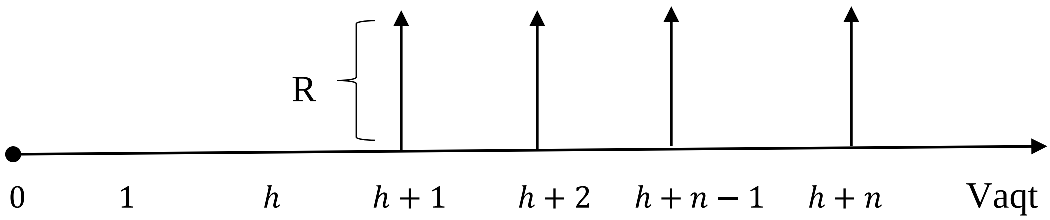
$$S_2(0) - S_1(0) = R(\ddot{a}_{ni} - a_{ni}) = R = 100000 \text{ so'm.}$$

4.3. Qoldirilgan rentalar

Birinchi n birlik to'lovlar ketma-ketligi prenumerando uchun $h + \varepsilon$ momentda, postnumerando uchun esa $h + 1 - \varepsilon$, $h > 0$ momentda yuz bergan holda tayanch rentani umumlashtirishni qarab chiqamiz.



a) h muddatga qoldirilgan prenumerando renta



c) h muddatga qoldirilgan postnumerando renta

12-rasm

Ayrim hollarda, masalan, qarzlarni qoplash maqsadida to‘lovlar qandaydir muddatga qoldiriladi. Bunday turdagi to‘lovlar oqimi qoldirilgan renta (deferred annuities) deb yuritiladi. 0 momentdagi joriy narx (qiymat) ni prenumerando to‘lov uchun $_{h|}\ddot{a}_{n|i}$ bilan, postnumerando uchun esa $_{h|}a_{n|i}$ kabi belgilaymiz. Bunda $n = 1,2,\ldots,$ $h > 0.$ $h = 0$ bo‘lganda qoldirilgan renta tayanch renta bilan mos tushadi.

Darhaqiqat,

$$_{h|}\ddot{a}_{n|i} = v^h + v^{h+1} + \cdots + v^{h+n-1} = v^h\left(1 + v + \cdots + v^{n-1}\right) = v^h\ddot{a}_{n|i}$$

$$_{h|}a_{n|i} = v^{h+1} + v^{h+2} + \cdots + v^{h+n} = v^h a_{n|i}$$

(4.3.1)

Qoldirilgan rentaning joriy qiymatini har qanday $h > 0$ uchun (4.2.6) formuladan foydalanib topishimiz mumkin. Har qanday butun $h = 1,2,\ldots$ va $n = 1,2,\ldots$ da

$$_{h|}\ddot{a}_{n|i} = \left(1 + v + \cdots + v^{h+n-1}\right) - \left(1 + v + \cdots v^{h-1}\right) = \ddot{a}_{n+h|i} - \ddot{a}_{h|i},$$

$$_{h|}a_{n|i} = \left(v + v^2 + \cdots + v^{h+n}\right) - \left(v + v^2 + \cdots + v^h\right) = a_{n+h|i} - a_{h|i} \quad (4.3.2)$$

Shunday qilib, $h \geq 1$ bo‘lganda qoldirilgan rentaning diskontirlash koeffitsiyentini hisoblashda (4.3.1) va (4.3.2) formulalardan foydalanish mumkin, $h>0$ va uning qiymati kasr son bo‘lganda faqat (4.3.1) formuladan foydalaniladi. (4.3.1) va (4.3.2) formulalar $h=0$ bo‘lganda $\ddot{a}_{n|i}$ va $a_{n|i}$ lar bilan mos tushadi. (4.3.1) - (4.3.2) formulalardan

$$\ddot{a}_{n+h|i}=\ddot{a}_{n|i}+v^h\ddot{a}_{n|i},\qquad a_{n+h|i}=a_{n|i}+v^h a_{n|i} \tag{4.3.3}$$

formulalar kelib chiqadi.

(4.3.1) formuladan ko‘rinadiki, *h* va *i* larning o‘sishi bilan joriy qiymat tez sur’atda kamayib ketadi.

4-misol. Postnumerando rentaning yillik parametrlari $R=4$ mln. so‘m, $n=5$, $i=18{,}5\%$ lardan iborat bo‘lib, renta baholash momentidan 1,5 yil o‘tgandan keyin to‘lanadigan bo‘lsa, qoldirilgan rentaning joriy qiymati topilsin.

Yechish.

$$S(0)=Ra_{n|i}=4\cdot\frac{1-1{,}85^{-5}}{0{,}185}=4\cdot 3{,}092=12{,}368 \quad \text{mln. so‘m.}$$

Endi qoldirilgan rentaning joriy qiymatini topamiz: $12{,}368\cdot 1{,}85^{-1{,}5}=9{,}588$ mln. so‘m.

Aytaylik, chegaralangan yillik postnumerando renta vaqt bo‘yicha ikkita ishtirokchi orasida bo‘linadigan bo‘lsin. Renta *R* va *n* parametrlarga ega. Bo‘linish sharti: a) har bir ishtirokchi renta jamg‘arilgan qiymatining 50% ini oladi; b) renta ketma – ket, avval birinchi ishtirokchiga, so‘ngra ikkinchi ishtirokchiga to‘lanadi.

Masala birinchi ishtirokchining renta olish muddatini hisoblashga keltiriladi, uni n_1 bilan belgilaymiz. Qolgan muddatda pulni ikkinchi ishtirokchi oladi. Shunday qilib, birinchi ishtirokchi dastlabki n_1 muddat davomida, ikkinchisi esa $n_2=n-n_1$ muddatdagi qoldirilgan rentani oladi. Yuqoridagi shartlarga asosan rentani bo‘lishdan quyidagi kelib chiqadi: $S_1(0)=n_1S_2(0)$, $Ra_{n_1|i}=Ra_{n_2|i}\cdot v^{n_1}$.

$n_2=n-n_1$ hisobga olsak,

$$\frac{1-(1+i)^{n}}{i}=\frac{1-(1+i)^{-(n-n_1)}}{i}\cdot v^{n_1}.$$

Soddalashtirishlardan so‘ng

$$n_1=\frac{-\ln\left\{\left[1+(1+i)^{-n}\right]/2\right\}}{\ln(1+i)} \quad \text{hosil bo‘ladi.}$$

5-misol. Postnumerando yillik rentaning muddati 10 yil, $i = 20\%$. Renta yuqorida keltirilgandek ikkita ishtirokchi orasida bo‘lingan bo‘lsin. U holda

$$n_1 = \frac{-\ln\left[\left(1+1{,}2^{10}\right)/2\right]}{\ln 1{,}2} = 2{,}961 \approx 3 \quad \text{yil.}$$

Ikkinchi ishtirokchi qolgan 7 yil davomida oladi.

Endi m karrali rentalarni qarab chiqamiz. Tayanch vaqt birligi uchun 1 yil qabul qilib, samarali stavkani i deb belgilaymiz. Bir yil mobaynida m marta to‘lovlar amalga oshgan bo‘lib, ularning har bir keyingisi o‘z oldingisidan $\frac{1}{m}$ pul birligiga farq qilib, ustama foiz ham m marta to‘lanadigan bo‘lsin, $m = 1,2,\ldots$. Umumiy to‘lovlar soni n yil vaqt oralig‘ida mn bo‘ladi, umumiy to‘lovlar qiymati esa $i = 0$ da n pul birligini tashkil etadi. Postnumerando renta to‘lovlari va ustama foizlar uchun

$$\overbrace{\frac{1}{m},\frac{2}{m},\ldots,\frac{m-1}{m},1}^{m \text{ to‘lov}},\ldots,n-1,\overbrace{n-1+\frac{1}{m},\ldots,n-\frac{1}{m},n}^{m \text{ to‘lov}}$$

momentda, prenumerando rentalar uchun esa

$$\overbrace{0,\frac{1}{m},\frac{2}{m},\frac{m-1}{m}}^{m \text{ to‘lov}},1,\ldots,\overbrace{n-1,n-1+\frac{1}{m},\ldots,n-\frac{1}{m}}^{m \text{ to‘lov}}$$

momentda amalga oshadi.

To‘lovlar va ustama foizlar m marta amalga oshgandagi postnumerando va prenumerando rentalar uchun diskontirlash koeffitsiyentlarini mos ravishda $a^{(m)}{}_{n|i^{(m)}}$ va $\ddot{a}^{(m)}{}_{n|i^{(m)}}$, jamg‘arma koeffitsiyentlarini esa $S^{(m)}{}_{n|i^{(m)}}$ va $\ddot{S}^{(m)}{}_{n|i^{(m)}}$ deb belgilaymiz.

Postnumerando rentaning barcha to‘lovlar qiymatini 0 momentga keltirib, quyidagini hosil qilamiz.

$$a^{(m)}_{n|i^{(m)}} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{mn} v^{k/m} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\cdot\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}$$

bu yerda $v=\dfrac{1}{1+i}$ ekanligini, hamda samarali stavka i va nominal stavka $i^{(m)}$ orasidagi

$$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m-1$$

formulani hisobga olib,

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{m[(1+i)^{1/m}-1]}=\frac{1}{m[(1+\dfrac{i^{(m)}}{m})-1]}=\frac{1}{i^m}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$a^{(m)}_{n|i^{(m)}}=\frac{1-v^n}{i^m}=\frac{i}{i^{(m)}}\cdot a_{n|i}\ . \qquad (4.3.4)$$

Demak,

$$S^{(m)}_{n|i^{(m)}}=\left(1+i\right)^n a^{(m)}_{n|i^{(m)}} \qquad (4.3.5)$$

Shunga o‘xshash algebraik almashtirishlarni bajarib, prenumerando renta uchun ushbu formulalarni yozamiz.

$$\ddot{a}^{(m)}_{n|i^{(m)}}=\frac{1-v^n}{d^{(m)}}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{n|i} \qquad (4.3.6)$$

$$S^{(m)}_{n|i^{(m)}}=\frac{\left(1+i\right)^n-1}{d^{(m)}}=\left(1+i\right)^n\ddot{a}_{n|i} \qquad (4.3.7)$$

Yetarlicha katta n uchun (4.3.4) va (4.3.6) formulalarda $i>0$ bo‘lganda limitga o‘tib, m-karrali abadiy renta uchun ushbu munosabatlarga ega bo‘lamiz.

$$a^{(m)}_{\infty|i^{(m)}}=\lim_{n\to\infty}a^{(m)}_{n|i^{(m)}}=\frac{1}{i^{(m)}} \qquad (4.3.8)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\infty|i^{(m)}}=\lim_{n\to\infty}\ddot{a}^{(m)}_{n|i^{(m)}}=\frac{1}{d^{(m)}} \qquad (4.3.9)$$

IV bobga doir masalalar

1. Pensiya fondi o‘zining a’zolariga har oyda 200 ming so‘m to‘lab turishi uchun pensiya fondiga qanday miqdordagi pulni qo‘yish kerak bo‘ladi. Qulaylik uchun pensiya fondi o‘zgarmas $i=2\%$ stavka

bo‘yicha o‘z pulini har oyda investitsiya qilishi mumkin deb hisoblaymiz.

2. Korxona 3 yil mobaynida 150 mln. so‘mlik maxsus fondni tashkil etish maqsadida har yili bankka 15% yillik foiz stavka bo‘yicha to‘lovlar amalga oshiriladi. 3 yil mobaynida jamg‘arilgan puldan to‘lanadigan badal miqdori topilsin.

3. Firma 150 mln. so‘m miqdoridagi fondni tashkil etish maqsadida har yili bankka 43,196 mln. so‘m pul 15% stavka bo‘yicha to‘lanadi. Fondni tashkil etish uchun qancha muddat zarur bo‘lishi topilsin.

4. Renta har kvartalda, foizlar ham har kvartalda bir kvartal uchun $i = 20\%$ stavka bo‘yicha to‘lanadigan bo‘lsin. Postnumerando renta uchun $n = 4$ bo‘lganda diskontirlash koeffitsiyenti va jamg‘arma koeffitsiyenti topilsin.

5. $R = 2$ mln. so‘mdan yiliga abadiy renta to‘lanadigan bo‘lsin. Yillik stavka 10% bo‘lganda bu rentaning postnumerando va prenumerando qiymatlari topilsin.

6. Pensiya fondi o‘zining a’zolariga har oyda 1 mln. so‘m to‘lab turishi uchun pensiya fondiga qanday miqdordagi pulni qo‘yishi lozim bo‘ladi. Qulaylik uchun pensiya fondi o‘zgarmas $i = 0,1\%$ stavka bo‘yicha o‘z pulini har oyda investitsiya qilishi mumkin deb hisoblaymiz.

7. Shartnoma shartiga asosan to‘lovlar yil oxirida amalga oshiriladi, birinchi to‘lov 2 mln. so‘m bo‘lib, uning qiymati har yili 0,2 mln. so‘mga ko‘payadi. To‘lov muddati 4 yil, foiz stavkasi esa 8%. Muddat oxirida jamg‘arilgan pul miqdori topilsin.

8. Firma 5 yil davomida har doim o‘sib boruvchi yiliga 5 mln. so‘m absolyut o‘suvchi to‘lovlar bo‘yicha 150 mln. so‘m kredit olgan. To‘lovlar va ustama foizlar yil oxirida amalga oshirilib, yillik foiz stavka 9%ga teng. Birinchi to‘lov qiymati va umumiy to‘lovlar summasi topilsin.

V bob. O‘ZGARUVCHI VA UZLUKSIZ RENTALAR RENTALARNI ALMASHTIRISH (KONVERSIYA)

Agar vaqtning 0 momentidan $t>0$ momentgacha oraliqda renta tez-tez to‘lanadigan bo‘lsa, bunday rentani uzluksiz renta deb hisoblash mumkin. Bu bobda biz o‘zgaruvchi rentalarning bir qancha turlarini va unga bog‘liq formulalarni qarab chiqamiz.

5.1. Vaqt bo‘yicha hadlari bir xil absolyut o‘zgaradigan rentalar

Rentaning birinchi hadi R va ayirmasi a bo‘lgan arifmetik progressiya bo‘yicha o‘zgaradigan bo‘lsin, ya’ni

$$R, R+a, R+2a, \ldots, R+(n-1)a\,.$$

Rentaning t-hadi $R+(t-1)a$ ga teng. Bu rentaning yig‘indisi (joriy qiymati) yillik postnumerando renta uchun

$$S(0)=\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n|i}-\frac{nav^n}{i} \qquad (5.1.1)$$

Isbot. Yuqoridagi ketma – ketlikning joriy qiymatini topamriz:

$$S(0)=Rv+(R+a)v^2+\cdots+[R+(n-1)a]v^n \qquad (*)$$

(*) ning har ikkala qismini $(1+i)$ ga ko‘paytirib hosil bo‘lgan tenglikdan (*) ning unga mos qismlarini ayiramiz, natijada

$$iS(0)=R+av+av^2+\cdots+av^{n-1}-[R+(n-1)a]v^n=$$

$$=R\left(1-v^n\right)+a\sum_{1}^{n-1}v^t-nav^n+av^n=R\left(1-v^n\right)+aa_{n|i}-nav^n.$$

Bundan

$$S(0)=R\left(\frac{1-v^n}{i}\right)+\frac{aa_{n|i}-nav^n}{i}$$

$$\frac{1-v^n}{i}=a_{n|i}$$

ekanligini hisobga olib,

$$S(0)=\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n|i}-\frac{nav^n}{i}$$ ni hosil qilamiz.

(5.1.1) formulani $(1+i)^n$ ga ko‘paytirib, jamg‘arilgan mablag‘ qiymati formulasini yozamiz:

$$S(n)=\left(R+\frac{a}{i}\right)S_{n|i}-\frac{na}{i} \tag{5.1.2}$$

Endi to‘lovlar absolyut o‘sishi rentaning joriy qiymatiga qanday ta’sir qilishini ko‘raylik. Buning uchun (5.1.1) formulani quyidagicha yozamiz.

$$S(0)=Ra_{n|i}+\frac{a_{n|i}-nv^n}{i}a \tag{5.1.3}$$

Bu formula $S(0)$ ni a ga chiziqli bog‘langanligini ko‘rsatadi. Shunga o‘xshash (5.1.2) formula asosida $S(t)$ ni a ga chiziqli bog‘liqligini ko‘ramiz.

$$S(n)=R_{S_{n|i}}+\frac{\left(S_{n|i}-n\right)}{i}a \tag{5.1.4}$$

(5.1.1) va (5.1.2) formulalarni almashtirish natijasida hosil bo‘lgan (5.1.3) va (5.1.4) formulalar postnumerando renta uchun hosil qilinadi. O‘z navbatida prenumerando renta uchun

$$S(0)=\left[\left(R+\frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n|i}-\frac{nav^n}{i}\right](1+i)=\left(R+\frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n|i}-\frac{nav^{n-1}}{i} \tag{5.1.5}$$

$$S(n)=\left(R+\frac{a}{i}\right)\ddot{S}_{n|i}-\frac{na}{i}(1+i) \tag{5.1.6}$$

1-misol. Postnumerando to‘lovlari vaqt bo‘yicha bir xil oqimni tashkil etib uning birinchi hadi 15 mln. so‘m. Har bir keyingi to‘lovlar har doim 2 mln. so‘mga oshadi. Yillik foiz stavkasi 20% ni tashkil etib, to‘lovlar muddati 10 yil. Shu ma’lumotlar asosida joriy va jamg‘arilgan pul mablag‘lari topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra, $R=15$, $a=2$, $i=20\%$, $n=10$. Jadvaldan $a_{10|20}=4{,}192472$, $v^{10}=0{,}161505$ larni topamiz.

(5.1.1) formulani tatbiq etib,

$$S(0)=\left(15+\frac{2}{0{,}2}\right)\cdot 4{,}192472-\frac{10\cdot 2\cdot 0{,}161505}{0{,}2}=88{,}661 \text{ mln. so‘m.}$$

ni topamiz. (5.1.3) va (5.1.4) formulalarni tatbiq etib ham shu natijalarga ega bo‘lish mumkin.

$$S(0)=15a_{10|20}+\frac{a_{10|20}-10\cdot 1{,}2^{10}}{0{,}2}\cdot 2=62{,}887+25{,}774=88{,}661 \text{ mln. so‘m,}$$

$$S(n)=15S_{10|20}+\frac{S_{10|20}-10}{0{,}2}\cdot 2=389{,}380+159{,}585=548{,}965 \text{ mln. so‘m.}$$

Ba’zan o‘zgaruvchi rentalarni tahlil qilishda teskari masalani yechishga to‘g‘ri keladi, ya’ni rentaning birinchi hadi R yoki uning a o‘sishini boshqa parametrlar bo‘yicha aniqlashga to‘g‘ri keladi.

Yillik postnumerando renta uchun (5.1.1) va (5.1.2) lardan R ni topamiz.

$$R=\frac{S(0)+\frac{nav^n}{i}}{a_{n|i}}-\frac{a}{i}, \qquad (5.1.7)$$

$$R=\frac{S(n)+\frac{na}{i}}{S_{n|i}}-\frac{a}{i}, \qquad (5.1.8)$$

O‘z navbatida R berilgan holda a ni topamiz:

$$a=\frac{\left(S(0)-Ra_{n|i}\right)i}{a_{n|i}-nv^n}, \qquad (5.1.9)$$

$$a=\frac{\left(S(n)-RS_{n|i}\right)i}{S_{n|i}-n} \qquad (5.1.10)$$

5.2. To‘lovlarning o‘zgarmas nisbiy o‘sib borishidagi rentalar

To‘lovlarning o‘zgarmas nisbiy o‘sib borishidagi holatni qaraymiz. Bunday to‘lovlar oqimi geometrik progressiyani tashkil etadi. Uning hadlari $R, Rq, Rq^2, \ldots, Rq^{n-1}$ (q- geometrik progressiyaning maxraji yoki o‘sish sur’ati deb yuritiladi). Bu qator postnumerando rentani tashkil etsin. U holda diskontirlangan to‘lovlar qatori $Rv, Rqv^2, \ldots, Rq^{n-1}v^n$ dan iborat bo‘ladi. Birinchi hadi Rv va maxraji qv bo‘lgan geometrik progressiyaga ega bo‘lamiz. Bu progressiyaning yig‘indisi

$$S(0)=Rv\frac{q^n v^n-1}{qv-1}=R\frac{(qv)^n-1}{q-(1+i)} \qquad (5.2.1)$$

ga teng.

Faraz qilaylik, $q=1+k$ bo‘lsin, bunda $k-$ to‘lovlarning o‘sish sur’ati. Sodda almashtirishlardan so‘ng,

$$S(0)=R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k} \qquad (5.2.2)$$

hosil bo‘ladi. Demak, o‘sish musbat ($k>0$) yoki manfiy ($k<0$) bo‘lishi mumkin.

Rentaning jamg‘arilgan qiymati

$$S(n)=S(0)(1+i)^n=R\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}=R\frac{(1+k)^n-(1+i)^n}{k-i} \qquad 5.2.3)$$

2-misol. Aytaylik, $k=15$ mln. so‘m $i=20\%,\ n=10$. Rentaning hadlari har yili 12% ortadigan bo‘lsin. Bunday holda

$$S(0)=15\cdot\frac{1-\left(\frac{1{,}12}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-0{,}12}=93{,}448 \text{ mln. so‘m,}$$

$$S(n)=15\cdot\frac{1{,}12^{10}-1{,}2^{10}}{1{,}12-1{,}2}=578{,}604 \text{ mln. so‘m.}$$

Agar to‘lovlar vaqt bo‘yicha 10% kamaysa ($k=-0{,}1$), u holda

$$S(0)=15\cdot\frac{1-\left(\frac{0{,}9}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-(-0{,}1)}=47{,}184 \text{ mln. so‘m,}$$

$$S(n)=47{,}184\cdot1{,}2^{10}=292{,}151 \text{ mln. so‘m.}$$

Yillik prenumerando renta uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\ddot{S}(0)=R\frac{(qv)^n-1}{qv-1}\cdot(1+i)=R\cdot\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{k-i}\cdot(1+i) \qquad (5.2.4)$$

$$\ddot{S}(n)=R\cdot\frac{(qv)^n-1}{qv-1}\cdot(1+i)^n=R\cdot\frac{1+\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{k-i}\cdot(1+i)^{n+1} \qquad (5.2.5)$$

5.3. O‘zgarmas uzluksiz renta

Yuqorida qaralgan rentalarda to‘lovlar oqimining hadlari fiksirlangan vaqt oralig‘ida, ya’ni to‘lovlar diskret holda o‘zgarishini ko‘rdik. To‘lovlarning tez-tez amalga oshishini uzluksiz jarayon deb hisoblash mumkin. O‘zgarmas uzluksiz rentalarning joriy va jamg‘arilgan qiymatlarini hisoblaymiz. Uzluksiz rentaning ta’rifiga ko‘ra to‘lovlar soni yiliga $m\to\infty$. Bunday rentaning diskontirlash koeffitsiyentini $a_{n|i}$ deb belgilaymiz. Buni hisoblash uchun $m\to\infty$ limitga o‘tamiz.

$$\overline{a}_{n|i}=\lim_{m\to\infty}a_{n|i}^{(m)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{m[(1+i)^{1/m}-1]}$$

Lopital qoidasini tatbiq etib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{m[(1+i)^{1/m}-1]}=\frac{1}{\ln(1+i)}.$$

Demak,

$$\overline{a}_{n|i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (5.3.1)$$

Uzluksiz rentaning jamg‘arma koeffitsiyentini ham shunga o‘xshash aniqlaymiz.

$$\overline{S}_{n|i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)} \qquad (5.3.2)$$

Ravshanki, diskret to‘lovlar postnumerando rentadan uzluksiz rentaga o‘tganda diskontirlash va jamg‘arma koeffitsiyentlari $\frac{i}{\ln(1+i)}$ marta ortadi. Shunday qilib,

$$\overline{a}_{n|i}=\frac{i}{\ln(1+i)}a_{n|i}; \qquad \overline{S}_{n|i}=\frac{i}{\ln(1+i)}S_{n|i}.$$

(5.3.1) va (5.3.2) formulalar uzluksiz pul tushishini va diskret ustama foiz qo‘shilishini bildiridi. Aslida, har ikkala jarayon (pul tushishi va ustama foiz qo‘shilishi) ham uzluksiz bo‘lgan hol tabiiyroq bo‘ladi. Bu koeffitsiyentlarga mos formulalarni hosil qilish uchun uzluksiz va diskret stavkalarning ekvivalentligidan foydalanamiz.

$\delta=\ln(1+i), \qquad i=e^{\delta}-1,$ bunda δ-o‘sish kuchi.

Bularni hisobga olib, (5.3.1) va (5.3.2) formulalarni quyidagicha yozamiz:

$$\overline{a}_{n|i}=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} \qquad (5.3.3)$$

$$\overline{S}_{n|i}=\frac{e^{\delta n}-1}{\delta} \qquad (5.3.4)$$

(5.3.1), (5.3.2) va (5.3.3), (5.3.4) formulalar bir xil natijani berishi uchun uzluksiz va diskret stavkalar ekvivalent bo‘lishi kerakligini sezamiz.

3-misol. Qazilma boylik chiqadigan joyni ekspluatatsiya qilishdan keladigan daromad yiliga 1 mlrd. so‘m, ekspluatatsiya davri 10 yil, qazib olgan mahsulotni ortish va ularni sotish uzluksiz bo‘lsin deb faraz qilaylik. Daromadning jamg‘arilgan narxi 10%

stavka bo‘yicha diskontirlangandagi joriy qiymat quyidagiga teng bo‘ladi.

$$S(0)=10^9\cdot\frac{1-1{,}1^{-10}}{\ln 1{,}1}=6446{,}91 \text{ mln.so‘m.}$$

Agar diskontirlash o‘sish kuchi 10% bo‘lgan holda amalga oshsa, u holda

$$S(0)=R\ddot{a}_{n|i}=10^9\cdot\frac{1-e^{-0{,}1\cdot 10}}{0{,}1}=6321{,}21 \text{ mln.so‘m.}$$

Ekvivalent diskret stavka 10% bo‘lsa, o‘sish kuchi $\delta=\ln 1{,}1=0{,}09531$ yoki 9,531% bo‘ladi. Bundan

$$S(0)=10^9\cdot\frac{1-e^{-0{,}09553\cdot 10}}{0{,}09531}=6446{,}91 \text{ mln. so‘m}$$

(5.3.3) va (5.3.4) formulalarni integral amali yordamida ham hosil qilish mumkin. Masalan, diskontirlash koeffitsiyentini quyidagicha topamiz:

$$\bar{a}_{n|i}=\int_0^n e^{-\delta t}dt=-\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\Big|_0^n=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Endi bir muhim xususiy holni qaraymiz. Vaqtning bir yillik intervali uchun uzluksiz rentaning jamg‘arma koeffitsiyentini topamiz. m marta to‘lanadigan rentaning shu interval uchun jamg‘arma koeffitsiyentini $\bar{S}_t$ bilan belgilaymiz. Uning $m\to\infty$ limiti

$$\bar{S}_t=\frac{i}{\ln(1+i)}.$$

Bu funksiyani dastlabki uchta hadi bilan chegaralangan holda darajali qatorga yoyamiz:

$$\bar{S}_1=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{12}i^2.$$

Bu natijaga binom yoyilmasining dastlabki uchta hadi yaqinroq bo‘ladi:

$$(1+i)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{8}i^2$$

Natijada

$$\bar{S}_1=(1+i)^{1/2}$$

ga ega bo‘lamiz.

Shunga o‘xshash yillik davr uchun uzluksiz rentaning diskontirlash koeffitsiyentini topamiz:

$$\bar{a}_1 = (1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

Endi o‘zgarmas uzluksiz renta uchun stavka muddati va o‘lchovini topamiz. $S(0) = R\bar{a}_{n|i}$ ni hisobga olib, (5.3.1) ni n ga nisbatan yechamiz:

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{S(0)}{R}\delta\right)}{\delta} \tag{5.3.5}$$

Demak, dastlabki qiymat jamg‘arma qiymatidan iborat bo‘lgan hol uchun

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S(n)}{R}\delta + 1\right)}{\delta} \tag{5.3.6}$$

Endi uzluksiz o‘zgaruvchi to‘lovlar oqimi haqida gaplashamiz. Uzluksiz o‘zgarmas to‘lovlarda yillik pul miqdori R uzluksiz va tekis taqsimlangan deb qaralar edi. Amalda, ayniqsa ishlab chiqarish investitsiyalarni tahlil qilishda to‘lovlar oqimi vaqt bo‘yicha qandaydir qonunga ko‘ra o‘zgaradi.

Agar to‘lovlar oqimi uzluksiz va qandaydir $R_t = f(t)$ funksiya bo‘yicha aniqlanadigan bo‘lsa, u holda n vaqt mobaynida umumiy pul miqdorining tushimi

$$\int_0^n f(t)dt$$

ga teng. Bunday holda jamg‘arilgan pul miqdori

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt$$

formuladan topiladi. Bunday to‘lovlar oqimining joriy qiymati

$$S(0) = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt$$

S va $S(0)$ larning qiymatlarini topish uchun $f(t)$ funksiyaning ko‘rinishini aniqlash lozim. Bu funksiyaning chiziqli va eksponensial bo‘lgan hollarida joriy qiymat hisoblashni ko‘ramiz.

Oqimlar funksiyasi chiziqli

$$R_t = R_0 + at \tag{5.3.7}$$

ko‘rinishda bo‘lsin, bunda $R_0 -$ to‘lovning boshlang‘ich qiymati.

Joriy qiymatni topamiz:

$$S(0) = \int_0^n (R_0 + at)e^{-\delta t}dt = R_0\int_0^n e^{-\delta t}dt + a\int_0^n te^{-\delta t} =$$
$$= R_0\bar{a}_{n|\delta} + \frac{1}{\delta}\left(\bar{a}_{n|\delta} - ne^{-\delta n}\right)a = \left(R_0 + \frac{a}{\delta}\right)\bar{a}_{n|\delta} - \frac{a}{\delta}ne^{-\delta n} \qquad (5.3.8)$$

bunda $\bar{a}_{n|\delta}$ – uzluksiz rentaning diskontirlash koeffitsiyenti. Endi to‘lovlar eksponensial o‘sgan holni qaraylik:

$$R_t = \mathrm{Re}^{qt} \quad , \qquad (5.3.9)$$

bu yerda q – to‘lovlarning uzluksiz o‘sish tezligi.

Bunday rentalarning joriy qiymati:

$$S(0) = R\int_0^n e^{qt}\cdot e^{-\delta t}dt = R\int_0^n e^{(q-\delta)t}dt = R\left.\frac{e^{(q-\delta)t}}{q-\delta}\right|_0^n = R\frac{e^{(q-\delta)n}-1}{q-\delta},$$

(5.3.10)

$q-\delta$ ayirmani quyidagi formuladan topamiz:

$$q-\delta = \ln\frac{1+k}{1+i}$$

bu yerda k – diskret o‘sish tezligi.

4-misol. Daromadning o‘sishi yiliga 5%. Agar $R = 100$, $i = 7\%$, $n = 3$ yil bo‘lsa, u holda joriy va jamg‘arma qiymat topilsin. Masala shartiga ko‘ra,

$$q-\delta = \ln\frac{1+0{,}05}{1+0{,}07} = -0{,}01887$$
$$S(0) = 100\frac{e^{-0{,}01887\cdot 3}-1}{-0{,}01887} = 291{,}5$$
$$S(n) = S(0)(1+i)^3 = 291{,}5\cdot 1{,}07^3 = 357{,}1.$$

5.4. Rentalar konversiyasi

Amalda shartnoma shartlarini ishlab chiqish bosqichida yoki ularning bajarilishi davomida qandaydir sabablarga ko‘ra rentalar to‘lash shartlarini o‘zgartirishga to‘g‘ri keladi. Qisqacha qilib aytganda, so‘z qaralayotgan moliyaviy rentalarni to‘lashdagi shartlarni konvertirlash haqida bormoqda. Konversiyaning sodda holiga rentalarni bir marotaba to‘lash bilan yoki aksincha, bir marotabali to‘lovni renta bilan almashtirish kiradi. Konversiyaning murakkab holiga turli xarakterdagi bir qancha rentalarni bitta rentaga birlashtirish – rentalar konsolidasiyasi deb yuritiluvchi konversiya kiradi. Konversiyaning umumiy holiga rentani bir shartdan boshqa shartdagi rentaga, masalan, abadiy rentani qoldirilgan rentaga, yillik rentani qoldirilgan rentaga almashtirish va h.k. misol bo‘ladi.

Rentalarni birlashtirish deganda bir qancha rentalarni bitta rentaga almashtirishni tushunamiz. Bunday holda moliyaviy ekvivalentlik prinsipiga asosan almashtiruvchi rentaning joriy qiymati almashuvchi rentaning joriy qiymati teng bo‘ladi.

$$P = \sum_q P_q \tag{5.4.1}$$

bunda P – almashtiruvchi rentaning joriy qiymati P_q – q-almashuvchi rentaning joriy qiymati.

Rentalarni birlashtirish ixtiyoriy bo‘lishi mumkin: abadiy va qoldirilgan, yillik va m – karrali va h.k.

Agar almashtiruvchi postnumerando renta abadiy bo‘lsa va uning muddati *n* berilgan bo‘lsa, u holda (5.4.1) dan

$$R = \frac{\sum P_q}{a_{n|i}} \tag{5.4.2}$$

O‘z navbatida, agar to‘lov qiymati (almashtiruvchi renta hadining o‘lchovi) va uning davriyligi berilgan bo‘lsa, u holda yangi rentaning muddati izlanadi. Odatda masala $a_{n|i}$ ning qiymati bo‘yicha *n* ni hisoblashga olib keladi.

Abadiy posnumerando renta uchun ushbuga ega bo‘lamiz:

$$a_{n|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q P_q}{R} \tag{5.4.3}$$

Agar $\sum_q P_q$ ma’lum bo‘lsa, u holda (5.4.3) ga asoslanib *n* ni topamiz.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{\sum P_q}{R} i\right)}{\ln(1+i)} \tag{5.4.4}$$

Masala yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\frac{i\sum P_q}{R} < 1$$

shart bajarilishi lozim.

5-misol. Uchta postnumerando rentalar – abadiy, yillik rentalar bitta qoldirilgan postnumerando renta bilan uch yilga almashadi. Shartnoma bo‘yicha almashadigan renta qoldirilganligini hisobga olgan holda 10 yil muddatga ega. Almashuvchi rentalarning xarakteristikalari $R_q = 100;\ 120;\ 300$ ming so‘m, ularning muddatlari 6; 11 va 8 yil. Agar hisobda murakkab foiz stavkasi 20% deb qabul qilinsa, u holda bu rentaning boshlang‘ich summasi (joriy) 2002,9 ming so‘mdan ko‘proq.

Bunday holda almashuvchi renta hadining qiymati

$$R = \frac{2002{,}946}{a_{7|20}v^3} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459 \cdot 1{,}2^{-3}} = 960{,}189 \text{ ming. so‘m}$$

Agar almashuvchi renta abadiy bo‘lsa, u holda

$$R = \frac{2002{,}946}{3{,}60459} = 555{,}665 \text{ ming so‘m.}$$

Ushbu jadvalda almashuvchi rentalar hadlarini aniqlash ko‘rsatilgan:

R enta(q)	R_q	n_q	i	$a_{n_q\|20}$	$Ra_{n_q\|20}$
1	100	6	20	3,32551	332,551
2	120	11	20	4,32706	519,472
3	300	8	20	3,83716	1151,148
jami	520				2002,946

Faraz qilaylik, muddat berilmagan bo‘lib, yillik to‘lov qiymati berilgan bo‘lsin, masalan bu 1500 ming so‘mdan iborat bo‘lsin. Almashuvchi rentaning muddatini topish lozim bo‘lsin. Dastlab, abadiy rentaning joriy qiymatini, so‘ngra uning muddatini topamiz:

$$P = 2002{,}946 \cdot 1{,}2^3 = 3461{,}091 \text{ ming so‘m.}$$

(5.4.4) formuladan

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{3461{,}091}{1500} \cdot 0{,}2\right)}{\ln 1{,}2} = 3{,}395 \text{ yil.}$$

Natijani 3 yoki 4 yilga qadar yaxlitlab yetishmagani yoki ortiqchasi renta muddatini aniqlash mobaynida qoplanadi.

Yana bir xususiy holni qaraymiz. Aytaylik, almashuvchi rentaning hadi $R = \sum_q R_q$ bo‘lsin. Barcha rentalar yillik, postnumerando. Agar barcha rentalarning foiz stavkalari bir xil bo‘lsa, u holda (5.4.1) formuladan

$$R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q R_q \left[1-(1+i)^{-n_q}\right]}{i}$$

hosil bo‘ladi, bunda *n*- almashuvchi rentaning muddati. Bu tenglikdan

$$n = \frac{\ln R - \ln \sum R_q (1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)} \qquad (5.4.5)$$

kelib chiqadi. Endi abadiy rentani qoldirilgan rentaga almashuvini ko‘raylik. Faraz qilaylik, abadiy postnumerando renta R_1 va n_1 parametrlarga ega bo‘lib, foiz stavkasi i ga teng bo‘lsin. To‘lovlarni t yilga qoldirish zarurati tug‘ilgan bo‘lsin. Boshqacha aytganda abadiy renta qoldirilgan rentaga R_2, n_2, t (t −renta muddatiga kirmaydi) parametrlar bilan almashadi. Agar muddat berilgan bo‘lsa, R_2 aniqlanadi va aksincha. $n_2 = n_1 = n$ bo‘lsin, bu hol uchun ushbu tenglik o‘rinli:

$$R_1 a_{n|i} = R_2 a_{n|i} \cdot v^t,$$

bundan

$$R_2 = R_1 (1+i)^t \qquad (5.4.6)$$

kelib chiqadi.

Yangi rentaning hadi almashuvchi rentaning t vaqt ichida jamg‘arilgan qiymatiga teng bo‘ladi.

Umumiy holda $n_2 = n_1$ bo‘lganda $P_1 = P_2$ tenglikdan

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1|i}}{a_{n_2|i}} \cdot (1+i)^t \qquad (5.4.7)$$

kelib chiqadi.

6-misol. Abadiy renta postnumerando $R_t = 2$ mln. so‘m va 8 yil muddat sharti bilan 2 yilga renta muddati o‘zgarmagan holda qoldirildi. Foiz stavkasi yiliga 20%. (5.4.6) formuladan

$$R_2 = 2 \cdot 1{,}2^2 = 2{,}88 \text{ mln.so‘m}$$

Shunday qilib, abadiy renta to‘lovlaridan voz kechish yillik to‘lovlarni 0,88 mln. so‘mga ko‘paytirib yuboradi. Agar to‘lovlar o‘zgarishi bilan renta muddati ham ortsa, masalan 8 yil o‘rniga $n=11$ yil bo‘lsa, u holda (5.4.7) formuladan

$$R_2 = R_1 \frac{a_{8|20}}{a_{n|i}} \cdot 1{,}2^2 = 2 \cdot \frac{3{,}83716}{4{,}32706} \cdot 1{,}2^2 = 2{,}55393 \text{ mln. so‘m}$$

Endi rentaning hadlari o‘zgarmas bo‘lgan holda yangi rentaning muddatini aniqlaymiz. Aytaylik to‘lovlar t yilga qoldirilsin. Bunday holda

$$Ra_{n_1|i} = Ra_{n_2|i} \cdot v^t \text{ tenglikdan}$$

$$n_2 = \frac{-\ln\left\{1-\left[1-(1+i)^{-n}\right](1+i)^t\right\}}{\ln(1+i)} \quad (5.4.8)$$

hosil bo‘ladi.

7-misol. $R=2$ mln. so‘m, $n=5$ yil, $i=8\%$ shart bilan renta to‘lovlar o‘zgarishsiz qolgan holda 3 yilga qoldirilgan bo‘lsin. Yangi muddatni topish zarur bo‘lsin. (5.4.8) formuladan

$$n_2 = \frac{-\ln\left[1-\left(1-1{,}08^{-5}\right)1{,}08^3\right]}{\ln 1{,}08} = 6{,}689 \text{ yil.}$$

Shunday qilib, rentaning abadiy to‘lovlaridan voz kechish to‘lov muddatini 1,7 yilga ko‘paytirib yuboradi.

Agar R_1 va n_1 parametrli abadiy renta m karrali rentaga R_2, n_2, m parametrlar bilan almashadigan bo‘lsa, hamda almashadigan rentalar muddati, uning davriyligi va stavkasi berilgan bo‘lsa, u holda

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1|i}}{a_{n_2|i}^{(m)}}. \quad (5.4.9)$$

Agar $n_2 = n_1 = n$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{a_{n|i}}{a_{n|i}^{(m)}} = \frac{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]}{i}, \text{ bundan}$$

kelib chiqadi.

$$R_2 = R_1 \frac{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]}{i} \quad (5.4.10)$$

8-misol. $R_1 = 2,\ \ n_1 = n_2 = n$ bo‘lsin. Agar yillik postnumerando renta kvartallik rentaga o‘tsa, u holda renta muddati o‘zgarmagan holda rentalar ekvivalentligiga ko‘ra, $i = 20\%$ uchun

$$R_2 = 2 \cdot \frac{4(1{,}2^{\frac{1}{4}} - 1)}{0{,}2} = 1{,}86541$$

Agar $n_1 = 3,\ \ n_2 = 4$ yil bo‘lsa, (5.4.10) formuladan

$$R_2 = 2 \cdot \frac{a_{3|20}}{a^{(4)}_{4|20}} = 2 \cdot \frac{2{,}10648}{2{,}77552} = 1{,}51791.$$

5.5. Uzoq muddatli qarzlarni to‘lashni rejalashtirish

To‘lovlarning o‘lchami(qiymati)ni aniqlash usullari qarzlarni to‘lash shartlariga, ya’ni qarz muddati, foiz stavkasining miqdori va ko‘rinishi, imtiyoz davri(grace period), foizlarni to‘lash usullari va asosiy qarz summasini to‘lash usullariga bog‘liq bo‘ladi. Imtiyozli davrda asosiy pul to‘lanmasdan, faqat foizlar to‘lanadi. Uzoq muddatli qarzlarni to‘lashda asosiy pul miqdoriga uning foizi qo‘shib to‘lanadi. Asosiy pul miqdori ba’zan bitta to‘lov bilan, ayrim hollarda esa bo‘lib to‘lanadi.

To‘lovlarni aniqlashda quyidagi asosiy belgilashlardan foydalanamiz:

$D -$ qarz miqdori (summasi);

$Y -$ to‘lov miqdori;

$I -$ qarz bo‘yicha foizlar;

$R -$ asosiy qarz summasi bo‘yicha xarajatlar;

$g -$ qarz bo‘yicha foiz stavkasi;

$n -$ qarzning umumiy muddati;

$L -$ imtiyoz davrining uzunligi.

Qarz bo‘yicha xarajatlarni aniqlash qoidasiga ko‘ra $Y = I + R.$ Imtiyozli davrda $Y = I.$ Agar qarz sharti bo‘yicha qarzdor qarz pulini muddat oxirida bitta to‘lov usulida qaytarishni o‘z bo‘yniga olsa, u holda qarz to‘lashni ta’minlash choralarini ko‘rish lozim. Qarz miqdori katta bo‘lgan hollarda to‘lov fondlarini yaratishga to‘g‘ri keladi. To‘lov fondi qarzlarni ketma-ket badallar to‘lash orqali hosil qilinadi. Badallar vaqt bo‘yicha o‘zgarmas va o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin.

Aytaylik, jamg‘arma doimiy ravishda i stavka bo‘yicha murakkab foiz bilan yillik R badal amalga oshiriladigan bo‘lsin. Shu bilan bir vaqtda qarz uchun g stavka bo‘yicha to‘lov amalga oshadi. Bunday holda zudlik to‘lov qiymati

$$Y = Dg + R \tag{5.5.1}$$

ga teng bo‘ladi.

Faraz qilaylik, fond N yilga jamg‘arilgan bo‘lsin. U holda mos keluvchi badallar R, N, i parametrli o‘zgarmas rentani tashkil etadi. Aytaylik, gap postnumerando renta haqida borayotgan bo‘lsin, bunday holda

$$R = \frac{D}{s_{N|i}},$$

bunda $s_{N|i} - N$ muddatli o‘zgarmas rentaning jamg‘arma koeffitsiyenti.

Umuman, zudlik to‘lov miqdori quyidagi formuladan topiladi.

$$Y = Dg + \frac{D}{s_{N|i}} \tag{5.5.2}$$

Agar shartnomada asosiy qarz miqdoriga qo‘shilgan foizlar bilan birlashtirilgan bo‘lsa, u holda zudlik to‘lov qiymati quyidagicha aniqlanadi.

$$Y = D\,\frac{(1+g)^N}{s_{N|i}} \tag{5.5.3}$$

9-misol. 100 mln. so‘m pul 5 yilga 20% ga qarzga berilgan. Bu qarzni to‘lash uchun to‘lov fondi tashkil etiladi. Investirlanayotgan narsaga 22% stavka bo‘yicha foiz to‘lanadi. Zudlik to‘lov miqdorini topish lozim. Fond 5 yilga tashkil etilgan bo‘lib, badallar har yil oxirida bir xil pul miqdorida amalga oshiriladi.

Shunday qilib, $D = 100,\ n = N = 5,\ g = 20\%,\ i = 22\%.\ s_{5|22} = 7,7395826$ ekanligini topamiz va $Y = 100 \cdot 0,2 + \frac{100}{7,7395826} = 20 + 12,92059$ mln. so‘m.

Agar shartnomada asosiy qarz miqdoriga qo‘shilgan foizlar bilan birlashtirilishi qaralayotgan bo‘lsa,

$$Y = \frac{100 \cdot 1,2^5}{7,7395826} = 32,16618 \text{ mln. so‘m.}$$

To‘lov fondini tashkil etishda ikkita i va g foiz stavkalardan foydalaniladi. Birinchisi to‘lov fondining o‘sish tezligini, ikkinchisi esa qarz uchun to‘lanadigan foizlardagi pul miqdorini aniqlaydi. Bunday turda qarzni to‘lash usuli qarzdor uchun $i > g$ bo‘lganda qulay bo‘ladi.

t yil davomida jamg‘arilgan fond miqdori o‘zgarmas renta uchun

$$S_{t+1} = S_t\,(1+i) + R \tag{5.5.4}$$

formuladan topiladi.

O‘zgaruvchi rentalar uchun vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi zudlik to‘lov miqdori

$$Y_t = Dg + R_t$$

bunda $R_t = R + a(t-1),\ t = 1, 2, ,..., N$ formuladan topiladi.

Progressiya ayirmasi a, birinchi hadi R. Oxirgi qiymat quyidagicha topiladi:

$$R = \frac{1}{S_{N|i}}\left[D - a\cdot\frac{(1+i)^N - (1+N_i)}{i^2}\right] \tag{5.5.5}$$

10-misol. To‘lov fondiga yillik postnumerando renta bo‘yicha 5 yil davomida pul tushadi. To‘lov miqdori har gal 500 ming so‘mga ortib boradi. Aytaylik, to‘lovni qoplash momentidagi qarz miqdori 10 mln. so‘m bo‘lib, badallar 10% yillik stavka bo‘yicha ko‘payadi. To‘lov fondini tashkil etish uchun birinchi badal miqdorini aniqlaymiz. $S_{5|10} = 6{,}2051$

$$R = \frac{1}{6{,}2051}\left[10000 - 500\cdot\frac{1{,}1^5 - (1+5\cdot 0{,}1)}{0{,}1^2}\right] = 732{,}91 \text{ ming so‘m.}$$

Bundan $R_t = 732{,}91 + 500(t-1),\ t = 1, 2, ..., 5.$

Kreditorga 9,5% to‘lash shartidagi qarzdorning xarajat dinamikasi ushbu jadvalda berilgan. Jadvalni oxirgi ustuni (5.6.4) formula bo‘yicha to‘ldirilgan:

yil	Foizlar	badallar	qarzlar uchun xarajatlar	Yil oxiridagi jamg‘arma
1	950	732,91	1682,91	732,91
2	950	1232,91	2182,91	2039,11
3	950	1732,91	2682,91	3975,93
4	950	2232,91	3182,91	6606,44
5	950	2732,91	3682,91	10000,00

5.6. Qoldirilgan qarzlarni to‘lash

Amaliy moliyaviy faoliyatda, ayniqsa katta miqdordagi qarzlar kechiktirilib, qismlarga ajratilib to‘lanadi. To‘lashning bunday usulini ayrim hollarda qarzning amortizasiyasi deb yuritiladi.

U har xil usulda amalga oshiriladi:

- asosiy qarzni teng miqdordagi summalarga bo‘lib to‘lash;
- barcha qarzlarni bir xil yoki o‘zgaruvchi miqdordagi summalarga bo‘lib to‘lash.

1. Asosiy qarzni teng summalarga bo‘lib to‘lash usuli

Avval biz asosiy qarzni teng summalarga bo‘lib to‘lash usulini qarab chiqamiz. Aytaylik, D miqdordagi summani n yil davomida to‘lash kerak bo‘lsin. bunday holda har yili qarzni to‘lash uchun ketadigan pul miqdori

$$d = \frac{D}{n}$$

bo‘ladi.

Qarz miqdori quyidagicha ketma-ket kamayib boradi.

$$D,\ D-d,\ D-2d \quad \text{va h.k.}$$

Bunga mos holda to‘lanadigan foizlar ham kamayib boradi.

Faraz qilaylik, yil oxirida bir marta g stavkada foiz to‘lanadigan bo‘lsin. U holda birinchi va keyingi yillardagi to‘lanadigan pul miqdorlari

$Dg,\ (D-d)g,\ (D-2d)g$ va hokazoga teng bo‘ladi.

Foiz to‘lovlari kamayuvchi arifmetik progressiyani tashkil etishini ko‘ramiz. Uning birinchi hadi Dg va ayirmasi $-dg$ dan iborat.

Zudlik to‘lovi birinchi yil oxirida

$$Y_1 = Dg + d$$

t yil oxirida esa

$$Y_t = D_{t-1}g + d, \qquad t = 1, 2, ..., n \qquad (5.6.1)$$

bunda D_t – t yil oxirida qolgan qarz miqdori. Qoldiq qarzni ketma-ket aniqlash mumkin.

$$D_t = \frac{n-1}{n} D_{t-1}$$

Agar qarz bir yilda p marta postnumerando va xuddi shunday chastota bilan $\frac{g}{p}$ stavkada foiz to'lanadigan bo'lsa, u holda to'lov quyidagini tashkil etadi.

$$Y_t = \frac{D_{t-1}}{p} + \frac{D_0}{pn}, \qquad t = 1, 2, ..., pn \qquad (5.6.2)$$

Bunday holda t yil oxiridagi qolgan qarz miqdori quyidagidan iborat bo'ladi.

$$D_t = \frac{pn-1}{pn} D_{t-1}$$

Misol. 5000000 so'm miqdoridagi qarz 5 yil mobaynida ketma-ket teng summalar asosida postnumerando to'lovi bo'yicha to'lanadigan bo'lsin. Qarz uchun 10% yillik stavkada ustama foiz to'lanadi.

Yechish: Har yili to'lanadigan pul miqdori

$$d = \frac{5000000}{5} = 1000000 \text{ (so'm)}.$$

Har yilgi foiz to'lovlari esa

$$5000000 \cdot 0{,}1 = 500000, \qquad (5000000 - 1000000) \cdot 0{,}1 = 400000,$$

$$(5000000 - 2000000) \cdot 0{,}1 = 300000 \text{ va h.k.}$$

Qarzni to‘lash rejasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Yil	yil boshida qolgan qarz miqdori	qarzlar bo‘yicha xarajatlar	qarzni to‘lash	foizlar
1	5000000	1500000	1000000	500000
2	4000000	1400000	1000000	400000
3	3000000	1300000	1000000	300000
4	2000000	1200000	1000000	200000
5	1000000	1100000	1000000	100000

Jadvaldan ko‘rinadiki, asosiy qarz miqdori, qarz uchun xarajatlar va foizlar vaqt o‘tishi bilan kamayib boradi. Qarab chiqilgan bu amortizasiya usulining afzalligi bu yerdagi hisoblashlarning soddaligidadir.

2. Bir xil zudlik to‘lovi bo‘yicha qarzlarni to‘lash usuli

Bu usul bo‘yicha qarzdorning qarz xizmatlari bo‘yicha xarajatlari qarzni to‘lash muddatida o‘zgarmas deb hisoblanadi. Qarzdorning umumiy xarajatlaridan qandaydir qismi foiz to‘lashga ajratiladi, qolgan qismi asosiy qarzni to‘lashga ketadi.

Avvalgi usulga o‘xshab, bu usulda ham qarz miqdori ketma-ket kamayadi, unga bog‘liq ravishda foiz to‘lovlari ham kamayadi va qarzni to‘lash miqdori ko‘payadi.

Ta’rif bo‘yicha

$$Y = D_{t-1}g + d_t = const$$

qarzni to‘lash rejasi odatda qarz muddati berilgan holda ishlab chiqiladi.

To‘lov muddati berilgan hol. Qarzni to‘lash rejasi ishlab chiqishning birinchi bosqichi – zudlik to‘lov miqdorini aniqlashdan iborat.

Undan so‘ng olingan miqdorning foiz to‘lovlari va qarzni to‘lashga ketadigan pul miqdorlariga ajratiladi. Bundan keyin qarzning qolgan qismini oson topish mumkin.

Y pul miqdorini davriy ravishda to‘lash berilgan parametrlar bo‘yicha rentaga teng qiymatlidir. Qarz miqdorini rentaning dastlabki qiymatiga tenglashtirib

$$Y = \frac{D}{a_{n|g}} \qquad (5.6.3)$$

hosil qilamiz, bunda $a_{n|g}$ – yillik rentani g stavka va n muddat bo‘yicha keltirilgan koeffitsiyenti.

Reja ishlab chiqish uchun zarur bo‘lgan barcha kattaliklarni Y kattalik va moliyaviy shartnoma asosida hisoblash mumkin. Birinchi to‘lov summasini topamiz. ta’rifga ko‘ra,

$$d_1 = Y - Dg$$

Qarzni to‘lashga ketgan summalar miqdori vaqt o‘tishi bilan ko‘payadi:

$$d_t = d_{t-1}(1+g) \qquad (5.6.4)$$

To‘lashning bu usulini progressiv usul deb atashadi. Qarzlarni qoplash bo‘yicha to‘lovlar $d_1,\ d_1(1+g), ..., d_1(1+g)^{n-1}$ qatorni tashkil etadi. Bu berilganlar bo‘yicha navbatdan keyingi to‘lovning t vaqt oxirida qarzni to‘lash summasini aniqlash mumkin.

$$W_t = \sum d_1(1+g)^k = d_1 S_{t|g}$$

bunda $S_{t|g}$ – o‘zgarmas postnumerando rentaning jamg‘arma koeffitsiyenti.

Misol. Yuqorida berilgan masala shartlari bo‘yicha $n=5,\ g=10\%.$ Y (noma’lum kattalik). Qarzni to‘lash rejasini tuzish talab qilinsin.

Yechish: Avval $a_{5|10} = 1{,}1^{-1} + 1{,}1^{-2} + 1{,}1^{-3} + 1{,}1^{-4} + 1{,}1^{-5} = 3{,}7900787$

Undan so‘ng

$$Y = \frac{5000000}{3{,}7900787} = 1318987{,}3 \text{ (so‘m)}$$

$$d_1 = 1318987{,}3 - 5000000 \cdot 0{,}1 = 818987{,}3 \text{ (so‘m)}$$

birinchi to‘lovdan keyingi qolgan qarz miqdori

$$D_1 = 5000000 - 818987{,}3 = 3681012{,}7 \text{ (so‘m)}$$

hisoblashlarni ketma-ket davom ettiramiz.

$$d_2 = d_1(1+g) = 818987{,}3 \cdot 1{,}1 = 900886{,}30 \text{ (so‘m)}$$

$$D_2 = 3681012{,}7 - 900886{,}30 = 2780126{,}70 \text{ (so‘m)}$$

$$d_3 = d_1(1+g)^2 = 818987{,}3 \cdot 1{,}21 = 990974{,}30 \text{ (so‘m)}$$

$$D_3 = 2780126{,}70 - 990974{,}30 = 1789152{,}40 \text{ (so‘m)}$$

$$d_4 = d_1(1+g)^3 = 818987{,}3 \cdot 1{,}331 = 1090072{,}00 \text{ (so‘m)}$$

$$D_4 = 1789152{,}40 - 1090072{,}00 = 699080{,}40 \text{(so‘m)}$$

$$d_5 = d_1(1+g)^4 = 818987{,}3 \cdot 1{,}1^4 = 1199079{,}30 \text{(so‘m)}$$

Olingan natijalarni ushbu jadvalga joylashtiramiz:

Yil	yil boshida qolgan qarz miqdori	qarz uchun xarajatlar	foizlar	qarzni to‘lash
1	5000000	1318987,30	500000	818987,30
2	3681012,70	1318987,30	368101,27	900886,30
3	2780126,70	1318987,30	278012,67	990974,30
4	1789152,40	1318987,30	178915,24	1090072,00
5	699080,40	1318987,30	69908,04	1199079,30

Endi uchinchi yil oxiridagi qarzni to‘lash summasini hisoblaymiz. Buni hisoblash uchun (5.6.5) formuladan foydalanamiz.

$$S_{3|10} = (1+0{,}1)^2 + (1+0{,}1) + 1 = 3{,}31$$

$d_1 = 818987{,}30$ ekanligi yuqorida hisoblangan.

Shunday qilib,

$$W_3 = 818987{,}30 \cdot 3{,}31 = 2710847{,}90 \text{ (so‘m)}.$$

Shunga o‘xshash, to‘lov foizi va asosiy qarzni bir yilda bir necha marta amalga oshirish bo‘yicha qarz to‘lash rejasini ishlab chiqish mumkin.

3. Qarz xizmatlari bo‘yicha xarajatlar berilgan hol

Masalaning bunday qo‘yilishi shartnoma shartlarini ishlab chiqishda yuzaga kelishi mumkin. Uning yechimi, ravshanki, qarz to‘lash muddati o‘zgarmas renta muddati kabi aniqlanadi.

Faraz qilaylik, postnumerando to‘lovi bir yilda bir marta amalga oshirilsin. U holda quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{D}{Y} g)}{\ln(1+g)} \tag{5.6.6}$$

Yechim mavjud bo‘lishi uchun $\frac{Dg}{Y} < 1$ shart bajarilishi lozim.

Misol. Qarz miqdori 5000000 so‘m bo‘lib, yiliga 10%ga berilgan. Uni to‘lash uchun yiliga 1000000 so‘mdan to‘lash ko‘zda tutiladi. Qarzni to‘lash uchun qancha muddat ketishini hisoblaymiz.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{5000000 \cdot 0{,}1}{1000000}\right)}{\ln 1{,}1} = 7{,}27 \text{ yil.}$$

Hisob yilini yaxlitlab 7 yil qilib belgilaymiz. Qarzni to‘la qoplash uchun zudlik to‘lovini orttirish zarur

$$Y = \frac{5000000}{a_{7|10}} = \frac{5000000}{4{,}868418} = 1027027{,}6 \text{ (so‘m)}$$

Endi qarz bo‘yicha o‘zgaruvchi xarajatlarni hisoblash usulini ko‘rib chiqamiz. $Y = const$ shart hamma vaqt ham qulay bo‘lavermaydi. Masalan, qarzni to‘lash qandaydir manbadan tushayotgan mablag‘lar bilan bog‘liq bo‘lsa, bunday holda zudlik to‘lov hadlari oldindan berilgan (qarzni to‘lash grafigi) qatorni tashkil etadi yoki qandaydir qonundan (progressiya, funksiyaning berilishi) kelib chiqadi.

Biz xarajatlar geometrik progressiyani tashkil etgan variant bilan chegaralanamiz.

Faraz qilaylik, zudlik to‘lovlar qatori maxraji q bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etsin, u holda bu qatorni o‘zgaruvchi rentalar hadlari ko‘rinishida yozish mumkin: $Y, Yq, Yq^2, ..., Yq^{n-1}$.

Bu qator postnumerando rentani tashkil etsin, u holda diskontirlangan to‘lovlar

$$Y\nu,\ Yq\nu^2, ..., Yq^{n-1}\nu^n \qquad (\nu = \frac{1}{1+g})$$

qatorni tashkil etadi. Bunda q - to‘lovlarning yillik o‘sish sur’ati, g - qarz bo‘yicha foiz stavkasi

$$D = Y\nu \frac{q^n \nu^n - 1}{q\nu - 1} = Y \frac{(q\nu)^n - 1}{q - (1+g)} = Y \frac{(\frac{g}{1+g})^n - 1}{q - (1+g)}$$

bundan

$$Y = D \frac{q - (1+g)}{(\frac{g}{1+g})^n - 1} \qquad (5.6.7)$$

Misol. Qarz miqdori 5000000 so‘m bo‘lib, qarz xarajatlari har yili 10% ga kamayib borsin; qarzni to‘lashning umumiy muddati 5 yil, qarz bo‘yicha yillik foiz stavkasi 5%. Qarzni to‘lash rejasi tuzilsin.

Yechish: Masalaning shartiga ko‘ra,

$D_{\circ} = 5000000,\ n = 5,\ g = 0{,}05,\ q = 0{,}9$. (5.6.7) formulaga asosan birinchi zudlik to‘lovi

$$Y_1 = 5000000\frac{0{,}9-1{,}05}{(\frac{0{,}9}{1{,}05})^5 - 1} = 1396648{,}0 \text{ (so‘m).}$$

Birinchi davrda foiz to‘lovlari $5000000 \cdot 0{,}05 = 250000$ (so‘m), shu davrda qarzni to‘lash summasi $1396648 - 250000 = 1146648$ (so‘m). Ikkinchi yil boshida qarzning qolgan qismi $5000000 - 1146648 = 3853352$ (so‘m).

Zudlik to‘lovi $Y_t \cdot 0{,}9^{t-1}$ dan topiladi: $Y_1 = 1396648$ (so‘m)

$$Y_2 = 1396648 \cdot 0{,}9 = 1256983{,}20 \text{ (so‘m)}$$

$$Y_3 = 1256983{,}20 \cdot 0{,}81 = 1018156{,}30 \text{ (so‘m)}$$

$$Y_4 = 1018156{,}30 \cdot 0{,}729 = 742235{,}94 \text{ (so‘m)}$$

$$Y_5 = 742235{,}94 \cdot 0{,}59049 = 438282{,}90 \text{ (so‘m)}$$

Qarzni to‘lash rejasi quyidagi jadvalda berilgan:

Yil	yil boshida qolgan qarz miqdori	qarz uchun xarajatlar	Foizlar	qarzni to‘lash
1	5000000	1396648	250000	1146648
2	3853352	1256983,20	192667,60	1069315,60
3	2789036,40	1018156,30	139451,82	878704,50
4	1910331,90	742235,94	95516,60	646719,34
5	1263612,60	438282,90	63180,63	375102,27

5.7. Imtiyozli kreditlar

Ayrim hollarda kreditlar imtiyozli beriladi. Eng keng tarqalgan kreditlardan biri berilgan momentda taklif etilayotgan kreditning kichik foiz stavkasida berilishidir. Natijada bunday imtiyozda qarzdor yaxshi mablag‘ imkoniyatiga ega bo‘ladi. Kreditor esa bunday operatsiyada ma’lum miqdorda mablag‘ni qo‘ldan chiqaradi. Berilgan momentning mablag‘lar bozorida past stavkada kredit berilishini grant-element (grant-element) deb yuritiladi. Grant-element ikki ko‘rinishda aniqlanadi: absolyut va nisbiy.

Absolyut grant-element miqdori quyidagicha topiladi:

$$W = D - G \tag{5.7.1}$$

bu yerda W – absolyut grant-element, D – qarz summasi, G – kredit bozorining real stavkasi bo‘yicha qarzni qoplash uchun tushadigan hozirgi to‘lovlar miqdori.

Nisbiy grant-element absolyut grant-elementning qarz summasiga bo‘lgan nisbati bilan aniqlanadi:

$$S = \frac{W}{D} = \frac{D-G}{D} = 1 - \frac{G}{D} \qquad (5.7.2)$$

S – nisbiy grant-element.

Endi W va S ni hisoblashning ishchi formulalarini qarz va foizlar o‘zgarmas zudlik to‘lovlari sharoiti uchun keltirib chiqaramiz.

Aytaylik, qarz n yilga berilgan bo‘lib, uni to‘lash imtiyozli g stavka bo‘yicha amalga oshirilsin. Pul bozorida shunga o‘xshash muddat bo‘yicha va qarz miqdori i stavka bo‘yicha beriladi. Bunday holda imtiyozli davr bo‘lmaganda zudlik to‘lovi

$$Y = \frac{D}{a_{n|g}}, \qquad (5.7.3)$$

qarzdorning barcha to‘lovlarining hozirgi qiymati esa $Ya_{n|i}$ ga teng.

Natijada

$$W = D - Y a_{n|i} = D\left(1 - \frac{a_{n|i}}{a_{n|g}}\right) \qquad (5.7.4)$$

$$\delta = 1 - \frac{a_{n|i}}{a_{n|g}}, \qquad (5.7.5)$$

bunda $a_{n|i}$, $a_{n|g}$ – i va g foiz stavkalari uchun $(i > g)$ aniqlangan o‘zgarmas yillik postnumerando rentaning keltirilgan koeffitsiyentlari.

Misol. Imtiyozli kredit 10 yilga 3,8% ga berildi. Qarzni teng zudlik to‘lovlar asosida to‘lash ko‘zda tutilmoqda. Bunday muddat uchun bozor stavkasi 8%. Kreditning dastlabki miqdori 10 mln. so‘m bo‘lsa, nisbiy grant-element va absolyut grant-elementlarni toping.

$$\delta = 1 - \frac{a_{10|8}}{a_{10|3,8}} = 1 - 6{,}71008 \cdot \frac{0{,}038}{1 - 1{,}038^{-10}} = 0{,}1809$$

$$W = 10 \cdot 0{,}1809 = 1{,}809 \text{ mln. so‘m.}$$

Demak, kreditorning yutqazgan pul miqdori yoki qarzdorning yutug‘i 1,809 mln. so‘mni tashkil etadi.

Agar imtiyozli davrda qarzdor foiz to‘lasa, u holda qarz bo‘yicha tushayotgan pul miqdori imtiyozli davrda foiz to‘lovlarining hozirgi qiymati va qolgan davrdagi zudlik to‘lovlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shunday qilib,

$$G = D_g \cdot a_{L|i} + Y \cdot a_{n-L|i}\, \nu^L \qquad (5.7.6)$$

bunda $n - L$ - qarzni to‘lash davrining davomiyligi; L – imtiyozli davrning davomiyligi. (5.7.5) formuladan

$$\delta = 1 - \frac{G}{D} = 1 - \left(\frac{a_{n-L|i}\nu^L}{a_{n-L|g}} + g \cdot a_{L|i} \right) \qquad (5.7.7)$$

hosil qilamiz. Bu formulani hosil qilish uchun (5.7.6) dan va $Y = D \big/ a_{n-L|i}$ formuladan foydalanamiz:

$$\frac{G}{D} = g\, a_{L|i} + \frac{1}{a_{n-L|g}} \cdot a_{n-L|g} \cdot \nu^L$$

Natijada

$$\delta = 1 - \frac{a_{n-L|i}}{a_{n-L|g}} \nu^L + g \cdot a_{L|i}\,.$$

5.8. Ipoteka ssudasi

Bozor iqtisodiyoti rivojlangan mamlakatlarda garovga berilgan ko‘chmas mulk yoki ipoteka keng tarqalgan. Bunday operatsiyada ko‘chmas mulk (yer, uy va h.k) egasi (mortgagor) shu mulk uchun garovga qarz oladi. Qarz belgilangan muddatda qaytarilmasa, garovga olingan mulk qarz beruvchining (mortgage) shaxsiy mulkiga aylanadi.

Odatda ssuda garovga olingan mulk narxidan kichik bo‘ladi. Ipoteka ssudasining afzalligi uni to‘lash muddatining kattaligidadir. Ipoteka ssudalari tijorat va maxsus ipoteka banklari tomonidan beriladi. Ipoteka ssudasi O‘zbekistonda ham joriy qilinmoqda. Respublikamizda bir nechta ipoteka banklari faoliyat ko‘rsata boshladi. Ipoteka ssudalarining bir nechta turlari mavjud.

To‘lovlarning o‘sib borishidagi ssudalar (graduated mortgage, GPM). Bunday turdagi ssudalarda birinchi yillarda qarz xizmatlari bo‘yicha xarajatlarning bir xil o‘sishi qaraladi. Qolgan vaqtlarda to‘lov o‘zgarmas badallar bo‘yicha amalga oshiriladi. Ipoteka ssudasining bunday variantida to‘lovlar kelishilgan grafik asosida har 3-5 yilda badallar summasi ortib boradi.

Imtiyozli davr ssudasi. Ipoteka sharoitida imtiyoz davrida qarz bo‘yicha faqat foizlar to‘lanadi. Yuqorida ta’kidlanganidek, ipoteka ssudasi uzoq muddatga beriladi. Shu sababli hatto iqtisod bir maromda bo‘lgan davrda ham risk bo‘ladi, xususan, kredit bozorida foiz stavkasining o‘zgarishi riskni yuzaga keltiradi. Bunday ipotekaga quyidagilar kiradi.

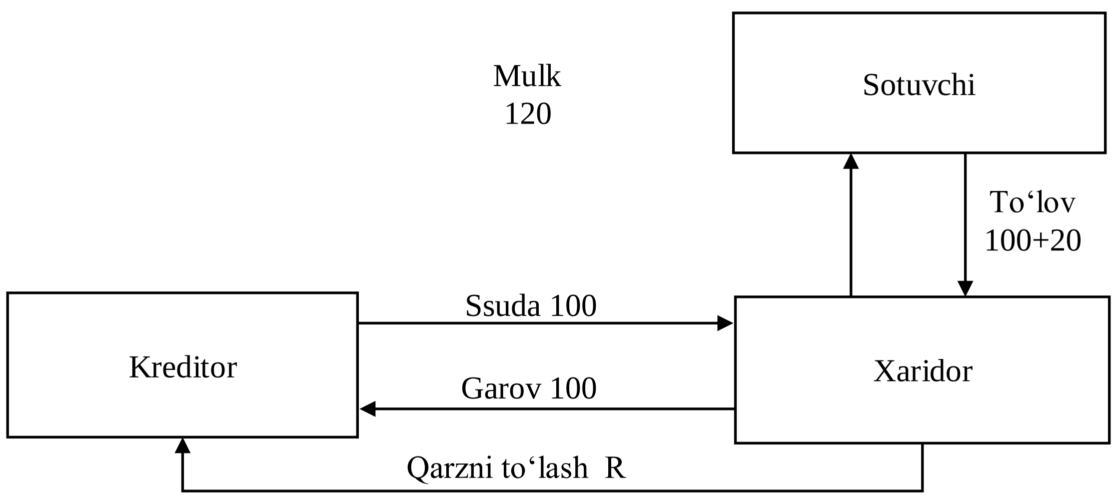
Foiz stavkasi davriy o‘zgarishidagi ssudalar (rollover mortgage, RM). Bunday ssudada tomonlar har 3-5 yilda foiz stavkasining o‘zgarish darajasini qarab chiqadilar. Natijada bozor sharoitiga ma’lum miqdorda moslashuv imkoniyati yaratiladi.

O‘zgaruvchi foiz stavkali ipoteka (variable-rate mortgage, VRM). Bu yerda stavka darajasi qandaydir keng tarqalgan moliyaviy ko‘rsatkichga yoki indeksga bog‘lanadi. Odatda stavkani qarab chiqish har yarim yilda amalga oshiriladi. Stavka o‘zgarishi tez-tez yuz bermasligi uchun stavkaning yuqori va quyi chegarasi qarab chiqiladi (masalan, 2% dan ko‘p emas).

Ipoteka tahlilining asosiy masalasi qarzni to‘lash rejasini ishlab chiqishdan iborat. Qarzni to‘lash jarayonining istalgan paytida qolgan qarzlar summasini aniqlash juda muhim.

Quyida uchta ipoteka sxemalari uchun bu muammoni yechish usullari muhokama qilinadi.

Garov uchun (qurilish) obyektni sotib olishda ipotekani amalga oshirish uchun uchta agent qatnashadigan bo‘lsin: sotuvchi, xaridor(qarzdor) va kreditor. Ular orasidagi o‘zaro bog‘lanish ushbu sxemada ko‘rsatilgan.



Sotuvchi xaridordan to‘la narxi (120) bo‘lgan qandaydir mulkni oladi. Buning uchun xaridor bu mulkdan garovga ssuda (100) oladi va o‘zining shaxsiy mablag‘iga (20) qo‘shadi. Natijada oylik qarz to‘lovi R ning miqdorini aniqlash va qarzni to‘la qoplashgacha bo‘lgan davrda qolgan qarzni to‘lash masalasi yuzaga keladi.

Darhaqiqat, qarz to‘lovlari (badallar) o‘zgarmas rentani tashkil etadi, qo‘yilgan masalani hal qilishda uzoq muddatli qarzlarni to‘lash rejasini ishlab chiqish usulini tatbiq etamiz. Buning uchun ssudaning miqdori bilan zudlik to‘lov miqdorini tenglashtiramiz. Oylik postnumerando badallar uchun

$$D = R\,a_{N|i}$$

formulani yozamiz, bunda D – ssuda miqdori; N – umumiy to‘lovlar soni, $N = 12n$ (n – yillardagi to‘lash muddati); i – oylik foiz stavkasi; R – oylik badallar miqdori; $a_{N|i}$ – o‘zgarmas rentaning keltirilgan koeffitsiyenti.

Izlangan badal qiymati

$$R = \frac{D}{a_{N|i}} \tag{5.8.1}$$

Prenumerando renta uchun

$$R = \frac{D}{a_{N|i}}(1+i) \tag{5.8.2}$$

(5.8.1) yoki (5.8.2) formulalardan topilgan zudlik to‘lovining qiymati qarz to‘lash rejasini ishlab chiqish negizi hisoblanadi.

Qabul qilingan qoidaga binoan bu summadan foizlar to‘lanadi, qolgan pullar qarzni to‘lashga sarflanadi.

Misol. Ko‘chmas mulk uchun garovga 100 mln. so‘m pul 10 yil muddatga qarzga berildi. To‘lov oylik postnumerando, qarz uchun 12% nominal yillik stavka bo‘yicha ustama foiz to‘lanadi. Qarzni to‘lash rejasi tuzilsin.

Yechish: $N = 12n = 12\cdot 10 = 120,\quad i = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01,\quad a_{120|1} = 69{,}70052$. Bu shartlar uchun qarzdorning oylik xarajatlari

$$R = \frac{100\ \text{млн.сум}}{69{,}70052} = 1{,}434\ \text{mln. so‘m.}$$

Birinchi oy uchun foizlar

$$100\ \text{млн. сум}\cdot 0{,}01 = 1\ \text{mln. so‘m.}$$

Qarzni to‘lash uchun $1{,}434-1=0{,}434$ mln. so‘m. Qarzni to‘lash rejasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Oy	oy boshida qolgan qarz miqdori	badal	foizlar	qarzni to‘lash
1	100,000	1,434	1,000	0,434
2	99,565	1,434	0,995	0,439
3	99,126	1,434	0,991	0,443
...				
37	81,274	1,434	0,813	0,622
38	80,652	1,434	0,806	0,628
39	80,018	1,434	0,800	0,634
…				
118	4,219	1,434	0,042	1,392
119	2,827	1,434	0,028	1,406
120	1,421	1,434	0,042	1,421

Endi boshqa masalaga o‘tamiz. Ssudani garovga berishda ikkala tomon uchun to‘langan qarz summasini va ixtiyoriy oraliq momentida (masalan, shartnomani bajarilmasligi yoki uni ko‘rib chiqish to‘xtatilganda) qarzning qancha qismi qolganini bilish muhim ahamiyatga ega.

Ipoteka shartiga asoslangan holda quyidagi munosabatni yozamiz:

$$d_t = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1},$$

bunda d_t – to‘lanadigan qarz miqdori, t – oyning tartib nomeri, i – oylik foiz stavkasi.

Oy boshidagi qoldiq qarz

$$D_{t+1} = D_t - d_t, \qquad t = 1, ..., 12n$$

Qarzni ketma-ket to‘lash summalari birinchi hadi d_1 va maxraji $(1+i)$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Ma’lumki,

$$d_1 = R - Di \tag{5.8.3}$$

To‘lash boshidan t gacha (t - *b*u davr oralig‘iga kiradi) bo‘lgan davr orasida bu geometrik progressiyaning yig‘indisi

$$W_t = d_1 S_{t|i} \tag{5.8.4}$$

bunda $S_{t|i}$ – o‘zgarmas postnumerando rentaning jamg‘arma koeffitsiyenti oy boshidagi qolgan qarzni quyidagi formuladan topamiz:

$$D_{t+1} = D_1 - W_t \tag{5.8.5}$$

<u>Qarzni to‘la to‘lamagan holdagi va muddat oxirida qoldiq qarzni to‘lashdagi standart ipoteka (ballon mortgage)</u>. Bunday ipotekaning sharti davriy badallar miqdorini kamaytirishga yoki ssuda muddatini qisqartirishga imkon yaratadi. Zudlik to‘lovi shunday hisoblanadiki, bunda ular hamma qarzni to‘la qoplamaydi. Muddat oxirida to‘lanadigan qoldiq (ballon) qarzni B bilan belgilaymiz.

Ipotekaning balans tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega

$$D = R\,a_{N|i} + B\nu^N$$

Quyidagi hollardan birida balansga erishiladi:

a) zudlik to‘lovining miqdori beriladi, B ning qiymati aniqlanadi:

$$B = (1+i)^N \cdot (D - R\ a_{N|i}$$

b) B beriladi, zudlik to‘lovining miqdori topiladi:

$$R = \frac{D_1 - B\nu^N}{a_{N|i}}$$

<u>Badallarning davriy ravishda o‘sishidagi ssuda</u>.

Bu variantda ipoteka badallar ketma-ketligi yordamida beriladi. Aytaylik, badallarning o‘sishi m vaqtning teng intervallari orqali amalga oshsin.

Har bir intervalda badal o‘zgarmas. Ravshanki, to‘la balanslash-tiruvchi sxema uchun oxirga badal miqdori berilmaydi, u qarzning qoldiqlari yig‘indisi bo‘yicha aniqlanadi.

Faraz qilaylik, badallar miqdori $R_1, \ldots, R_k$ bo‘lsin. Oxirgi badal qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun birdan $k-1$ gacha oraliqda operasiya boshida badalning hozirgi narxini topamiz. Uni Q bilan belgilaymiz:

$$Q = \sum_{1}^{k-1} R_t\ a_{m|i}\nu^{(t-1)m}$$

Badallar bilan qoplanmagan qarzning hozirgi narxi oxirgi davr boshida

$$W = D - Q\,.$$

Bundan ipotekaning oxirgi davrida badal miqdori quyidagi formula yordamida topiladi:

$$R_k = \frac{W}{a_{m|i}\ \nu^{(k-1)m}}$$

V bobga doir masalalar

1. Postnumerando to‘lovlari vaqt bo‘yicha bir xil oqimni tashkil etib, uning birinchi hadi 12 mln. so‘m. Har bir keyingi to‘lovlar har doim 2 mln. so‘mga ortadi. Yillik foiz stavkasi 20%. To‘lovlar muddati 5 yil. Shu ma’lumotlar bo‘yicha joriy va jamg‘arilgan pul miqdorlari topilsin.

2. Qazilma boylik chiqaradigan joyni ekspluatasiya qilishdan keladigan daromad yiliga 2 mlrd. so‘m, ekspluatasiya davri 5 yil, qazib olingan mahsulotni ortish va ularni sotish uzluksiz bo‘lsin deb hisoblab, daromadni jamg‘arilgan narxi 10% stavka bo‘yicha diskontirlangandagi joriy qiymat topilsin.

3. Daromadning o‘sishi yiliga 10%. Agar $R=100,\ i=10\%,\ n=2$ yil bo‘lsa, u holda joriy va jamg‘arma qiymat topilsin.

4. Abadiy postnumerando renta $R_t=3$ mln. so‘m va 5 yil muddat sharti bilan 2 yilga renta muddati o‘zgarmagan holda qoldirildi. Foiz stavkasi yiliga 20% bo‘lsa, almashuvchi rentaning hadi topilsin.

5. $R=3$ mln. so‘m, $n=4$ yil, $i=10\%$ shart bilan renta to‘lovlar o‘zgarishsiz qolgan holda 3 yilga qoldirilgan bo‘lsa, yangi muddatni toping?

6. 200 mln. so‘m pul 5 yilga 20%ga qarzga berilgan. Bu qarzni to‘lash uchun to‘lov fondi tashkil etiladi. Investirlanayotgan narsaga 22% stavka bo‘yicha foiz to‘lanadi. Agar fond 5 yilga tashkil etilgan bo‘lib, badallar har yil oxirida bir xil pul miqdorida amalga oshiriladigan bo‘lsa, zudlik to‘lov miqdori topilsin.

7. To‘lov fondiga yillik postnumerando renta bo‘yicha 5 yil davomida pul tushadi. To‘lov miqdori har gal 200 ming so‘mga ortib boradi. Qarzni qoplash momentidagi qarz miqdori 5 mln. so‘m bo‘lib, badallar 10% yillik stavka bo‘yicha ko‘payadigan bo‘lsa, to‘lov fondini tashkil etish uchun birinchi badal miqdori va yil oxiridagi jamg‘arma topilsin.

8. Uchta postnumerando rentalar – abadiy, yillik rentalar bitta qoldirilgan postnumerando renta bilan uch yilga almashadi. Shartnoma bo‘yicha almashadigan renta qoldirilganligini hisobga olgan holda 10 yil muddatga ega. Almashuvchi rentalarning xarakteristikalari $R_q=100;120;200$ ming so‘m, ularning muddatlari 5; 10; 8 yil. Agar hisobda murakkab foiz stavkasi 20% deb qabul qilinsa, u holda bu rentaning boshlang‘ich (joriy) qiymati hamda almashuvchi rentalar hadlarining qiymatlari topilsin.

VI bob. IQTISODIY KO‘RSATKICHLARNING TO‘SIQLI QIYMATLARINI ANIQLASH USULLARI

6.1. Iqtisodiy ko‘rsatkichlarning to‘siqli qiymatlarini aniqlashning chiziqli modeli

Amaliy moliyaviy tahlilda qandaydir iqtisodiy parametrlarning to‘siqli (kritik, mumkin bo‘lgan chegaraviy) qiymatlarini aniqlash zarurati tug‘iladi. To‘siqli qiymat deganda, shunday iqtisodiy kattalikni tushunamizki, bu qiymatning o‘zgarishida qandaydir iqtisodiy parametr ortadi yoki kamayadi. Masalan, qandaydir ishlab chiqarish mahsuloti hajmini aniqlash haqida gap borayotgan bo‘lsa, u holda ishlab chiqarish hajmining to‘siqli qiymati deb shunday qiymatni tushunamizki, bunda olingan foyda nolga teng bo‘ladi. Bu hajmning ortishi foyda, kamayishi esa zarar keltiradi. Bu qiymatni ba’zan kritik nuqta deb atashadi. To‘siqli yoki kritik nuqta usuli biznes-rejani tuzishda, foiz stavkasi, tovar narxi va moliyaviy operatsiyalar muddatini aniqlashda va boshqa masalalarni hal qilishda qo‘llaniladi.

To‘siqli qiymatni topishning chiziqli va nochiziqli modellari mavjud.

Aytaylik, qandaydir tovarni ishlab chiqarishda uning kritik hajmini topish masalasi qaralayotgan va miqdoriy kattaliklar chiziqli bog‘langan, ya’ni chiziqli model qo‘llaniladigan bo‘lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$Q -$ ishlab chiqarish hajmi;

$F -$ o‘zgarmas ishlab chiqarish xarajatlari, ishlab chiqarish hajmiga bog‘liq bo‘lmagan xarajat;

$C -$ o‘zgaruvchi yoki proporsional xarajatlar (mahsulotni bir birligiga);

$P -$ mahsulot birligining narxi;

$S -$ xarajatning umumiy yig‘indisi;

$V -$ ishlab chiqarilgan mahsulotning umumiy narxi;

$\Phi -$ soliq to‘lanmasdan oldingi foyda miqdori.

Q, F, C, P, S, V, Φ o‘zgaruvchilar vaqtning bir xil oraliqlarida, odatda bir yilda hisoblanadi.

Avval ishlab chiqarilgan mahsulot narxini va unga mos xarajatni hisoblaymiz:

$$V = PQ \tag{6.1.1}$$

$$S = F + CQ \tag{6.1.2}$$

Izlayotgan kritik hajmni yoki to‘siqli nuqtani

$$V = S$$

tenglikdan topamiz, bu tenglik bajarilganda $\Phi = 0$ bo‘ladi.

To‘siqli hajmni Q_k bilan belgilaymiz va (6.1.1) - (6.1.2) formulalardan foydalanib,

$$PQ_k = CQ_k + F$$

$$Q_k = \frac{F}{P - C} \tag{6.1.3}$$

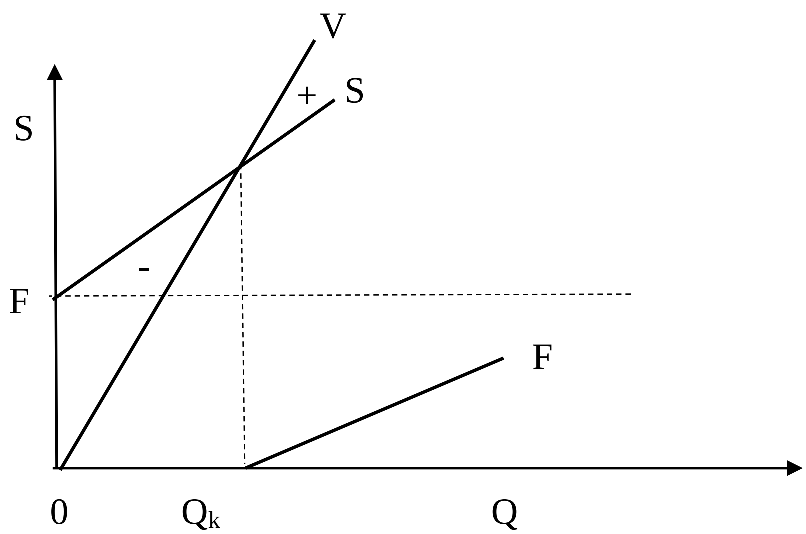
tenglikni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, o‘zgarmas va o‘zgaruvchi xarajatlar qancha katta bo‘lsa, kritik hajm shuncha katta bo‘ladi. Ta’rif bo‘yicha foyda (soliq to‘langunga qadar)

$$\Phi = V - S = (P - C)Q - F \tag{6.1.4}$$

formuladan hisoblanadi.

Masalaning qo‘yilishi va uning yechimini grafikda ko‘rsatish ancha oydinlik kiritadi.

Yechim ikkita to‘g‘ri chiziqning, $(V)-$daromadning o‘zgarishi va $(S)-$ xarajatning kesishgan nuqtasida bo‘ladi.



13- rasm

Qaralgan bu usul buxgalterlik hisoblarida qo‘llaniladi.

6.2. Iqtisodiy ko‘rsatkichlarning to‘siqli qiymatlarini aniqlashning nochiziqli modeli

Endi nochiziqli usullarni qarab chiqamiz. Ba’zi hollarda xarajat yoki mahsulot narxi egri chiziqli funksiya bo‘yicha aniqlanishi mumkin. Aytaylik, mahsulot narxi chiziqli bo‘lib, xarajatlar esa nochiziqli bo‘lsin. Faraz qilaylik, xarajatlar $S = F + CQ^h$, $0 < h < 1$ ko‘rinishda bo‘lsin. To‘siqli nuqtani grafik usulda topamiz.

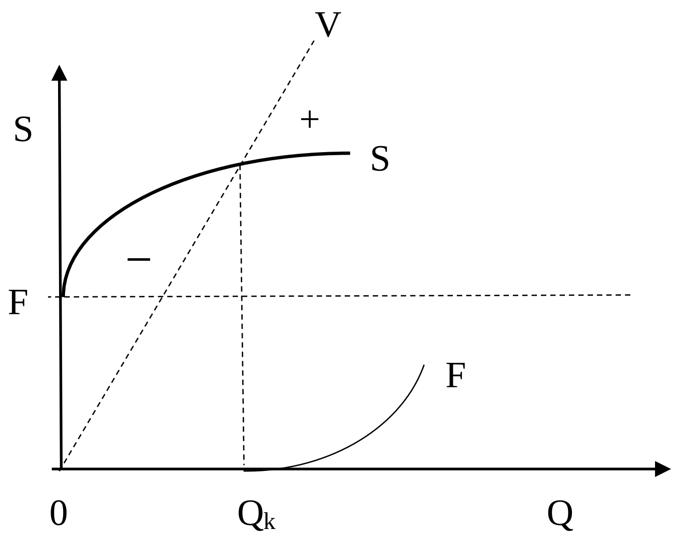
Bunday holda to‘siqli nuqta

$$PQ_k - CQ_k^h - F = 0$$

tenglikdan topiladi.

Quyidagi holda to‘siqli nuqtani topamiz.

$$F = 100, \quad P = 50, \quad C = 40, \quad h = 0,5.$$



14-rasm

Bu qiymatlarni yuqoridagi tenglikka qo‘yib, $50Q_k - 40Q_k^{0,5} - 100 = 0$ tenglikni hosil qilamiz. $Q_k = X^2$ belgilashni kiritib,

$$50X^2 - 40X - 100 = 0$$

tenglikni yechamiz va $Q_k = (1,86)^2 = 3,46$ qiymatga ega bo‘lamiz.

$Q_k > 3,46$ bo‘lganda ishlab chiqarish korxonasi foyda ko‘radi, $Q_k < 3,46$ bo‘lganda zararga ishlaydi.

Endi ikkita nochiziqli bog‘lanish bo‘lgan holni ko‘ramiz. Masalan

$$V = aQ^2 + bQ, \qquad S = cQ^2 + dQ + F$$

funksiyalar parabolalardan iborat bo‘lsin, bunda, a, b, c, d – parabolaning parametrlari bo‘lsin.

Foyda quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\Phi = (a-c)Q^2 + (b-d)Q - F \qquad (6.2.1)$$

To‘siqli hajm ushbu kvadrat tenglamadan topiladi.

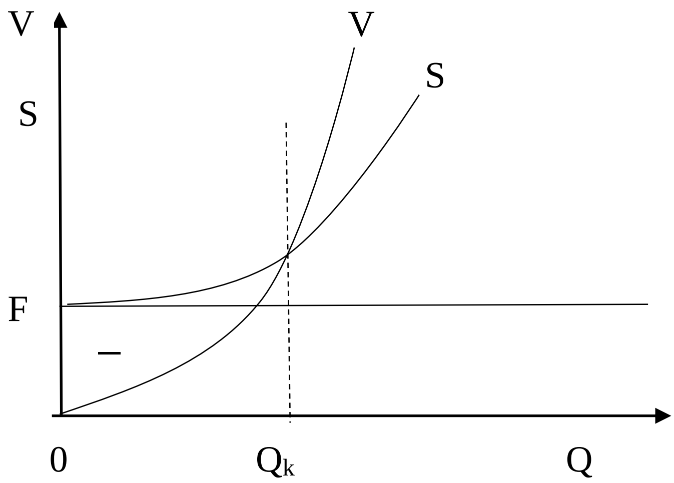
$$(a-c)Q^2 + (b-d)Q - F = 0$$

Ba’zi hollarda foydani maksimallashtirish masalalari qaraladi. Ma’lumki, bunday holda foydadan hosila olinadi va nolga tenglashtirib,

$$Q_m = \frac{d-b}{2(a-c)} \qquad (6.2.2)$$

topiladi. Maksimallik sharti quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘lganda bajariladi.

$d > b,\ a > c.$ Agar $b > d$ va $a > c$ bo‘lsa, u holda foyda ishlab chiqarish hajmining ortishi bilan monoton o‘sadi.



15-rasm

To‘siqli qiymat usuli yordamida pul miqdorlarini taqqoslash mumkin. Faraz qilaylik, bir – biridan farq qiluvchi ikki xil S_1 va S_2 pul miqdorlari turli muddatlarda tushayotgan bo‘lsin. Aniqlik uchun

$S_2 > S_1,\ n_2 > n_1$ ($n_1, n_2 -$ pulning tushish muddatlari).

Oddiy va murakkab foiz stavkalari bo‘yicha to‘siqli usulni qo‘llaymiz. Oddiy stavka uchun

$$\frac{S_1}{1+n_1 i_k} = \frac{S_2}{1+n_2 i_k} \qquad (6.2.3)$$

Murakkab stavka uchun

$$S_1 (1+i_k)^{-n_1} = S_2 (1+i_k)^{-n_2} \qquad (6.2.4)$$

Ikkala holda ham i_k to‘siqli stavkani bildiradi. (6.2.3) tenglamani yechib,

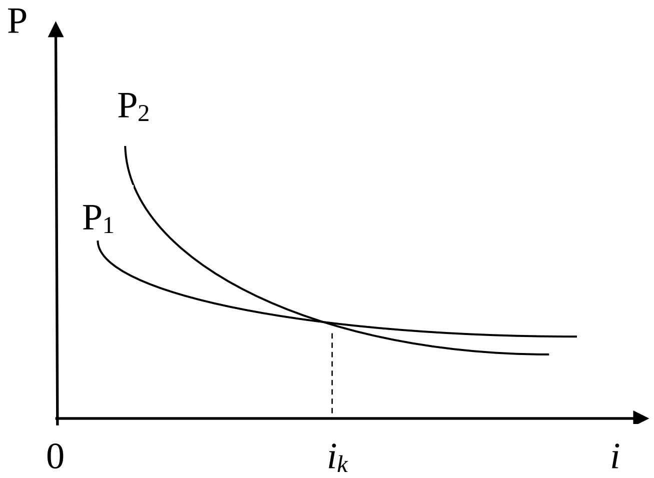
$$i_k = \frac{S_2 - S_1}{S_1 n_2 - S_2 n_1} \qquad (6.2.5)$$

hosil qilamiz.

(6.2.5) dan to‘siqli stavkaning mavjudlik shartini keltirib chiqaramiz.

$$S_1 n_2 > S_2 n_1 \quad \text{yoki} \quad S_1 > S_2 \frac{n_1}{n_2}$$

Yechimni grafikda tasvirlaymiz.



16-rasm

Murakkab stavka uchun to‘siqli qiymatni aniqlaymiz. (6.2.4) tenglikdan

$$(1+i_k)^{n_2 - n_1} = \frac{S_2}{S_1}$$

Bundan

$$\ell n (1+i_k) = \frac{\ell n (S_2 / S_1)}{n_2 - n_1}$$

$$i_k = e^{\frac{\ell n(S_2/S_1)}{n_2 - n_1}} - 1 \qquad (6.2.6)$$

Agar bozor stavkasi $i < i_k$ bo‘lsa, u holda xaridor uchun ikkinchi variant afzal bo‘ladi. Shunday qilib, to‘siqli usulni bank ishida, buxgalterlik hisob – kitoblarida, biznes – reja tuzishda va hokazolarda tatbiq etish mumkin ekan.

VI bobga doir masalalar

1. Ishlab chiqarilgan mahsulot narxi $V = 200X$ va unga mos xarajat $S = 100 + 150X$, bu yerda X – ishlab chiqarish hajmi. Kritik hajm va foyda topilsin. Masalani grafik usulda yeching.

2. Ishlab chiqarilgan mahsulotning umumiy narxi $V = 3X^2$ va unga mos umumiy xarajat $S = 5 + 2X$ ko‘rinishda bo‘lsa, kritik hajm va foyda topilsin.

3. Ishlab chiqarilgan mahsulot narxi $V = 2X^2 + 8X$, unga mos umumiy xarajat $S = 3X^2 + 3X + 6$ ko‘rinishda bo‘lsa, kritik hajm va foyda topilsin.

4. 200 ming so‘m va 300 ming so‘m miqdordagi pullar mos ravishda 2 va 3 yilga teng muddatlarda bankka tushayotgan bo‘lsin. Oddiy foiz stavkasi uchun to‘siqli stavka topilsin.

5. 500 ming so‘m va 600 ming so‘m miqdordagi pullar mos ravishda 2 va 3 yilga teng muddatlarda bankka tushayotgan bo‘lsin. Murakkab foiz stavkasi uchun to‘siqli stavka topilsin.

6. Agar o‘zgarmas ishlab chiqarish xarajatlari 50 ming so‘m, o‘zgaruvchi xarajat 30 ming so‘m bo‘lib, ishlab chiqarilgan mahsulot birligining narxi 40 ming so‘m bo‘lsa, ishlab chiqarilgan tovarning to‘siqli (kritik) hajmini to‘siqli qiymatlarni aniqlashning chiziqli modelidan foydalanib toping?

7. Yuqoridagi masalada to‘siqli hajmga mos xarajatni va ishlab chiqarilgan mahsulot narxini toping?

8. Ishlab chiqarilgan mahsulotning narxi $V = 50Q$, xarajatlar esa $S = 100 + 27Q^{0,5}$ formulalar yordamida hisoblanishi ma’lum bo‘lsa, to‘siqli qiymatni (hajmni) grafik usulda toping.

VII bob. QIMMATLI QOG‘OZLAR BOZORI

7.1. Obligatsiyalar

Qimmatli qog‘ozlar bozori savdo kapitalining rivojlanish bo‘sag‘asida paydo bo‘lgan va ko‘pchilik g‘arb mamlakatlarida u xo‘jalik mexanizmining eng barqaror va yo‘lga qo‘yilgan qismlaridan biri hisoblanadi.

O‘zbekistonda qimmatli qog‘ozlar bozorining paydo bo‘lishi davlat korxonalarini xususiylashtirish va aksiyadorlik korxonalariga aylantirish jarayonlari bilan bog‘liq.

Bu bozor boshqa barcha bozorlardan eng avvalo unda aylanadigan tovar - qimmatli qog‘ozlar bilan ajralib turadi. O‘z navbatida, ularning aylanishi bu bozor ishtirokchilarining alohida tarkibi, uning qoidalari va hokazoni belgilaydi.

Qimmatli qog‘ozlarning eng keng tarqalgan turi obligatsiyalar hisoblanadi.

Obligatsiya – uning egasi pul mablag‘lari to‘langanligini bildiradigan va unga qat’iy foiz to‘lagan holda belgilangan muddatda o‘z nominal qiymatini qoplash majburiyatini tasdiqlaydigan qimmatli qog‘oz.

Obligatsiyani chiqargan tashkilot (emitent) pul qarz oluvchi va obligatsiya xarid qilgan tomon (investor) kreditor sifatida namoyon bo‘ladi.

Obligatsiyaning aksiyadan asosiy farqlari quyidagicha:

- unda ko‘rsatilgan muddat mobaynidagina daromad keltiradi;
- odatda egasiga oldindan ko‘rsatilgan foiz bo‘yicha daromad keltiradi;
- aksiyadorlik jamiyatining obligasiyasi uning egasiga ushbu jamiyat aksiyalari sifatida harakat qilish huquqini bermaydi.

Obligatsiyalarni sotib olish aksiyalarni sotib olishga nisbatan xavfsizroq hisoblanadi. Kompaniya singan holda obligasiya egasi faqat oddiy aksiya egasigagina emas, balki imtiyozli aksiya egasiga nisbatan ham oldinroq qarzini undirish huquqiga ega.

Obligatsiyalar quyidagi turlarda chiqariladi:

1. Davlat va mahalliy ichki zayom obligatsiyalari;
2. Korxonalarning obligatsiyalari.

Ular oddiy va yutuqli, foizli va foizsiz (maqsadli) erkin muomalada bo‘ladigan va muomala doirasi cheklangan qilib chiqarilishi mumkin.

Obligatsiyalarning nominal narxi, qaytarib olish narxi va bozor narxi bo‘ladi.

Nominal narx obligatsiyaning o‘ziga yozib qo‘yiladi hamda keyingi qayta hisoblashlar va foizlarni chiqarish uchun asos bo‘ladi.

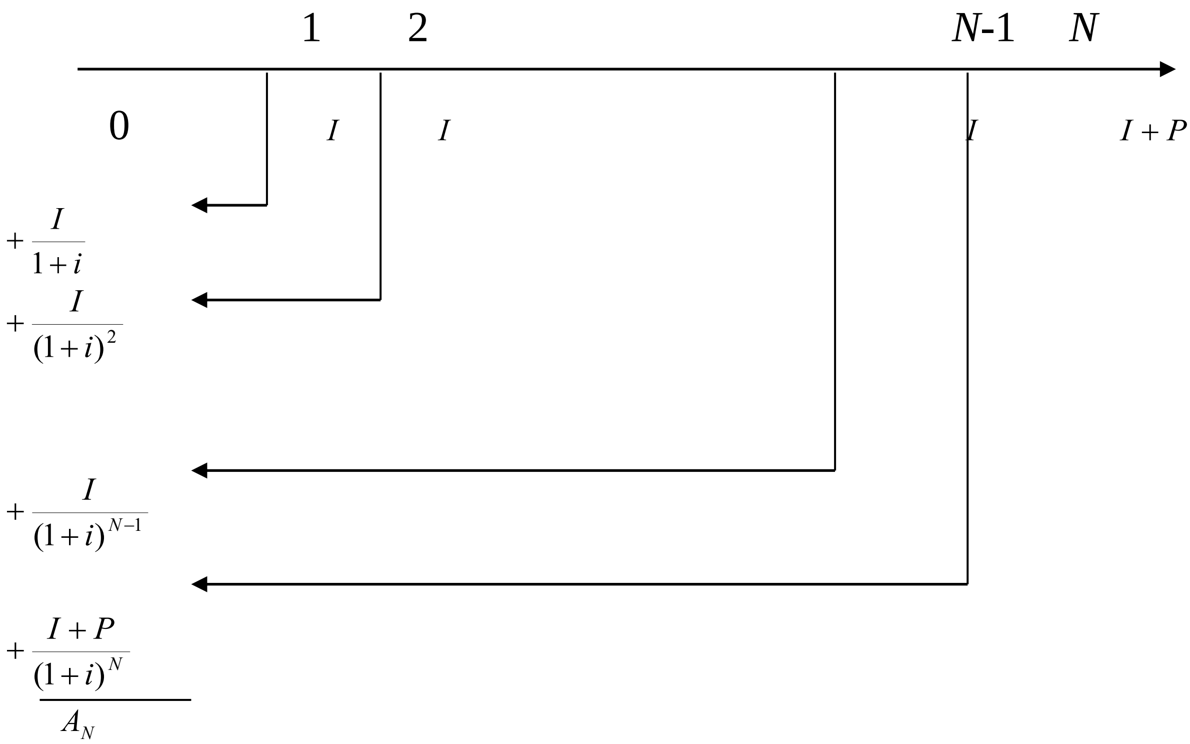
Qaytarib olish narxi – zayom muddati tugagandan so‘ng emitent obligatsiyani qaytarib oladigan narx nominal narxdan farq qilishi mumkin. Obligatsiyaning nominaliga nisbatan foizlarda ifodalangan bozor narxi obligatsiya kursi deb ataladi.

Har qanday qimmatbaho qog‘ozning narxi, bu qog‘ozlar bilan bog‘liq holda to‘lovlar oqimining joriy qiymati kabi aniqlanadi.

Obligatsiya holatida to‘lovlar oqimi kuponli foizlar to‘lovidan iborat bo‘lgan oddiy rentani tashkil etadi. Obligatsiyaning joriy qiymati bunday rentaning joriy qiymatiga teng bo‘ladi.

Aytaylik, $i-$ joriy foiz stavkasi, $P-$ obligatsiyaning nominal narxi, $k-$kuponli foiz stavkasi, $I=P\cdot k$ $-$ kuponli to‘lov miqdori, A_N- obligatsiyaning bozordagi joriy narxi, $N-$ obligatsiya to‘lovigacha bo‘lgan muddat.

Bu holat uchun quyidagicha to‘lovlar diagrammasini keltiramiz:



Bunday holda

$$A_N = \frac{I}{1+i} + \frac{I}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{I}{(1+i)^{N-1}} + \frac{I+P}{(1+i)^N}$$

(7.1.1)

yoki
$$A_N = I\frac{1-(1+i)^{-N}}{i} + P(1+i)^{-N} \qquad (7.1.2)$$

Bu narx nominal narxga teng bo‘lishi uchun ushbu tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

$$P = I\cdot\frac{1-(1+i)^{-N}}{i} + P(1+i)^{-N}$$ yoki

$$P(1-(1+i)^{-N}) = \frac{I}{i}\cdot(1-(1+i)^{-N})$$ bundan

$I = P\cdot i,$ ya’ni $i = k$ kelib chiqadi.

Demak, agar kuponli foiz stavkasi foiz stavkasiga teng bo‘lsa, obligatsiya narxi nominal narxga teng bo‘lar ekan.

1-misol. Qandaydir X kompaniya har birining narxi 1000 so‘mdan bo‘lgan 50 mingta obligatsiya sotib, 50 mln. so‘m pul miqdorida kredit olgan bo‘lsin. Bu kompaniya obligatsiya egalari uchun tayinlangan muddat ichida foiz to‘lash majburiyatini oldi, agar X kompaniyaning obligasiyasi 2000-yil 2-yanvarda chiqarilgan bo‘lib, 2015-yil 1-yanvarda to‘lash mo‘ljallangan bo‘lsa, u holda obligatsiyaning to‘lov muddati 15 yil bo‘ladi. Agar X kompaniya har bir obligatsiya uchun yiliga 150 so‘m to‘lasa, u holda kuponli foiz stavka $\frac{150}{1000} = 0{,}15 = 15\%$ ni tashkil etadi. Bunday holda emissiya paytidagi X kompaniya obligatsiyasining joriy qiymati bozordagi foiz stavka 15% bo‘lganda nominal qiymatiga teng bo‘ladi.

Haqiqatan,

$$A_{15} = \sum_{i=1}^{15}\frac{150}{(1{,}15)^t} + \frac{1000}{(1{,}15)^{15}} = 150\cdot\frac{1-(1{,}15)^{-15}}{0{,}15} + 1000\cdot(1{,}15)^{-15} = 1000$$ so‘m.

Aytaylik, X kompaniyaning obligatsiyasi chiqarilgan kundan boshlab bir yil davomida foiz stavkasi 10% gacha kamaygan va kuponli foiz stavkalari o‘zgarmasdan qolgan bo‘lsin, u holda obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab 1 yil o‘tgandan so‘ng obligatsiyaning bozor narxi ushbuga teng bo‘ladi:

$$A_{14} = \frac{150}{1{,}1} + \frac{150}{1{,}1^2} + \ldots + \frac{150}{1{,}1^{14}} + \frac{1000}{1{,}1^{14}} = 150\cdot\frac{1-1{,}1^{-14}}{0{,}1} + 1000\cdot(1{,}1)^{-14} = 1368{,}33$$ so‘m,

ya'ni nominaldan yuqori 1368,33|1000 obligatsiya narxining o'sishi shu bilan belgilandiki, bunda foiz stavkasining pasayishi yangi chiqariladigan obligatsiya kuponli stavkasining kamayishiga olib keladi, ya'ni yangi chiqarilgan 1000 so'mlik obligatsiya yiliga 150 so'm emas, balki 100 so'm daromad keltiradi. Demak, eski chiqarilgan, ya'ni 15% kupon stavkali obligatsiyaga talab ortadi. 10% kuponli obligatsiya qancha daromad keltirsa, 1368,33 so'mlik obligatsiya ham shunday daromad keltiradi.

Agar bozor foiz stavkasi qolgan 14 yil mobaynida o'zgarmas 10% bo'lib qolsa, u holda X kompaniya obligatsiyasining narxi sekin-asta 1368,33 so'mdan 1000 so'mga qadar tushib ketadi. 10% li obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab ikki yil o'tgandan so'ng uning narxi

$$A_{13} = 150\cdot\frac{1-(1,1)^{-13}}{0,1}+1000\cdot(1,1)^{-13}=1355,17$$ so'mni tashkil etadi.

1368,33 so'mga olingan obligatsiyani sotishdan ko'riladigan zarar

1368,33 – 1355,17=13,16 so'm.

Sotishdan keladigan umumiy daromad

150 – 13,16=136,84 so'm.

Qimmatbaho qog'ozlarning narxidan boshqa ularning asosiy xarakteristikalaridan biri daromadlilik yoki foyda normasi hisoblanadi.

$$Narx\ o'zgarishi\ hisobi\ uchun\ daromadlilik\ (davr\ uchun) =$$

$$=\frac{kuponni\ stavka\ miqdori}{davr\ boshidagi\ obligasiya\ narxi}=\frac{150}{1368,33}=0,1096=10,96\% \qquad (7.1.3)$$

$$Narx\ o'zgarishi\ hisobi\ uchun\ daromadlilik\ (davr\ uchun) =$$

$$=\frac{davr\ boshidagi\ harx-davr\ oxiridagi\ narx}{davr\ boshidagi\ obligasiya\ narxi}=-\frac{13,16}{1368,33}=-0,00096=-0,96\% \qquad (7.1.4)$$

$$Foyda\ normasi\ (davr\ uchun) =$$

$$=\frac{kuponni\ to'\text{lov}\ miqdori+obligasiya\ narxining\ farqi}{davr\ boshidagi\ obligasiya\ narxi}=$$

$$=\frac{150-13,6}{1368,33}=\frac{136,4}{1368,33}=0,1001=10\% \qquad (7.1.5)$$

Endi bozor foiz stavkasi emissiya davridan birinchi yil mobaynida 15% dan 20% ga ortgan holni qaraylik. Bunday holda obligatsiya narxi tushadi. Obligatsiya narxi birinchi yil oxirida

$$A_{14} = \frac{150}{1,2} + \frac{150}{1,2^2} + ... + \frac{150}{1,2^{14}} + \frac{1000}{1,2^{14}} = 150 \cdot \frac{1-(1,2)^{-14}}{0,2} + 1000 \cdot (1,2)^{-14} = 769,47 \text{ so‘m.}$$

Bunday holda birinchi yil oxirida obligatsiya 230,53 diskont bilan sotilishi mumkin.

$$Diskont = bozor\, narxi - no\min al\, narxi$$

$$-230,53 = 769,47 - 1000 \qquad (7.1.6)$$

Obligatsiyaning daromadliligini hisoblash uchun emissiya davridan ikkinchi yil oxiriga qadar uning bozor narxini topamiz.

$$Joriy\, daromadlilik = \frac{150}{769,47} = 0,1949 = 19,49\%$$

$$Narx\, o‘zgarishi\, hisobi\, uchun\, daromadlilik =$$

$$= \frac{773,37 - 769,47}{769,47} = \frac{4,9}{769,47} = 0,0051 = 0,51\%$$

Demak, $daromadlilik = \dfrac{150 + 773,37 - 769,47}{769,47} = 0,20 = 20\%$

7.2. Aksiyalar

Aksiyalar - qimmatbaho qog‘ozlar bo‘lib, aksiyadorlar jamiyati tomonidan o‘z faoliyatlarini moliyalashtirish uchun aksiyalar turlarining yirik to‘plami ishlab chiqilgan.

Aksiyalarning turlari juda ko‘p, lekin biz faqat oddiy va imtiyozli aksiyalarni qarash bilan cheklanamiz.

Oddiy aksiya xaridorini imtiyozli aksiyalar bo‘yicha daromaddan ko‘ra bitta aksiyaning foydasi ko‘proq qiziqtiradi, chunki bu ko‘rsatkich, odatda, fondlar bozorida aksiyalar kursiga ta’sir ko‘rsatadi.

Biz aksiya egasining sof foydasini quyidagi misolda hisoblab ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, bir yilda firmaning sof foydasi 47,950 ming so‘m bo‘lsin. Avval firma sof foydadan imtiyozli aksiyalar bo‘yicha tegishli 350 ming so‘m miqdoridagi dividendni to‘laydi. Ushbu ko‘rsatkichlar orasidagi farq oddiy aksiyalarga yo‘naltirilishi mumkin bo‘lgan pul mablag‘lari miqdorini tashkil etadi. Agar firma bunday aksiyalardan 1 mln. donasini muomalaga chiqargan bo‘lsa, bir aksiyaga to‘g‘ri keladigan sof foyda miqdori: $(47{,}950 - 350): 1\, mln.dona = 47{,}6\ so‘m.$

Imtiyozli aksiya bo‘yicha olingan daromad dividendlar va aylanuvchi obligatsiyalar ko‘rinishida to‘lanadi.

Ko‘plab imtiyozli aksiyalar o‘z egalariga doimiy fiksirlangan dividendlarni olish huquqini beradi.

Agar dividendlar to‘lovi cheksiz davom etsa, u holda bunday aksiyani sotishdan keladigan daromad

$$A = \frac{D}{K} \qquad (7.2.1)$$

tenglamadan topiladi. Bunda $A-$ imtiyozli aksiyaning kursi, $D-$ imtiyozli aksiya bo‘yicha dividendlar miqdori, $K-$ talab qilingan foyda normasi.

Faraz qilaylik, qandaydir kompaniya aylanuvchi imtiyozli aksiyalarga ega bo‘lib, bu aksiyalar bo‘yicha yiliga 100 so‘m miqdorida dividend to‘lanadigan bo‘lsin. Agar bu aksiya bo‘yicha talab qilingan daromad hajmi 10% ni tashkil etsa, u holda aksiya narxi

$$A = \frac{100}{0{,}1} = 1000$$ so‘mdan iborat bo‘ladi.

Dividendlar miqdori bo‘yicha (7.2.1) dan daromadlilikni topish mumkin

$$K = \frac{D}{A} \qquad (7.2.2)$$

Oddiy aksiyalarni imtiyozli aksiyalardan farqi shundaki, ularning egasi foyda (dividend) olish huquqiga va aksiyadorlarning umumiy majlislarida ovoz berish huquqiga ega ekanligini bildiradi. Imtiyozli aksiyalar esa egalariga quyidagi imtiyozlarni beradi:

- aniq stavka bo‘yicha belgilanadi va odatda ularga dividendlar oddiy aksiyalar bo‘yicha dividendlar to‘langunga qadar to‘lanadi;
- imtiyozli aksiyalarning egalari tugatilgan aksiyadorlik jamiyati aktivlarining muayyan ulushini olishda ustunroq huquqqa ega.

Aksiyaning narxi haqida gapirganda quyidagilarni bilish kerak:

1) aksiyaning o‘zida ko‘rsatilgan narxini;

2) uning birlamchi bozorda sotiladigan emissiya narxini;

3) qimmatli qog‘ozlar ikkilamchi bozoridagi kotirovka qilinadigan bozor narxi (kursi)ni;

4) moliyaviy hisobotga asoslanib belgilanadigan balans narxini. Aksiyaning asosiy tafsiloti uning kurs qiymati (aksiya kursi)dir.

1) Aksiyaning bozorda sotiladigan narxi O‘zbekiston Respublikasining “Qimmatli qog‘ozlar va fondlar birjasi to‘g‘risida”gi qonuniga muvofiq, aksiya – amal qilish muddati belgilanmagan, yuridik va jismoniy shaxs tomonidan aksiyadorlik jamiyatining ustav fondiga muayyan ulush qo‘shganligini, aksiya egasining ushbu jamiyat mulkidagi ishtirokini tasdiqlaydigan hamda unga dividend olish va odatda, shu jamiyatni boshqarishda qatnashish huquqini beradigan qimmatli qog‘oz.

Investor ham boshqa moliyaviy aktivlarga o‘xshab aksiya narxini baholaydi, ya’ni bu aksiya bo‘yicha kutiladigan to‘lovlar oqimi joriy qiymatga teng bo‘ladi.

Ko‘rsatilgan oqim ikki elementdan iborat bo‘ladi:

a) kutiladigan dividendlar;

b) aksiyani sotishdan oladigan foyda (narx)dan investorni umidi.

Ushbu kattaliklarni kiritamiz:

$D_t -$ t yil oxirida aksionerni olishi mumkin bo‘lgan dividend.

$D_0 -$ oxirgi to‘langan dividendlar.

$D_1 -$ joriy yilda kutiladigan dividend.

$P_0 -$ aksiyaning hozirgi momentdagi bozor narxi.

$P_t -$ t yil oxiridagi aksiyaning kutiladigan narxi.

$\widetilde{P}_0 -$ aksiyaning hozirgi momentdagi nazariy (ichki) narxi, ya’ni investor nuqtai nazari bo‘yicha hozirgi narx.

$\widetilde{P}_1 -$ birinchi yil oxiridagi aksiyaning nazariy narxi.

$g -$ investorni bashorati bo‘yicha kutiladigan dividendlarni o‘sish sur’ati.

$\widetilde{K}_s -$ aksiyani hisobga olish bo‘yicha foyda normasi (talab qilingan daromad).

$K_s -$ kutiladigan foyda normasi. Investor aksiyani $\widetilde{K}_s \leq K_s$ shart bajarilganda sotib olishni istaydi.

$\overline{K}_s -$ haqiqiy foyda normasi. Haqiqiy foyda normasi juda past va hatto manfiy bo‘lishi ham mumkin.

$\frac{D_1}{P_0} -$ joriy yilda aksiya bo‘yicha kutiladigan dividendli daromadlilik.

$\frac{P_1 - P_0}{P_0} -$ joriy yilda aksiya narxining o‘zgarishi tufayli olinadigan kutiladigan foydalilik.

Kutiladigan foyda normasi K_s joriy yilda aksiya bo‘yicha kutiladigan dividendli daromadlilik va aksiya narxining o‘zgarishi tufayli olinadigan foydalilik yig‘indisiga teng ekanligini ko‘rishimiz mumkin, ya’ni

$$K_s = \frac{D_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0}.$$

Aytaylik, investor qandaydir kompaniya aksiyalarini sotib olib unga har doim egalik qilmoqchi bo‘lsin. Bunday holda, tabiiyki, aksiyaning narxini aniqlash zarur bo‘ladi.

Investorni nuqtai nazari bo‘yicha aksiya narxi

$$\widetilde{P}_0 = \frac{D_1}{(1+K_s)} + \frac{D_2}{(1+K_s)^2} + \ldots$$

yoki

$$\widetilde{P}_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+K_s)^t} \qquad (7.2.3)$$

Agar, investorning bashorati bo‘yicha qandaydir kompaniyaning oddiy aksiyalar bo‘yicha dividendlari o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni

$$D_1 = D_2 = \ldots = D.$$

U holda (7.2.3) formuladan

$$\widetilde{P}_0 = \frac{D}{(1+K_s)} + \frac{D}{(1+K_s)^2} + \ldots \qquad (7.2.4)$$

yoki

$$\widetilde{P}_0 = \frac{D}{K_s} \qquad (7.2.5)$$

Kutiladigan foyda normasi 10% va 500 so‘m dividendili aksiyaning kursini aniqlaylik. (7.2.5) formuladan

$$\widetilde{P}_0 = \frac{500}{0{,}1} = 5000 \quad \text{so‘m.}$$

Aksiyaning berilgan dividendii bo‘yicha foyda normasini topishimiz mumkin:

$$K_s = \frac{D}{P_0} \tag{7.2.6}$$

Investor uchun eng yaxshi holat aksiyaning normal (o‘zgarmas) va ortiqcha o‘sishi hisoblanadi.

Aksiyaning normal o‘sishi – bu dividendilarni o‘zgarmas tezlikda o‘sishidir, ya’ni t davrning oxirida dividendilar miqdori $D_t = D_0(1+g)^t$, bunda $g -$ dividendilarning kutilgan o‘sish tezligi.

Agar X kompaniyaning aksiyasi bo‘yicha oxirgi to‘langan dividend miqdori 500 so‘mni tashkil etsa va 8% o‘sish kutilayotgan bo‘lsa, u holda joriy yil uchun dividendi

$$D_t = 500(1+0{,}08) = 540 \text{ so‘m}$$

Agar o‘sish tezligi 300% bo‘lsa, u holda

$$D_t = 500(1+3) = 2000 \text{ so‘m.}$$

Aksiyaning ichki narxi (7.2.3) formuladan topiladi.

$$\tilde{P}_0 = \frac{D_0(1+g)}{(1+K_s)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+K_s)^2} + \ldots =$$

$$= D_0\left(\frac{1+g}{1+K_s}\right) + D_0\left(\frac{1+g}{1+K_s}\right)^2 + \ldots =$$

$$= D_0\left(\frac{1+g}{1+K_s}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{1+g}{1+K_s}\right) + \left(\frac{1+g}{1+K_s}\right)^2 + \ldots\right] \tag{7.2.7}$$

agar $\frac{1+g}{1+K_s} < 1$, ya’ni $K_s > g$ bo‘lsa, u holda $\tilde{P}_0$ maxraji $\frac{1+g}{1+K_s}$ ga teng bo‘lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadan iborat bo‘lib, uning birinchi hadi $D_0\left(\frac{1+g}{1+K_s}\right)$ bo‘ladi.

Demak,

$$\tilde{P}_0 = D_0 \cdot \frac{1+g}{1+K_s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+K_s}} = \frac{D_1}{K_s - g} \tag{7.2.8}$$

Qaralayotgan aksiyaning ichki narxi g=8% va daromadlilik darajasi $K_s = 13{,}4\%$ bo‘lsa, $\tilde{P}_0 = \frac{540}{0{,}134 - 0{,}08} = 10000$ so‘m.

Aytaylik, 2015-yil 1-yanvarda aksiya kursi 10 ming so‘m va 2015- yil oxiridagi dividend 540 so‘m bo‘lsin. 2016- yil boshida aksiya kursi qanday bo‘ladi. 2016-yil uchun kutiladigan dividend

$$D_{2016} = D_{2015}(1+g) = 540 \cdot (1+0{,}08) = 583{,}2 \quad \text{so‘m,}$$

Demak,

$$\tilde{P}_{2016} = \frac{D_{2016}}{K_s - g} = \frac{583{,}2}{0{,}134 - 0{,}08} = 10{,}8 \quad \text{ming so‘m.}$$

$$P_0 = 10{,}8 = 10 \cdot (1{,}08) = P_{2015} \cdot (1{,}08)$$

ekanligini sezishimiz mumkin.

Umumiy holda

$$\tilde{P}_{t+1} = \frac{D_{t+1}}{K_s - g} = \frac{D_t(1+g)}{K_s - g} = \tilde{P}_t \cdot (1+g).$$

7.3 Aksiyalar kursini bashorat qilish

Aksiyalar kursining pasayishi yoki ko‘tarilishini oldindan aytish (bashorat qilish) deyarli mumkin emas, degan fikr mavjud. Haqiqatan ham aksiyalar qiymatining o‘zgarishlariga doir sakrashlarni oldindan bilish juda qiyin.

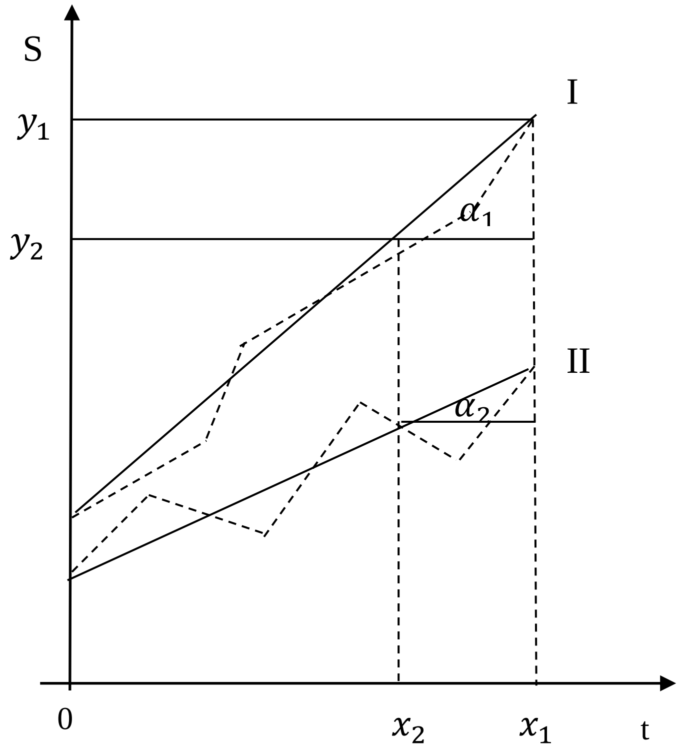
Bu qiyinchiliklar asosan yirik moliya kompaniyalarining chayqovdan foyda olish maqsadida kursning pasayishi yoki ko‘tarilishini ataylab uyushtirishi oqibatida kelib chiqadi. Lekin aksiyalar kursining dinamikasi muayyan qoidalar va an’analarga bo‘ysunadi; qimmatli qog‘ozlar bozorida professional tarzda ishlaydiganlar ularni hisobga olishi mumkin va lozim.

Aksiyalar kursini belgilashga va real qiymatiga ta’sir ko‘rsatadigan asosiy omillarni ko‘rib chiqamiz. Statistik ma’lumotlarni tahlil qilish ishlab chiqarishni mahalliy xomashyo va materiallarga asoslangan korxonalarning aksiyalari keskin o‘zgarishlarga unchalik uchramasligini ko‘rsatadi.

Oddiy ish sharoitida ularning qiymati ravon o‘sadi va grafikda koordinata tekisligiga og‘ishgan to‘g‘ri chiziq shaklida tasvirlanadi.

Bunday holda fondlar birjasida ishlovchilarga ko‘tarilish burchagi "α" ga e’tibor berishni tavsiya qilish mumkin. "α" burchak qanchalik katta bo‘lsa, aksiyalarning qiymati ham shunchalik tez o‘sadi. Shu bilan birga, tarmoq yoki korxona uchun yasalgan to‘g‘ri chiziqda qisqa vaqt oralig‘ida tebranishlar va siltanishlar bo‘lishi mumkin. lekin, tajriba shuni ko‘rsatadiki, uzoqroq vaqt oralig‘ida ko‘tarilish burchagi nisbatan turg‘un. Demak, nisbatan uzoq vaqt oralig‘idagi empirik tajriba ma’lumotlari asosida bir necha to‘g‘ri chiziqni yasab, qanday korxonalarning aksiyalarini sotib olish kerakligiga javob olish mumkin.

Yuqorida aytilganlarni grafikda ko‘rib chiqamiz. Aytaylik, absissalar o‘qiga vaqt t, ordinatalar o‘qiga esa aksiyalar qiymati - S qo‘yilgan bo‘lsin, shunda kurs ma’lumotlari asosida bizni qiziqtirgan aksiyadorlik jamiyatining shartli to‘g‘ri chizig‘i (1) ni va qiyoslash uchun xuddi shunday korxonaning ikkinchi to‘g‘ri chiziqi (2) ni hosil qilamiz.



17-rasm

I to‘g‘ri chiziq I egri chiziq ma’lumotlari bo‘yicha, ya’ni korxona qiymatining kurs sakrashlari I bo‘yicha topiladi. Ikkinchi korxonaning to‘g‘ri chizig‘i II ham xuddi shu tariqa yasaladi.

Ikkala to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ funksiya orqali ifodalanadi; bu funksiya uchun burchak koeffitsiyenti k quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bunda y_2, y_1 – A va B nuqtalar uchun ordinatalar qiymati; x_2, x_1 – A va B nuqtalar uchun absissalar qiymati. Ordinatalar va absissalarning grafik qiymatlari ma’lum bo‘lgach, $tg\alpha$ ni, ya’ni birinchi to‘g‘ri chiziq uchun burchak koeffitsiyentini osongina hisoblaymiz.

Ikkinchi to‘g‘ri chiziq uchun ham shunday hisob bajariladi.

α_1 va α_2 qiymatlarini taqqoslab yuqorida $\alpha_1 > \alpha_2$ ekanligini ko‘ramiz. Bundan birinchi korxonaning aksiyalarini sotib olish afzalroq degan ma’no kelib chiqadi. Qimmatli qog‘ozlar bozorining malakali ishtirokchilari uchun amalda korxonaning nima ishlab chiqarishi, uning katta yoki kichikligini ahamiyati yo‘q. Shuning uchun taklif qilingan hisob usuli sotuvlar haqidagi mavjud ma’lumotlar asosida aksiyalarni tanlash muammosini matematik tarzda hal qilishga yordam beradi.

VII bobga doir masalalar

1. Qandaydir kompaniya har birining narxi 1000 so‘mdan bo‘lgan obligatsiyani 4 yil muddatga chiqardi. Agar kompaniya har bir obligatsiya uchun yiliga 200 so‘m to‘lasa, kuponli foiz stavka qanday bo‘lgan? Kompaniyaning obligatsiyasi chiqarilgan kundan boshlab bir yil davomida foiz stavkasi 15%gacha kamaygan va kuponli foiz stavkalari o‘zgarmasdan qolgan bo‘lsa, u holda obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab bir yil o‘tgach obligatsiyaning bozor narxi qanday bo‘ladi?

2. Yuqoridagi masalada agar bozor foiz stavkasi o‘zgarmas 15% bo‘lib qolsa, shu obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab ikki yil o‘tgandan so‘ng uning narxi qancha bo‘ladi?

3. 1-masala shartida bozor foiz stavkasi emissiya davridan bir yil mobaynida 20% dan 25%ga ortgan bo‘lsa, u holda birinchi yil oxirida obligatsiya narxi qanday bo‘lgan?

4. Qandaydir kompaniya aylanuvchi imtiyozli aksiyalarga ega bo‘lib, bu aksiyalar bo‘yicha yiliga 1200 so‘m miqdorida dividend to‘lanadigan bo‘lsa va bu aksiya bo‘yicha talab qilingan daromad hajmi 12%ni tashkil etgan holda aksiya narxi va dividendlar miqdori bo‘yicha daromadlilikni toping?

5. 2012 yil 1 yanvarda aksiya kursi 10 ming so‘m va 2012 yil oxiridagi dividend 600 p.b.ni tashkil etsa va 8% o‘sish kutilayotgan bo‘lsa, 2013 yil boshida aksiya kursi qanday bo‘ladi? Daromadlilik darajasini 12% deb hisoblang.

6. Kompaniyaning aksiyasi bo‘yicha oxirgi to‘langan dividend miqdori 600 p.b.ni tashkil etsa va 200% o‘sish kutilayotgan bo‘lsa, bir yil uchun dividend qancha bo‘ladi?

7. Aksiyaning bir yil davomidagi dividendii 580 p.b, o‘sishi 10% va daromadlilik darajasi 15,5% bo‘lsa, aksiyaning ichki narxini toping?

8. Aksiyaning dividendlari o‘zgarmas tezlikda ikki yil mobaynida 4 marta ortgan bo‘lsa, dividendlarning kutilgan o‘sish tezligi qanday bo‘lgan?

VIII bob. RISK VA DIVERSIFIKATSIYA

8.1. Risk

Ishlab chiqarish investitsiyasining moliyaviy tahlilida biz xarajat va to‘lov ko‘rsatkichlarining bir qiymatli emasligiga duch kelamiz. Shunga bog‘liq ravishda riskni o‘lchash va uning investitsiya natijasiga ta’sir etish muammosi kelib chiqadi.

Iqtisodiy faoliyatda riskni o‘lchash bilan bog‘liq masalalar qadimgi adabiyotlarda etarli darajada o‘rganilmaganligining guvohi bo‘lamiz. Risk to‘g‘risida iqtisodchi olimlarning fikrlari xilma-xil bo‘lib, ular bu tushunchaning mohiyatini turlicha talqin qilayotirlar. Buning sababi shundaki, risk keng ma’noli, faoliyatning, jarayonlarning turli bosqichlarida uchrab turuvchi ko‘p qirrali tushunchadir. Risk kutilmagan hodisalar yuzaga kelganda yo‘qotish xavfi yoki imkoniyatidir deb ta’rif beradi G.Panova.

Taniqli iqtisodchi olim O.I.Lavrushin fikricha risk ehtimoliy hodisaning qiymat o‘lchovi bo‘lib, u yo‘qotishlarga olib keladi.

Kredit riski deb qarz oluvchi tomondan kredit shartnomasi shartlarining bajarilmasligi, ya’ni kredit summasining (qisman yoki to‘liq) va u bo‘yicha foizlarning shartnomada ko‘rsatilgan muddatlarda to‘lanmasligi tushuniladi.

Keng tarqalgan risk atamasi bir qiymatli emas, uning mazmuni aniq masalalar orqali yoritiladi. Bunga misol qilib quyidagi tushunchalarni, masalan, qarz berishdagi, valyuta ayirboshlashdagi, investitsiya qilishdagi siyosiy va texnologik risklar va hokazolarni olish mumkin.

Iqtisodiy amaliyotda, ayniqsa, moliyaviy faoliyatda risk va noaniqlik orasida tafovut yo‘q deb hisoblanadi.

Investitsion qarorlarni qabul qilishda riskni kamaytirish yo‘llaridan biri diversifikatsiya (umumiy investitsiya summasini bir qancha obyektlarga taqsimlash) hisoblanadi. Diversifikatsiya har qanday ko‘rinishdagi riskni kamaytirish quroli sifatida qabul qilingan.

Investitsion tahlilda va sug‘urtaviy ishda risk dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanish kabi statistik sonli xarakteristikalar yordamida o‘lchanadi. Bu ikkala kattaliklar daromad tebranishini o‘lchaydi. Ular qancha katta bo‘lsa, daromadning shu o‘rtacha atrofida yoyilishi shuncha katta bo‘lib, risk darajasi yuqori bo‘ladi.

Ravshanki, dispersiya D va o‘rtacha kvadratik chetlanish σ orasida

$$\sigma=\sqrt{D}$$

bog‘liqlik mavjud. O‘z navbatida dispersiya o‘rtacha tanlanma $\bar{x}$ orqali

$$D=\sum\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

formula yordamida topiladi. Bu yerda n – kuzatishlar soni, $\bar{x}$ – tasodifiy o‘zgaruvchi x ning o‘rta qiymati.

8.2. Investitsiyaning diversifikatsiyasi va daromad dispersiyasi

Riskni kamaytirish uchun diversifikatsiya nima berishini va bu maqsadga qanday sharoitda erishishni aniqlaymiz. Buning uchun tahlil obyekti sifatida qimmatbaho qog‘ozlar savatini qabul qilamiz. Biz oldingi mavzuda uzoq muddatli moliyaviy operatsiyalarda tavakkalchilikning o‘lchovi sifatida keng tarqalgan o‘lchov – vaqt bo‘yicha daromad dispersiyasi ekanligini ta’kidlagan edik. Savatni diversifikatsiyalash har qanday sharoitda to‘g‘ri tatbiq etilsa, daromad dispersiyasi albatta kamayadi. Agar savatning har bir komponenti (qaralayotgan masalada qimmatbaho qog‘oz turi) qandaydir daromad dispersiyasi orqali xarakterlanadigan bo‘lsa, u holda savatdan keladigan daromad uning tarkibini aniqlovchi dispersiyaga ega bo‘ladi. Shunday qilib, savat tarkibini o‘zgartirib, daromadning jamg‘arma dispersiyasini o‘zgartirish, ba’zi hollarda esa uni minimum holatga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, n $x$il qimmatbaho qog‘ozlardan iborat bo‘lgan savat mavjud bo‘lsin. i turdagi bitta qog‘ozdan keladigan daromad d_i ni tashkil etsin. Bunday holda jamg‘arilgan A daromad ushbuga teng:

$$A=\sum_i a_i\,d_i \tag{8.2.1}$$

bunda a_i – i turdagi qog‘ozlar miqdori. Agar i turdagi qog‘ozdan keladigan daromad d_i o‘rtacha daromadni ifoda etsa, u holda A savatdagi qog‘ozlardan keladigan o‘rtacha daromadni ifoda etadi. Aytaylik, turli qog‘ozlardan keladigan daromadlar ko‘rsatkichi statistik erkli (boshqacha aytganda, bir-birini korrelyasiyalamaydigan) kattaliklardan iborat bo‘lsin. Savatning daromad dispersiyasini D bilan belgilaymiz, u holda

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i \quad , \qquad (8.2.2)$$

bunda D_i – i turdagi qog‘ozlardan keladigan daromad dispersiyasi, n – qimmatbaho qog‘ozlar turlarining soni.

Faraz qilaylik, a_i savatdagi i turdagi qog‘ozning ulushini xarakterlasin, ya’ni

$$0 \le a_i \le 1, \qquad \sum a_i = 1$$

Alohida qog‘ozlarning statistik nuqtai nazardan bog‘liq daromad ko‘rsatkichlari uchun jamg‘arilgan daromad dispersiyasini quyidagi formuladan topamiz:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i \ne j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j \qquad (8.2.3)$$

Bu yerda D_i – i turdagi qog‘ozlardan keladigan daromad dispersiyasi, r_{ij} – i va j turdagi qog‘ozlardan keladigan daromadlar korrelyasiyasining koeffitsiyenti, σ_i va σ_j – i va j turdagi qog‘ozlardan keladigan daromadlarning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari. Ikkita x va y tasodifiy o‘zgaruvchilarning korrelyasiya koeffitsiyenti ushbu formuladan topilishi bizga ma’lum:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y} \qquad (8.2.4)$$

bu yerda $\bar{x}$, $\bar{y}$ – o‘rta qiymatlar (bizning misolimizda ikki xil qog‘ozlardan keladigan o‘rtacha daromadlar). Ko‘p hollarda qulay hisob uchun quyidagi ishchi formuladan foydalaniladi:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum \bar{x} \sum \bar{y}}{\sqrt{\left|\sum x^2 - \left(\sum \bar{x}\right)^2\right| \cdot \left|n\sum y^2 - \left(\sum \bar{y}\right)^2\right|}}$$

Ma’lumki, korrelyatsiya koeffitsiyenti musbat va manfiy kattaliklar bo‘lishi mumkin, demak (8.2.3) formuladan musbat korrelyatsiyada jamg‘arilgan daromad dispersiyasi ortadi, manfiy korrelyatsiyada esa u kamayadi. Aslini olganda sezilarli darajada manfiy korrelyasiyada bir qog‘ozning o‘rta daromadidan musbat chetlanishi boshqasining manfiy chetlanishini qoplaydi va aksincha, musbat korrelyasiyada chetlanish jamg‘ariladi, natijada umumiy dispersiya va risk ortadi. Endi diversifikatsiyaning miqyosi risk o‘lchoviga qanday ta’sir qilishini kuzataylik.

Diversifikatsiyalash miqyosi deganda biz investisiya uchun tanlangan (qimmatbaho qog‘ozlar turlarining soni) obyektlar miqdorini tushunamiz. Aytaylik, savat turli qog‘ozlardan tashkil topgan bo‘lib, bir xil σ_0^2 daromad dispersiyasiga ega bo‘lsin. Savatdagi qog‘ozlarni har birining solishtirma og‘irligi ham bir xil, umumiy yig‘ilgan jamg‘arma miqdori esa 1 ga teng. Alohida qog‘ozlarning daromadlilik ko‘rsatkichlari statistik erkli, ya’ni (8.2.2) formula tatbiq etilsin deb hisoblaymiz. Bunday sharoitda savat daromadi o‘rtacha kvadratik chetlanishining bahosi uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

$$D = \frac{1}{n}\sigma_\circ^2$$

bunda $n -$ qimmatbaho qog‘ozlar turlarining soni. Keltirilgan formuladan hamda ikki va uch turdagi qog‘ozlardan tashkil topgan savat uchun daromad dispersiyasini aniqlaymiz. Ikki tur qog‘oz uchun

$$D = \frac{1}{2}\sigma_\circ^2 \quad \text{va} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_\circ = 0{,}71\sigma_\circ$$

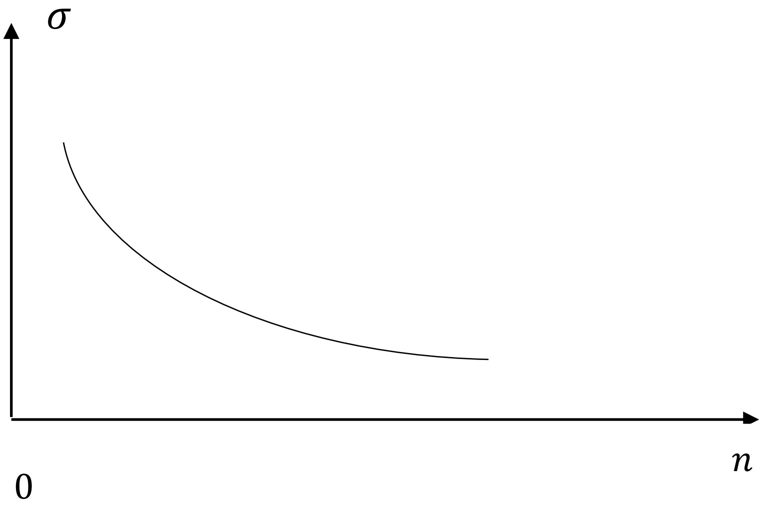
hosil qilamiz. Shunga o‘xshash uch tur qog‘oz uchun savatning o‘rtacha kvadratik chetlanishi $0{,}58\sigma_\circ$ ni tashkil etadi. Shunday qilib, savatning tashkil etuvchilari soni ortishi bilan hatto tashkil etuvchi elementlarning dispersiyasi bir xil bo‘lgan holda ham, risk kamayishini ko‘ramiz. Yuqorida qaralgan misolda bir turdagi qog‘ozdan to‘rt tur qog‘ozga o‘tganda o‘rtacha kvadratik chetlanish

$$\frac{\sigma_\circ - \sqrt{\frac{1}{4}}\sigma_\circ}{\sigma_\circ} \cdot 100\% = 50\% \text{ ga,}$$

Bir tur qog‘ozdan sakkiz tur qog‘ozga o‘tganda esa

$$\frac{\sigma_\circ - \sqrt{\frac{1}{8}}\sigma_\circ}{\sigma_\circ} \cdot 100\% = 65\% \text{ ga kamayadi.}$$

O‘rtacha kvadratik chetlanish va qog‘oz turlarining soni orasidagi bog‘lanish quyidagi rasmda ko‘rsatilgan.



18-rasm

Olingan bu natijalar, ya'ni o'rtacha kvadratik chetlanishni savatning tashkil etuvchilariga bog'liq holda o'zgarishi faqat dispersiya o'zgarmas bo'lgan holda emas, balki umumiyroq bo'lgan hollarda ham o'rinli bo'lishi ravshandir.

Endi savat tarkibi o'zgarganda daromad va risk qanday o'zgarishini ko'ramiz. Buning uchun (8.2.2) va (8.2.3) formulalarga qaytamiz va ularni faqat ikki tur qog'ozlar uchun (X va Y) yozamiz. Bunday tahlil qilish amaliy ahamiyatga ega.

Erkli daromadlar uchun

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y \qquad (8.2.5)$$

bog'liq daromadlar uchun esa

$$D = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + 2a_x a_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y \qquad (8.2.6)$$

formulalarni hosil qilamiz. Bunda $a_y = 1 - a_x$. Bunday holda jamg'arilgan daromadning o'rta qiymati quyidagicha aniqlanadi.

$$A = a_x d_x + (1 - a_x) d_y \qquad (8.2.7)$$

Aytaylik, $d_y > d_x$ va $\sigma_y > \sigma_x$ bo'lsin. Ravshanki, bunday holda ikkinchi tur qog'oz ulushining o'sishi savat daromadliligini orttiradi. (8.2.7) formuladan quyidagini

$$A = d_x + (d_y - d_x) a_y \qquad (8.2.8)$$

hosil qilamiz.

Savatning daromad dispersiyasi (8.2.6) formuladan topiladi, bunda uning qiymati korrelyasiyaning ishorasi va darajasiga bog‘liq bo‘ladi. Shunga bog‘liq holda uch holatni qaraymiz:

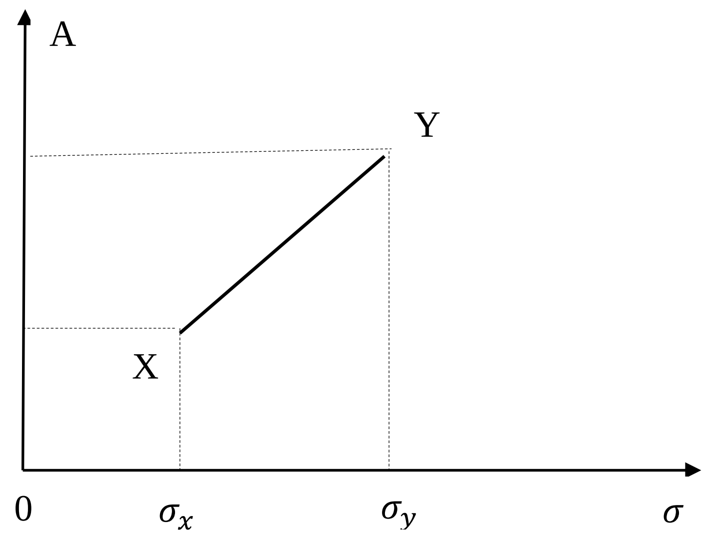
a) to‘la musbat daromadlar korrelyatsiyasi ($r_{xy} = 1$),

b) to‘la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi ($r_{xy} = -1$),

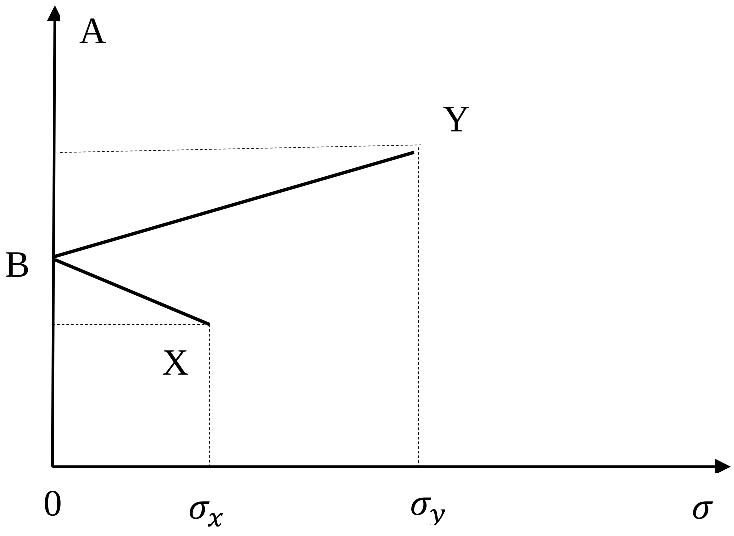
v) daromadlar erkliligi yoki 0 korrelyatsiya ($r_{xy} = 0$).

Birinchi holda ikkala qog‘ozni o‘z ichiga olgan savat uchun o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$ chegarada topiladi (19-rasm, *X* nuqta faqat *X* qog‘ozlardan iborat bo‘lgan savatni, *Y* esa *Y* qog‘ozlardan iborat bo‘lgan savatni ifoda etadi).

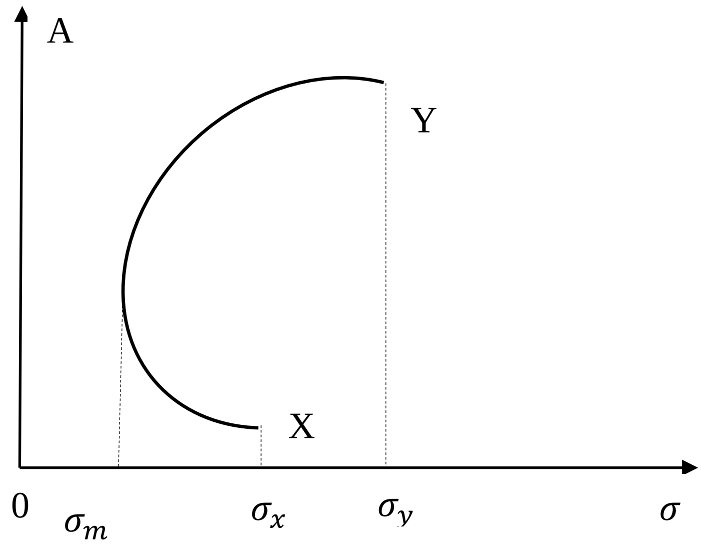
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ bo‘lgan xususiy hol uchun $D = \sigma^2$ ni (8.2.6) formuladan olamiz. boshqacha aytganda, to‘la musbat korrelyatsiyada investitsiyaning “ko‘chishi” dispersiya qiymatiga hech qanday ta’sir etmaydi.



19-rasm



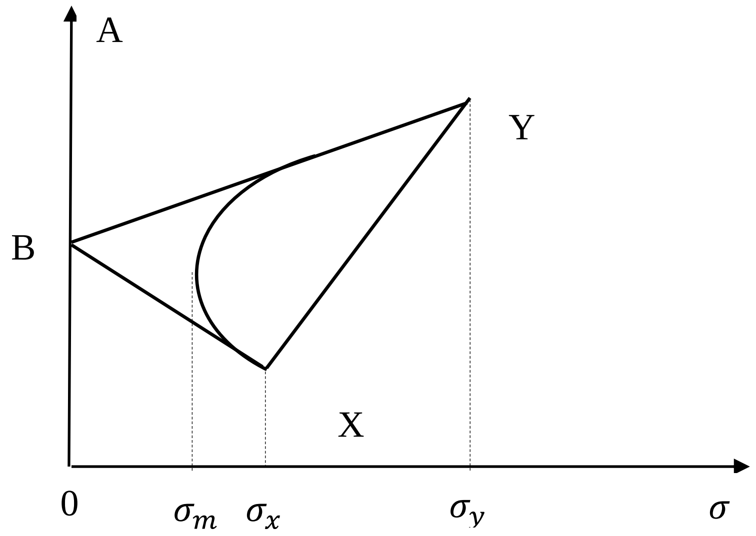
20-rasm



21-rasm

To‘la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi holida savat daromadlarining o‘rtacha kvadratik chetlanish dinamikasi ancha murakkabdir. *X* nuqtadan *Y* nuqtaga o‘tishda bu qiymat dastlab qisqaradi va *B* nuqtada nolga yetadi, so‘ngra o‘sadi (20-rasm). E’tibor bersak, *X* nuqtadan *B* nuqtaga o‘tishda risk kamayadi (o‘rtacha kvadratik chetlanish).

Oxirgi holatda *Y* qog‘oz ulushining ortishida kvadratik chetlanish σ_m ga teng bo‘lgan minimum qiymatga ega bo‘ladi, u σ_y ga qadar o‘sishi mumkin (21-rasm).



22-rasm

Endi uchala grafikni bitta koordinata tekisligiga joylashtiramiz (22-rasm). Demak, “daromad – o‘rtacha kvadratik chetlanish” XBY uchburchakda topiladi.

Yuqoridagi tahlildan diversifikatsiyaning samaradorligi (riskka nisbatan) faqat manfiy yoki nolli korrelyatsiyada kuzatiladi.

Misol. Savat ikki xil qog‘ozlardan tashkil topgan bo‘lib uning parametrlari quyidagicha bo‘lsin: $d_x = 2,\ \sigma_x = 0{,}8;\ d_y = 3;\ \sigma_y = 1{,}1$. Savatdan keladigan daromad: $A = 2a_x + 3a_y$. Ulushlardan keladigan daromad: $2 \le A \le 3$ bo‘ladi. Jamg‘arma daromad dispersiyasi

$$D = a_x^2 \cdot 0{,}8^2 + a_y^2 \cdot 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy}\ 0{,}8 \cdot 1{,}1$$

qog‘ozlardan keladigan daromad ulushlari $0{,}3$ va $0{,}7$ bo‘lsin. U holda $A = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}7 = 2{,}7$, $D = 0{,}651 + 0{,}37r_{xy}$. Shunday qilib, to‘la musbat daromadlar korrelyatsiyasi uchun $D = 1{,}021$, to‘la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi uchun $D = 0{,}281$. 95% ehtimol bilan birinchi hol uchun jamg‘arma daromad $2{,}7 \pm 2\sqrt{1{,}021} = 2{,}7 \pm 2{,}02$ chegarada, ikkinchi hol uchun esa $2{,}7 \pm 2\sqrt{0{,}781} = 2{,}7 \pm 1{,}06$, nolli korrelyatsiya uchun daromadlar chegarasi $2{,}7 \pm 2\sqrt{0{,}651} = 2{,}7 \pm 1{,}64$ ni tashkil etadi.

Endi ikki tur qog‘oz bo‘yicha tahlilni davom ettirib, savatga risksiz (risk free) investitsiyani kiritish daromadga qanday ta’sir etishini o‘rganamiz. (Risksiz investitsiya deganda iqtisodi turg‘un bo‘lgan davlatlarda davlat tomonidan chiqarilgan qimmatbaho qog‘ozlar tushuniladi). Buning uchun savatdagi Y qog‘ozni d_y, σ_y

parametrlarga xuddi shunday daromadlilik, lekin nolli dispersiya bilan almashtiramiz. Bunday almashtirishdagi savatning daromad-liligi o‘zgarmaydi. Dispersiyaga kelsak, u quyidagiga teng bo‘ladi:

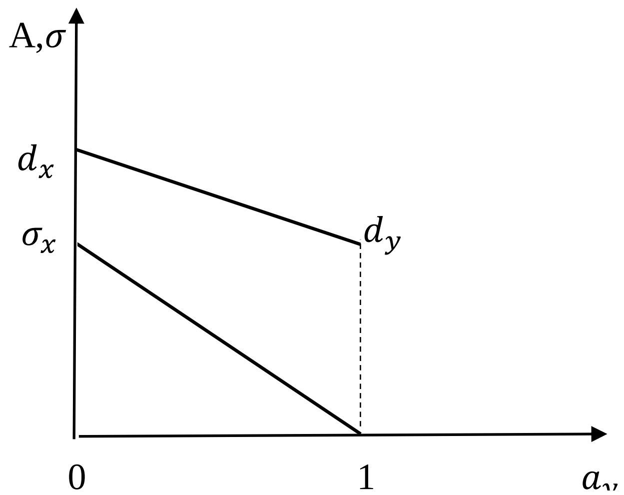
$$D = a_x^2 \, \sigma_x^2$$

Savat daromadining dispersiyasi risksiz qog‘ozlarni tashkil etuvchilarining solishtirma og‘irligiga bog‘liq bo‘ladi:

$$\sigma = a_x \sigma_x = (1 - a_y) \sigma_x \qquad (8.2.9)$$

Shunday qilib, savatga risksiz qog‘ozlarning qo‘shilishi savat riskini kamaytiradi, savat daromadining o‘rtacha kvadratik chetlanishi esa risksiz qog‘ozlar ulushining chiziqli funksiyasi sifatida aniqlanadi. Agar $d_x > d_y$ (aks holda savatni tanlash muammosi yo‘qoladi - u faqat risksiz qog‘ozlarlardan tashkil topishi kerak) bo‘lsa, u holda savatning daromadi risksiz qog‘ozlar ulushining ortishida d_x dan d_y gacha, o‘rtacha kvadratik chetlanish esa σ_x dan 0 gacha kamayadi (23-rasm). Ikki xil qog‘ozdan tashkil topgan savat uchun oxirgi tasdiqni (8.2.7) formulani almashtirish natijasidan kelib chiqqan (8.2.10) formula izohlaydi:

$$A = d_y + (d_x - d_y) a_x \qquad (8.2.10)$$



23-rasm

O‘z navbatida (8.2.9) formuladan

$$a_x = \frac{\sigma}{\sigma_x}$$ ni topamiz.

Natijada quyidagi munosabatni yozamiz:

$$A = d_y + \frac{d_x - d_y}{\sigma_x}\sigma \qquad (8.2.11)$$

Bu ifodadagi kasr riskning bozor narxi deb yuritiladi. Agar bu kattalik $0{,}5$ ga teng bo‘lsa, u holda kvadratik chetlanishning 1% o‘sishida daromad $0{,}5\%$ ga o‘sdi deb tushunamiz.

8.3. Daromad dispersiyasini minimallashtirish

Dispersiyaning minimumini topish uchun uni aniqlovchi formulaga qaytamiz. Agar alohida investisiya turlaridan keladigan daromadlar orasida statistik bog‘liqlik yo‘q deb hisoblansa, u holda savatning optimal tuzilishini aniqlash qiyin emas. Aytaylik, savat ikki xil X va Y qog‘ozlardan tashkil topgan bo‘lib, ularning savatdagi ulushlari a_x va $1-a_x$, dispersiyalari esa D_x va D_y bo‘lsin. Umumiy dispersiya (8.2.5) formuladan topiladi. Bu funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun ekstremumni topishning standart usulini tatbiq etamiz. Yig‘indi dispersiya minimal qiymatga ega bo‘lishi uchun

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y} \qquad (8.3.1)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan,

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y = a_x^2 D_x + (1-a_x)^2 D_y$$

$$D'_{a_x} = 2a_x D_x - 2(1-a_x)D_y = 0$$

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y}$$

Bu qiymatga D minimal qiymatga ega bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. (8.3.1) formulani dispersiyalar nisbati kabi ham ifodalashadi.

$$D_{x/y} = \frac{D_x}{D_y} \qquad (8.3.2)$$

(8.3.1) formuladan surat va maxrajini D_y ga bo‘lib

$$a_x = \frac{1}{D_{x/y} + 1} \qquad (8.3.3)$$

formulani hosil qilamiz. Daromadlar orasida korrelyatsiya mavjud bo‘lgan holda (8.2.6) formulaga murojaat qilamiz. Bu funksiya minimal qiymatga

$$a_x = \frac{D_y - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{D_x + D_y - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y} \tag{8.3.4}$$

tenglik bajarilganda erishadi. Dispersiyalar nisbati orqali ifodalasak, bu formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$a_x = \frac{1 - r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}}{D_{x/y} + 1 - 2r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}} \tag{8.3.5}$$

Bu keltirilgan formulalardan qog‘ozlardan birini ulushining hisob qiymati ba’zi sharoitlarda manfiy bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, bu qog‘oz turini savatga kiritish kerak emas.

Endi savat uch xil X, Y, Z qog‘oz turlaridan iborat bo‘lsin deb faraz qilaylik. Ularning ulushlari a_x, a_y va $a_z = 1-(a_x + a_y)$. Ayrim qog‘oz turlaridan keladigan daromadlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan holda savat daromadining dispersiyasi

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y + [1-(a_x + a_y)]^2 D_z .$$

Dispersiya minimum qiymatga ega bo‘lishi uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$a_x = \frac{D_{y/z}}{D_{x/z} \cdot D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}}$$

$$a_y = \frac{D_{x/z}}{D_{x/z} \cdot D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}}$$

Uch xil qog‘oz daromadlarining statistik bog‘liq bo‘lgan holiga to‘xtalmaymiz. Masalaning umumiy qo‘yilishiga o‘tamiz va savat tuzilishini *n* ta tashkil etuvchilar bilan aniqlaymiz. Daromadlar erkli, ya’ni daromadlar orasida korrelyatsiya yo‘q deb hisoblaymiz. Bunday holda dispersiya (8.2.2) formula bo‘yicha hisoblanadi. *n t*a ulush uchun bu formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$D = \sum_1^{n-1} a_i^2 D_i + \left(1 - \sum_1^{n-1} a_i\right)^2 D_n \tag{8.3.6}$$

O‘z navbatida

$$\left(1 - \sum_1^{n-1} a_i\right)^2 = 1 - 2\sum a_i + \left(\sum a_i\right)^2,$$

bunda

$$\left(\sum_{1}^{n-1} a_i\right)^2 = \sum_{1}^{n-1} a_i^2 + 2\sum_{1}^{n-1} a_i \sum_{2}^{n-1} a_i$$

nihoyat quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left(1-\sum_{1}^{n-1} a_i\right)^2 = 1-2\sum_{1}^{n-1} a_i + 2a_1\sum_{2}^{n-1} a_i + 2a_2\sum_{3}^{n-1} a_i + ... + 2a_{n-2}a_{n-1} + \sum_{1}^{n-1} a_i^2 \qquad (8.3.7)$$

(8.3.7) ni (8.3.6) ga qo‘yamiz va $n-1$ tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} f'(a_1) &= a_1 D_1 + \left(\sum_{1}^{n-1} a_i - 1\right) D_n, \\ f'(a_2) &= a_2 D_2 + \left(\sum_{1}^{n-1} a_i - 1\right) D_n, \\ &. . . . . \\ f'(a_{n-1}) &= a_{n-1} D_{n-1} + \left(\sum_{1}^{n-1} a_i - 1\right) D_n \end{aligned} \qquad (8.3.8)$$

(8.3.8) sistemaning har bir tenglamasini D_n ga bo‘lamiz va nolga tenglashtiramiz. Ma’lum almashtirishlardan so‘ng ushbuga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} & a_1\left(\frac{D_1}{D_n}+1\right) + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} = 1, \\ & a_1 + a_2\left(\frac{D_2}{D_n}+1\right) + a_3 + ... + a_{n-1} = 1, \\ & . . \quad . . . . \\ & a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n}+1\right) = 1 \end{aligned} \qquad (8.3.9)$$

(8.3.9) tenglamalar sistemasini matrisa ko‘rinishida yozamiz: $\overline{A}D = e.$
Bundan izlangan natijani olamiz:

$$\overline{A} = D^{-1} e \qquad (8.3.10)$$

bunda $e-$ savat tuzilishini xarakterlovchi birlik vektor, $\overline{A}-$ savat tuzilishining $n-1$ ta elementini xarakterlovchi vektor.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} \frac{D_1}{D_n}+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{D_2}{D_n}+1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & \frac{D_{n-1}}{D_n}+1 \end{pmatrix}$$

Misol. Ekspertlar to‘rt xil qog‘ozdan iborat bo‘lgan savat uchun dispersiyani quyidagicha baholashdi: $D_{1/4}=1{,}5;\ D_{2/4}=2;\ D_{3/4}=1.$
(8.3.10) formuladan

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\cdot e=\begin{pmatrix} 5/9{,}5 & -1/9{,}5 & -2/9{,}5 \\ -1/9{,}5 & 4/9{,}5 & -1{,}5/9{,}5 \\ -2/9{,}5 & -1{,}5/9{,}5 & 6{,}5/9{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}210 \\ 0{,}158 \\ 0{,}316 \end{pmatrix}.$$

Bundan $a_4=1-\sum_1^3 a_i=1-0{,}684=0{,}316.$

8.4. Markovisning minimal riskli qimmatli qog‘ozlar savati

Amerikalik iqtisodchi G.Markovis tomonidan qo‘yilgan optimal savatning matematik modelini qaraymiz. Bu ish uchun Markovis Nobel mukofotini olgan.

Faraz qilaylik, savatda n ta turli qog‘ozlar bo‘lsin. Savat dispersiyasi $V_c=\sum x_i x_j V_{ij}$ ni qaraymiz. Qo‘shiluvchilarni ikki guruhga ajratamiz:

$$V_c\sum x_i^2 V_{ii}+\sum x_i x_j V_{ij} \tag{8.4.1}$$

Birinchi guruhda n ta qo‘shiluvchi, ikkinchi guruhda $n(n-1)$ ta qo‘shiluvchi bor. Aytaylik, soddalik uchun savat narxi qimmatli qog‘ozlar turi bo‘yicha bir xil taqsimlanadi, ya’ni $x_i=\frac{1}{n}$ bo‘lsin. U holda dispersiya formulalari uchun $V_c=\frac{1}{n^2}\sum V_{ii}+\frac{1}{n^2}\sum V_{ij}=\left[\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum\frac{V_i}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{V_{ij}}{n(n-1)}\right)\right)\right]$, bu yerda $\sum\frac{V_{ii}}{n}$ – savatga kiruvchi qimmatli qog‘ozning o‘rtacha dispersiyasi, $\sum\frac{V_{ii}}{n(n-1)}$ – ularning o‘rtacha kovariatsiyasi.

Yuqoridagi formulalarga asosan ularni so‘zlar bilan quyidagicha aytish mumkin: savatning dispersiyasi $\left(\frac{1}{n}\right)$ o‘rta dispersiya va $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ o‘rta kovariatsiya. Xuddi shuning o‘zi savatning diversifikatsiya samaradorligini ifodalaydi. Savatga kiruvchi savatlar sonining o‘sishi uning dispersiya (risk) kamayishini, o‘rta kovariatsiya esa ortishini ifodalaydi. Demak, savatga kiruvchi qog‘ozlar bir-biri bilan kichik bog‘lanishda bo‘lsa, savatga kiruvchi qog‘ozlar sonining ortishi dispersiyani kamayishiga olib keladi.

Endi mavzuning bayoniga o‘tamiz. $V_c = \sum x_i x_j V_{ij}$ ga minimal qiymat beruvchi x_i ni topamiz, bunda savat samaradorligi $m_c = \sum x_i m_i$ ga teng deb qaraladi. $x_i -$ $i-$ turdagi qog‘oz turining qismi bo‘lgani uchun

$$\sum x_i = 1.$$

Masalaning bunday qo‘yilishida $V_c \to \min$ savat riskining minimumiga teng kuchli bo‘ladi, shuning uchun Markovis masalasi quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\sum x_i m_i = m_{c0}, \quad \sum x_i = 1$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi shunday x_i ni topish kerakki, bunda savat riski, ya’ni

$$r_c = \sqrt{\sum x_i x_j V_{ij}} \to \min.$$

Bu masalaning optimal yechimini x^* bilan belgilaymiz.

Agar $x_i^* > 0$ bo‘lsa, u holda ortiqcha mablag‘ni $i-$ turdagi qog‘ozga x_i^* qismini kiritish kerak, agar $x_i^* < 0$ bo‘lsa, qisqa vaqt ichida uni sotishga harakat qilish lozim. Agar bunday operasiya mavjud bo‘lmasa, yuqoridagi masalaning cheklovlar shartiga $x_i^* \geq 0$ cheklashni kiritish kerak.

Investorga $i-$ turdagi qog‘oz shu paytgacha qanday miqdordagi daromadni olib kelgan bo‘lsa, u shu daromadga ekvivalent bo‘lgan pulni oladi. Bu pullarni o‘z mablag‘iga qo‘shadi va taklif qilingan qimmatli qog‘ozlar ichidan optimallarini sotib oladi. Bu operatsiyani bajarmasdan ham, risksiz qog‘ozni savatga tashlash orqali ham amalga oshirish mumkin. Barcha berilgan samaradorlikdagi savatlar ichida minimal riskka ega bo‘lgan savat Markovisning minimal riskli savati deb yuritiladi. Ravshanki, uning riski r_c, berilgan samaradorlik m_c ning funksiyasi bo‘ladi.

8.5. Minimal riskli Tobin savati

Markovisning izlanishlaridan bir necha yil keyin boshqa taniqli amerikalik iqtisodchi D.Tobin (D.Tobin ham Nobel mukofoti lauriati) shu narsani payqadiki, agar bozorda risksiz qog‘oz mavjud bo‘lsa, u holda optimal savat haqidagi masala oson hal bo‘ladi va ajoyib sifat ko‘rsatkichiga ega bo‘ladi.

Faraz qilaylik, risksiz qog‘ozning samaradorligi m_0, x_0 – savatga qo‘yilgan mablag‘ qismi bo‘lsin, u holda savatning riskli qismi mablag‘ning $(1-x_0)$ qismidan iborat bo‘ladi. Aytaylik, savatning riskli qismining samaradorligi m_r, variatsiya (dispersiya) V_r bo‘lsin. Bu riskli qismning riski $r_r = \sqrt{V_r}$. U holda savatning barcha samaradorligi

$$m_c = x_0 m_0 + (1-x_0) m_r,$$

savatning variatsiyasi esa

$$V_c = (1-x_0)^2 V_r$$

va savat riski

$$r_c = (1-x_0) r_r$$

(risksiz qog‘ozlar qolganlari bilan korrelyatsiyalanmagan deb hisoblanmoqda).

x_0 ni yo‘qotib, $m_c = m_0 + r_c (m_r - m_0)/\mathrm{r}_r$ ni hosil qilamiz, ya’ni savatning samaradorligi uning riskiga chiziqli bog‘liq. Riskli turdagi qimmatli qog‘ozlarni 1 dan n gacha raqamlaymiz. Bunday holda Markovisning optimal savat haqidagi masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m_c$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (8.5.1)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min$$

Endi bu masalani Tobin tomonidan qanday yechilganini sharhlaymiz. Aytaylik, riskli qog‘ozlar kovariatsiya matrisasi V,

$X=(x_i)-x$ mablag‘ qismining vektor ustuni, $M=(m_i)-i-$turdagi riskli qog‘ozdan kutilayotgan samaradorlik, $i=1,2,...,n$ komponentalari 1 dan iborat bo‘lgan ustun-vektor - J bo‘lsin. U holda x_i qismining optimal qiymati

$$X^*=\frac{m_c-m_0}{(M-m_0J)V^{-1}(M-m_0J)}\cdot V^{-1}(M-m_0J) \qquad (8.5.2)$$

Bu yerda V^{-1} matrisa V matrisaga teskari matrisa yuqoridagi formulaning suratida va maxrajida son turibdi, $V^{-1}(M-m_0J)-$ ustun-vektor n o‘lchovga ega. Ko‘rinib turibdiki, bu vektor savatning samaradorligi m_c ga bog‘liq, X^* vektorning komponentlari m_c ning o‘sishi bilan unga proporsional holda o‘sadi, shuning uchun risksiz qog‘oz qo‘yilmasining x_0 qismi bunday holda qisqaradi.

Optimal savat riskining samaradorligiga bog‘liqligini ifodalaymiz. Buning uchun savatning variatsiya formulasi $V_c=X^TVX$ ga (8.5.2) formuladagi X^* qiymatini qo‘yamiz va (8.5.2) formula maxrajini d^2 bilan belgilaymiz.

Natijada

$$V_c=\left[(m_c-m_0)^2/d^4\right]\left[V^{-1}(M-m_0J)\right]^T V\left[V^{-1}(M-m_0J)\right]=$$
$$\left[(m_c-m_0)^2/d^4\right](M-m_0J)V^{-1}(M-m_0J)=(m_c-m_0)^2/d^2.$$

Demak, $V_c=(m_c-m_0)^2/d^2$ yoki $r_c=(m_c-m_0)/d$.

Xuddi shunga o‘xshash optimal savat samaradorligining riskga bog‘liqligini yozish mumkin: $m_c-m_0=\mathrm{dr}_c$ yoki $m_c=m_0+\mathrm{dr}_c$.

Ko‘rinib turibdiki, ular chiziqli bog‘langan. Hosil qilingan optimal savatni Tobinning minimal riskli savati deb ataymiz.

Tobin savati – bu bozordagi risksiz qog‘ozlarning naqd qiymatidagi Markovis savatidir.

8.6. Markovis va Tobinning maksimal samaradorlik savati

Optimal savat haqidagi Markovis masalasining qo‘yilishi

$$V_c=\sum_{i,j}x_ix_jV_{ij}$$

va (8.5.1) formulalarni so‘z bilan quyidagicha ifodalash mumkin: barcha savatlar ichida minimal riskka ega bo‘lgan savatni shunday shakllantirish lozimki, uning samaradorligi berilganidan kam bo‘lmasin.

Xuddi shunga o‘xshash barcha savatlar ichidan shunday savatni olish kerakki, bunda u maksimal samaradorlikka ega bo‘lib, risk berilganidan kam bo‘lmasin:

$$\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = r_c^2$$

$$\sum_i x_i = 1$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi shundaylarni topish kerakki, bunda

$$m_c = \sum_i x_i m_i \to \max .$$

Bu masalani Markovisning maksimal darajadagi samaradorlik savati deb yuritamiz. X riskli qog‘oz qismining optimal qiymati

$$X^* = \frac{r_c}{\sqrt{(M - m_0 J)V^{-1}(M - m_0 J}} \cdot V^{-1}(M - m_0 J)$$

(8.6.1)

Bozordagi risksiz qog‘ozning naqd qiymatidagi maksimal samaradorlikka ega bo‘lgan savat haqidagi masalaning qo‘yilishi matrisa-vektor ko‘rinishida quyidagicha bo‘ladi:

$$XVX = r_c^2$$

$$x_0 + JX = 1$$

$$x_0 m_0 + MX \to \max$$

shartli ekstremum masalasini topish uchun Lagranj funksiyasini yozamiz:

$$L = x_0 m_0 + Mx + \delta_0 (XVX - r_c^2) + \lambda_1 (x_0 + JX - 1)$$

X va x_0 bo‘yicha L funksiyadan hosila olib ularni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} dL/dX = 0 \\ dL/dx_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M + \lambda_0 VX + \lambda_1 J = 0 \\ m_0 + \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasidan λ_1 ni topib, birinchi tenglamaga qo‘yamiz:

$$M - m_0 J = -x_0 VX ,$$

bundan

$$X = (-1/\lambda_0) V^{-1}(M - m_0 J)$$

hosil bo‘ladi.

λ_0 ni topish uchun X ning topilgan qiymatini $XVX = r_c^2$ tenglikka qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(-1/\lambda_0)(\mathrm{M}-\mathrm{m}_0\, J)V^{-1}\mathrm{V}(-1/\lambda_0)\,\mathrm{V}^{-1}(M-m_0J)=\mathrm{r}_c^2$$

bundan

$\left[(-1/\lambda_0)^2\right](M-m_0J)$ ni d^2 bilan belgilab, $(-1/\lambda_0)=\mathrm{r}_c/d$ ni hosil qilamiz va nihoyat

$$\mathrm{X}^*=(\mathrm{r}_c/\mathrm{d})\,\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{M}-\mathrm{m}_0\, J)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula (8.6.1) formulaning o‘zginasidir.

Savatning samaradorligini uning berilgan r_c riskiga bog‘liq bo‘lgan maksimal samaradorlik orqali ifodalaymiz, ya’ni $x_0^*m+MX^*$ kattalikni topamiz, bunda x_0^* va X^* – savatga qo‘yilmalarning optimal qismi, $x_0^*=1-JX^*$ ga ega bo‘lib, bu ifodani va X ning topilgan qiymatini (8.6.1) formulaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathrm{x}_0^*\mathrm{m}_0+\mathrm{MX}^*=(1-J(r_c/\mathrm{d})\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{M}-\mathrm{m}_0\, J))\,\mathrm{m}_0+M(r_c/d)V^{-1}(M-m_0J)=$$
$$m_0+(\mathrm{r}_c/\mathrm{d})(\mathrm{M}-\mathrm{m}_0\, J)\,\mathrm{V}^{-1}(M-m_0J)=m_0+dr_c$$

Hosil qilingan optimal savatni Tobinning maksimal samaradorlik savati deb yuritamiz.

8.7. Investorning riskka bo‘lgan munosabati

Ma’lumki, kishilar riskka turlicha munosabatda bo‘ladilar, ayrimlari tavakkal qilishni yoqtirmaydi, ayrimlari esa o‘zlarini “omadli” hisoblaydilar. Investorning riskni qabul qilmasligini baholash mumkin. Buni lotereyalar misolida ko‘ramiz.

Faraz qilaylik, $1,2,\dots,n$ yutuqlarga ega bo‘lgan n ta lotereya berilgan bo‘lsin. Bu yutuqlar investorning qarashi bo‘yicha teng qiymatli emas.

Oddiy lotereya deb, yutuqlar to‘plamidagi $L=(p_1,\dots,p_n)$ ehtimollar taqsimotiga aytiladi. Oddiy lotereyalardan murakkabroq lotereyalarni qurish mumkin. k ta oddiy $L_1,\dots,L_k$ lotereyalarni olamiz. Har biriga p_i, $i=1,\dots,k$ ehtimolni yozib murakkab lotereya $(L_1,\ p_1,\dots,L_k,p_k)$ ni hosil qilamiz.

Bu lotereya quyidagicha yoritiladi: avval mos keluvchi tasodifiy mexanizm yordamida $(p_1,\dots,p_k)$ ehtimollar taqsimoti o‘ynaladi va $1,\dots,k$ nomerlar to‘plamidan qandaydir i nomerni olamiz. So‘ngra oddiy L_i lotereyalar o‘ynaladi. Bunday lotereyani birinchi tartibli murakkab lotereya deb yuritiladi. Lotereyalardan 2-tartibli murakkab lotereyalarni qurish mumkin va h.k.

Investor uchun turli lotereyalar turlicha qadrga ega, shuning uchun lotereyalar to‘plamida afzallik munosabati kelib chiqadi: $L \le L'$ yozuv investor uchun L' ning afzal ekanligini bildiradi. Afzallik munosabati quyidagi xossalarga ega:

1) refleksivlik; 2) tranzitivlik; 3) etuklilik. Refleksivlik har qanday lotereya uchun $L' \le L$ bo‘lishini; tranzitivlik, agar $L_1 \le L_2$ va $L_2 \le L_3$ bo‘lsa, u holda $L_1 \le L_3$ ekanligini; etuklilik esa ikkita loteriya uchun yo $L' \le L$ yoki $L \le L'$ to‘g‘riligini bildiradi.

Lotereyaning har bir $i = 1, 2, ..., n$ yutuqlariga shunday U_i son yozilsaki, bunda ikkita $L_1 = (p_1, ..., p_n)$, $L' = (p_1^1, ..., p_n^1)$ lotereyalar uchun $\sum_i p_i U_i \le \sum_i p_i^1 U_i$ tengsizlik bajarilsa, u holda $L \le L^1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $i-$yutuqlarga yozilgan U_i sonlar lotereyaning foydaliligi deyiladi.

$$U(L) = \sum_i p_i U_i$$

son esa lotereyaning o‘rtacha foydaliligi deyiladi. Ehtimollar nazariyasi nuqtai nazari bo‘yicha bu matematik kutilmadir. Demak, lotereyaning foydaliligi matematik kutilma formulasi yordamida hisoblanadi.

$(L_1, p_1, ..., L_k, p_k)$ birinchi tartibli murakkab lotereya oddiy lotereyaga ekvivalent bo‘lishi uchun uning $j-$yutug‘ining ehtimoli $\sum p_i p_{ij}$ ga teng bo‘lishi lozim. Bunda p_{ij} – $i-$lotereya L_i ning $j-$ yutug‘ining ehtimoli.

Misol. Ikkita oddiy $L_1 = (0{,}1;\ 0{,}9)$ va $L_2 = (0{,}4;\ 0{,}6)$ lotereyalarni olamiz.

$(L_1,\ 0{,}3;\ L_2,\ 0{,}7)$ murakkab lotereya qanday oddiy lotereyaga ekvivalent bo‘ladi?

Yuqoridagi qabul qilingan ta’rifga ko‘ra

$$(0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}4;\ \ 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}6) = (0{,}31; 0{,}69)$$

Bu misolni quyidagicha davom ettiramiz. Ikkita lotereyadan bittasi 0 yutuqqa, ikkinchisi 1 yutuqqa ega bo‘lsin. 0 yutuqlisi 0 foydalilikka, 1 yutuqlisi esa 100 foydalilikka ega bo‘lsa, $L_1 = (0{,}1; 0{,}9)$,

$L_2=(0,4;0,6)$ va $(L_1,\ 0,3;\ L_2,0,7)$ lotereyalarning o‘rtacha foydaliligini topamiz.

$$U_\circ=0,\ U_1=100,\ L_3=(L_1,\ 0,3;\ L_2,0,7)=(0,31;\ 0,69)\,.$$

$$U(L_1)=0,1\cdot 0+0,9\cdot 100=90;$$

$$U(L_2)=0,4\cdot 0+0,6\cdot 100=60;$$

$$U(L_3)=0,31\cdot 0+0,69\cdot 100=69.$$

Misol. Investorning boshlang‘ich mablag‘i 4 mln. so‘m bo‘lib, pulning foydaliligi $U(x)=\sqrt{x}$ bo‘lsin. Unga quyidagicha loteriya taklif etiladi: 0,5 ehtimol bilan 12 mln, 0,5 ehtimol bilan 0 mln. so‘m. Investor o‘yinda ishtirok etishi kerakmi?

Yechish: $U(4)=\sqrt{4}=2.$ Investorning 12 mln. so‘mni yutgandan keyingi mablag‘i $U(4+12)=U(16)=4,$ 0 mln. so‘mni yutgandan keyingi mablag‘i $U(4)=2.$ O‘rtacha kutiladigan foydalilik boshlang‘ich qiymatdan katta. Demak, investor o‘yinda qatnashishi kerak.

8.8. Riskning miqdoriy bahosi

Agar moliyaviy operatsiyada har bir natijaning ehtimoli mavjud bo‘lsa, bunday operatsiya ehtimoliy moliyaviy operatsiya deyiladi. Bunday operatsiyalarning daromadi, ya’ni oxirgi va boshlang‘ich pul miqdorlari ayirmasining bahosi tasodifiy miqdor bo‘ladi.

1-misol. Ushbu ikkita ehtimoliy operatsiyani qaraymiz:

0_1:	-5	25
	0,01	0,99

0_2:	15	25
	0,5	0,5

0_1 – birinchi operatsiyada investor -5 ga teng bo‘lgan pul birligini (daromad) 0,01 ehtimol bilan, 25 ga teng bo‘lgan pul birligini esa 0,99 ehtimol bilan oladi. 0_2 – ikkinchi operatsiyada esa 15 va 25 ga teng bo‘lgan pul birliklarini 0,5 ehtimol bilan oladi. Investor qaysi operatsiyani tanlaydi? Albatta qaysi operatsiyada risk kichik bo‘lsa, o‘shani tanlaydi.

Endi riskni miqdoriy baholashga o‘tamiz. Operatsiyaning har bir natijasining ehtimolini yozib, investorning daromadini baholaymiz. Demak, investorning daromadi tasodifiy miqdor bo‘lib, uni biz tasodifiy daromad deb ataymiz. Hozircha diskret bo‘lgan hol bilan chegaralanamiz.

0:	q_j	q_1	q_2	...	q_n
	p_j	p_1	p_2	...	p_n

Bunda q_j – daromad, p_j – shu daromadning ehtimoli. Endi ehtimollar nazariyasini qo‘llash mumkin. Kutiladigan o‘rtacha daromad - Q daromadning matematik kutilishi, ya’ni

$$M(Q)=q_1 p_1+...+q_n p_n,$$

ba’zan m_Q bilan belgilanib operasiyaning samaradorligi deb ham yuritiladi.

$D(Q)$ – operatsiyaning dispersiyasi D_Q bilan belgilanadi.

$$D(Q) = M\left[(Q-m_Q)^2\right]=M(Q^2)-(M(Q))^2,$$

o‘rtacha kvadratik chetlanish

$$\sigma(Q) = \sqrt{D(Q)}, \quad \sigma_Q \text{ bilan belgilanadi.}$$

Operatsiyaning samaradorligi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi bir xil birlikda daromad qanday birlikda o‘lchansa, xuddi shunday birlikda o‘lchanadi.

Operatsiyaning risklik darajasini baholash daromad tasodifiy miqdorining o‘rtacha kvadratik chetlanishi orqali amalga oshirish maqsadga muvofiqdir.

Shunday qilib, operatsiyaning riski deb Q tasodifiy daromadning o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ_Q soniga aytiladi va uni biz r_Q bilan belgilashni kelishib olamiz. Endi 1-misoldagi operatsiyalarning risklarini topamiz.

Dastlab matematik kutilishlarni, so‘ngra dispersiyalarni hisoblaymiz.

$$m_1 = -5\cdot 0{,}01+25\cdot 0{,}99=24{,}7$$

$$D_1=M(Q_1^2)-m_1^2=25\cdot 0{,}01+625\cdot 0{,}99-24{,}7^2=8{,}91$$

$$r_1 = \sqrt{D_1}=\sqrt{8{,}91} = 2{,}98$$

$$m_2 = 15 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 40 = 20$$

$$D_2 = 225 \cdot 0,5 + 625 \cdot 0,5 - 20^2 = 0,5 \cdot 850 - 400 = 425 - 400 = 25$$

$$r_2 = \sqrt{25} = 5.$$

Demak, birinchi operatsiyaning riski kamroq.

$$2,98 < 5.$$

2-misol. Investor quyidagi ikkita o‘yinni qaramoqda. Bu o‘yinlarning birida tanga tashlanmoqda. Agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, investor 10 pul birligini oladi, agar raqam tomoni bilan tushsa, 10 pul birligini to‘laydi. Bu o‘yinda to‘lovlar quyidagicha taqsimlangan:

	raqam	gerb
to‘lovlar	-10	10
	0,5	0,5

Ikkinchi o‘yinda o‘yin soqqasi tashlanmoqda va bunda investorning to‘lovlari quyidagicha taqsimlangan:

	1	2	3	4	5	6
to‘lovlar	-20	-10	0	0	10	20
	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Ikkala holda ham kutiladigan yutuq 0 ga teng. Dispersiyalarni va risklarni hisoblaymiz.

$$D_1 = 100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 100; \quad D_2 = 2(400 + 100) \cdot \frac{1}{6} = \frac{500}{3} \approx 167$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{100} = 10; \quad r_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{167} \approx 13.$$

Operatsiyaning kutiladigan o‘rtacha daromadi, ya’ni m_Q samaradorlik va uning riski Chebishev tengsizligi bilan quyidagicha bog‘langan:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \le \frac{r_Q^2}{\varepsilon^2} \quad \text{yoki} \quad P(|Q - m_Q| \le \varepsilon) > 1 - \frac{r_Q^2}{\varepsilon^2}$$

Ma’lumki, bu tengsizlikning xatoligi katta bo‘lib u amalda ko‘p qo‘llanilmaydi.

Agar operatsiyaning daromadi tasodifiy bo‘lib, normal taqsimot qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa, u holda risk samaradorlik bilan bog‘liq bo‘lgan qandaydir ehtimolni aniqroq ko‘rsatadi.

$$P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0,997; \quad P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0,95$$

Ba’zan bu baholar juda foydali bo‘ladi.

8.9. To‘lovlar oqimining dyurasiyasi

Faraz qilaylik, i va $\mu=(1+i)$ mos ravishda foiz stavkasi va jamg‘arma koeffitsiyenti bo‘lsin. Shuningdek, to‘lovlar oqimi $\Phi=(R_k,t_k)$ bo‘lsin, bunda R_k kattalik t_k momentdagi to‘lov miqdori. Bu oqimning joriy qiymatini A bilan belgilaymiz: $A=\sum_k A_k$, bunda keyingi to‘lovning joriy qiymati

$$A_k=R_k/(1+i)^{t_k}=R_k(1+i)^{-t_k}=R_k e^{-t_k\ln\mu}$$

Ta’rif: Φ to‘lovlar oqimining dyuratsiyasi deb, joriy qiymatining jamg‘arma koeffitsiyenti μ bo‘yicha “minus” ishora bilan olingan elastikligiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$E_\mu^A=(dA/d\mu):(A/M)$$

Belgilash kiritsak, $Dur(\Phi)=-E_\mu^A$ hosil bo‘ladi.

Elastiklik ta’rifini eslatamiz. Aytaylik, $x-$ argument, $y-$ funksiya bo‘lsin, u holda y ning x bo‘yicha x_0 nuqtadagi elastikligi deb y ning nisbiy o‘zgarishini x ning nisbiy o‘zgarishiga nisbatining $\Delta x\to 0$ dagi limitiga aytiladi va $E_x^y(x_0)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$E_x^y(x_0)=\left(\frac{dy/y_0}{dx/x_0}\right)=(dy/dx):(y_0/x_0)=y'(x_0)\frac{x_0}{y_0}.$$

Agar $E_x^y=-2$ bo‘lsa, u holda x ning 1% ga ortishi y ning 2% ga kamayishini bildiradi. Dyurasiya jamg‘arma koeffitsiyentini o‘zgarishidagi oqimning joriy qiymatining o‘zgarishini bildirar ekan, agar oqimning dyurasiyasi 2 bo‘lsa, jamg‘arma koeffitsiyentining 1% ga ortishidagi oqimning joriy qiymatini jamg‘arma koeffisiyenti μ bo‘yicha differensiallaymiz.

Demak,

$$\frac{dA}{d\mu}=\frac{d\left(\sum_k R_k e^{-t_k\ln\mu}\right)}{d\mu}=\left(\sum_k -t_kR_ke^{(-t_k-1)\ln\mu}\right):A/\mu=-\left(\sum_k t_k(R_ke^{-t_k\ln\mu/A})\right)=$$

$$=-\sum_k t_k(A_k/A)=-dur(\Phi)$$

$$dur(\Phi)=\sum_k t_k(A_k/A).$$

Endi barcha to‘lovlar nomanfiy deb hisoblaylik, u holda barcha A_k lar ham nomanfiy bo‘ladi va ularning yig‘indisi A ga teng bo‘lib, barcha A_k / A lar yig‘indisi 1ga teng bo‘ladi. Shuning uchun A_k / A nisbatlarni ehtimollar, $\sum_k t_k A_k / A$ ni esa to‘lovlarning o‘rta momenti sifatida qarab, ushbu ma’noda tushunish mumkin: T tasodifiy miqdorni diskret deb hisoblab, uning ehtimolini shunday aniqlash kerakki, bunda

$$P(T = t_k) = A_k / A \ ,$$

uning matematik kutilishi esa

$$M[T] = \sum_k t_k (A_k / A)$$

ga teng bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki,

$$\sum_k t_k (A_k / A) = dur(\Phi)$$

Demak, quyidagi xulosaga kelamiz: nomanfiy to‘lovlarning o‘rta momenti va to‘lovlar oqimining dyurasiyasi o‘zaro teng ekan. Agar to‘lovlar oqimining dyurasiyasi 2 ga teng bo‘lsa, u holda jamg‘arma koeffitsiyenti 1% ga oshganda to‘lovlar oqimining o‘rta momenti 2% ga oshadi. Bundan ko‘rinadiki, nomanfiy to‘lovlar oqimining jamg‘arma koeffitsiyenti bo‘yicha elastikligi manfiy bo‘lsa, bunday to‘lovlar oqimining dyurasiyasi musbat bo‘ladi. Agar to‘lovlar jamg‘arma qiymati ma’lum bo‘lsa, u holda to‘lovlarning chekli momentigacha, katta cheksizga qadar diskontirlash mumkin.

Bunga oydinlik kiritish maqsadida $R = 100$ ming so‘m bo‘lgan 5 yillik rentaning dyurasiyasini yillik 10% stavkada topish talab etiladi.

Ma’lumki, T momentdagi $\Phi = \{R_k; t_k\}$ to‘lovlar oqimining shu muddatga diskontirlangan qiymati

$$\Phi(T) = \sum_k R_k (1+i)^{T-t_k}, \qquad A_k = R_k (1+i)^{T-t_k}.$$

Rentaning jamg‘arma qiymati

$$A = \frac{1000(1,1^5 - 1)}{0,1} = 6105.$$

$$A_1 = 1000(1+0,1)^{5-1} = 1000 \cdot 1,1^4 = 1464,$$

$$A_2 = 1000 \cdot 1,1^3 = 1331,$$

$$A_3 = 1000 \cdot 1,1^2 = 1210,$$

$$A_4 = 1000 \cdot 1{,}1 = 1100,$$

$$A_5 = 1000 \cdot 1{,}1^0 = 1000.$$

$P(T = t_k) = A_k / A$ formuladan

$$P_1 = \frac{1464}{6105} = 0{,}24,$$

$$P_2 = \frac{1331}{6105} = 0{,}22,$$

$$P_3 = \frac{1210}{6105} = 0{,}20,$$

$$P_4 = \frac{1100}{6105} = 0{,}18,$$

$$P_5 = \frac{1000}{6105} = 0{,}16.$$

Dyurasiyani T ning momentlik kutilmasi sifatida hisoblaymiz:

$$dur(\Phi) = M[T] = 1 \cdot 0{,}24 + 2 \cdot 0{,}22 + 3 \cdot 0{,}20 + 4 \cdot 0{,}18 + 5 \cdot 0{,}16 = 2{,}8.$$

Risk haqida quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. Operasiya miqyosi k marta ortsa, ya’ni tasodifiy daromadning barcha qiymatlari k marta ortsa, operasiyaning samaradorligi k marta, riski esa $|k|$ marta ortadi.

2. Barcha daromadlar bir xil o‘zgarmas son qiymatiga ortsa, operasiyaning samaradorligi shu o‘zgarmas songa o‘zgaradi, risk esa o‘zgarmaydi.

3. 0_1 va 0_2 operatsiyalar yig‘indisining dispersiyasi dispersiyalar yig‘indisiga teng bo‘ladi, shuning uchun yig‘indi operatsiyaning riski $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ga teng bo‘ladi.

4. Umumiy holda, ya’ni ikkita ixtiyoriy 0_1 va 0_2 operatsiyalar uchun operatsiyalar yig‘indisining riski $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2k_{12}}$ ga teng, bunda k_{12} – operatsiyalarning tasodifiy daromadlarining korrelyatsiya koeffitsiyenti.

Endi umumiyroq holni qaraymiz. Yutuqlar to‘plami barcha nomanfiy pul miqdori $R^+ = [0, \infty)$ dan iborat. Lotereya R^+ da ehtimollar taqsimoti bilan F taqsimot funksiya yordamida berilgan bo‘lsin. Kutiladigan foydalilikni topish qoidasiga ko‘ra investor uchun R^+ da aniqlangan $U(x)$ foydalilik funksiyasini topish mumkin. Lotereyaning foydaligi F ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$U(F) = \int_{R^+} U(x)\, d\, F(x),$$

agar qaralayotgan taqsimot uzluksiz, ya’ni $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, u holda

$$U(F) = \int_{R^+} U(x)\, f(x)\, dx,$$

bu esa lotereyaning o‘rtacha kutiladigan foydaliligi, $U(x)$ - Bernulli funksiyasi, $U(F)$ - Neyman-Morgenshtern funksiyasi deb yuritiladi.

Misol. Aytaylik, Bernulli funksiyasi $U(x)=\sqrt{x}$ ko‘rinishda bo‘lib, lotereyaning yutuqlari $[0,1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo‘lsa, u holda o‘rtacha kutiladigan foydalilik

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$ ga teng bo‘ladi.

VIII bobga doir masalalar

1. Ikkita oddiy lotereyalar $L_1 = (0,2;\ 0,8)$ va $L_2 = (0,3;\ 0,7)$ qaralayotgan bo‘lsin. $(L_1,\ 0,4;\ L_2,\ 0,6)$ murakkab lotereya qanday oddiy lotereyaga ekvivalent bo‘ladi?

2. Yuqoridagi lotereyalardan bittasi 0 yutuqqa, ikkinchisi 1 yutuqqa ega bo‘lsin. 0 yutuqlisi 0 foydalikka, 1 yutuqlisi esa 100 foydalikka ega bo‘lsa, $L_1 = (0,2;\ 0,8)$, $L_2 = (0,3;\ 0,7)$ va $(L_1, 0,4;\ L_2,\ 0,6)$ lotereyalarning o‘rtacha foydaliligini toping?

3. Investorning boshlang‘ich mablag‘i 3 mln. so‘m bo‘lib, pulining foydaliligi $U(x)=\sqrt{x+1}$ bo‘lsin. Unga quyidagicha lotereya taklif etiladi: 0,5 ehtimol bilan 12 mln, 0,5 ehtimol bilan 0 mln. so‘m, investor o‘yinda ishtirok etishi kerakmi?

4. Ushbu ikkita ehtimoliy operatsiya uchun quyidagilar ma’lum bo‘lsin.

0_1:	-10	50
	0,01	0,99

0_2:	25	50
	0,5	0,5

0_1 - birinchi operatsiyada investor -10 ga teng bo‘lgan pul birligini 0,01 ehtimol bilan, 50 ga teng bo‘lgan pul birligini esa 0,99 ehtimol bilan oladi. 0_2 - ikkinchi operasiyada esa 25 va 50 ga teng bo‘lgan pul birliklarini 0,5 ehtimol bilan oladi. Investor qaysi operasiyani tanlaydi?

5. Investor quyidagi ikkita o‘yinni qaramoqda. Bu o‘yinlarning birida tanga tashlanmoqda. Agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, investor 100 pul birligini oladi, agar raqam tomoni bilan tushsa, 100 pul birligini to‘laydi. Bu o‘yinda to‘lovlar quyidagicha taqsimlangan:

	raqam	gerb
to‘lovlar	- 100	100
	0,5	0,5

Ikkinchi o‘yinda o‘yin soqqasi tashlanadi va bunda investorning to‘lovlari quyidagicha taqsimlangan:

	1	2	3	4	5	6
to‘lovlar	-200	-100	0	0	100	200
	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

6. Agar Bernulli funksiyasi $U(x)=\sqrt[3]{x}$ ko‘rinishda bo‘lib, lotereyaning yutuqlari $[0;1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo‘lsa, u holda kutiladigan o‘rtacha foydalilikni toping.

IX bob. DAROMADLILIKNI O‘LCHASH

9.1. To‘la daromadlilik

Moliyaviy operatsiyalardan va turli tijorat oldi-sotdilaridan yuzaga keladigan daromad turli ko‘rinishlarga ega: Ssuda berishdan keladigan daromadlar, vekselni hisobga olishdagi diskont, obligatsiyadan keladigan daromadlar va boshqa qimmatbaho qog‘ozlardan keladigan daromadlar. “Daromad” tushunchasining o‘zi operatsiyaning aniq mazmunini ifodalaydi.

Haqiqatda bitta operatsiyada bir nechta daromad manbalari qaraladi. Masalan, ssuda kreditorga foiz keltiradi, obligatsiya egasi foizdan (kuponlarning tushishi bo‘yicha uni sotish va sotib olish narxlaridan) foyda oladi. Bu aytilganlarga bog‘liq ravishda operatsiya natijasida barcha manbalardan keladigan daromadlarni o‘lchash muammosi kelib chiqadi. Odatda bu operatsiyalarning samaradorlik darajasi ko‘pincha murakkab foiz, ayrim hollarda esa oddiy foiz stavkasi ko‘rinishida o‘lchanadi.

Barcha kirim va daromadlar shartli ravishda ekvivalent (teng daromadli) ssuda operatsiyasiga tenglashtiriladi. Moliya-kredit operatsiyasining daromadlilik darajasini taqqoslash va o‘lchash muammolarini yechish har bir operatsiya uchun shartnoma va ularning bajarilish shartlarini hisobga olgan holda yillik shartli stavkani hisoblash metodlari bir-biridan ko‘p munosabatlarda farq qiladi. Bu farq birinchi qarashda uncha ahamiyatsizdek tuyuladi, amalda operatsiyaning barcha shartlari katta yoki kichik o‘lchovda oxirgi natijaga, moliyaviy samaradorlikka ta’sir etadi.

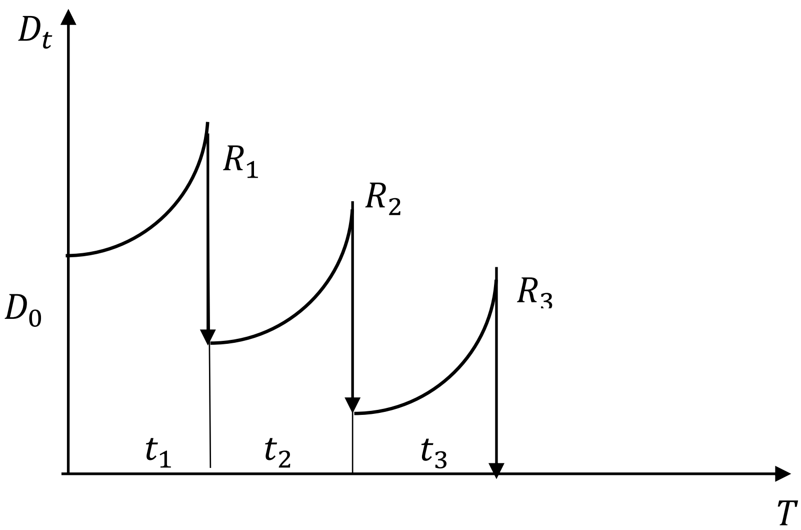
Hisob operatsiyalar turiga qarab foiz stavkasi turlicha nomlanadi. Oddiy depozit va ssuda operarsiyalarida u samarali, obligatsiyalarni baholashda to‘la daromadlilik yoki qarzni to‘lash momentidagi daromadlilik deb yuritiladi. Ishlab chiqarish investitsiyalari tahlilida daromadlilikning ichki normasi yoki foizning ichki normasi terminlari qo‘llaniladi. Biz ishlab chiqarish investitsiyalaridan boshqa barcha hollarda yillik stavkani to‘la daromadlilik (TD) deb yuritishga kelishib olamiz. TD qancha katta bo‘lsa, operatsiyaning samaradorligi shuncha katta bo‘ladi. Noxushliklar sharoitida TD 0 yoki manfiy bo‘lishi mumkin. TD faqat kreditor uchun operatsiyaning daromadlilik ko‘rsatkichi bo‘lmay, balki qarzdor uchun kredit narxini xarakterlaydi. Shu narsani ta’kidlash lozimki, qarzdor kredit olishda kredit narxini oshiradigan qandaydir qo‘shimcha xarajatlar qilishi mumkin, ammo pul egasi uchun kredit operatsiyasining daromadliligi o‘zgarmay qoladi.

G‘arb davlatlarining moliyaviy adabiyotlarida TD ko‘rsatkichini hisoblash uchun juda ko‘p formulalar keltirilgan. Bu formulalarning barchasini moliyaviy operatsiyaning balansi yoki ekvivalent tenglama deb yuritiluvchi bitta tenglik bilan umumlashtirish mumkin.

9.2. Ekvivalentlik tenglamasi

Kirim va chiqimni balanslashtirish moliyaviy yoki kredit (ssuda, depozit, ishlab chiqarishni loyihalash uchun investisiya va hokazo) operatsiyalarining zaruriy sharti hisoblanadi. Ekvivalentlik tenglamasi yordamida yuqorida biz qaragan qarzlarni to‘lash haqidagi masalalarni hal qilish mumkin.

Ekvivalentlik tenglamasini tuzish uchun ushbu grafikdan foydalanamiz.



25-rasm

R_1 va R_2 to‘lovlardan so‘ng qarzlarning quyidagi miqdorlarini hosil qilamiz:

$$D_1 = D_\circ q^{t_1} - R_1; \qquad D_2 = D_1 q^{t_2} - R_2,$$

bunda $D_{\circ}$ – kredit miqdori, $q^t = (1+i)^t$ – jamg‘arma ko‘paytuvchisi, i – kredit bo‘yicha foiz stavkasi. Kredit va qarz to‘lovlari bizning misolimizda balans bo‘lishi uchun

$$D_2 q^{t_3} - R_3 = 0$$

tenglikning bajarilishi zarur.

D_2 ni $D_{\circ}$ orqali ifodalaymiz va hosil qilingan natijani ekvivalentlik tenglamasiga qo‘yamiz:

$$\left[(D_{\circ} q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2\right] q^{t_3} - R_3 = 0$$

Vaqt bo‘yicha intervallar uchtadan ko‘p bo‘lsa, tenglama qo‘pol ko‘rinishga ega bo‘ladi. Buni ixcham ko‘rinishda yozish uchun $T = \sum_j t_j$ almashtirishni bajarib, yuqoridagi tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$D_{\circ} q^T - (R_1 q^{t_2+t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3) = 0 \qquad (9.2.1)$$

Hosil qilingan bu tenglama metodologik nuqtai nazardan muhim ahamiyatga ega. Bu yerda kredit operatsiyaga murakkab foiz tatbiq etilsa, hech qanday yo‘qotishlarsiz uni ikkita “uchrashuvchi” jarayonga ajratish mumkinligi ko‘rsatilgan: butun davr uchun boshlang‘ich qarzni jamg‘arish va to‘lov boshlanishidan oxirigacha bo‘lgan davr uchun qarz to‘lovlarini jamg‘arish. Bunday yondashuv metodlarini “uchrashuv operatsiyalari” deb ataymiz.

(9.2.1) ni diskont ko‘paytuvchisi v^T ga ko‘paytirib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$D_{\circ} - (R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_1+t_2} + R_3 v^T) = 0 \qquad (9.2.2)$$

(9.2.2) formulani n ta qarz to‘lovlari uchun umumlashtiramiz:

$$D_{\circ} q^T - \sum R_j q^{T_j} = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

bunda $T_j - R_j$ to‘lov boshlanishidan to‘lov muddati oxirigacha bo‘lgan vaqt.

Biz yuqorida ekvivalentlik tenglamasini butun operatsiya davomida foiz stavkasi o‘zgarmas bo‘lgan holda yozdik. Agar foiz stavkasi vaqt bo‘yicha o‘zgaradigan bo‘lsa ham hech narsa o‘zgarmay qoladi. Aytaylik, o‘zgarish har bir qadamda sodir bo‘lsin. U holda ekvivalentlik tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$D_{\circ} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \ldots q_n^{t_n} - (R_1 q_1^{T_1} + R_2 q_2^{T_2} + \ldots + R_n q_n^{T_n}) = 0,$$

bunda

$$T_1 = \sum_{k=2}^{n} t_k, \quad T_2 = \sum_{k=3}^{n} t_k \quad ...$$

Ekvivalentlik tenglamasi operatsiyaning daromadliligini o‘lchashda va olingan daromadni ularning manbalari va davrlari bo‘yicha taqsimlash masalalarini hal qilishda yordam beradi.

9.3. Vositachilik haqini hisobga olgan holdagi ssuda va hisob operatsiyasining daromadliligi

Ssuda operatsiyasi. Vositachilik haqini hisobga olmagan holda ssuda operatsiyasining daromadliligi ekvivalent yillik murakkab foiz stavkasi yordamida aniqlanadi. Ayrim hollarda banklar va boshqa kreditorlar beriladigan kreditdan turli to‘lovlarni ushlab qoladi. Shuning hisobiga qarzdor uchun kredit to‘lovi ortadi, kreditor daromadi o‘sadi.

Faraz qilaylik, D miqdordagi ssuda n yil muddatga berilgan bo‘lsin. Uning berilishida operatsiya uchun vositachilik haqi G miqdorda ushlab qolinadi. Demak, berilgan ssudaning haqiqiy qiymati $D-G$ ga teng bo‘ladi. Faraz qilaylik, dastlab operasiya i stavka bo‘yicha oddiy foiz bilan amalga oshirilgan bo‘lsin.

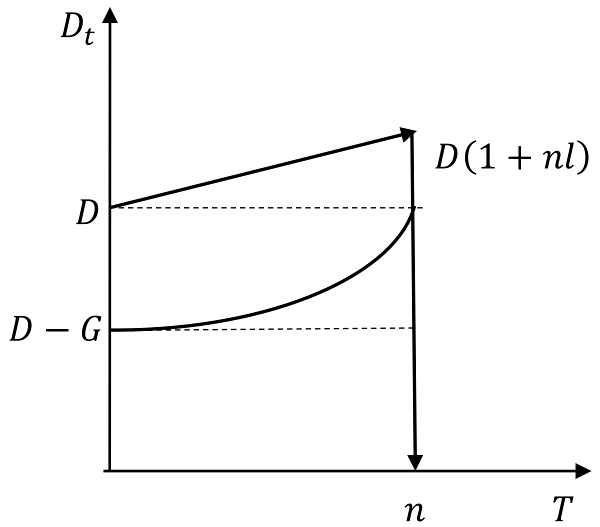
Bu operasiyaning daromadliligini i_{sam} murakkab foiz stavkasi bo‘yicha aniqlashda, bu stavka bo‘yicha $D-G$ miqdorni jamg‘arishda shu natijani olish uchun i stavka bo‘yicha D ni jamg‘arish lozim.

Kreditor foydasi uchun har qanday pul miqdorini ushlab qolishni vositachilik haqi deb ataymiz.

Ekvivalentlik tenglamasiga ko‘ra quyidagini yozamiz:

$$(D-G)(1+i_{sam})^n = D(1+ni)$$

Bu operatsiya quyidagi grafikda tasvirlangan.



26-rasm

Faraz qilaylik, $D-G=D(1-g),$ bunda $g-$ kredit summasi bo‘yicha vositachilik haqining nisbiy qiymati bo‘lsin. U holda

$$i_{sam}=\sqrt[n]{\frac{1+ni}{1-g}}-1 \qquad (9.3.1)$$

Ildiz ko‘rsatkichini aniqlashda tayanch vaqtni 365 kun deb olamiz.

Agar daromadlilik i_{sam} oddiy foiz stavkasi bo‘yicha amalga oshirilsa, u holda ekvivalentlik tenglamasiga ko‘ra

$$i_{sam}=\frac{1+ni}{(1-g)n}-1 \qquad (9.3.2)$$

Misol. 180 kunga 8% yillik stavka bo‘yicha berilgan ssuda uchun kreditor tomonidan 0,5% vositachilik haqi ushlab qolindi. Murakkab yillik stavka bo‘yicha ssuda operatsiyasining samaradorligi qanday?

Yechish: (9.3.1) formuladan

$$i_{sam}=\sqrt[180/365]{\frac{1+\frac{180}{365}\cdot 0,08}{1-0,005}}-1\approx 0,093 \quad \text{yoki } 9,3\%$$

Agar ssuda murakkab foiz bo‘yicha beriladigan bo‘lsa, u holda i_{sam} ni topish uchun ushbu ekvivalentlik tenglamadan foydalanamiz.

$$(D-G)(1+i_{sam})^n=D(1+i)^n$$

$$i_{sam}=\frac{1+i}{\sqrt[n]{1-g}}-1 \qquad (9.3.3)$$

Misol. Murakkab foiz bo‘yicha 5 yilga 10% yillik stavka bo‘yicha kredit berildi. Kredit berishda vositachilik haqi kredit summasining 0,6% ini tashkil etsa, kredit narxining ortishini aniqlang.

Yechish: (9.3.3) formulaga ko‘ra

$$i_{sam} = \frac{1+0,1}{\sqrt[5]{1-0,006}} - 1 = 0,1013 \quad \text{yoki } 10,13\%$$

Vositachilik haqining joriy qilinishi kredit narxini $10,13-10=0,13\%$ ga oshirgan.

<u>Hisob operatsiyasi</u>. Agar daromad hisob operatsiyasidan oddiy hisob stavkasi bo‘yicha kelib chiqadigan bo‘lsa, u holda operatsiyaning samaradorligi vositachilik haqi olinmagan holda ekvivalent stavka formulasi $(i = \frac{d}{1-d})$ bo‘yicha hisoblanadi. Vositachilik haqi va diskont ushlanganda qarzdor $D(1-nd-g)$ summani oladi. Bunda d – oddiy foiz bo‘yicha hisob stavkasi, g – kredit summasidan olinadigan vositachilik haqini nisbiy kattaligi. Ekvivalentlik tenglamasiga asosan

$$D(1-nd-g)(1+i_{sam})^n = D \ ,$$

bu yerda

$$i_{sam} = \sqrt[n]{\frac{1}{1-nd-g}} - 1 \tag{9.3.4}$$

Oddiy stavka bo‘yicha samaradorlik

$$D(1-nd-g)(1+ni_{sam}) = D$$

tenglamadan topiladi, ya’ni

$$i_{sam} = \frac{1}{(1-nd-g)n} - 1 \ . \tag{9.3.5}$$

Misol. Veksel $d=10\%$ hisob stavkasi bo‘yicha to‘lovga 160 kun qolganda hisobga olindi. Hisobga olish operatsiyasining bajarilishida veksel egasidan 0,5% vositachilik haqi ushlab qolindi. Hisobga olishning tayanch vaqti 360 kun deb hisoblab operatsiyaning daromadliligini toping?

$$i_{sam} = \sqrt[160/365]{\frac{1}{1-\frac{160}{365}\cdot 0,1-0,005}} - 1 = 0,123 \quad \text{yoki} \quad 12,3\%,$$

vositachilik haqi ushlab qolinmagandagi samaradorlik $12,3-0,5=11,8\%$.

9.4. Moliyaviy anjomlarning “oldi-sotdi”sidan keladigan daromadlilikni hisoblash

Pul-kredit bozorining qisqa muddatli moliyaviy anjomlari-veksellar, turli depozit sertifikatlari va hokazolar ularning to‘lov muddatlari tugamasdan sotilishi mumkin. Bunda anjom egasi qandaydir daromad oladi, muvaffaqiyatsizlik sharoitida esa zarar ko‘radi.

Agar veksel yoki boshqa qimmatbaho qog‘oz turi uni sotib olgandan bir necha vaqtdan so‘ng, uni hisobga olish muddati tugamasdan sotilsa, u holda operatsiyaning samaradorligini oddiy va murakkab foiz stavkalari bo‘yicha o‘lchash mumkin. Bu yerda moliyaviy operatsiyaning natijasi “oldi-sotdi” narxlarining farqiga va o‘z navbatida muddat hamda hisob stavkasining qiymatiga bog‘liq. Bu bog‘liqlikni ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, vekselning nominal narxi S so‘m bo‘lsin. U d_1 hisob stavkasi bo‘yicha muddat tugashiga ∂_1 kun qolganda sotib olinadigan bo‘lsin. Bu vaqtda xarid narxi quyidagicha bo‘ladi:

$$p_1 = S(1 - \frac{\partial_1}{k} d_1),$$

bu yerda $k -$ tayanch hisob vaqti. Agar to‘lov muddatiga ∂_2 kun qolganda veksel d_2 stavka bo‘yicha diskontirlash bilan sotiladigan bo‘lsa, undan keladigan pul miqdori

$$p_2 = S(1 - \frac{\partial_2}{k} d_2).$$

Shunday qilib, operatsiya boshida investitsiya p_1 so‘mni, uni sotishdan keladigan pul miqdori p_2 ni tashkil etadi. Operatsiya $\partial_1 - \partial_2$ kun davom etgan. Oddiy stavka bo‘yicha i_{sam} ni quyidagi ekvivalent tenglamadan topamiz:

$$p_1\left(1 + \frac{\partial_1 - \partial_2}{k} i_{sam}\right) = p_2$$

(9.4.1)

Bundan vekselni “oldi-sotdi”sidan keladigan daromadliligi (oddiy foiz stavkasi bo‘yicha) quyidadicha:

$$i_{sam} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \cdot \frac{k}{\partial_1 - \partial_2} \qquad (9.4.2)$$

(9.4.1) va (9.4.2) lardan p_1 va p_2 larni aniqlovchi parametrlar orqali ifodalab quyidagi tenglikni yozamiz:

$$i_{sam} = \left(\frac{1 - \partial_2 d_2 / k}{1 - \partial_1 d_1 / k} - 1 \right) \cdot \frac{k}{\partial_1 - \partial_2} \qquad (9.4.3)$$

Operatsiya zarar keltirmasligi uchun

$$\partial_2 d_2 < \partial_1 d_1 \quad \text{yoki} \quad p_1 < p_2$$

shart bajarilishi kerak.

Shunga o‘xshash murakkab foiz stavka bo‘yicha samaradorlikni topishimiz mumkin. Bunday holda $k = 365$ deb olib, ekvivalent tenglamaga asosan

$$p_1 (1 + i_{sam})^{(\partial_1 - \partial_2)/365} = p_2,$$

$$i_{sam} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{365/(\partial_1 - \partial_2)} - 1 \qquad (9.4.4)$$

p_1 va p_2 larni aniqlovchi parametrlar orqali ifodalab (9.4.4) ni quyidagicha yozamiz:

$$i_{sam} = \left(\frac{k - \partial_2 d_2}{k - \partial_1 d_1} \right)^{365/(\partial_1 - \partial_2)} - 1 \qquad (9.4.5)$$

Misol. Veksel to‘lash muddatiga 167 kun qolganda 6% hisob stavkasi bo‘yicha sotib olindi. 40 kundan so‘ng 5,75% hisob bo‘yicha sotib yuborildi. Oddiy va murakkab foiz stavkalari bo‘yicha samaradorlikni toping (tayanch hisob vaqti 360, jamg‘arma vaqti 365 kun).

Yechish: (9.4.3) formulaga ko‘ra (oddiy foiz bo‘yicha)

$$i_{sam} = \left(\frac{1 - \frac{127}{360} \cdot 0,0575}{1 - \frac{167}{360} \cdot 0,06} - 1 \right) \cdot \frac{365}{40} = 0,0708 \quad \text{yoki } 7,08\%.$$

Murakkab foiz stavkasi bo‘yicha (9.4.5)dan

$$i_{sam} = \left(\frac{360 - 127 \cdot 0,0575}{360 - 167 \cdot 0,06} \right)^{365/40} - 1 = 0,0731 \quad \text{yoki } 7,31\%.$$

Vekselni “oldi-sotdi” operatsiyasidan daromad olish uchun d_2 hisob stavkasiga chegara qo‘yamiz. Bizning misolimizda operatsiya daromad keltirishi uchun

$$d_2 < \frac{167}{127} \cdot 0,06 = 0,07889 \text{ bo‘lishi kerak.}$$

Eng keng tarqalgan moliyaviy anjomlardan biri depozit sertifikatlaridir. Ular bank tomonidan chiqariladi va emitent (sertifikat chiqaruvchi tashkilot) tomonidan chiqarilgan muddatdan boshlab nominal narx bo‘yicha oddiy va murakkab foiz stavkasi bilan sotiladi. Foizlar odatda muddat oxirida bir marotaba to‘lanadi. Sertifikatlar investitsiya obyekti hisoblanadi va odatda qimmatbaho qog‘ozlar bozorida sotiladi. Sertifikat uning egasiga belgilangan foiz stavka bo‘yicha daromad keltirishi uchun egasida muddat oxiriga qadar bo‘lishi kerak.

Eng keng tarqalgan bir marotaba foiz to‘lanadigan sertifikat turiga murojaat qilamiz va “oldi-sotdi” operatsiyasining bu anjom uchun belgilangan muddat bo‘yicha mumkin bo‘lgan uchta variantini qaraymiz:

a) nominal bo‘yicha sotib olinadi, to‘lov muddatiga ∂_2 kun qolganda sotiladi;

b) chiqarilgandan so‘ng sotib olinadi va muddat oxirida sotiladi;

v) e’lon qilingan muddat ichida sotib olinadi va sotiladi.

a) hol uchun bizga ma’lum bo‘lgan ushbu (9.4.1) tenglikni yozamiz:

$$p_1\left(1+\frac{\partial_1-\partial_2}{k}\cdot i_{sam}\right)=p_2$$

bu yerda p_1- nominal, p_2- sotish paytidagi narx (bozor foiz stavkasida aniqlanadi), ∂_1, ∂_2 to‘lovgacha bo‘lgan muddatlar. $(\partial_1-\partial_2)$ kun davomida sertifikatni ushlab qolishdagi daromadlilik (9.4.2) formula bo‘yicha aniqlanadi.

Agar izlanayotgan parametrlar sifatida foiz stavkalari i_1 va i_2 olinsa (i_1- sertifikatning e’lon qilingan stavkasi, i_2- sotish paytidagi bozor stavkasi), u holda

$$i_{sam}=\left(\frac{1+\frac{\partial_1}{k}i_1}{1+\frac{\partial_2}{k}i_2}-1\right)\cdot\frac{k}{\partial_1-\partial_2}\ . \qquad (9.4.6)$$

Agar daromadlilik o‘lchovi murakkab foiz stavkasida bo‘lib, narxlar berilgan bo‘lsa, u holda

$$i_{sam}=\left(\frac{k+\partial_1 i_1}{k+\partial_2 i_2}\right)^{365/(\partial_1-\partial_2)}-1\ . \qquad (9.4.7)$$

Operatsiyaning daromadliligi $\partial_1 i_1 > \partial_2 i_2$ shart bajarilgan holda o‘rinli bo‘ladi. Stavkaning chegaraviy qiymati i bo‘lganda investorning oladigan daromadi

$$i_2 = \frac{\partial_1 i}{\partial_2}$$

Endi b) variantga o‘tamiz. Bu yerda

$$p_2(1+\frac{\partial_2}{k} i_{sam}) = p_1(1+\frac{\partial_1}{k} i)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda $p_1 -$ nominal, $p_2 -$ sotib olish narxi, i – e’lon qilingan foiz stavkasi.

Yuqorida keltirilgan tenglamadan p_2 berilgan holda

$$i_{sam} = \left(\frac{p_1(1+\frac{\partial_1}{k} i)}{p_2} \right) \cdot \frac{k}{\partial_2}. \qquad (9.4.8)$$

Agar samaradorlikni o‘lchash sifatida murakkab foiz stavkasi olinsa, u holda

$$i_{sam} = \left(\frac{p_1(1+\frac{\partial_1}{k} i)}{p_2} \right)^{365/\partial_2} - 1 \qquad (9.4.9)$$

v) variantni qaraymiz. Bu yerda sertifikatni sotib olish uning chiqarilgan kunidan bir necha vaqt o‘tgandan so‘ng, uni sotish esa to‘lov muddati tugagunga qadar amalga oshiriladi. Bunday holda yana (9.4.1) tenglamaga murojaat qilamiz.

Misol. Sertifikat sotish muddatiga 160 kun qolganda 1020 p.bga sotib olindi. Anjom 90 kundan so‘ng 1060 p.bga sotildi. Operatsiyaning daromadliligi oddiy va murakkab foiz stavkasi bo‘yicha qanday bo‘ladi?

Yechish: $p_1 = 1020,\ p_2 = 1060,\ \partial_1 = 160,\ \partial_2 = 70,\ \partial_1 - \partial_2 = 90.$

Faraz qilaylik, tayanch vaqt oddiy foiz bo‘yicha 365 kundan iborat bo‘lsin. U holda (9.4.2) formulaga asosan

$$i_{sam} = \frac{1060-1020}{1020} \cdot \frac{365}{90} = 0,159 \quad \text{yoki } 15,9\%.$$

Murakkab foiz stavka uchun

$$i_{sam} = \left(1 + \frac{90}{365} \cdot 0,159\right)^{365/90} - 1 = 0,169 \quad \text{yoki } 16,9\%.$$

Bu natijani (9.4.4) formuladan ham topish mumkin:

$$i_{sam} = \left(\frac{1060}{1020}\right)^{365/90} - 1 = 0{,}9.$$

9.5. Uzoq muddatli kreditlar

Uzoq muddatli qarzlarni to‘lash usullari kreditor uchun operatsiyaning samaradorligiga sezilarli darajada ta’sir etishi ravshan. Uzoq muddatli kreditlar uchun TD ni baholashning ikkita metodini qaraymiz:

a) ketma-ket to‘lovlar bilan foizlar, asosiy pul summasi esa muddat oxirida to‘lanadigan;

b) qarz va foizlar butun muddat mobaynida ketma-ket to‘lab boriladigan hol.

Ikkala holda ham vositachilik haqi olinadi deb hisoblaymiz. Agar vositachilik haqi to‘lanmasa, u holda daromadlilik operatsiyada qo‘llaniladigan har qanday foiz stavkasiga ekvivalent bo‘lgan murakkab foiz stavkasiga teng bo‘ladi. Agar kreditor uchun yana bitta daromad manbai – vositachilik mavjud bo‘lsa, holat murakkablashadi.

Faraz qilaylik, D miqdordagi ssuda n yilda oddiy i foiz stavkasi bo‘yicha har yil oxirida ustama foiz to‘lanadigan bo‘lsin, ularning yig‘indisi Di ga teng. Vositachilikni e’tiborga olsak, qarzdorga $D(1-g)$ miqdorda ssuda beriladi. i_{sam} noma’lum stavka bo‘yicha diskontirlash natijasida hosil qilingan barcha to‘lovlarning ekvivalentlik tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$D(1-g) - \left(Di\sum_{j=1}^{n} v^{i_{sam}} + Dv^{n}\right) = 0,$$

bu yerda $v = (1+i_{sam})^{-1}$, $\sum v^{i_{sam}} = a_{n|i_{sam}}$.

Endi bu tenglamani i_{sam} ning funksiyasi sifatida tasavvur qilishimiz mumkin:

$$f\left(i_{sam}\right) = v^{n} + ia_{n|i_{sam}} - (1-g) = 0.$$

Agar foizlar yiliga m marta to‘lanadigan bo‘lsa, u holda

$$f\left(i_{sam}\right) = v^{n} + \frac{i}{m}a^{(m)}_{n|i_{sam}} - (1-g) = 0.$$

Demak, bundan ko‘rsatkichli funksiyaning ildizini topish masalasi kelib chiqadi. Bu masalani hal qilish uchun Nyuton-Rafson metodini yoki oddiy tanlash usulini qo‘llash mumkin.

Misol. Uch yilga 1 mln. so‘m yiliga 10% ga ssuda berildi, foizlar yiliga to‘lanadi. Ssudani berishda pul egasi foydasiga 5% chegirib tashlanadi. Natijada qarzdor 950 ming so‘m pul oladi. Bunday holda i_{sam} nechaga teng bo‘ladi?

Yechish: Quyidagi funksiyani yozamiz:

$$f\left(i_{sam}\right) = (1+i_{sam})^{-3} - 0{,}1\cdot a_{3|i_{sam}} - 0{,}95 = 0.$$

Bu tenglikdan $i_{sam} \approx 0{,}12088.$

Shunday qilib, kreditor uchun operatsiyaning daromadliligi murakkab yillik foiz stavkasi bo‘yicha 12,088% ni tashkil etadi.

Faraz qilaylik, xizmatlar uchun xarajatlar summasi o‘zgarmas bo‘lgan holda ssuda bo‘yicha davriy ravishda foizlar to‘lanadigan va asosiy qarz qoplanadigan bo‘lsin. U holda to‘lovlar yil oxirida to‘lanadigan hol uchun ekvivalentlik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$D(1-g) - Ra_{n|i_{sam}} = 0,$$

bunda $R -$ yillik zudlik to‘lovi. $R = \dfrac{D}{a_{n|i}}$ ni e’tiborga olsak,

$$f\left(i_{sam}\right) = a_{n|i_{sam}} - a_{n|i}(1-g) = 0. \qquad (9.5.1)$$

Xuddi shunga o‘xshash to‘lovlar yiliga m marta to‘lanadigan hol uchun

$$f\left(i_{sam}\right) = a^{(m)}_{n|i_{sam}} - a^{(m)}_{n|i}(1-g) = 0, \qquad (9.5.2)$$

bunda $a^{(m)}_{n|i_{sam}}$ va $a^{(m)}_{n|i}$ $m -$ karrali rentaning keltirilgan koeffitsiyenti.

Agar qarz turli to‘lovlar oqimi yo‘li bilan to‘lanadigan bo‘lsa, ya’ni $R_1, R_2, ..., R_n.$ U holda qarzni bunday usulda to‘lanishidagi kreditning samaradorligini quyidagi ekvivalentlik tenglamasidan topamiz:

$$f(i_{sam}) = D(1-g) - \sum_{j=1}^{n} R_j v^{t_j} = 0 \ , \qquad (9.5.3)$$

bunda t_j operatsiya boshidan $j -$ qarzni to‘lash momentigacha bo‘lgan vaqt oralig‘i. Operatsiyaning balanslik shartidan, shartnoma stavkasi i ni tatbiq etib oxirgi badal qiymatini topamiz:

$$R_n = dq^T - \sum_{j=1}^{n} R_j \cdot q^{T_j} \ , \qquad (9.5.4)$$

bu yerda $q=1+i_{sam}$, $T=\sum T_j$, T_j – j–to‘lovlardan operatsiya oxirigacha bo‘lgan muddat.

Biz ko‘rib chiqqan $f(i_{sam})$ funksiya asosida to‘la daromadlilikni baholash metodi xususan, obligatsiyalarni va ishlab chiqarish investitsiyalarini tahlil qilishda qo‘llaniladi. Uzoq muddatli kreditlar bo‘yicha daromadlilikni o‘lchashning soddalashtirilgan metodini ko‘rib chiqish maqsadida ikkita masalaga to‘xtalib o‘tamiz.

Birinchi masala. Faraz qilaylik, D miqdordagi qarz majburiyati P narxda sotib olinadigan bo‘lsin. Qarz ketma-ket n davr mobaynida to‘lab boriladi. Bir marotabali to‘lash summasi $R=\frac{D}{n}$. Bu yerda daromadlilik oxirgi holatda majburiyat olish narxi bilan aniqlanadi. Bunday daromadlilikni topish uchun $P=Ra_{n|i_{sam}}$ ko‘rinishdagi ekvivalentlik tenglamani noma’lum i_{sam} stavkaga nisbatan yechish kerak (buni oddiy algebraik usul bilan yechib bo‘lmaydi). O‘z navbatida soddalashtirilgan metod (taqribiy metod) $P=Dv^T$ ko‘rinishdagi elementar tenglamaga keltiriladi. Bu yerdan

$$i_{sam}=\sqrt[T]{\frac{D}{P}}-1, \tag{9.5.5}$$

bunda T – majburiyatning o‘rta muddati. O‘rta muddatni topishning eng oddiy usuli

$$T_0=\frac{n}{2} \tag{9.5.6}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bunda pul tushumini xarakterlovchi renta turi hisobga olinmaydi. Bu faktorni hisobga olgan holda o‘rta muddatlar uchun quyidagilarni olamiz:

postnumerando renta uchun

$$T_1=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, \tag{9.5.7}$$

prenumerando renta uchun

$$T_2=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}. \tag{9.5.8}$$

Misol. Operatsiya quyidagi kattaliklar bilan xarakterlanadigan bo‘lsin:

$D=100,\ p=75,\ n=5.$ Postnumerando va prenumerando rentalar uchun qarz to‘lashning daromadliligini baholaymiz.

Yechish: O‘rta muddatlar $T_0 = \frac{5}{2} = 2,5;\ T_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3;\ T_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$

O‘rta muddatlar 2,5 yil bo‘lganda, $i_0 = \sqrt[2,5]{\frac{100}{75}} - 1 = 0,1220,$

postnumerando to‘lovlari uchun $(T_1 = 3),$

$$i_1 = \sqrt[3]{\frac{100}{75}} - 1 = 0,1064,$$

prenumerando to‘lovlari uchun $(T_2 = 2),$

$$i_2 = \sqrt{\frac{100}{75}} - 1 = 0,1547.$$

Postnumerando renta uchun daromadlilikning aniq qiymatini $75 = \frac{100}{5} a_{5|i_1}$ tenglamadan topamiz: $i_1 = 0,1042.$

Prenumerando renta uchun aniq qiymat esa $75 = \frac{100}{5} \ddot{a}_{5|i_2}$ tenglamadan topiladi: $i_2 = 0,1688.$

Bu masaladan ko‘rinib turibdiki, daromadlilikni baholashda renta turini hisobga olish xatolikni ancha kamaytiradi. Bu faktorni hisobga olmaslik amaliyotda foydasiz bo‘ladi.

<u>Ikkinchi masala.</u> Faraz qilaylik, qarz majburiyati ketma-ket qarzni qoplash masalasini va fiksirlangan muddat uchun imtiyozsiz davr mobaynida foiz to‘lashni qarab chiqadigan bo‘lsin. Daromadlilik aniq qiymatining ekvivalentlik tenglamasi

$$p = \sum_{1}^{n} R_t v^t \qquad (9.5.9)$$

ni j stavka bo‘yicha aniqlanuvchi diskont ko‘paytuvchisi v ga nisbatan yechishdan topamiz. j daromadlilikning taqribiy qiymatini ikkita daromadlilik ko‘rsatkichlarining yig‘indisi sifatida topishimiz mumkin:

$$j = i_{sam} + i, \qquad (9.5.10)$$

bunda i_{sam} – (9.5.5) formula bo‘yicha hisoblanadigan daromadlilik bahosi, i – kredit bo‘yicha foiz stavkasi. Quyidagi jadvalda daromadlilik ko‘rsatkichlarining (% larda) taqribiy va aniq qiymatlari kredit bo‘yicha foiz stavkasi 10% bo‘lgan holda ko‘rsatilgan (D=100).

p	110	100	75	70	60	50
i_{sam}	-3,886	0	12,20	15,33	22,67	31,95
i	10	10	10	10	10	10
$j_{(taq)}$	6,114	10	22,20	25,33	32,27	41,95
$j_{(aniq)}$	6,175	10	23,11	26,66	35,27	46,85

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, $D-p$ ayirma qancha katta bo‘lsa, daromadlilikni baholashdagi xatolik shuncha katta bo‘lar ekan. Bundan tashqarii o‘rta muddat qiymatlari T_1 yoki T_2 ni tatbiq etish ham xatolikning oshishiga olib kelishi mumkin. Odatda ketma-ket foizlar to‘lovida o‘rta muddat qiymati T_1 yoki T_2 ga nisbatan T_0 ga yaqin bo‘ladi.

IX bobga doir masalalar

1. 160 kunga 10% yillik stavka bo‘yicha berilgan ssuda uchun kreditor tomonidan 0,5% vositachilik haqi ushlab qolindi. Murakkab yillik stavka bo‘yicha ssuda operatsiyasining samaradorligi qanday bo‘lgan?

2. Murakkab foiz bo‘yicha 3 yilga 20% yillik stavka bo‘yicha kredit berildi. Kredit berishda vositachilik haqi kredit summasining 0,5%ini tashkil etsa, kredit narxini necha foizga ortishini aniqlang.

3. Veksel 10% hisob stavkasi bo‘yicha to‘lash muddatiga 180 kun qolganda hisobga olindi. Hisobga olish operatsiyasining bajarilishida veksel egasidan 0,5% vositachilik haqi ushlab qolindi. Hisobga olishning tayanch vaqti 360 kun deb hisoblab operatsiyaning daromadliligini toping?

4. Veksel to‘lash muddatiga 160 kun qolganda 5% hisob stavkasi bo‘yicha sotib olindi. 50 kundan so‘ng 5,8% hisob stavkasi bo‘yicha sotib yuborildi. Oddiy va murakkab foiz stavkalari bo‘yicha samaradorlikni toping (tayanch hisob vaqti 360, jamg‘arma vaqti 365 kun).

5. Sertifikat sotish muddatiga 150 kun qolganda 1050 p.bga sotib olindi. Anjom 80 kundan so‘ng 1100 p.bga sotildi. Operatsiyaning

daromadliligi oddiy va murakkab foiz stavkasi bo‘yicha qanday bo‘ladi?

6. Uch yil muddatga yiliga 10%ga 2 mln. so‘m ssuda berildi, foizlar yiliga to‘lanadi. Ssudani berishda pul egasi foydasiga 5% chegirib tashlanadi. Bunday holda i_{sam} nechaga teng bo‘ladi?

7. Operatsiya quyidagi kattaliklar bilan xarakterlanadigan bo‘lsin, ya’ni $D=150$ miqdordagi qarz majburiyati $p=75$ narxda sotib olinadigan bo‘lib, qarz $n=5$ yil mobaynida to‘lab borilishi shartida postnumerando va prenumerando rentalar uchun qarz to‘lash daromadliligini baholang?

8. Yuqoridagi masalani $D=200,\ p=100,\ n=5$ uchun yeching?

X bob. LIZING

10.1. Lizing haqida tushuncha

Lizing (arendaga berish) shaxsiy yoki jalb qilingan moliyaviy mablag‘larni ishlab chiqarish, jihozlarni sotib olib, arendaga berish orqali ishbilarmonlik faoliyatini belgilashda qo‘llaniladi.

Lizing haqidagi kelishuv (shartnoma) ikki tomon orqali amalga oshiriladi, lizing beruvchi (arenda beruvchi) lizing oluvchiga (arendator) aniq muddatga mulkka egalik qilish (shaxsiy mulk qilib emas) va foydalanish huquqi kelishilgan lizing to‘lovlarini to‘lashga almashtirish orqali beriladi.

Lizing beruvchilar maxsus kompaniyalar, sug‘urta kompaniyalari, banklar bo‘lishi mumkin.

Lizing beruvchi uchun lizing – ishbilarmonlar faoliyatining bir ko‘rinishi bo‘lib, foyda keltiradi va shuningdek, soliq imtiyozlaridan daromad oladi.

Arendatorlar, lizing operatsiyalaridan foydalanib, eng zamonaviy jihozlarga ega bo‘ladilar. Bunday moderinizatsiyaga ularning mablag‘lari etmaydi, shuning uchun lizing orqali o‘zlarining stanoklariga ega bo‘ladilar. Natijada, arendatorlar mahsulotlarini ishlab chiqarish takomillashadi. Ikkinchi tomondan yangi ish o‘rinlari vujudga keladi. Shuning uchun barcha mamlakatlarda lizing kompaniyalarida soliq bo‘yicha imtiyoz beriladi.

Lizing operatsiyalari 50-yillarning boshlarida paydo bo‘lgan, 60-yilga kelib keng miqyosda tatbiq etildi. 80-yillar boshiga kelib, ular 60 ta davlatni qamrab oldi va 36 mlrd. dollarga shartnoma imzolandi. O‘zbekistonda lizingni qo‘llash yil sayin ortib bormoqda.

Chet el tajribasi shuni ko‘rsatadiki, bozor iqtisodiyoti barqaror bo‘lganda lizing operatsiyasi ko‘p qo‘llaniladi. Haqiqatan, inqiroz davrida korxonalar katta jihozlarni sotib olishga qiynalishadi. Bu davrda banklarning uzoq muddatli kredit berishi noqulay. Bunday holda zamonaviy texnika va boshqa jihozlar bilan qurollanishga lizing yordam beradi.

Ikkita bir-biridan farq qiluvchi lizing – moliyaviy va tezkor (operativ) lizinglar mavjud.

10.2. Moliyaviy lizing

Arendator ishlab chiqarishni yo‘lga qo‘yish maqsadida shartnoma asosida ma’lum muddatga jihozni oladi. Bu muddatda arendator barcha arenda beruvchining xarajatlarini, jumladan, jihozlarni o‘rnatish, mutaxassislarni o‘qitish, xizmat safariga ketgan xarajatlar va vositachilik xarajatlarini to‘liq to‘laydi. Arendator o‘zi ta’mirlaydi va jihozlarni modernizatsiya qiladi.

Agar arendator tomonidan shartnoma muddati buzilsa, u arenda beruvchi bilan bog‘liq bo‘lgan barcha yo‘qotishlarni o‘z zimmasiga oladi.

10.3. Tezkor lizing

Tezkor lizing qisqa muddat bilan tasniflanadi. Shuning uchun amortizasiya davrida jihozlar qisqa muddatga arendaga beriladi. Servis xizmatlarini arendator o‘z zimmasiga oladi. Arendatorning xohishiga qarab, qoida bo‘yicha, arendani xohlagan paytda to‘xtatishi mumkin.

Lizingning arendadan farqi shuki, oylik to‘lovda arendada bozor qonunlariga bog‘liq holda o‘zgaradi, lizingda esa badallar shartnomada ko‘rsatiladi va hech qanday tuzatish kiritilmaydi. Badalning qiymati obyektning boshlang‘ich va qoldiq qiymatlariga, lizing stavkasiga va lizing shartnomasining muddatiga bog‘liq. Obyektning boshlang‘ich narxi bu shartnomada ko‘rsatilgan bo‘ladi, obyektning bozor narxi muddat oxirigacha o‘zgarmaydi. Obyektning qoldiq narxi lizing muddatining oxirida butun obyekt narxining 3 dan 30%gachasini tashkil etadi.

Lizing stavkasi – obekt uchun qo‘yilgan mablag‘ning berilgan daromad bo‘yicha qiymatidir. U foyda normasi, soliq, kredit stavka, inflyatsiyadan kelib chiqqan holda aniqlanadi. Lizing stavkasining o‘zgarishiga bog‘liqligi shartnomada ko‘rsatilishi shart.

Lizingning kreditdan farqi shuki, lizingda kreditorning kafolati lizing ob’yekti, kreditda esa - mulk kafilligi, uni bank kafolatlaydi, kredit qarzdorning foydasi hisobiga yoziladi. Lizing operatsiyasida lizingni sotib oluvchi lizing beruvchiga lizing to‘lovlarini to‘laydi. Lizing narxi kredit narxidan katta bo‘lishi mumkin.

10.4. Lizing to‘lovlarini hisoblash metodlari

Lizing bo‘yicha qarzlar ushbu ko‘rinishdagi to‘lovlar asosida qoplanadi:

- avans ko‘rinishidagi to‘lov;
- davriy lizing to‘lovlari;
- xarid miqdori (summasi).

Bu yerda asosiy to‘lovlar davriy to‘lovlar hisoblanadi. Ular bir nechta belgilar bo‘yicha bir-biridan farq qilishini eslatib o‘tamiz: To‘lovlar miqdori bo‘yicha: o‘zgarmas va o‘zgaruvchi. Qabul qilingan foiz stavkasi bo‘yicha: murakkab, ayrim hollarda (qisqa muddatlarda) oddiy, o‘zgarmas yoki o‘zgaruvchi. To‘lovlar muddati bo‘yicha: davr boshi va oxirida (prenumerando va postnumerando). To‘lovlarning davri bo‘yicha: (odatda lizingda oylik to‘lovlar qaraladi, kam hollarda kvartal yoki yarim yillik to‘lovlar qo‘llaniladi).

Lizing to‘lovlari ikkita sxema bo‘yicha amalga oshiriladi:

Birinchi sxema bo‘yicha dastlab lizing to‘lovlarining miqdori to‘laligicha aniqlanadi, so‘ngra u foiz to‘lovlari va qarzni yopish miqdori bo‘yicha taqsimlanadi.

Ikkinchi sxema bo‘yicha dastlab foiz stavkalarining miqdori va qarzni yopish (so‘ndirish) miqdori (amortizasiya qarzlari) hisoblanadi, so‘ngra lizing to‘lovlarining umumiy miqdori aniqlanadi. Barcha lizing sxemalari uchun dastlabki talab lizing to‘lovlari oqimining dastlabki (hozirgi) narxining jihozlarni sotib olish uchun sarflangan xarajatga tengligidir, ya’ni ikki tomon orasidagi shartnoma majburiyatida moliyaviy ekvivalentlik qaraladi. Umumiy holda majburiyatning moliyaviy ekvivalentlik talabini quyidagi tenglik ko‘rinishida yozish mumkin.

$$K = PV(R_j), \qquad (10.3.1)$$

bunda $K-$ lizing beruvchi uchun mulk narxi (bojxona to‘lovi, sug‘urta xarajatlari bilan boshqa xarajatlarni hisobga olgan holda), $PV-$ hozirgi narxni aniqlash operatori, R_j- lizing bo‘yicha to‘lovlar. Agar lizing to‘lovlari vaqtning bir xil oraliqlari orqali muddatning oxiri yoki boshida amalga oshirilsa, bunday lizinglar regulyar lizinglar deyiladi.

Davriy lizing to‘lovlarini hisoblash metodlari o‘zgarmas moliyaviy renta nazariyasiga tayanadi. Regulyar o‘zgarmas to‘lovlarni birinchi sxema bo‘yicha murakkab foizlarda hisoblashni amalga oshirish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

R – o‘zgarmas to‘lov miqdori;

n – lizing muddati oylarda, kvartallarda, yillarda (to‘lovlarni umumiy soni); qoida bo‘yicha lizing shartnomasida to‘lovlar soni foizlarning qo‘shilishlar soniga teng bo‘ladi;

i – berilgan muddatdagi foiz stavkasi;

s – jihozlar dastlabki narxining qoldiq qismi narxi;

$a_{n;i}$ – o‘zgarmas postnumerando rentaning keltirilgan koeffitsiyenti.

Agar to‘lovlar vaqt bo‘yicha o‘zgarmas va mulk narxining barchasi qoplangan bo‘lsa, u holda postnumerando to‘lovlar uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

$$K = Ra_{n;i} \quad , \tag{10.3.2}$$

bundan

$$R = \frac{K}{a_{n;i}} \ .$$

Ba’zi bir sxemalarda to‘lovlar hajmini hisoblash oson bo‘lishi uchun har bir to‘lovda jihoz narxining ulushini aniqlashda to‘lovlar muddatini uzaytirish koeffitsiyenti tushunchasi kiritiladi. Murakkab foiz qo‘llanilayotgan bo‘lsa, o‘zgarmas postnumerando renta uchun to‘lovlar muddatining uzayish koeffitsiyenti

$$a_1 = \frac{1}{a_{n;i}} \quad , \quad \text{ya'ni} \quad a_1 = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{10.3.3}$$

O‘z navbatida prenumerando renta uchun to‘lovlar muddatini uzaytirish koeffitsiyenti

$$a_2 = \frac{1}{a_{n;i}} \cdot v \, , \tag{10.3.4}$$

bunda v – stavka bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi. Lizing to‘lovlarining miqdorlari mulk narxining to‘lovlar muddatini uzaytirish koeffitsiyentlari ko‘paytmasi ko‘rinishida elementar ravishda aniqlanadi:

$$R = K \cdot a_1, \qquad R = K \cdot a_2 \tag{10.3.5}$$

Aytaylik, birinchi to‘lov boshqalaridan m marta katta (ikkilangan yoki uchlangan) bo‘lsin. Ma’lumki, bunda qolgan to‘lovlar soni mos ravishda qisqaradi. Bunday holda majburiyatning moliyaviy ekvivalentlik sharti quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi. Postnumerando to‘lovi uchun

$$K=(m-1)Rv+Ra_{n-m+1;i} ,$$

prenumerando to‘lovi uchun

$$K=(m-1)R+Ra_{n-m+1;i}(1+i) .$$

Bu tenglamalarga asoslanib, zaruriy bo‘lgan lizing to‘lovlarini topamiz:

$$R=\frac{K}{(m-1)v+a_{n-m+1;i}} \tag{10.3.6}$$

$$R=\frac{K}{(m-1)+a_{n-m+1;i}(1+i)} \tag{10.3.7}$$

Endi avans to‘lovlarini e’tiborga olamiz (uni A bilan belgilaymiz). Postnumerando va prenumerando to‘lovlari uchun mos ravishda quyidagi ekvivalentlik tenglamalarini hosil qilamiz:

$$K=A+Ra_{n;i}, \qquad K=A+Ra_{n;i}(1+i)$$

R uchun muddatni uzaytirish koeffitsiyentini qo‘llaymiz, natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$R=(K-A)a_1, \qquad R=(K-A)a_2 \tag{10.3.8}$$

Agar lizing shartnomasi mulkni xarid qilishning qoldiq narxi bo‘yicha qaralayotgan va mulk narxining qoldiq qismi s bo‘lsa, u holda ekvivalentlik tenglamasi postnumerando to‘lovlar uchun ushbu ko‘rinishga ega:

$$K=Ra_{n;i}+Ksv^n ,$$

bunda

$$R=\frac{K(1-sv^n)}{a_{n;i}}=K(1-sv^n)a_1 \tag{10.3.9}$$

Shunga o‘xshash prenumerando to‘lovlar uchun

$$R=\frac{K(1-sv^n)}{a_{n;i}(1+i)}=K(1-sv^n)a_2 \tag{10.3.10}$$

Bir vaqtda avans to‘lovlarini va mulkni xarid qilish summasini hisobga olib, postnumerando va prenumerando to‘lovlari uchun quyidagi tengliklarni yozamiz:

$$K(1-sv^n)=A+Ra_{n;i}$$

$$K(1-sv^n)=A+Ra_{n;i}(1+i)$$

Yuqoridagi tengliklardan mos ravishda ushbularni topamiz:

$$R=\frac{\left[K(1-sv^n)-A\right]}{a_{n;i}} \qquad (10.3.11)$$

$$R=\frac{\left[K(1-sv^n)-A\right]}{a_{n;i}(1+i)} \qquad (10.3.12)$$

Formulalarning tatbiqlariga doir masalalar keltiramiz:

1-misol. Ushbu kattaliklar berilgan: $K=2000,\ n=36$ oy, oyiga $i=2\%$, to‘lovlar postnumerando. Masala yechimining beshta variantini qaraymiz.

1-variant. (10.3.3) formula bo‘yicha muddatni uzaytirish koeffitsiyenti (to‘lovlar oy oxirida) va oylik to‘lov miqdorini topamiz:

$$a_1=\frac{0,02}{1-1.02^{-36}}=0,03923; \quad R=2000\cdot 0,03923=78,46.$$

2-variant. Birinchi oyda ikkilangan badal $(m=2)$, badallar uchun oy oxirida (10.3.6) formulaga asosan

$$R=\frac{2000}{(2-1)\cdot 1,02^{-1}+a_{35;2}}=76,98$$

va birinchi badal $2R=153,96$

3-variant. $A=100,$ (10.3.8) formulaga ko‘ra,

$R=1900\cdot 0,03923=74,54$

4-variant. Bu variantda $s=0,2$. Shunday qilib,

$K\cdot s=2000\cdot 0,2=400$ va (10.3.9) formulaga asosan,

$R=2000(1-0,2\cdot 1,02^{-36})\cdot 0,03923=70,78$

5-variant. $A=100,\ s=0,2$. (10.3.11) formuladan

$R=\left[2000(1-0,2\cdot 1,02^{-36})-100\right]\cdot 0,03923=67,39$.

Endi ikkinchi masalaga, ya’ni to‘lovlar miqdorini R lizing bo‘yicha qarzning amortizatsiya miqdori va foiz to‘lovlari miqdoriga ajratish masalasiga o‘tamiz.

Asosiy qarz miqdorini qoplashdan keladigan pul miqdori lizing to‘lovlari va qoldiq qarzning foizlari ayirmasi bo‘yicha topiladi.

1. To‘lovlar postnumerando $d_t = R - D_{t-1} \cdot i, \quad t = \overline{1,n}$ (10.3.13)

bunda $d_t - t$ davrda asosiy qarzni qoplash miqdori, $D_{t-1} - (t-1)$ davr oxirida qolgan qarz miqdori, birinchi davrda $d_1 = R - Ki$ qoldiq qarz miqdori ketma-ket quyidagi formuladan topiladi.

2. To‘lovlar prenumerando $D_t = D_{t-1} - d_t$ (10.3.14)

$$d_1 = R, \quad d_2 = R - Ki, \quad d_t = R - D_{t-1} \cdot i$$

2-misol. $K = 200, n = 5, i = 10\%, s = 0,$ to‘lovlar davr oxirida, (10.3.2) formuladan $R = 200 \cdot \dfrac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}} = 200 \cdot 0{,}2638 = 52{,}76$.

Agar shartnomalar har yil boshida amalga oshiriladigan bo‘lsa, u holda to‘lov muddatini uzaytirish koeffisiyenti (10.3.4) formuladan aniqlanadi.

$$R = 200 \cdot \frac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot \frac{1}{(1+0{,}1)} = 200 \cdot 0{,}2398 = 47{,}96$$

Birinchi yil uchun foizlar $200 \cdot 0{,}1 = 20,$ 5 2 ,– 7 6 2 . Postnumerando to‘lovida qarzni qoplash grafigi quyidagi jadvalda berilgan.

T	Davr oxirida qolgan qarz miqdori	Foizlar	Qarzni qoplash	Lizing to‘lovlari
1	200,000	20,000	32,760	52,76
2	167,240	16,724	36,036	52,76
3	131,204	13,120	39,604	52,76
4	91,564	9,156	43,604	52,76
5	47,96	4,796	47,964	52,76

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, qoplash uchun tayinlangan asosiy qarz miqdori o‘sadi, foizlar kamayadi. Agar yuqoridagi masalada $s = 0{,}1$ bo‘lsa, u holda lizing to‘lovlari postnumerando to‘lovida (10.3.9) formuladan topiladi

$$R = 200 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot 1{,}1^{-5}\right) \cdot \frac{0{,}1}{1-1{,}1^{-5}} = 200 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot 1{,}1^{-5}\right) \cdot 0{,}2638 = 49{,}484$$

Bunday hollarda to‘lovlar grafigi jadvalda keltirilgan:

T	Davr oxirida qolgan qarz miqdori	Foizlar	Qarzni qoplash	Lizing to‘lovlari
1	200,000	20,000	29,484	49,484
2	170,516	17,052	32,430	49,484
3	138,086	13,808	35,674	49,484
4	102,412	10,241	49,244	49,484
5	63,168	6,7316	43,168	49,484

Tekshirish: Qoldiq qarz miqdori $63{,}168-43{,}168=20{,}000$.
Endi regulyar o‘zgarmas ikkinchi sxema bo‘yicha qaraymiz: bunda talab to‘lov qiymati asosiy qarz miqdori va foizlar to‘lov miqdori sifatida aniqlanadi.

Bundagi hisoblar qarzni teng bo‘laklarga bo‘lib qoplash sxemasi bo‘yicha amalga oshiriladi.

$$d=\frac{K}{n}=const$$

t – davr oxirida lizing bo‘yicha to‘lovlar

$$R_t=D_{t-1}\cdot i+d, \qquad (10.3.15)$$

bu yerda R_t - *t* davrdagi lizinglar to‘lovining miqdori.

Davr oxiridagi qoldiq qarz miqdori ketma-ket ushbu formuladan topiladi

$$D_t=D_{t-1}-d, \qquad (10.3.16)$$

3-misol. Berilgan $K=200, n=5, i=10\%$, to‘lovlar postnumeranlo. Asosiy qarz teng summalar bo‘yicha qoplangan holda ushbu to‘lovlar jadvaliga ega bo‘lamiz:

T	Davr oxirida qolgan qarz miqdori	Foizlar	Qarzni qoplash	Lizing to‘lovlari
1	200	20	40	60
2	160	26	40	56
3	120	12	40	52
4	80	8	40	48
5	40	4	40	44

Noregulyar to‘lovlar (birinchi sxemada). Bunda lizing to‘lovlarining grafigi beriladi (muddatlar va mablag‘lar miqdori). To‘lovlar va qarz balansi oxirgi to‘lov qiymatini aniqlashda yuz beradi.

Dastlabki tenglik

$$K = \sum R_t v^{n_t} + R_k v^{n_k}$$

bu yerda R_t, n_t - t to‘lovlar miqdori va muddati.

To‘lov miqdorining kredit uchun foizlari va asosiy qarzni qoplashga sarflangan summalarga bo‘linishi ketma-ket quyidagi formuladan topiladi:

$$d_t = R_t - D_{t-1} \cdot i .$$

Noregulyar to‘lovlar (ikkinchi sxemada). Bu sxemada asosiy qarzni qoplash grafigi beriladi. Kredit uchun foizlar qolgan qarzlar bo‘yicha ketma-ket hisoblanib boriladi.

4-misol. $K = 20, n = 5, i = 10\%, \ s = 0$ to‘lovlar yil oxirida amalga oshiriladi. Lizing to‘lovlari jadvalini tuzing.

T	Yil oxirida qolgan qarz miqdori	Foizlar	Qarzni qoplashi	Lizing to‘lovlari
1	200	20	20	40
2	180	26	60	78
3	120	12	60	72
4	60	6	40	46
5	20	2	20	22

X bobga doir masalalar

1. Lizing beruvchi 1000 pul birligiga teng bo‘lgan mulkni 36 oyga, 2% oylik foizga bergan bo‘lsa, lizing to‘lovlarini postnumerando to‘lovlarida hisoblang.
2. Agar lizing beruvchi o‘z mulkini 100 pul birligiga 5 oyga yillik 10% ga mulkni dastlabki narxi qoldiq qismining narxi nolga teng bo‘lgan hol uchun lizing to‘lovlari jadvalini tuzing.
3. Yuqoridagi masalani mulkni boshlang‘ich narxi qoldiq qismining narxi 0,1 bo‘lgan hol uchun yeching.

4. Dastlabki berilganlar: $K=100, n=5, i=10\%, \ s=0,$ to‘lovlar postnumerando. Asosiy qarz teng summalar orqali amalga oshiriladi. Shu berilganlar asosida lizing to‘lovlari jadvalini tuzing (ikkinchi sxema).
5. Dastlabki berilganlar: $K=100, n=5, i=10\%, \ s=0,$ to‘lovlar yil oxirida amalga oshiriladi. Shu berilganlar asosida noregulyar (ikkinchi sxema) to‘lovlar bo‘yicha lizing hisoblarini bajaring.

XI bob. SUG'URTAVIY ANNUITETLAR (RENTALAR)

11.1. Sug'urtada moliyaviy ekvivalentlik

Sug'urta va qandaydir investitsion loyihani tahlil qilishda shartli rentalardan foydalanish zarurati tug'iladi. Shu yo'sindagi rentalardan biri sug'urta hisoblanadi. Sug'urtada rentaning to'lovlar hadi sug'urta hodisasining yuz berishiga bog'liq bo'ladi. Bunday rentalarni sug'urtaviy annuitetlar deb ataymiz. Sug'urtaviy annuitetlarda to'lovlar soni, ba'zan ularning muddati o'zgarmay qoladi.

Sug'urta shartnomasi bo'yicha sug'urtalanuvchi oldindan sug'urtalovchiga qandaydir summani to'laydi. Bu summani mukofot (premium) deb ataymiz. O'z navbatida sug'urtalanuvchi sug'urta hodisasi yuz berganda sug'urta summasi S ni oladi. Agar bu hodisaning yuz berish ehtimoli q oldindan ma'lum bo'lsa, u holda nazariy jihatdan har qanday faktorni hisobga olmagan holda mukofot qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$p = S\,q\,.$$

Keltirilgan bu tenglik faqat sug'urtalovchi va sug'urtalanuvchi majburiyatining moliyaviy ekvivalentlik prinsipini ifodalaydi. Bu prinsip sug'urta narxi sifatida tushuniladigan – sug'urtaviy "netto-mukofot"ni hisoblashda qanday amalga oshirilishini umumiy holda ko'rsatamiz. Amalda sug'urtaviy tashkilotga tushadigan mukofot, odatda netto-mukofot qiymatini oshiradi, ya'ni netto-mukofotga qo'shimcha mablag' tushadi Bu mablag' ish yuritish bo'yicha barcha xarajatlarni qoplaydi va sug'urtaviy tashkilotga qandaydir foyda keltiradi. Bu qo'shimcha mablag'ni brutto-mukofot deb yuritiladi. Brutto-mukofotni aniqlash oddiy arifmetik masala bo'lganligi uchun gap faqat netto-mukofot haqida boradi.

Faraz qilaylik, mukofot qiymati p, sug'urtaviy hodisaning ehtimoli q_n (masalan, sug'urtalanuvchining sug'urta qilingandan n yil o'tgandan keyingi o'limi) bo'lsin.

Agar sug'urtaviy hodisa sug'urtaning birinchi yili yuz bersa, u holda sug'urtalanuvchi p miqdordagi summani oladi (mukofot yil boshida beriladi deb faraz qilinadi), agar hodisa ikkinchi yili yuz beradigan bo'lsa, u holda mukofot qiymati $2p$ va hokazo.

Bunday mukofot qatorining matematik kutilmasi quyidagini tashkil etadi:

$$pq_1 + 2pq_2 + \dots + npq_n,$$

hosil qilingan bu kattalik sug‘urtalanuvchining barcha badallarini ularning to‘lovlar ehtimolini hisobga olgan holda umumlashtiradigan bo‘lsada, mos kattaliklarning yig‘indisini hisoblashda mukofot vaqtning turli momentlarida to‘lanishi hisobga olinmaydi. Bu faktorni hisobga olgan holda (diskontirlash yordamida to‘lovlar yig‘indisini) badallarni hozirgi qiymatining matematik kutilmasini topamiz:

$$E(A) = p[q_1 + (1+\nu)q_2 + (1+\nu+\nu^2)q_3 + \dots + (1+\nu+\dots+\nu^{n-1})q_n]$$

bu yerda $\nu - i$ stavka bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi. Endi sug‘urtaviy summa to‘lovlariga e’tibor beramiz. Aytaylik, u yil oxirida to‘lanadigan bo‘lsin. U holda to‘lovlarning matematik kutilmasi birinchi yili Sq_1, ikkinchi yili Sq_2 va hokazo vaqt faktorini hisobga olgan holdagi to‘lovlarning matematik kutilmasi (aktuar narx) quyidagicha aniqlanadi:

$$E(S) = S(\nu q_1 + \nu^2 q_2 + \dots + \nu^n q_n).$$

Sug‘urtalovchi va sug‘urtalanuvchilar majburiyatining ekvivalentlik prinsipidan kelib chiqqan holda, quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin:

$$E(S) = E(A)$$

bu netto-mukofot qiymati p ni aniqlash imkonini beradi. Umumiy holda shaxs sug‘urtasida netto-mukofotni hisoblash metodiga shu tarzda yondoshiladi.

Aytaylik, endi gap mulk sug‘urtasi haqida borayotgan bo‘lsin. Agar sug‘urtaviy hodisaning yuz berish ehtimoli o‘zgarmas deb faraz qilinsa, u holda n yil uchun mukofotning aktuar narxi quyidagini tashkil etadi.

$$E(A) = p[q + (1+\nu)q + \dots + (1+\nu+\dots+\nu^{n-1})q] = PqK,$$

bunda $K = n + \sum_{1}^{n-1}(n-t)\nu^t$.

O‘z navbatida sug‘urtaviy summa to‘lovlarining aktuar narxi

$$E(S) = Sq\sum_{1}^{n}\nu^t.$$

Badallar va to‘lovlar aktuar narxlarining tengligidan izlangan netto-mukofot qiymatini topamiz.

Sug‘artaviy annuitetlarni shakllantirish masalasiga qadar, insonlarning hayoti bilan va ularni mukofotni hisoblashda qo‘llash bilan bog‘liq bo‘lgan zaruriy ehtimollarni hisoblash metodiga tayanish lozim bo‘ladi. Bu metod yordamida qo‘yilgan masala oson hal qilinadi.

Ayrim insonlar hayotining davomiyligi tasodifiy hodisa bo‘ladi va etarli darajada keng chegara bo‘ylab tebranib turadi. Demografik statistika bo‘yicha inson o‘limining uning yoshiga bog‘liqligi aniqlangan. Bu bog‘liqlik o‘limlik jadvali deb yuritiladi.

11.2. O‘limlik jadvali va sug‘urtaviy ehtimollar

Aktuar hisoblarni yoritish uchun, jumladan, sug‘urtaviy annuitetlar narxini hisoblashda, sug‘urtalanuvchining jinsi va yoshi, shuningdek demografik ko‘rsatkichlarining normativ sistemalarini xarakterlovchi dastlabki ma’lumotlar zarur bo‘ladi.

O‘limlik jadvali (mortality tables) insonlarni yoshlari bo‘yicha qandaydir insonlar majmuasining o‘lish jarayonining sonli modelini bildiradi. Bunday jadval inson yoshining ketma-ket ortishi bilan bu majmua chegaraviy yoshga etganidan so‘ng nolga yaqinlashishini ko‘rsatadi. Bu qandaydir davr oralig‘ida berilgan demografik statistikani umumlashtiradi.

O‘zbekistonda o‘limlik jadvali butun Respublika bo‘yicha statistik tashkilotlar tomonidan katta tuman va viloyatlar hamda shahar va qishloq aholilari uchun alohida ishlab chiqiladi.

Biz quyida Amerika aholisining o‘limlik jadvalidan namuna keltiramiz:

x	l_x	d_x	p_x	q_x
18	96514	108	-99888	-00112
19	96406	113	-99883	-00117
20	96293	115	-99881	-00119
21	96178	113	-99882	-00118
22	96065	110	-99886	-00114
23	95955	104	-99892	-00108
24	95851	98	-99898	-00102

25	95753	95	-99901	-00099
26	95658	94	-99902	-00098
27	95564	96	-99900	-00100
28	95468	99	-99896	-00104
29	95369	104	-99891	-00109
30	95265	110	-99885	-00115
31	95155	115	-99879	-00121
32	95040	122	-99872	-00128
33	94918	129	-99864	-00136
34	94789	137	-99855	-00145
35	94652	147	-99845	-00155
36	94505	158	-99833	-00167
37	94347	171	-99819	-00181
38	94176	185	-99804	-00196
39	93991	201	-99786	-00214
40	93790	220	-99765	-00235

Odamlar boshlang‘ich majmuasi $l_\circ$ dan tirik qolganlarining naqd x yoshdagilarining soni l_x o‘limlik jadvalining asosiy ko‘rsatkichi hisoblanadi.

l_x ning qiymati ($l_\circ$ dan boshqa) o‘lish ehtimoli q_x yoki o‘lganlar soni d_x ni berilishi asosida aniqlanadi.

Hozirgi o‘limlik jadvalining izlangan ko‘rsatkichi odatda o‘lish ehtimoli, ya’ni x yoshgacha yashaydiganlar orasidan x yoshdan $x+1$ yoshgacha o‘lganlarining qismi xizmat qiladi.

O‘limlik jadvalining ko‘rsatkichlari quyidagi munosabatlar bilan bog‘langan.

$$l_{x+1} = l_x - d_x; \qquad d_x = l_x \cdot q_x$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

O‘limlik jadvalining berilishiga asosan yashash ehtimollari sistemasini hosil qilishimiz mumkin. Bu ehtimollar sistemasi sug‘urtaviy ko‘rsatkichlarni hisoblash uchun zarur bo‘ladi.

Shunday ehtimollardan eng zarurini qarab chiqamiz.

x yoshdan $x+n$ yoshgacha yashash ehtimoli

$$nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (11.2.1)$$

x yoshdan so‘ng yana bir yil yashash ehtimoli

$$P_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Misol. 30 yoshli erkak kishining yana 10 yil yashash ehtimoli $_{10}P_{30} = \frac{93790}{95265} = 0{,}9845$ni tashkil etadi.

Berilgan o‘limlik jadvali bo‘yicha ma’lum yoshdagilarning o‘lish ehtimolini ham topishimiz mumkin. Masalan, x yoshdan $x+n$ yoshgacha bo‘lganlarning o‘lish ehtimoli

$$nq_x = 1 - nP_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j \qquad (11.2.2)$$

Misol. 30 yoshli erkak kishining 10 yil davomida o‘lish ehtimoli

$$_{10}q_{30} = 1 - {}_{10}P_{30} = 1 - 0{,}9845 = 0{,}0155,$$

x yoshdagi shaxsning m yildan so‘ng o‘lish ehtimoli

$$_{m|}q_x = mP_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x} \qquad (11.2.3)$$

O‘z navbatida, x yoshdagi shaxsning $x+m$ yoshdan $x+m+n$ yoshgacha bo‘lgan intervalda o‘lish ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} \qquad (11.2.4)$$

Oxirgi tenglikdan

$$_{m|n}q_x = {}_mP_x \cdot {}_n q_{x+m}.$$

Boshqacha aytganda izlangan ehtimollik $x+m$ yoshgacha yashash ehtimoli va keyingi n yil ichida o‘lish ehtimollarining ko‘paytmasiga teng.

Ba’zi bir aktuar hisoblarda (masalan, pensiya sug‘urtalarda) er-xotinlarning yashash ehtimollari zarur bo‘ladi. Bu ehtimollar ham o‘limlik jadvali o‘rdamida hisoblanadi.

Faraz qilaylik, x va y yoshdagi er-xotinlarni har birining yana n yil yashash ehtimollarini baholash zarur bo‘lsin. Bu ehtimollarni np_x va np_y kabi belgilaymiz. Ularni quyidagicha topamiz:

$$np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \qquad np_y = \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

bu yerda l_x, l_y – x va y yoshgacha yashaydigan shaxslar soni (bu sonlar erkak va ayollar uchun tuzilgan o‘limlik jadvalidan olinadi).

Quyidagi ikkita ishchi gipotezani kiritib yana ikkita ehtimolni hisoblaymiz:

- er-xotinlarning ikkalasi ham x va y yoshga bir kunda to‘ladi;
- ulardan bittasining o‘limi – boshqasining o‘limiga bog‘liq bo‘lmagan sug‘urtaviy hodisa.

Er-xotinlarning birga yana n yil yashash ehtimoli (er-xotin juftligini “saqlanish” ehtimoli) ikkita erkli hodisa ehtimollarining ko‘paytmasi kabi hisoblanadi:

$$ {}_nP_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} \qquad (11.2.5) $$

Ushbu formuladagi ko‘paytmalarni quyidagicha belgilashadi:

$$ l_x \cdot l_y = l_{xy}, \qquad l_{x+n} \cdot l_{y+n} = l_{xy+n} $$

Bularni e’tiborga olib, (10.2.5) formulani

$$ {}_nP_{xy} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \qquad (11.2.6) $$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

Endi er (er x yoshda bo‘lganda sug‘urta qilingan, bu paytda xotini y yoshda bo‘lgan) $x+n$ yoshgacha yashamaydigan, xotin esa $y+n$ yoshgacha yashaydigan holdagi ehtimolni hisoblaymiz.

Izlangan ehtimol (uni ${}_nP_{x|y}$ deb belgilaymiz) ushbu ehtimollar ko‘paytmasiga teng.

$$ {}_nP_{x|y} = {}_nq_x \cdot {}_nP_y = (1 - {}_nP_x) \cdot {}_nP_x = {}_nP_y - {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \qquad (11.2.7) $$

Misol. Er va xotin yoshlari mos ravishda 50 va 45 bo‘lsin. O‘limlik jadvalidan (SSSR aholisining o‘limlik jadvali olindi) erkaklar uchun $l_{50} = 83640$, $l_{55} = 77007$, ayollar uchun $l_{45} = 96261$, $l_{50} = 94348$. Er va xotinni yana 5 yil birga yashash ehtimoli

$$ {}_5P_{50;45} = {}_5P_{50} \cdot {}_5P_{45} = \frac{77007}{83640} \cdot \frac{94348}{96261} = 0,92070 \cdot 0,98013 = 0,9024. $$

Erni 5 yil yashamaslik, xotinini esa yana 5 yil yashash ehtimoli (11.2.7) formuladan

$$ {}_5P_{50|45} = (1 - {}_5P_{50}) \cdot {}_5P_{45} = (1 - 0,92070) \cdot 0,98013 = 0,007772. $$

11.3. Kommutatsion funksiya

Sug‘urtaviy annuitetlarni qisqa yozish va hisoblashlarni soddalashtirishda kommutatsion funksiyalar yoki kommutatsion sonlar qo‘llaniladi. Kommutatsion sonlar yoki funksiyalarni yordamchi miqdor sifatida tushunamiz.

Standart kommutatsion funksiyalar ikki guruhga bo‘linadi. Birinchisiga ma’lum yoshgacha yashaydiganlar soni, ikkinchisiga o‘lganlar soni kiradi. Birinchi guruhning asosiy funksiyalari D_x va N_x

$$D_x = l_x \cdot \nu^x \tag{11.3.1}$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j \tag{11.3.2}$$

bu yerda $\nu - i$ murakkab stavka bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi, $\omega -$ o‘limlik jadvalida hisobga olingan chegaraviy yosh. Ta’rifga ko‘ra

$$N_x = N_{x+1} + D_x, \qquad N_\omega = D_\omega.$$

Ba’zi aktuar hisoblarda D_x kommutatsion sonlar yig‘indisini berilgan yosh intervallari bo‘yicha hisoblash zarur bo‘ladi. Bunday holda N_x kommutatsion sonlardan foydalanish mumkin:

$$\sum_{t=1}^{k} D_{x+t} = N_{x+1} - N_{x+k+1}.$$

Amaliyotda N_x ning yana ikkita varianti qo‘llaniladi, unga to‘lovlar yiliga m marta to‘langanda murojaat qilinadi. Postnumerando to‘lovlar uchun quyidagi ifodani qo‘llaymiz:

$$N_x^{(m)} = N_x + \frac{m-1}{2m} D_x,$$

Prenumerando to‘lovi uchun

$$\ddot{N}_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x \tag{11.3.4}$$

Ikkinchi guruh kommutatsion funksiyalar C_x va M_x hisoblanadi.

$$C_x = d_x \nu^{x+1} \tag{11.3.5}$$

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j \tag{11.3.6}$$

Ikkala guruh kommutatsion sonlari orasida o‘zaro bog‘lanish mavjud:

$$C_x = d_x \nu^{x+1} = (l_x - l_{x+1})\nu^{x+1} = l_x \nu^x \nu - l_{x+1}\nu^{x+1} = D_x \nu - D_{x+1}.$$

Shunga o‘xshash

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j = \sum_{j=x}^{\omega} d_j \nu^{j+1} = \sum_{j=x}^{\omega} (l_j - l_{j+1}) \nu^{j+1} = \sum_{j=x}^{\omega} D_j \nu - \sum_{j=x}^{\omega} D_{j+1} = N_x \nu - N_{x+1}$$

ekanligini isbotlashimiz mumkin.

Sug‘urtaviy tashkilotlar kommutatsion funksiyalar jadvalining daromad normasini hisobga olgan holda ishlab chiqadilar.

Kommutatsion funksiyalar jadvalidan namuna (bu jadval $i = 9\%$ da SSSR aholisining o‘limlik jadvali asosida hisoblangan).

x	l_x	D_x	N_x	$N_x^{(12)}$	C_x	M_x
18	100000	21199	244593	254309	28,98	1003,6
19	99851	19420	223393	232294	30,82	974,7
20	99678	17786	203973	212125	31,98	943,8
30	96991	7310	80677	84027	25,55	648,9
35	94951	4651	49910	52042	20,78	530,3
40	92327	2940	30376	31723	19,09	431,4
50	83640	1125	10465	10981	14,54	260,7
60	68505	389	3082	3261	10,25	134,7
70	45654	110	684	734	5,72	53,1
80	19760	20	85	95	2,14	13,0

Er-xotin juftligini sug‘urta qilishda ushbu kommutatsion funksiyaning zarurligi kelib chiqadi:

$$D_{xy} = l_{xy} \cdot \nu^{(x+y)/2} \qquad (11.3.7)$$

l_{xy} ning qiymati (11.2.6) formula bo‘yicha ${}_nP_{xy}$ ni hisoblash orqali topilgan.

(11.3.7) funksiyani $D_x,\ D_y$ kommutatsion funksiyalar asosida quyidagicha topiladi:

$$D_{xy} = D_x \cdot D_y \cdot \nu^{-(x+y)/2} = D_x \cdot D_y \cdot (1+i)^{\frac{x+y}{2}} \qquad (11.3.8)$$

O‘z navbatida

$$D_{xy+n} = l_{xy+n} \cdot \nu^{n+\frac{x+y}{2}},$$

$$D_{xy+n} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} \cdot \nu^{-[n+(x+y)/2]} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} (1+i)^{n+(x+y)/2}$$

Kommutatsion sonlar ko‘paytmasi katta o‘lchovga ega bo‘lganligi uchun ularni 10^{-3} ga ko‘paytiriladi.

Misol. Er-xotin juftligi uchun $D_{50;45}$ va $D_{55;50}$ kommutatsion sonlarni aniqlang.

Avval, $\frac{x+y}{2}=\frac{50+45}{2}=47{,}5$ ni aniqlaymiz.

Foiz stavkasi $i=9\%$ bo‘lgan holdagi kommutatsion sonlar quyidagi qiymatlarga ega (birinchi qator – erkaklar uchun, ikkinchi qator – ayollar uchun)

$$D_{50}=1124{,}8, \qquad D_{55}=673{,}1$$
$$D_{45}=1991{,}9, \qquad D_{50}=1268{,}8.$$

Bulardan

$$D_{50;45}=10^{-3}\cdot 1124{,}8\cdot 1991{,}9\cdot 1{,}09^{47,5}=134308,$$
$$D_{55;50}=10^{-3}\cdot 673{,}1\cdot 1268{,}8\cdot 1{,}09^{5+47,5}=78770.$$

N_x funksiyani topish qoidasiga asosan N_{xy} ni topamiz:

$$N_{xy}=\sum_{t=0}^{\omega-y} D_{x+t;y+t} \qquad (11.3.9)$$

11.4. Sug‘urtaviy annuitet narxi

Yillik postnumerando annuitetlarning narxi uchun formulalarni yozish maqsadida ushbu belgilashlarni kiritamiz:

a_x – umrbod zudlik annuitet uchun,

$a_{x:t|}$ – chegaralangan zudlik annuitet uchun,

${}_{n|}a_x$ – qoldirilgan umrbod annuitet uchun,

${}_{n|}a_{x:t|}$ – chegaralangan qoldirilgan annuitet uchun.

Shunga o‘xshash belgilashlar prenumerando annuitetlar uchun kiritiladi, faqat bunda a yozuv o‘rniga $\ddot{a}$ yoziladi.

Faraz qilaylik, qandaydir shaxsga x yoshdan boshlab umrining oxirigacha har yil oxirida 1 pul birligi to‘lab boriladigan bo‘lsin (umrbod annuitet, postnumerando, zudlik).

U holda

$$a_x = P_x\cdot\nu + {}_2P_x\cdot\nu^2+\ldots+{}_{\omega-x}P_x\cdot\nu^{\omega-x}=\frac{l_{x+1}\cdot\nu}{l_x}+\frac{l_{x+2}\cdot\nu^2}{l_x}+\ldots+\frac{l_\omega\cdot\nu^{\omega-x}}{l_x}.$$

Har bir qo‘shiluvchining surat va maxrajiga ν^x ni ko‘paytirib, so‘ngra zudlik, umrbod postnumerando annuitetlar uchun yillik to‘lovlarni hisoblash maqsadida kommutatsion funksiyalarni tatbiq etish mumkin:

$$a_x = \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Boshqa turdagi annuitetlar narxini shu tarzda aniqlashimiz mumkin. Umrbod zudlik annuitet prenumerando uchun yillik to‘lov 1 pul birligi bo‘lgan holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\ddot{a}_x = 1 + P_x \cdot v + {}_2P_x \cdot v^2 + \ldots + {}_{\omega-x}P_x \cdot v^{\omega-x} = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_x}{D_x},$$

$\ddot{a}_x = a_x + 1$ yoki $a_x = q_{x+1} \cdot v$ tengliklar o‘rinli bo‘lishiga ishonch hosil qilamiz.

Turli xil yillik annuitetlarni hisoblash formulalarini quyidagi jadvalda keltiramiz:

Annuitet turlari	Postnumerando	Prenumerando
Umrbod zudlik	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ (10.4.1)	$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ (10.4.2)
n yilga qoldirilgan umrbod	${}_{n\|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$ (10.4.3)	${}_{n\|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$ (10.4.4)
Chegaralangan, zudlik (to‘lovlar t yil mobaynida)	$a_{x:t\|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$ (10.4.5)	$\ddot{a}_{x:t\|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$ (10.4.6)
n yilga qoldirilgan chegaralangan (to‘lovlar t yil mobaynida)	${}_{n\|}a_{x:t\|} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x}$ (10.4.7)	${}_{n\|}\ddot{a}_{x:t\|} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$ (10.4.8)

Misol. 20 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 30 yoshli erkaklar uchun aniqlaymiz:

$${}_{20|}\ddot{a}_{30:5|} = \frac{N_{50} - N_{55}}{D_{30}} = \frac{10465{,}3 - 5826{,}7}{7310{,}3} = 0{,}63453.$$

Agar to‘lovlar bir yilda m marta to‘lanadigan bo‘lsa, u holda yuqoridagi formulalarda keltirilgan N_x o‘rniga $N_x^{(m)}$ yoki $\ddot{N}_x^{(m)}$ lardan foydalanamiz. $m=12$ bo‘lgan holda annuitetlar formulalarini keltiramiz. Oylik prenumerando to‘lovlar uchun quyidagi ifodalarga ega bo‘lamiz.

Umrbod zudlik annuitet:

$$\ddot{a}_x = \frac{\ddot{N}_x^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24} \tag{11.4.9}$$

Chegaralangan umrbod annuitet:

$$\ddot{a}_{x:t}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_x^{(12)} - \ddot{N}_{x+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+t} - \frac{11}{24}(D_x - D_{x+t})}{D_x} \tag{11.4.10}$$

Qoldirilgan umrbod annuitet:

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - \frac{11}{24}D_{x+n}}{D_x} \tag{11.4.11}$$

Qoldirilgan chegaralangan annuitet:

$$_{n|}\ddot{a}_{x:t|}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)} - \ddot{N}_{x+n+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t} - \frac{11}{24}(D_{x+n} - D_{x+n+t})}{D_x} \tag{11.4.12}$$

Misol. Yuqoridagi misol uchun oylik to‘lovlar bo‘yicha quyidagini olamiz:

$$_{20|}\ddot{a}_{30:5|}^{(12)} = \frac{N_{50} - N_{55} - \frac{11}{24}(D_{50} - D_{55})}{D_{30}} = \frac{10405{,}3 - 5826{,}7 - \frac{11}{24}(1124{,}8 - 673{,}1)}{7310{,}3} = 0{,}60484.$$

Oylik postnumerando to‘lovlar uchun ushbu munosabatlarni topamiz.

Umrbod zudlik annuitet:

$$a_x^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{11}{24} \tag{11.4.13}$$

Chegaralangan zudlik annuitet:

$$a_{x:t|}^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)} - N_{x+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1} + \frac{11}{24}(D_{x+t} - D_{x+t+1})}{D_x} \tag{11.4.14}$$

n yilga qoldirilgan umrbod annuitet:

$$_{n|}a_x^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} + \frac{11}{24}D_{x+n+1}}{D_x} \tag{11.4.15}$$

Qoldirilgan (to‘lovlar t yil mobaynida) chegaralangan annuitet:

$$ {}_{n|}a_{x:t}^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)} - N_{x+n+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1} + \frac{11}{24}(D_{x+n+1} - D_{x+n+t+1})}{D_x} \qquad (11.4.16) $$

XI bobga doir masalalar

1. 45 yoshli erkak kishining yana 10 yil yashash ehtimolini toping?

2. 45 yoshli erkak kishining 10 yil ichida o‘lish ehtimolini toping?

3. Er va xotin yoshlari mos ravishda 45 va 40 bo‘lsin. O‘limlik jadvalidan foydalanib er va xotinni yana 5 yil birga yashash ehtimolini toping?

4. “Ilova”dan foydalanib 20 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 40 yoshli erkaklar uchun aniqlang?

5. Yuqoridagi masala uchun oylik prenumerando to‘lovlar bo‘yicha qoldirilgan chegaralangan annuitet va qoldirilgan umrbod annuitetlarni toping?

6. “Ilova”dan foydalanib 15 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 35 yoshli ayollar uchun aniqlang?

7. 6-masala uchun oylik prenumerando to‘lovlar bo‘yicha umrbod zudlik va chegaralangan umrbod annuitetlarni hisoblang?

8. 6-masala uchun oylik postnumerando to‘lovlar bo‘yicha umrbod zudlik va chegaralangan zudlik annuitetlarni hisoblang?

XII bob. SHAXS SUG‘URTASI

12.1. Shaxs sug‘urtasida netto-mukofot

Biz avval eng sodda, ammo metodik jihatdan eng kerakli bo‘lgan shaxs sug‘urtasi ma’lum muddatgacha yashash sug‘urtasini ko‘rib chiqamiz. Shunday qilib, X yoshdagi shaxs sug‘urta tashkiloti bilan, uni qandaydir yoshga, masalan, 60 yoshga yetganda S so‘mni olishga kelishishadi. *(60-X)* yilga diskontirlangan muddat uchun mukofot qiymatini aniqlash maqsadida sug‘urta to‘lovlari summasining matematik kutilmasini topamiz. Bunday ko‘rinishdagi sug‘urtaning netto-mukofot qiymatini ${}_nE_x$ bilan belgilaymiz.

Qaralayotgan misol uchun

$${}_{\omega-x}E_x = {}_{60-x}P_x \cdot v^{60-x} \cdot S,$$

bunda ${}_{60-x}P_x$ – X yoshdagi shaxsning 60 yoshgacha yashash ehtimoli, v^{60-x} – murakkab foiz bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi.

Umumiy holda kommutatsion funksiyalarni tatbiq etib, D_x ni topamiz.

$${}_nE_x = {}_nP_x \cdot v^n \cdot S = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n \cdot S = \frac{l_{x+n}v^x \cdot v^n}{l_x \cdot v^x} \cdot S = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot S \qquad (12.1.1)$$

Bu yerda qabul qilingan foiz stavkasining ta’siri ravshan. Agar u qancha yuqori bo‘lsa, sug‘urta mukofoti shuncha kichik bo‘ladi.

Misol. 40 yoshli erkak kishining 60 yoshgacha yashashdagi sug‘urta narxining qiymatini topish talab qilinsin. Agar hisob 9% stavkaga tayangan bo‘lsa, u holda (12.1.1) formulaga ko‘ra

$${}_{20}E_x = \frac{D_{60}}{D_{40}} S = \frac{389{,}17}{2939{,}5} S = 0{,}13239S,$$

bu yerda mukofot sug‘urta summasining 13% dan ko‘prog‘ini tashkil etmoqda. Hosil qilingan qiymat ma’lum muddatgacha yashash suqurtasining netto-mukofotini namoyon qiladi.

Endi er-xotinlar juftligining sug‘urtasini qarab chiqamiz. Yuqorida qarab chiqilgan shaxsiy sug‘urta masalasining qo‘yilishi alohida shaxs uchun mulohaza qilindi. Endi bu metodni er-xotinlar juftligi uchun tatbiq etamiz va bunda ma’lum muddatgacha yashash sug‘urtasi bilan cheklanamiz.

Faraz qilaylik, gap X va Y yoshdagi er-xotinlar juftligi haqida borayotgan bo‘lsin. Bu yerda ularning $X+n$ va $Y+n$ yoshlargacha yashashlari yoki ulardan birining belgilangan yoshgacha yashashi sug‘urtaviy hodisa bo‘lib xizmat qiladi. Birinchi variantda 1 pul birligi hisobidagi sug‘urtaviy summaning netto-mukofoti quyidagicha aniqlanadi.

$$ {}_nE_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_n P_y \cdot v^n = \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}}, \tag{12.1.2} $$

bu yerda ${}_nP_x$ va ${}_nP_y$ − har bir er-xotinlar juftligining yana n yil yashash ehtimoli, D_{xy} − kommutatsion funksiya.

Ikkinchi variantda sug‘urtaviy summa er-xotinlardan birortasiga, masalan, beva ayolning $Y+n$ yoshgacha yashash shartida to‘lanadi. Bunday holda netto-mukofot qiymati quyidagicha hisoblanadi:

$$ {}_nE_{xy} = {}_nP_{x/y} = \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot v^n - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} v^n \tag{12.1.3} $$

bunda ${}_nP_{x/y}$ – erning $X+n$ yoshgacha yashamaslik, xotinning esa $Y+n$ yoshgacha yashash ehtimoli (shartnoma er X yoshda, xotin esa Y yoshda bo‘lganda tuzilgan).

${}_nE_{x/y}$ ning qiymati kommutatsion sonlar yordamida aniqlanishi mumkin. (12.1.3) tenglikning o‘ng qismidagi birinchi kasrga e’tibor beramiz. Uning surat va maxrajiga v^y ni ko‘paytiramiz. Natijada (12.1.1) tenglikka o‘xshash tenglikni hosil qilamiz. Ikkinchi kasrning qiymatini aniqlashda boshqa kommutatsion sonlar zarur bo‘ladi. Ikkinchi kasrning surat va maxrajiga $v^{(x+y)/2}$ ni ko‘paytiramiz.

Bundan so‘ng

$$ {}_nE_{x/y} = \frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}} \tag{12.1.4} $$

formulani hosil qilamiz. Hosil qilingan bu kattalik ma’lum muddatgacha yashash sug‘urtasi va er-xotinlar juftligining ma’lum muddatgacha yashash sug‘urtalari netto-mukofotlarining ayirmasini ifodalaydi.

Misol. Er-xotinlar juftligining 5 yil muddatgacha yashash sug‘urtasining netto-mukofot qiymatini topamiz. Er-xotinlar juftligi uchun $X = 50,\ Y = 45$ yosh) foiz stavkasi 9% bo‘lgan holda kommutasion sonlarni topamiz (birinchi satr – er uchun, ikkinchisi - xotin uchun).

$$ D_x = D_{50} = 1124{,}8; \qquad D_{X+n} = D_{55} = 673{,}1 $$

$$ D_y = D_{45} = 1991{,}9; \qquad D_{Y+n} = D_{50} = 1268{,}8; $$

$$ \frac{x+y}{2} = \frac{50+45}{2} = 47{,}5. $$

Bulardan

$$D_{xy} = D_{50;45} = 10^{-3} \cdot 1124{,}8 \cdot 1991{,}9 \cdot 1{,}09^{47{,}5} = 134799$$

$$D_{xy+n} = D_{55;50} = 10^{-3} \cdot 673{,}1 \cdot 1268{,}8 \cdot 1{,}09^{5+47{,}5} = 78770$$

Er-xotinlar juftligining ma'lum muddatgacha yashash sug'urtasi uchun

$$_nE_{xy} = {}_5E_{50;45} = \frac{78770}{134799} = 0{,}58435.$$

Beva ayolning ma'lum muddatgacha yashash sug'urtasi uchun

$$_nE_{x/y} = {}_5E_{50/45} = \frac{1268{,}8}{1991{,}9} - \frac{78770}{134799} = 0{,}63698 - 0{,}58435 = 0{,}05263$$

12.2. Hayot sug'urtasi

Sug'urtaning bu turi o'lish hodisasi yuz bergandagi sug'urta deb atalib, eng keng tarqalgan sug'urtalardan biri hisoblanadi. Sug'urtalanuvchining o'limidan so'ng S ga teng bo'lgan sug'arta summasi to'lanadi. Aytaylik, sug'urta shartnomasi X yoshda tuzilgan bo'lsin. Agar o'lim hodisasi sug'urtaning birinchi yili yuz berib, sug'urta to'lovi merosxo'rlarga sug'urta hodisasi yuz berishining oxirgi yili to'lanadigan bo'lsa, u holda bu hodisaning yuz berish ehtimolini hisobga olgan holda to'lovning hozirgi miqdori $q_x(S\nu)$, agar sug'urtaviy hodisa ikkinchi yili yuz bersa, u holda bu miqdor $_2q_x(S\nu^2)$ va hokazoga teng bo'ladi.

Birvaqtli netto-mukofot majburiyatining ekvivalentlik prinsipidan kelib chiqqan holda aniqlanadi. Izlangan qiymat hozirgi sug'arta annuitetining narxiga yoki diskontirlangan to'lovlar summasining matematik kutilmasiga teng bo'ladi.

Darhaqiqat, ehtimollarning zaruriy qiymatlari o'limlik jadvallari asosida d_x / l_x dagidek topiladi, bunday holda mukofotning izlangan qiymati sug'urta umrbod bo'lgan holda, quyidagicha topiladi:

$$A_x = \frac{d_x}{l_x}\nu S + \frac{d_{x+1}}{l_x}\nu^2 S + \ldots + \frac{d_\omega \nu^{\omega - x}}{l_x} S$$

Har bir qo'shiluvchini ν^x ga ko'paytiramiz va bo'lamiz hamda D_x kommutatsion funksiyadan foydalanamiz.

Bundan so'ng

$$A_x = S\left(\frac{d_x}{D_x}\nu^{x+1} + \frac{d_{x+1}}{D_x}\nu^{x+2} + \ldots + \frac{d_\omega}{D_x}\nu^\omega\right)$$

M_x kommutatsion funksiyani tatbiq etib,

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}S \qquad (12.2.1)$$

hosil qilamiz.

Hayotning umrbod sug‘urtasi tez-tez uchramaydi. Bu yerda asosan muddat ahamiyatga ega. Faraz qilaylik, bu muddat *n* yilga teng bo‘lsin. Netto-mukofot bu holda

$$_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}S \qquad (12.2.2)$$

ni tashkil etadi.

Misol. 40 yoshli erkakning umrbod sug‘urtasi uchun sug‘urtaviy summaning qismi ko‘rinishida mukofot qiymatini topamiz:

$$A_x = A_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}}S = \frac{431{,}4}{2939{,}5}S = 0{,}14678S\ .$$

Sug‘urta muddatini 20 yil bilan chegaralash varianti uchun

$$_nA_x = {}_{20}A_{40} = \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{40}}S = \frac{431{,}4 - 134{,}7}{2939{,}5}S = 0{,}10094S.$$

Ko‘rinib turibdiki, muddatni cheklash sug‘urta narxini sezilarli darajada pasaytiradi.

Amalda ko‘pincha mukofot kechiktirilib beriladi. Faraz qilaylik, *t* yil mobaynida prenumerando to‘lovlari asosida mukofot kechiktirilib beriladigan bo‘lsin. Tomonlar majburiyatining sug‘urtada tenglik shartini quyidagicha yozamiz:

$$R\ddot{a}_{x:t|} = S\frac{M_x - M_{x+n}}{D_n},$$

bu yerda $R -$ sug‘urtaviy annuitet hadi (yillik mukofot hajmi), $\ddot{a}_{x:t|}$ – chegaralangan zudlik sug‘urtaviy annuitetning narxi.

Sodda almashtirishlardan so‘ng

$$R = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}S \qquad (12.2.3)$$

Misol. Aytaylik, yuqoridagi masalada bir vaqtli badal 20 yil mobaynida kechiktirilgan to‘lovlar bilan almashtirilgan bo‘lsa, bunday holda

$$R = \frac{M_{40}}{N_{40} - N_{60}}S = \frac{431{,}4}{30376 - 3082}S = 0{,}01581S.$$

Ma’lum muddatgacha yashash sug‘urtasini o‘lim hodisasi bilan birlashtirish mumkin. Agar ikkala riskning sug‘urtaviy “imkoniyati”bir xil bo‘lsa, u holda sug‘urtaviy summaning 1 pul birligi hisobidan quyidagi birvaqtli netto-mukofotni olamiz.

$$ {}_nE_x + {}_nA_x = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x} S \tag{12.2.4} $$

kechiktirilgan to‘lovlar uchun t yil mobaynida

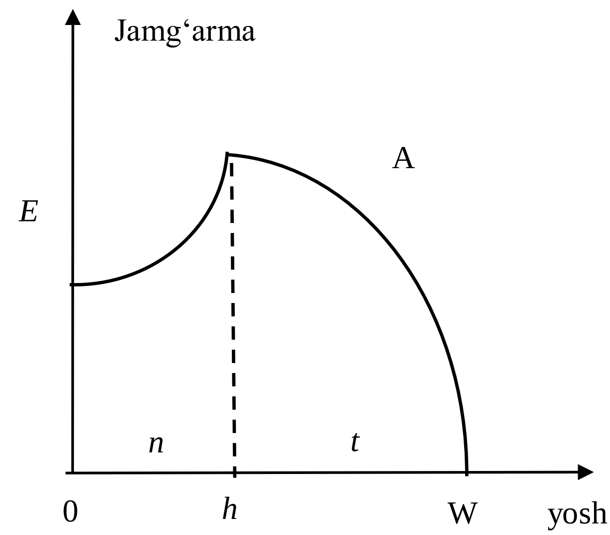
$$ R = \frac{D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} S \tag{12.2.5} $$

hosil qilamiz.

Agar mukofot birvaqtli badallar asosida to‘lanadigan yoki hadlar miqdori chegaralangan, rentalar o‘zgarmas, mukofot kechiktirib to‘lanadigan bo‘lsa, u holda mukofotni hisoblash uchun rentalarning hozirgi narxlarini aniqlovchi formulalarni qo‘llash kerak bo‘ladi. Pensiyani chegaralangan prenumerando renta uchun hisoblashda misollar bilan chegaralanamiz. Hisoblash metodlarini birvaqtli badallar summasi va bir qancha yillar mobaynida fondga ketma-ket to‘lanadigan badallar miqdorlari uchun qarab chiqamiz. Formulalarni yozish maqsadida quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

R – yillik pensiya summasi,
E – birvaqtli badal miqdori,
A – pensiya to‘lash boshlanishidan fond ishtirokchisining individual hisobidagi jamg‘arilgan mablag‘ miqdori,
X – sug‘urtalanuvchining shartnoma tuzish momentidagi yoshi,
L – pensiyaga chiqish yoshi,
W – shartnoma tugash momentidagi shaxsning yoshi,
n – jamg‘arma muddati, $n = L - X$,
t - pensiyani to‘lash muddati, $t = W - L$.

Quyidagi sxemada umumiy muddat ikkita davrga bo‘linishi ko‘rsatilgan.



26-rasm

Birinchisida - X yoshdan L yoshgacha badal E miqdordagi summadan A miqdorgacha ortadi (bu yerda “sof” badal, sug‘urtaviy sxemaning netto-mukofoti haqida gap boradi). Bu summa ikkinchi davrda W yoshgacha kelishilgan to‘lovlarni ta’minlaydi.

Misol. Sug‘urtaviy pensiya to‘lovlarini ta’minlash zarurati uchun mukofot qiymatini topamiz. 20 yilga qoldirilgan pensiya to‘lovlari yiliga prenumerando to‘lovi bo‘yicha 10 ming so‘mni tashkil etsin. To‘lov muddati $t=15$ yil.

Ravshanki, to‘lovlar 20 yilga qoldirilgan to‘lovlarni, hadlari 10 ming so‘mdan iborat bo‘lgan, chegaralangan yillik moliyaviy rentani tashkil etadi. Birvaqtli badal kelajakdagi to‘lovlarning hozirgi narxiga teng bo‘ladi. Badallar $i=9\%$ stavka bo‘yicha hisobga olinadi. Hisoblash uchun umumiy formula ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$E = A\cdot v^n = R\cdot a_{t;i}\cdot(1+i)v^n,$$

bu yerda v – i stavka bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi, $a_{n;i}(1+i)$ – o‘zgarmas prenumerando rentaning keltirilgan koeffitsiyenti.

$$A=10000a_{15;9}\cdot 1{,}09 = 10000\cdot 8{,}060688\cdot 1{,}09=87861 \text{ so‘m},$$

$$E = 87861\cdot 1{,}09^{-20} = 15677 \text{ so‘m}.$$

Agar sug‘urtaviy shartnoma kechiktirilgan badallarni (teng to‘lovlar) m yil mobaynida $(n\geq m)$ nazarda tutayotgan bo‘lsa, u holda yillik badalning zaruriy prenumerando qiymatini ushbu tenglikdan oson topishimiz mumkin:

$$R\ddot{a}_{m;i} = A \cdot v^n,$$

yuqoridagi hisoblardan, $Av^n = 15677,$

$$\ddot{a}_{10;9} = a_{10;9}(1+i) = 6,41766 \cdot 1,09 = 6,99525.$$

Natijada

$$R = \frac{15677}{6,99525} = 2241,1 \text{ so‘m.}$$

Shunday qilib, ushbu muqobil mavjud – bir vaqtda 15,7 ming so‘mni to‘lash yoki 10 yil mobaynida yiliga 2,2 ming so‘mdan to‘lab turish lozim.

Inflyatsiya sharoitida inflyatsiya o‘sishiga qarab foiz stavkasi oshiriladi.

12.3. Sug‘urta pensiyasi sxemalari

Faraz qilaylik, pensiya 60 yoshdan boshlab to‘lanadigan bo‘lsin. U holda bir marotabali pensiya to‘lovlarining sug‘urtaviy narxi *S*, 60 yoshgacha yashash sug‘urtasi bo‘yicha aniqlanadi. Shunga o‘xshash ma’lum muddatgacha yashash sug‘urtasining narxini boshqa yoshlargacha yashash uchun ham aniqlash mumkin. Natijada sug‘urtaning narxi

$${}_1E_x + {}_2E_x + ... + {}_{w-x-1}E_x, \text{ bunda } w - \text{ maksimal yosh.}$$

Netto – ta’rifni hisoblash zarurati (belgilangan pensiya uchun 1 pul birligiga mo‘ljallangan netto-mukofot) sxemalardan foydalanishda, pensiya miqdori noma’lum deb qabul qilingan hollarda kelib chiqadi. Tarif birvaqtli badal uchun yoki mukofot kechiktirib to‘langan hollarda aniqlanadi. Ikkala variantni faqat yakka tartibdagi sug‘urtaviy pensiya sxemalari uchun qarab chiqamiz.

Birvaqtli badal. Agar gap bir marotabali badal haqida borayotgan bo‘lsa, u holda netto-tarif pensiya to‘lash shartlariga mos keluvchi annuitet narxiga teng, netto-mukofot esa, netto-tarifni pensiya miqdoriga ko‘paytmasiga teng. Masalan, prenumerando yillik pensiya uchun

$$E_x = R \cdot \ddot{a}_x = R\frac{N_x}{D_x} \qquad (12.3.1)$$

bu yerda $\ddot{a}_x -$ yillik zudlik prenumerando annuitetining narxi, R - yillik pensiya miqdori.

O‘z navbatida n yilga qoldirilgan pensiya uchun

$$E_x = R \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x = R \cdot \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (12.3.2)$$

bunda ${}_{n|}\ddot{a}_x -$ qoldirilgan yillik prenumerando annuitetning narxi. Shunday usul bilan birvaqtli badallar summasini va boshqa pensiya to‘lovlari uchun hosil qilamiz.

Misol. 40 yoshli erkak bilan sug‘urtaviy pensiya shartnomasi uchun to‘lanadigan birvaqtli netto-mukofotni aniqlash zarur bo‘lsin. Yillik pensiya miqdori 1000 p.b so‘m, prenumerando to‘lovlari 60 yoshdan umrining oxirigacha. Bunday holda qoldirilgan umrbod prenumerando annuitetga ega bo‘lamiz. Daromadlilik normativi 9%.

Berilganlarga ko‘ra

$${}_{20|}\ddot{a}_{40} = \frac{N_{60}}{D_{40}} = \frac{3082{,}2}{2939{,}5} = 1{,}04855,$$

bundan $E_{60} = 1 \cdot 1{,}04855 = 1{,}04855$ ming p.b..

Agar pensiya umrbod emas, balki 15 yilga sug‘urtalangan bo‘lsa, u holda narxi pensiyaga chiqish momentida

$$E_{60} = 1 \cdot \ddot{a}_{60:\overline{15|}} = \frac{N_{60} - N_{75}}{D_{60}} = \frac{3082{,}2 - 684{,}24}{389{,}17} = 6{,}16173$$ ming p.bni tashkil etadi.

O‘z navbatida 40 yoshli sug‘urtalanuvchi uchun

$$E_{40} = 1 \cdot {}_{20}\ddot{a}_{60:15} = \frac{N_{60} - N_{75}}{D_{40}} = \frac{3082{,}2 - 684{,}24}{2939{,}5} = 0{,}81577$$ ming p.b.

Foiz stavkasi qancha katta bo‘lsa, sug‘urta tarifi shuncha kichik bo‘ladi va u mijoz uchun qulay. Bunday holda sug‘urtalovchi uchun risk ortadi.

Omonat-sug‘urtaviy pensiya sxemalar narxini topish qiyin emas. Faraz qilaylik, pensiya yoshiga qadar, sug‘urtadan so‘ng omonat sxemasi qo‘llaniladigan bo‘lsin. Agar pensiya 60 yoshdan to‘lanadigan, bir marotabali badal esa x yoshdan to‘lanadigan bo‘lsa, bunday holda umrbod prenumerando pensiya uchun narx

$$E_x = R \cdot \ddot{a}_{60} \cdot v^{60-x} = R\frac{N_{60}}{D_x}v^{60-x}.$$

Misol. Oldingi misolga qaytamiz (15 yil mobaynida to‘lanadigan pensiya varianti). 40 yosh uchun aralash pensiya sxemasining narxi

$$E_{40} = 1 \cdot \ddot{a}_{60:15|} \cdot v^{20} = 6{,}16173 \cdot 1{,}09^{-20} = 1{,}099 \text{ ming p.b.}$$

Uchta pensiya sxemasi bo‘yicha sug‘urta narxlari:

Sug‘urtalanuvchining yoshi	pensiya sxemalari		
	omonatli	sug‘urtali	aralash
60	8061	6162	6162
40	1438	816	1099

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, sug‘urta sxemasi omonat sxemasidan ancha arzon, aralash sxema 40 yoshli uchun sug‘urta va omanat sxemalari narxlari orasida joylashgan.

Badallarning kechiktirilishi. Sug‘urtalash amaliyotida ketma-ket to‘lovlar ko‘rinishida mukofot kechiktirib to‘lanadi. Netto-tarifni kechiktirib hisoblashda badallarni ko‘rsatish uchun chegaralangan annuitetlardan foydalaniladi. Ikkinchi tomondan pensiya ham sug‘urtaviy annuitetlarni tashkil etadi. Ekvivalentlik qoidasiga ko‘ra moliyaviy majburiyatning ikkala ishtirokchisi uchun annuitetlar narxi bir-biriga teng bo‘lishi kerak. Masalan, bitta annuitet (badallar) zudlik, chegaralangan, ikkinchisi (pensiya) umrbod, qoldirilgan bo‘lsa, bunday holda ikkala annuitet yillik postnumerando to‘lovini ko‘zlaydi.

Ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$Pa_{x:t|} = R_n a_x \qquad (12.3.3)$$

bu yerda $P-$ yillik badallar summasi (netto-mukofot), $R-$ yillik pensiya summasi.

Bundan

$$P = R\frac{{}_n a_x}{a_{x:t|}} = R\frac{N_{x+n+1}}{D_x} : \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x} = R\frac{N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+t+1}} \qquad (12.3.4)$$

Masalan, agar pensiyaning birinchi to‘lovi 60 yoshda amalga oshsa, $(x+n+1=60)$ sug‘urta shartnomasi tuzilganda 40 yosh, kechiktirilgan muddat 10 yilni tashkil etsa, u holda

$$P = R\frac{N_{60}}{N_{41} - N_{51}}.$$

Agar ikkala annuitet yillik prenumerando to‘lovlarini nazarda tutgan bo‘lsalar, u holda

$$\mathrm{P} \cdot \ddot{a}_{x:t|} = \mathrm{R} \cdot {}_n \ddot{a}_x$$

$$P = R\frac{{}_n\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:t|}} = R\ \frac{N_L}{N_x - N_{x+t}} \qquad (12.3.5)$$

Misol. Quyidagi shartlar bo‘yicha mukofot hajmini topamiz. Qirq yoshli erkak 5 yil mobaynida mukofot keltiradi, pensiya yillik, umrbod, 10 ming p.b miqdorida. Ikkala to‘lovlar oqimi prenumerando. Bunday holda (12.3.5) formulaga ko‘ra

$$P = 10000 \cdot \frac{N_{60}}{N_{40} - N_{45}} = 10000 \cdot \frac{3082{,}2}{30375{,}6 - 18086{,}4} = 2508{,}1 \text{ p.b.}$$

Kechiktirish davri qancha katta bo‘lsa, badal summasi shuncha kichik bo‘ladi. 10 yilga kechiktirilgan hol uchun

$$P = 10000 \cdot \frac{N_{60}}{N_{40} - N_{50}} = 10000 \cdot \frac{3082{,}2}{30375{,}6 - 10465{,}3} = 1548{,}0 \text{ p.b.}$$

<u>Badallar summasi bo‘yicha pensiya miqdorini hisoblash</u>. Faraz qilaylik, sug‘urtalanuvchi hisobiga yiliga badallar kelib tushayotgan bo‘lsin. Ravshanki, bu badallar sug‘urta tashkiloti foydasiga tushadi. Darhaqiqat, har bir badal pensiyaning ma’lum summasini ta’minlaydi. Aytaylik, dastlab pensiya birvaqtli E badalni ta’minlagan bo‘lsin. U holda $E = R a_x$ munosabatdan pensiya miqdori R ni topamiz. Zudlik prenumerando pensiya uchun $R = E / \ddot{a}_x$, qoldirilgan pensiya uchun $R = E /{}_n \ddot{a}_x$ va h.k.

Faraz qilaylik, o‘zgarmas mukofot t yil mobaynida kechiktirib to‘lanadigan bo‘lsin, bunda badallar bir xil.

Pensiya miqdori inflyatsiyani hisobga olmaganda

$$R = P\frac{\ddot{a}_{x:t|}}{{}_n\ddot{a}_x}$$

tenglamadan topiladi. Masalan, qoldirilgan yillik, chekli davriy badallar prenumerando pensiya uchun

$$R = P\frac{\ddot{a}_{x:t|}}{{}_n\ddot{a}_x}$$

Endi badallar ma’lum muddat mobaynida ketma-ket amalga oshiriladigan va vaqt bo‘yicha o‘zgarmas holni qaraymiz. Birinchi badal P_1 ni R_1 summadagi pensiyani ta’minlovchi birvaqtli mukofot deb qarash mumkin va h.k. Faraz qilaylik, badal va pensiya yil boshida va pensiya 60 yoshdan boshlab to‘lanadigan bo‘lsin. U holda har bir badal uchun

$$R_1 = P_1 \frac{N_{60}}{D_x}, \quad R_2 = P_2 \frac{N_{60}}{D_{x+1}}, \ \ldots, \ R_k = P_k \frac{N_{60}}{D_{x+k-1}}$$

tengliklarni yozish mumkin.

Umumiy pensiya miqdori

$$P = \sum_{j=1}^{k} P_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} R_j D_{x+j-1}}{N_{60}} \qquad (12.3.5)$$

Misol. Faraz qilaylik, erkak kishining pensiya hisobiga 5 yil davomida prenumerando badallar tushadigan bo‘lsin. Birinchi badal 40 yoshda 150 pul birligi , ikkinchi badal 200 pul birligi va hokazo to‘lanadi. Pensiya 60 yoshdan boshlab to‘lanishi ko‘zda tutilgan, $N_{60} = 3082{,}2.$ Quyidagi jadvalda har bir navbatdagi badal va pensiya summasi, hamda umumiy pensiya miqdori ko‘rsatilgan.

Pensiya miqdorini hisoblash

X	D_{x+j-1}	R_j	$R_j D_{x+j-1}$	P_j
40	2939,5	150	440925	17743,05
41	2677,7	200	535540	174,75
42	2437,7	400	975080	315,36
43	2217,8	300	665340	215,86
44	2016,6	800	1613280	523,42
Jami:			4230165	1373,44

XII bobga doir masalalar

1. 45 yoshli erkak kishining 60 yoshgacha yashashdagi sug‘urta narxining qiymatini toping. Hisob 5% foiz stavkaga tayangan deb olinsin.

2. 40 yoshli ayol kishining 60 yoshgacha yashashdagi sug‘urta narxining qiymatini toping. Hisob 5% foiz stavkaga tayangan deb olinsin.

3. Er-xotinlar juftligining 5 yil muddatgacha yashash sug‘urtasining netto-mukofot qiymatini toping. (Er-xotinlar juftligi uchun $X = 45, Y = 40$ yosh) foiz stavkasi 5% deb hisoblang.

4. 45 yoshli erkakning umrbod sug‘urtasi uchun sug‘urtaviy summaning qismi ko‘rinishida bo‘lgan mukofot qiymatini toping?

5. 40 yoshli ayolning umrbod sugʻurtasi uchun sugʻurtaviy summaning qismi koʻrinishida boʻlgan mukofot qiymatini toping?

6. 4-masala shartida birvaqtli badal 20 yil mobaynida kechiktirilgan toʻlovlar bilan almashtirilgan boʻlsa, u holda sugʻurtaviy annuitet hadi (yillik mukofot hajmi) qanday boʻladi?

7. 45 yoshli erkak kishi bilan sugʻurtaviy pensiya shartnomasi uchun toʻlanadigan birvaqtli netto-mukofotni ushbu shartlar uchun aniqlang: yillik pensiya miqdori 1 pul birligi, prenumerando toʻlovlari 60 yoshdan umrining oxirigacha. Daromadlilik normativi 5%.

8. Quyidagi shartlar boʻyicha mukofot hajmini toping: 45 yoshli erkak 5 yil mobaynida mukofot keltiradi, pensiya yillik, umrbod, 10 ming soʻm miqdorida toʻlovlar oqimi prenumerando.

Takrorlashga doir masalalar

1. Kreditga 1500000 soʻm pul yarim yil uchun oyiga 5% stavkada berilgan boʻlsa, shu pulga nisbatan muddat oxirida oddiy foiz topilsin.

2. Ikki oyga qarzga berilgan 5000000 soʻmning foizii 100 ming soʻmni tashkil etsa, yillik foiz stavkasi qanday?

3. Bankka qoʻyilgan 2500000 soʻm pul uchun yiliga 10% dan toʻlansa, uning miqdori uch marta ortishi uchun necha yil kerak boʻladi?

4. Investor 1200000 soʻmni jamgʻarish uchun 20% li yillik oddiy foiz stavkasi qanday miqdordagi pulni bir yilga qoʻyish mumkin.

5. Investor 16 mln. naqd pulga yoki bir yildan soʻng 16 mln. 500 ming soʻmga mashina sotib olishi mumkin. Agar investor hisobida bankda 16 mln. soʻmdan kam boʻlmagan pul boʻlsa va bank yiliga 10% toʻlasa, u holda qaysi muqobil afzal boʻladi?

6. Agar bankni hisob stavkasi toʻlovgacha qolgan 3 oy muddat uchun veksel narxining 6% ini tashkil etsa, yillik hisob stavkasi va toʻlovgacha boʻlgan oy uchun veksel narxini toping? Vekselning belgilangan muddat uchun narxi 100 ming soʻm.

7. Veksel 2015-yil 8-yanvarda chiqarilgan boʻlib toʻlov muddati 2015-yil 8- noyabrgacha veksel boʻyicha yillik kirim 10%. Agar veksel 2015-yil 8-mayda 8% hisob stavkasi boʻyicha hisobga olingan boʻlsa, u holda vekselni sotib olish narxi qancha? Toʻlovgacha boʻlgan muddat uchun vekselning hisob narxi 1000000 soʻm.

8. 1500000 so'mning bir yildan so'ng olinadigan a) foiz stavkasi 10%; b) hisob stavkasi 10% bo'lgan holdagi joriy qiymati topilsin.

9. 5 yildan so'ng 1 mln. so'mning 15,5 % li murakkab stavkasi bo'yicha qarzi necha so'mni tashkil etadi?

10. Ssuda muddati 5 yil. Kelishilgan tayanch foiz stavkasi 12% va birinchi ikki yilda qo'yilgan marja 0,5%, keyingi yillar uchun marja 0,75% bo'lsa, jamg'armaning o'sish koeffitsiyenti topilsin?

11. 30 mln. so'm kredit 2 yilu 160 kunga 16,5% stavka bo'yicha murakkab foizga berilgan. Muddat oxiridagi qarz miqdori topilsin.

12. Agar 15% murakkab stavka bo'yicha investitsiya qilingan pul miqdori 75 mln. dan 200 mln. so'mga etgan bo'lsa, investitsiya muddati topilsin?

13. Uzluksiz ustama foiz 20 mln so'mga to'lanmoqda. Agar o'sish kuchi (intensivligi) 10% , muddat esa 5 yil bo'lsa, jamg'arilgan pul miqdori topilsin.

14. O'sish kuchining boshlang'ich qiymati 8% foiz stavkasi uzluksiz va eksponensial qonun bo'yicha ortadi (yillik o'sish 20%), jamg'arma muddati 5 yil bo'lsa, o'sish koeffitsiyenti (ko'paytuvchisi) topilsin.

15. 20 mln. so'm investitsiya uzluksiz prakatga 5 yil muddatga qo'yilgan. O'sish kuchi 20% bo'lsa, jamg'arilgan pul miqdori qanday bo'ladi?

16. Tomonlar 219 kunga berilgan ssuda uchun 12% miqdorda diskont ushlab qolishga kelishdilar. Kredit narxini yillik foiz stavkasi va hisob stavkasi bo'yicha $(Y = 360)$ aniqlang? $\left(i = \dfrac{d^1}{T(1-d^1)};\quad d = \dfrac{d^1}{T};\quad T = \dfrac{D}{Y}\right)$.

17. Agar 1-oktyabrda 5000000 so'm pul bir oyga investitsiya qilingan bo'lib, birinchi o'n besh kunlikdagi yillik depozit 20%, keyingi o'n besh kunlikdagi depozit 25% ni tashkil etsa, aniq va odatdagi foiz bo'yicha jamg'arma miqdori aniqlansin?

18. Har oyda 150% to'lanadigan nominal stavkaga ekvivalent bo'lgan samarali foiz stavkasi topilsin?

Ko'rsatma: $i_{сам} = i^{(m)} + \dfrac{m-1}{2m}(i^{(m)})^2$ taqribiy formuladan foydalaning.

19.10 mln. so‘m pul 3 oyga 120% yillik foiz nominal stavka bo‘yicha investitsiya qilingan bo‘lsa, jamg‘arilgan pul miqdori topilsin?

20. 50 mln. so‘m pul 6 oyga 10% stavka bo‘yicha oddiy foizga kreditga berildi. Har bir oy oxiridagi jamg‘arilgan pul miqdori topilsin.

21. Shartnoma quyidagi oddiy foiz stavkalarini qarab chiqadi: birinchi kvartalda yillik 230%, ikkinchi kvartal uchun 240%, uchinchi kvartal uchun 220%, to‘trinchi kvartal uchun esa yillik 200% to‘lanadi. Jamg‘arma koeffitsiyenti topilsin.

22. Investor 2000000 so‘m pulni olish uchun ikki yilga 50% oddiy stavka bo‘yicha qanday pulni investitsiya qilish lozim. 50% murakkab stavka bo‘yicha-chi?

23. Yillik daromadning o‘sishi 10% ni tashkil etishi kutilmoqda. Agar $R = 100,\ i = 8\%,\ n = 3$ yil bo‘lsa, boshlang‘ich va jamg‘arilgan pul miqdorlari topilsin?

Ko‘rsatma: $P = R\dfrac{e^{(q-\delta)n} - 1}{q-\delta}$, bunda $q - \delta = \ln\dfrac{1+k}{1+i}$, $k -$ o‘sish darajasi, $\delta = P(1+i)^n$.

24. Qandaydir X korparatsiya 5 yil muddatga obligatsiya chiqardi. Sotish kursi 500. Obligatsiyaning to‘lov kunidagi daromadlilik stavkasi qanday bo‘ladi?

Ko‘rsatma: $i = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{k}{100}}} - 1.$

25. Qandaydir tovarni sotib olish uchun 5000000 so‘m uch yilga yillik 15% oddiy foiz bo‘yicha qarz olindi. Umumiy qarz miqdori qanday?

26. 1 mln. so‘mga 17.11.2015 vaqtda to‘lash sharti bilan veksel berildi. Veksel egasi uni 23.09.2015 bankdan 20% hisob stavkasi bo‘yicha oldi. Muddat oxirigacha qolgan kunlar soni 55 kun. Vekselni sotishdan olingan pul miqdori va diskont topilsin.

27. 1200 dollarni so‘mlik depozit bo‘yicha almashtirish ko‘zda tutilmoqda. Depozit muddatining boshlanishida dollarni sotish kursi 2500 so‘m, operasiya oxirida sotib olish kursi 2600 so‘m. Foiz stavkasi 10%. Depozit muddati 4 oy bo‘lsa, valyutada jamg‘arilgan mablag‘ miqdori topilsin.

28. 12 mln. so‘mni valyuta depoziti bo‘yicha almashtirish talab qilinadi. Muddat boshida dollarni sotish kursi 2500 so‘m, operatsiya oxirida esa 2600 so‘m. Foiz stavkasi 10%. Depozit muddati 4 oy bo‘lsa, so‘mlarda jamg‘arilgan mablag‘ miqdori topilsin.

29. Boshlang‘ich investitsiya 10 mln. so‘m va murakkab foiz bo‘yicha foiz stavkasi 20% bo‘lsa, muddat oxiridagi jamg‘arilgan pul miqdorini jamg‘arish muddatidagi yillar soniga bog‘liqlik grafigi yasalsin.

30. 10 mln. so‘m qarzga olingan bo‘lsa, 3 yildan so‘ng murakkab foiz stavkasi 20% bo‘lsa, qarz miqdori qancha bo‘ladi?

31. Ssudaning muddati 5 yil, kelishilgan tayanch foiz stavkasi 12% va plyus birinchi ikki yil uchun 0,5% va qolgan yillar uchun marja 0,75% bo‘lsa, jamg‘arma ko‘paytuvchisi topilsin.

32. 50 mln. so‘m pul 5 yildan so‘ng to‘lanishi ma’lum bo‘lsa, hamda murakkab foiz bo‘yicha yillik foiz stavkasi 12% ni tashkil etsa, boshlang‘ich pul miqdori qanday bo‘lgan?

33. 5 yildan so‘ng 50 mln. so‘m qarz uchun to‘lanadi. Agar murakkab hisob stavkasi 15% bo‘lsa, qarzga olingan pul miqdori va diskont topilsin.

34. 75 mln. so‘m yillarda hisoblangan qanday muddat ichida 200 mln. so‘mga etadi? Yillik murakkab foiz stavkasi yiliga va kvartaliga 15%ni tashkil etadi deb hisoblang.

35. Omonat sertifikati 100 ming so‘mga sotib olingan. 2 yil muddatdan so‘ng uni sotib olish narxi 144 ming so‘mni tashkil etdi. Investitsiyaning daromadliligi murakkab foiz stavkasi ko‘rinishida qanday bo‘lgan?

36. 1000000 so‘mga uzluksiz ustama foiz o‘sish kuchi 20%, muddati 5 yil bo‘lgan holda pul mablag‘i qo‘shilmoqda. Bunday holda jamg‘arilgan pul miqdori qanday bo‘ladi?

37. O‘sish kuchining boshlang‘ich qiymati 10%, foiz stavkasi uzluksiz va eksponensial ravishda o‘sadi (yillik o‘sish $a = 1,2$, ya’ni 26%). Jamg‘arma muddati 2 yil. Jamg‘arma ko‘paytuvchisi topilsin.

38. Qazilma boylik chiqaradigan joyni ekspluatatsiya qilishdan keladigan daromad yiliga 5 mlrd. so‘mni tashkil etadi, qayta ishlash davri 10 yilga teng, mahsulotni ortish va sotish uzluksiz va tekis deb hisoblab daromadni kapitallashtirilgan narxini diskontirlashda 10% stavka bo‘yicha hisoblang.

(Ko‘rsatma: $P = R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$ formuladan foydalaning).

39. Agar 14-masalada diskontirlash 10% o‘sish kuchi bo‘yicha yuzaga keladigan bo‘lsa, u holda kapitallashtirilgan (o‘zlashtirilgan) mablag‘ miqdori topilsin. (Ko‘rsatma: $P = R\cdot\dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}$ formuladan foydalaning).

40. Daromadning yiliga 5% o‘sishi kutilmoqda. Agar $R=100,\quad i=8\%,\ n=2$ bo‘lsa, daromad oqimining joriy va jamg‘arma qiymatlari topilsin. (Ko‘rsatma: $P = R\cdot\dfrac{e^{(q-\delta)n}-1}{q-\delta}$, bu yerda $q-\delta=\ln\dfrac{1+k}{1+i}$, $k-$ o‘sish darajasi, $S=P(1+i)^n$).

41. 4,5% daromad keltiruvchi abadiy renta 90 kurs bo‘yicha sotib olindi. Agar foizlar yiliga bir marta, kvartal bo‘yicha to‘lanadigan bo‘lsa, investitsiyaning moliyaviy samaradorligi qanday? (Ko‘rsatma: $i_t=\dfrac{g}{K}100,\quad i=(1+\dfrac{i_t}{m})^m-1$).

42. Qandaydir korporatsiya foizsiz 3 yilda to‘lash sharti bilan obligatsiya chiqardi. Sotish kursi 2,7 bo‘lsa, obligatsiyaning investorga keltirgan yillik daromadi qanday bo‘ladi? (Ko‘rsatma: $i=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{k}{100}}}-1$).

LABORATORIYA ISHLARI VA ULARNI BAJARISH UCHUN METODIK KO‘RSATMALAR

1-laboratoriya ishi

O‘zgarmas postnumerando rentaning jamg‘arilgan qiymatini aniqlash

Birinchi laboratoriya ishi m karrali rentaning jamg‘arilgan qiymatini aniqlashga qaratilgan.

Aytaylik, renta yiliga bir xil m marta to‘lanadigan bo‘lib, yil oxirida bir marta foiz qo‘shiladigan bo‘lsin. Agar yillik to‘lovlar miqdori R bo‘lsa, u holda har doim $\frac{R}{m}$ dan to‘lanadi. Rentaning umumiy hadlar soni mn ga teng bo‘ladi. Bunday holdagi rentalar ketma-ketligi geometrik progressiyani tashkil etadi. Uning birinchi hadi $\frac{R}{m}$, maxraji esa $(1+i)^{\frac{1}{m}}$ dan iborat. Bu progressiya yig‘indisi

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+i)^{(\frac{1}{m})n}}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]} = R\, S_{n|i}^{(m)} \qquad (1)$$

Ayrim hollarda to‘lovlar soni foizning qo‘shilishlar soniga teng bo‘ladi. Bunday holda zaruriy formulani hosil qilish uchun i ni j/m bilan almashtiramiz.

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn}}{j/m} = R \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j} \qquad (2)$$

Bu hol uchun jamg‘arilgan qiymatni hisoblash uchun “Excel” paketining BZ(FV) programmasidan foydalanish mumkin. Bu programma bir vaqtli badal (vznos)ni ham hisobga oladi.

$$S = R\, S_{n|i} + H3(1+i)^n, \qquad (3)$$

bunda $R-$ rentaning hadi, NZ – bir vaqtli badal, $S_{n|i}$ − o‘zgarmas rentaning jamg‘arma koeffitsiyenti, *n*-rentaning to‘lovlar davrining va foiz qo‘shilishlar soni, *i*-belgilangan muddat uchun foiz stavkasi.

BZ programma bo‘yicha ishning bajarilish tartibi

1. BZning “moliyaviy funksiyasi” f_x ketma-ket chaqiriladi.
2. Rentaning shartlari va parametrlari ekranda ko‘rsatiladi:

Norma – belgilangan muddat uchun foiz stavkasi;

Davrlar soni, to‘lov - rentalar hadi, manfiy ishorada ko‘rsatiladi;

NZ – muddat boshidagi badal, manfiy ishorada ko‘rsatiladi. Agar bu kattalik ko‘rsatilmasa, u holda natija o‘zgarmas renta uchun jamg‘arilgan miqdor bo‘ladi;

Tip – rentaning turi, 0 – postnumerando renta uchun, 1 – prenumerando renta uchun;

1 – 2 amallarni bajargandan so‘ng oxirgi satrda hisob qiymati avtomatik ravishda ko‘rinadi. OK tugmasi bosilgandan so‘ng bu qiymat Excel jadvalining ajratilgan yacheykasida ko‘rinadi.

Misol. Kelajakdagi xarajatlarni ta’minlash uchun fond tashkil etiladi: 5 yil mobaynida o‘zgarmas postnumerando renta bo‘yicha fondga mablag‘ kelib tushadi. Bir marotabali to‘lov 4 mln. so‘m, yillik foiz stavkasi 18,5%. Agar rentaning to‘lovlar hadi va ustama foizlar kvartal bo‘yicha amalga oshirilsa, jamg‘arilgan pul miqdori topilsin. (2) formuladan

$$S = 4 \cdot \frac{(1+\frac{0{,}185}{4})^{4\cdot 5} - 1}{0{,}185} = 31{,}785 \text{ mln. so‘m.}$$

BZ programmani tatbiq etamiz. Buning uchun berilganlarni kiritamiz:

Norma: 4,65%

Davrlar soni: 20

To‘lov - 1

NZ va Tip ko‘rsatilmagan, demak NZ=0 to‘lovlar postnumerando.

Javob: 31, 785.

1 – laboratoriya ishi uchun topshiriq

Jamg‘arma fondini tashkil etish maqsadida 5 yil mobaynida o‘zgarmas postnumerando renta bo‘yicha fondga pul mablag‘i kelib tushadi. Bir marotabali to‘lov “*R*” mln. so‘m, yillik foiz stavkasi “*l*”. Agar rentaning to‘lovlar hadi va ustama foizlar kvartal bo‘yicha amalga oshirilsa, jamg‘arilgan pul miqdori topilsin.

Bu yerda “*R*” - talabaning jurnaldagi tartib nomerini ko‘rsatuvchi son, $i = \frac{j}{25}$, (j – talabaning familiyasidagi harflar soni).

2-laboratoriya ishi

O‘zgarmas rentaning boshlang‘ich (keltirilgan) qiymatini aniqlash

Rentaning hadlar soni va ustama foizlar soni teng bo‘lgan holni qaraymiz. Renta hadlarining qiymati $\frac{R}{m}$. Bunday holda

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m} = R \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j} \qquad (4)$$

Renta *m* karrali bo‘lib, ustama foizlar soni ham *m* ga teng bo‘lsa, u holda *P* ni hisoblash uchun Excel paketining PZ (PV) programmasidan foydalanish mumkin.

Hisoblash quyidagi formula bo‘yicha amalga oshiriladi:

$$P = R\,a_{n|i} + БС(1+i)^{-n},$$

bu yerda $R -$ rentaning hadi; BS – bir vaqtli badal; $a_{n|i}$ – o‘zgarmas rentaning keltirilgan koeffitsiyenti; $n -$ rentaning to‘lovlar va ustama foizlar davrlarining soni; $i -$ belgilangan muddatdagi foiz stavkasi.

BZ programmasi bo‘yicha ishning bajarilish tartibi:

1. BZning “moliyaviy funksiyasi” f_x ketma-ket chaqiriladi;

2. Rentaning to‘lov shartlari, bir vaqtli to‘lov qiymati va ustama foiz to‘lash tartibi ekranda satr bo‘yicha ko‘rsatiladi:

Norma – belgilangan muddat uchun foiz stavkasi;

Kper – davrlar soni;

To‘lov - rentalar hadi, manfiy ishorada ko‘rsatiladi;

BS – muddat boshidagi bir vaqtli badal, manfiy ishorada ko‘rsatiladi. Agar bu qiymat ko‘rsatilmasa, u holda bu boshlang‘ich qiymat o‘zgarmas renta uchun bo‘ladi;

Tip – rentaning turi, 0 – postnumerando renta uchun, 1 – prenumerando renta uchun ko‘rsatiladi. Agar rentaning turi ko‘rsatilmasa, u holda hisoblash postnumerendo renta uchun olib borilishini bildiradi;

1 – 2 amallarni bajargandan so‘ng natijaviy satrda hisob qiymati avtomatik ravishda ko‘rinadi. OK tugmasi bosilgandan so‘ng bu qiymat Excel jadvalining ajratilgan yacheykasida ko‘rinadi.

Misol. Prenumerando rentaning parametrlari quyidagicha: $R=100,\ \ n=5,\ m=2.$ To‘lovlarning umumiy soni 10, yarim yil uchun foiz stavkasi 6%. PZ programmasining parametrlarini kiritamiz:

Norma: 6 %

Kper: 10

To‘lov – 50

Tip 1,

Javob: 390,085.

2-laboratoriya ishi uchun topshiriq

Prenumerando rentaning quyidagi parametrlari uchun o‘zgarmas rentaning boshlang‘ich (joriy) qiymati topilsin.

$R=a$ (mln. so‘m), $n=4$ yil, $m=2.$ Umumiy to‘lovlar soni 10, yarim yil uchun foiz stavkasi $i=b/20,$ bu yerda $a-$ talabaning familiyasidagi harflar soni, $b-$ talabaning jurnaldagi tartib nomerini ko‘rsatuvchi son.

3-laboratoriya ishi

Foiz stavkasining qiymatini topish

Moliyaviy – bank yoki tijorat operasiyalarida daromadlilikning samaradorligini baholashda foiz stavkalarini o‘lchash zarurati tug‘iladi.

Oddiy holatda (1) va (4) tenglamalarni i ga nisbatan yechish masalasi qo‘yiladi. Bu tenglamalarning algebraik yechimi yo‘q. Talab qilingan kattalikni topishda avval chiziqli interpolyasiya yoki qandaydir iterasiya metodiga murojaat qilinar edi. Hozirgi sharoitda foiz stavkasini aniqlashda o‘zgarmas renta parametrlari uchun Excel paketining Norma programmasidan foydalaniladi. Bu programmani o‘zgaruvchi va uzluksiz rentalar uchun qo‘llab bo‘lmaydi.

Norma programmasidan foydalanishda amallarni bajarish tartibi:

1. Normaning “moliyaviy funksiyasi” f_x chaqiriladi;

2. Rentaning parametrlari kiritiladi:

Kper satriga – davrlar soni;

To‘lov satriga - rentalar hadining qiymati manfiy ishora bilan;

NZ satriga – rentaning joriy qiymati $(P<Rn)$ yoki BS satriga – muddat oxirida rentaning jamg‘arilgan qiymatini $(S>Rn)$ ko‘rsatish;

Tip satrida – rentaning turi, 0 – postnumerando renta uchun, 1 – prenumerando renta uchun ko‘rsatiladi. Agar rentaning turi ko‘rsatilmasa, u holda hisoblash postnumerendo renta uchun bajariladi;

1 – 2 amallarni bajargandan so‘ng oxirgi satrda foiz stavkasini o‘nli kasr tarzida ko‘ramiz. OK tugmasi bosilgandan so‘ng bu qiymat Excel jadvalining yacheykasida foiz tarzida ko‘rinadi.

3-laboratoriya ishi uchun topshiriq

Har yili n yil mobaynida postnumerando badal yo‘li bilan R mln. so‘m bo‘yicha S mlrd. so‘m miqdorida fond tashkil etilishi ko‘zda tutilgan bo‘lsa, yillik foiz stavkasi qanday bo‘ladi?

Bu masalani Excel yordamida yechamiz. Norma programmasini chaqirib quyidagi qiymatlarni kiritamiz:

Kper: n,

To‘lov – R

BS: S

Tip: 0

n – to‘lov muddati (talabaning jurnaldagi tartib nomeri).

R – yillik to‘lov miqdori (mln.), (talabaning familiyasidagi harflar soni).

$S = 2nR$ - jamg‘arilgan pul miqdori (mln.).

ILOVALAR

1-ilova

Yildagi kunlar soni

kunlar	yanvar	fevral	mart	aprel	may	iyun	Iyul	avgust	sentabr	oktabr	noyabr	dekabr
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

2-ilova

O‘lim darajasi jadvali (AQSh aholisi uchun)

x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	100000	2449	-97551	-02449
1	97551	153	-99843	-00157
2	97398	96	-99901	-00099
3	97302	67	-99931	-00069
4	97235	60	-99938	-00062
5	97175	55	-99943	-00057
6	97120	51	-99948	-00052
7	97069	47	-99952	-00048
8	97022	43	-99956	-00044
9	96979	40	-99959	-00041
10	96939	38	-99961	-00039
11	96901	37	-99962	-00038
12	96864	37	-99962	-00038
13	96827	40	-99959	-00041
14	96787	45	-99953	-00047
15	96742	57	-99941	-00059
16	96685	75	-99922	-00078
17	96610	96	-99901	-00099
18	96514	108	-99888	-00112
19	96406	113	-99883	-00117
20	96293	115	-99881	-00119
21	96178	113	-99882	-00118
22	96065	110	-99886	-00114
23	95955	104	-99892	-00108
24	95851	98	-99898	-00102
25	95753	95	-99901	-00099
26	95658	94	-99902	-00098
27	95564	96	-99900	-00100
28	95468	99	-99896	-00104
29	95369	104	-99891	-00109
30	95265	110	-99885	-00115
31	95155	115	-99879	-00121
32	95040	122	-99872	-00128
33	94918	129	-99864	-00136
34	94789	137	-99855	-00145
35	94652	147	-99845	-00155
36	94505	158	-99833	-00167

37	94347	171	-99819	-00181
38	94176	185	-99804	-00196
39	93991	201	-99786	-00214
40	93790	220	-99765	-00235
41	93570	242	-99741	-00259
42	93328	268	-99713	-00287
43	93060	297	-99681	-00319
44	92763	330	-99644	-00356
45	92433	369	-99601	-00399
46	92064	412	-99552	-00448
47	91652	463	-99495	-00505
48	91189	520	-99430	-00570
49	90669	584	-99356	-00644
50	90085	656	-99272	-00728
51	89429	736	-99177	-00823
52	88693	825	-99070	-00930
53	87868	923	-98949	-01051
54	86945	1029	-98816	-01184
55	85916	1144	-98669	-01331
56	84772	1265	-98508	-01492
57	83507	1393	-98332	-01668
58	82114	1526	-98141	-01859
59	80588	1664	-97935	-02065
60	78924	1805	-97713	-02287
61	77119	1947	-97475	-02525
62	75172	2088	-97222	-02778
63	73084	2228	-96951	-03049
64	70856	2366	-96661	-03243
65	68490	2499	-96352	-03648
66	65991	2625	-96022	-03978
67	63366	2745	-95668	-04332
68	60621	2856	-95288	-04712
69	57765	2959	-94878	-05122
70	54806	3051	-94434	-05566
71	51755	3130	-93953	-06047
72	48625	3195	-93430	-06570
73	45430	3243	-92861	-07139
74	42187	3273	-92241	-07759
75	38914	3282	-91566	-08434
76	35632	3266	-90833	-09167
77	32366	3225	-90037	-09963

78	29141	3154	-89176	-10824
79	25987	3054	-88248	-11752
80	22933	2923	-87253	-12747
81	20010	2763	-86192	-13808
82	17247	2576	-85066	-14934
83	14671	2365	-83878	-16122
84	12306	2137	-82634	-17366

3-ilova

O‘limlik jadvali (Rossiya aholisi uchun)

Yosh	Erkaklar			Ayollar		
x	l_x	d_x	q_x	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0,01512
1	97953	200	0,002042	98488	161	0,001635
2	97753	113	0,001156	98327	98	0,000997
3	97640	85	0,000871	98229	69	0,000702
4	97555	78	0,0008	98160	57	0,000581
5	97477	74	0,000759	98103	45	0,000459
6	97403	69	0,000708	98058	41	0,000418
7	97334	62	0,000637	98017	39	0,000398
8	97272	57	0,000586	97978	39	0,000398
9	97215	57	0,000586	97939	37	0,000378
10	97158	54	0,000556	97902	31	0,000317
11	97104	54	0,000556	97871	31	0,000317
12	97050	56	0,000577	97840	31	0,000317
13	96994	63	0,00065	97809	35	0,000358
14	96931	70	0,000722	97774	38	0,000389
15	96861	105	0,001084	97736	47	0,000481
16	96756	151	0,001561	97689	68	0,000696
17	96605	208	0,002153	97621	92	0,000942
18	96397	261	0,002708	97529	92	0,000943
19	96136	299	0,00311	97437	93	0,000954
20	95837	351	0,003662	97344	93	0,000955
21	95486	379	0,003969	97251	94	0,000967
22	95107	388	0,00408	97157	95	0,000978
23	94719	375	0,003959	97062	98	0,00101
24	94344	392	0,004155	96964	98	0,001011
25	93952	441	0,004694	96866	99	0,001022
26	93511	473	0,005058	96767	107	0,001106
27	93038	529	0,005686	96660	132	0,001366

28	92509	543	0,00587	96528	137	0,001419
29	91966	547	0,005948	96391	138	0,001432
30	91419	597	0,00653	96253	149	0,001548
31	90822	639	0,007036	96104	164	0,001706
32	90183	695	0,007707	95940	172	0,001793
33	89488	757	0,008459	95768	180	0,00188
34	88731	797	0,008982	95588	197	0,002061
35	87934	832	0,009462	95391	218	0,002285
36	87102	905	0,01039	95173	234	0,002459
37	86197	907	0,010522	94939	250	0,002633
38	85290	940	0,011021	94689	267	0,00282
39	84350	1006	0,011926	94422	279	0,002955
40	83344	1145	0,013738	94143	310	0,003293
41	82199	1198	0,014574	93833	344	0,003666
42	81001	1194	0,014741	93489	382	0,004086
43	79807	1208	0,015137	93107	417	0,004479
44	78599	1212	0,01542	92690	458	0,004941
45	77387	1292	0,016695	92232	449	0,004868
46	76095	1394	0,018319	91783	481	0,005241
47	74701	1379	0,01846	91302	512	0,005608
48	73322	1432	0,01953	90790	547	0,006025
49	71890	1536	0,021366	90243	571	0,006327
50	70354	2001	0,028442	89672	680	0,007583
51	68353	2107	0,030825	88992	847	0,009518
52	66246	2156	0,032545	88145	884	0,010029
53	64090	2143	0,033437	87261	966	0,01107
54	61947	2088	0,033706	86295	959	0,011113
55	59859	2028	0,03388	85336	949	0,011121
56	57831	1974	0,034134	84387	952	0,011281
57	55857	1917	0,03432	83435	954	0,011434
58	53940	1870	0,034668	82481	1009	0,012233
59	52070	1824	0,03503	81472	1012	0,012421
60	50246	2127	0,042332	80460	1121	0,013932
61	48119	2458	0,051082	79339	1334	0,016814
62	45661	2395	0,052452	78005	1499	0,019217
63	43266	2309	0,053368	76506	1621	0,021188
64	40957	2234	0,054545	74885	1745	0,023302
65	38723	2167	0,055962	73140	1785	0,024405
66	36556	2055	0,056215	71355	1812	0,025394
67	34501	2009	0,05823	69543	1834	0,026372
68	32492	1955	0,060169	67709	1844	0,027234

69	30537	1933	0,0633	65865	1914	0,029059
70	28604	1933	0,067578	63951	2075	0,032447
71	26671	1902	0,071313	61876	2198	0,035523
72	24769	1820	0,073479	59678	2375	0,039797
73	22949	1803	0,078566	57303	2515	0,043889
74	21146	1735	0,082049	54788	2712	0,0495
75	19411	1782	0,091804	52076	2987	0,057358
76	17629	1831	0,103863	49089	3173	0,064638
77	15798	1762	0,111533	45916	3337	0,072676
78	14036	1734	0,123539	42579	3538	0,083093
79	12302	1687	0,0137132	39041	3399	0,087062
80	10615	1461	0,137635	35642	3301	0,092615
81	9154	1283	0,140157	32341	3287	0,101636
82	7871	1153	0,146487	29054	3224	0,110966
83	6718	1078	0,160464	25830	3156	0,122184
84	5640	960	0,170213	22674	3151	0,13897
85	4680	861	0,183974	19523	3001	0,153716

4-ilova

Kommutatsion funksiyalar jadvali

Erkaklar Yillik foiz stavkasi – 5%

Yosh x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1887590	1949,524	10114,77	342608,9	17,8759	0,101148
1	93288,57	1787590	181,4059	8165,4059	332494,2	18,16194	0,087527
2	88664,85	1694301	97,61365	7983,838	324328,9	18,10905	0,090045
3	84345,10	1605636	69,92971	7886,224	316345,1	18,03651	0,093499
4	80258,74	1521291	61,11504	7816,294	308458,9	17,95484	0,097389
5	76375,78	1441033	55,21994	7755,179	300642,6	17,86766	0,010154
6	72683,62	1364657	49,03701	7699,959	292887,4	17,7753	0,105938
7	69173,46	1291973	41,96404	7650,922	285187,4	17,6773	0,110605
8	65837,52	1222800	36,74271	7608,958	277536,5	17,57299	0,115572
9	626665,66	1156962	34,99306	7572,216	269927,6	17,46246	0,120835
10	59646,58	1094297	31,57268	7537,223	262355,3	17,34634	0,126365
11	56774,70	1034650	30,06922	7505,65	254818,1	17,22379	0,132201
12	54041,07	977875,3	29,698	7475,581	247312,5	17,09504	0,138331
13	51437,99	923834,2	31,81928	7445,883	239836,9	16,96015	0,144755
14	48956,74	872396,2	33,6712	7414,063	232391	16,81974	0,151441
15	46591,80	823439,5	48,10171	7380,392	224976,9	16,76349	0,158405
16	44325,04	776847,7	65,8808	7332,29	217596,5	16,52616	0,165421
17	42148,44	732522,7	86,4283	7266,41	210264,3	16,37959	0,1734
18	40054,94	690374,2	103,2866	7179,981	202997,8	16,23568	0,179253
19	38044,28	650319,3	112,69	7076,695	195817,9	1609375	0,18660

20	36119,96	612275	125,9888	6964,005	18741,2	15,95116	0,192802
21	34273,97	576155	129,5611	6838,016	181777,2	15,81028	0,19951
22	32512,32	541881,1	126,3217	6708,455	174939,2	15,66695	0,206336
23	30837,79	509368,8	116,2755	6582,133	168230,7	15,51768	0,213444
24	29253,05	478531	115,7587	6465,858	161648,6	15,35833	0,221032
25	27744,29	449277,9	124,0272	6350,099	155182,7	15,19353	0,22888
26	26299,10	421533,6	126,6923	6226,072	148832,6	15,02844	0,236741
27	24920,07	395234,5	134,9445	6099,38	142606,5	14,86009	0,244758
28	23598,46	370314,5	131,9199	5964,435	136507,2	14,69232	0,252747
29	22342,80	346716	126,5635	5832,515	130542,7	14,51802	0,261047
30	21152,29	324373,2	131,5546	5705,952	124710,2	14,33513	0,269756
31	20013,49	303220,9	134,1045	5574,397	119004,3	14,15083	0,278532
32	18926,36	283207,4	138,9114	5440,293	113429,9	13,96365	0,287445
33	17886,19	264281,1	144,0986	5301,381	107989,6	13,7757	0,296395
34	16890,37	246394,9	144,4884	5157,283	102688,2	13,58789	0,305339
35	15941,58	229504,5	143,651	5012,794	97530,9	13,3966	0,314448
36	15038,81	213562,9	148,8142	4869,144	92518,1	13,20079	0,323772
37	14173,86	198524,1	142,0411	4720,329	87648,96	13,00636	0,333031
38	13356,87	184350,3	140,1991	4578,288	82928,63	12,8019	0,342767
39	12580,63	170993,4	142,898	4438,089	78350,34	12,5918	0,352772
40	11838,66	158412,7	154,8974	4295,191	73912,25	12,38097	0,362811
41	11120,01	14674,1	154,3499	4140,294	69617,06	12,18111	0,372328
42	10436,14	135454,1	146,5091	3985,944	65476,77	11,97933	0,381937
43	9792,67	125017,9	141,1685	3839,435	61490,83	11,76648	0,392072
44	9185,184	115225,3	134,8914	3698,266	57651,39	11,54469	0,402634
45	8612,903	106040,1	136,9477	3563,375	53953,12	11,31177	0,413725
46	8065,817	97427,19	140,7232	3426,427	50389,75	11,07902	0,424808
47	7541,007	89361,37	132,58	3285,704	46963,32	10,85006	0,435712
48	7049,332	81820,36	131,1195	3153,124	43677,62	10,60683	0,447294
49	6582,53	74771,03	133,9449	3022,005	40524,49	10,35901	0,459095
50	6135,131	68188,5	166,1854	2888,06	37502,49	10,11443	0,470741
51	5676,797	62053,37	166,656	2721,874	34614,43	9,931054	0,479474
52	5239,817	56376,57	162,4112	2555,218	31892,56	9,759264	0,487654
53	4827,891	51136,76	153,7447	2392,807	29337,34	9,591946	0,495622
54	4444,246	46308,86	142,6655	2239,062	26944,53	9,419959	0,503811
55	4089,95	41864,62	131,9676	2096,397	24705,47	9,235973	0,512573
56	3763,223	37774,67	122,3368	1964,429	22609,07	9,03785	0,522007
57	3461,685	34011,44	113,1469	1842,092	20644,64	8,825112	0,532138
58	3183,696	30549,76	105,117	1728,946	18802,55	8,59569	0,543062
59	2926,974	27366,06	97,6488	1623,829	17073,6	8,349608	0,554781
60	2689,946	24439,09	108,4477	1526,18	15449,78	8,085346	0,567364
61	2453,406	21749,14	119,3563	1417,732	13923,6	7,864879	0,577863
62	2217,22	19295,74	110,7592	1298,376	12505,86	7,70267	0,585587
63	2000,879	17078,52	101,6972	1187,617	11207,49	7,535506	0,593547
64	1803,902	15077,64	93,70844	1085,919	10019,87	7,358345	0,601984
65	1624,294	13273,74	86,56955	992,211	8933,951	7,172005	0,610857
66	1460,377	11649,44	78,18596	905,6415	7941,74	6,977011	0,620142

67	1312,649	10189,07	72,79601	827,4555	7036,099	6,762216	0,630371
68	1177,346	8876,416	67,46603	754,6595	6208,643	6,539344	0,640984
69	1053,816	7699,07	63,5303	687,1935	5453,984	6,305897	0,6521
70	940,1039	6645,254	60,50505	623,6632	4766,79	6,068639	0,663398
71	834,832	5705,15	56,69973	563,1581	4143,127	5,833891	0,674577
72	738,3783	4870,319	51,67168	506,4584	3579,969	5,595966	0,685906
73	651,5458	4131,94	48,75146	454,7867	3073,511	5,34175	0,698012
74	571,7683	3480,394	44,67886	406,0353	2618,724	5,087071	0,710139
75	499,8624	2908,626	43,70398	361,3564	2212,689	4,818853	0,722912
76	432,3555	2408,764	42,76735	317,6524	1851,332	4,571258	0,734702
77	368,9998	1976,408	39,19589	274,8851	1533,68	4,356123	0,744947
78	312,2324	1607,408	36,73622	235,6892	1258,795	4,148115	0,754852
79	260,628	1295,176	34,03856	198,953	1023,106	3,969443	0,76336
80	214,1786	1034,548	28,07482	164,9144	824,1526	3,830305	0,769985
81	175,9048	820,3694	23,48033	136,8396	659,2382	3,663712	0,777918
82	144,0481	644,4646	20,09636	113,3593	522,3986	3,473956	0,786954
83	117,0923	500,4165	17,89442	93,2629	409,0393	3,273695	0,796491
84	93,62201	383,3243	15,17682	75,36848	315,7764	3,094382	0,805029
85	73,987	289,7023	12,96353	60,19166	240,408	2,915583	0,813544

Ayollar — Yillik foiz stavkasi – 5%

Yosh x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1977650	1440	5826,207	226663,7	18,7765	0,058262
1	93798,57	1877650	146,0317	4386,207	220837,4	19,01799	0,046762
2	89185,49	1783852	84,65608	4240,176	216451,2	19,00159	0,047543
3	84853,9	1694666	56,76647	4155,52	212211,1	18,97157	0,048973
4	80756,47	1609812	44,66099	4098,753	208055,5	18,93416	0,050754
5	76866,27	1529056	33,57969	4054,092	203956,8	18,89241	0,052742
6	73172,39	1452189	29,13793	4020,512	199902,7	18,84614	0,054946
7	69658,85	1379017	26,39674	3991,374	195882,2	18,79672	0,057299
8	66315,37	1309358	25,13975	3964,978	191890,8	18,74442	0,05979
9	63132,35	1243043	22,71479	3939,838	187925,8	18,68947	0,062406
10	60103,34	1179910	18,12506	3917,123	183986	18,63136	0,065173
11	57223,15	1119807	17,26196	3898,998	180068,9	18,56913	0,068137
12	54480,97	1062584	16,43996	3881,736	176169,9	18,50376	0,071249
13	51870,2	1008103	17,67738	3865,296	172288,1	18,43511	0,074519
14	49382,51	956232,8	18,27865	3847,619	16842,8	18,36379	0,077915
15	47012,69	906850,3	21,53124	3829,34	164575,2	18,28948	0,081453
16	44752,46	859837,6	29,66817	3807,809	160745,9	18,21319	0,085086
17	42591,72	815085,1	38,2279	3778,141	156938,1	18,13717	0,088706
18	40525,31	772493,4	36,40752	3739,913	153159,9	18,062	0,092286
19	38559,13	731968,1	35,05072	3703,505	149420	17,983	0,096047
20	36687,93	693409	33,38164	3668,455	145716,5	17,90019	0,099991
21	34907,5	656721	32,13389	3635,073	142048,1	17,81318	0,104134
22	33213,11	621813,5	30,92927	3602,939	138413	17,72193	0,108479
23	31600,6	588600,4	30,38666	3572,01	134810,1	17,62624	0,113036

24	30065,42	556999,8	28,93967	3541,623	131238	17,52626	0,117797
25	28604,8	526934,4	27,84283	3512,683	127696,4	17,42119	0,1228
26	27214,82	498329,6	28,65977	3484,841	124183,7	17,31096	0128049
27	25890,22	471114,8	33,67236	3456,181	120698,9	17,19663	0133494
28	24623,68	445224,6	33,28365	3422,509	117242,7	17,08116	0138993
29	23417,84	420600,9	31,93009	3389,225	113820,2	16,9607	0,144728
30	22270,77	397183,1	32,83356	3357,295	110431	16,83427	0,150749
31	21177,43	374912,3	34,41805	3324,461	107073,7	16,70339	0,156981
32	20134,56	353734,9	34,37808	3290,043	103749,2	16,56854	0,163403
33	19141,39	333600,3	44,26386	3255,665	100459,2	16,42821	0,170085
34	18195,63	314458,9	35,71419	3221,401	97203,52	16,28211	0,177043
35	17293,46	296263,3	37,63932	3185,687	93982,11	16,13152	0,184213
36	16432,32	278969,8	38,47794	3148,048	90796,43	15,97689	0,191577
37	15611,35	262537,5	39,15134	3109,57	87648,38	15,81709	0,199186
38	14828,81	246926,1	39,82251	3070,418	84538,81	15,65179	0,207058
39	14082,85	232097,3	39,63075	3030,596	81468,39	15,48085	0,215198
40	13372,61	218014,5	41,9373	2990,965	78437,8	15,30306	0,223664
41	12693,88	204641,9	44,32083	2949,028	75446,83	15,1213	0,232319
42	12045,09	191948	46,87308	2904,707	72497,8	14,93579	0,241153
43	11424,64	179902,9	48,73118	2857,834	69593,1	14,74692	0,250147
44	10831,88	168478,3	50,9738	2809,103	66735,26	14,55393	0,259337
45	10265,1	157646,4	47,59251	2758,129	63926,16	14,35751	0,26869
46	9728,693	147381,3	48,55657	2710,537	61168,03	14,14914	0,278613
47	9216,865	137652,6	49,22476	2661,98	58457,49	13,93486	0,288816
48	8728,742	128435,7	50,08546	2612,755	55795,51	13,71412	0,299328
49	8263,002	119707	49,79333	2562,67	53182,76	13,48711	0,310138
50	7819,733	111444	56,47479	2512,876	50620,09	13,25164	0,321351
51	7390,89	103624,2	66,99461	2456,402	48107,21	13,02054	0,332355
52	6971,948	96233,36	66,59159	2389,407	45650,81	12,80294	0,342717
53	6573,359	89261,41	69,30347	2322,815	43261,4	12,57927	0,353368
54	6191,038	82688,05	65,52502	2253,512	40938,59	12,35609	0,363996
55	5830,702	76497,01	61,75405	2187,987	38685,08	12,11969	0,375253
56	5491,295	70666,31	58,99931	2126,233	36497,09	11,86879	0387201
57	5170,806	65175,02	56,30786	2067,234	34370,86	11,60442	0,399789
58	4868,269	60004,21	56,71821	2010,926	32303,62	11,32557	0,413068
59	4579,729	55135,94	54,17795	1954,207	30292,7	11,03913	0,426708
60	4307,468	50556,21	57,15554	1900,03	28338,49	10,73687	0,441101
61	4045,195	46248,74	64,77677	1842,874	26438,46	10,43301	0,455571
62	3787,79	42203,55	69,32275	1778,097	24595,59	10,142	0,469429
63	3538,096	38415,76	71,39501	1708,774	22817,49	9,857748	0,482964
64	3298,221	34877,66	73,19661	1637,379	21108,71	9,574691	0,496443
65	3067,966	31579,44	71,30902	1564,183	19471,34	9,93284	0,509844
66	2850,563	28511,48	68,94062	1492,874	17907,15	9,00205	0,523712
67	2645,881	25660,91	66,4549	1423,933	16414,28	8,698437	0,53817
68	2453,432	23015,03	63,63547	1357,478	14990,35	8,380749	0,553298
69	2272,967	20561,6	62,90584	1293,843	13632,87	8,046151	0,569231
70	2101,824	18288,63	64,94981	1230,937	12339,02	7,701314	0,585652

71	1936,788	16186,81	65,52366	1165,987	11108,09	7,357555	0,602021
72	1779,036	14250,02	67,4287	1100,464	9942,1	7,009968	0,618573
73	1626,891	12470,99	68,00328	1033,035	8841,637	6,665531	0,634975
74	1481,417	10844,09	69,83807	965,0315	7808,602	6,320082	0,651425
75	1341,035	9362,677	73,25689	895,1935	6843,57	5,981679	0,667539
76	1203,92	8021,642	74,11294	821,9366	5948,377	5,662939	0,682717
77	1072,477	6817,723	74,23195	747,8236	5126,44	5,356987	0,697286
78	947,1748	5745,245	74,95545	673,5917	4378,617	5,065666	0,711159
79	827,1158	4798,071	68,58154	598,6362	3705,025	4,800966	0,723764
80	719,1478	3970,955	63,43257	530,0547	3106,389	4,521751	0,737059
81	621,4701	3251,807	60,15575	466,6221	2576,334	4,232444	0,750836
82	531,7205	2630,337	56,19313	406,4664	2109,712	3,946842	0,764436
83	450,2074	2098,617	52,38849	350,2732	1703,246	3,661444	0,778026
84	376,3804	1648,409	49,81475	297,8847	1352,972	3,379636	0,791446
85	308,6428	1272,029	45,18417	248,07	1055,088	3,121362	0,803745

5-ilova

O‘zbekiston aholisining o‘lim darajasi jadvali

Yoshi x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
0	100 000	2126	100 000	1 061 502	1 933	3 500	25 732
1	97 874	662	88 976	961 502	547	1 567	22 232
2	97 212	222	80 340	872 526	167	1 020	20 665
3	96 990	119	72 870	792 185	81	853	19 645
4	96 871	79	66 164	719 315	49	772	18 792
5	96 792	63	60 100	653 151	36	723	18 020
6	96 729	60	54 601	593 051	31	687	17 297
7	96 669	52	49 606	538 450	24	657	16 610
8	96 617	49	45 073	488 843	21	632	15 953
9	96 568	48	40 954	443 771	19	611	15 321
10	96 520	48	37 213	402 816	17	593	14 709
11	96 472	50	33 813	365 604	16	576	14 116
12	96 422	49	30 723	331 791	14	560	13 540
13	96 373	52	27 916	301 068	14	546	12 980
14	96 321	60	25 364	273 152	14	532	12 434
15	96 261	67	23 044	247 788	15	518	11 902
16	96 194	81	20 935	224 744	16	503	11 384
17	96 113	90	19 015	203 809	16	487	10 880

18	96 023	101	17 271	184 794	17	471	10 393
19	95 922	113	15 684	167 523	17	455	9 922
20	95 809	124	14 241	151 839	17	438	9 467
21	95 685	132	12 930	137 598	16	421	9 029
22	95 553	149	11 738	124 668	17	405	8 608
23	95 404	148	10 655	112 929	15	388	8 203
24	95 256	170	9 671	102 275	16	373	7 815
25	95 086	169	8 776	92 604	14	358	7 442
26	94 917	185	7 964	83 828	14	343	7 084
27	94 732	196	7 226	75 864	14	329	6 741
28	94 536	204	6 555	68 638	13	316	6 412
29	94 332	215	5 947	62 082	12	303	6 096
30	94 117	229	5 394	56 136	12	290	5 794
31	93 888	237	4 891	50 742	11	279	5 503
32	93 651	248	4 436	45 851	11	267	5 225
33	93 403	252	4 022	41 415	10	257	4 957
34	93 151	274	3 646	37 393	10	247	4 701
35	92 877	281	3 305	33 747	9	237	4 454
36	92 596	295	2 995	30 442	9	228	4 217
37	92 301	293	2 714	27 447	8	219	3 989
38	92 008	313	2 460	24 733	8	211	3 770
39	91 695	340	2 229	22 273	8	204	3 558
40	91 355	373	2 018	20 044	7	196	3 354
41	90 982	387	1 827	18 026	7	189	3 158
42	90 595	410	1 654	16 198	7	182	2 969
43	90 185	452	1 497	14 544	7	175	2 788
44	89 733	466	1 354	13 047	6	168	2 613
45	89 267	545	1 225	11 693	7	162	2 445
46	88 722	596	1 107	10 468	7	155	2 283
47	88 126	633	999	9 361	7	148	2 128
48	87 493	715	902	8 362	7	142	1 980
49	86 778	763	813	7 460	6	135	1 838
50	86 015	867	733	6 647	7	128	1 703
51	85 148	926	659	5 914	7	122	1 575
52	84 222	1035	593	5 255	7	115	1 453
53	83 187	1060	532	4 662	6	109	1 338

54	82 127	1126	478	4 130	6	102	1 229
55	81 001	1230	428	3 652	6	96	1 127
56	79 771	1217	384	3 223	5	91	1 030
57	78 554	1286	343	2 840	5	85	940
58	77 268	1388	307	2 496	5	80	855
59	75 880	1511	274	2 189	5	75	775
60	74 369	1721	244	1 915	5	70	699
61	72 648	1811	217	1 671	5	65	629
62	70 837	1893	192	1 454	5	60	564
63	68 944	2037	170	1 262	5	55	504
64	66 907	2093	150	1 092	4	51	449
65	64 814	2224	132	942	4	47	398
66	62 590	2353	116	809	4	42	351
67	60 237	2461	102	693	4	38	309
68	57 776	2571	89	592	4	35	271
69	55 205	2617	77	503	3	31	236
70	52 588	2706	67	427	3	28	205
71	49 882	2715	57	360	3	25	177
72	47 167	2700	49	303	3	22	152
73	44 467	2667	42	253	2	19	130
74	41 800	2718	36	211	2	17	111
75	39 082	2619	31	175	2	15	94
76	36 463	2609	26	144	2	13	79
77	33 854	2548	22	118	2	11	66
78	31 306	2574	18	96	1	10	55
79	28 732	2563	15	77	1	8	45
80	26 169	2487	13	62	1	7	37
81	23 682	2570	11	49	1	6	30
82	21 112	2570	9	39	1	5	24
83	18 542	2339	7	30	1	4	19
84	16 203	2265	5	23	1	3	15
85	13 938	2110	4	18	1	3	11
86	11 828	1791	3	14	0	2	9
87	10 037	1653	3	10	0	2	7
88	8 384	1341	2	8	0	1	5
89	7 043	1059	1	6	0	1	4

90	5 984	951	1	5	0	1	3
91	5 033	826	1	3	0	1	2
92	4 207	645	1	3	0	0	2
93	3 562	534	1	2	0	0	1
94	3 028	454	0	1	0	0	1
95	2 574	325	0	1	0	0	1
96	2 249	298	0	1	0	0	1
97	1 951	273	0	1	0	0	0
98	1 678	273	0	0	0	0	0
99	1 405	171	0	0	0	0	0
100	1 234	1234	0	0	0	0	0
		100000					

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Башарин Г.Р. Начала финансовой математики. – М.: ИНФРА-М,1997.
2. Басовский Л. Е. Финансовый менеджмент: учебник для вузов. / Л.Е. Басовский. – М.: ИНФА-М, 2002 – 240 с.
3. Блау, С.Л. Финансовая математика: Практикум: Учеб. пос. для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Л. Блау. – М.: ИЦ Академия, 2011. - 208 с.
4. Блау С.Л. Финансовая математика: Учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Л. Блау, С.Г. Григорьев. – М.: ИЦ Академия, 2013. - 192 с.
5. Брусов, П.Н. Финансовая математика: Учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова.–М.: КноРус, 2013.-224 с.
6. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
7. Вишняков Я.Д. Общая теория рисков: учеб. пособие для вузов / Я.Д. Вишняков, Н.Н. Радаев.–М.: Академия, 2007.–363 с.
8. Еригов Ю.С. Финансовая математика в вопросах и ответах: учебное пособие. – Новосибирск: Сибирское соглашение, 1999. – 160 с.
9. Коптева Е. П. Финансовый менеджмент: учебно-метод. комплекс / Е. П. Коптева. – Ульяновск: УлГУ, 2006. – 82 с.
10. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник для вузов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 5-е изд., исп. и доп. – М.: Дело, 2006. – 720 с.
11. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике: учеб. пособие для вузов. / Под ред. Б.А. Суслакова. – изд. 3-е, перераб. и испр. – М.: Дашков и К, 2007. – 352 с.
12. Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник для бакалавров. – М.: Юрайт, 2012. - 335 с.
13. Малыхин В. И. Финансовая математика: учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 247 с.
14. Мелкулов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: учебно-справочное пособие. – М.: ИНФА-М,2007 – 407 с.

15. Самаров, К.Л. Финансовая математика: сборник задач с решениями: Учебное пособие. – М.: Альфа-М, ИНФРА-М, 2011. - 80 с.

16. Чернов В.П. Математические методы финансового анализа: Учебное пособие. – СПб.: СПбГУЭФ, 2005.

17. Чернов В.П., Ущев Ф.А. Методические указания по выполнению лабораторной работы на тему «Математическое моделирование финансовых решений». – СПб.: СПбГУЭФ, 2007.

18. Четыркин Е. М. Финансовая математика: учебник для вузов. – 6-е изд., исп. – М.: Дело, 2006.

19. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: Учебник. – М.: ИД «Дело» РАНХиГС, 2011. - 392 с.

20. Чуйко, А.С. Финансовая математика: Учебное пособие / А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 160 с.

21. Giuseppe Campolieti, Roman N. Makarov “Financial Mathematics” –Published Aprel 15, 2014 by Chapman and Hall/CRC 832 Pages 91 B/W Illustrations.

22. Buchanan J Robert “Undergraduate Introduction To Financial Mathematics, An Third Edition)” –World Scientific, 3 rd edition (Luly 13, 2012).

23. Dan Stefanica “A Primer For The Mathematics Of Financial Engineering, second Edition” –FE Press New York, Mart 24, 2011.

MUNDARIJA Bet

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Sh.A.Saipnazarov, M.T.Ortiqova, J.A.Usarov

MOLIYAVIY MATEMATIKA

Toshkent – «INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI» – 2021

Muharrir: N. Abdullayeva
Tex. muharrir: A. Moydinov
Musavvir: A. Shushunov
Musahhih: L. Ibragimov
Kompyuterda sahifalovchi: M. Zoyirova

E-mail: nashr2019@inbox.ru Tel: +99899920-90-35
№ 3226-275f-3128-7d30-5c28-4094-7907, 10.08.2020.
Bosishga ruxsat etildi 09.09.2021.
Bichimi 60x84 1/16. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 15,0. Nashriyot bosma tabog'i 14,75.
Tiraji: 50. Buyurtma № 189

«INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI» bosmaxonasida chop etildi.
100174, Toshkent sh, Olmazor tumani,
Universitet ko'chasi, 7-uy.

INNOVATSIYA NASHRIYOTI
ISBN 978-9943-7629-9-2
9 789943 762992