O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

K.SH.RUZMETOV, G'.X.DJUMABAYEV

MATEMATIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan oliy o'quv yurtlarining qishloq xo'jaligi sohasi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

«O'zbekiston xalqaro islom akademiyasi»
nashriyot-matbaa birlashmasi
Toshkent – 2020

UO‘K: 51(075.8)
KBK: 22.1ya73
R 86

Ruzmetov, K.

Matematika [Matn] : darslik / K.Ruzmetov, G.Djumabayev. – Toshkent : «O‘zbekiston xalqaro islom akademiyasi» nashriyot-matbaa birlashmasi, 2020. – 452 b.

UO‘K: 51(075.8)
KBK: 22.1ya73

Taqrizchilar:

T.T.Tuychiyev – *UzMU «Matematik analiz» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.;*

A.A.Fayziyev – *ToshDAU «Oliy matematika, fizika va kimyo» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.*

Ushbu darslik qishloq xo‘jaligi sohasida tahsil oladigan talabalarga «Matematika» fanini o‘zlashtirishlariga yordam berish maqsadida tayyorlandi. Darslikka bakalavriyat talabalari uchun rejalashtirilgan o‘quv soatiga mos mavzular kiritilgan. Har bir mavzu bo‘yicha nazariy tushunchalar bayon etilib, namunaviy misol va masalalar yechib ko‘rsatilgan.

O‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2017-yil 28-iyundagi 434-sonli buyrug‘iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan.

ISBN 978-9943-6713-4-8

SO'ZBOSHI

Ko'pgina oliy ta'lim muassalarida matematika fani turli hajmda (tayyorlanadigan mutaxassislikka qarab, ma'lum dastur asosida) o'qitiladi.

Matematikani o'qitishdan ko'zlangan maqsad:

1) talabalarni matematik ma'lumotlar majmuasi bilan tanishtirish, uning turli uslublarini o'rganish, ular orasidagi bog'lanishlarni bildirish;

2) talabalarni mantiqiy fikrlashga, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishda qo'llashga, jumladan qishloq xo'jaligi, to'qimachilik va yengil sanoat, iqtisodiy va mexanik masalalarning matematik modellarini qurishga o'rgatishdan iborat.

Ravshanki, o'quv jarayonida darsliklar, o'quv qo'llanmalari, shuningdek darslik shaklida yozilgan kitoblarning ahamiyati katta.

Matematika sohasida turli hajmda, turli sohalarga mo'ljallab yozilgan kitoblar bor. Ayni paytda, jamiyatda barcha sohalarning shiddat bilan rivojlanayotganligi ularga mos keladigan kitoblarning yozilishini taqozo etmoqda.

Shuni e'tiborga olib, mualliflar matematika sohasi bo'yicha bilimlariga, shuningdek oliy ta'lim muassasalarida matematikadan o'tkazilgan darslardan hosil bo'lgan tajribaga tayangan holda ushbu darslikni yozishdi.

Mazkur darslik qishloq xo'jaligi sohasiga mo'ljallangan.

Darslikda mavzularning muayyan ketma-ketlikda va o'zaro uzviy bog'lanishda bo'lishiga, ma'lumotlarni qisqa va ravon bayon etilishiga, amaliy masalalarni yechishda matematik usullardan unumli foydalanishga alohida e'tibor qaratilgan.

1-bob. DETERMINANTLAR

1-§. Determinantlar

Aytaylik, ikkinchi va uchunchi tartibli kvadrat matritsalar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. Bu matritsalarga mos ravishda

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \text{ va } a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}$$

sonlarni mos qo'yamiz. Odatda ular ikkinchi va uchinchi tartibli determenantlar deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu ifodalarni mos ravishda A va B matritsaning determinanti, ularni *detA*, *detB* kabi ham belgilanadi.

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

1-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot 9-4\cdot 2=9-8=1$

2-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}=6\cdot 8-10\cdot 9=48-90=-42$

3-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Yechish. Yuqoridagi ta'rifga asosan:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Uchinchi tartibli determinantning qiymati 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ulardan uchtasi musbat ishorali, qolgan uchtasi esa manfiy ishorali bo'ladi.

4-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}=5\cdot 1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot 4+3\cdot 1\cdot 1-$$

$$-4\cdot 1\cdot 1-3\cdot(-2)\cdot(-3)-1\cdot(-4)\cdot 5=$$

$$=-15+32+3-4-18+20=18$$

5-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 2+1\cdot 0\cdot 5+3\cdot 1\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot 4\cdot 5-1\cdot 3\cdot 2-2\cdot 0\cdot 1=27.$$

Eslatma. Yuqoridagidek, n tartibli ($n>3$) determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tushunchasi kiritiladi.

Aytaylik, uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

berilgan boʻlsin. Bu determinant biror

$$a_{ik}\ (i=1,2,3;\ k=1,2,3)$$

elementini olib, shu element joylashgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Uni a_{ik} *element minori* deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{12}=5$ elementning minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant 9 ta minorga ega bo'ladi.

Ushbu

$$(-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

miqdor (2) determinant a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi va A_{ik} orqali belgilanadi:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

8-ta'rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi deb $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ songa aytiladi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{13}=3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = -6$$

bo'ladi.

2-§. Determinantning xossalari

Determinant qator xossalarga ega. Quyida ularni keltiramiz:

1) determinantning yo'llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) determinantning ixtiyoriy ikki yo'lini (ikki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinantning qiymati o'zgarmasdan, uni ishorasi esa qarama-qarshisiga o'zgaradi;

3) determinantning ikki yo'li (ustuni) bir xil bo'lsa, determinantning qiymati nolga teng bo'ladi;

4) determinantning ixtiyoriy yo'lida (ustunida) turgan barcha elementlari o'zgarmas k songa ko'paytirilsa, determinanting qiymati ham k soniga ko'payadi.

Masalan:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (24 + 60 + 56 - 18 - 70 - 64) = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72 + 180 + 168 - 54 - 192 - 210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 7 & 3 \\ 3 \cdot 5 & 6 & 8 \\ 3 \cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72 + 180 + 168 - 54 - 192 - 210 = -36.$$

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bevosita ta'rifga ko'ra hisoblanadi.

Masalan:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 10$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda shuningdek ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabatdan foydalanish mumkin.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash birmuncha murakkab bo‘ladi. Ularni hisoblashda yuqorida keltirilgan xossalardan yoki Laplas teoremasidan foydalaniladi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

Bu determinantni hisoblashda yuqorida keltirilgan Laplas teoremasidan foydalanamiz:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3[7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1] -$$

$$-1[5 \cdot 3 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 7 \cdot 8] +$$

$$+0[5\cdot0\cdot4+7\cdot1\cdot(-1)+7\cdot7\cdot8]+$$

$$+[5\cdot0\cdot2+7\cdot1\cdot5+7\cdot3\cdot8]=3\cdot119-326-203=$$

$$=357-529=172$$

2-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{vmatrix}=2\cdot A_{11}+A_{12}+3A_{13}=2(-1)^{1+1}\cdot$$

$$\cdot M_{11}+(-1)^{1+2}\cdot M_{12}+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&2\\1&3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}5&3\\1&4\end{vmatrix}=2(9-8)-(15-2)+$$

$$+3(20-3)=2-13+51=40.$$

3-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&3&2\\2&-1&4&1\\3&2&1&5\\1&0&6&2\end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz. Bu ustunda 2 ta noldan farqli element bo'lgani uchun natijada 2 ta 3-tartibli determinant hosil bo'ladi.

$$\Delta = -1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yoki, avval $a_{32}=2$ elementni nolga keltirishimiz mumkin. Buning uchun 2-satrni 2 ga ko'paytirib 3-satrga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni 2-ustun elementlariga nisbatan yoyamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -21.$$

Ko'rinib turibdiki, Laplas teoremasidan yuqorida keltirilgan xossalar bilan birgalikda foydalanish determinantni hisoblashni ancha osonlashtiradi. Buning uchun biror satr yoki ustunni tanlab olib, shu ustun yoki satrdagi elementlarni determinantning xossalaridan foydalanib iloji boricha nollarga keltirishimiz kerak bo'ladi. So'ngra, Laplas teoremasi yordamida determinantning tartibini bittaga kamaytirishimiz mumkin.

2-bob. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida tushuncha

Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga *tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

sistemaga n noma'lumli m ta *chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi* (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ sonlar sistemaning koeffitsientlari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Noma'lumlar vektorini $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ ustun vektor, ozod hadlarni $B=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$ ustun vektor shaklida ifodalaymiz. U holda tenglamalar sistemasi quyidagi matritsa shaklida yozilishi mumkin

$$AX=B$$

Ta'rif. Agar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning o'rniga qo'yilganda (1) sistemadagi tenglamalarni to'g'ri tenglikka aylantirsa, bu sonlarga (1) sistemaning yechimlar tizimi deb aytiladi va $X=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T$ kabi belgilanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.

1-misol. $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ sistema birgalikda chunki u $x=3$, $y=1$ yechimga ega.

Bitta ham yechimga ega bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

2-misol. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

sistema yechimga ega bo'lmaganligi sababli birgalikda emas.

Birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa, aniq sistema va cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa aniqmas sistema deyiladi.

3-misol. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=2, \\ 3x-3y=3 \end{cases}$ sistema birgalikda, ammo aniqmas,

chunki bu sistema $x=\alpha$, $y=-1+\alpha$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega, bunda α – ixtiyoriy haqiqiy son.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuyiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

4-misol. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemaning yechimi

$$(x,y)=(1,1).$$

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ (b) tenglamalar sistemasining yechimi

$$(x,y)=(1,1).$$

(a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0 dan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi.

5-misol. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemadagi 1-tenglamani (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga qo'shib quyidagini hosil qilamiz. $\begin{cases} x+3y=5 \\ -10y=-10 \end{cases}$ (b) natijada (a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega yoki ega emasligini quyidagi teorema yordamida aniqlash mumkin.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning A asosiy matritsa va kengaytirilgan $(A|B)$ matritsalarining ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli.

Masalan, Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

Yechish. Buning uchun asosiy va kengaytirilgan matritsa rangini topamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}$$

2-satr elementlaridan 1-satr elementlarini ayiramiz:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix},\quad r(A)=2.$$

$$(A|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right)$$

bu matritsa rangini topish uchun yana yuqoridagi ishni takrorlaymiz, natijada B matritsa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right),\quad r(A|B)=3.$$

Demak, $r(A)<r(A|B)$ munosabat o'rinli, teorema shartiga ko'ra berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda emas.

2-§. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi

1°. Ikki noma'lumli, ikki chiziqli tenglamalardan tuzilgan sistema va uni yechish.

Ushbu

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}\qquad (1)$$

sistema ikki x va y noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar (1) sistemasining koeffitsientlari, b_1,b_2 lar esa sistemaning ozod hadlari deyiladi.

Agar (1) sistemadagi x noma'lumning o'rniga x_0 sonni, y noma'lumining o'rniga y_0 soni qo'yganda tenglamalarning har biri bajarilsa, (x_0,y_0) juftlik (1) sistemaning yechimi deyiladi.

(1) sistema koeffitsientlaridan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, so'ng bu determinantning birinchi va ikkinchi ustun elementlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quydagi

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

determinantlarni hosil qilamiz.

Teorema. Agar

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

sistemada:

1) $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) sistema yagona yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta=0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$ yoki $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, (1) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

3) $\Delta=0$ bo'lib, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$ bo'lsa, (1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

(1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini a_{12} ga ko'paytirib so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$a_{11}a_{22}x+a_{12}a_{22}y=a_{22}b_1-$$
$$-a_{22}a_{12}x-a_{12}a_{22}y=-a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

keyingi tenglik ushbu

$$\Delta\cdot x=\Delta_x$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, undan

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, (1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{21} ga ikkinchi tenglamasini a_{12} ga ko‘payritib, so‘ng ularni hadlab qo‘shib topamiz:

$$-a_{11}\cdot a_{21}x-a_{12}\cdot a_{21}y=-b_1a_{21}$$
$$a_{12}a_{21}x+a_{12}\cdot a_{22}y=b_2a_{12}$$
$$(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})\cdot y=a_{12}b_2-a_{21}b_1$$

keyingi tenglik ushbu

$$\Delta\cdot y=\Delta_y$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, undan

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunga o‘xshash

$$\Delta=0\ \Delta_x\neq 0,\ yoki\ \Delta_y\neq 0$$

bo‘lganda sistemaning yechimi mavjud bo‘lmasligi,

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y 0$$

bo‘lganda sistemaning yechimi cheksiz ko‘p bo‘lishi ko‘rsatiladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 4x+3y=11 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Bu sistema uchun

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot 3-(-5)\cdot 4=9+20=29,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-11\cdot(-5)=3+55=58,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}=3\cdot 11-1\cdot 4=33-4=29$$

bo'lib,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{58}{29}=2, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{29}{29}=1$$

bo'ladi. Demak, berilgan sistemaning yechimi (2;1) bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi mavjudmi?

Bu sistema uchun

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=16,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-8$$

bo'ladi. Demak qaralayotgan sistema yechimga ega emas.

Misol. Ushbu,

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$$

sistemani qaraylik. Bu sistema uchun

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$$

bo'ladi. Demak, bu sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

2°. Uch noma'lumli, uchta chiziqli tenglamalardan tuzilgan sistema va uni yechish.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{13}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

sistema uch x,y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$$

sonlar (2) sistemaning koeffitsientlari,

$$b_1,\ b_2,\ b_3,$$

sonlar esa sistemaning ozod hadlari deyiladi.

Agar x_0, y_0, z_0 sonlarni mos ravishda (2) sistemadagi: x, y, z larning o'rniga qo'yilganda (2) sistemadagi tengliklar bajarilsa, (x_0, y_0, z_0) uchlik (2) sistemaning yechimi deyiladi.

(2) sistema koeffitsientlari hamda ozod hadlardan foydalanib qo'yidagi determinantlarni hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

Teorema. Agar

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{13}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

sistemada:

1) $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2) sistema yagona (x,y,z) yechimga ega bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta=0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$ yoki $\Delta_y \neq 0$ yoki $\Delta_z \neq 0$ bo'lsa, (2) sistema yechimga ega bo'lmaydi,

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsa, (2) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

1-misol. Ushbu sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 4z = -9 \\ 5x - 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

Bu sistema uchun Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlarni tuzib, ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 + 60 - 10 - 32 + 18 = 56$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} - 60 + 36 + 60 - 10 - 162 + 80 = -56$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -108 + 100 + 5 + 45 + 30 + 40 = 112$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 20 + 135 + 50 + 15 - 72 = 168$$

Demak,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-56}{56} = -1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{168}{112} = 3$$

Berilgan sistemaning yechimi $(-1,2,3)$ bo‘ladi.

2-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini **Kramer usuli** yordamida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Bu sistema uchun Δ, Δ_{x1}, Δ_{x2}, Δ_{x3} determinantlarni tuzib, ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+8+9-8-3+12=14.$$

$\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun sistema aniq Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -32+8+30-8+40-24=14.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20+32+12-40-4+48=28.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8+80+72-64-24-30=42.$$

Demak, tenglamalar sistemasini yechimlari quyidagiga teng bo'ladi:

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \qquad x_2 = \frac{28}{14} = 2, \qquad x_3 = \frac{42}{14} = 3. \qquad (1;\ 2;\ 3)$$

Eslatma. n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

sistema n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$$

sonlar sistema koeffitsientlari

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Agar (3) sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots \dots & \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa unda (3) sistema yagona $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yechimga ega bo'lib

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bo'ladi. Bunda

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

3-bob. TEKISLIKDA TO‘G‘RI CHIZIQ

Tekislikda geometrik shakllar, jumladan to‘g‘ri chiziq tekislik nuqtalari to‘plami (nuqtalarning geometrik o‘rni) sifatida qaraladi.

Ma’lumki tekslikdagi nuqta uning koordinatalari x va y lar orqali (ya’ni (x,y) juftlik bilan to‘liq aniqlanadi. Agar bu o‘zgaruvchi (x,y) nuqtaning koordinatalari o‘zaro bog‘lanishda bo‘lsa, ular biror shaklni tasvirlashi mumkin. Bunda bog‘lanishni ifodalovchi tenglik geometrik shaklning tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chiziq tushunchasi sodda, ayni paytda muhim tushunchalardan biri hisoblanadi.

To‘g‘ri chiziqni tekislikdagi ikki nuqtadan baravar masofada joylashgan nuqtalar to‘plami (nuqtalarning geometrik o‘rni) deb qarash mumkin.

Ushbu bobda to‘g‘ri chiziq, uning turli tenglamalari, to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi vaziyati, to‘g‘ri chiziqqa oid masalalar bayon etiladi.

1-§. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi

Tekislikda ikkita

$$B_1=B_1=(x_1;y_1)\ va\ B_2=B_1(x_2;y_2)$$

nuqtani olib, bu nuqtalardan baravar uzoqlikda (masofada) joylashgan nuqtalardan birini

$$M=M(x:y)$$

deymiz (1-chizma)

Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan topamiz:

$$B_1M=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

$$B_2M=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

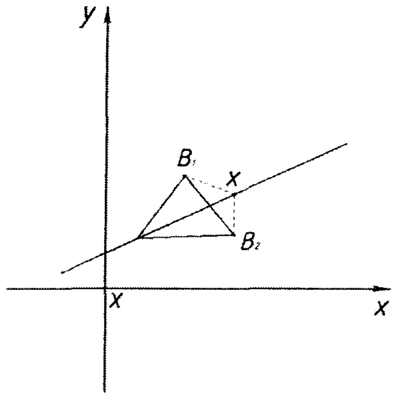
yuqorida aytilgan shart

$$B_1M=B_2M$$

ga ko‘ra

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

bo‘ladi.



1-chizma

Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko‘taramiz. Natijada

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

bo‘lib undan

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=$$
$$=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$$

ya’ni

$$-2xx_1+x_1^2-2yy_1+y_1^2+2xx_2-x_2^1+$$
$$+2yy_2+y_2^2=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Bu tenglikni quyidagicha

$$2(x_2-x_1)\cdot x+2(y_2-y_1)\cdot y+(x_1^2+y_1^1-x_2^2-y_2^2)=0$$

yozib, so'ng

$$A=2(x_2-x_1), \qquad B=2(y_2-y_1)$$
$$C=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$$

belgilashlarni bajarib, ushbu

$$Ax|By|C=0 \qquad (1)$$

tenglikka kelamiz. Bu x va y larga nisbatan birinchi darajali tenglamadir.

Demak, to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari x,y lar (1) tenglama bilan bog'langan.

Ushbu

$$Ay+By+C=0 \qquad (1)$$

tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi A,B,C sonlarga (koeffitsientlarga) bog'liq. Bu sonlar turli qiymatlarga ega bo'lganda turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Binobarin, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati ham shu koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi.

Endi (1) tenglamaning ba'zi xususiy hollarini qaraymiz:

1°. (1) tenglamada C=0 bo'lsin. Bu holda (1) tenglama.

$$Ax+By=0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshi (0; 0) nuqtadan o'tadi.

2°. (1) tenglamada B=0 bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax+C=0, \quad ya'ni \quad x=-\frac{C}{A}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq OY o'qiga parallel bo'ladi.

3°. (1) tenglamada A=0 bo'lsin. Bu haqda (1) tenglama

$$By+C=0, \quad ya'ni \quad y=-\frac{C}{B}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq *OX* o'qiga parallel bo'ladi.

4°. (1) tenglamada A=C=0 bo'lsin. Bu holda (1) chiziq

$$By=0, \ ya'ni \ y=0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq *OX* o'qi bo'ldi.

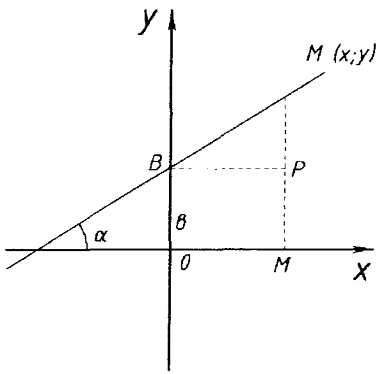
5°. (1) tenglamada B=C=0 bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax=0, \ ya'ni \ x=0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq *OY* o'qi bo'ladi.

2-§. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror to'g'ri chiziqni qaraylik. Bu to'g'ri chiziq *OY* o'qining *B(0;b)* nuqtasi orqali o'tib, *OX* o'qining musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin (2-chizma)



2-chizma

Bu to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M=M(x;y)$ nuqtani olib, bu nuqtadan *OX* o'qiga perpendekulyar tushiramiz, perpendekulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz. Ravshanki

$$OM_1=x,\ MM_1=y$$

bo'ladi.

B nuqtadan OX o'ngga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Uning MM_1 perpendikulyar bilan kesishgan nuqtasini P deylik.

Natijada to'g'ri burchakli BMP uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchakda

$$\angle MBA=\alpha, \quad BP=OM_1=x_1, \quad MP=MM_1-PM_1=y-b$$

bo'lib,

$$tg\alpha=\frac{MP}{BP}=\frac{y-b}{x}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$y-b=tg\alpha\cdot x,\ ya'ni\ y=tg\alpha\cdot x+b$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda, to'g'ri chiziqning OX o'qi bilan tashkil etgan burchakning tangensi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi va ko'pincha k bilan belgilanadi:

$$tg\alpha=k$$

Demak,

$$y=kx+b \qquad (2)$$

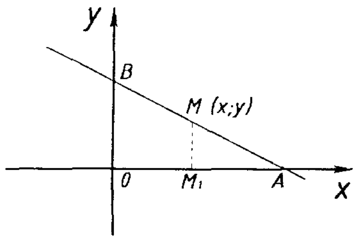
To'g'ri chiziqning (2) ko'rinishdagi tenglamasi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.

Bu holda to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati k hamda b lar bilan to'liq aniqlanadi.

3-§. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Tekislikda biror to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tmasdan, u OX o'qidan $a=OA$ kesmani, OY o'qidan esa $b=OB$ kesmani ajratsin (3-chizma)

To'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M=M(x;y)$ nuqtani olib bu nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar tushiramiz. Perpendikulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz.



3-chizma

Ravshanki,

$$OM_1=x,\ MM_1=y.$$

Endi OAB va M_1AM to‘g‘ri burchakli uchburchaklarni qaraymiz. Bu uchburchaklarning o‘xshashligidan foydalanib

$$\frac{MM_1}{OB}=\frac{M_1A}{OA}$$

bo‘lishini topamiz.

Ravshanki,

$$M_1A=OA-OM_1=a-x$$

unda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a}$$

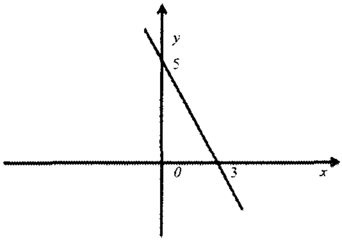
ya’ni

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

Demak, to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y lar (3) tenglama bilan bog‘langan. (3) tenglama to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

Masalan. To‘g‘ri chiziq Ox o‘qdan 3 ga, Oy o‘qdan 5 ga teng kesma ajratadi. Bu to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartida $a=3$ va $b=5$. Bu qiymatlarni $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari bo‘yicha tenglamasiga qo‘yamiz: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ ga ega bo‘lamiz (4-chizma).



4-chizma

4-§. To‘g‘ri chiziq haqidagi asosiy masalalar

1°. Berilgan nuqtadan (berilgan yo‘nalish bo‘yicha) o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq.

Tekislikda tayin $M(x_1,y_1)$ nuqta berilgan. Shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini topish talab etilsin. Uni

$$y=kx+b \qquad (1)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Madomiki, to‘g‘ri chiziq $M(x_1,y_1)$ nuqtadan o‘tar ekan, unda bu nuqtaning x_1 va y_1 koordinatalari $y=kx+b$ tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_1=kx_1+b \qquad (2)$$

Yuqoridagi (1) tenglikdan (2) tenglikni hadlab ayirib

$$y-y_1=kx+b-(kx_1+b)$$

quyidagi

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (3)$$

tenglamaga kelamiz. Bu berilgan $M(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M=M(3;2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-2=k(x-3)$$

ya'ni

$$y=k(x-3)+2$$

bo'ladi. Ravshanki, bu tenglama, ya'ni to'g'ri chiziq k ning qiymatlariga bog'liq. k ning turli qiymatlarida $M(3;2)$ nuqtada o'tuvchi turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi.

*2°. **Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq.***

Tekislikda $M(x_1,y_1)$ va $N(x_2;y_2)$ ikkita tayin nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqni (to'g'ri chiziq tenglamasini) topish talab etilsin.

Ma'lumki $M(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1)$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq $N(x_2;y_2)$ nuqtadan ham o'tsin deylik. Unda $N(x_2;y_2)$ nuqtaning koordinatalari x_2 va y_2 lar keying tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_2-y_1=k\cdot(x_2-x_1)$$

bu tenglikdan

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_2)$$

bo'lib, undan

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

(4) tenglama $M(x_1,y_1)$ va $N(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi.

Masalan, $M(2,2)$ va $N(1,3)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-2}{3-2}, \qquad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{1},$$

$$x-2=-y+2$$

bo‘ladi.

Bundan esa, $x+y-4=0$.

3°. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

Tekislikda ikkita

$$y=k_1x+b_1 \text{ va } y=k_2x+b_2$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni topish talab etilsin.

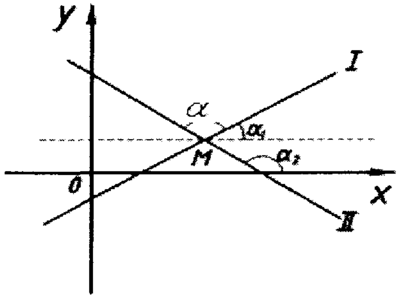
Ma’lumki,

$$k_1=tg\alpha,$$

birinchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti,

$$k_2=tg\alpha_2$$

ikkinchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti (5-chizma)



5-chizma

Odatda, I to'g'ri chiziqni M nuqta atrofida soat strelkasiga teskari tomonga uni II to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha burish natijasida hosil bo'lgan α burchak ($0 \leq \alpha < \pi$) ikki I va II to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi.

Chizmadan ko'rinadiki,

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

bo'ladi.

Agar

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

va

$$tg\alpha_1 = k_1, \quad tg\alpha_2 = k_2$$

bo'lishni e'tiborga olsak unda

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \qquad (5)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning teglamasini aniqlab beradi.

Demak, (5) formula yordamida ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak topiladi.

Masalan ushbu

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{5}, \qquad y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

to'g'ri chiziqlar uchun

$$k_1 = -\frac{1}{7}, \qquad k_2 = \frac{3}{4}$$

bo'lib ular orasidagi burchak α ning tangensi

$$tg\alpha = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4} \cdot (-\frac{1}{7})} = \frac{21 + 4}{28 - 3} = 1$$

bo‘ladi. Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak.

$$\alpha = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

bo‘ladi.

4° Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Tekislikda ikkita to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, birinchisining tenglamasi

$$y=k_1x+b_1$$

ikkichisining tenglamasi esa

$$y=k_2x+b_2$$

bo‘lsin.

Ravshanki, bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi α burchak (burchakning tangensi) uchun

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

bo‘ladi.

1) Aytaylik, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak nolga teng bo‘lsin:

$\alpha = 0°$ bu holda berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lib,

$$tg\alpha=tgo°=0$$

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0,$$

$$k_2-k_1=0,$$

$$k_1=k_2$$

bo‘ladi. Demak,

$$k_1=k_2$$

tenglik ikki to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro parallellik shartini ifodalaydi.

2) Aytaylik, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak 90° ga teng bo‘lsin:

$$\alpha = 90°$$

bu holda berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lib,

$$tg\alpha = tg90° = (\frac{1}{0})$$

bo‘lib,

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = (\frac{1}{0}) \qquad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad yoki \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo‘ladi. Demak,

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

tenglik ikki to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro perpendikulyarlik sharti-ni ifodalaydi.

5°. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

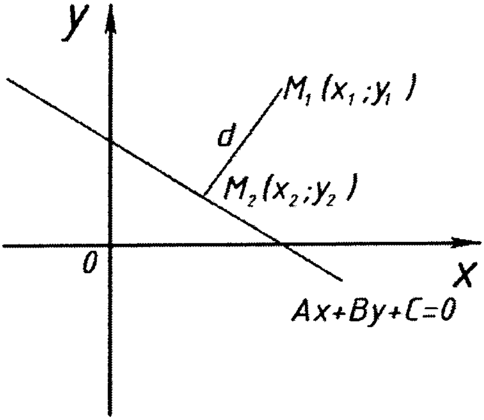
Tekislikda biror to‘g‘ri chiziq ushbu

$$Ax + By + C = 0$$

tenglama bilan berilgan bo‘lib, $M_1(x_1,y_1)$ nuqta esa shu to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsin M_1 nuqtada berilgan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi M_1 nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa deyiladi (6-chizma).

Aytaylik, $M_1(x_1,y_1)$ nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi $M_2(x_2,y_2)$ bo‘lsin.

Demak, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa M_1M_2 kesmaning uzunligi bo‘ladi. Uni d bilan belgilaymiz. Bu d masofa quyidagi



6-chizma

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

formula bilan topiladi.

Masalan. $M=M(3;2)$ nuqtadan

$$3x-4y+18=0$$

to‘g‘ri chiziqqacha masofa

$$d=\frac{|3\cdot 3-2\cdot(-4)+18|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{35}{5}=7$$

bo‘ladi.

6°. Ikki to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqlar ushbu

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lib, ular o‘zaro parallel bo‘lmasin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish talab etilsin.

Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini $M=M(x;y)$ bilan belgilaylik (7-chizma).

Madomiki, izlanayotgan nuqta bir vaqtda ikkala to'g'ri chiziqda yotar ekan, unda nuqtaning koordinatalari x va y lar

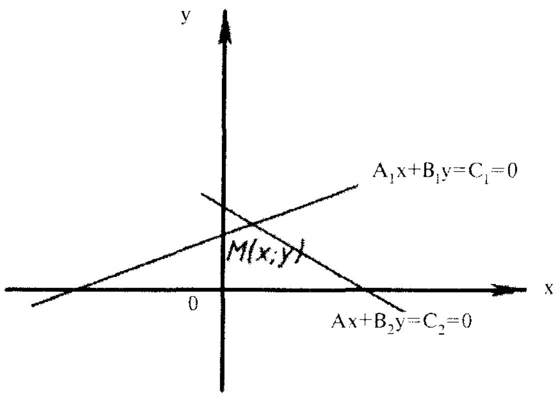
$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

tenglamalarni qanoatlantiradi. Shuning uchun bu x va y lar ushbu

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Demak, ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.



7-chizma

Misol. Berilgan $M(0,5)$ nuqtadan o'tuvchi hamda

$$3x-2y-6=0$$

to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Berilgan $M(0,5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi formulasiga ko'ra

$$y-5=k(x-0)$$

ya'ni

$$y=kx+5$$

bo'ladi. Endi berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$3x-2y-6=0$$

ni y ga nisbatan yechib topamiz.

$$-2y=6-3x, \qquad y=\frac{3}{2}x-3$$

Bu $y=kx+5$, $y=\frac{3}{2}x-3$ to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi shartidan

$$k\cdot\frac{3}{2}=-1, \quad ya'ni \quad k=-\frac{2}{3}$$

bo'lishini topamiz. Topilgan k ning o'rniga qo'ysak, unda

$$y=-\frac{2}{3}x+5$$

bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

4-bob. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu yerda A, B, C, D, E, F – haqiqiy o'zgarmas sonlar, bundan tashqari A, B yoki C lardan kamida bittasi noldan farqli.

Ushbu bobda sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda parabolalarni qaraymiz. Bu egri chiziqlarning tenglamalarini topib, ular yordamida geometrik xossalarini o'rganamiz.

1-§. Aylana va uning tenglamasi

Ta'rif. Markaz deb ataluvchi nuqtadan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning to'plamiga aylana deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida aylananing radiusi R va markazi A(a; b) nuqtada bo'lsin. N(x; y) aylanadagi ixtiyoriy nuqta. Aylananing ta'rifiga ko'ra: AN=R.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

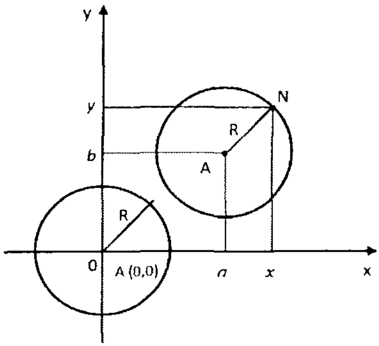
$$AN=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Tenglikning ikkita tomonini kvadratga ko'tarib, AN=R ekanligini e'tiborga olsak $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (1) kelib chiqadi (1-chizma).

N(x,y) aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun (1) tenglama aylananing markazi *A(a,b)* nuqtada bo'lgan kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Aylananing tenglamasi o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajalidir. Xususiy holda, agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lsa, uning tenglamasi:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$



1-chizma

(1) tenglamada qavslarni ochib va ba'zi bir ayniy almashtirishlarni bajarib, aylananing quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Bu tenglamani 2-tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan solishtirganda aylana tenglamasi uchun quyidagi ikkita shart bajarilganini ko'rish mumkin: 1) x, y koordinatalar ko'paytmasi bo'lgan $x\,y$ li had qatnashmayapti; 2) x^2 va y^2 lar oldidagi koeffitsientlar o'zaro teng, ya'ni $A=N\neq 0$; $B=0$. Bu holda (1) tenglama

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'lib aylanani tasvirlaydi.

Agar $a=-\dfrac{D}{A}$; $b=-\dfrac{E}{A}$; $R^2=\dfrac{D^2+E^2-AF}{A^2}$ (5) bo'lsa, (4) tenglama (2) tenglamaga aylanadi va, aksincha, (1) tenglamadan (5) formulalar yordamida (4) tenglamaga o'tish mumkin.

Mumkin bo'lgan uchta holni ko'ramiz:

1) $D^2+E^2-AF>0$. Bu holda $\left(x+\dfrac{D}{A}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{A}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-AF}{A^2}$

(6) tenglama va demak, unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglama

ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ nuqtada bo'lgan, radiusi $R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{A}$ dan iborat aylanani aniqlaydi.

2) $D^2+E^2-AF=0$. Bu holda (6) tenglama $\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ushbu tenglamani va demak, unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglamani haqiqiy yagona $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ nuqtani tasvirlaydi.

3) $D^2+E^2-AF<0$ bo'lsa, (6) yoki (4) tenglamaning radiusi mavhum bo'lib, bu holda haqiqatan aylana mavjud bo'lmasada, umumiylik nuqtayi nazaridan mavhum aylana deyiladi.

Ta'rif. Aylana bilan umumiy bitta $M(x_1;y_1)$ nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq aylanaga o'tkazilgan urinma deyiladi. Agar $(x_1;y_1)$ aylananing biror nuqtasining koordinatasi bo'lsa, u holda bu nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi (2) tenglama uchun $x\cdot x_1+y\cdot y_1=R^2$ (7) yoki (1) tenglama uchun $(x-a)\cdot(x_{11}-a)+(y-b)\cdot(y_1-b)=R^2$ (8) ko'rinishida yoziladi.

1-misol. Markazi (1;3) nuqtada va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Yechish. $a=1$; $b=3$, $R=3$. Bularni (1) formulaga qo'yamiz:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=9$$

2-misol. Markazi (−2;4) nuqtada bo'lgan va (3;−4) nuqtadan o'tadigan aylana tenglamasini tuzing.

Yechish. Radiusni aylana markazidan uning birorta berilgan nuqtasigacha bo'lgan masofa sifatida topamiz. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak:

$$R=\sqrt{(3+2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}$$

$$(x+2)^2+(y-4)^2=89.$$

3-misol. A(8;5) va B(−1;−4) nuqtalardan va markazi abssissalar o'qida bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Yechish. Aylananing markazi C(a;0) bo'lsin. U holda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra

$$\sqrt{(8-a)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(0+4)^2}.$$

Bu ifodani soddalashtirib, quyidagini topamiz: $18a=72 \Rightarrow a=4$; C(4;0)

$$R=AC=\sqrt{(8-4)^2+5^2}=\sqrt{41}.$$

Aylananing tenglamasi: $(x-4)^2+y^2=41.$

4-misol. Aylananing radiusini va markazining koordinatalarini toping:

$$x^2+y^2-6x-10y+13=0.$$

Yechish. Berilgan tenglamani ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$x^2+6x+y^2-10y+13=0$$

x^2+6x va y^2-10y ikki hadlarni to'la kvadratlargacha to'ldirib, ushbuni hosil qilamiz:

$$x^2+2\cdot 3x+3^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=25+9-13$$

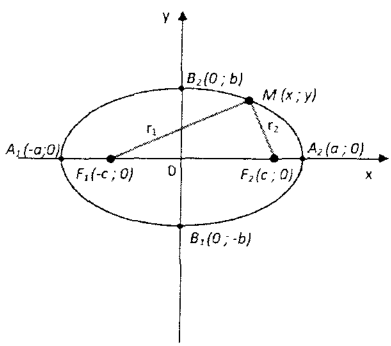
yoki $(x+3)^2+(y-5)^2=21$, bundan $a=-3$; $b=5$, $R=\sqrt{21}$.

2-§. Ellips va uning tenglamasi

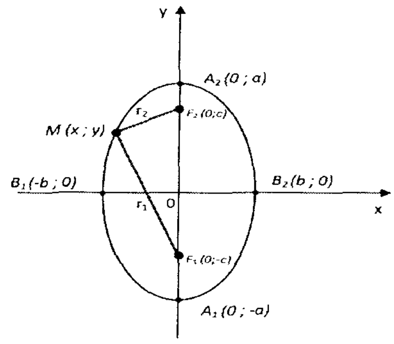
Ellips, bu qanday chiziq? U haqida tasavvurga ega bo'lish uchun, bir bo'lak ip uchlarini bir varaq qog'ozning ikki nuqtasiga mahkamlanadi va bu ipni qalam uchi bilan tarang tortiladi. (1,2-chizmalar).

Qalamni shu tarang holatda harakatlantirilsa, uning uchi qog'ozda chizadigan egri chiziq ellips bo'ladi.

Ta'rif. Ellips – bu barcha, shunday M nuqtalardan iborat bo'lgan yassi chiziqki, bunda M dan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas songa teng (bu kattalik $2a$, fokuslar orasidagi masofa $2c$ dan katta bo'lishi shart):



1-chizma



2-chizma

$$|MF_1|+|MF_2| = const = 2a \qquad (1)$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ni hosil qilamiz, demak, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ (2). Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ (3)

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $2a>2c$ bo'lgani uchun a^2-c^2 son musbat: $a^2-c^2=b^2$ (4) belgilash kiritamiz. U holda (3) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (5) ko'rinishni oladi.

(5) tenglama fokuslari Ox o'qda yotgan ellipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi. (1-chizma) (5) tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Ellipsning simmetriya o'qlarini ellips o'qlari deb, ularning kesishgan nuqtasini ellips markazi deb ataymiz. Ellips fokuslari joylashgan o'q fokal o'q deyiladi.

Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi deyiladi.

$F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalar ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari. Bu nuqtalar odatda ellipsning uchlari deyiladi. $AA_1=2a$ kesma ellipsning katta o'qi, $BB_1=2b$ kesma esa, ellipsning kichik o'qi deyiladi. a va b lar ellipsning yarim o'qlaridir.

Agar ellipsning fokuslari Oy o'qda yotsa (2-chizma), uning tenglamasi $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b)$ (6) ko'rinishda bo'ladi.

Ellipsga doir hamma masalalarda ellipsning simmetriya o'qlari koordinata o'qlari bilan ustma-ust tushadi deb faraz qilinadi.

1-misol. Agar ellipsning o'qlari $2a=8$ va $2b=6$ bo'lsa, fokuslari Ox o'qda bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechish. Ellipsning tenglamasini tuzish uchun a va b parametrlarni topamiz: $a=4$ va $b=3$. Bu qiymatlarni ellipsning (5) tenglamasiga qo'yib, ushbuni hosil qilamiz: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$

2-misol. Agar ellipsning ikki uchi $(-5;\ 0)$ va $(5;\ 0)$ nuqtalarda, fokuslari esa $(-3;\ 0)$ va $(3;\ 0)$ nuqtalarda joylashgan bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartdan $a=5$ va $c=3$ ekanligi kelib chiqadi. (4) formula bo'yicha $b^2=5^2-3^2=16$ ni topamiz. a^2 va b^2 ning qiymatlarini (5) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ni hosil qilamiz.

3-misol. Fokuslari $(0; -\sqrt{3})$ va $(0; \sqrt{3})$ nuqtalarda joylashgan, katta o'qi esa $4\sqrt{7}$ ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechish. Fokuslari Oy o'qda yotadi, demak $a=2\sqrt{7}$. (4) formulaga ko'ra $b^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=28-3=25$ ni topamiz. a^2 va b^2 ning qiymatlarini (6) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{28}=1$ ni topamiz.

4-misol. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ ellips berilgan. Ellipsning fokuslarining koordinatalarini va ular orasidagi masofani toping.

Yechish. Ellipsning tenglamasidan $a^2=12,\ b^2=3$ (4) formulaga ko'ra $c=\ =\pm 3$. Demak, fokuslarining koordinatalari (−3; 0) va (3; 0), ular orasidagi masofa esa $2c=2\cdot 3=6$.

3-§. Ellipsning ekssentritsiteti, fokal radiuslari, direktritsalari

Ellipsning qanday ko'rinishda bo'lishi, ellipsning ekssentritsiteti deb ataluvchi miqdor bilan aniqlanadi.

Ta'rif. Ellipsning ekssentritsiteti deb, fokuslar orasidagi (2c) masofaning katta o'qi (2a) nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \qquad (1)$$

yoki

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad (2)$$

$c<a$ bo'lgani uchun ellips ekssentritsiteti birdan kichik: $\varepsilon<1$. Ekssentritsitet ellipsning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan, (2-§ dagi 4) formuladan $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-\varepsilon$ kelib chiqadi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: ellipsning ekssentritsiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b katta yarim o'qi a dan shuncha kam farq qiladi, ya'ni ellips fokal o'q bo'ylab shuncha kam tortilgan bo'ladi.

(2) formuladan ko'rinadiki, b orta borsa ε kichiklasha boradi va, aksincha, b kamaya borsa ε kattalasha boradi. b ning limiti nolga intilsa $\varepsilon=1$ bo'lib, ellips ikkilangan kesmaga aylanadi.

Katta va kichik o'qlari teng bo'lgan ellips aylanadir, ya'ni b=a limit holda a radiusli aylana hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ yoki $x^2+y^2a^2$ (3). Bunda $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$ va ellips fokuslari go‘yo bitta nuqtada – aylana markazida birlashib ketadi. Aylana essentritsiteti nolga teng: $\varepsilon=\frac{0}{a}=0.$

Ellips va aylana orasidagi bog‘lanishni boshqa nuqtayi nazardan ham o‘ranish mumkin. Yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsni a radiusli aylananing proeksiyasi deb qarash mumkin.

Ta’rif. Ellipsning fokuslaridan ixtiyoriy M(x;y) nuqtasigacha bo‘lgan masofalar, M(x;y) nuqtaning fokal-radiuslari deyiladi va $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$ (3.4) formulalar bilan aniqlanadi (1-chizma). Ellipsning ta’rifiga ko‘ra: $r_1+r_2=2a$ (3.5)

Demak, ellipsning har qanday nuqtasi fokal radiuslarining yig‘indisi uning katta o‘qiga teng.

Ta’rif. Ellipsning direktritsalari deb ushbu $x=\frac{a}{\varepsilon}$ va $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ (6)

tenglamalar bilan aniqlanadigan ikki to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

Ellipsning direktritsalari y o‘qiga parallel va ellips markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ uzoqlikda turgan to‘g‘ri chiziqlardir. $\varepsilon<1$ bo‘lganligi uchun $\frac{a}{\varepsilon}>a$; demak, direktritsalar ellipsdan tashqarida joylashadi. (1-chizma). $|d_1d_2|$ – direktritsalar orasidagi masofa.

Markazning bir tomonida joylashgan direktritsa va fokus bir-biriga mos direktritsa va fokus deb ataladi.

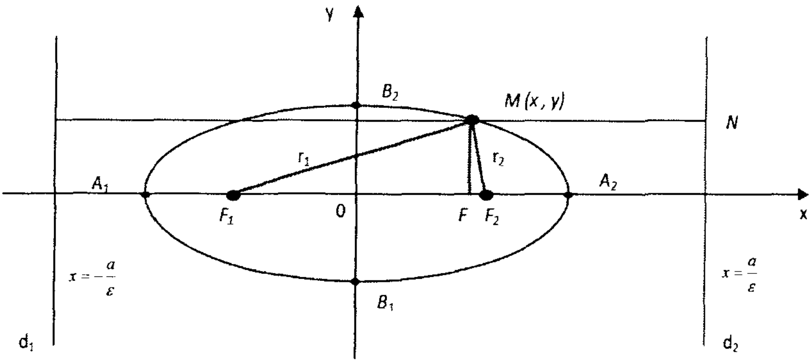
Ellipsning nuqtalari bir-biriga mos fokus va direktritsaga nisbatan ushbu xossaga ega: ellipsning har bir nuqtasidan fokusgacha olingan masofaning o‘sha nuqtadan mos direktritsagacha bo‘lgan masofaga nisbatan ellipsning ekssentritsitetiga baravar.

d_1 va d_2 direktritsalarning tenglamalari:

$$x=-\frac{a}{\varepsilon}\ \ va\ \ x=\frac{a}{\varepsilon} \qquad (6)$$

yoki

$$x = \frac{-a^2}{c} \quad va \quad x = \frac{a^2}{c} \qquad (7)$$



1-chizma

Ellipsning ixtiyoriy M(x;y) nuqtasidan fokusgacha bo‘lgan (r_1 yoki r_2) masofasining shu M(x;y) nuqtadan direktritsagacha (d_1 yoki d_2) bo‘lgan masofaga nisbati ellipsning ekssentritsitetiga teng, ya’ni:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \quad yoki \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (8)$$

Ellipsning o‘qlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lib, simetriya markazi biror (x_0, y_0) nuqtda bo‘lganda, uning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ (9) ko‘rinishda bo‘ladi.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning $M_1(x_1;\ y_1)$ nuqtasiga urinma bo‘lgan

to‘g‘ri chiziqning tenglamasi: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (10)

1-misol. Katta yarim o‘qi *a=6* va ε=0,5 bo‘lgan, ellipsning kanonik tenglamasini toping.

Yechish: $\varepsilon=\frac{c}{a}=0,5$. Demak, fokuslar orasidagi masofaning yarmi $c=a\cdot\varepsilon=6\cdot 0,5=3$. Ellips kichik yarim o‘qi $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}$

Ellipsning kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

2-misol. Ellipsning ekssentritsitetini toping: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Yechish. Ellipsning tenglamasidan: $a^2=36$; $b^2=16$.

2-§ dagi (4) formuladan: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ni topamiz.

Ekssentritsitetni (2) formulaga ko‘ra topamiz:

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16}{36}}=\frac{\sqrt{20}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Yoki (1) formulaga ko‘ra: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3-misol. M_1 (4; -2) nuqta orqali o‘tuvchi, kichik yarim o‘qi b=4 bo‘lgan ellipsning ekssentritsitetini toping.

Yechish. $b=4$ da ellipsning kanonik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1.$$

$M_1(4;-2)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi.

Demak, $\frac{4^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{16}=1$. Bunda $a^2=\frac{64}{3}$ va $b^2=16$. Ekssentritsitetini (2) formula yordamida topmiz:

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16\cdot 3}{64}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

4-misol. Ellipsning katta o'qi 12 ga teng, $x=\pm 9$ to'g'ri chiziqlar esa uning direktritsalari bo'lsin. Ellipsning kanonik tenglamasini va ekssentritsitetini toping.

Yechish. Ellipsning kanonik tenglamasini topish uchun a va b yarim o'qlarni bilish kerak. Shart bo'yicha $2a=12\Rightarrow a=6$, b yarim o'qni (7) formuladan foydalanib, quyidagicha topamiz:

$$x=\frac{a^2}{c}\Rightarrow c=\frac{a^2}{x}=\frac{36}{9}=4, \qquad b^2=a^2-c^2=36-16=20.$$

Ellips tenglamasi: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$

Ellips ekssentritsiteti: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

5-misol. Ellipsning kichik o'qi 8 ga, ekssentritsiteti $\varepsilon=0,6$ ga teng bo'lsa ellipsning kanonik tenglamasini va direktritsa tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra $2b=8\Rightarrow b=4$. Ekssentritsitetni (2) formulasiga asosan: $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\Leftrightarrow\sqrt{1-\frac{16}{a^2}}=0,6$. Bundan $a^2=25$.

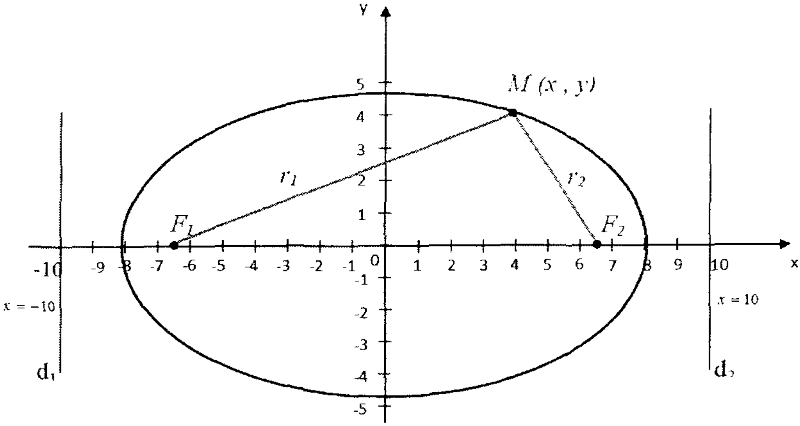
Ellips tenglamasi, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ko'rinishda bo'ladi.

$$c^2=a^2-b^2\Leftrightarrow c=\sqrt{25-16}=3$$

(7) formuladan foydalanib direktritsa tenglamasini topamiz:

$$x=\pm\frac{a^2}{c}\Leftrightarrow x=\pm\frac{25}{3}.$$

6-misol. Katta o'qi 16 ga, direktritsalar orasidagi masofa 20 ga teng bo'lsa, ellipsning kanonik tenglamasini va ekssentritsitetini toping.



2-chizma

Yechish. Shartga ko'ra $2b=16 \Rightarrow b=8$; (6)

formuladan: $x=\frac{a}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{12}{2}=\frac{8}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon=\frac{4}{3}$; (7)

formuladan: $x=\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow 10=\frac{64}{c} \Rightarrow c=6{,}4.$

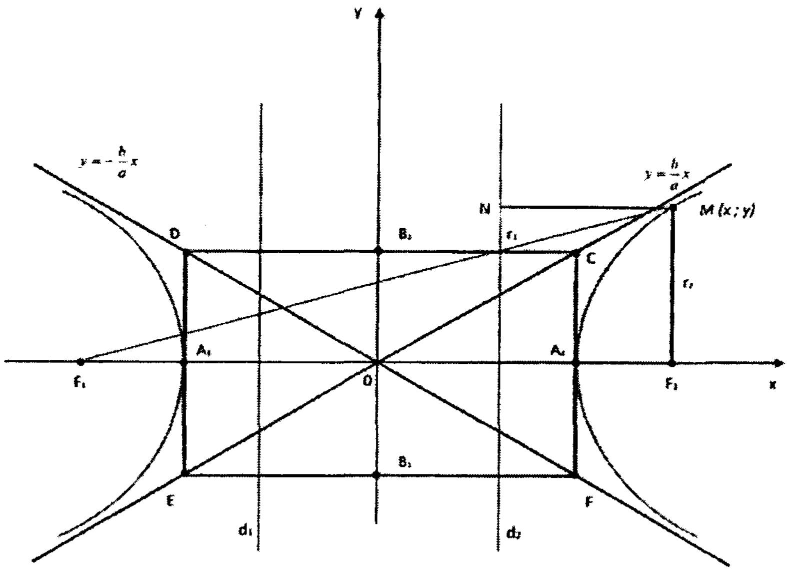
$b^2=a^2-c^2=64-40, \quad 96=23{,}04.$

Bundan, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{23{,}04}=1$ yoki $\frac{x^2}{64}+\frac{25y^2}{576}=1.$

Ellipsning chizmasini yasaymiz: $a=8$; $b=4{,}8$; $c=6{,}4$.

4-§. Giperbola va uning tenglamasi

Ta'rif. Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslari deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas bo'ladi (bu kattalik nolga teng bo'lmagan va fokuslari orasidagi masofalardan kichik bo'lgan shartda).



1-chizma

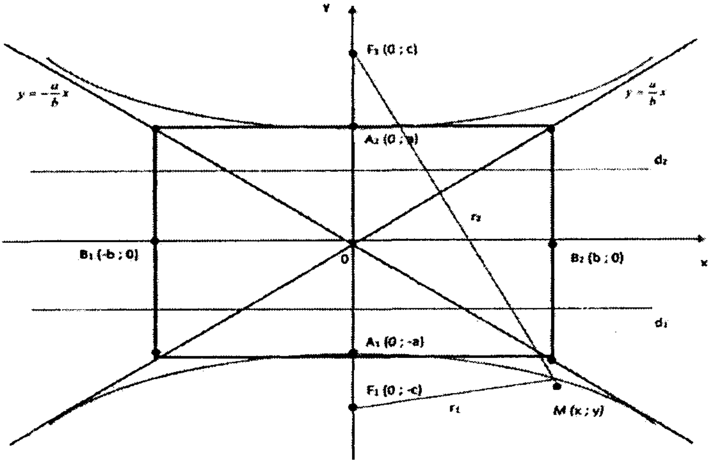
F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani 2c orqali, giperbolaning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduliga teng bo'lgan o'zgarmas miqdorni 2a orqali ($0<2a<2c$) belgilaymiz. Ellips holida bo'lgani kabi abssissalar o'qini fokuslar orqali o'tkazamiz, F_1F_2 kesmaning o'rtasini esa koordinatalar boshi deb qabul qilamiz (1-chizma).

Bunda fokuslar $F_1(-0; 0)$ va $F_2(0; 0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Fokuslari Ox o'qida yotgan giperbola (1-chizma) tenglamasini, uning ta'rifiga asoslanib keltirib chiqaramiz. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \qquad (1)$$

Soddalashtirishlarni bajargandan so'ng, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (2)$$



2-chizma

(2) tenglamada giperbola uchun 2a < 2c bo‘lgandan ayirma noldan kichik: $a^2-c<0$. Shuning uchun $c^2-a^2-b^2$ (3) deb olamiz. U holda (2) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4).

(4) tenglamaga fokuslari *Ox* o‘qida yotgan giperbolaning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Giperbola tenglamasida *y 0* deyilsa, $x=\pm a$ bo‘lib, giperbola *Ox* o‘qini $A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ nuqtalarda kesishini bildiradi. (4) tenglamada x=0 deyilsa $y^2=-b^2$ bo‘lib, bu esa giperbola Oy o‘qi bilan kesishmasligini bildiradi.

Lekin, $y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm bi$ mavhum bo‘lgani uchin, fokal o‘qqa perpendikulyar bo‘lgan simmitiriya o‘qi giperbolaning mavhum o‘qi (B_1B_2 kesma), giperbolaning fokuslari joylashgan o‘q fokal o‘q (F_1F_2 kesma) va fokal o‘qni odatda haqiqiy o‘q (A_1A_2 kesma) deyilib, A_1 va A_2 nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlari deb ataladi.

Agar giperbolaning fokuslari Oy o'qda yotsa (2-chizma), u holda uning tenglamasi $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (5). Bu giperbola (4) giperbolaga nisbatan qo'shma deyiladi.

1-misol. Agar giperbolaning haqiqiy o'qi 18 ga, mavhum o'qi esa 8 ga teng bo'lsa, fokuslari Ox o'qda yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish. Giperbolaning tenglamasini tuzish uchun a va b parametrlarni bilish zarur. Masalaning shartidan: $2a=18 \Rightarrow a=9$; $2b-8 \Rightarrow b-4$. Topilgan qiymatlarni (4) ga qo'ysak: $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$.

2-misol. Agar giperbolaning uchlari A1 (-2; 0) va A2 (2; 0) nuqtalarda joylashgan, fokuslari esa F1 (-4; 0) va F2 (4; 0) nuqtalarda joylashgan bo'lsa, giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartdan a=2, c=4 ekani kelib chiqadi. (3) formulaga ko'ra $b^2=4^2-2^2=21$. Bu qiymatlarni (4) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ ni hosil qilamiz.

3-misol. Giperbolaning tenglamasi berilgan $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{57}=1$. Uning uchlarining va fokuslarining koordinatalarini toping.

Yechish. Giperbolaning tenglamasidan: $a^2=64 \Rightarrow a=\pm 8$.

(3) formulaga ko'ra $c^2=a^2+b^2=64+57=121 \Rightarrow c=\pm 11$. Demak, giperbolaning uchlari (−8;0) va (8;0) nuqtalar, fokuslari esa (−11;0) va (11;0) nuqtalar ekan.

Giperbolaning shakli

(4) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ (2) tenglamalarni topamiz.

Bu tenglamalarning birinchisidan ushbu xulosalar chiqadi:

1) $|x|<a$ uchun y ning qiymati mavhum; demak, giperbola y o'qi bilan kesishmaydi va $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida nuqtalari bo'lmaydi.

2) $x=\pm<a$ bo'lganda, $y=0$ bo'ladi; demak, giperbola x o'qini ikkita A_1 va A_2 nuqtada kesadi; bu A_1 va A_2 nuqtalar koordinatalar boshida a masofada turadi va giperbolaning uchlari deb ataladi.

3) absolyut qiymati a dan katta bo'lgan x ning har bir qiymatiga y ning ikki qiymati to'g'ri keladi, bu qiymatlar bir-biridan ishoralari bilangina farq qiladi. Demak, giperbola x o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziqdir;

4) x cheksiz o'sganda y ham cheksiz o'sadi. Demak, (2) tenglamalarning ikkinchisi giperbolaning y o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziq ekanligini ko'rsatadi.

Giperbolaning hamma nuqtalari $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohadan tashqarida joylashganligidan va ordinatalar o'qiga simmetrikligidan, u cheksiz cho'zilgan ikki ayrim tarmoqdan iborat ekanligi bilinadi (1-chizma).

Giperbolaning asimptotalari

Funksiya argumenti x cheksizlikka intilganda funksiya grafigi biror to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashish xossasi uning grafigini chizishda muhum rol o'ynaydi.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ egri chiziqning M nuqtasidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan s masofa M nuqta cheksiz uzoqlashganda nolga intilsa, l to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya grafigining asimptota chiziqlari umuman uch xil ko'rinishda bo'ladi:

1) vertikal asimptota;

2) gorizontal asimptota;

3) $y=k+b$ ko'rinishdagi asimptota chizig'i.

$x\to a$ bo'lganda $|y|\to\infty$ bo'lsa, $x=a$ vertikal asimptota chizig'i; $y\to a$ bo'lganda $|x|\to\infty$ bo'lsa, $y=a$ gorizontal asimptota chizig'i bo'ladi.

Agar $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ (1), $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-k(x)$ (2) limitlar mavjud bo'lsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning og'ma asimptotasi deyiladi.

Agar $y=kx+b$ og'ma asimptota tenglamasini aniqlashda $k=0$ (xususiy holda $k=0$, $b=0$) bo'lsa, u holda $y=b$ (yoki $y=0$) to'g'ri chiziq gorizontal asimptota deyiladi.

Giperbolaning muhum xususiyatlaridan biri shundaki, uning nuqtalari uchlaridan uzoqlashib borgan sari asimptota deb atalgan to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib boradi.

Giperbolada ikkita asimptota bor bo'lib, uning tenglamalari, (4) uchun: $y=\pm\frac{b}{a}x$ (3), (5) tenglama uchun: $y=\pm\frac{a}{b}x$ (4).

1- va 2- chizmalarda giperbola va uning asimptotalarining o'zaro joylashishi ko'rsatilgan. Bu chizmalarda giperbola asimptotalarining qanday joylashishi ham ko'rsatilgan. Giperbolani yasashdan avval uning asimptotalarini yasash tavsiya qilinadi.

4-misol. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $8y+6x=0$ va $8y-6x=0$ hamda fokuslar orasidagi masofa 20. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartiga asosan va (3) formulaga ko'ra: $y=\pm\frac{6}{8}x$ Bundan: $b=\frac{6}{8}a$ (5)

Masala shartiga asosan:

$$2c=20\Rightarrow c=10;\ c^2=b^2+a^2\Rightarrow 100b^2+a^2 \qquad (6)$$

a va b larni (5) va (6) dan topamiz:

$$\begin{cases}100=a^2+\frac{36}{64}a^2\\ b=\frac{6}{8}a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=64\\ b^2=36\end{cases}$$

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

5-misol. Asimptotalar orasidagi burchak 150° va fokuslari abssissalar o'qida bo'lib, ular orasidagi masofa $2c=8\sqrt{3}$ bo'lsa giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Agar giperbola asimptotalari o'zaro 150° li burchak tashkil etsa, ularda bittasi bilan *Ox* o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak 30° bo'ladi.

Shuning uchun: $\frac{b}{a}=tg30^0 \Rightarrow a=\sqrt{3}b.$

a va *b* larning qiymatlarini aniqlaymiz. Masala shartiga asosan: c^2-48.

Bundan:

$$\begin{cases} a=\sqrt{3}b \\ a^2+b^2=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b^2+b^2=48 \\ a^2=3b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=12 \\ a^2=36 \end{cases}$$

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$.

Giperbolaning ekssentritsiteti, direktritsalari va fokal radiuslari

Ta'rif. Giperbolaning ekssentritsiteti deb, fokuslar orasidagi (2c) masofaning haqiqiy o'qi (2a) nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad (1)$$

$c<a$ bo'lgani uchun $e>1$ bo'ladi.

Ekssentritsitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan (3) formuladan quyidagi kelib chiqadi: $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=e^2-1$ (2)

Bundan ekssentritsiteti qanchalik kichik bo‘lsa, giperbolaning yarim o‘qlari nisbati $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo‘lishi ko‘rinadi.

Biroq $\frac{b}{a}$ nisbat giperbola asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi CDEF (1-chizma)ning shaklini, demak, giperbolaning o‘zining shaklini aniqlaydi. Giperbolaning ekssentritsiteti qanchalik kichik bo‘lsa, uning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi fokal o‘q yo‘nalishi bo‘yicha shunchalik tortilgan bo‘ladi.

Ta’rif. Giperbolaning direktritsalari deb, uning simmetriya markazidan $\pm\frac{a}{e}$ masofada haqiqiy o‘qiga perpendikulyar bo‘lib o‘tadigan (d_1 va d_2) to‘g‘ri chiziqlarga aytiladi.

Demak, giperbola direktritsalarining tenglamalari:

$$\begin{cases} x=\frac{a}{e} \\ x=-\frac{a}{e} \end{cases} \quad (3) \quad yoki \quad \begin{cases} x=\frac{a^2}{c} \\ x=-\frac{a^2}{c} \end{cases} \quad (4)$$

Giperbolaning markazidan bir tomonda yotgan direktritsasi va fokusi mos direktritsa va mos fokus deb ataladi.

Giperbolaning nuqtalari mos fokus va mos direktritsaga nisbatan ushbu xossaga ega: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo‘lgan masofaning mos direktritsagacha bo‘lgan masofaga nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, giperbolaning ekssentritsitetiga tengdir, ya’ni:

$$\frac{r_1}{d_1}=e \quad yoki \quad \frac{r_2}{d_2}=e$$

Ta’rif. Giperbolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan uning $F_1(c;0)$ va $F_2(c;0)$ fokuslarigacha bo‘lgan masofalari M nuqtaning fokal radiuslari deyiladi va ular shu

$$\begin{cases} r_1 = -a + ex \\ r_2 = a + ex \end{cases}$$ (o‘ng tarmog‘i uchun) va $$\begin{cases} r_1 = -a - ex \\ r_2 = a - ex \end{cases}$$ (chap tarmoq uchun) formulalar bilan aniqlanadi.

6-misol. Giperbolaning tenglamasi berilgan: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1.$ Uning ekssentritsitetini toping.

Yechish. Giperbola tenglamasidan: $a^2=36$, $b^2=12$. Ekssentritsitet yuqoridagi formulalardan kelib chiqqan holda hisoblanadi: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{7}{6}.$

7-misol. Haqiqiy o‘qining uzunligi 10 ga, ekssentritsiteti $\frac{6}{5}$ ga teng bo‘lib, fokuslari Ox o‘qda yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko‘ra: $2a=10 \Rightarrow a=5$ (1) tenglikdan foydalanib, quyidagini topamiz: $\frac{6}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 6.$

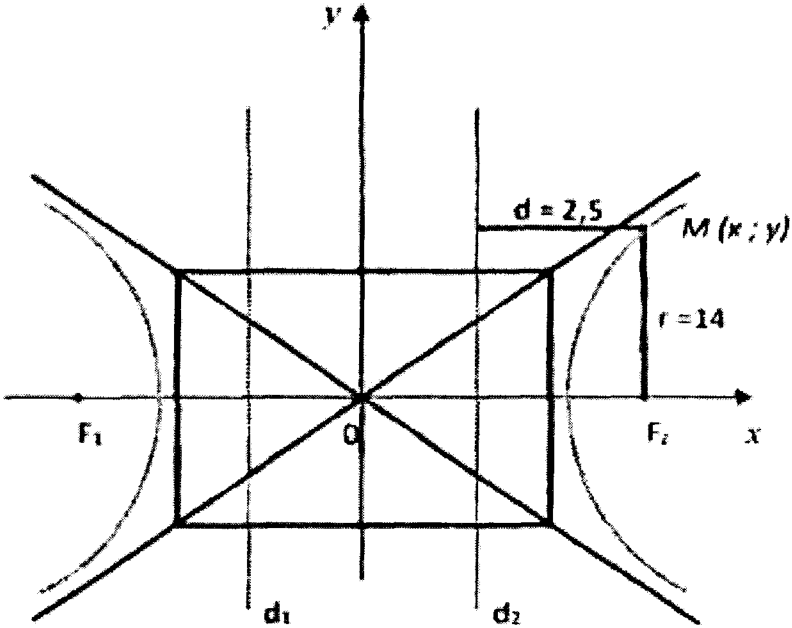
So‘ngra, $b^2=36-25=11$ ni topamiz. Shunday qilib izlanayotgan tenglama $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ ko‘rinishda bo‘ladi.

8-misol. Giperbolaning ekssentritsiteti $e = \frac{7}{5}$. $M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi r=14. Shu M nuqtadan u bilan bir tomonda yotuvchi direktritsagacha bo‘lgan masofani hisoblang.

Yechish. Masala shartiga asosan chizma chizamiz (3-chizma).

Agar $M(x;y)$ nuqtaning fokal radiusi r bo‘lsa, $M(x;y)$ nuqtadan M nuqta bilan bir tomonda yotuvchi direktritsagacha bo‘lgan masofani d desak, bular orasida $e = \frac{r}{d}$ munosabat mavjud. Bu munosabatdan:

$$d=\frac{r}{e}=\frac{14}{\frac{7}{5}}=\frac{5}{2}=2,5.$$



3-chizma

5-§. Parabola va uning tenglamasi

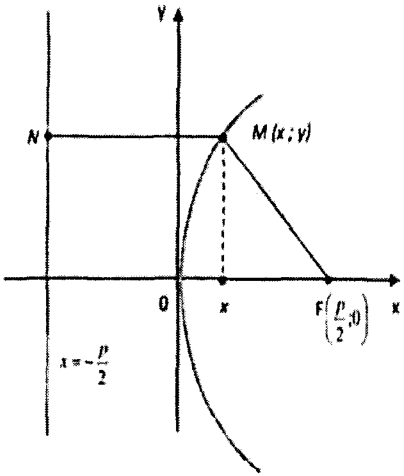
Uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola

Ta'rif. Parabola deb, tekislikning fokus deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlashgan barcha nuqtalar to'plamiga (fokus direktritsada yotmaydi deb faraz qilinadi) aytiladi.

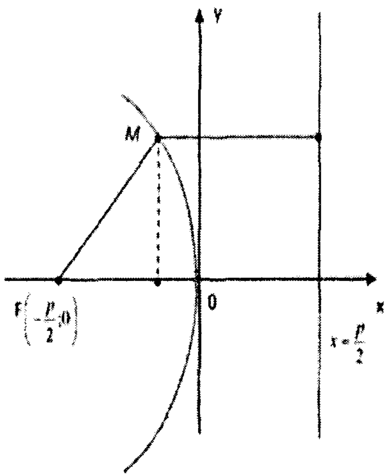
Fokusdan direktritsagacha bo'lgan masofani p orqali belgilaymiz. Bu kattalik *parabolaning parametri* deyiladi.

Parabola tenglamasini keltirib chiqarish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Fokusdan o'tuvchi hamda berilgan direktritsaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni abssissa o'qi deb, direktritsa va fokus orasidagi masofani ifodalovchi kesma o'rtasidan o'tuvchi hamda *Ox* o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni *Oy* o'qi deb olamiz. (1-chizma)

Shunday qilib, tanlangan sistemada fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, direktritsa tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$ (1) ko'rinishda bo'ladi.



1-chizma



2-chizma

M(x;y) parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda parabola ta'rifiga asosan: *MN=MF* (2). Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$ (3) bo'ladi.

(2) tenglikning har ikki tomonini kvadratga oshirib topamiz:

$y^2-2px(p>0)$ (4). Bu tenglama, simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari o'nga yo'nalgan, uchi koordinata boshida bo'lgan parabolaning kanonik (eng sodda) tenglamasi deyiladi (1-chizma).

Parabolaning simmetriya o'qi fokal o'q deyiladi. Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi.

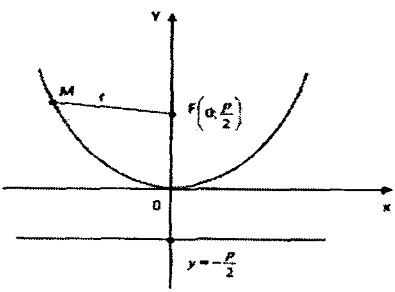
$M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi: $r = x + \dfrac{p}{2}$ $\quad$ *(5)*

Simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari chapga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola (2-chizma)ning kanonik tenglamasi $y^2=-2px(p>0)$ (5) ko'rinishda bo'ladi. Uning direktritsasi tenglamasi $x = \dfrac{p}{2}$ (7) bo'ladi.

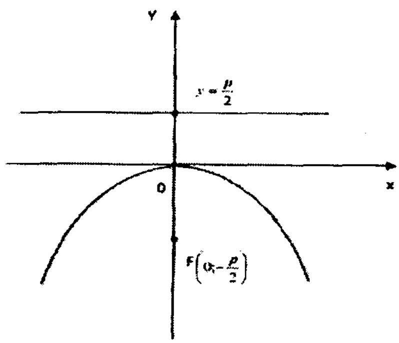
Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida joylashgan parabolaning tenglamasi (3-chizma).

$x^2=2py(p>0)$ (7) ko'rinishda bo'lib, uning direktritsasi tenglamasi $y = -\dfrac{p}{2}$ (8) bo'ladi. $M(x;y)$ nuqtaning fokal radiusi:

$$r = y + \frac{p}{2} \qquad (9)$$



3-chizma



4-chizma

Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari pastga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabolaning (4-chizma) kanonik tenglamasi $x^2=-2py(p>0)$ (10) ko'rinishda bo'lib, uning direktritsasi tenglamasi $y=\frac{p}{2}$ (11) bo'ladi.

Parabolaning ekssentritsiteti: $\varepsilon=1$, chunki $d=r$; $\varepsilon=\frac{r}{d}=1$.

1-misol. Agar uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabolaning fokusi $F(4;0)$ nuqtada yotsa, bu parabola tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabolaning fokusi Ox o'qining musbat yarim o'qida yotibdi.

Unda parabolaning tenglamasi $y^2=2px$ bo'ladi. $\frac{p}{2}=4\Rightarrow p=8$.

Demak, y^2-16x.

2-misol. Uchi koordinatalar boshida, Ox o'qiga nisbatan simmetrik va $A(2;2)$ nuqtadan o'tuvchi parabolaning tenglamasi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra izlanayotgan parabola $(2;-2)$ nuqtadan o'tadi. Binobarin, bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi.

$$(-2)^2=2p\cdot 2\Rightarrow p=1.$$

Demak, parabolaning tenglamasi $y^2=2\cdot 1\cdot x=2x$ bo'ladi.

3-misol. Parabola tenglamasi $y^2=10x$ berilgan. Uning direktritsasi tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabola tenglamasi $y^2=10x$ dan $2p=10\Rightarrow 10p=5$.

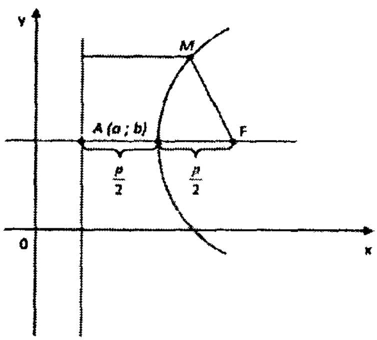
$x=-\frac{p}{2}$ bo'lgani uchun $x=-\frac{5}{2}$ yoki $2x+5=0$ direktritsa tenglamasidir.

4-misol. Uchi koordinatalar boshida, direktritsasining tenglamasi $x=-4$ bo'lgan parabola fokusining koordinatalarini yozing.

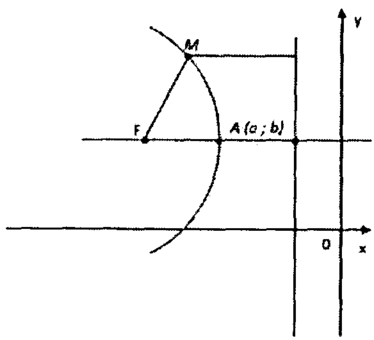
Yechish. Koordinatalar boshidan, direktritsagacha bo‘lgan masofa koordinatalar boshidan fokusgacha bo‘lgan masofaga, ya’ni $\frac{p}{2}$ ga teng. $x=-4$ direktritsa tenglamasidan $\frac{p}{2}=4$ ekani kelib chiqadi. $x=-\frac{p}{2}$ direktritsa tenglamasiga $y^2=2px$ parabola mos keladi, uning fokusi $F(4;0)$.

Uchi siljigan parabola

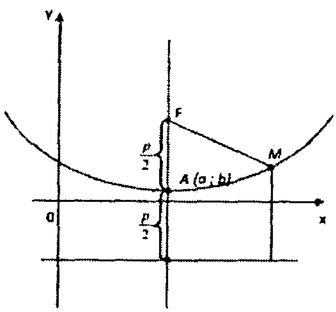
Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o‘qi Ox o‘qqa parallel va tarmoqlari o‘ngga yo‘nalgan parabola tenglamasi (5-chizma):



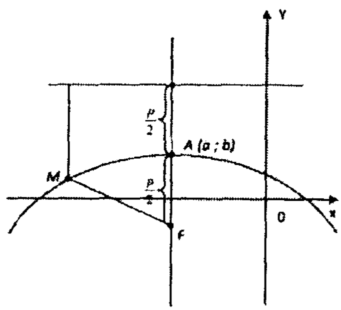
5-chizma



6-chizma



7-chizma



8-chizma

$(y-b)^2=2p(x-a)$ (1) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel va tarmoqlari chapga yo'nalgan parabola tenglamasi (6-chizma):

$(y-b)^2=-2p(x-a)$ (2) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan parabola tenglamasi (7-chizma):

$(x-2)^2=-2p(y-b)$ (3) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari pastga yo'nalgan parabola tenglamasi (8-chizma):

$(x-a)^2=-2p(y-b)$ (4) ko'rinishda bo'ladi.

Tenglamalarning har birida parabolaning parametri $p>0$ parabola fokusidan uning direktritsasigacha bo'lgan masofa.

5-misol. Uchi A(1; 3) nuqtada bolib, M(5; 7) nuqtadan o'tuvchi, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel bo'lgan parabola tenglamasini toping.

Yechish. Shartga muvofiq, izlanayotgan parabola tenglamasi (1) ko'rinishda bo'ladi, chunki M(5; 7) nuqta parabolaning uchidan o'ngda joylashgan. Demak, parabolaning tarmoqlari o'ngga yo'nalgan. p parametrning qiymatini hisoblash uchun A va M nuqtalarning koordinatalarini (1) tenglamaga qo'yamiz:

$(7-3)^2=2p(5-1)\Rightarrow 16=8p\Rightarrow p=2$. Topilgan $p=2$ qiymatni va A uchning koordinatalarini (1) tenglamaga qo'yib, izlanayotgan tenglamani hosil qilamiz: $(y-3)^2=4(x-1)$.

6-misol. Uchi $A(3;-3)$ nuqtada, fokusi $F(8;2)$ nuqtada bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko'ra izlanayotgan parabolaning tenglamasi (1) ko'rinishda bo'ladi. Parabolaning o'qi Ox o'qqa parallel bo'lgani uchun (uchining va fokusining) ordinatalari bir xil va demak, Ox o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda yotadi), parabolaning tarmoqlari esa o'ngga yo'nalgan (parabolaning fokusi uchidan o'ngda joylashgan). Parabolaning uchi bilan fokusi orasidagi masofa $\frac{p}{2}$ ga teng bo'lgani uchun

$$\frac{p}{2}=8-3=5 \Rightarrow p=10.$$

A uchining koordinatalarini va *p* ning topilgan qiymatini (1) tenglamaga qo'yib, $(y+3)^2=10(x-3)$ ni hosil qilamiz.

7-misol. $y^2+4y-24x+76=0$ parabola uchi va fokusining koordinatalarini toping. Direktritsasining tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabolala tenglamasini (1) ko'rinishga keltiramiz:

$$y^2+4y=24x-76 \Rightarrow y^2+2\cdot 2y+2^2=24x-72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+2)^2=24(x-3).$$

Bundan parabola uchining koordinatalari: $A(3;-2)$; $2p=24 \Rightarrow p=12$.

Parabola uchidan fokusigacha bo'lgan masofa $\frac{p}{2}=\frac{12}{2}=6$ ga teng.

Fokusning abssissasi: $3+\frac{p}{2}=3+6=9$. Fokus parabola uchidan o'ngda joylashgan, chunki parabolaning tarmoqlari o'ngga yo'nalgan; fokusning ordinatasi parabola uchining ordinatasiga teng, chunki parabolaning o'qi *Ox* o'qqa parallel, u holda fokusning koordinatalari F(9; -2) bo'ladi.

Parabolaning tarmoqlari o'ngga yo'nalgani uchun direktritsa parabola uchidan chaproqdan o'tadi. U koordinatalar boshidan ham chapdan o'tadi, chunki uchidan *Oy* o'qqacha masofa 3 ga teng, uchidan direktritsagacha bo'lgan masofa 6 ga teng. Direktritsaning abssissasi minus ishora bilan olingan ushbu ayirmaga teng: $\frac{p}{2}-3=6-3=3$.

Shuning uchun direktritsaning tenglamasi: $x=-3$.

5-bob. FUNKSIYA VA UNING LIMITI

1-§. To'plamlar va ular ustida amallar

To'plam va uning elementi. Chekli va cheksiz to'plamlar

Matematikada ko'pincha biror obyektlar gruppalarini yagona butun deb qarashga to'g'ri keladi: 1 dan 10 gacha bo'lgan sonlar bir xonali sonlar, uchburchaklar, kvadratlar va shu kabilar. Bunday turli majmualar to'plamlar deb ataladi.

To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir va shuning uchun u boshqa tushunchalar orqali ta'riflanmaydi. Uni misollar yordamida tushuntirish mumkin. Jumladan biror sinfdagi o'quvchilar to'plami haqida, natural sonlar to'plami haqida gapirish mumkin.

Ba'zi hollarda to'plamlar lotin alfavitining A, B, C,..., Z harflari bilan belgilanadi. Birorta ham obyektni o'z ichiga olmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ belgi bilan belgilanadi.

To'plamni tashkil etuvchi obyektlar uning elementlari deyiladi. To'plam elementlarini lotin alfavitining kichik harflari a, b, c,...,z bilan belgilash qabul qilingan.

To'plamdagi elementlarning ushbu to'plamga qarashli ekanligini quyidagicha belgilaymiz.

$a \in A$ a element A to'plamga qarashli. Agar biror element to'plamga qarashli bo'lmasa. U holda $\notin$ dan foydalaniladi. Masalan, $A = \{1, a, b, c, 4\}$ bo'lsin u holda quyidagilar o'rinli $1 \in A$, $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $4 \in A$, $5 \notin A$, $d \notin A$,m $k \notin A$.

Agar to'plam elementlarini sanash mumkin bo'lsa bunday to'plam cheklangan to'plam deyiladi. Agar ularni sanash mumkin bo'lmasa bunday to'plam cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan, haftadagi kunlar to'plami chekli, to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami esa cheksizdir.

Matematikada bunday to'plamlar uchun maxsus belgi qabul qilingan: N harfi bilan natural sonlar to'plami belgilanadi, Z — butun sonlar to'plami, Q — rasional sonlar to'plami, R — haqiqiy sonlar to'plami.

[0; 1] sigment kantinium quvvatli to'plamdir. Unga ekvivalent to'plamlar cheksiz to'plam hisoblanadi. Ixtiyoriy kichik kesma ustidagi nuqtalar to'plami kantinium quvvatli to'plamga ekvivalent to'plamdir.

Doiraning markazidan to'g'ri chiziqlar o'tkazsak doiraning bir nechta nuqtalari to'g'ri chiziqning bitta nuqtasiga akslanadi. Bu akslantirishda doira nuqtalari to'plami to'g'ri chiziq nuqtalari to'plamiga akslantirish bo'lib, bu to'plamlar katinium quvvatli to'plamdir. Ya'ni cheksiz to'plamdir. Ikkita A va B to'plam berilgan bo'lsin biror f qoida bo'yicha A to'plamning har bir x elementiga B to'plamning y elementini mos keltiraylik. U holda shu qoidani A to'plamni B to'plamga akslantirish deyiladi. Quyidagicha belgilanadi:

$$f: A \rightarrow B \text{ yoki } A \xrightarrow{f} B$$

To'plam o'z elementlari bilan aniqlanadi, ya'ni agar ixtiyoriy obyekt haqida u biror to'plamga tegishli yoki tegishli emas deyish mumkin bo'lsa, bu to'plam berilgan deb hisoblanadi.

To'plamni uning barcha elementlarini sanab ko'rsatish bilan berish mumkin. Masalan, agar biz A to'plam 3, 4, 5 va 6 sonlardan tashkil topgan desak, biz bu to'plamni bergan bo'lamiz, chunki uning barcha elementlarini sanab ko'rsatildi. Uni bunday yozish mumkin: A={3, 4, 5, 6} bunda sanab ko'rsatilgan elementlar katta qavslar ichiga yoziladi.

Xarakteristik xossa – bu shunday xossaki, to'plamga tegishli har bir element bu xossaga ega bo'ladi va unga tegishli bo'lmagan birorta ham element bu xossaga ega bo'lmaydi.

Masalan, ikki xonali sonlar to'plami A ni qaraylik. Mazkur to'plamning ixtiyoriy elementi ega bo'lgan xossa – «ikki xonali son bo'lishlikdir». Bu xarakteristik xossa biror-bir obyektning A to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi haqidagi masalani yechish imkonini beradi. Masalan, 21 soni A to'plamga tegishli, chunki u ikki xonali son, 145 soni esa A to'plamga tegishli emas, chunki u ikki xonali son emas.

Ta'rif. Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bo'lsa, B to'plam A to'plamning qism to'plami deyiladi.

Agar B A to'plamning qism to'plami bo'lsa, $B \subset A$ kabi yoziladi va bunday o'qiladi: «B A ning qism to'plami», «B to'plam A ga kiradi».

Ta'rif. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, A va B to'plamlar teng deyiladi.

Agar A va B to'plamlar teng bo'lsa, u holda $A = B$ kabi yoziladi.

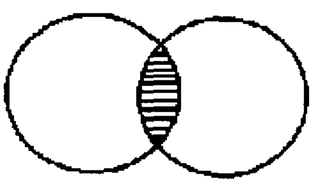
Kesishmaydigan to'plamlar umumiy nuqtaga ega bo'lmagan ikkita doira yordamida tasvirlanadi.

To'plamlar kesishmasi

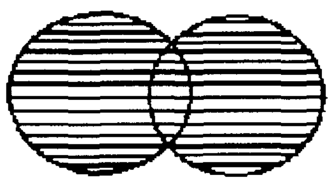
Ta'rif. A va B to'plamlarning kesishmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u faqat A va B to'plamga tegishli elementlarnigina o'z ichiga oladi.

A va B to'plamlarning kesishmasi $A \cap B$ kabi belgilanadi. Agar A va B to'plamlarni Eyler doiralari yordamida tasvirlasak, u holda berilgan to'plamlarning kesishmasi shtrixlangan soha bilan tasvirlanadi (1-chizma).

Agar A va B to'plamning elementlari sanab ko'rsatilgan bo'lsa u holda $A \cap B$ ni topish uchun A va B ga tegishli bo'lgan elementlarni, ya'ni ularning umumiy elementlarini sanab ko'rsatish yetarli.



1-chizma



2-chizma

Endi A juft natural sonlar to'plami va B 4 ga karrali natural sonlar to'plamining kesishmasi qanday to'plam ekanini aniqlaymiz. Berilgan A va B to'plamlar cheksiz to'plamlar va B to'plam A to'plamning qism to'plami. Shuning uchun A to'plamga va B to'plamga tegishli elementlar B to'plamning elementlari bo'ladi. Demak, $A \cap B = B$.

To'plamlarning birlashmasi

Ta'rif. A va B to'plamlarning birlashmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u faqat A yoki B to'plamning elementlarini o'z ichiga oladi.

A va B to'plamlarning birlashmasi $A \cup B$ kabi belgilanadi. Agar kesishuvchi A va B to'plamlarni Eyler doiralari yordamida tasvirlasak u holda ularning birlashmasi shtrixlangan soha bilan tasvirlanadi (2-chizma).

Endi A juft natural sonlar to'plami va B 4 ga karrali natural sonlar to'plamining birlashmasi qanday to'plam ekanini aniqlaymiz.

Ilgariroq $B \cap A$ ekani aniqlangan edi. Shuning uchun $A \cup B$ to'plamga tegishli elementlar A to'plamning elementlari bo'ladi. Demak mazkur holda $A \cup B = A$.

To'plamlar kesishmasi va birlashmasi qonunlari

1. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun to'plamlar kesishmasi va birlashmasining o'rin almashtirish qonunini ifodalovchi $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

2. To'plamlar birlashmasi va kesishmasi uchun gruppalash qonuni ham o'rinli, ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ tengliklar bajariladi.

Gruppalash qonunlarini Eyler doiralari yordamida ko'rgazmali tasavvur qilish mumkin. Masalan, to'plamlar kesishmasining gruppalash qonunini ko'rib chiqaylik. A, B va C to'plamlarni juft-jufti bilan kesishadigan uchta doira ko'rinishida tasvirlaymiz.

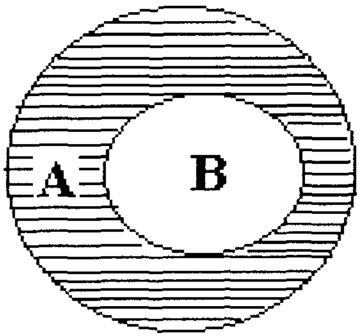
3. Taqsimot xossasi:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Qism to'plamning to'ldiruvchisi

Eyler doiralari yordamida mazkur vaziyat 3-chizmadagi kabi tasvirlanadi, bunda A to'plamdan B qism to'plam chiqarib tashlangandan keyin qolgan qism – bu shtrixlangan qismdir. Bu qism B to'plamning A to'plamgacha to'diruvchisi deyiladi.



3-chizma

Ta'rif. B⊂A bo'lsin. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlarnigina o'z iciga olgan to'plam B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisi deyiladi.

B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisi (B ⊂ A shart bajarilganda) A\B kabi belgilanadi.

Qism to'plamning to'ldiruvchisini topishda foydalaniladigan operatsiya ayirish amali deyiladi.

Agar A va B to'plamlar elementlari sanab ko'rsatilgan bo'lsa, u holda A\B ni topish uchun A to'plamga tegishli bo'lgan va B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlarni sanab ko'rsatish yetarli.

$$B'_A = A \setminus B.$$

To'plamlarning dekart ko'paytmasi

To'plam elementlarining kelish tartibi muhim bo'lgan hollarda, matematikada elementlarning tartiblangan naborlari haqida gap boradi. Mazkur masalada biz tartiblangan juftliklar bilan ish ko'ramiz.

a va b elementlardan tashkil topgan tartiblangan juftlikni (a, b) bilan belgilash qabul qilingan, bunda a element juftliklarning birinchi koordinatasi (komponentasi), b element esa bu juftlikning ikkinchi koordinatasi (komponentasi) deyiladi.

(a, b) va (c, d) juftliklarda a = c va b = d bo'lgan holdagina bu juftliklar teng bo'ladi.

Ikkita turli to'plamlar elementlaridan ham tartiblangan jutliklar hosil qilish mumkin. Masalan, A = {1, 2, 3} va B = {3, 5} to'plamlarni olamiz va mumkin bo'lgan tartiblangan juftliklarni shunday hosil qilamizki, jutliklarning birinchi komponentasi A to'plamdan, ikkinchi komponentasi esa B to'plamdan tanlab olinsin. Ushbu to'plamga ega bo'lamiz:

$$\{(1,3),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,3),\ (3,5)\}$$

Formal xarakterga ega bo'lgan ushbu masalaga konkret ma'no berish mumkin bo'lgan barcha ikki xonali sonlarni shunday hosil qilingki, bunda o'nliklar raqami 1, 2, 3 raqamlardan tanlab olinadi, birliklar raqami esa 3 yoki 5 raqami bo'lishi mumkin.

Ta'rif. A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deb birinchi komponentasi A to'plamga, ikkinchi komponentasi B to'plamga tegishli bo'lgan juftliklar to'plamiga aytiladi, ya'ni,

$$A\cdot B = \{(x,y)\colon x\in A,\ y\in B\}.$$

A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi A·B kabi belgilanadi.

Dekart ko'paytmani topishda qo'llaniladigan amal to'plamlarning Dekart ko'paytirish deyiladi.

Ta'rif. A_1, A_2, ..., An to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deb uzunligi n bo'lgan shunday kortejlar to'plamiga aytiladiki, bunda kortejning birinchi komponentasi A_1 to'plamga, ikkinchi komponentasi A_2 to'plamga,..., n-komponentasi A_n to'plamga tegishli bo'ladi.

A_1, A_2, ..., An to'plamlarning Dekart ko'paytmasi A_1x A_2 x ... x A_n kabi belgilanadi.

2-§. Funksiya tushunchasi

1°. Funksiya ta'rifi, berilish usullari. E to'plamni F to'plamga akslantirish

$$f\colon E\to F$$

ni o'rgangan edik.

Endi E=F, F=R deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo'yuvchi

$$f:F\to R\ (x\xrightarrow{f}y)$$

akslantirishga kelamiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Shuni e'tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma'lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik, $X\subset R$, $Y\subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x\in X$, $y\in Y$.

Ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra to'plamdan bitta Y son y mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda *funksiya berilgan* (aniqlangan) deyiladi va

$$f:x\to y \text{ yoki } y=f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda X – funksiyaning aniqlanish to'plami (sohasi), Y – funksiyaning o'zgarish to'plami (sohasi) deyiladi. x – erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, y esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Misollar. 1. $X=(-\infty,+\infty)$, $Y=(0,+\infty)$ bo'lib, f qoida

$$f:x\to y=x^2+1$$

bo'lsin. Bu holda har bir $x\in X$ ga bitta $x^2+1\in Y$ mos qo'yilib,

$$y=x^2+1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

2. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu *Dirixle funksiyasi* deyilib, u kabi belgilanadi:

$$D(x)=\begin{cases}1\ , \ agar\ x\ \ ratsional \text{ son bo'lsa},\\ 0\ , \ agar\ x\ \ irratsional \text{ son bo'lsa}\end{cases}$$

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya uchta: X to'plam, Y to'plam va har bir $x\in X$ ga bitta $y\in Y$ ni mos qo'yuvchi f qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0\in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y=f(x)$ *funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati* deyiladi va $f(x_0)=y_0$ kabi belgilanadi.

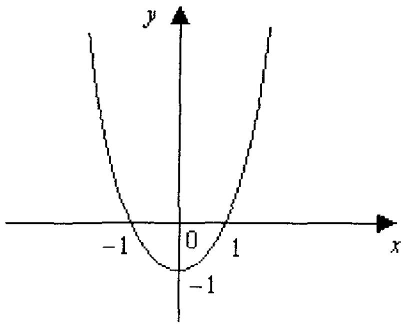
Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi $(x,f(x))$ nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x,f(x))\}=\{(x,f(x))|x\in X,\ f(x)\in Y\}$$

to'plam $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi. Masalan,

$$y=x^2-1\ (x\in X=[-2,2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma

Funksiya ta'rifidagi f qoida turlicha bo'lishi mumkin.

a) Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu *funksiyaning analitik usulda berilishi* deyiladi.

Masalan,

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, uning aniqlanish to'plami

$$X=\{x\in R|-1\le x\le 1\}=[-1,1]$$

bo'ladi.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

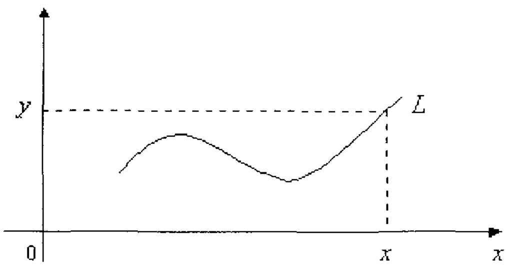
Bu funksiyaning aniqlanish to'plami $X=R\setminus\{0\}$ bo'lib, qiymatlar to'plami esa $Y=\{-1,1\}$ bo'ladi. Odatda bu funksiya y=singx kabi belgilanadi.

b) Ba'zi hollarda $x\in X$, $y\in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1, t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

t – vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
T – harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog'lanishni ifodalaydi, bunda t – argument, T esa t ning funksiyasi bo'ladi.

v) x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan L egri chiziq berilgan bo'lsin. Aytaylik, [a,b] segmentdagi har bir nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyar L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x\in[a,b]$

nuqtadan perpendikulyar chiqarib, uning L chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqtaga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo'yamiz. Natijada har bir $x \in [a,b]$ ga bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x bilan y orasidagi bog'lanishni berilgan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1 \subset R$ to'plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2 \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar

1) $X_1 = X_2$

2) $\forall x \in X_1$ da $f_1(x) = f_2(x)$

bo'lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o'zaro teng deyiladi va $f_1(x) = f_2(x)$ kabi belgilanadi.

2°. ***Funksiyaning chegaralanganligi.*** $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan* deyiladi. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \geq m$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda quyidan chegaralangan* deyiladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda chegaralangan* deyiladi.

1-misol. Ushbu $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya R da chegaralangan bo'ladi.

◀ Ravshanki, $\forall x \in R$ da $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4} > 0.$

Demak, berilgan funksiya R da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya uchun

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leq 1 + \frac{x^2}{1+x^4}$$

bo'ladi. Endi

$$0 \le (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow 2x^2 \le x^4 + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1} \le \frac{1}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz: $f(x) \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Bu esa $f(x)$ funksiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, berilgan funksiya R da chegaralangan. ►

Ta'rif. Agar har qanday $M>0$ son olinganda ham shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsa va

$$f(x_0)>M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* X *to'plamda yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

3°. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $T(T \neq 0)$ son mavjud bo'lsaki, $\forall x \in X$ uchun

1) $x-T \in X$, $x+T \in X$

2) $f(x-T)=f(x)$

bo'lsa, $f(x)$ *davriy funksiya* deyiladi, T son esa $f(x)$ *funksiyaning davri* deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ funksiyalar davriy funksiyalar bo'lib, ularning davri 2π ga, $f(x)=\mathrm{tg}x$, $f(x)=\mathrm{ctg}x$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri $T(T \neq 0)$ bo'lsa, u holda

$$T_n=T_n(n=\pm 1, \pm 2,)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

b) Agar T_1 va T_2 sonlar $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $T_1+T_2 \neq 0$ hamda $T_1-T_2(T_1 \neq T_2)$ sonlar ham $f(x)$ funksiyaning davri bo'ladi.

v) Agar $f(x)$ hamda $g(x)$ lar davriy funksiyalar bo'lib, ularning har birining davri $T(T \neq 0)$ bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'lib, T son ularning ham davri bo'ladi.

2-misol. Ixtiyoriy $T(T\neq 0)$ ratsional son Dirixle funksiyasi

$$D(x)=\begin{cases}1, & agar \quad x \quad \text{ratsional son bo'lsa},\\ 0, & \text{agar} \quad x \quad \text{irratsional son bo'lsa}\end{cases}$$

ning davri bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Aytaylik, $T(T\neq 0)$ ratsional son bo'lsin. Ravshanki, $\forall x\in R$ irratsional son uchun $x+T$ irratsional son, $\forall x\in R$ ratsional son uchun $x+T$ ratsional son bo'ladi. Demak,

$$D(x+T)=\begin{cases}1, & \text{agar} \quad x \quad \text{ratsional son bo'lsa},\\ 0, & \text{agar} \quad x \quad \text{irratsional son bo'lsa}\end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall x\in R$, T ratsional son bo'lganda

$$D(x+T)=D(x)$$

bo'ladi. ▶

Ma'lumki, $\forall x\in X\ (X\subset R)$ uchun $x\in X$ bo'lsa, X to'plam O nuqtaga nisbatan *simmetrik to'plam* deyiladi.

Aytaylik, O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda f(x) funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\forall x\in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, *f(x) juft funksiya* deyiladi. Agar $\forall x\in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2+1$ juft funksiya, $f(x)=x^3+x$ esa toq funksiya bo'ladi. Ushbu $f(x)=x^2+x$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi,

$$f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

4°. Monoton funksiyalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\leq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi* deyiladi. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)< f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda qat'iy o'suvchi* deyiladi.

Ta'rif. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\geq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi* deyiladi. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan *monoton funksiyalar* deyiladi.

3-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ funksiyaning $X=[1,-\infty]$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◄ $[1,-\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1<x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$

$$=\frac{x_1-x_2+x_1\cdot x_2(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1-x_2<0, \qquad 1-x_1\cdot x_2<0$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$f(x_1)-f(x_2)>0$$

ya'ni $f(x_1)>f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)>f(x_2). \blacktriangleright$$

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X\subset R$ to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, $C=const$ bo'lsin. U holda

a) $f(x)+C$ funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

b) $C>0$ bo'lganda $C\cdot f(x)$ o'suvchi, $C<0$ bo'lganda $C\cdot f(x)$ kamayuvchi bo'ladi.

v) $f(x)+g(x)$ funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

5°. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar. $y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam

$$Y_f=\{f(x)|x\in X\}$$

bo'lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra Y_f, to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdagi bitta x mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya $y=f(x)$ ga nisbatan *teskari funksiya* deyiladi va $x=f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y=\frac{1}{2}x+1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x=2y-1$ bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan $y=f(x)$ da x argument, y esa x ning funksiyasi, teskari $x=f^{-1}(y)$ funksiyada y argument, x esa y ning funksiyasi bo'lishi ko'rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiya argumenti ham x, uning funksiyasi y bilan belgilanadi: $y=g(x)$.

$y=f(x)$ ga nisbatan teskari $g(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofida 180° ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

Aytaylik, Y_f to'plamda $u=F(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga Y_f to'plamda bitta y:

$$f{:}x \to y \qquad (y=f(x)),$$

va Y_f to'plamdagi bunday y songa bitta u:

$$F{:}y \to u \quad (u=F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak, X to'plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi: $u=F(f(x))$. Odatda bunday funksiyalar *murakkab funksiya* deyiladi.

3-§. Elementar funksiyalar

Elementar funksiyalar kitobxonga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Biz quyida elementar funksiyalar haqidagi asosiy ma'lumotlarni bayon etamiz.

1°. Butun ratsional funksiyalar.

Ushbu

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+...a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi. Bunda a_0, $a_1,...,a_n$ o'zgarmas sonlar, $n \in N$. Bu funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan.

Butun ratsional funksiyaning ba'zi xususiy hollari:

a) chiziqli funksiya. Bu funksiya

$$y=ax+b \qquad (a \neq 0)$$

ko'rinishga ega, bunda a,b o'zgarmas sonlar.

Chiziqli funksiya $(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan $a>0$ bo'lganda o'suvchi, $a<0$ bo'lganda kamayuvchi: grafigi tekislikdagi to'g'ri chiziqdan iborat;

b) kvadrat funksiya. Bu funksiya

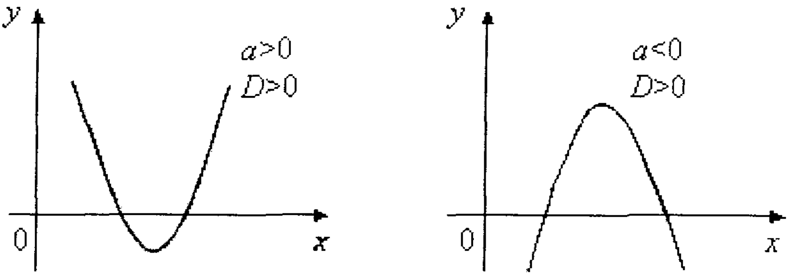
$$y=ax^2+bx+c \qquad (a \neq 0)$$

ko'rinishga ega, bunda a,b,c o'zgarmas sonlar.

Kvadrat funksiya R da aniqlangan bo'lib, uning grafigi parabolani ifodalaydi.

Ravshanki,

$$y = aE^2 + bx + c = 0\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$



3-chizma.

Parabolaning tekislikda joylashishi a hamda $D=b^2-4a$ larning ishorasiga bog'liq bo'ladi. Masalan, $a>0$, $D>0$ va $a<0$, $D<0$ bo'lganda uning grafigi 3-chizmada tasvirlangan parabolalar ko'rinishida bo'ladi.

2°. ***Kasr-ratsional funksiyalar.*** Ushbu

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

ko'rinishdagi funksiya kasr-ratsional funksiya deyiladi. Bunda a_0, $a_1,\ldots,a_n$ va $b_0,b_1,\ldots,b_m$ lar o'zgarmas sonlar $n\in N$, $m\in N$. Bu funksiya

$$X=(-\infty,+\infty)\setminus\{x|b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m=0\}$$

to'plamda aniqlangan.

Kasr-ratsional funksiyaning ba'zi xususiy hollari:

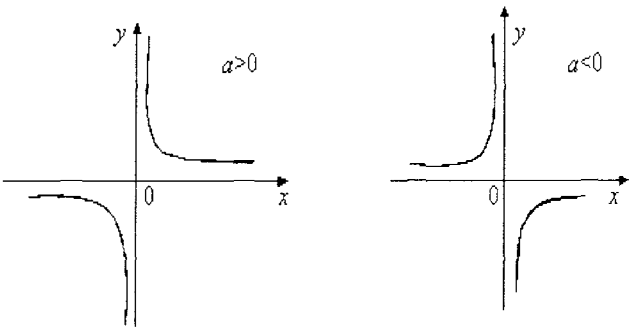
a) teskari proporsional bog'lanish. U

$$y = \frac{a}{E} \qquad (E \neq 0 \quad 0 = const)$$

ko'rinishga ega. Bu funksiya

$$X=(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)=R\setminus\{0\}$$

to'plamda aniqlangan, toq funksiya, *a* ning ishorasiga qarab funksiya $(-\infty,\ 0)$ va $(0,+\infty)$ oraliqlarning har birida kamayuvchi yoki o'suvchi bo'ladi (4-chizma).



4-chizma

b) kasr-chiziqli funksiya. U ushbu

$$y=\frac{aE+b}{cE+d}$$

ko'rinishga ega. Bu funksiya

$$X=R\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\qquad (c\neq 0)$$

to'plamda aniqlangan:

Ravshanki,

$$y=\frac{aE+b}{cE+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{E+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}.$$

Demak,

$$y=\frac{\alpha}{E+\beta}+\gamma,\quad \left(\alpha=\frac{bc-ad}{c^2},\ \ \beta=\frac{d}{c},\ \ \gamma=\frac{a}{c}\right).$$

Uning grafigini $y = \frac{a}{x}$ funksiya grafigi yordamida chizish mumkin.

*3°. **Darajali funksiya.*** Ushbu

$$y=x^a, \quad (x \geq 0)$$

ko'rinishdagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi.

Bu funksiyaning aniqlanish to'plami a ga bog'liq. Darajali funksiya $a>0$, bo'lganda $(0,-\infty)$ da o'suvchi, $a<0$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi. $y=x^a$ funksiya grafigi tekislikning (0,0) va (1,1) nuqtalaridan o'tadi.

*4°. **Ko'rsatkichli funksiya.*** Ushbu

$$y=a^x$$

ko'rinishdagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deyiladi. Bunda $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$. Ko'rsatkichli funksiya $(-\infty,+\infty)$ aniqlangan, $\forall x \in R$ da $a^x>0$; $a>1$ bo'lganda o'suvchi; $0<a<1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Xususan, $a=e$ bo'lsa, matematikada muhim rol o'ynaydigan $y=e^x$ funksiya hosil bo'ladi.

Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi Ox o'qidan yuqorida joylashgan va tekislikning (0,1) nuqtasidan o'tadi.

*5°. **Logarifmik funksiya.*** Ushbu

$$y=\log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi. Bunda

$$a>0, \quad a \neq 1.$$

Logarifmik funksiya $(0,+\infty)$ da aniqlangan, $y=a^x$ funksiyaga nisbatan teskari; $a>1$ bo'lganda o'suvchi, $0<a<1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Logarifmik funksiyaning grafigi Oy o'qining o'ng tomonida joylashgan va tekislikning (0,1) nuqtasidan o'tadi.

*6°. **Trigonometrik funksiyalar.*** Ushbu

$$y=\sin x, \; y=\cos x, \; y=tg x, \; y=ctg x, \; y=\sec x, \; y=cosec x$$

funksiyalar *trigonometrik funksiyalar* deyiladi.

$y=sinx$, $y=cosx$ funksiyalar $R=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan, 2π davrli funksiyalar $\forall x\in R$ da

$$-1\leq sinx\leq 1,\ -1\leq cosx\leq 1$$

bo'ladi. Ushbu

$$y=tgx$$

funksiya

$$X=R\setminus\left\{x\in R \mid x=(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\right\}$$

to'plamda aniqlangan π davrli funksiya, ctgx, secx, cosecx funksiyalar sinx, cosx,tgx lar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$ctgx=\frac{1}{tgx},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \cos ecx=\frac{1}{\sin x}.$$

7°. ***Giperbolik funksiyalar.*** Ko'rsatkichli $y=e^x$ funksiya yordamida tuzilgan ushbu

$$\frac{5^x-5^{-x}}{2},\quad \frac{5^x+5^{-x}}{2},\quad \frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}},\quad \frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$$

funksiyalar *giperbolik* (mos ravishda *giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik katangens) funksiyalar* deyiladi va ular quyidagicha

$$shx=\frac{5^x-5^{-x}}{2},\quad chx=\frac{5^x+5^{-x}}{2},\quad thx=\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}},\quad cthx=\frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$$

belgilanadi.

8°. ***Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Ma'lumki, y=sinx funksiya R da aniqlangan va uning qiymatlari to'plami

$$Y_f=[-1,1]$$

bo'ladi.

Agar $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ bo'lsa, u holda $X=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ va $Y_f=[-1,1]$ to'plamlarning elementlari o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi.

y=sinx funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$y=arcsinx$$

kabi belgilanadi.

Shunga o'xshash y=cosx, y=tgx, y=ctgx funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalar mos ravishda

$$y=arccosx,\ y=arctgx,\ y=arcctgx$$

kabi belgilanadi.

Ushbu $y=arcsinx$, $y=arccosx$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Funksiya limiti

Funksiya limiti oliy matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Bu tushuncha yordamida matematika va uning tadbiqlarida ko'p foydalaniladigan funksiya hosilasi tushunchasi kiritiladi.

Avvalo, soddalik uchun natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi) va uning limitini keltiramiz. Keyinchalik ixtiyoriy argumentli funksiya limitini bayon etamiz.

4-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Aytaylik, barcha natural sonlar to'plam

$$N=\{1,2,3,...,n,...\}=\{n\}$$

ning har bir n elementiga (natural songa) biror f qoidaga ko'ra bitta tayin x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bolsin. Bu holda argumetli n bo'lgan funksiya hosil bo'ladi. Uni natural argumetli funksiya deyiladi. Demak,

$$x_n=f(n)$$

Bu funksiya qiymatlari

$$x_1f(1) \qquad x_2=f(2),..., \qquad x_n=f(n)$$

dan tashkil topgan ushbu

$$x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \qquad (1)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi.

(1) ketma-ketlikni tashkil etgan

$$x_n \ (n=1,2,3,...)$$

sonlar ketma-ketlik hadlari deyiladi: x_1 – birinchi had, x_2 – ikkinchi had va hakozo, x_n–n – had (yoki umumiy had). (1) ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ko‘pincha ketma-ketliklar umumiy hadlari orqali belgilanadi. Masalan:

1) $x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

2) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} : 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, ...$

3) $x_n = (-1)^n : -1, +1, \ -1, +1, ...$

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \qquad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

Agar bu (1) ketma-ketlikning hadlari quyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n \le ... \qquad (x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...)$$

qanoatlantilirsa, ya’ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \le x_{n+1}, \ (x_n < x_{n+1})$$

bo‘lsa, $\{x_n\}$ o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari qiyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge ... \ge x_n \ge ... \qquad (x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > ...)$$

qanoatlantirilsa, ya’ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \ge x_{n+1} \qquad (x_n > x_{n+1})$$

bo‘lsa, $\{x_n\}$ *kamayuvchi (qat’iy kamayuvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = n : 1, 2, 3, ...$$

qat’iy o‘suvchi,

$$x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$$

qat'iy kamayuvchi ketma-ketliklar bo'ladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi, (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar umumiy nom bilan *monoton ketma-ketliklar* deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas M sondan kichik yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \leq M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ *yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2} : \frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{10}{9} \ldots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas m sonidan katta yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \geq m$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ *quyidan chegalangan ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

ketma-ketlik quyidan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegalangan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$m \le x_n \le M$$

bo‘lsa, $\{x_n\}$ chegalangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{4+n^2} : \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{13}, \ldots$$

ketma-ketlik chegalangan bo‘ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

bo‘ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning quyidan chegalanganligini bildiradi.

Ma’lumki,

$$0<(n-2)^2=n^2-4n+4$$

bo‘lib, undan $4n \le n^2 | 4$, ya’ni

$$\frac{n}{4+n^2} \le \frac{1}{4}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegalanganligini bildiradi.

Demak, berilgan ketma-ketlik chegalangan.

2°. Ketma-ketliklar ustida amallar.

Aytaylik, ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo‘lsin:

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

$$\{y_n\}: y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots$$

Quyidagi

$$x_1+y_1, \quad x_2+y_2, \quad x_3+y_3, \ldots, x_n+y_n, \ldots,$$

$$x_1-y_1, \quad x_2-y_2, \quad x_3-y_3, \ldots, x_n-y_n, \ldots,$$

$$x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, \quad x_3 \cdot y_3, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots, \qquad (y_n \ne 0, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati deyiladi va ular

$$\{x_n+y_n\},\qquad \{x_n-y_n\},\qquad \{x_n\cdot y_n\},\qquad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

3°. Ketma-ketlikning limiti.

Biror a nuqta (haqiqiy son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$(a-c,a+\varepsilon)=[x\in R\cdot a-\varepsilon<x<a+\varepsilon]$$

interval a nuqtaning atrofi (ε – atrofi) deyiladi (1-chizma)

Ravshanki, ε soni turli qiymatlarga teng bo'lganda a nuqtaning turli atroflari hosil bo'ladi.

Masalan, $a=1$ nuqtaning $\varepsilon=\frac{1}{3}$ atrofi

$$\left(1-\frac{1}{3},1+\frac{1}{3}\right),\ ya'ni\ \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

intervaldan;

$a=0$ nuqtaning $\varepsilon=\frac{1}{10}$ atrofi

$$\left(0-\frac{1}{10},0+\frac{1}{10}\right)\ ya'ni\ \left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$$

intervaldan iborat bo'ladi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots$$

ketma-ketlik hamda a son (nuqta) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy

$$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

atrofi (ε — ixtiyoriy musbat son) olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi «$\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy ($a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$) atrofiga tegishli» deyilishini quyidagicha aytish mumkin:

Ixtiyoriy musbat ε son olinganda ham, shunday natural n_0 topilib, barcha $n>n_0$ uchun

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

yoki

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \text{ ya'ni } |x^m\ a|<\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu mulohazalarga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflash mumkin bo'ladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural son n_0 topilsaki barcha $n>n_0$ uchun

$$|x_n\ a|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, *a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti* deyiladi.

Masalan,

$$x_n=\frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'ladi, chunki ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni olib, unga ko'ra $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ni topib, so'ng

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

deyilsa, unda barcha $n>n_0$ uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

Ushbu $1,-1,1,-1,1,-1,...$ ketma-ketlik limitga ega bo'lmaydi, chunki har qanday a son, jumladan $a = \frac{1}{2}$ deyilsa, unda, ravshanki berilgan ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari $a = \frac{1}{2}$ nuqtaning ε – atrofiga tegishli bo'lmaydi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ – cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Tasdiq. $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lishi uchun

$$\alpha_n = x_n - a$$

ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.

Bu tasdiqning isboti yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limiti hamda cheksiz kichik miqdor ta'riflaridan kelib chiqadi.

Keltirilgan tasdiqdan

$$x_n = a + \alpha_n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan, $x_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ bo'lib, } x_n = \frac{n}{n+1}$$

Cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ bo'ladi.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham shunday n_0 natural son topilsaki, barcha $n>n_0$ uchun $|x_n|>M$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti «∞» deyiladi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Aytaylik, $x_n=n;$ $1,2,3,4,...n,...$ bo'lsin. Bu ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Biror $\{x_n\}$ $x_1,x_2,x_3,...,x_n,...$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Bu ketma-ketlik:

1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin,

2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin,

3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar ketma-ketlik chekli limitiga ega bo'lsa, u *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

2) va 3) hollarda ketma-ketlik *uzoqlashuvchi* deyiladi.

4°. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi;

2) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi;

3) o'zgarmas sonning limiti o'ziga teng;

4) agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

bo'lsa, u holda $\{c\cdot x_n\}$, $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $(y_n\neq 0)$

ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'lib,

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n \pm y_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\cdot b,$

$$\lim_{n\to\infty}\{c\cdot x_n\}=c\cdot\lim_{n\to\infty}x_n c\cdot a \qquad (c-const)$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}$ $\quad(b\neq 0, \quad y_n\neq 0)$ bo'ladi;

5) agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun $x_n\leq y_n (x_n\geq y_n)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ $\quad(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$ bo'ladi;

6) agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a$$

bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun $x_n\leq z_n\leq y_n$ bo'lsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ bo'ladi.

5°. Ketma-ketlik limitining mavjudligi.

e_soni.

Biz yuqorida yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning qator xossalarini keltirdik. Bu xossalar ketma-ketliklarning chekli limitga ega bo'lishi bilan bog'liq.

Ketma-ketlikning qachon chekli limitga ega bo'lishi haqidagi masala limitlar nazariyasining muhim masalalaridan hisoblanadi.

Ketma-ketlik limitining mavjudligini ifodalovchi teoremalar maxsus adabiyotlarda keltiriladi.

Biz quyida mavjudlik teoremalarining ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegalangan bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitiga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

e_soni. Matematikada e deb ataluvchi son muhum ro'l o'ynaydi. U maxsus ketma-ketlikning limiti sifatida ta'riflanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $\alpha>-1$ va ixtiyoriy natural $n\geq 2$ sonlar uchun

$$(1+\alpha)^n>1+n\cdot\alpha \qquad (*)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Uni Bernulli tengsizligi deyiladi.

Endi ushbu

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n: \qquad 2,\frac{9}{4},\frac{64}{27},\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ldots$$

Sonlar ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlikning o'suvchi hamda yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

a) ketma-ketlikning o'suvchiligi.

Qaralayotgan

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi bo'lishini korsatish uchun uning

$$x_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \qquad x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n:\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.$$

Bu tenglikdagi

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}$$

ifodaga Bernulli tengsizlikni qo'llab topamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} > 1(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Natijada

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{1}{n^3} > 1$$

bo'ladi. Demak, $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} > 1$.

Keyingi tengsizlikdan $x_{n-1} < x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini bildiradi.

b) Ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi.

Qaratilayotgan ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ni baholaymiz:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^n\cdot\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right)^n} < \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n\cdot\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n}$$

Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=\left(1+\frac{-1}{2n}\right)^n>1+n\cdot\frac{-1}{2n}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Natijada

$$x_n<\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=4$$

bo'lib, undan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan.

Unda 1-teoremaga ko'ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Bunda e lotincha exponentis – «ko'rsatkich» so'zining dastlabki harfini ifodalaydi.

e – irratsional son bo'lib uning taqribiy qiymati $e\approx 2{,}7182$ ga teng.

Odatda asosi e bolgan logorifm natural logorifm deyilib $\ln A=\log_e A$ kabi belgilanadi.

5-§. Funksiya limiti

1°. Sonlar to'plamining limit nuqtasi.

Aytaylik, biror haqiqiy sonlar to'plami X va x_0 nuqta (haqiqiy son) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan:

1) $X=[0,1]$ to'plamning (segmentining) har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi;

2) $X=(0,1)$ to'plamning (intervalning) har bir nuqtasi va $x=0$, $x=1$ nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi;

3) $X=N=\{1,2,3,...\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

Tasdiq. Agar x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topiladiki:

1) Ixtiyoriy natural n da $x_n \in X,\ x_n \neq x_0$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, tasdiqning shartlarini qanoatlahtiruvchi ketma-ketliklar istalgancha bo'ladi.

2°. Funksiya limitining ta'riflari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda $(X\subset R)$ berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar X to'plam nuqtalaridan tuzulgan va x_0 ga intiluvchi (yaqinlashuvchi) har qanday

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, (x_n \neq a) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan iborat

$$\{f(x_n)\}: f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$$

ketma-ketlik yagona A ga (chekli yoki cheksiz) intilsa shu A ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi (x ning x_0 ga intilgandagi) limiti deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu $f(x)=2x-1$ funksiyaning $x_0=3$ nuqtadagi limitini topamiz.

Har bir hadi 3 dan farqli bo'lgan, 3 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3 \qquad (x_n \neq 3,\ n=1,2,3,...)$.

U holda berilgan funksiyaning qiymatlari $f(x)$, $\qquad n=1,2,...$ bo'lib ulardan tuzulgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n)\}=\{2x_n-1\}$$

bo'ladi. Bu sonlar ketma-ketligining limiti

$$\lim_{x_n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x_n\to\infty}(2x_n-1) = 2\cdot 3-1=5$$

bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra $f(x_n)=2x-1$ funksiyaning $x\to 3$ dagi limiti 5 ga teng bo'ladi:

$$\lim_{x\to 3} f(x_n) = \lim_{x\to 3}(2x-1)=5$$

Ikkita $\varepsilon>0$ va $\delta>0$ (yetarlicha kichik) sonlarni olaylik.

Ma'lumki, x_0 nuqtaning δ atrofi $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ intervaldan, A sonining ε atrofi $(A-\varepsilon,\ A+\ \varepsilon)$ intervaldan iborat bo'ladi.

$f(x)$ funksiya argumenti x ning $x\neq x_0$ bo'lib, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofga tegishli ekanligini, ya'ni $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$x_0-\delta < x < x_0 < \delta, \qquad x\neq x_0 \qquad 0<|x-x_0|<\delta.$$

Shuningdek, $f(x)$ funksiya mos qiymatlarining $(A-\varepsilon,\ A+\ \varepsilon)$ atrofga tegishliligi, ya'ni

$$f(x)\in(A-\varepsilon,\ A+\ \varepsilon)$$

bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon, \qquad |f(x)-A|<\varepsilon$$

U holda bu ifodalardan foydalanib, funksiya limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, argument x ning

$$0<|x-x_0|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x)-\Delta|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ($x \to x_0$ dagi) limiti deyiladi va yuqoridagidek $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

Odatda, $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ intervallar ($\delta>0$) x_0 nuqtaning mos ravishda chap va o'ng atrofi deyiladi.

Agar funksiya limiti ta'rifida funksiya argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning chap atrofida bo'lsa, funksiya limiti *chap limit* deyiladi va

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \mathop{lim}_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Agar funksiya limiti ta'rifida argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning o'ng atrofida bo'lsa, funksiyaning limiti *o'ng limiti* deyiladi va

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \mathop{lim}_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari uning *bir tamonli limitlari* deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & agar\ x>0 \\ x^3, & agar\ x \le 0 \end{cases}$$

funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi o'ng limiti

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x+2) = 2,$$

chap limiti $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^3 = 0$ bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $M>0$ son topilsinki, $|x|>M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A son *$f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi* va $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ kabi belgilanadi.

3°. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda $(X\subset R)$ berilgan bo'lib, x_0 shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}\,(x\neq 2)$ funksiya $x\to 2$ da cheksiz kata funksiya bo'ladi.

Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti 0 ga teng $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da cheksiz *kichik funksiya* deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya $(\alpha(x)\neq 0)$ bo'lsa, u holda $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Agar $\beta(x)$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'lsa, u holda $\dfrac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti A ga teng, $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ bo'lsa, u holda $f(x)=A+\alpha(x)$ bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya $(x\to x_0)$ va aksincha.

Tasdiq. Agar $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, u holda

$$\alpha(x)+\beta(x),\ \alpha(x)-\beta(x),\ \alpha(x)\cdot\beta(x)$$

funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar bo'ladi.

6-§. Limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalari

Chekli limitiga ega bo'lgan funksiyalar qator xossalarga ega. Keyinchalik bu xossalar ko'p, ayniqsa funksiyalarning limitlarini hisoblashda foydalaniladi. Xossalarning asosiylarini teoremalar sifatida keltiramiz.

Teoremalarda keltiriladigan funksiyalar:

a) X to'plamda ($X \subset R$) aniqlangan, x_0 nuqta esa shu to'plamning limit nuqtasi;

b) $x \to x_0$ da chekli limitga ega deb qaraladi.

1-teorema. Ikki funksiya yig'indisining limiti bu funksiyalar limitlarining yig'indisiga teng:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

bo'lishi isbotlanadi.

Natija. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limit A bo'lsa, u ya'gona bo'ladi.

2-teorema. Ikki funksiya ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Natija. O'zgarmas (son) ko'payuvchini limit ishorasi tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot c = const.$$

3-teorema. Ikki funksiya nisbatining limiti surat limitini maxraj limitiga bo'linganiga teng:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

Misollar. 1. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+6x\right)$ limit hisoblansin.

◀ Yuqorida keltirilgan teoremalardan ifodalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}5x+\lim_{x\to 1}6=$$
$$=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x-5\lim_{x\to 1}x+6=1\cdot 1-5\cdot 1+6=2.$$

2. Ushbu $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-10+21}$ limit hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1),$$
$$x^2-10x+21=(x-3)(x-7).$$

Unda

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-10x+21}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-7)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-7)}=\frac{3+1}{3-7}=-\frac{4}{4}=-1$$

bo‘ladi.

7-§. Muhim limitlar

Funksiyaning limitlarini hisoblashda quyidagi keltiriladigan limitlardan ko‘p foydalahiladi. Odatda ular muhum limitlar deyiladi.

1°. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ munosabat o‘rinli. Shuni isbotlaymiz.

Avvalo x o‘zgaruvchining $0<x<\dfrac{\neq}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad (1)$$

tengsizliklarning bajarilishini ko‘rsatamiz. Buning uchun tekislikda markazi (0;0) nuqtada, radiusi R ga teng bo‘lgan doirani olamiz (1-chizma).

Bu chizmadan ko'rinadiki, ΔAOB yuzi $S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin x$,

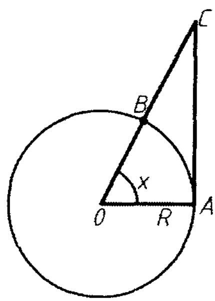
AOB sektorning yuzi

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin x,$$

ΔAOC ning yuzi

$$S_3 = \frac{1}{2} R^2 \cdot tgx$$

bo'ladi. Ravshanki, $S_1 < S_2 < S_3$



1-chizma

Demak, $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot tgx.$

Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini $\frac{1}{2} R^2$ ga bo'lib topamiz:

$$\sin x < x < tgx$$

keyingi tengsizliklarning hamma tomonlarini $\sin x$ ga $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ bo'lish natijasida

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni, avvalo

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ko'rinishida, so'ng

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

ko'rinishida yozib. Agar $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x$ munosabatni e'tiborga olsak, unda $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ sonni (uni olingan $\varepsilon > 0$ va $\frac{\pi}{2}$ sonlardan kichik qilib) olinsa, u holda $|x - 0| = |x| < \delta$ bo'lganda

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ bo'lishini bildiradi.

2°. Ushbu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ tenglik isbotlansin.

◀ Ma'lumki $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ketma-ketlik limitga ega bo'lib, uning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ endi } f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

funksiyaning $x > \infty$ dagi limiti e, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

bo'lishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $x>1$ bo'lsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda $n\le x<n+1$ bo'lib, $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$ bo'ladi. Keyingi ikki munosabatdan

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot1=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot1=e$$

Unda $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ bo'ladi.

Aytaylik, $x<-1$ bo'lsin. Agar $x=-t$ deyilsa, $x>-\infty$ da $t>+\infty$ bo'lib,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot1=e$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

6-bob. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Funksiya limiti tushunchasi bilan uzviy bog'langan funksiyaning uzluksizligini qaraymiz.

1-§. Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan va x_0 nuqta shu intervalga tegishli nuqta bo'lsin: $x_0 \in (a,b)$.

Ta'rif. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligining bu ta'rifi quyidagi ikki shartning bir yo'la bajarilishini taqozo etadi:

1) $x=x_0$ da $f(x)$ funksiya limitining chekli bo'lishini;

2) bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini

Masalan, $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ funksiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki birinchidan $x \to 2$ da $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ funksiyaning limiti chekli: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{4+5} = 3$ ikkinchidan, bu limit berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtadagi qiymatiga teng: $f(2)=\sqrt{2^2+5}=3$.

Demak, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & agar \quad x \neq 0, \\ 0, & agar \quad x = 0 \end{cases}$$

funksiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz bo'maydi, chunki

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$$

bo'lib, berilgan funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)=f(0)=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(x_0)$$

Funksiya limiti ta'rifidagi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ munosabatni quyidagicha $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$ yozish mumkin.

Odatda $x-x_0$ ayirma argument orttirmasi, $f(x)-f(x_0)$ ayirma esa x_0 nuqtadagi funksiya orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi: $\Delta x=x\ x_0$,

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)$$

keyingi tengliklardan $x=x_0=\Delta x$, $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ bo'lishi kelib chiqadi. Natijada $\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0)$ munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi.

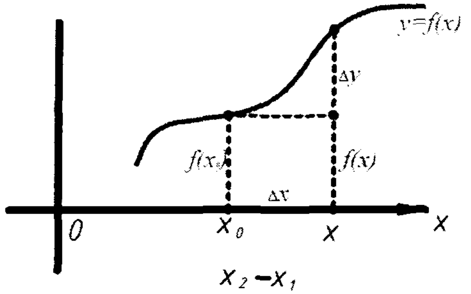
Demak, (2) munosabatni funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifi sifatida qabul qilinishi mumkin, ya'ni agar argument x ning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δx nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning orttirmasi Δf ham nolga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi (1-chizma).

Masalan, $y=f(x)=c$ (c – o'zgarmas son) funksiya ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki bu funksiya uchun

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$$

bo'lib, $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$ bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lsin.



1-chizma

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya (a,b) intervalda uzluksiz deyiladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya [a,b] segmentda berilgan bo'lsin.

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda uzluksiz bo'lib, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)=f(b)$ bo'lsa $f(x)$ funksiya [a,b] segmentda uzluksiz deyiladi.

2-§. Funksiyaning uzilishi

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, ya'ni funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lish shartlarini bajarmasa, funksiya x_0 nuqtada uziladi (uzilishga ega) deyiladi. Bunda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

Agar x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsa, unda bu nuqtada funksiya uzluksizlik ta'rifidagi shartlarni bajarmaydi. Ular quyidagicha bo'lishi mumkin:

1°. Funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'ladi.

Masalan,

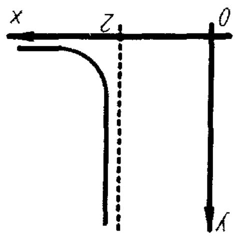
$$y=f(x)=\frac{1}{x-2}$$

funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlanmagan (2-chizma).

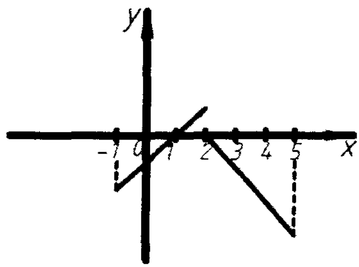
2°. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan, biroq $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \ agar -1 \le x \le 2 \\ 2-x, \ agar \ 2 \le x \le 5 \end{cases}$$



2-chizma



3-chizma

funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlangan ($f(2)=0$) ammo bu funksiya $x \to x_0=2$ da limitga ega emas (3-chizma).

3°. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan hamda $x \to x_0$ da funksiya limitga ega

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

ammo bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0).$$

7-bob. FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALI

1§-Funksiya hosilasining ta'riflari. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan va x_0 nuqta shu intervalning biror nuqtasi bo'lsin ($x_0 \in (a,b)$).

Quyidagi amallarni bajaramiz:

1) funksiya argumenti x_0 ga Δx orttirma beramiz, bunda $x_0+\Delta x \in (a,b)$ va $\Delta x \neq 0$;

2) bu orttirmaga mos funksiya orttirmasi Δf (Δy) ni topamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

3) funksiya orttirmaning argument orttirmasiga nisbatini olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad (\Delta x \neq 0).$$

Ravshanki, bu nisbat muayyan $f(x)$ va muayyan Δx ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining $\Delta x \to 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, y'_{x_0}$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli, (1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. Agar *f(x)* funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lsa, bu *f'(x)* hosila *x* ning funksiyasi bo'ladi.

Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.

Ta'rif. Agar *f(x)* funksiya (a,b) intervalning ixtiyoriy nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, *f(x)* funksiyaning (a,b) intervalda differensiallanuvi deyiladi.

Odatda funksiyaning hosilasini topish amali differensiallash amali deyiladi.

Agar,

$$x_0+\Delta x=x$$

deyilsa, unda

$$\Delta x=x-x_0$$

bo'lib,

$$\Delta x\to 0 \ da\ x\to x_0 \text{ bo'ladi.}$$

Natijada yuqoridagi (1) ifoda quyidagicha ifodalanadi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Demak, funksiya hosilasini quyidagicha ham ta'riflash mumkin:

Ta'rif. Ushbu

$$\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap hosilalari quyidagicha ta'riflanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Misol. Ushbu

$$y=f(x)=x^2$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◀ 1) argument x ga Δx orttirma beramiz:

$$x+\Delta x$$

2) funksiyaning mos orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$$
$$=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2;$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x;$$

4) bu nisbatni $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x+0=2x$$

Demak, berilgan funksiyaning hosilasi

$$y'=(x^2)'=2x$$

bo‘ladi.▶

2-§. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma’nolari

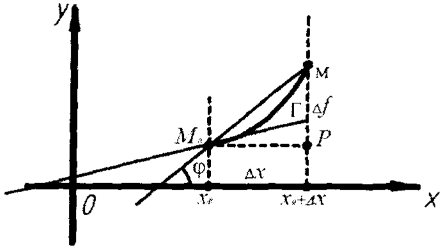
Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, shu intervalning x_0 nuqtasida $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin.

Hosila ta’rifiga ko‘ra

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, f(x) funksiyaning grafigi Γ chiziqni (egri chiziqni) tasvirlasin (1-chizma).



1-chizma

Endi Γ chiziqqa uning $M_0=M_0(x_0,\ f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish masalasini qaraymiz. Γ chiziqda M_0 nuqtasidan farqli

$$M=M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$$

nuqtani olib, bu nuqtalar orqali l kesuvchini o'tkazamiz. l kesuvchining OX o'qi bilan tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bog'liq bo'ladi:

$$\varphi=\varphi(\Delta x)$$

Agar M nuqta Γ chiziq bo'ylab, M_0 ga intilganda (ya'ni $\Delta x\to 0$ da) kesuvchining limit holati mavjud bo'lsa, kesuvchining bu limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi. Urinma to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Demak, f(x) funksiya grafigi M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\alpha$$

limitning mavjud bo'lishini ko'rsatish yetarli. Bunda α urinmaning OX o'qi bilan tashkil etgan burchagi.

Uchburchak MM_0P dan

$$tg\varphi(\Delta x)=\frac{MP}{M_0P}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

va undan

$$\varphi(\Delta x) = arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishini topamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta x \to 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = arctg\, f'(x_0)$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$$

mavjud va y

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = arctg\, f'(x_0)$$

ga teng bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$f'(x_n) = tg a$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsientini ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi ushbu

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Endi hosilaning mexanik ma'nosini keltiramiz.

Ataylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab (bu to'g'ri chiziqni OX o'qi deylik) harakat qilib, M nuqtaga kelganda bosib o'tilgan yo'l S bo'lsin: *OM=S (2-chizma).*

2-chizma

Ravshanki, bu yo'l vaqtga bog'liq bo'lib, uning funksiyasi bo'ladi:

$$S=S(t) \qquad (3)$$

Odatda (3) tenglama moddiy nuqtaning harakat qonuni deyiladi.

Agar nuqta t vaqt oralig'ida $S(t)$ masofani, $t+\Delta t$ vaqt oralig'ida esa $S(t+\Delta t)$ masofani bosib o'tgan bo'lsa, unda Δt vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'l $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$ bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

nisbat esa moddiy nuqtaning t hamda $t+\Delta t$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Agar Δt nolga intila borsa o'rtacha tezlik moddiy nuqtaning t paytdagi (momentdagi) oniy tezlikni aniqroq ifodalay boradi. Demak, t paytdagi tezlik

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)+S(t)}{\Delta t}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$V(t)=S'(t) \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni $S=S(t)$ bo'lganda funksiyaning t nuqtadagi hosilasi $S'(t)$ uning t paytdagi harakat (oniy) tezligini ifodalaydi.

3-§. Funksiya hosilasini hisoblash qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib, ular shu intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

1°. Ikki funksiya yig'indisi va ayirmasining hosilalari.

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar yig'indisi va ayirmasining hosilalari bu funksiyalar hosilalarining mos ravishda yig'indisi va ayirmasiga teng bo'ladi:

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

◀ Quyidagi belgilashni ko'ramiz:

$$F(x)=f(x)\pm g(x),$$

Hosila ta'rifi va funksiya limiti haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\pm g(x)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=f'(x)\pm g'(x)$$

Demak,

$$F'(x)=[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

Masalan,

$$y=x^3+x$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'=2x+1$$

bo'ladi.

Masalan,

$$y=x^2+3x$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(x^2+3x)'=(x^2)'+(3x)'=2x+3$$

bo'ladi.

2°. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi.

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

bo‘ladi.

◀ Aytaylik,

$$\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$$

bo‘lsin. Funksiya hosilasi ta’rifidan foydalanib topamiz.

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

Ma’lumki,

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),$$

$$\Delta g(x+\Delta x)=\Delta g(x)+g(x).$$

Bu munosabatlardan

$$f(x+\Delta x)=\Delta f(x)+f(x)$$

$$g(x+\Delta x)=\Delta g(x)+g(x).$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Unda yuqoridagi (5) ifoda ushbu

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x)+\Delta f(x)]\cdot[g(x)+\Delta g(x)]-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)+\Delta f\cdot\Delta g-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+\Delta g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglikdan

$$\Phi'(x)=g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+$$

$$+f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=$$

$$=g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Demak,

$$\Phi'(x)=[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

3°. Ikki funksiya nisbatining hosilasi.

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(g(x)\neq 0)$ nisbatining hosilasi

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$P(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

bo'lsin.

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$P'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+\Delta f(x)}{g(x)+\Delta g(x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x[g(x)+\Delta g(x)]\cdot g(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\Delta f(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x\left[g^2(x)+g(x)\cdot\Delta g(x)\right]}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\cdot\Delta g(x)}=$$

$$=\frac{g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.\ \square$$

Demak,

$$P'(x)=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

4°. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, ular yordamida

$$y=f(\varphi(x))$$

murakkab funksiya hosil qilingan bo‘lsin.

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada $u'=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $y=f(u)$ funksiya u nuqtada ($u=\varphi(x)$) $f'(u)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va

$$y'_x=f(u)\cdot u'_x,$$

ya’ni

$$y'=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

bo‘ladi.

◄ Aytaylik, $\varphi(x)\neq const$ bo‘lsin. Bu holda, $\Delta x\neq 0$ bo‘lganda

$$\Delta u=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$$

bo‘ladi. Ayni paytda

$$\Delta y=\Delta f(u)=f(u+\Delta u)-f(u)$$

bo‘lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da (bunda Δu ham nolga intiladi) limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

Demak,

$$f'=(f(\varphi(x)))'\cdot f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Masalan,

$$y=(x^2+5x+3)^3$$

funksiya uchun

$$u(x)=x^2+hx+3, \qquad f(u)=u^3$$

bo‘lib, teoremaga ko‘ra

$$[f(u(x))]'=f'(u)\cdot u'(x)$$

ya’ni

$$[(x^2+5x+3)^3]'=3\cdot(x^2+hx+3)^2\cdot(2x+5)$$

bo‘ladi.

*5°. **Teskari funksiyaning hosilasi.***

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) va $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $f'(x)\neq 0$ bo‘lsin.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ teskari funksiyaga ega bo‘lib,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

bo‘ladi.

◄ Aytaylik, $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo‘lgan funksiya $x=\varphi(y)$ bo‘lsin.

$x=\varphi(y)$ funksiya argumentiga $\Delta y(\Delta y\neq 0)$ orttirma beramiz. Unda $x=\varphi(y)$ funksiya ham Δx orttirmaga ega bo‘lib, $y=f(x)$ funksiya qat’iy monoton bo‘lganligi uchun $\Delta x\neq 0$ bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Agar $\Delta y\to 0$ bo‘lsa, unda Δx ham nolga intiladi. $\Delta x\to 0$ (funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun).

Ma’lumki,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \qquad (f'(x)\neq 0)$$

Bu munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Demak,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Masalan,

$$y=\sqrt{x}$$

funksiyaga teskari funksiya $x=y^2$ bo'lib

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(y^2)'}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bo'ladi.

4-§. Sodda funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib sodda funksiyalarning hosilalarini topamiz.

1°. Darajali, $y=x^n$ ($n\in N$) funksiyaning hosilasi.

$y=x^n$ funksiya argumenti x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$$

Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=$$

$$=\left(x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n\right)-x^n=$$

$$=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n$$

bo'ladi.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+}{\Delta x}+$$

$$+\frac{(\Delta x)^n}{\Delta x}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}$$

So'ng $\Delta x\to 0$ bu nisbatning limitini

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right]=$$

$$=n\cdot x^{n-1}$$

Demak,

$$y'=(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$$

2°. Ko'rsatkichli funksiya $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ ning hosilasi.

Avvalo $y=e^x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Funksiya argument x ga Δx orttirma berib funksiya orttirmasini

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1),$$

so'ng uni Δx ga bo'lib, ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

nisbatni topamiz. Endi,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

limitni hisoblaymiz. Bu limitni hisoblashda $\Delta x\to 0$ da

$$e^{\Delta x}-1\sim\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=e^x.$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=e^x,\quad ya'ni\quad y'=(e^x)'=e^x$$

Endi $y=a^x$ funksiyani qaraymiz. Ma'lumki,

$$a^x-e^{x\,lna}$$

bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasidan foydalanib topamiz.

$$(a^x)'=(e^{xlna})'=e^{xlna}\cdot(x\cdot lna)'=e^{xlna}(lna)=(e^{lna})^x\cdot lna=a^x\cdot lna.$$

Demak,

$$(a^x)'=a^x\cdot lna\qquad (a>0,\quad a\neq 1)$$

3°. Logarifmik funksiya $y=log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ ning hosilasi.

Avvalo $y=lnx$ funksiyaning hosilasini topamiz: Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Ma'lumki, $\Delta x\to 0$ da

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x}$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

Demak,

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Endi

$$y=log_a x$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Unda

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

bo‘ladi. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

4°. Trigonometrik funksiyalar.

$$y=sinx,\ y=cosx,\ y=lgx,\ y=ctgx$$

larni hosilalari.

Ushbu

$$y=sinx$$

funksiya argument x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi

$$\Delta y=sin(x+\Delta x)\ sinx$$

ning Δx ga nisbatini qaraymiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

So‘ng $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tib, bunda

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x.$$

Demak, $y'=(sinx)'=cosx$ bo'ladi.

Xuddi shunday o'xshash y=cosx funksiyaning hosilasi

$$y'=(cosx)'=-sinx$$

bo'lishi topiladi.

Endi $y=tgx$ va $y=ctgx$ funksiyalarning hosilalarini topamiz. Bunda ikki funksiya nisbatining hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanamiz:

$$y'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak,

$$y'=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shuningdek,

$$y'=(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot(\cos x)'}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

bo'ladi.

Demak,

$$y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5°. Teskari trigonometrik funksiyalar.

$$y=arcsinx,\ y=arccosx,\ y=arctgx,\ y=arcctx$$

ning hosilalari.

Aytaylik,

$$y=arcsinx$$

bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$x=siny \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi. Ravshanki, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da

$$x'=cosy \qquad (cosy \neq 0)$$

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demak,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y=arc\ cosx$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Endi

$$y=arctgx$$

funksiyaning hosilasini topamiz.

Ma'lumki, $y=arctgx$ funksiya

$$x=tgy \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y=arc\ ctgx$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(arctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Sodda funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval sifatida keltiramiz (bunda $u=u(x)$)

1. $(c)'=0, \quad c=const;$
2. $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}, \quad (u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u';$
3. $(a^x)'=a^x\cdot \ln a, \quad (a^u)'=a^u\cdot \ln a\cdot u';$
4. $(e^x)'=e^x, \quad (e^u)'=e^u\cdot u';$
5. $(\log_a x)'=-\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e, \quad (\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u';$

6. $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

7. $(\cos x)'=-\sin x$, $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

8. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;

9. $(ctgx)'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

10. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

11. $(\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

12. $(\mathrm{arc}\,tgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arc}\,tgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

13. $(\mathrm{arc}\,ctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arc}\,ctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

5-§. Funksiyaning differensiali

Differensial hisobning asosiy teoremalari

1°. Funksiya differensiali.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, x_0 nuqtada ($x_0\in(a,b)$) differensiallanuvchi, ya’ni chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin.

Hosila ta’rifiga ko‘ra

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘ladi, bunda Δx — argument orttirmasi, $\Delta f(x_0)$ esa funksiya orttirmasi.

Limitning xossalaridan foydalanib bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x),$$

bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \to 0$. Keyingi tenglikdan

$$\Delta f(x_n) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (6)$$

bo'lishi kelib chiqadi

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega $(f'(x_0) \neq 0)$ bo'lsa, bu funksiyaning orttirmasi $\Delta f(x_0)$ ikki qo'shiluvchidan iborat bo'ladi.

Qo'shiluvchilardan birinchisi Δx ga nisbatan chiziqli $(f'(x_0)\Delta x)$ bo'lib, $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi, qo'shiluvchilardan ikkinchisi $\alpha(\Delta x)\Delta x$ esa, $\Delta x \to 0$ da yuqori tartibli cheksiz kichik bo'ladi.

Ta'rif. (6) ifodadagi $f'(x_0)\Delta x$ ko'paytma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) itervalning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, unda

$$df(x) = f'(x_0)\Delta x$$

deb olinadi, bunda Δx funksiya argumentining ixtiyoriy x nuqtadagi orttirmasi.

Xususan, $f(x)=x$ bo'lganda bu funksiyaning differensiali

$$df(x) = f'(x)\Delta x = (x)'\Delta x = 1\Delta x = \Delta x$$

bo'lib,

$$dx = \Delta x$$

bo'ladi. Bu hol o'zgaruvchi (argument) x ning erkin orttirmasi Δx ni uning differensiali dx almashtirilishi mumkinligini ko'rsatadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensialini

$$df(x) = f'(x)dx$$

ko'rinishida ifodalash mumkinligini bildiradi.

Funksiya differensialining bu ifodasi hamda hosilalar jadvalidan foydalanib sodda funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1. $d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$,

2. $d(a^{x})=a^{x}\cdot lna\cdot dx$,

3. $d(e^{x})=e^{x}\cdot dx$,

4. $d(\log_a x)=\dfrac{1}{x}lo_a e\cdot dx$,

5. $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$,

6. $d(sinx)=cosxdx$,

7. $d(cosx)=-sinxdx$,

8. $d(tgx)=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$,

9. $d(ctgx)=\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$,

10. $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

11. $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

12. $d(\mathrm{arc}\,tgx)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$,

13. $d(\mathrm{arc}\,ctgx)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2° Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab 'funksiyalarning differensiali.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f(x)$ da aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda

1) $d(c\cdot f(x))=c\cdot df(x)$, $\quad c=const$,

2) $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$,

3) $d[(x)\cdot g(x)]=g(x)\cdot df(x)+f(x)\cdot dg(x)$,

4) $d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$, $\qquad (g(x)\neq 0)$

Bu qoidalar sodda isbotlanadi. Ulardan birini masalan 2-formulani isbotlaymiz.

Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi, ya'ni $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega.

Aytaylik, $F'(x)=f(x)+g(x)$ bo'lsin. Unda

$$F'(x)=[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikning ikki tamonini dx ga ko'paytirib

$$F'(x)dx=f'(x)dx+g'(x)dx$$

ya'ni

$$dF(x)=df(x)+dg(x)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$d[f(x)+g(x)]=df(x)+dg(x).$$

Aytaylik, $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ funksiyalar yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin. Bu $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar hosilalarga ega deylik. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$y'=(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$y'dx=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$$

Unda

$$dy=f'(\varphi(x))\cdot d\varphi'(x)$$

$$dy=f'(u)du$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiya murakkab bo'lgan holda ham funksiya differensiali funksiya hosilasi $f'(u)$ bilan argument differensiali ko'paytmasidan iborat bo'ladi.

Ikkala holda:

1) $y=f(x)$,

2) $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, ya'ni $y=f(\varphi(u))$

funksiya differensiali:

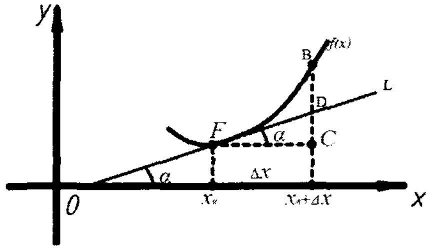
1) $dy=f'(x)dx$,

2) $dy=f'(u)du$

bir xil ko'rinishga ega. Odatda, bu differensial ko'rinishining invariantligi deyiladi.

3°. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 3-chizmada ko'rsatilgan egri chiziqni tasvirlasin.



3-chizma

Endi egri chiziqning $(x,f(x))$ va $(x+\Delta x, f(x))$ nuqtalarni mos ravishda F va B bilan belgilaymiz. Unga

$$FC=\Delta x, \quad BC=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun u shu nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaga grafigiga uning $F=F(x), f(x)$ nuqtasiga o'tkazilgan L urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti

$$tg a=f'(x)$$

bo'ladi.

Urinmaning BC bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaylik. FDC uchburchakdan topamiz:

$$\frac{DC}{FC}=tg\alpha.$$

Keyingi tengliklardan

$$DC=tg a\cdot FC=f'(x)\cdot\Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtasidagi differensiali

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x$$

funksiya grafigiga $F=F(x,f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalaydi.

Bu funksiya differensiallining geometrik ma'nosidir.

4°. Funksiya differensiali va taqribiy formula.

Nazariy va ayniqsa amaliy masalalarni yechishda tegishli funksiyalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zaruriyati tug'uladi. Ko'pincha, bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasi yuzaga keladi.

Funksiyalarning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b)da aniqlangan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega $f'(x)\neq 0$ bo'lsin, u holda

$$\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y=f'(x)\cdot+\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x=df+a(\Delta x)\cdot\Delta x=dy+a(\Delta x)\cdot\Delta x$$

bo'ladi,

$$\frac{\Delta y}{dy}=\frac{f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x}=1+\frac{\alpha(x)}{f'(x)}$$

bo'ladi, bunda $\Delta x\to 0$ va $\alpha(\Delta x)\to 0$. Keyingi tenglikdan.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik ushbu

$$\Delta y\approx dy$$

munosabatga (taqribiy tenlikka) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning har qancha kichik bo'lishi bu taqribiy tenglamaning aniqligini shuncha oshiradi.

Yuqoridagi taqribiy formulani quyidagicha

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \qquad (7)$$

ko'rinishida yozsa ham bo'ladi. (7) formuladan taqribiy hisoblashlarda foydalaniladi.

6-§. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya (a,b)da aniqlangan va $x\in(a,b)$ bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun

$$f(x)<f(x_0) \quad (f(x_0)\geq f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x_0)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a,b) dagi eng katta (eng kichik) qiymati deyiladi.

Teorema. (Ferma teoremasi). Agar $y=f(x)$ funksiya c nuqtada ($c\in(a,b)$) o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishib, bu nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x)\leq f(c) \qquad (8)$$

Endi c nuqtaga shunday orttirma beramizki, $c+\Delta x$ shu (a,b) intervalga tegishli bo'lsin: $c+\Delta x\in(a,b)$ Unda (8) $f(c+\Delta x)\leq f(x)$ bo'lib $\Delta y=f(c+\Delta x-f(c)\leq 0$ bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x>0$ bo'lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$$

bo'lib,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0 \qquad (9)$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x<0$ bo'lsa, unda

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \qquad (10)$$

bo'ladi.

Yuqoridagi (9) va (10) munosabatlardan

$$f'(c)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema. (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya [a,b] segmentda uzliksiz bo'lib, (a,b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda a bilan b orasida shunday c nuqta (a<c<b) topiladiki,

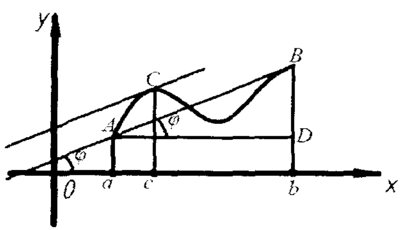
$$\frac{f(b)-f(a)\Delta y}{b-a} = f'(c)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya [a,b] segmentda uzluksiz bo'lib, uning grafigi chizmada tasvirlangan AB egri chiziqni ifodalasin.

A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik. Unda bu to'g'ri chiziqning burchak koeffisienti tgφ bo'ladi.

AB egri chiziqdan shunday C nuqta bo'lishini tasavvur etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan urinma AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. Bu L urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik. Uning ham burchak koeffitsienti tgφ bo'ladi.



4-chizma

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma'nosi

$$tg\varphi=f'(c) \qquad (11)$$

bo'ladi, bunda C nuqta AB egri chiziqdagi C nuqtani abssissasi.

AB to'ri chiziq bilan bu urinma parallel bo'lgani uchun

$$tg\varphi=tg\alpha \qquad (12)$$

bo'ladi.

Chizmada keltirilgan ADB to'g'ri burchakli uchburchakda

$$AD=b-a,\ BD=f(b)-f(a),\qquad \angle A=\varphi$$

Shu uchburchakdan

$$tg\varphi=\frac{BD}{AD}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (13)$$

bo'lishini topamiz.

Yuqoridagi (11), (12), (13) munosabatlardan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi hosilasi nolga teng

$$f'(x)=0,\qquad x\in(a,b)$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b)da o'zgarmas bo'ladi:

$$f(x)=C,\qquad C=const.$$

Natija. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,

$$f(a)=f(b)$$

kabi bo'lsin. U holda a va b orasida shunday c nuqta ($a<c<b$) topiladi

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar.

1) [a,b] segmentda uzliksiz;

2) (a,b) intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega;

3) (a,b) da $g'(x) \neq 0$ bo'lsin.

U holda a bilan b orasida shunday c nuqta (a<c<b) topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

7-§.Yuqori tartibli hosilalar

1°. Funksiyaning yuqori tartibli hosila tushunchasi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, uning ixtiyoriy nuqtasida ($x \in (a,b), f'(x)$) hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ ni ($f'(x)$ ham x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi) $g(x)$ orqali belgilaylik:

$$g(x) = f'(x), \qquad (x \in (a,b))$$

Ta'rif. Agar $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va $f''(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uning birinchi tartibli hosilasining hosilasi bo'ladi:

$$f''(x_0) = (f'(x))'.$$

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning 3-tartibli, $f'''(x)$ 4-tartibli $f^{IV}(x)$ va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi $f^{(n)}(x)$ dan olingan hosila $f(x)$ funksiyaning (n+1)-tartibli hosilasi deyiladi va $f^{(n+1)}(x)$ kabi belgilanadi:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'.$$

Odatda, $f(x)$ funksiyaning

$$f^{II}(x),\ (f(x)^{III}, f^{IV}(x) \ ....$$

hosilalar uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning x nuqtada ($x \in (a,b)$), n-tartibli hosilasining mavjud bo'lishida bu funksiyaning shu nuqta atrofida $1,2,...,(n-1)$ tartibli hosilalarining mavjud bo'lishi talab etiladi.

Funksiyaning yuqori tartibli, masalan n-tartibli ($n \geq 2$) hosilasini topish uchun, hamma oldingi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo'ladi.

Ayrim funksiyalarining yuqori tartibli hosilalarini bir yo'la topish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir sodda funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz:

1) $y=x^a$ ($x>0$, $\alpha \in R$). Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y'=(x^a)'=a \cdot x^{a-1},$$

$$y''=(y')'=(a \cdot x^{a-1})'=a \cdot (a-1) \cdot x^{a-3},$$

$$y'''=(a(a-1)x^{a-2})'=a(a-1)(a-2) \cdot x^{a-3}.$$

Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun ushbu

$$(x^a)^{(n)}=a \cdot (a-1)(a-2)...(a-n+1) \cdot x^{a-n}$$

formula o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatish qiyin emas.

Xususan, $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi.

$$f^{(n)}(x)=(\frac{1}{x})^{(n)}=(-1)\cdot(-2)\ldots\ldots\ldots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^n+1}$$

bo'ladi.

2. $y=\ln x$ ($x>0$) funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Ravshanki,

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Unda yuqoridagi munosabatlarga ko'ra

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n},\ (x>0)$$

bo‘ladi.

3. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ bo‘lsa. Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y'=a^x lna,$$

$$y''=(y')'=(a^x\cdot lna)'=a^x\cdot lna\cdot lna=a^x ta^2 a,$$

$$y'''=(y'')'=(a^x ln^2 a)'=a^x ln^3 a$$

Bu munosabatlarga qarab $y=a^x$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun ushbu,

$$y^{(n)}=a^x\cdot ln^n a$$

formulani yozamiz. Uning to‘g‘riligi matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi. Demak,

$$y^{(n)}=(a^x)^{(n)}=a^x\cdot ln^n a$$

xususan, $(e^x)^{(n)}=e^x$ bo‘ladi.

2° Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi.

Aytaylik, moddiy nuqta M to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $s=f(t)$ qonun bilan harakatlansin, bunda t – vaqt, S esa o‘tilgan yo‘l.

Ma’lunki, bu harakat qonuning t vaqtdagi oniy tezligi

$$S'(t)=f'(t)=n(t)$$

bo‘ladi.

Aytaylik, t vaqtda moddiy nuqtaning tezligi $t+\Delta t$ vaqtdagi tezlik esa

$$v(t)+\Delta v$$

bo‘lsin, ya’ni moddiy nuqta tezligi Δt vaqt oralig‘ida Δv ga o‘zgarsin. Unda ushbu

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

nisbat Δt vaqt oralig'dagi o'rtacha tezlanishini ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t \to 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

t vaqtdagi moddiy nuqta harakatining tezlanishi deyiladi va u a bilan belgilanadi.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

Ravshanki

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Agar $v=S'(t)$ ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$v'(t)=(S'(t))'=S''(t)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$a=S''(t),$$

ya'ni $S=S(t)$ harakat qonunining ikkinchi tartibli hosilasi harakatning tezlanishini ifodalaydi. Bu ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosidir.

3°. Sodda qoidalar. Leybnits formulasi.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b)da aniqlangan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada n-tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

1. $[c\cdot f(x)]^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x), \quad c=const,$
2. $[f(x)|g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)|g^{(n)}(x)$
3. $[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}-f^{(n)}(x)\cdot g(x)++C_n^1 f^{(n-1)}(x)\cdot g'(x)+$
$+C_n^2 f^{(n-2)}\cdot g''(x)+...++C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+...+f(x)\cdot g^{(n)}(x)$

bo'ladi, bunda

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k-1)}{k!}$$

8-bob. FUNKSIYA HOSILASINING TADBIQLARI

1-§. Funksiyaning monotonli oralig'ini aniqlash

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1 \subset (a,b)$ va $x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (qat'iy o'suvchi), $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

Odatda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa,

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda monoton, (a,b) interval esa $f(x)$ funksiyaning monotonli intervali deyiladi.

Endi funksiyaning hosilasidan foydalanib, uning berilgan intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini topamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da $f'(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda funksiya (a,b)da o'suvchi bo'ladi.

◄ Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b)da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x) \geq 0$ bo'lsin.

(a,b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ deylik. Ravshanki, $[x_1, x_2]$ sigmenti (a,b) intervalga tegishli bo'ladi:

$$[x_1, x_2] \in (a,b).$$

Bu $[x_1, x_2]$ sigmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda shu teoremaga ko'ra shunday c nuqta $(x_1 < c < x_2)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad ya'ni \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f'(c) \geq 0$ va $x_2 - x_1 > 0$ unda keying tenglikdan $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, ya'ni $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a,b) da o'suvchi bo'lishini bildiradi.

(a,b) intervalda ixtiyoriy x nuqtani olib, unda shunday Δx orttirma beramizki, $x+\Delta x$ nuqta ham shu (a,b)ga tegishli bo'lsin. Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya (a,b)da o'suvchi. Unda $\Delta x>0$ bo'lganda $f(x)\leq f(x+\Delta x)$ bo'lib, $f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0$ bo'ladi.

Demak,

$$\Delta x>0 \text{ da } f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$$

$$\Delta x<0 \text{ da } f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0.$$

Ikkala hol uchun $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$ bo'ladi.

Hosila ta'rifiga binoan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$

Keyingi ikki munosabatdan (a,b) da $f'(x)\geq 0$ bo'lishi kelib chiqadi. ►

Natijada (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda o'suvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)\geq 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida keltirilgan teoremalarga o'xshash quyidagi teoremalar ham isbotlanadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)\leq 0$ bo'lsa u holda funksiya (a,b)da kamayuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b)da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) intervalda kamayuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)\leq 0$ bo'ladi.

Natijada, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda kamayuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x\in(a,b)$da $f'(x)\leq 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

2-§. Funksiyaning ekstremumlari

1°. Funksiya ekstremumlari tushunchalari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b)da aniqlangan $x_0\in(a,b)$ va shu nuqtaning atrofi $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\in R: x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$ $(\delta>0)$ ham (a,b) intervalda tegishli $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(a,b)$ bo'lsin.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ bilan shu funksiyaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofdagi qiymatlarini solishtirish funksiya ekstremumi tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal *maksimumga erishadi* deyiladi, x_0 *funksiyaning maksimum nuqtasi*, $f(x_0)$ esa *funksiyaning maksimum qiymati* deyiladi.

Funksiyaning maksimum qiymati $max\{f(x)\}$ kabi belgilanadi.

$$f(x_0)=max\{f(x)\}$$

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun $f(x)\geq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal *minimumga erishadi* deyiladi, x_0 *funksiyaning minimum nuqtasi*, $f(x_0)$ esa *funksiyaning minimum qiymati* deyiladi. Funksiyaning minimum qiymati $min\{f(x)\}$ kabi belgilanadi:

$$f(x_0)=min\{f(x)\}$$

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumlari deyiladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir nechta maksimum va minimumlarga ega bo'lishi mumkin.

2°. Funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib, $x\in(a,b)$ bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, u holda $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada minimumga erishib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lganda ham $f'(x_0)=0$ bo'lishi isbotlanadi.

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning biror $x^*\in(a,b)$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lib, $f(x^*)=0$ bo'lishidan uning x^* nuqtada ekstremumiga erishishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f'(x)=3x^2$ va $x=0$ nuqtada $f'(x_0)=0$ bo'lsa ham bu funksiya $x=0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi (ma'lumki, funksiya qat'iy o'suvchi).

Demak, yuqorida keltirilgan teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Eslatma. Hosilaga ega bo'lmagan nuqtada ham funksiya ekstremumiga erishishi mumkin. Masalan:

$$f(x)=|x|$$

funksiya $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo u shu nuqtada minimumga erishadi.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyasining statsionar nuqtalar deyiladi.

$f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalar:

1. Funksiyaning statsionar nuqtalar.
2. Funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar.

3°. Funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan,uning har bir nuqtasida hosilaga ega va $x_0 \in (a,b)$ nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng: $f'(x_0)=0$ x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofini olamizki, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta) \subset (a,b)$ bo'lsin.

a) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)>0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0+\delta,)$ da $f'(x)<0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani «o'sishda» ishorasining «+» dan «–» ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning $(x_0-\delta,\ x_0)$ da hosilasi musbat $f'(x)>0$.

Demak, funksiya $(x_0-\delta,\ x_0)$ da o'suvchi. Unda $(x_0-\delta,\ x_0)$ *da* $f(x_0) \geq f(x)$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)<0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0+\delta,)$ da $f'(x)>0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani «o'sishda» ishorasini «+» dan «–» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning hosilasi $(x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)<0$. Demak, funksiya $(x_0-\delta, x_0)$ da kamayuvchi.

Unda $(x_0-\delta, x_0)$ da $f(x) \geq f(x_0)$ tengsizlik bajariladi.

$f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)>0$. Demak, funksiya $(x_0,x_0+\delta)$ da o'suvchi. Unda $[x_0,x_0+\delta]$ da $f(x)\geq f(x_0)$ tenglik bajariladi.

Demak, ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ *da* $f(x)\geq f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi.

c) Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)>0$, ixtiyoriy $x\in(x_0, x_0+\delta,)$ da $f'(x)>0$ yoki ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)<0$, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan «o'tishda» ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumiga erishmaydi. Chunki bu holda $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ da o'suvchi yoki kamayuvchi bo'ladi.

Natijada $f(x)$ funksiya ekstremumini topishda quyidagi qoidaga kelamiz:

1) funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi;

2) $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlaridan biri x_0 bo'lsin $f'(x)=0$;

3) x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0-\delta,\ x_0)$ va o'ng atrofi $(x_0,\ x_0+\delta)$ da $f'(x)$ hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a) va b) tasdiqlar tatbiq etilib ekstremum topiladi.

$f'(x_0)$	$f'(x_0-\delta)$	$f'(x_0-\delta)$	$f(x_0)$
0 yoki mavjud emas	$+$ $-$	$-$ $+$	Maksimum Minimum
0 yoki mavjud emas	$+$ $-$	$+$ $-$	Ekstremum mavjud emas

4°. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish.

Yuqorida keltirilgan ekstremumning yetarli sharti sanaladigan nuqtaning o'ng va chap tomonlaridagi nuqtalarida funksiya hosilasi $f(x)$ ning ishorasini aniqlash bilan bog'liq. Ko'pincha x_0 nuqtaning atrofida $f'(x)$ ning ishorasini aniqlash qiyin bo'ladi.

Qaralayotgan funksiya x_0 nuqtada yuqori tartibli hosilalarning ega bo'lsa, hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatining ishorasiga qarab funksiyaning ekstremumini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a,b)$ bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofida $((x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b))$ birinchi va ikkinchi tartibli $f'(x)$, $f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,

1) $f'(x_0)=0$;

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsin, u holda

a) $f''(x_0)>0$ bo'lgani $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi;

b) $f''(x_0)<0$ bo'lgani $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b))$ n-tartibli $f^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lib,

1) $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lganda, n juft son bo'lsa funksiya ekstremumga ega bo'ladi va $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga, $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

2) n-toq son bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'ladi.

5°. Funksiyaning [a,b] segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari.

$f(x)$ funksiya [a,b] segmentda aniqlanagan va u shu segmentda differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, $f(x)$ funksiya [a,b] da uzluksiz bo'ladi. Unda ma'lum teoremaga ko'ra funksiya [a,b] da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni [a,b] segmentning shunday qiymatlari topiladiki, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari eng katta (eng kichik) bo'ladi.

Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning barcha maksimum qiymatlari to'plami $\{max\, f(x)\}$ bo'lsin;

2) funksiyaning [a,b] segmenti chegaralaridagi, ya'ni $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ hisoblanadi.

So'ngra $\{max\, f(x)\}$ to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida (orasida) eng kattasi $f(x)$ funksiyaning [a,b] segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning [a,b] segmentdagi eng kichik qiymati topiladi.

6°. Hosilaning funksiya limitini topish tadbiqlari. Lopital qoidalari.

Biz oldingi boblarda, ma'lum shartlar bajarishganda funksiyalarning limitini hisoblashni bayon etdik.

Bazi hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya'ni.

1) $x>x_0$ da $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0,$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

2) $x>x_0$ da $f(x)=+\infty,\ g(x)=+\infty$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

Limitni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash mumkin bo'ladi.

Bunday usul bilan funksiya limitini topish *Lopital qoidalari* deyiladi.

1°. $x\to x_0$ da $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0,$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti.

Teorema. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0;$

2) ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari mavjud;

3) ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $g'(x)\neq 0;$

4) ushbu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \quad (A\in R)$ mavjud. U holda

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ bo'ladi.

$f(x)$ hamda $g(x)$ funksiyalarning $x=a$ nuqtadagi qiymati nolga teng, ya'ni $f(a)=0$, $g(a)=0$ deb olsak, natijada $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0=g(a)$ tengliklar o'rinli bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar [a,b] da uzluksiz bo'ladi. Ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqta olib, [a,x] segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Koshi teoremasiga ko'ra a bilan x orasida shunday $c(a<c<x)$ nuqta topiladiki

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki $x\to a$ da $x\to c$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A$$

2°. $x\to x_0$ da $(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti.

Teorema. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib,quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$,

2) ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0$

3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$

U holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A$ bo'ladi.

9-bob. ANIQMAS INTEGRAL

Ma'lumki, harakat qonuniga ko'ra harakatdagi jismning tezligini topish masalasi hosila tushunchasiga olib keladi.

Harakatdagi jismning tezligiga ko'ra harakat qonunini topish masalasi esa yuqorida aytilgan masalaga nisbatan teskari masala bo'lib, u funksiyaning aniqmas integrali tushunchasiga olib keladi.

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $F(x)$ esa shu (a,b) berilgan va differensiallanuvchi (ya'ni $F(x)$ hosilaga ega), $x\in(a,b)$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar $F(x)$ funksiyaning hosilasi $F'(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaga teng $F'(x)=f(x)$ yoki $dF(x)=f'(x)dx$ bo'lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=x^2,\ (x\in(-\infty;+\infty))$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3$$

bo'ladi, chunki

$$F'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, u shu oraliqda ikkita $F(x)$ va $\Phi(x)$ boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$F'(x)=f(x),\ \Phi'(x)=f(x),(x\in(a,b))$$

Keyingi tengliklardan

$$F'(x)=\Phi'(x)$$

bo'lish kelib chiqadi. Unda $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi;

$$\Phi(x)=F(x)+C, \quad C=const$$

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lib, ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda $f(x)$ funksiyaning istalgan boshlang'ich funksiyasi

$$F(x)+C, \quad C=const$$

ko'rinishida bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$F(x)+C$$

ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

bunda $\int$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda deyiladi.

Masalan,

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C,$$

chunki $\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$ bo'ladi.

Odatda funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga shu funksiyani *integrallash amali* deyiladi.

Teorema. (a,b) da uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya boshlang'ich funksiyaga, demak aniqmas integralga ega bo'ladi.

2-§. Aniqmas integralning xossalari

Aniqmas integral bir nechta xossalarga ega. Biz ularni keltiramiz:

1°. $f(x)$ funksiya aniqmas integral $\int f(x)dx$ ning differensiali $f(x)dx$ ga teng:

$$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

2°. Funksiya differensialining aniqmas integarali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'ndisiga teng:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

3°. Ushbu munosabat o'rinli:

$$\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx \quad (k=const,\ k\neq 0)$$

4°. Ushbu formula o'rinli:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Bu xossalarning isboti bevosita aniqmas integral ta'rifidan kelib chiqadi. Biz ulardan birini, masalan, 2°-xossaning isbotini keltiramiz.

$F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $F'(x)=f(x)$ bo'ladi, $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'ladi.

Unda

$$\int f(x)dx=\int F'(x)dx=\int dF(x)$$

bo'ladi. Keyingi tengliklardan

$$\int dF(x)=F'(x)+C$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa 2° xossani isbotlaydi.

3-§. Asosiy integrallar jadvali

1°. Sodda funksiyalarning aniqmas integrallari.

Avval sodda funksiyalarning aniqmas integrallarini topamiz. Bunda boshlang'ich funksiya ta'rifidan hamda hosilalar jadvalidan foydalanamiz.

1) $f(x)=x^{\alpha}$ bo'lsin. ($x>0$, α – haqiqiy son, $\alpha\neq-1$)

Unda

$$\int f(x)dx = \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = (\alpha+1)\cdot\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} = x^{\alpha}.$$

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ bo'lsin $(x\neq 0)$, unda $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ bo'ladi.

2) $f(x)=a^x$ bo'lsin $(a>0,\ a\neq 1)$. U holda

$$\int f(x)dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x \cdot \ln a = a^x$$

Xususiy, $f(x)=e^x$ bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \int e^x \cdot dx = e^x + C$$

bo'ladi.

3) $f(x)=\sin x$ bo'ladi, unda $\int f(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$ bo'ladi, chunki $(-\cos x+C)'=-(-\sin x)=\sin x$.

4) $f(x)=\cos x$ bo'lsin, u holda $\int f(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + C$ bo'ladi, chunki, $(\sin x+C)'=\cos x$.

5) $f(x)=\frac{1}{\cos^2\cdot x}$ bo'lsin, unda $\int f(x)dx = \int \frac{1}{\cos^2\cdot x} dx = tgx + C$ bo'ladi, chunki, $(tgx+C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

6) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ bo'lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

bo‘ladi, chunki, $(-ctgx + C)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$

7) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bo‘lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

bo‘ladi, chunki, $(arctgx + C)' = \frac{1}{1+x^2}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo‘lsin, unda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

bo‘ladi, chunki, $(\arcsin x + C')' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2°. ***Integrallar jadvali.*** Yuqorida keltirilgan formulalarni jamlab ushbu integrallar jadvalini hosil qilamiz:

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

4) $\int e^x dx = e^x + C,$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C,$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C,$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$

10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arc}\,tgx + C.$

4-§. Integrallash usullari

1°. Bevosita integrallash usuli. Bu usulda integral ostidagi funksiyani (yoki ifodani) ayniy almashtirishlar yo'li bilan yoki bevosita integralning xossalarini tatbiq etish yo'li bilan jadval integraliga keltirib hisoblanadi.

Ko'p hollarda quyidagi almashtirishlardan foydalaniladi:

$$du = d(u+a),\ a - o\text{'}zgarmas\ son,$$

$$du = \frac{1}{a} d(au),\quad a \neq 0 \quad udu = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u\, du = d(\sin u),\ \sin u\, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),\quad \frac{1}{\cos^2 u} du = d(tgu),$$

umuman $f'(u)du = d(f(u))$.

Masalan,

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C,$$

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

2°. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli.

Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab etilsin. Ba'zan x o'zgaruvchini boshqa o'zgaruvchiga almashtirilish natijasida berilgan integral soddaroq, hisoblash uchun qulayroq integralga keladi.

Aytaylik,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1)$$

bo'lsin. Bu integralda $x=\varphi(t)$ almashtirish bajaramiz. ($f(x)$, $\varphi(t)$ *va* $\varphi'(t)$ – uzluksiz funksiyalar).

Unda

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \qquad (2)$$

bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

Ma'lumki, $F'(x)=f(x)$.

Unda $[F(\varphi(t))+C]'=(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ bo'ladi. Bu esa (2) munosabatning to'g'riligini bildiradi. (1) va (2) tengliklardan topamiz:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Masalan $\int(2+3x)^5dx$ integralni hisoblashda $2+3x=t$

Almashtirish bajarilsa, unda $x=\frac{t-2}{3}$, $dx=\frac{1}{3}dt$ bo'lib,

$$\int(2+3x)^2dx = \int t^5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{18}(2+3x)^6+C \text{ bo'ladi.}$$

*3°. **Bo'laklab integrallash usuli.*** Aytaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar biror oraliqda aniqlangan uzluksiz hamda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki,

$$d(u\cdot v)=udv+vdu.$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int d(u\cdot v) = \int udv + \int vdu.$$

Ravshanki, $\int d(u\cdot v)=u\cdot v$

Unda $u\cdot v=\int udv+\int vdu$ bo'lib, quyidagi formula

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu \qquad (3)$$

hosil bo'ladi.

Odatda (3) bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

(3) formula ∫udv integralni ∫vdu ni hisoblashga keltiradi.

1-misol. $\int xcosxdx$ ni hisoblang:

Yechish. u=x, du=x, v=sinx, dv=cosxdx belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\int x\cdot\cos xdx=\int udv=u\cdot v-\int vdu=x\cdot\sin x-$$
$$-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$$

bo'ladi.

2-misol. lnxdx ni hisoblang:

Yechish. u=lnx, $du=\frac{dx}{x}$, v=x, dv=dx almashtirishni kiritamiz. U holda, $\int lnxdx=\int udv=x\cdot\ln x-\int\frac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+C$ bo'ladi.

Endi amaliyotda tez-tez uchrab turadigan va bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan integrallar tiplarini keltiramiz.

1. $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$ ko'rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ – n-darajali ko'phad, k biror son. Bu integrallarni hisoblash uchun $u=P_n(x)$ deb olish va (3) formulani n marta qo'llash yetarli.

2. $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)arc\sin xdx$, $\int P_n(x)arc\cos xdx$, $\int P_n(x)arctgxdx$, $\int P_n(x)arcctgxdx$ ko'rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ – n-darajali ko'phad. Bu integrallarni bo'laklab integrallash uchun $P_n(x)$ oldidagi ko'payuvchi funksiyani u deb olish lozim.

3. $\int e^{ax}\cos bxdx$, bu yerda a va b lar haqiqiy sonlar. Bu integrallar ikki marta bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadi.

3-misol. $\int \arcsin xdx$ integralni hisoblang:

Yechish. Bu integral 2-tipga kiradi, bunda $P_0(x)=1$ va u=arcsinx deb olamiz. U holda

$$\int \arcsin xdx = \left| \begin{array}{ll} u=\arcsin x, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

bo'ladi.

4-misol. $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$ integralni hisoblang:

Yechish. Bu integral 3-tipga mansub. u sifatida dx ning oldidagi ko'paytuvchilardan ixtiyoriy birini olamiz va ikki marta bo'laklab integrallashni bajaramiz. Ikkinchi marta integrallaganimizda avval berilgan integralni o'z ichida saqlaydigan tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan berilgan integralni topamiz:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = \left| \begin{array}{ll} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx \\ dv=\cos\dfrac{x}{2}dx, & v=2\int\cos\dfrac{x}{2}d(\dfrac{x}{2})=2\sin\dfrac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} + 2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{array}{ll} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx \\ dv=\sin\dfrac{x}{2}dx, & v=-2\cos\dfrac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4 - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx, \text{ ya'ni}$$

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx,$$

bundan $5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}$ yoki

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{5}(e^{-x}\sin\frac{x}{2}-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}).$$

Endi bo'laklab integrallash usuli yordamida ushbu

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\qquad (n=1,2,3,\dots\dots j\ \alpha-o'zgarmas)$$

integralni (bu integraldan keyinchalik ko'p foydalaniladi) hisoblaymiz.

Berilgan integralda

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad dv=dx$$

deb olamiz. Unda

$$du=\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)'\cdot dx=\left[(x^2+a^2)^{-n}\right]'\cdot dx=$$

$$=-n(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2xdx=-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^n}\cdot dx,$$

$$dv=dx$$

bo'lishidan esa,

$$v=x$$

bo'lishini topamiz.

Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n}-\int x\cdot\left(\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right)dx=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} -$$

$$-a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = J_n - a^2\cdot J_{n+1}$$

demak,

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - 2na^2\cdot J_{n+1}$$

Keyingi tenglikdan J(n+1) ni topamiz:

$$2na^2\cdot J_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\cdot J_n$$

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n \qquad (4)$$

Bu rekurrent formuladan foydalanib, J_1 ni bilgan holda birin-ketin J_2, J_3,... larni topish mumkin.

Ravshanki, n=1 bo'lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{a\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

bo'ladi.

Masalan, (4) formuladan foydalanib,

$$J_2 = \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

integral quyidagicha hisoblanadi:

$$J_2 = \int \frac{x}{2a^2 \cdot (x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} J_1 =$$

$$= \frac{x}{2a^2 \cdot (x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} arctg \frac{x}{a} + C.$$

5-§. Sodda kasrlar va ularning integrallari

Ushbu,

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \qquad (m > 1)$$

ko'rinishdagi kasrlar *sodda kasrlar* deyiladi. Bunda A,B,C,a,p,q – o'zgarmas haqiqiy sonlar, m – natural son, x^2+px+q – kvadrati uch had haqiqiy ildizlarga ega emas.

1°. $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$$

2°. $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx (m > 1)$ sodda kasrning aniqmas integrali.

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int \frac{dx}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) =$$

$$= A \cdot \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(x-a)^m \cdot (1-m)} + C.$$

3°. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ sodda kasrning aniqmas integrali.

Avvalo sodda kasr maxrajidagi x^2+px+q kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+$$

$$+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2, \qquad a^2=q-\frac{p^2}{4}$$

U holda

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integralda o'zgaruvchini almashtiramiz:

$$x+\frac{p}{2}=t.$$

Pavshanki,

$$dx=dt, \quad x=t-\frac{p}{2.}$$

Natijada

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x^2+\frac{p}{2})^2+a^2}=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{Bt+C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(C-\frac{p}{2}B)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

bo'ladi.

4°. $\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx \quad (m>1)$ sodda kasrning integrali.

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Bx+C}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}dx=\int\frac{B\cdot\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=B\cdot\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Bu integraldagi $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ aniqmas integral

yuqorida keltirilgan rekurrent formula yordamida hisoblanadi.

6-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ butun ratsional funksiyaning integrali oson hisoblanadi:

$$\int P_n(x)dx=\int\left[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\ldots\ldots+a_nx^n\right]dx=$$

$$=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^2}{3}+\cdots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Kasr ratsional funksiya

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\ldots\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\ldots\ldots+b_mx^m}$$

ni integrallash birmuncha murakkab bo'ladi.

Agar $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ noto'g'ri kasr (n>m) bo'lsa, uning butun qismi ajratilib, butun ratsional funksiya va to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida yoziladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=R_n(x)+\frac{\overline{R_n}(x)}{Q_m(x)}.$$

U holda $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int R_n(x)dx+\int\frac{\overline{R_n}(x)}{Q_m(x)}$ bo'ladi.

To'g'ri kasrni integrallash uchun, avvalo bu kasrni sodda kasrlar yig'indisi sifatida yozib olinadi so'ng ularning integrallari topiladi.

Endi ratsional karslarni sodda kasrlarga ajratishga doir bir nechta misollar keltiramiz:

1-misol. Ushbu $\frac{x^2}{x^3-8}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ bo'lganligi sababli (8) formulaga ko'ra

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

bu yerda A, B va C lar noma'lum koeffitsientlar. Bu tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz, u holda $\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$ bo'ladi. Bundan

$$x^2=(A+B)x^2+(2A+C-2B)x+4A-2C.$$

Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, A, B, C larni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1=A+B, \\ x^1 & ,0=2a+C-2B, \\ x^0 & 0=4A-2C \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=\frac{1}{3}, B=\frac{2}{3}, C=\frac{2}{3}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}.$$

2-misol. Ushbu $\frac{7x^2 26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. Kasrning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-9=(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)=$$

$$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3).$$

sodda kasrlarga yoyish formulasidan foydalanib yoyilmani yozamiz:

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Tenglamaning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz. U holda

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}$$

bo‘ladi. Bu kasrlarning suratlarini tenglashtiramiz so‘ngra x oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+B+C, \\ x^2 & 7=5A+B+2C+D, \\ x^1 & 26=9A+B-3C+2D, \\ x^0 & -9=9A-3B-3D, \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=1, B=1, C=-2, D=5.$$

Demak,

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

3-misol. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajrating.

Yechish. (8) formulaga ko'ra

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}.$$

Ushbu tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va suratlarini tenglashtiramiz:

$$4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2).$$

x ga ketma-ket x=0, x=-2 va x=2 qiymatlar berib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & -8=-4A \\ x=-2 & -24=8B \\ x=2 & 40=8C \end{array}\Bigg\}\Rightarrow\begin{cases} A=2, \\ B=-3, \\ C=5. \end{cases}$$

Shunday qilib,

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.$$

4-misol. $\int\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Bundan $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ kelib chiqadi. Endi x o'zgaruvchiga 0, 1, 2 va -1 qiymatlar berib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -A=1, \\ D=2, \\ A+2B+2C+2D=9, \\ -8A-4B+2C-D=0. \end{cases}$$

Bundan A=-1, B=2, C=1, D=2 ni topamiz.

Demak,

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

5-misol. $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi kasr-noto'g'ri kasr. Uning butun va to'g'ri qismlarini ajratib olamiz:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}.$$

To'g'ri qismi $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajratamiz (qarang: 3-misol), natijada $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x-+2}+\frac{5}{x-2}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan keyin integrallaymiz

$$\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+2\int\frac{dx}{x}--3\int\frac{dx}{x+2}+5\int\frac{dx}{x-2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+$$

$$+5\ln|x-2|+\ln C=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x++\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

6-misol. $\int \frac{x^2}{x^3-8}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to‘g‘ri kasrdan iborat. Uni sodda kasrlarga ajratishni 1-misolda ko‘rgan edik. Shu yoyilmadan foydalanib integralni hisoblaymiz:

$$\int \frac{x^2}{x^3-8}dx = \int \frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} A = \frac{1}{3}, \\ B = C = \frac{2}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x^2+2x+4| + \frac{1}{3}\ln C =$$

$$= \ln(C(x-2)(x^2+2x+4))^{\frac{1}{3}} = \ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}.$$

Izoh. Integrallarni hisoblashda har doim ham tayyor sxemalardan foydalanishga harakat qilavermaslik kerak. Xususan, yuqoridagi misolda $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3-8)$ ekanligidan foydalanish mumkin edi. U holda

$$\int \frac{x^2}{x^3-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-8)}{x^3-8}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-8| + \frac{1}{3}\ln C = \ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}.$$

7-§. Ba’zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz yuqorida ratsional funksiyalarning integrallari har doim hisoblanishini ko‘rdik. Irratsional funksiyalarning integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya’ni irratsional funksiyalarning integrallari o‘zgaruvchilarini almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltirilib hisoblanadi.

Quyida ba'zi irratsional funksiyalarning integrallanishini keltirish bilan kifoyalanamiz.

1-misol. Ushbu $J=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $\sqrt{x}=t$, *ya'ni* $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t}2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

bo'ladi. Natijada irratsional funksiyani integrallash ratsional funksiyani integrallanishiga keladi.

Ravshanki, $\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{t+1}$ bo'ladi.

Unda

$$\int\frac{t^2}{1+t}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)+C$$

bo'ladi,

$$J=2\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]+C=t^2-2t+2\ln(t+1)+C=$$

$$=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

bo'ladi. ▶

2-misol. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ ni hisoblang.

Yechish: 1/2 va 1/3 kasrlarning eng kichik umumiy maxraji 6 ga teng bo'lganligi sababli $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. U holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{t^3 6t^5}{t^3-t^2}dt=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=6\int(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+$$

$$+\frac{1}{t-1})dt=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

3-misol. Ushbu $J=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$ integral hisoblansin.

◄ Bu integralda $\sqrt[3]{2x-3}=t$, *ya'ni* $2x-3=t^3$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$2x-t^3=3,\ \ x=\frac{1}{2}(t^3+3),\qquad dx=\frac{3}{2}t^2dt$$

bo'ladi. Demak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int tdt-\frac{3}{2}\int dt+\int\frac{dt}{t+1}=\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\ln|t+1|+C=\frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}}-$$

$$-\frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{1}{3}}+\ln\left|\sqrt[3]{2x-3}+1\right|+C.$$

Endi boshqa ko'rinishidagi ba'zi irratsional funksiyalarni integrallashga doir tushunchalarini keltiramiz:

1. $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ko'rinishdagi integral.

Bu integralda R – o'z argumentlarining ratsional funksiyasi, a, b, c, d lar haqiqiy sonlar va $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – ratsional sonlar bo'lib, ularning eng kichik umumiy maxraji m va $ad-bc\neq0$ bo'lsin. (Agar $ad-bc=0$ bo'lsa, u holda $\frac{ax+b}{cx+d}$=const va $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ifoda x ga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi).

Quyidagi $t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ *yoki* $t^m=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ almashtirishni kiritamiz. U holda

$$x=\frac{t^m d-b}{a-ct^m} \quad va \quad dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}$$

bo'ladi. Natijada, berilgan integral t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi, ya'ni

$$I=\int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t^{\alpha_1\cdot m},\dots,t^{\alpha_n m}\right)\frac{m(ad-b)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt.$$

Bundan avval R ning argumentlari irratsional ifodalardan tashkil bo'lsa, endi argumentlar ratsional va butun ratsional funksiyalarga keltirildi.

Qisqacha qilib yozsak, $I=\int R_1(t)dt$, bunda $R_1(t)$ – ratsional funksiya. Avval olingan natijalarga ko'ra bunday integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

4-misol. $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $R(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x+1})$ ko'rinishdagi funksiya bo'lib, bu yerda $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$. Bu kasrlarning eng kichik umumiy maxraji m=6. U holda $t^6=x+1$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ almashtirishlarni bajarib, quyidagi $I=\int\dfrac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\dfrac{t^3dt}{t-1}$ integralga kelamiz. Natijada

$$I=6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$
$$=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+\left|6\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C$$

bo'ladi.

2. $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ko'rinishdagi integrallar.

I_1 integralni hisoblash uchun ildiz ostidagi ifodadan to'la kvadrat ajratiladi:

$$ax^2+bx+c = a((x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})) = a((x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2).$$

Keyin esa $x+\frac{b}{2a}=u$, $dx=du$ almashtirish bajariladi. Natijada integral jadvaldagi ushbu $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}}$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

I_2 integral suratida ildiz ostidagi ifodaning differensiali ajratib olinadi va bu integral ikkita integral yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi.

$$I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} +$$

$$+(B-\frac{AB}{2a})I_1 = \frac{A}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2+bx+c)+(B-\frac{Ab}{2a})I_1 =$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{Ab}{2a})I_1,$$

bu yerda I_1 yuqorida hisoblangan integral.

I_3 integralni hisoblash $x=\frac{1}{u}$, $dx=-\frac{1}{u^2}du$ almashtirish yordamida I_1 ga keltiriladi.

5-misol. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ ni hisoblang.

Yechish. Berilgan integral I_2 ko'rinishidagi integral.

$$\int \frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{3}{2}\int (x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+2x+2) -$$

$$-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

6-misol. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integral I_3 ko‘rinishdagi integral.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{u} \\ dx=-\frac{1}{u^2}du \end{array}\right|=-\int\frac{udu}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}-1}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}}=$$

$$=\int\frac{d(u-1)}{\sqrt{2-(u-1)^2}}=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}x}+C.$$

8-§. Tirgonometrik funksiyalarni integrallash

Ma’lumki, integrallar jadvalida

$$y=sinx, \qquad y=cosx,$$

funksiyalarning integrallari ham oson hisoblanadi:

Masalan,

$$\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$$

Shuningdek, $y=sin\ ax$, $y=cosa\ x$, $y=tgax$, $y=ctgax$ hamda

$$y=sin(x+a), \qquad y=cos(x+a),$$

$$y=tg(x+a), \qquad y=ctg(x+a)$$

funksiyalarning integrallari ham oson hisoblanadi.

Masalan,

$$\int\sin(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)d(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

Ko‘p hollarda trigonometrik funksiyalarni integrallashda

$$tg\frac{x}{2}=t$$

(ba'zan *sinx=t, cosx=t, tgx=t*) almashtirish natijasida qaralayotgan aniqmas integral ratsional funksiyalarni integrallashga keladi. Bunda

$$x=2arctgt, \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

bo'lishini e'tiborga olish kerak bo'ladi.

Masalan, $J=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ integralni hisoblashda

$$tg\frac{x}{2}=t$$

almashtirish bajarib hisoblanadi:

Ravshanki,

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Unda

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+c=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C$$

bo‘ladi. ►

Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallashda trigonometriyada ma’lum bo‘lgan ushbu

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right], \quad \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

formulalardan foydalanish maqsadga muofiq bo‘ladi.

Trigonometrik funksiyalarni integrallashga doir bir nechta misollar keltiramiz.

1-misol. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ ni hisoblang.

Yechish. Bunda $tg\frac{x}{2} = t$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1+2t+t^2} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{-2}{t+1} + C = -\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + C$$

bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, $t = tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash osonlashadi.

2-misol. $\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $tg\frac{x}{2} = t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int \frac{2dt}{t^2+2t+17}=$$

$$=2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C$$

Ko‘pgina hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional funksiyalarni integrallashga olib keladi. Shuning uchun, ba’zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish ancha qulay bo‘ladi.

a) R(sinx, -cosx)=−R(sinx, cosx) bo‘lsa, u holda sinx=t almashtirish bajariladi.

Agar R(-sinx, cosx)=-R(sinx, cosx) bo‘lsa, u holda cosx=t almashtirish bajariladi. Nihoyat,

R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx) bo‘lsa, u holda tgx=t almashtirishdan foydalaniladi.

3-misol. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu holda integral ostidagi funksiya uchun

$$R(-sinx,\ -cosx)=R(sinx,\ cosx)$$

shart bajariladi, tgx=t almashtirishdan foydalanamiz. Natijada

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}=\int (1+tg^2x)d(tgx)=\int (1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=tgx+\frac{tg^3x}{3}+C$$

bo‘ladi.

b) $I=\int \sin^n x\cdot \cos^m xdx$ integralni qaraylik. Bunda m, n − butun sonlar. Quyidagi uchta holni ko‘ramiz:

1) m va n lardan hech bo‘lmaganda biri toq son bo‘lsin. Masalan, m − toq son, ya’ni m=2k+1, k − butun son. U holda t=sinx, dt=cosxdx, $\cos^{2k}x=(1-\sin^2x)^k=(1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I=\int \sin^n x\cdot \cos^m xdx=\int \sin^n x\cos^{2k} x\cos xdx=\int t^n\cdot (1-t^2)^k dt$$

bo'ladi. Demak, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

4-misol. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x dx = \int \sin^4 2x(1-\sin^2 2x)\cos 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int t^4(1-t^2)dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{14}t^7 + C = \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{14}\sin^7 2x + C$$

kelib chiqadi.

2) m va n musbat juft sonlar bo'lsin, ya'ni m=2s, n=2k, s, k – natural sonlar. Bu holda ushbu

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bu formulalar orqali sinx va cosx larning darajalarini pasaytirish mumkin bo'ladi.

5-misol. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x(\sin x\cos x)^2 dx =$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot$$

$$\cdot \cos 2x dx == \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3) Agar m va n lar juft sonlar bo'lib, ularning kamida biri manfiy bo'lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda tgx=t almashtirishni bajarish lozim bo'ladi.

c) $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$, $n-$natural son, n>1 ko'rinishdagi integrallar mos ravishda tgx=t va ctgx=t almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, tgx=t, x=arctgt, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx=\int\frac{t^n}{1+t^2}dt$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

6-misol. $\int tg^5 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi almashtirishlarni bajarsak,

$$\int tg^5 x dx=\int\frac{t^5}{1+t^2}dt=\int(t^3-t+\frac{t}{t^2+1})dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\frac{1}{2}\ln(tg^2x+1)+C$$

hosil bo'ladi.

d) $\int\sin nx\cdot\cos mxdx$, $\int\cos nx\cdot\cos mxdx$, $\int\sin nx\cdot\sin mxdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$

$$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x),$$

$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig'indining integraliga keltirish mumkin.

7-misol. $\int\sin 5x\cdot\cos 3xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int\sin 5x\cdot\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin(5x-3x)+\sin(5x+3x))dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 2x+\frac{1}{2}\int\sin 8xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C.$$

10-bob. ANIQ INTEGRAL

1-§. Aniq integral tushunchasi

Aniq integral matematikaning muhim tushunchalaridan hisoblanadi. Bu tushunchani bayon etishdan avval, unga olib keladigan masalalardan birini keltiramiz.

1°. O'tilgan yo'l haqidagi masala.

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab, $V=V(t)$ tezlik bilan harakat qilsin. Uning t_0 momentdan T momentgacha ketgan vaqtda bosib o'tgan yo'lni topish talab etilsin.

Ma'lumki, tezlik V o'zgarmas bo'lganda, o'tilgan yo'l

$$S=V\cdot(T-t_0)$$

bo'ladi.

Tezlik o'zgaruvchan bo'lganda, ya'ni u vaqtning funksiyasi $(V=V(t))$ bo'lganda, ravshanki, bu formula bilan moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini aniq hisoblab bo'lmaydi. O'tilgan yo'lni aniq hisoblash maqsadida $[t_0, T]$ vaqt oralig'ini

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \ ,(t_0<t_1<t_2<\cdots\ldots<t_n=T)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz. Natijada $[t_0,T]$ ushbu

$$[t_0,\ t_1],\ [t_1,\ t_2], \ldots, [t_{(n-1)},\ t_n]=[t_{(n-1)}, T]$$

bo'laklarda ajraladi. Har bir

$$[t_k, t_{(k+1)}] \qquad\qquad (k=0,1,2,\ldots\ldots,n-1)$$

da ξ_k nuqta olib, so'ng shu $[t_k,\ t_{(k+1)}]$ da nuqtaning tezligi o'zgarmas $V(\xi_k)$ bo'lsin deb, o'tilgan yo'lni

$$V(\xi_k)\cdot(t_{(k+1)}-t_k)=V\,(t_k)\cdot\Delta t_k$$

$(\Delta t_k=t_{(k+1)}-t_k)$ bo'lishini topamiz. Bu ifoda albatta $[t_k,t_{(k+1)}]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'lni taqriban ifodalaydi. Unda $[t_0,T]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l

$$S\approx V(\xi_0)\cdot\Delta t_0+V(\xi_1)\cdot\Delta t_1+,,,+V(\xi_k)\cdot\Delta t_k+$$

$$+\ldots+V(\xi_{n-1})\cdot\Delta t_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

bo'ladi.

Endi $[t_k,t_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,...,n=1) segmentlar uzunliklari

$$\Delta t_k=t_{(k+1)}-t_k$$

ning eng kattasini λ $(\lambda= maxk\{\Delta t_0,\Delta t_1,\ldots,\Delta t_{(n-1)}\})$ deylik.

Unda λ nolga intilganda $(\lambda\to 0)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\Delta t_k$$

yig'indining limiti moddiy nuqtaning $[t_0,T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'lni ifodalaydi.

Demak, o'tilgan S yo'l $\lambda\to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

yig'indining limiti bo'ladi.

Umuman, ko'p masalalarning yechimi yuqoridagi kabi yig'indining limitini topish bilan hal etiladi. Bu aniq integral tushunchasiga olib keladi.

2°. Funksiyaning integral yig'indisi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya [a,b] segmentda berilgan bo'lsin. [a,b] segmentni

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n$$

$$(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{(n-1)},x_n]$$

$$(x_0=a,x_{n=b})$$

Har bir $[x_k,x_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,...,n=1) bo'lakchada ixtiyoriy ξ_k $(x_k\leq\xi_{(k)}\leq x_{(k+1)})$ nuqtani olamiz. So'ng funksiyaning shu nuqtada qiymati $f(\xi_k)$ ni $\Delta x_k = x_{(k+1)} - x_k$ ga ko'paytirib quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k =$$

$$= f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_k$$

$$+ \ldots + f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

Bu yig'indi *f(x)* funksiyaning [a,b] segment bo'yicha integral yig'indisi deyiladi va u σ orqali belgilanadi:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning [a,b] segmentdagi integral yig'indisi (yuqoridagi bo'linishga nisbatan)

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \cdot \Delta x_k$$

bo'ladi.

3°. Aniq integral ta'rifi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan bo'lsin.

Bu funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

ni qaraymiz.

Ta'rif. Agar $\lambda \to 0$ da (yoki $n \to \infty$ da) *f(x)* funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

chekli limitga ega bo'lsa, bu limit *f(x)* funksiyaning aniq integrali deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$$

Bu holda *f(x)* funksiya [a,b] da integrallanuvchi deyiladi, a – integralning quyi chegarasi, b integralning yuqori chegarasi, *f(x)* integral ostidagi funksiya, *f(x)dx* integral ostidagi ifoda deyiladi.

Endi aniq integralning mavjudligini ifodalaydigan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* segmentida uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral mavjud bo‘ladi.

Eslatma. Funksiyaning uzluksiz bo‘lishi sharti uning integrallanuvchi bo‘lishining yetarli sharti bo‘ladi. Agar funksiya [a,b] segmentda chegaralangan bo‘lib, u shu segmentning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo‘lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u integrallanuvchi, ya’ni uning aniq integrali mavjud bo‘ladi.

Eslatma. Agar *f(x)* funksiya [a,b] segmentda integrallanuvchi bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = 0$$

deb qaraladi.

2-§. Aniq integralning xossalari

Aytaylik, *f(x)* funksiya [a,b] segmentda berilgan bo‘lib, uning aniq integrali $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo‘lsin.

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1°. Ushbu $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx \quad (c-const)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

2°. Agar *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,b] da integrallanuvchi bo'lsa u holda f(x)±g(x) funksiya ham [a,b] da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

3°. Agar *f(x)* funksiya [a,b] da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy a<c<b bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

4°. Agar *f(x)* funksiya [a,b] da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy x∈[a,b] da f(x)≥0 bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

5°. Agar *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,b] da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy x∈[a,b] da *f(x)≤ g(x)* bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ bo'ladi.

3-§. Aniq integrallarni hisoblash usullari

1°. Nyuton-Leybnits formulasi va uning yordamida aniq integrallarni hisoblash. Aytaylik, y=f(x) funksiya [a,b] segmentda uzluksiz bo'lib, F(x) esa uning boshlang'ich funksiyasi (F'(x)=f(x)) bo'lsin. U holda ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula o'rinli bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

◀ [a,b] segmentni $a=x_0,x_1,x_2,...,x_{n=b}$ $(x_0<x_1<...<x_n)$ nuqtalar yordamida n ta $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{(n-1)},x_n]$ bo'laklarga ajratamiz.

So'ng quyidagi tenglikni qaraymiz:

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=[F(x_n)-F(x_{(n-1)})]+[F(x_{(n-1)})-F(x_{(n-2)})]+$$
$$...+[F(x_2)-F(x_1)]+[F(x_1)-F(x_0)].$$

Mazkur kitobda Lagranj formulasi deb ataluvchi ushbu

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

formulani keltirgan edik. Shu formuladan foydalanib yuqoridagi tenglikning o'ng tomonidagi ayirmalarni quyidagicha yozamiz:

$$F(b)-F(a)=F'(\xi_k)\cdot(x_n-x_{n-1})+$$
$$+F'(\xi_{n-1})\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})+$$
$$+...+F'(\xi_2)\cdot(x_2-x_1)+F'(\xi_1)\cdot(x_1-x_0)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}F'(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Demak, $F(b)-F(a)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u [a,b] da integrallanuvchi. Bunobarin $\lambda\to0$ da

$$\lim_{\lambda\to0}=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. Keyingi tenglamadan

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda (1) Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aniq integrallarni sodda, ayni paytda qulay bo'lgan hisoblash yo'llaridan biri ularni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblashdir.

Agar quyidagi $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$ belgilash kiritilsa, unda Nyuton-Leybnits formulasi ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

ko'rinishga keladi.

Nyuton-Leybnits formulasi yordamida

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral quyidagicha hisoblanadi:

Avvalo $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ topiladi. Aytaylik, bu integral topilib, u $\Phi(x)$ ga teng bo'lsin.

$$\int f(x)dx = \Phi(x)+C$$

So'ng bu funksiyaning a va b nuqtalardagi qiymatlari hisoblanib $\Phi(b)-\Phi(a)$ ayirma topiladi. Bu qiymat Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra $\int f(x)dx$ integralning qiymati bo'ladi.

Masalan, $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$ bo'ladi.

2°. O'zgaruvchilarni amashtirish usuli.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan va uzliksiz bo'lib, uning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni hisoblash talab etilsin. Bu integralda

$$x=\varphi(t)$$

almashtirish bajaramiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentda uzluksiz;

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentda uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega. U holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

bo'ladi.

◄ Aytaylik, F(x) funksiya f(x) ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dx=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=$$

$$=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. Bu (2) munosabatni isbotlaydi. ►

1-misol. Ushbu

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2dx}$$

integral hisoblansin.

◀ Bu integralda x o'zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$x=2\sin t.$$

Bunda $dx=(2\sin t)'\cdot dt=2\cos t\,dt$ bo'lish, x=0 bo'lganda t=0, x=2 bo'lganda, $t=\frac{\pi}{2}$ bo'ladi. Unda (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt.$$

Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt=$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt=$$

$$=2\left[t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=2\left(\frac{\pi}{0}-0\right)=\pi.$$

Demak,

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2dx}=\pi.$$

2-misol. $\int_0^2\sqrt{1-x^2}dx$ hisoblang.

Yechish. Bu integralda x=sint almashtirishni bajaramiz. U holda x=sint funksiya yuqoridagi teoremadagi barcha shartlarni

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada qanoatlantiradi va dx=costdt, a=0 da $\alpha=0$, b=1 da $\beta=\pi/2$. Demak, (3) formulaga ko'ra

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

3-misol. $\int_0^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, u holda dx=2tdt va a=0 da $t_1=\sqrt{a}=0$, b=9 da $t_2=\sqrt{b}=3$ bo'ladi.

(3) formulaga ko'ra

$$\int_0^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^3\frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^3=6-2\ln 4.$$

4-misol. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$ ni hisoblang.

Yechish. *sinx=t* deb almashtirish bajaramiz. U holda *cosxdx=dt*, $t_1=\sin(\pi/6)=1/2$, $t_2=\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ bo'ladi. (3) formulaga asosan

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}t^{-5}dt=-\frac{1}{4t^4}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{9}\right)=\frac{32}{9}.$$

3°. Bo'laklab integrallash usuli.

Aytaylik, u=u(x) va v=v(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan, uzluksiz u'(x) va v'(x) hosilalarga ega bo'lsin.

Ravshanki,

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Demak, u(x)+v(x) funksiya

$$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Nyuton-Leybnits fopmulasiga ko'ra

$$\int_a^b [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx=[u(x)\cdot (x)]\Big|_a^b$$

bo'ladi. Agar

$$\int_a^b [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx=\int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx+$$

$$+\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=\int_a^b v(x)\cdot du(x)+\int_a^b u(x)\cdot dv(x)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\int_a^b v(x)\cdot du(x)+\int_a^b u(x)\cdot dv(x)=[u(x)\cdot v(x)]_a^b$$

bo'lib, bundan esa

$$\int_a^b u(x)\cdot du(x)=[u(x)\cdot v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\cdot du(x) \qquad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik aniq integralning bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

U u(x)dv(x) ni integrallashni v(x)du(x) ni integrallashga olib keladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun integral ostidagi ifodani u(x) va dv(x) lar ko'paytmasi ko'rinishida yozib olinadi, bunda, albatta v(x)du ifodalarning integralini oson hisoblana olinishi lozimligini e'tiborda tutish kerak.

1-misol. Ushbu

$$\int_e^{e^2} x \ln x dx$$

Integralni hisoblaymiz.

◄ Bu integralda $u=\ln x$, $dv=x\,dx$ deyiladi. Unda

$$du = \frac{1}{x}dx, \qquad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasi (3) dan foydalanib topamiz:

$$\int_e^{e^2} x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^4\cdot\ln e^2 - e^2\ln e - \frac{x^2}{2}\Big|_e^{e^2}\right] = \frac{1}{2}\left(2e^4 - e^2 - \frac{e^4}{2} + \frac{e^4}{2}\right) = \frac{1}{4}(3e^2-1)e^2.$$

2-misol. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda u=x, dv=cosxdx deb olsak, du=dx, v=sinx hosil bo'ladi.

Demak, (2) ga ko'ra

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = (x\sin x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi-2}{2}.$$

4-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Biz yuqorida integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa integralni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash mumkinligini ko'rdik. Ammo boshlang'ich funksiyani topish masalasi doim osongina hal bo'lavermaydi. Agar integral ostidagi funksiya murakkab bo'lsa, tegishli aniq integralni hisoblashni taqribiy usullarini qo'llash lozim bo'ladi.

1°. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz, [a,b] segmentni

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{(n-1)}<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lamiz.

Bu holda

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n},$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad (k0,1,...,n)$$

bo'ladi.

Berilgan f(x) funksiyaning x_k nuqtadagi qiymati $f(x_k)$ ni hisoblab, f(x) funksiyaning $[x_k, x_{(k+1)}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f(x_k)\cdot\Delta x_k = f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,......,n-1) segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx \approx f(x_0)\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_1}^{x_1} f(x)dx \approx f(x_1)\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \approx f(x_2)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx f(x_{n-1})\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{a}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx +$$

$$+\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right]$$

Demak,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right],$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad (4)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblovchi formula to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi deyiladi.

2°. Trapetsiyalar formulasi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo‘lsin [a,b] segmentni yuqoridagidek n ta teng bo‘lakka bo‘lib, f(x) funksiyaning $[x_k, x_{(k+1)}]$ segment bo‘yicha olingan aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot \Delta x_k \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot \frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,......,n-1) segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_{a}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{2n}\Big[\big(f(x_0)+f(x_1)\big)+\big(f(x_1)+f(x_2)\big)+\big(f(x_2)+f(x_3)\big)+$$

$$+\ldots+\big(f(x_{n-1})+f(x_n)\big)\Big]=$$

$$=\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_0)}{2}+f(x_1+f(x_2))+\ldots+f(x_{n-1})\right] \qquad (5)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblovchi formulaga trapetsiyalar formulasi deyiladi.

3°. Parabolalar (Simpson) formulasi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. [a,b] segmentni

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{(2n-2)}<x_{(2n-1)}<x_{2n}=b$$

nuqtalar yordamida 2n ta teng bo'lakka bo'lamiz.

f(x) funksiyaning $[x_{2k}, x_{(2k+2)}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})]$$

taqribiy ifodalaymiz. Bu taqribiy formulani har bir

$$[x_{2k}, x_{2k+2}] \qquad (k=0,1,2,.......,n-1)$$

segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx +$$

$$+ \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}\Big[\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) +$$

$$+\big(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\big) + \cdots (f(x_{2n-2})) +$$

$$+ 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \cdots +$$

$$+ f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + \cdots + (f(x_{2n-2}))]$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big[\big(f(x_0) + f(x_{2n})\big) +$$

$$+4\big(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})\big) +$$

$$+2\big(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})\big)\Big] \qquad (6)$$

Bu (6) formula parabolalar (Simpson) formulasi deyiladi.
Misol. Ushbu

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

aniq integral to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblansin.

◀ [0,1] segmentni 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz:

$$0=x_0,\ x_1=0,2,\ x_2=0,4,\ x_3=0,6,\ x_4=0,8,\ x_5=1$$

Bu nuqtalarda $f(x)=e^{-x^2}$ funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0)=1,00000,\quad f(x_1)=0,96079,\quad f(x_2)=0,85214,$$

$$f(x_3)=0,69768,\quad f(x_4)=0,52729,\quad f(x_5)=0,36788.$$

Har bir bo'lakning o'rtasini ifodalovchi nuqtalar quyidagicha

$$x_{\frac{1}{2}}=0,1,\ \ x_{\frac{3}{2}}=0,3,\ \ x_{\frac{5}{2}}=0,5,\ \ x_{\frac{7}{2}}=0,7,\ \ x_{\frac{9}{2}}=0,9.$$

bo'lib, bu nuqtalardagi qiymatlari esa quyidagicha bo'ladi:

$$f\left(x_{\frac{9}{2}}\right)=0,99005,\quad f\left(x_{\frac{3}{2}}\right)=0,91393,\quad f\left(x_{\frac{5}{2}}\right)=0,77680,$$

$$f\left(x_{\frac{7}{2}}\right)=0,61263,\quad f\left(x_{\frac{9}{2}}\right)=0,44486.$$

a) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi (4) bo'yicha.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{5}(0,99005+0,91393+0,77680+0,61263+0,44486)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3,74027 \approx 0,74805$$

b) trapetsiyalar formulasi (5) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{1,00000+0,36788}{2}+0,96079+0,85214+0,69768\right.$$

$$\left.+0,52729\right)=\frac{1}{5}\left(0,68394+3,03790\right)=\frac{1}{5}\cdot 3,72184\approx 0,74437$$

v) Simpson formulasi (6) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}\left[(1,00000+0,36788)+\right.$$

$$+4(0,99005+0,91393+0,77680+0,61263+0,44486)+$$

$$+2(0,96079+0,85214+$$

$$\left.+0,69768+0,52729)\right]=$$

$$=\frac{1}{30}(1,36788+4\cdot 3,74027+2\cdot 3,03790)=$$

$$=\frac{1}{30}(1,36788+6,07580+14,96108)\approx$$

$$\approx 0,74682$$

Taqribiy formulalar yordamida hisoblab topilgan

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integralning qiymatini, uning

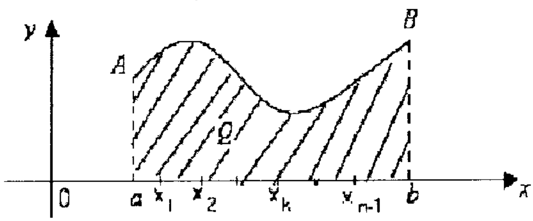
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0,74685...$$

qiymati bilan taqqoslab, Simpson formulasi yordamida topilgan integralning taqribiy qiymati aniqroq ekanini ko'ramiz.

11-bob. ANIQ INTEGRALNING BA'ZI BIR TADBIQLARI

1-§. Tekis shaklning yuzini hisoblash

$f(x)$ funksiya [a,b] segmentda aniqlangan, uzliksiz hamda ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsin. Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan OX – abssissa o'qi bilan chegaralangan shaklni qaraylik (1-chizma)



1-chizma

Odatda, bunday tekis shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Uni $aABb$ deylik.

Agar $f(x)$ funksiya [a,b] segmentda o'zgarmas, ya'ni

$$f(x)=C=const$$

bo'lsa, u holda $aABb$ shakl to'g'ri to'rtburchak bo'lib, uning yuzi $S=C\cdot(b-a)$ bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsa, unda $aABb$ shaklning yuzi quyidagicha topiladi:
[a,b] segmentni

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\dots\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

$$(x_0<x_1<x_2<\dots<x_n)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz va har bir

$$[x_k,x_{k+1}]\ (k=0,1,2,\dots,\ n-1)$$

segmentda ixtiyoriy

$$\xi_k \qquad (\xi_k\in[x_k,x_{k+1}])$$

nuqta olamiz.

So'ng har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentda $f(x_k)$ funksiyani o'zgarmas va uni $f(\xi_k)$ ga teng qilib olsak, u holda $x_k A_k B_k x_{k+1}$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini

$$f(\xi_k)\cdot(x_{(k+1)}-x_k)$$

deb olish mumkin bo'lib, $aABb$ shaklning yuzini esa

$$S\approx f(\xi_0)\cdot(x_1-x_0)+f(\xi_1)\cdot(x_2-x_1)+...+f(\xi_k)\cdot(x_{(k+1)}-x_k)+...+$$
$$+f(\xi_{(n-1)})\cdot(x_n-x_{(n-1)})$$

deyish mumkin. Demak,

$$S\approx\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (1)$$

bunda $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

$aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalovchi formula taqribiy formuladir.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklari sonini shunday orttira boraylikki, bunda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentning uzunligi Δx_k nolga intila borsin. U holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig'indining miqdori ham o'zgara boradi.

Ma'lumki, bu holda

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

bo'ladi.

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral orqali topiladi.

Eslatma. Agar egri chiziqli trapetsiya OX o'qidan pastda joylashgan bo'lsa, ($f(x)<0$, $x\in[a,b]$) unda bu shaklning yuzi ushbu

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

formula yordamida topiladi.

Masalan, yuqoridan $f(x)=x^2$ parabola, yon tomonlardan x=1, x=3, vertikal to'g'ri chiziqlar va pastdan OX o'qi bilan chegaralangan shaklning yuzi yuqorida keltirilgan formulaga ko'ra

$$S=\int_1^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1}{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$$

bo'ladi.

Agar tekislikdagi shakil quyidagi

$$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ x=a,\ x=b$$

($f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalar [a,b] da uzluksiz va $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, $f_1(x)>f_2(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$Q=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

formula bilan topiladi.

Demak, manfiy bo'lmagan uzluksiz funksiyaning aniq integral egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng. Bu aniq integralning geometrik ma'nosini ifodalaydi.

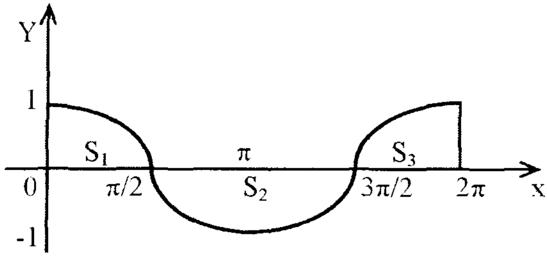
1-misol. $y=\cos x$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzi hisoblansin, bunda $x\in[0;2\pi]$ (2-chizma).

Yechish. $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ va $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ da cos $x\geq0$ hamda $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ da cos $x\leq0$ bo'lgani uchun

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}\cos xdx+\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\cos x)dx\right|+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos xdx=$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right| + \sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 +$$

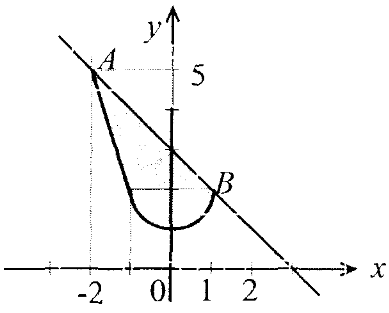
$$+\left|\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right| + \sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1 + |-1-1| - (-1) = 4$$



2-chizma

Demak, $S=4$.

2-misol. $y=x^2+1$ va $y=3-x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.



3-chizma

Yechish. Figurani yasash uchun avval ushbu $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$ sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz (3-chizma).

Bu chiziqlar $A(-2;5)$ va $B(1;2)$ nuqtalarda kesishadi.
U holda

$$S\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}.$$

2-§. Yoy uzunligi

f(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan va uzliksiz bo‘lsin. Uning grafigi tekislikning

$$(a,\ f(a))\ va\ (b,\ f(b))$$

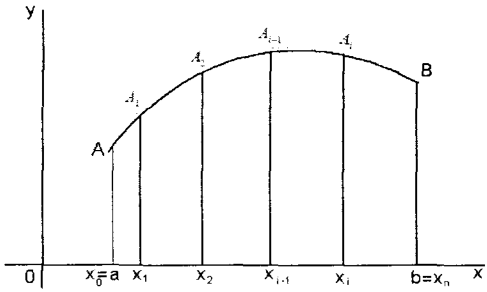
nuqtalari orasidagi egri chiziq yoyni ifodalasin (1-chizma).

Shu yoy uzunligini topish talab etilsin.

Agar *f(x)* funksiya [a,b] oraliqda o‘zgarmas, $f(x)=c,\ c=cons$ bo‘lsa, bu funksiyaning grafigi tekislikda (a,b), (b,c) nuqtalarni birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi bo‘lib, uning uzunligi

$$l_1=b-a$$

bo‘ladi.



1-chizma

Agar *f(x)* funksiya [a,b] oraliqda chiziqli funksiya, ya’ni $f(x)=kx+b$ $(k,b$ – o‘zgarmas sonlar) bo‘lsa, bu funksiyaning grafigi (a,*f(a)*), (b,*f(b)*) nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, uning uzunligi

$$l_2=\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}=(b-a)\cdot\sqrt{1+k^2}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya [a,b] oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 2-chizmada tasvirlangan egri chiziq yoyi bo'lsin.

Uni $\breve{AB}$ deb belgilaymiz. [a,b] segmentda ixtiyoriy

$$a=x_0,\ x_1,x_2,\ldots,x_n=b\ (x_0<x_1<x_2,<\ldots<x_4)$$

nuqtalar olib, uni bu nuqtalar yordamida n ta bo'lakchalarga ajratamiz.

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \ldots,\ [x_k,x_{k+1}],\ \ldots,\ [x_{n-1},x_n]$$

[a,b] segmentni bo'luvchi nuqtalar

$$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{n-1},x_n$$

orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning $\breve{AB}$ yoy bilan kesishgan nuqtalari

$$A_k(x_k,f(x_k))\ (k-0,1,2,\ldots n)$$

$A_0=A,\ A_n=B\ A_0=A,\ A_n=B$ bo'ladi. $\breve{AB}$ yoyidagi bu nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, L_n siniq chiziqni hosil qilamiz.L_n siniq chiziq, $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq deyiladi. Bu siniq chiziq perimetri

$$l_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki, l_n perimetr [a,b] [a,b] oraliqning bo'linishiga, ya'ni $\Delta x_k=x_{k+1}\ x_k$ ga bog'liq bo'ladi.

Avvaldagidek, $\Delta x_k=x_{k+1}\,x_k$ larning eng kattasini λ bilan belgilaymiz.

Ta'rif. Agar $l\to 0$ da

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]}$$

perimetr chekli limitga ega bo‘lsa, $\overset{\smile}{AB}$ yoy uzunlikka ega deyiladi va $\lim\limits_{\lambda \to 0} l_n = l$ limit $\overset{\smile}{AB}$ yoyining uzunligi deyiladi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz *f'(x)* hosilaga ega bo‘lsin. Bu funksiyaning [a,b] oraliqdagi grafigi $\overset{\smile}{AB}$ yoyni tasvirlasin.

Ma’lumki, $\overset{\smile}{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziqning perimetri

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo‘ladi.

Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da *f(x)* funksiyaga Lagranj teoremasini qo‘llaymiz. U holda shunday

$$\xi_k \ (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$$

nuqta topiladiki,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) + f'(0_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

bo‘ladi.

Demak,

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_n$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indi

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiyaning integral yig‘indisini eslatadi.

Uning integral yig‘indidan farqi shuki, integral yig‘indidagi ξ_k nuqta ixtiyoriy bo‘lgan holda, yuqoridagi yig‘indida esa ξ_k nuqta $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtadir. Ammo

$$\sqrt{1+f'^2(x)}$$

funksiya integrallanuvchi bo‘lganligi (chunki shartga ko‘ra, *f'(x)* uzluksiz) sababli buning ahamiyati yo‘q. Demak,

$$\lim_{\lambda\to 0} l_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k \int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Bu esa $\breve{AB}$ yoyga chizilgan perimetri λ→0 da chekli limitga ega bo‘lishini va u limit

$$\int_a^b\sqrt{1+f^2(x)}dx$$

integralga teng ekanini bildiradi.

Demak $\breve{AB}$ yoy uzunlikka ega va bu yoy uzunligi

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

formula yordamida (ya’ni aniq integral yordamida) hisoblanadi.

Misol. Ushbu

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}} \qquad (0\le x\le 4)$$

funksiya tasvirlagan egri chiziqning uzunligi topilsin.

◄ Avvalo berilgan funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x)=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Undan

$$1+f'^2(x)=1+\frac{9}{4}x,\quad \sqrt{1+f'^2(x)}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

bo‘lib,

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

bo'ladi. Bu integralda

$$1+\frac{9}{4}x=t,\quad dx=\frac{9}{4}dt,\quad 1\le t\le 10$$

almashtirish bajaramiz. Natijada

$$\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_1^{10}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{8}{27}\cdot t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{10}=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right)=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

bo'ladi. Demak, yoy uzunli $l=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$ ga teng. ►

3-§. Aylanma sirtning yuzi va uni hisoblash

1°. Aylanma sirt va uning yuzi tushunchasi. Ma'lumki, to'g'ri chiziq kesmasini biror o'q atrofida aylantirishdan silindrik, konus (kesik konus) sirtlar hosil bo'ladi. Bu sirtlar yuzaga ega va ular ma'lum formulalar yordamida topiladi.

Aytaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\ge 0$ bo'lsin. Bu funksiya grafigi $\breve{AB}$ yoyini tasvirlasin (1-chizma).

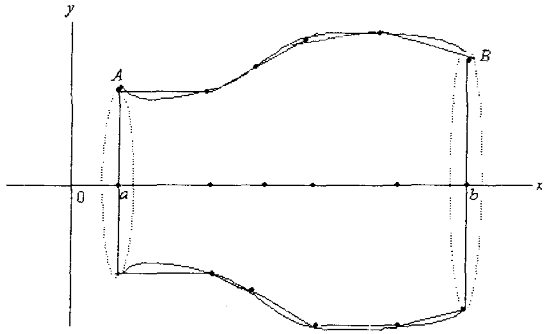
$\breve{AB}$ yoyni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deyiladi. Uni T deylik. [a,b] segmentni ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\qquad (a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

bo'laklashni olaylik. Bu bo'laklashning har bir

$$x_k(k=0,1,2,\dots,n)$$

bo'luvchi nuqtalari orqali Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning $\breve{AB}$ yoyi bilan kesishish nuqtalarini $A_k=A_k(x_k,f(x_k))$ bilan belgilaylik. $(A_0=A,\ A_n=B;\ k=0,1,2,\dots,n)$. Bu nuqtalarni o'zaro to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan birlashtirib, $\breve{AB}$ yoyiga L siniq chiziq chizamiz.



1-chizma

$\breve{AB}$ yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirish bilan birga L siniq chiziqni ham shu o‘q atrofida aylantiramiz. Natijada kesik konus sirtlarining birlashmasidan tashkil topgan K sirt hosil bo‘ladi. Bu K sirt yuzaga ega va uning yuzi

$$\mu(K) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

ga teng. (Bunda kesik konusning yon sirtining yuzini topish formulasidan foydalanildi.)

Ravshanki, K sirt, binobarin uning yuzi $\mu(K)$ [a,b] segmentning bo‘laklashlariga bog‘liq bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, [a,b] segmentning diametri $\lambda_p<\delta$ bo‘lgan ixtiyoriy P bo‘laklashi uchun $|\mu(K)-S|<\varepsilon$ $(S\in R)$ tengsizlik bajarilsa, S son $\mu(K)$ ning $\lambda p\to 0$ dagi limiti deyiladi: $\lim\limits_{\lambda_p\to 0} \mu(K) = S$.

2-ta’rif. Agar $\lambda_p\to 0$ da $\mu(K)$ yig‘indi chekli S limitga ega bo‘lsa, T aylanma sirt yuzaga ega deyiladi.

Bunda S son T aylanma sirtning yuzi deyiladi: $S=\mu(T)$. Demak,

$$\mu(T)=\lim_{\lambda_p\to 0}2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}.$$

2°. ***Aylanma sirt yuzini hisoblash.*** Faraz qilaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo‘lib, u $[a,b]$ segmentda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

Bu funksiya grafigi $\breve{AB}$ yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan T aylanma sirtning yuzini topamiz.

◄ [a,b] segmentning ixtiyoriy P bo‘laklashini olib, yuqoridagidek

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

yig‘indini tuzamiz.

Lagranj teoremasiga ko‘ra

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=f'(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

bo‘ladi, bunda $\xi_k\in[x,x_{k+1}]$. Natijada

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k+\pi\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\Big[(f(x_k)-\right.$$

$$\left.-f'^2(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))\Big]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\right\}. \qquad (1)$$

$f'(x)\in C'[a,b]$ bo‘lganligi sababli $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\in R[a,b]$ bo‘ladi. Demak, $\lambda_p\to 0$ da

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (2)$$

Ravshanki, $\sqrt{1+f'^2(x)} \in C[a,b]$.

Demak, bu funksiya [a,b] da o'zining maksimum qiymatiga ega bo'ladi. Uni M deylik:

$$M = \max_{a\le x\le b} \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

f(x) funksiya [a,b] segmentda tekis uzluksiz. Unda $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham, $\dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ ga ko'ra shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\lambda_p<\delta$ bo'lganda

$$|f(x_k)-f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}, \quad |f(x_{k+1})-f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

bo'ladi. Shularni e'tiborga olib topamiz:

$$\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k\right\}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left[|f(x_k)-f(\xi_k)|+|f(x_{k+1})-f(\xi_k)|\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k <$$

$$< M\left[\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}+\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k < \varepsilon.$$

Bundan $\lambda_p\to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))\right]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \to 0 \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$\lambda_p\to 0$ da (1) tenglikda limitga o'tib, (bunda (2) va (3) munosabatlarni e'tiborga olib) aylanma sirtning yuzi uchun

$$\mu(\Pi) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (4)$$

bo'lishini topamiz. ►

1-misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}),\qquad a>0,\quad 0\leq x\leq a$$

zanjir chizig'ini Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi topilsin.

◀ Ravshanki, $f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})$ (4) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$\mu(T)=2\pi\int_0^a\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^a=\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$$ ▶

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq yuqori yarim tekislikda joylashgan bo'lib, u ushbu

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\qquad (a\leq t\leq\beta)$$

parametrik tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo'lsin. Bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalari $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi

$$\mu(T)=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (5)$$

bo'ladi.

2-misol. Ushbu

$$x^2+(y-2)^2=1$$

aylanani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning (torning) yuzi topilsin.

◀ Aylananing tenglamasini quyidagicha

$$x=\varphi(t)=\cos t$$

$$y=\psi(t)=2+\sin t \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

parametrik ko‘rinishda yozamiz.

Izlanayotgan aylanma sirtning yuzi, (5) formulaga ko‘ra

$$\mu(T)=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\sqrt{(\cos t)'^2+(2+\sin t)'^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)dt=8\pi^2$$

bo‘ladi. ▶

4-§. O‘zgaruvchi kuchning bajargan ishi

Aytaylik, biror jism OX o‘qi bo‘ylab F kuch ta’sirida harakat qilayotgan bo‘lsin. Bunda F kuch jismning OX o‘qidagi holatiga bog‘liq, ya’ni $F=F(x)$ va uning yo‘nalishi harakat yo‘nalishi bilan ustma-ust tushsin. Bu kuch ta’sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o‘tkazish uchun bajarilgan ishni topish masalasi yuzaga keladi.

Ma’lumki, $F=F(x)$ kuch [a,b] oraliqda

$$F(x)=c,\ c-const$$

bo‘lsa, jismni a nuqtadan b nuqtaga o‘tkazish uchun bajarilgan ish $A=c\cdot(b-a)$ formula bilan ifodalanadi.

$F=F(x)$ kuch [a,b] da x o‘zgaruvchining ixtiyoriy uzluksiz funksiyasi bo‘lsin. U holda [a,b] oraliqni ushbu nuqtalar yordamida $a=x_0,x_1,x_2,\ldots\ \ldots,\ x_n=b$ $(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$ n ta $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\ldots,[x_k,x_{k+1}],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ bo‘laklarga ajratib, har bir bo‘lakchada ixtiyoriy

$$\xi_k \ (k=0,1,2,\dots \dots, n-1) \qquad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

nuqta olamiz.

Agar har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \ (k=0,1,2,\dots \dots, n-1)$$

oraliqda jismga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchni oʻzgarmas va $F(\xi_k)$ ga teng deb olinsa, u holda $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda bajarilgan ish taxminan

$$F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

formula bilan, $[a,b]$ oraliqda bajarilgan ish esa taxminan

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x$$

formula bilan ifodalanadi.

Agar $\lambda \to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yigʻindi chekli songa intilsa bu sonni $F(x)$ kuchning [a,b] oraliqdagi bajargan ishi deyilishi mumkin. Demak,

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Ravshanki, qaralayotgan yigʻindi $F=F(x)$ funksiyaning [a,b] oraliq boʻyicha integral yigʻindisi boʻladi. $F=F(x)$ funksiya esa shartga koʻra [a,b] da uzluksiz. Demak, yigʻindining limiti mavjud va u

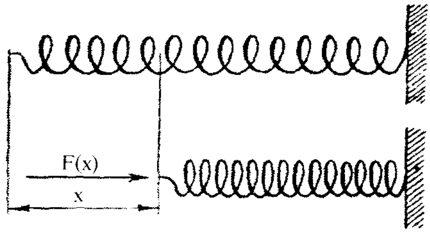
$$\int_a^b F(x)dx$$

ga teng boʻladi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Shunday qilib, o'zgaruvchi *F(x)* kuchning [a,b] oraliqdagi bajargan ishi $A=\int\limits_a^b F(x)dx$ bo'ladi.

Misol. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa *F=F(x)* kuch ta'sir etib, prujina qisilgan (1-chizma).



1-chizma

Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan *F(x)* kuchga proporsional bo'lsa, prujinani *a* birlik qisish uchun *F(x)* kuchning bajargan ishi topilsin. ◄ Agar *F(x)* kuch ta'sirida prujinaning qisilishi miqdorini *x* orqali belgilasak, u holda

$$F(x)=k\cdot x$$

bo'ladi, bunda *k* – proporsionallik koeffitsienti (qisilish koeffisienti). Yuqoridagi formuladan foydalanib bajarilgan ishni topamiz:

$$A=\int\limits_a^b kx\,dx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{ka^2}{2}$$

12-bob. XOSMAS INTEGRALLAR

1-§. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar

Funksiyaning aniq integrali (Riman integrali) tushunchasini kiritishda integrallash oralig'ining chekli bo'lishi talab etilgan edi.

Endi cheksiz oraliqda ($[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$; $(-\infty,+\infty)$ oraliqlarda) berilgan funksiyaning shu oraliq bo'yicha integrali tushunchasini keltiramiz va o'rganamiz.

1°. Chegaralari cheksiz xosmas integral tushunchasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda ($a\in R$) berilgan bo'lib, ixtiyoriy $[a,t]$ da ($a\leq t<+\infty$) integrallanuvchi bo'lsin: $f(x)\in R([a,t])$.

Ushbu

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

belgilashni kiritamiz.

1-ta'rif. Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limiti $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) integralni chegarasi cheksiz xosmas integral deb ham yuritiladi.

Qulaylik uchun, bundan keyin «chegarasi cheksiz xosmas integral» deyish o'rniga «integral» deymiz.

2-ta'rif. Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, (1) integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, (1) integral uzoqlashuvchi deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx$$

integralni qaraylik. Bu holda

$$F(t)=\int_a^t e^{-x}dx=-e^{-t}+1$$

bo‘lib,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)=1$$

bo‘ladi.

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

2-misol. Ushbu

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\qquad (a>0,\ \alpha>0)$$

integral uchun

$$F(t)=\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\ln t-\ln a, & agar\ \alpha=1\ bo'lsa\\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & agar\ \alpha\neq1\ bo'lsa\end{cases}$$

bo‘lib, $t\to+\infty$ da

$$F(t)\to\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}\qquad(\alpha>1),\qquad F(t)\to+\infty\qquad(\alpha\le1)$$

bo‘ladi.

Demak,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

integral $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\le 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-misol. Ushbu $\int_a^{+\infty}\cos x dx$ integral uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $t\to+\infty$ da

$$F(t)=\int_a^t\cos x dx=\sin t$$

funksiyaning limiti mavjud emas.

4-misol. $\int_a^{+\infty}e^{-ax}dx$, a>0 ni hisoblang.

Yechish.

$$\int_a^{+\infty}e^{-ax}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-ax}dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{-e^{-ax}}{a}\Bigg|_0^t=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-at}}{a}+\frac{e^0}{a}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ae^{at}}\right)=\frac{1}{a}.$$

5-misol. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int_r^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}arctgx\Big|_r^0=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)=\frac{\pi}{2}.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

6-misol. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Biz bu integralni hisoblash uchun ikkita xosmas integrallar yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va integrallarni hisoblaymiz, ya'ni

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int\limits_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{r\to-\infty}arctgx\Big|_r^0+\lim_{t\to+\infty}arctgx\Big|_0^t=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)+$$

$$+\lim_{t\to+\infty}(arctgt-arctg0)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\pi.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi.

Xuddi shunday quyidagi integrallar ham yuqoridagidek,

$$\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx,\qquad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integrallar va ularning yaqinlashuvchiligi, uzoqlashuvchiligi ta'riflanadi:

$$\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{a}f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}}\int\limits_{v}^{u}f(x)dx.$$

2°. Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari. Xosmas integralning turli xossalarini *f(x)* funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliq bo'yicha olingan

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$$

integrali uchun bayon etamiz. Bu xossalarni

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

integrallar uchun keltirishni o'quvchiga havola etamiz.

1-xossa. Agar $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx \quad (a<b)$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda

$$\int_{b}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

tenglik bajariladi.

◄ Ravshanki, $\int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx. \quad (a<b<t)$

Aytaylik, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin.

Demak, $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx$ mavjud va chekli bo'ladi:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

(2) tenglikdan foydalanib, $t \to +\infty$ da

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin,

Demak, $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x)dx$ chekli bo'ladi.

(2) tenglikdan, t→+∞ da

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_b^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_b^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$ bo'ladi. ►

2-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} C\cdot f(x)dx$ ham (C=const) yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} C\cdot f(x)dx = C\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

bo'ladi.

3-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall x\in[a,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

4-xossa. Agar $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'lib, $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ bo'ladi.

Izoh. Berilgan integrallarning yaqinlashuvchiligi yetarli shart bo'lib, funksiyalar yig'indisining integrali yaqinlashuvchi bo'lishi uchun zaruriy shart emas. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad x \in [1; +\infty)$$

bo'lsin. U holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \lim_{t \to +\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty,$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{-1}{x+1} dx = -\lim_{t \to +\infty} \ln|x+1|\Big|_1^t = -\lim_{t \to +\infty} [\ln(t+1) - \ln 2] = -\infty.$$

Demak, qaralayotgan xosmas integrallar uzoqlashuvchi bo'ladi. Funksiyalar yig'indisi uchun esa

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{t \to +\infty} (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln(t+1) + \ln 2] =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \ln \frac{t}{t+1} + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

yaqinlashuvchi xosmas integral bo'ladi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, agar integrallardan biri yaqinlashuvchi bo'lib, ikkinchisi uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

5-xossa. Agar $\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \le g(x)$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ bo'ladi.

Misol tariqasida 5° xossani isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan kelib chiqadi.

5-xossaning isboti. Aniq integral xossalariga ko'ra ixtiyoriy $t>a$ uchun $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$.

Agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, F(t) funksiya yuqoridan chekli son bilan chegaralangan. Shuningdek, $f(x) \ge 0$ bo'lgani uchun $F(t)$ funksiya o'suvchi bo'ladi. Bulardan chekli limitning

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

mavjudligi, ya'ni $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Aksincha, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$

tengsizligidan $t \to +\infty$ da chap tomoni chegaralanmagan va bundan o‘ng tomonini limiti chekli emasligi, ya’ni $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

7-misol. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. 5° xossadan foydalanamiz. Berilgan integralni $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ integral bilan solishtiramiz, bu integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi (1-misol). $(1;+\infty)$ da

$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ bo‘lganligi sababli, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ integralning yaqinlashishidan berilgan $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

6-xossa. Agar $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ va $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda shunday o‘zgarmas $\mu\,(m \le \mu \le M)$ topiladiki,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx = \propto \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (3)$$

bo‘ladi.

◀ Aytaylik, $\forall x \in [a,+\infty)$ da $g(x)dx \ge 0$ bo‘lsin. Unda $m \cdot g(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ bo‘lib,

$$m\int\limits_a^t g(x)dx \le \int\limits_a^t f(x)g(x)dx \le M\int\limits_a^t g(x)dx$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, $t \to +\infty$ da limitga o'tsak unda

$$m\int_a^{+\infty} g(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \le M\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = 0$$

bo'lganda (3) tenglik bajariladi.

Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx > 0$$

bo'lsin. Bu holda

$$m \le \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx} \le M$$

bo'ladi. Agar

$$\mu = \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx}$$

deb olinsa, unda $m \le \mu \le M$ bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx = \mu \cdot \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

$\forall x \in [a,+\infty)$ da $g(x) \leq 0$ bo'lganda (3) tenglikning bajarilishi yuqoridagidek isbotlanadi. ►

Odatda, bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deyiladi.

*3°. **Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi.*** Aytaylik *f(x)*, funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligi ushbu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \qquad (t > a)$$

funksiyaning $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishidan iborat.

Funksiyaning chekli limitiga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi, ya'ni F(x) funksiyaning $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishi uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists t_0 > a, \quad \forall t' > t_0, \qquad \forall t'' > t_0 :$$
$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekani keltirilgan edi.

Bu tushuncha va tasdiqdan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (4)$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligini ifodalaydigan quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema (Koshi teoremasi). (4) integralning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $t_0 \in R$ $(t_0 > a)$ topilib, ixtiyoriy $t' > t_0$, $t'' > t_0$ bo'lganda

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

2-§. Manfiy bo'lmagan funksiyaning xosmas integrallari. Integralning absolyut yaqinlashuvchiligi

1°. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan bo'lib, $\forall x\in[a, +\infty)$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsin. Bu funksiyani $[a,t]$ da $(a<t<+\infty)$ integrallanuvchi deylik: $f(x)\in R([a,t])$. Bu holda $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ funksiya (a,$+\infty$) oraliqda o'suvchi bo'ladi.

◄ Haqiqatan ham, $a<t_1<t_2<+\infty$ da

$$F(t_2)=\int_a^{t_2} f(x)dx=\int_a^{t_1} f(x)dx+\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx=F(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

bo'lib, $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx\geq 0$ bo'lganligi sababli $F(t_2)\geq F(t_1)$ bo'ladi. Demak, $\forall\ t_1,t_2\in(a,+\infty)$ uchun

$$t_1<t_2\Rightarrow F(t_1)\leq F(t_2).\ ►$$

1-teorema. Manfiy bo'lmagan $f(x)$ funksiya xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x)\geq 0,\ x>a) \qquad (1)$$

ning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $F(t)$ funksiyaning yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\exists C\in R,\ \ \forall t>a: F(t)\leq C$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi.** Aytaylik, (1) integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)$$

mavjud va chekli bo‘ladi. Unda, $\exists C\in R$, $\forall t>a: F(t)\leq C$ da $F(t)\leq C$ bo‘ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $F(t)$ funksiya $(a,+\infty)$ da yuqoridagi chegaralangan bo‘lsin. Ayni paytda, $F(t)$ o‘suvchi funksiya. Demak, $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiya chekli limitga ega. Bu esa (1) integralni yaqinlashuvchi bo‘lishini bildiradi.►

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $F(t)$ funksiya $(t\in(a,+\infty))$ yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

*2°. **Taqqoslash teoremalari.*** Ikkita funksiya ma’lum munosabatda bo‘lganda birining xosmas integralining yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lishidan ikkinchisining ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lishini ifodalovchi teoremalarni keltiramiz. Odatda, ular taqqoslash teoremalari deyiladi.

2-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo‘lib, $\forall x\in[a,+\infty)$ da

$$0\leq f(x)\leq g(x) \qquad (2)$$

bo‘lsin.

Agar $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

◄ Aytaylik, (2) munosabat o‘rinli bo‘lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsin. Unda 1-teoremaga ko‘ra

$$G(t)=\int_a^t g(x)dx \le C$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \le G(t)$$

bo'lganligi sababli, ya'ni 1-teoremaga binoan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (2) munosabat o'rinli bo'lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda yuqorida keltirilgan natija va $F(t)\le G(t)$ tengsizlikdan $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.▶

3-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da $f(x)\ge 0$ $g(x)\ge 0$ bo'lib,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k \qquad (0\le k\le+\infty)$$

bo'lsin.

Agar $k<+\infty$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $k>0$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k<+\infty$ bo'lib, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ t_0>a,\ \forall t>t_0 \quad \text{da}$$

$$f(x)<(k+\varepsilon)g(x) \qquad (3)$$

bo'ladi. Yaqinlashuvchi integralning xossasiga ko'ra

$$\int\limits_a^{+\infty}(k+\varepsilon)g(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'ladi.

(3) munosabat va 2-teoremadan foydalanib, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

Aytaylik,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k>0$$

bo'lib, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda k_1 son ($k>k_1>0$) uchun shunday $t'_0>a$ topiladiki, $\forall x>t'_0$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}>k_1$, ya'ni

$$g(x)<\frac{1}{k_1}f(x) \qquad (4)$$

bo'ladi.

(4) munosabat va 2-teoremadan foydalanib $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz.▶

Natija. Agar

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

bo‘lib, $0<k<+\infty$ bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Ko‘p hollarda biror xosmas integralning yaqinlashuvchiligini yoki uzoqlashuvchiligini aniqlashda avvaldan yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi ma’lum bo‘lgan integral bilan taqqoslab (yuqorida keltirilgan teoremalardan foydalanib) qaralayotgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi topiladi.

Masalan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integralni

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \qquad (a>0,\ \alpha>0)$$

integral bilan taqqoslab, quyidagi natijaga kelamiz.

Natija. Aytaylik, biror $C(0<C<+\infty)$ va $\alpha>0$ sonlar uchun $x\to+\infty$ da $f(x)\sim\frac{C}{x^\alpha}$, ya’ni

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\cdot f(x)=C$$

bo‘lsin. Unda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral $\alpha>1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\le 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

1-misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Agar

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+x^2}, \qquad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

deyilsa, unda $\forall x\in[0,+\infty]$, $0\le f(x)\le g(x)$ bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

integral yaqinlashuvchi. 2-teoremaga ko'ra berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

2-misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ $\forall x\ge 1$ da

$$f(x)=e^{-x^2},\ g(x)=e^{-x}$$

funksiyalari uchun $0\le f(x)\le g(x)$ bo'ladi.

Quyidagi $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ integralning yaqinlashuvchiligi ravshan.

Demak,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

3-misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ $\forall x>1$ da $\ln x<x$ bo'lib, $f(x)=e^{-x}\ln x$, $g(x)=xe^{-x}$ funksiyalar uchun $0\le f(x)\le g(x)$ bo'ladi. Endi

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} xe^{-x}dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini e'tiborga olib, 2-teoremadan foydalanib, berilgan

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini topamiz.▶

4-misol. Ushbu

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Integral ostidagi

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \cdot \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$$

integral yaqinlashuvchi. Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

4°. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin. Bunda, $\forall x\in[a,+\infty)$ uchun $f(x)\geq 0$ bo'lishi shart emas.

Ta'rif. Agar

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lib, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ shartli yaqinlashuvchi integral deyiladi.

4-teorema. Agar integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Berilgan $f(x)$ va $|f(x)|$ funksiyalar yordamida ushbu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$$

funksiyalarni tuzamiz.

Bu funksiyalar uchun, $\forall x \in [a, +\infty)$ da

1) $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) \geq 0$

2) $\varphi(x) \leq |f(x)|$, $\psi(x) \leq |f(x)|$

3) $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan 2-teoremadan foydalanib, quyidagi

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx, \qquad \int_a^{+\infty} \psi(x)dx$$

integral yaqinlashuvchiligini topamiz.

Unda $\int_a^{+\infty} (\varphi(x)-\psi(x))dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

Masalan, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Avval $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integralni tekshiramiz. $(1;+\infty)$ da $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ va $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, 5° xossaga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-§. Integralning yaqinlashuvchiligi alomatlari. Integralning bosh qiymati

1°. Dirixle alomati. Faraz qilaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

1-teorema (Dirixle alomati). *f(x)* va *g(x)* funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. *f(x)* funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz va uning shu oraliqdagi boshlang'ich F(x) (F'(x)=f(x)) funksiyasi chegaralangan;

2. g(x) funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz g'(x) hosilaga ega;

3. g(x) funksiya $[a,+\infty)$ da kamayuvchi;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ Ravshanki,

$$f(x)\in C[a,+\infty),\ g(x)\in C[a,+\infty)\Rightarrow f(x)g(x)\in C[a,+\infty)$$

bo'ladi. Binobarin, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya $[a,t]$ $(a<t<+\infty)$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasidan hamda teoremaning 1- va 2- shartlaridan foydalanib topamiz:

$$\int_a^t f(x)g(x)dx=\int_a^t g(x)\,dF(x)=g(x)\,F(x)\Big|_a^t-\int_a^t f(x)g'(x)dx. \quad (1)$$

Endi

$$|g(t)F(t)|\le Mg(t) \qquad (M=\sup|F(t)|<+\infty)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, undan $t\to+\infty$ da

$$g(t)F(t)\to 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Berilishiga ko'ra, $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi hamda shu oraliqda kamayuvchi funksiya. Demak, $\forall x\in[a,+\infty)$ da

$$g'(x)\le 0$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\int_a^t |F(x)\,g'(x)|dx\le M\int_a^t |g'(x)|dx=-M\int_a^t g'(x)dx=$$

$$=M(g(a)-g(t))\le M\,g(a) \quad (g(t)\ge 0).$$

Unda yuqoridagi paragrafdagi teoremalardan foydalanib

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanligini aniqlaymiz.

(1) tenglikda t→+∞ da limitga oʻtib, ushbu

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)g(x)\,dx$$

limitning mavjud va chekli boʻlishini topamiz. Bu esa $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ integralning yaqinlashuvchi boʻlishini bildiradi.▶

Misol. Ushbu

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx \qquad (\alpha>0)$$

integralni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Berilgan integralni quyidagicha

$$J=\int_1^{+\infty}\sin x\frac{1}{x^\alpha}dx \qquad (\alpha>0)$$

yozib, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ deymiz. Bu funksiyalar yuqorida keltirilgan teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

1) f(x)=sinx funksiya $[1,+\infty)$ oraliqda uzluksiz va uning boshlangʻich funksiyasi *F(x)=−cosx* funksiya $[1,+\infty)$ da chegaralangan;

2) $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ funksiya $[1,+\infty)$ da

$$g'(x)=-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

hosilaga ega va u uzluksiz;

3) $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ funksiya $[1,+\infty)$ da kamayuvchi;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$. $\quad (\alpha>0)$

Unda Dirixle alomatiga ko'ra

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx \qquad (\alpha>0)$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

*2°. **Abel alomati.*** Faraz qilaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,+∞) oraliqda berilgan bo'lsin.

2-teorema (Abel alomati). *f(x)* va *g(x)* funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) *f(x)* funksiya [a,+∞) da uzluksiz bo'lib, $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ integral yaqinlashuvchi;

2) *g(x)* funksiya [a,+∞) da uzluksiz *g'(x)* hosilaga ega va bu hosila [a,+∞) da o'z ishorasini saqlasin;

3) *g(x)* funksiya [a,+∞) da chegaralangan.

U holda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ Ravshanki, $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishidan *f(x)* funksiyaning [a,+∞) oraliqda chegaralangan *F(x)* boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Teoremaning 2- va 3- shartlaridan hamda monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremadan foydalanib ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ limitning mavjud va chekli bo'lishini topamiz: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$.

Unda $g_1(x)=g(x)-b$ funksiya $x\to+\infty$ da monoton ravishda nolga intiladi:

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x)=0$$

Shunday qilib $f(x)$ va $g_1(x)$ funksiyalari Dirixle alomati keltirilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Dirixle alomatiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ayni paytda, $f(x)g(x)=f(x)b+f(x)g_1(x)$ bo'lganligi sababli,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

3°. Xosmas integralning bosh qiymati.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da berilgan bo'lib, bu oraliqning istalgan $[t',t]$ $(-\infty<t'<t<+\infty)$ qismida integrallanuvchi bo'lsin:

$$F(t',t)=\int_{t'}^{t} f(x)\,dx.$$

Ma'lumki, ushbu

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty,\\ t\to+\infty}} F(t',t)=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{t'}^{t} f(x)\,dx$$

limit $f(x)$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali deyilib, u chekli bo'lsa,

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{t'}^{t} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyilar edi.

Bunda t′ va t o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy ravishda t′→ −∞ t→ +∞ ga intilishi ko‘zda tutiladi.

Xususan, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa,

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

bo‘ladi.

Biroq $F(t',t)=\int\limits_{t'}^{t} f(x)dx$ funksiya, t′=−t bo‘lib, t→+∞ da chekli limitga ega bo‘lishidan $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi bo‘lishi kelib chiqavermaydi.

Masalan, ushbu $F(t',t)=\int\limits_{t'}^{t}\sin x\,dx$ integrel uchun t′=−t bo‘lsa,

$\int\limits_{-t}^{t}\sin x\,dx = 0 \quad (\forall t>0)$ bo‘lib, $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t}\sin x\,dx = 0$ bo‘ladi.

Biroq $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi emas.

Ta’rif. Agar t′=−t bo‘lib, t→+∞ da

$$F(t',t)=\int\limits_{-t'}^{t} f(x)dx$$

funksiyaning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral bosh qiymat ma’nosida yaqinlashuvchi deyilib, $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx$

limit esa $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ xosmas integralning bosh qiymati deb ataladi. Odatda, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ xosmas integralning bosh qiymati

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

Bunda *v.p* belgi fransuzcha «valeur principiale» – «bosh qiymat» so'zlarining dastlabki harflarini ifodalaydi.

Shunday qilib, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u bosh qiymat ma'nosida ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Biroq, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning bosh qiymat ma'nosida yaqinlashuvchi bo'lishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

4-§. Xosmas integrallarni hisoblash

1°. Nyuton-Leybnits formulasi. Ushbu

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, uni hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, *f(x)* funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda boshlang'ich *F(x)* funksiyaga ega va $x\to+\infty$ da *F(x)* funksiya chekli limiti mavjud bo'lsin:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Unda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^t f(x)dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (F(t) - F(a)) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \qquad (1)$$

bo'ladi.

(1) formula *Nyuton-Leybnits formulasi* deyiladi.

1-misol. Ushbu,

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$$

integral hisoblansin.

◀ Ravshanki, $F(x) = \cos\frac{1}{x}$ funksiya $[\frac{2}{\pi}, +\infty)$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

(1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1. \ ▶$$

*2°. **Bo'laklab integrallash.*** Faraz qilaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz, *f'(x)* va *g'(x)* hosilalarga ega bo'lsin.

Agar

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g'(x)dx$ $\left(\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$ integral yaqinlashuvchi;

2) ushbu $\lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$ limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx \qquad (\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx)$$

integral yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \qquad (2)$$

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$$

bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$\int_a^t f'(x)g(x)dx = \int_a^t g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^t - \int_a^t f(x)dg(x) =$$

$$= f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^t f(x)g'(x)dx.$$

Keyingi tenglikda, $t\to+\infty$ da limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(t)g(t)) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx. \ ▶$$

(2) formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

2-misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

integral hisoblansin.

◀ Agar $g(x)=x$, $f'(x)=e^x$ deb olsak, unda

$$g'(x)=1, \qquad f(x)=-e^x$$

bo'lib, (2) formulaga ko'ra $(a=0)$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t+\infty}(-te^{-t}) - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

bo'ladi. ►

3°. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash.

Ushbu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni qaraymiz. Bu integralda $x=\varphi(z)$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x=\varphi(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(z)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(z)$ hosilaga ega;

2) $\varphi(z)$ funksiya $[a,+\infty)$ da qat'iy o'suvchi;

3) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(+\infty)=\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z)=+\infty.$

Agar

$$\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

bo'ladi.

◄ Ixtiyoriy $z(\alpha<z<+\infty)$ ni olib, unga mos $\varphi(z)=t$ nuqtani topamiz.

Ravshanki, yuqoridagi shartlarda $[a,t)$ da yuqoridagi paragrafdagi (2) formulaga ko'ra

$$\int_a^t f(x)dx=\int_\alpha^z f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda t→+∞ da (bunda $z=\varphi^{-1}(t)\to+\infty$) limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

Bu esa keltirilgan tasdiqni isbotlaydi. ►

3-misol. Ushbu

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

integral hisoblansin.

◄ Bu integralda $x=\frac{1}{t}$ almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$J=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}$$

bo'lib,

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi integralda $x-\frac{1}{x}=z$ deb, topamiz:

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{2+z^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Demak,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$ ►

4°. Xosmas integrallarni taqribiy hisoblash.

Aytaylik, *f(z)* funksiya [a,+∞) oraliqda uzluksiz bo'lib, ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx,$$

ya'ni $\forall\varepsilon>0$, $\exists t_0>a$, $\forall t>t_0$: $\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx\right| < \varepsilon$ bo'ladi.

Ravshanki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^t f(x) = \int_t^{+\infty} f(x)dx.$

Demak,

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Natijada ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \approx \int_a^t f(x)dx \qquad (5)$$

taqribiy formulaga kelamiz. Uning xatoligi

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ xosmas integral taqribiy hisoblansin.

◄ (5) formulaga ko'ra, berilgan integralni taqribiy hisoblash uchun ushbu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^a e^{-x^2} dx \qquad (a>0)$$

formulani hosil qilamiz. Uning xatoligi $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ga teng bo'ladi.

Bu xatolikni yuqoridan baholaymiz:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \frac{1}{a}\int_a^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2a}\int_a^{+\infty} e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2a}(-e^{-x^2})_a^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a^2}.$$

Aytaylik, a=1 bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le 0,1839$ bo'ladi.

Aytaylik, a=2 bo'lsin. Bu holda $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^2 e^{-x^2}dx$ bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun $\int_2^{+\infty} e^{-x^2}dx \le 0,00458$ bo'ladi.

Aytaylik, a=3 bo'lsin. Bu holda $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^3 e^{-x^2}dx$ bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun $\int_3^{+\infty} e^{-x^2}dx \le 0,00002$ bo'ladi. ►

5-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali

Aniq integral mavjudligining zaruriy sharti integral ostidagi funksiyaning chegaralanganligi edi.

Endi f(x) funksiya [a;b] da chegaralanmagan bo'lsin. Aniqrog'i, ixtiyoriy $\varepsilon>0$, ($\varepsilon<b-a$) uchun f(x) funksiya $[a;b-\varepsilon]$ da chegaralangan va integrallanuvchi bo'lib, b nuqtaning atrofidagina chegaralanmagan bo'lsin. Bu holda b nuqta f(x) funksiyaning maxsus nuqtasi deb ataladi.

Demak, ixtiyoriy t (a<t<b) uchun $\int_a^t f(x)dx$ integral mavjud bo‘lib, u faqat t o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘ladi:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t), \quad a < t < b.$$

Ta’rif. Agar t→b−0 da F(t) funksiyaning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit chegaralanmagan f(x) funksiyaning [a;b) oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} F(t) = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx$$

Agar t→b−0 da F(t) funksiyaning limiti mavjud bo‘lib, u chekli bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, f(x) funksiya esa [a;b) da integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Agar t→b−0 da F(t) funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqorida limit mavjud bo‘lmagan holda ham biz xosmas integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Xuddi yuqoridagidek, a nuqta f(x) ning maxsus nuqtasi bo‘lganda (a;b] oraliq bo‘yicha xosmas integral ta’riflanadi.

f(x) funksiya (a;b] oraliqda berilgan bo‘lib, a nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo‘lsin. Bu funksiya (a;b] ning istalgan [t;b] (a<t<b) qismida integrallanuvchi, ya’ni ushbu

$$\int_t^b f(x)dx = F(t)$$

integral mavjud bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $t \to a+0$ da $F(t)$ funksiyaning $\lim\limits_{t \to a+0} F(t)$ limiti mavjud bo‘lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $(a;b]$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va u $\int\limits_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} f(t) = \lim_{t \to a+0} \int\limits_t^b f(x)dx.$$

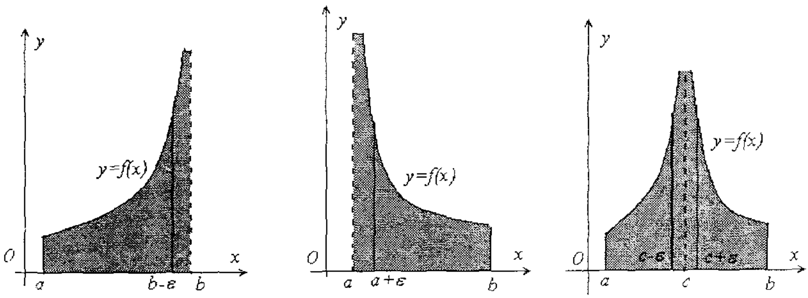
Agar $t \to a+0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, $f(x)$ esa $(a;b]$ da integrallanuvchi funksiya deyiladi. Agar $t \to a+0$ da $F(t)$ ning limiti cheksiz bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqoridagi limit mavjud bo‘lmagan holda ham biz integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning biror ichki c nuqtasida $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ bo‘lsa, u holda aniq integralning additivlik xossasiga ko‘ra bu integralni ikkita integralning yig‘indisi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{t \to c-0} \int\limits_a^t f(x)dx + \lim_{\tau \to c+0} \int\limits_\tau^b f(x)dx.$$

Agar tenglikning o‘ng tomonidagi limitlar mavjud bo‘lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Geometrik nuqtayi nazardan chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali $y=f(x)$ egri chiziq, $x=a$, $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan va x→b-0 da (x→a+0, x→c±0) Oy o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli yuzga ega ekanligini anglatadi (1-rasm).



1-rasm

1-misol. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda x=0 nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir. Bu holda ta'rif bo'yicha

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0} \int\limits_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0} (2-2\sqrt{t}) = 2.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va uning qiymati 2 ga teng.

2-misol. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda x=1 nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir.

Bu holda

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0} \int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0} (-2\sqrt{1-x}\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1-0} (-2\sqrt{1-t}+2) = 2.$$

Demak, bu integral ham yaqinlashuvchi.

3-misol. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{E}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0} \int\limits_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0} \ln|x|\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0} (\ln 1 - \ln t) = +\infty,$$

ya'ni bu xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-misol. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \alpha \in R, a<b$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ikki holni qaraymiz. 1-hol. $\alpha \neq 1$ bo'lsin. U holda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{t\to b-0} \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{t\to b-0} \int\limits_a^t (b-x)^{-\alpha} d(b-x) =$$

$$= -\lim_{t\to b-0} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{t\to b-0} ((b-t)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha<1, \ \alpha>1. \\ \infty, \end{cases}$$

2-hol. $\alpha=1$ bo'lsin. U holda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{t\to b-0} \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)} = -\lim_{t\to b-0} \ln|b-x|\Big|_a^t =$$

$$= -\lim_{t\to b-0} (\ln|b-t| - \ln|b-a|) = +\infty.$$

Demak, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ da uzoqlashuvchi bo'lar ekan.

6-§. Chegaralanmagan funksiya xosmas integralining xossalari

Quyida maxsus nuqtasi b bo'lgan f(x) funksiyaning [a;b) oraliq $\int_a^b f(x)dx$ bo'yicha olingan xosmas integralining xossalarini keltiramiz. Bu xossalarni maxsus nuqtasi a bo'lgan funksiyaning (a;b] oraliq bo'yicha olingan xosmas integrallari uchun ham tegishlicha bayon qilish mumkin.

1°. Agar f(x) funksiyaning [a;b) dagi xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lsa, bu funksiyaning [c;b), (a<c<b) oraliq bo'yicha integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2°. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(E)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy α, β sonlar uchun

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b \varphi(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, [a;b) da f(x)≥0 bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

4°. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x)\leq\varphi(x)$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$ bo'ladi.

5°. f(x) va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;b)$ da uzluksiz bo'lib, b esa ularning maxsus nuqtasi va $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$, $x\in[a;b)$ bo'lsin. U holda

a) $\int_a^b \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) $\int_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol tariqasida 3° xossaning isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan kelib chiqadi.

3° xossaning isboti. Aniq integralning xossalariga asosan $f(x)\geq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $t\in[a;b)$ uchun $\int_a^t f(x)dx \geq 0$ bo'ladi. Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integralda $x=\varphi(t)=t^2$ almashtirishni bajaramiz. Ravshanki, $\varphi(t)$ funksiya $(0;1]$ oraliqda $\varphi'(t)=2t>0$ uzluksiz hosilaga ega hamda $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Demak,

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

13-bob. IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

1-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiya tushunchasi

Tabiatda, fan va texnikaning turli tarmoqlarida uchraydigan ko‘pchilik funksiyalar bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmay, ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi.

Masalan, tomonlari x va y ($x>0$, $y>0$) ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi

$$S=x\cdot y \qquad (1)$$

bo‘lib, u x va y o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi. Bu x va y o‘zgaruvchilarning turli qiymatlariga ko‘ra (1) formula yordamida ularga mos S ning qiymati topiladi.

Barcha haqiyqiy sonlar to‘plam R ni olib, bu to‘plamning ixtiyoriy ikki x va y elementlari (haqiqiy sonlar) yordamida (x,y) juftlikni tuzamiz. Barcha shunday juftliklar to‘plami

$$\{(x,y)\colon x\in R, y\in R\}$$

ni R^2 orqali belgilaymiz:

$$R^2=\{(x,y)\colon x\in R, y\in R\}$$

Odatda, R^2 to‘plamning elementi (juftlik) shu to‘plamning nuqtasi deyiladi.

Agar $(x_1,y_1)\in R^2$, $(x_2,y_2)\in R^2$, bo‘lib, $x_1=x_2, y_1=y_2$ bo‘ladi, (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalar bir-biriga teng deyiladi:

$$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$$

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi OXY ni olib, OX o‘qi bo‘yicha x o‘zgaruvchining qiymatlarini ($x\in R$),OY o‘qi bo‘yicha y o‘zgaruvchining qiymatlarini ($y\in R$) joylashtiramiz. Unda (x,y) juftlik $(x,y)\in R^2$ tekislikda bitta

$$M=M(x,y)$$

nuqtani aniqlaydi. Bunda x—M nuqtaning birinchi koordinatasi (abssissasi) y—M nuqtaning ikkinchi koordinatasi (ordinatasi) bo‘ladi.

(Demak, barcha (x,y):$x\in R, y\in R$ nuqtalar (juftliklar) to'plami tekislikni ifodalaydi.

Aytaylik, $(x_1,y_1)\in R^2$, $(x_2,y_2)\in R^2$ bo'lsin. ma'lumki ushbu

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

miqdor (x_1,y_1) va (x_2,y_2) nuqtalar orasidagi masofa deyiladi. Uni $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ kabi belgilaymiz:

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

1) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\geq 0$,

2) $((x_1,y_1),(x_2,y_2)=d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$,

3) $d((x_1,y_1),(x_3,y_3))\leq d((x_1,y_1),(x_2,y_2))+d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$

Endi R^2 to'plamning (tekislikning) ba'zi-bir qism to'plamlariga misollar keltiramiz.

1) R^2 tekislikning (a,b) nuqtasini hamda $r>0$ sonni olaylik. Tekislikning shunday (x,y) nuqtalari to'plamini qaraymizki, x va y koordinatalar ushbu

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami yopiq doira deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\}$$

kabi belgilanadi. Bunda (a,b) nuqta doira markazi, r esa radiusi deyiladi.

2) Tekislikning shunday (x,y) nuqtalari to'plamini qaraylikchi x va y lar ushbu

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

tengsizlikni qanoarlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami ochiq doira deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$$

kabi belgilanadi.

3) Ushbu

$$\{(x,y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$$

to'plam markazi (a,b) nuqtada, radiusi r ga teng aylana deyiladi.

4) Tekislikning shunday (x,y) nuqtalar to'plamini qaraymizki, ularning x va y koordinatalari ushbu $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ (a,b,c,d-haqiqiy sonlar) tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami to'g'ri to'rtburchak deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

kabi belgilanadi.

5) Tekislikning shunday (x,y) nuqtalar to'plamini qaraylikki, ularni x va y koordinatalari ushbu

$$a<x<b, \qquad c<y<d$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami ochiq to'g'ri to'rtburchak deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ a<x<b,\ \ c<y<d\}$$

kabi belgilanadi.

Tekislikda biror M to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar M to'plamdan olingan har bir (x,y) nuqtaga biror qoida yoki qonunga ko'ra bitta haqiqiy z soni mos qo'yilgan bo'lsa, M to'plamda ikki o'zgaruvchili funksiya berilgan deyiladi va

$$z=f(x,y)$$

kabi yoziladi. Odatda M to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, x va y (o'zgaruvchilar) funksiya argumentlari, z esa x va y ularning funksiyasi deyiladi.

Masalan, tekislikning har bir (x,y) nuqtasiga shu nuqta koordinatalari x va y larning ko'paytmasini mos qo'yish qoidasi berilsin. Unda

$$z=f(x,y)=x\cdot y$$

funksiya hosil bo'ladi.

Quyidagi funksiyalar

$$z=x^2+y^2, \qquad z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

ikki o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

Aytaylik, M ($M\subset R^2$) to'plamda biror

$$z=f(x,y)$$

funksiya berilgan bo'lsin. M to'plamning (x_0,y_0) nuqtasini olamiz. Funksiya shu (x_0,y_0) nuqtaga bitta z_0 sonni mos qo'yadi. Bu z_0 son

$$z=f(x,y)$$

funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi qiymati deyiladi va

$$z_0=f(x_0,y_0)$$

kabi yoziladi.

Ma'lumki, koordinatalari x,y,z bo'lgan (x,y,z) nuqta fazodagi nuqtani ifodalaydi.

Uning (x_0,y_0,z_0) nuqtasi fazo nuqtasi bo'ladi.

Barcha x,y,z nuqtalardan iborat (bunda $(x,y)\in M, z=f(x,y)$) to'plam z=f(x,y) funksiyaning grafigi deyiladi.

Masalan,

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi

$$1-x^2-y^2\geq 0, \qquad x^2+y^2\leq 1, \qquad x^2+y^2\leq 1^2,$$

ya'ni markazi (0, 0) nuqtada, radiusi 1 ga teng doiradan iborat bo'ladi.

Aytaylik, z=f(x,y) funksiya M ($M\subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilarning har biri (α,β) integralda berilgan funksiyalar

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad t\in(\alpha,\beta)$$

bo'lsin. Bunda t o'zgaruvchi (α,β) oraliqda o'zgarganda mos x va y lardan tuzilgan (x,y) juftlik M to'plamga tegishli bo'lsin. Natijada ushbu

$$z=f(x,y)=f(\varphi(t), \quad \psi(t))$$

funksiya hosil bo'ladi. Bunda z finksiya t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi.

2-§. Tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik va uning limiti

Har bir natural n songa tekislikda bitta (x_n,y_n) nuqtani mos qo'yuvchi qoidaga ega bo'laylik:

Bu qoidaga binoan; $n\to(x_n,y_n)$ (n=1,2,3,...)

$$(x_1,y_1),(x_1,y_2),\ldots,(x_n,y_n),\ldots$$

to'plamga ega bo'lamiz. Bu to'plam tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik deyiladi va $\{(x_n,y_n)\}$ kabi belgilanadi. Bunda har bir

$$(x_n,y_n) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

nuqta ketma-ketlikning hadi deyiladi.
Masalan,

$$(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ldots,\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\ldots;$$

$$(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),\ldots\ ;$$

$$(1,1),(-1,-1),(1,1),\ldots$$

tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketliklar bo'ladi.

Aytaylik, biror $\{(x_n,y_n)\}$:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n),\ldots$$

ketma-ketlik hamda (a,b) nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural son n_0 topilsa, barcha $n>n_0$ uchun

$$d((x_n,y_n),(a,b))<\varepsilon \qquad (2)$$

tengsizlik bajarilsa, (a,b) nuqta $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b)$$

kabi yoziladi.

Ravshanki, bu ta'rifdagi (2) tengsizlikni quyidagicha

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon$$

ham yozish mumkin.

Aytaylik, $\{(x_n,y_n)\}$:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n),\ldots$$

ketma-ketlikning limiti (a,b) bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b).$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday notural n_0 son topiladiki, barchan$>n_0$ uchun

$$d((x_n,y_n),(a,b))<\varepsilon,\ ya'ni$$

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki, bu tengsizlikdan quyidagi

$$|x_n-a|<\varepsilon,\ |y_n-b|<\varepsilon$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\qquad \lim_{n\to\infty}y_n=b$$

bo'lishini bildiradi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n,y_n)\}$: ketma-ketlikning limiti (a,b) bo'lsa, u holda bu ketma-ketlikning koordinatalaridan iborat $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklari ham limitga ega bo'ladi. Ularning limiti (a,b) nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a,b):$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Aytaylik, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n,y_n)\}$: ketma-ketlik berilgan bo'lib, ularning koordinatalaridan tuzilgan

$$\{x_n\} \text{ va } \{y_n\} \qquad (n=1,2,3,...)$$

sonlar ketma-ketliklari mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n>n_0$ uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

bo'ladi.

Shuningdek, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham shunday natural n_0' son topiladiki, barcha $n>n_0'$ uchun

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

bo'ladi.

Agar n_0 va n_0' natural sonlarning kattasini n_0^* deyilsa, unda barcha $n>n^*$ uchun bir yo'la

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Demak,

$$d((x_n,y_n),(a,b))=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon$$

bundan

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikning koordinatalaridan tuzilgan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklarining limiti (a,b) nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'lsa, u holda $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti (a,b) bo'ladi.

3-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti

Aytaylik, tekislikda biror M to'plam va (x_0,y_0) nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Markazi (x_0,y_0) nuqtada, radiusi $\varepsilon(\varepsilon>0)$ ga teng bo'lgan doira (ochiq doira) (x_0,y_0) nuqtaning atrofi (doiraviy atrofi) deyiladi va $U\varepsilon((x_0,y_0))$ kabi belgilanadi:

$$U\varepsilon((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}.$$

Agar (x_0,y_0) nuqtaning har bir atrofida M to'plamning (x_0,y_0) nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi mavjud bo'lsa, (x_0,y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$M=\{(x,y)\in R^2:\ x^2+y^2\leq 1\}$$

to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

Agar (x_0,y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda

1) (x_0,y_0) nuqtaning har bir atrofida M to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi.

2) M to'plamning nuqtalaridan (x_0,y_0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlik $((x_n,y_n)\in M,\ n=1,2,...)$ ajratish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$$

Tekislikda biror M to‘plam berilgan bo‘lib, (x_0,y_0) nuqta M to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

Shu to‘plamda $z=f(x,y)$ funksiya aniqlangan deylik.

Ta’rif. Agar M to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan (x_0,y_0) ga intiluvchi har qanday $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlik har doim bitta A songa intilsa, A son f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

kabi yoziladi.

Funksiya limitini quyidagicha ta’riflasa ham bo‘ladi.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son

$$d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x,y)\in M$ nuqtalar uchun.

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son f(x,y) funksiyaning $(x_0,y_0\ )$ nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning (0,0) nuqtadagi limiti 0 bo‘lishi quyidagicha ko‘rsatiladi:

(0,0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikni olamiz:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$$

Yuqorida aytilganlariga ko‘ra bu holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=0$$

bo‘ladi. Berilgan funksiyaning (x_n,y_n) dagi qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n,y_n)\}=\{(x_n{}^2+y_n{}^2)\}$$

bo'lib, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ da $f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \to 0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{\substack{n\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2 + y^2) = 0.$$

Limitga ega bo'lgan funksiyalarning ba'zi-bir xossalarini keltiramiz:

1) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda f(x,y) funksiya (x_0, y_0) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chegaralangan bo'ladi.

2) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} g(x,y) = B$$

limitlar mavjud bo'lsa, u holda $f(x,y) \pm g(x,y)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \left[f(x,y) \pm g(x,y) \right] = A \pm B$$

bo'ladi.

3) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} g(x,y) = B$$

limitlar mavjud bo'lsa, u holda $f(x,y) \cdot g(x,y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \left[f(x,y) \cdot g(x,y) \right] = A \cdot B$$

bo'ladi.

4) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} g(x,y) = B$$

bo'lib, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B}$$

bo'ladi.

4-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

Aytaylik $z=f(x,y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0,y_0)\in M$ nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti ta'rifini e'tiborga olib, funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi uzliksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, $d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x,y)\in M$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligini uning orttirmasi yordamida ham ta'riflash mumkin.

M to'plamda (x_0,y_0) nuqta bilan birga

$$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$

nuqtani ham olamiz. So'ng ushbu

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma, $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to'liq orttirmasi deyiladi.

Ta'rif. Agar argument orttirmalari Δx va Δy nolga intilganda funksiyaning to'liq orttirmasi $\Delta f(x_0,y_0)$ ham nolga intilsa

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \Delta f(x_0,y_0)=0$$

f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar f(x,y) funksiya M to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u shu M to'plamda uzluksiz deyiladi.

Eslatma. Agar yuqoridagi

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

munosabat bajarilmasa, f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzlishga ega deyiladi.

M to'plamda berilgan f(x,y) funksiya to'plamining bir necha nuqtasida yoki to'plamdagi biror chiziqda uzilishga ega bo'lishi mumkin.

Endi ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyaning ba'zi-bir xossalarini keltiramiz.

Aytaylik, f(x,y) va g(x,y) funksiyalarning har biri M to'plamda berilgan bo'lib, M to'plamning (x_0,y_0) nuqtasida uzluksiz bo'lsin.

U holda:

1) $f(x,y)\pm g(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi;

2) $f(x,y)\cdot g(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi;

3) $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiya ($g(x,y)\neq 0$) (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi

5-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hosila va differensiallari

z=f(x,y) funksiya M ($M\subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lsin. Bu M to'plamda (x_0,y_0) nuqta birga $(x_0+\Delta x,y_0)$ nuqtani olib ushbu

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi (argument) bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va $\Delta_x f(x_0,y_0)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi y o'zgaruvchi (argument) bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=x\cdot y$ funksiyaning xususiy orttirmalari

$$\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=(x+\Delta x)\cdot y-xy=y\cdot\Delta x,$$

$$\Delta_y f(x,y)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=x\cdot(y+\Delta y)-xy=x\cdot\Delta y$$

bo'ladi.

M to'plamda (x_0,y_0) nuqta bilan birga $(x_0+\Delta x,y_0)$ va $(x_0,y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib, funksiyaning xususiy orttirmalarini topamiz:

$$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

Ta'rif. Agar $\Delta x\to 0$ da

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\ \ yoki\ f_x'(x_0,y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shunga o'xshash $\Delta y\to 0$ da

$$\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \quad yoki\, f_y'(x_0,y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, z=f(x,y) funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda bu funksiyaning y o'zgaruvchini o'zgarmas, y bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda esa x o'zgaruvchini o'zgarmas deb qarash kerak ekan.

Demak, z=f(x,y) funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblashda bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilalar jadvali hamda hosila hisoblashdagi mazkur qoidalardan foydalanish mumkin bo'ladi.

Masalan:

1) $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning xususiy hosilalari

$f_x'(x,y)=(x^2+y^2)_x'=2x, \quad f_y'(x,y)=(x^2+y^2)_y'=2y,$

2) $f(x,y)=x^y$, $(x>0)$ funksiyaning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=y\cdot x^{y-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=x^y\cdot\ln x,$$

6-§. Funksiyaning to'liq orttirmasi

z=f(x,y) funksiya M $(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lib, to'plamning (x_0, y_0) nuqtasini belgilaymiz.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar mavjud va ular (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi orttirmasi $\Delta f(x_0,y_0)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+$$
$$+[f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] \qquad (3)$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0+\Delta y)=f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x,$$
$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y$$

$(0<\theta,\ \theta_1<1)$. Natijada yuqoridagi (3) tenglik ushbu ko'rinishga keladi.

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f_x'(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_1\cdot\Delta y)\cdot\Delta y \qquad (4)$$

Shartga ko'ra funksiyaning f_x' va f_y' xususiy hosilalari (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz. Demak,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to}} f_x'(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to}} f_y'(x_0,y_0+\theta_1\cdot\Delta y)=f_x'(x_0,y_0).$$

Shunday qilib,

$$f_x'(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)+\alpha,$$
$$f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)=f_y'(x_0,y_0)+\beta \qquad (5)$$

deb yozish mumkin. Bunda α va β lar Δx va Δy larga bog'liq hamda $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ (4) va (5) munosabatlardan

$$\Delta f(x_0,y_0)=[f_x'(x_0,y_0)+\alpha]\cdot\Delta x+$$
$$+[f_y'(x_0,y_0)+\beta]\cdot\Delta y=$$
$$=f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y+$$
$$+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak

$$\Delta f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y \qquad (6)$$

bu funksiya orttirmasining formulasi deyiladi.

Natija. Agar f(x,y) funfsiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz f_x', f_y' xususiy hosilalarga ega bo'lsa, funksiya shu (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi.

7-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensiali

$z=f_1(x,y)$ funksiya M $(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan. Bu M to'plamda (x_0, y_0) va $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib funksiya orttirmasini topamiz.

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

Ta'rif. Agar f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi orttirmasi ushbu

$$\Delta f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

ko'rinishida ifodalansa, funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bunda A,B – o'zgarmas. α va β esa Δx va Δy ga bog'liq hamda $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da α va β lar ham nolga intiladi.

Aytaylik, f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra

$$\Delta f(x_0,y_0)= A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x\neq 0, \Delta y=0$ deb topamiz.

$$\Delta x\, f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

keyingi tenglikning ikki tomonini Δx ga bo'lib,

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A+\alpha$$

tenglikka kelamiz. Bunda esa

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha)=A$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f_x'(x_0,y_0)=A.$$

Xuddi shunga o'xshash, (6) tenglikda $\Delta x=0, \Delta y\neq 0$ deb,

$$\Delta y\, f(x_0,y_0)=B\cdot\Delta y+\beta\cdot\Delta y$$

$$\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}=B+\beta, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}(B+\beta)=B,$$

$$f_y'(x_0,y_0)=B$$

bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz. Agar f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, funksiya shu nuqtada f_x' va f_y' xususiy hosilalarga ega bo‘ladi. Funksiya orttirmasi esa ushbu

$$\Delta f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

ko‘rinishga keladi.

Aytaylik, z=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

bo‘ladi. Bu ifodadagi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

yig‘indi f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0,y_0)$ yoki dz kabi belgilanadi:

$$df(x_0,y_0)=dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Demak, funksiya differensial funksiya orttirmasining Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bosh qismi. Agar $\Delta x=dx, \Delta y=dy$ deyilsa, u holda funksiya differensiali ushbu ko‘rinishni oladi:

$$dz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

f(x,y) va g(x,y) funksiyalar M to‘plamda berilgan bo‘lib, (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda

$$f(x,y) \pm g(x,y),$$

$$f(x,y) \cdot g(x,y),$$

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \quad (g(x,y) \neq 0)$$

funksiyalar ham shu (x0,y0) nuqtada differensiallanuvchi va

$$d[f(x,y) \pm g(x,y)] = df(x,y) \pm dg(x,y),$$

$$d[f(x,y) \cdot g(x,y)] =$$

$$= f(x,y) \cdot df(x,y) + g(x,y) \cdot df(x,y),$$

$$d\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{g(x,y)df(x,y) - f(x,y)dg(x,y)}{g^2(x,y)}$$

bo'ladi. Shuningdek,

$$d[c \cdot f(x,y)] = c \cdot df(x,y), \; c = const$$

bo'ladi.

8-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari va differensiali

z=f(x,y) funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, $(x,y) \in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, funksiya (x,y) nuqtada xususiy $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ hosilalariga ega bo'ladi.

Bu xususiy hosilalar o'z navbatida x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lishi mumkin.

Ta'rif. z=f(x,y) funksiya xususiy hosilalari $f_x'(x,y)$ va $f_y'(x,y)$ larning xususiy hosilalari berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deyiladi va

$$f_{x^2}'', f_{xy}'', f_{yx}'', f_{y^2}'' \text{ yoki}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$f''_{x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(f'_x(x,y)\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(f'_x(x,y)\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\left(f'_y(x,y)\right)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad f''_{y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(f'_y(x,y)\right)'_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Eslatma. Odatda $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ va $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ xususiy hosilalar aralash hosilalar deyiladi.

Bu aralash hosilalar (x,y) nuqtada uzluksiz bo‘lsa, bir-biriga teng bo‘ladi.

Xuddi yuqoridagidek, z=f(x,y) funksiyaning uchinchi, to‘rtinchi va hokazo tartibli xususiy hosilalari ta’riflanadi.

Masalan,

$$f(x,y)=x^2+y^2+x^2y^2$$

funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari quyidagicha bo‘ladi.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+x^2y^2)=2x+2xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+x^2y^2)=2y+2x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(2x+2xy^2)=$$
$$=2+2y^2=2(1+y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2y+2x^2y)=$$
$$=2+2x^2=2(1+x^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2xy^2) = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + 2x^2 y) = 4xy$$

Aytaylik, z=f(x,y) funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, $(x,y)\in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ma'lumki, funksiyaning diffrensiali

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (7)$$

bo'ladi.

Ta'rif. z=f(x,y) funksiyaning (x,y) nuqtadagi differensiali df(x,y) ning differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va $d^2f(x,y)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y)).$$

Endi f(x,y) funksiya differensialining (7) ifodasidan foydalanib, f(x,y) funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali ifodasini topamiz:

$$d^2 f(x,y) = d\left(df(x,y)\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy.$$

Agar

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$d^2 f(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

bo'ladi.

Demak,

$$d^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Xuddi yuqoridagidek, z=f(x,y) funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hakozo tartibli differensiallari ta'riflanadi va ularning ifodalari topiladi.

Ikki o'zgaruvchi funksiya uchun Teylor formulasini yozish mumkin. Quyida bunday formulani keltirish bilan kifoyalanamiz. $z=f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning

$$U\varepsilon((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2: d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofida berilgan bo'lib, unda funksiya birinchi, ikkinchi va hokazo $(n+1)$ tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+$$

$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\right|\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\left.\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x-x_0)^n+C_n^1\frac{\partial^n f(x-x_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^{n-1}\right]+R_n$$

bo'ladi.

Bu formula ikki o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi deyiladi.

9-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya $M\subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0)\in M$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar (x_0,y_0) nuqtaning M to'plamga tegishli shunday

$$U_\delta((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2: d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofi topilsaki, ixtiyoriy $(x,y)\in U(x_0,y_0)\}$ uchun

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada lokal maksimumga erishadi deyiladi. (x_0,y_0) nuqta funksiyaga maksimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0,y_0)$ esa $f(x,y)$ funksiyaning maksimum qiymati deyiladi. Uni

$$max\{f(x,y)\},\ ((x,y)\in U_\delta((x_0,y_0)))$$

kabi belgilanadi. Demak

$$f(x_0,y_0)= max\{f(x,y)\}$$

Ta'rif. Agar (x_0,y_0) nuqtaning M to'plamga tegishli bo'lgan shunday

$$U_\delta((x_0,y_0))= \{(x,y)\in R^2: d((x,y),(x_0,y_0))\}$$

atrofi topilsaki, ixtiyoriy $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$ uchun

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x,y)$ funfsiya, (x_0,y_0) nuqtada lokal minimumga erishadi deyiladi. (x_0,y_0) nuqta funksiyaga minimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0,y_0)$ esa funksiyaning minimum qiymati deyiladi. Uni

$$min\{f(x,y)\},\ ((x,y)\in U_\delta((x_0,y_0)))$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$f(x_0,y_0)= min\{f(x,y)\}$$

funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumi deyiladi.

10-§. Funksiya ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari

$z=f(x,y)$ funksiya $M\subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga, aytaylik maksimumga erishsin. Unda (x_0, y_0) nuqtaning shunday $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofidagi ixtiyoriy (x, y) nuqtalar uchun

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Jumladan

$$(x,y_0)\in U_\delta((x_0,y_0))$$

uchun ham

$$f(x,y_0)\geq f(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Bu hol bir o'zgaruvchili $f(x,y_0)$ funksiyaning (bunda x argument) x_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi.

Agar $f(x,y)$ funfsiya, (x_0,y_0) nuqtada x o'zgaruvchi bo'yicha f_x' xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda Ferma teoremasiga ko'ra

$$f_x'(x_0,y_0)=0$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek, (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofidagi ixtiyoriy nuqtada, jumladan

$$(x,y_0)\in U_\delta((x_0,y_0))$$

uchun

$$f(x,y_0)\leq f(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Bu esa bir o'zgaruvchili $f(x_0,y)$ funksiyani (bunda y argument) y_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi.

Agar $f(x,y)$ funksiya $f(x_0,y_0)$ nuqtada y bo'yicha f_y' xususiy hosilaga ega bo'lsa, yana Ferma teoremasiga ko'ra $f_y'(x_0,y_0)=0$ bo'ladi.

$z=f(x,y)$ funksia (x_0,y_0) nuqtada minumumga erishganda ham xuddi shunday hol yuz beradi. Shunday qilib, $z=f(x,y)$ funksiya $(x_0,y_0)\in M$ nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiya f_x', f_y' xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f_x'(x_0,y_0)=0, \quad f_y'(x_0,y_0)=0$$

bo'ladi. Bu funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Funksiya xususiy hosilalarini nolga aylantiradigan nuqtalar uning stasionar (turg'un) nuqtalari deyiladi.

$z=f(x,y)$ funksiya $M(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lib, (x_0,y_0) nuqta va uning atrofi $U_\delta((x_0,y_0))$ shu to'plamga tegishli bo'lsin:

$$(x_0,y_0)\in M, \qquad U_\delta((x_0,y_0))\subset M$$

Agar $(x,y)\in U_\delta((x_0,y_0))$ nuqtalarda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$$

bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$$

bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

Demak, (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofidagi (x,y) nuqtalarda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmaning har doim musbat yoki manfiy bo'lishini aniqlash kerak bo'ladi. Uni hal etishda $f(x,y)$ funksiyaga ma'lum shartlar qo'yiladi $z=f(x,y)$ funksiya uchun:

1) (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofida f_x', f_y' hamda f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} xususiy hosilalar mavjud va ular uzluksiz.

2) $f_x'(x_0,y_0)=0$, $f_y'(x_0,y_0)=0$

Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+$$

$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

bunda ikkinchi tartibli xususiy hosilalar

$$(x_0+\theta_1(x-x_0).\ \ y_0+\theta_2\cdot(y-y_0))$$

nuqtada hisoblangan ($0<\theta_1$, $\theta_2<1$).

Natijada,

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni bajaramiz:

$$f''_{x^2}(x_0,y_0)=a_{11},\ f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{y_x}(x_0,y_0)=a_{12},\ f''_{y^2}(x_0,y_0)=a_{22}$$

Shartga ko'ra ikkinchi tartibli xususiy hosilalar (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz. Demak,

$$f''_{x^2}\left(x_0+\theta_1(x-x_0),\ y_0+\theta_2(y-y_0)\right)=$$

$$=f''_{x^2}(x_0,y_0)+\alpha_{11}=a_{11}+\alpha_{11},$$

$$f''_{xy}\left(x_0+\theta_1(x-x_0),\ y_0+\theta_2\cdot(y-y_0)\right)=f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha_{12}=$$

$$=a_{12}+\alpha_{12},$$

$$f''_{(y^2)}(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))=$$

$$=f''_{y^2}(x_0,y_0)+\alpha_{22}=a_{22}+\alpha_{22}$$

Bunda $x-x_0\to 0$, $y-y_0\to 0$ da α_{11}, α_{12}, α_{22}, larning har biri nolga intiladi.

Natijada

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[a_{11}(x-x_0)^2+\right.$$

$$+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+a_{22}(y-y_0)^2\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}[\alpha_{11}(x-x_0)^2+2\alpha_{12}(x-x_0)(y-y_0)+\alpha_{22}(y-y_0)^2$$

bo'lib,

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmaning ishorasi

$$a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+a_{22}(y-y_0)$$

ifodaning ishorasiga bog'liq bo'ladi.

1) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}>0$ va $a_{11}>0$ bo'lsa u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$$

bo'lib, f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimumga erishadi.

2) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}>0$ va $a_{11}<0$ bo'lsa u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$$

bo'lib, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

3) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}<0$ bo'lsa, u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}=0$ bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligi ham mumkin. Uni qo'shimcha tekshirish bilan hal qilinadi.

Misol. Ushbu

$$z=x^2-2xy+2y^2-4x+6y+10$$

funksiyaning ekstremumi topilsin.

◄ Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial z}=2x-2y-4, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y+6$$

Bu xususiy hosilalarini nolga tenglab ushbu

$$\begin{cases} 2x-2y-4=0, \\ -2x+4y+6=0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Bu sistemaning yechimi $x=1$, $y=-1$ ya'ni $(1,-1)$ bo'ladi. Demak, $(1,-1)$ berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topib, ularning statsionar $(1,-1)$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x-2y-4)=2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-2x+2y+6)=4.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x-2y-4)=-2$$

Demak,

$$a_{11}=2, \qquad a_{12}=-2, \qquad a_{22}=4.$$

Endi $a_{11}a_{22}-a^2_{12}$ ni hisoblaymiz:

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=2\cdot 4-(-2)^2=8-4=4$$

Demak, $a_{11}a_{22}-a^2_{12}4>0$ va $a_{11}=2>0$. Yuqorida aytilganiga ko'ra berilgan funksiya $(1,-1)$ nuqtada minimumga erishadi.

Funksiyaning minimum qiymati

$$\min f(x,y)=\min(x^2-2xy+2y^2-4x+6y)=5$$

ga teng bo'ladi.►

14-bob. QATORLAR

1-§. Sonli qatorlar

Biror

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_2, \ldots$$

sonlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, uning yordamida ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

ifodani hosil qilamiz

Odatda (1) ifoda sonli qator deyiladi. Bunda $a_n(1,2,3,\ldots)$ sonlar qatorning hadlari (a_1 – birinchi had, a_2 – ikkinchi had,..., a_n–n – had yoki umumiy had) deyiladi.

(1) qator qisqacha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kabi yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Bu qator hadlari yordamida quydagi yig‘indilarni tuzamiz:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ular (1) qatorning qismiy yig‘indilari deyiladi.

Natijada, (1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat ushbu

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi.

Masalan, agar $a_n = \frac{1}{2^n}$ bo'lsa, u holda qator

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \quad yoki \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ bo'lsa, u holda quyidagi ko'rinishdagi qatorga ega bo'lamiz:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots \quad yoki \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligi chekli limitga ega,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi, S esa qatorning yig'indisi deyiladi:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \cdots$$

Ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligining limiti cheksiz yoki bu limit mavjud bo'lmasa, (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot n} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

bo'lib, uning limiti

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ga teng.

Demak, qaralayotgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi 1 ga teng.

Ushbu

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$$

Qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}=\begin{cases}1, & agar\ \ n-toq\ bo'lsa\\ 0, & agar\ \ n-juft\ bo'lsa\end{cases}$$

bo'lib, ketma-ketlik limitga ega emas.

Demak, bu qator uzoqlashuvchi.

Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi qatorlarga misollar ko'ramiz.

1-misol. Ushbu qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots.$$

Yechish. Berilgan qatorning n-xususiy yig'indisi $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$. Bu yig'indini soddalashtirish maqsadida qatorning n-hadini quyidagi $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

bo'ladi. Ravshanki, $\{S_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjud va $\frac{3}{4}$ ga teng. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'lib, uni $\frac{3}{4}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$, yoki $\frac{3}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ kabi yozish mumkin ekan.

2-misol. Ushbu qatorni $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots$ yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning n-xususiy yig'indisi $S_n=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ va $S_n>\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{n-\text{ta}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot n=\sqrt[3]{n^2}$ bo'lganligi sababli, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$ bo'ladi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Geometrik qator. Qatorga eng sodda misol sifatida geometrik progressiya barcha hadlarining yig'indisini olishimiz mumkin:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (3)$$

bunda $a\neq 0$. Bu qator *geometrik qator* deyiladi. Geometrik qator q ning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lishini aniqlaymiz. Buning uchun uning n-xususiy yig'indisini qaraymiz. Geometrik progressiya birinchi n ta hadi yig'indisining formulasiga ko'ra ($q\neq 1$)

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\frac{q^n}{1-q}$$

o'rinli.

Agar $|q|<1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ bo'lib, $\lim_{n\to\infty} S_n$ mavjud va

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$ bo'ladi. Demak, $|q|<1$ bo'l-

ganda (3) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{a}{1-q}$ bo'ladi.

Agar $|q|>1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ va $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $q=-1$ bo'lsa, qatorning xususiy yig'indisi $S_n = \frac{a}{2}(1+(-1)^n)$ bo'ladi. Ravshanki (qarang, 3-misol) bu holda xususiy yig'indilar ketma-ketligi uzoqlashuvchi, demak (3) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $q=1$ bo'lsa, qatorning xususiy yig'indisi $S_n=a+a+\ldots a=na$ va $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'ladi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q|<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q|\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Yaqinlashuvchi bo'lgan holda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisining formulasi hosil bo'ladi:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

2-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Yaqinlashuvchi qatorlar bir nechta xossalarga ega.

1-xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda