O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

N.R. BEKNAZAROVA,
X.N. JUMAYEV

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

N.R. BEKNAZAROVA,
X.N. JUMAYEV

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

TOSHKENT - 2012

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

N.R. BEKNAZAROVA,
X.N. JUMAYEV

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Ilmiy-uslubiy va o'quv-uslubiy birlashmalari faoliyatini muvofiqlashtirish kengashi tomonidan iqtisodiyot yo'nalishidagi oily o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma. 2007-yil 28-avgust 177-sonli buyrug'i asosida berilgan 1207-guvohnoma asosida tavsiya etilgan

TOSHKENT – ИКТИСОДИЁТ – 2012

UDK 517.9
BBK 22.172

Beknazarova N.R., Jumayev X.N. Matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullari: O'quv qo'llanma. – T.: Иктисодиёт, 2012. - 175 b.

Ushbu kitob matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullari bo'yicha yozilgan o'quv qo'llanma bo'lib, iqtisodiyot yo'nalishidagi axborot texnologiyasi (5221900–Informatika. Axborot texnologiyasi) ixtisosligining harakatdagi o'quv dasturi asosida tayyorlangan.

O'quv qo'llanmada matematik programmalashtirish va optimallashatirish usullarining asosiy yo'nalishlari va usullari bayon etilgan hamda ular tegishli misol va masalalar bilan to'ldirilgan. Shuningdek, masalalarning iqtisodiy talqini va tatbiqiy jihatlariga e'tibor berilgan.

O'quv qo'llanma bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan. Undan magistratura va aspirantura tinglovchilari ham foydalanishlari mumkin.

Mas'ul muharrir f.m.f.d., prof. Sh. Shorahmetov
Taqrizchilar: f.m.f.n., dots. R. Mo'minova,
f.m.f.n., dots. M. Muxitdinov

Бекназарова Н.Р., Жумаев Х.Н. Методы математического программирования и оптимизации: Учебное пособие. – Т.: Иктисодиёт, 2011. – 175 с.

Настоящая книга является учебным пособием по математическому программированию и методам оптимизации и написана на основе действующей учебной программы «Информационная технология (5221900-Информатика. Информационная технология)» для студентов экономических специальностей высших учебных заведений.

В учебном пособии изложены основные направления и методы математического программирования и оптимизации, приведены соответствующие примеры и задачи. Уделено большое внимание прикладному характеру и экономической интерпретации приведуонных задач. Учебное пособие рассчитано для студентов бакалавриата, им также могут пользоваться слушатели магистратуры и аспирантуры.

Ответственный редактор ф.м.ф.д., проф. Ш. Шорахметов
Рецензенты: к.ф.м.н., доц. Р. Муминова,
к.ф.м.н., доц. М. Мухитдинов

Beknazarova N.R., Jumayev X.N. Mathematical programming and methods of optimization: Textbook. – T.: Iqtisodiyot, 2011. – 175 p.

The original book is a mathematical programming and optimization textbook and is based on the current curriculum of the university students studying economics of spesalization – 5221900 – Information technology.

There are basic mathematical programming and optimization methods displaed in the textbook, appropriate examples and problems are set. A lot of attention is paid to the application charakter and economic interpretation of the given problems.

The textbook is designed for students studying for the bachelor degree.

It can be also used by graduate and postgraduate students.

Editor in chief prof. Sh. Shorahmetov
Reviewers: p.h.d. dots R.Mo'minova,
p.h.d., dots. M.Muxitdinov

ISBN 978-9943-333-45-1

UDK 517.9
BBK 22.172

MUNDARIJA

KIRISH

Fan va texnikaning jadal rivojlanishi, ishlab chiqarishni boshqarishning murakkablashuvi va uni rejalashtirishga qo'yiladigan talablarning ortishi bozor iqtisodyoti rivojlanishini tavsiflovchi omillardan hisoblanadi. Bunday sharoitda iqtisodyoti boshqarishga ilmiy yondashish, matematik usullarni keng qo'llash, ayniqsa, matematik programmalashtirishning aniq usullaridan foydalanish zaruratga aylandi. Zamonaviy kompyuter texnologiyasidan keng foydalangan holda, matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullarini iqtisodiy izlanishlar va rejalashtirishda qo'llash muhimdir.

Matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullari predmeti korxona, firma, qurilish, qishloq xo'jaligi, bozor, ishlab chiqarish birlashmasi, xalq xo'jaligi tarmoqlari, umuman olganda, butun xalq xo'jaligiga doir iqtisodiy jarayonlarni tasvirlovchi matematik modellarni tuzish va ularga tegishli usullardan foydalanib yechishdan iborat. Matematik modellar ko'p davrdan beri iqtisodiyotda ishlatilmoqda. Masalan, iqtisodiyotda qo'llanilgan 1-model – F.Kene tomonidan yaratilgan takror ishlab chiqarish modelidir.

«Iqtisodiy masalaning matematik modeli» deganda, bu masalaning asosiy shartlari va maqsadining matematik formulalar yordamida ifodalanishiga aytiladi.

Optimallashtirish usullari yordamida ekstremal iqtisodiy masalalar yechishni to'rt bosqichga bo'lish mumkin: masalani chuqur o'rganib, unga tatbiq etish mumkin bo'ladigan usullarni tanlash, masalada qo'yilgan shartlarga asoslanib matematik model tuzish;

- agar masalaning shartlari maqsadga muvofiq kelsa, tegishli matematik usulni qo'llab, optimal yechimni topish;
- yechimni iqtisodiy tahlil qilish va uni amaliyotga «imkoni boricha» tatbiq etish;
- amaliyotda matematik programmalashtirish va optimallashtirishning taqribiy usullaridan foydalanish haqida tushunchalar berish.

Matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullari masalalari chiziqli, chiziqsiz hamda dinamik programmalashtirishga bo'linib, umumiy holda ekstremal masalalarni yechishda qo'llaniladi. Masalan, maqsad funksiya deb ataluvchi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini

$$g_i(x_1,\ x_2, \dots ,x_n) * b_i,\ \ (i=\overline{1,m})$$

(bu yerda $*$ belgi $\le, \ge, =$ belgilardan biri) shartlar bajarilgan holda aniqlashni ko'rib chiqaylik.

Bu yerda: f va g_i - berilgan funksiyalar, b_i - haqiqiy sonlar.

Agar f va g_i funksiyalar chiziqli bo'lsa, ularga nisbatan berilgan masala chiziqli programmalashtirish masalasi bo'ladi. Ko'rsatilgan funksiyalardan hech bo'lmasa bittasi chiziqli bo'lmagan funksiya bo'lsa, masala chiziqsiz programmalashtirish masalasidan iborat.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalari orasida qavariq programmalashtirish masalasi chuqur o'rganilgan. Bunday masalalarni yechish jarayonida qavariq yopiq to'plamda aniqlangan qavariq funksiyaning maksimumi (minimumi) topiladi.

Qavariq programmalashtirish masalalari orasida esa kvadratik programmalashtirish masalalari keng o'rganilib, ularni yechishning maxsus usullari yaratilgan. Lekin bu usullar maqsad funksiyasi qavariq kvadratik funksiya bo'lib, chegaraviy shartlari chiziqli funksiyalarnigina o'z ichiga oladi.

Vaqtga bog'liq bo'lgan (bir nechta bosqichga bo'lingan) jarayonlarni hal etishda dinamik programmalashtirish usullari qo'llaniladi. Masalan, rejalashtirilishi mo'ljallangan davrning yillari bo'yicha korxonalararo resurslarni taqsimlash masalasi dinamik programmalashtirish usuli yordamida yechiladi. Bunday masalalar ko'p bosqichli hisoblanadi.

O'quv qo'llanmada matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullarining asosiy yo'nalishlari va usullari bayon etilgan hamda ular tegishli misol va masalalar bilan to'ldirilgan. Shuningdek, masalalarning iqtisodiy talqini va tatbiqiy jihatlariga e'tibor berilgan. Qo'llanmaning 1-9 boblari N.R.Beknazarova tomonidan, 10-12 boblari esa X.N. Jumaev tomonidan tayyorlangan.

1-bob. MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI FANINING PREDMETI

1.1. Iqtisodiy masalalarning matematik modellarini tuzishga doir misollar

Matematik programmalash va optimallashtirish usullari masalalari ichida eng yaxshi o'rganilgani chiziqli programmalashdir. Chiziqli programmalash usullari bilan ishlab chiqarishni rejalashtirish, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni optimal taqsimlash, optimal qorishmalar tayyorlash, optimal qirqish, sanoat korxonalarini optimal joylashtirish va boshqa ko'plab masalalarni yechish mumkin.

Quyida ba'zi iqtisodiy masalalarning matematik modellarini tuzishga doir berilgan misollarni ko'rib chiqamiz.

a) Materiallarni qirqish masalasining qo'yilishi va matematik modeli

Materiallarni ratsional-optimal qirqish variantalarini aniqlash resurslarni iqtisod qilishga hamda materiallardan foydalanish koeffitsiyentini oshirishga yordam beradi.

Materiallarni qirqish masalasining namunaviy modelini ko'raylik.

Qirqish uchun har biri b_i $(i=\overline{1,m})$ hajmda bo'lgan m xil material mavjud. Ulardan komplektlanadigan k xil mahsulotlar tayyorlanishi lozimki, ularning soni $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_K$ ga mos ravishda proporsional bo'lsin.

i $(i=\overline{1,m})$ xil materialning bir birligi j $(j=\overline{1,n})$ usulda qirqilishi mumkin. Bunday qirqishlarda i xil mahsulotni j-usulda qirqqanda k xil mahsulotdan a_{ij}^k miqdorda hosil qilinadi. Materiallarni qirqishda eng kam chiqindi chiqib, max komplekt mahsulotlar tayyorlash kerak. Bunday iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish uchun belgilashlar kiritamiz:

$x_{ij} - j(j=\overline{1,n})$ usul bilan qirqiladigan i xil material miqdori;

x – tayyorlangan komplektlar soni.

Masalaning matematik modeli:

$$Z = x \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k = l_k x, \quad k=\overline{1,K},$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

b) Transport masalasining qo'yilishi va uning matematik modeli

m ta punkt (ta'minotchi)larning a_i $(i=\overline{1,m})$ miqdorda bir xil mahsulotlari mavjud bo'lib, ularni talab birliklari b_j $(j=\overline{1,n})$ bo'lgan n ta iste'molchilarga tashish kerak. i $(i=\overline{1,m})$-ta'minotchidan $j$$(j=\overline{1,n})$-iste'molchiga bir birlik mahsulot tashish uchun sarflanadigan xarajat c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishni shunday tashkil qilish kerakki:

- ta'minotchilardagi mahsulotlar to'la tashib ketilsin;

- har bir iste'molchining mahsulotga bo'lgan talabi to'la qondirilsin;
- mahsulot tashish uchun sarflangan transport xarajatlar eng kam bo'lsin.

Bunday qo'yilgan iqtisodiy masala, odatda, transport masalasi deb ataladi. Uning matematik modeliga mos keladigan har qanday iqtisodiy masala (ma'no jihatdan transport masalasidan farq qiladigan) transport masalasining matematik modeliga keltiriladigan maxsus masalalar deyiladi. Bunday masalalarni yechishning matematik usuli bir xil.

Yuqorida qo'yilgan transport masalasining matematik modelini tuzish uchun x_{ij} bilan $i(i=\overline{1,m})$ ta'minotchidan $j(j=\overline{1,n})$ iste'molchiga tashiladigan mahsulot miqdorini belgilaylik.

U holda masalaning 1-sharti – ta'minotchilarning mahsulotlari to'la tashib ketilishi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,m};$$

2 - sharti – iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talablarini to'la qondirilishi:

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=\overline{1,n}$ tenglamalar sistemasida ifodalanadi.

Bu ikki shartdan albatta $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ tenglik ham bajarilishi kelib chiqadi. x_{ij} - tashiladigan mahsulot miqdorini bildirgani uchun barcha $i=\overline{1,m}$ va $j=\overline{1,n}$ uchun nomanfiydir, ya'ni:

$$x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Mahsulotlarni tashish uchun transportga sarflanadigan xarajatni, ya'ni:

$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ funksiyani minimallashtirish zarur.

Demak, transport masalasining matematik modeli quyidagicha:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\qquad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\qquad x_{ij} \geq 0,$$

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

c) **Qorishma tayyorlash masalasi**

Qishloq xo'jaligida qoramollarga beriladigan ovqat (qorishma) tayyorlashda, kishilarga parxez ovqatlarini tayyorlashda, metallurgiya, neftni qayta ishlash, qurilish va boshqa tarmoqlarda turli qorishmalarni optimal ravishda tayyorlash masalalarini yechishda chiziqli programmalashtirish usullaridan foydalanish mumkin. Bunga misol sifatida fermadagi qoramollarni boqishda optimal ratsion tayyorlash masalasini ko'raylik.

Faraz qilaylik, har bir qoramol bir kunda A_1 xil to'yimli moddadan b_1 miqdorda, A_2 xil to'yimli moddada b_2 miqdorda va h.k. A_m xil to'yimli moddadan b_m miqdorda qabul qilishi zarur.

Qorishma yem tayyorlash uchun tarkibida yuqoridagi moddalar mavjud bo'lgan n xil mahsulot ishlatiladi.

i xil mahsulotlarning 1kg tarkibida mavjud j to'yimli moddalar miqdori a_{ij} va har bir ishlatiladigan mahsulot turlarining bir birligining bahosi c_j berilgan. Zarur to'yimli moddalari yetarli bo'lgan yem qorishmasi shunday tayyorlansinki, unga sarflanadigan xarajat minimal bo'lsin.

Bunday masalaning iqtisodiy matematik modelini tuzish uchun kunlik ratsionga qo'shiladigan mahsulotlarning miqdorini mos holda $x_1, x_2, ..., x_n$ bilan belgilaylik.

Kunlik ratsion to'yimli bo'lishini quyidagi tengsizliklar bilan ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \geq b_1, \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \geq b_2, \\
&.................................... \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \geq b_m, \\
&\qquad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \quad b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}.
\end{aligned}$$

Ratsionga qo'shilmaydigan mahsulot uchun mos o'zgaruvchining qiymati 0 ga teng. Ratsion tayyorlashdagi asosiy maqsad ratsion to'yimli bo'lishi bilan birga minimal xarajat sarflanishidir. Shuning uchun kunlik ratsionga sarflangan mahsulotlarning bahosini aniqlaymiz va uni minimallashtirishni talab qilamiz:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow \min$$

Demak, qoramolga kunlik ratsionni optimal tayyorlash masalasining matematik modeli quyidagicha:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \quad \text{funksiyaning min qiymati}$$

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \geq b_1, \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \geq b_2, \\
&.................................... \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \geq b_m, \\
&\qquad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \quad b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}
\end{aligned}$$

chegaraviy shartlarda aniqlansin.

Kimyoviy aralashmalar, metallarning yoki qurilishda ishlatiladigan qorishmalarni optimal ravishda tayyorlashda ham yuqoridagi kabi matematik modellarni tuzish mumkin. Lekin, bunday aralashmalar tayyorlashga doir masalalarda, qo'shimcha shartlarni ham, masalan, kimyoviy aralashma tayyorlashda ba'zi kimyo elementlarni eritilishi jarayonida kamayib ketishini hisobga olish kerak. Bunday hollarda matematik modelda tuzatish (to'ldirish) koeffitsiyenti qatnashadi.

d) Ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik, korxona m xil mahsulot ishlab chiqarishga ixtisoslashtirilgan bo'lsin. Mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun miqdorlari mos holda $b_1, b_2, ..., b_m$ bo'lgan ishlab chiqarish resurslaridan foydalanilsin. Bir birlik

$j(j=1,2,\dots,n)$ xil mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan $i(\ i\ =1,2,\dots,m)$ xil resurs miqdori (normasi) - a_{ij} birlikni tashkil qilsa, c_j - esa korxonaning bir birlik tayyor mahsulotdan oladigan daromadi bo'lsa, korxona ishini shunday rejalashtirish lozimki: a) barcha mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir ishlab chiqarish resursining miqdori ularning mavjud umumiy miqdoridan oshmasin; b) tayyor mahsulotlarni sotishdan olinadigan umumiy daromad maksimal bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun rejalashtirilayotgan davr ichida ishlab chiqariladigan $j(j=1,2,\dots,n)$ xil mahsulot miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masaladagi 1-shart quyidagi tengsizliklar orqali ifodalanadi:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\le b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\le b_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\le b_m.
\end{array}
$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra x_j ning qiymatlari manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni: $x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,n})$. Masaladagi 2-shart uning maqsadini – korxonaning maksimal daromadini quyidagi chiziqli funksiya orqali ifodalash mumkin:

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n.$$

Shartga ko'ra $y\to\max$. Bundan keyin y funksiya maksimum (minimum)ga erishsin degan shartni $y_{max}(y_{min})$ ko'rinishda belgilaymiz.

Shunday qilib, mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalasining iqtisodiy-matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\le b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\le b_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\le b_m,\\
x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\dots,\ x_n\ge 0,\\
y_{max}=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n.
\end{array}
$$

Endi aniq iqtisodiy masalalarning matematik modellarini tuzishga doir misollar keltiramiz.

1. Sut firmasining mahsuloti qog'oz idishlarga quyilgan sut, kefir va qaymoqdan iborat. 1 t dan sut, kefir va qaymoq tayyorlash uchun mos ravishda 1000 kg, 1010 kg va 9450 kg sut kerak bo'ladi. 1t sut va kefirni idishlarga maxsus qurilma - mashinalarda quyishda 0,18 va 0,19 mashina/soat vaqt sarflanadi. 1t qaymoq tayyorlash uchun esa maxsus avtomatlar 3,25 soat ishlaydi. Sut mahsulotlarini tayyorlash uchun firma har kuni 3600 kg sut ishlatiladigan qurilmadan 21,4 mashina/soat, qaymoq uchun esa maxsus avtomatlardan 16,25 soat foydalanishi mumkin. 1t sut, kefir va qaymoqlarni sotishda olinadigan daromad mos ravishda 50000 so'm, 60000 va 520000 so'm. Firma har kuni 100 t dan kam bo'lmagan sut

tayyorlashi zarur, kefir va qaymoqlar esa ixtiyoriy. Firmaning daromadi yuqori bo'lishini ta'minlaydigan sut mahsulotlaridan qanchadan ishlab chiqarish kerak? Bu masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish. Faraz qilaylik, firma har kuni x_1 t sut, x_2 t kefir va x_3 t qaymoqlarni idishlarga quysin.

Sut mahsuloti ishlab chiqarilish shartiga ko'ra quyidagi tengsizlikni yozish mumkin:

$$1000x_1+1010x_2+9450x_3 \le 136\ 000$$

Sut quyish qurilmalarining sarflashi mumkin bo'lgan vaqtni hisobga olsak:

$$0{,}18x_1+0{,}19x_2 \le 21{,}4$$

$$3{,}25x_3 \le 16{,}25$$

shartlar hosil bo'ladi.

Har kuni 100 t dan kam bo'lmagan sut quyish kerak degan shartga

$$x_1 \ge 100$$

tengsizlik mos keladi. x_2 va x_3 lar iqtisodiy ma'nosiga ko'ra nomanfiy bo'ladi, ya'ni:

$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

x_1 t sut, x_2 t kefir va x_3 t qaymoqni sotishdan firmaga keladigan daromad

$$u=50\ 000x_1+60\ 000x_2+520\ 000x_3$$

so'mni tashkil qiladi.

Bularning hammasidan quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}1000x_1+1010x_2+9450x_3 &\le 136\ 000\\ 0{,}18x_1+0{,}19x_2 &\le 21{,}4\\ 3{,}25x_3 &\le 16{,}25\\ x_1\ge 100,\ x_2\ge 0,\ x_3 &\ge 0\end{aligned}$$

tengsizliklar sistemasining barcha yechimlari orasidan

$$u=50\ 000x_1+60\ 000x_2+520\ 000x_3$$

chiziqli - maqsad funksiyaga max qiymat beradigan yechim aniqlansin.

2. Xomashyodan foydalanish masalasi. A_1 va A_2 xil mahsulot ishlab chiqarish uchun S_1, S_2, S_3, S_4 xil xomashyo ishlatiladi.

Xomashyolarning umumiy mavjud miqdori va har bir xil mahsulotning bir birligini tayyorlashga ketadigan miqdori hamda tayyor mahsulotning bir birligini sotishdan olinadigan daromad jadvalda berilgan.

Xomashyo turi	**Xomashyoning umumiy miqdori**	A_1	A_2	A_3
S_1	200	2	4	1
S_2	400	6	5	4
S_3	350	5	3	4
S_4	200	1	1,5	2
Birlik mahsulotdan olinadigan	500	500	600	400

daromad (so‘m)				

max daromad olinadigan mahsulot ishlab chiqarishni rejalashtirishning matematik modeli tuzilsin.

Yechish. x_1 bilan A_1 xil mahsulot, x_2 bilan A_2 xil mahsulot, x_3 bilan A_3 xil mahsulot ishlab chiqish miqdorlarini belgilaymiz.

Jadvalda berilganlarga asoslanib quyidagi tengsizliklar sistemasini tuzish mumkin:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\le 200 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\le 400 \qquad (*) \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 350 \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 &\le 200. \end{aligned}$$

Qo‘yilgan masalaning maqsadi – mahsulot sotishdan max daromad olish

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

(iqtisodiy jihatdan o‘zgaruvchilar nomanfiydir) o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo‘ladi, ya’ni:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 500x_1 + 600x_2 + 400x_2.$$

Bu funksiya yuqoridagi (*) sistema bilan birgalikda masalaning matematik modelini tashkil qiladi.

Xomashyodan foydalanishning bunday xususiy holini umumiylashtirish mumkin.

Faraz qilaylik, n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil xomashyodan foydalanilsin.

Quyidagi belgilarni kiritaylik:

S_i $(i = \overline{1,m})$ – xomashyo turi;

b_i – i xil xomashyoning mavjud miqdori;

A_j $(j = \overline{1,n})$ – ishlab chiqariladigan mahsulot turi;

a_{ij} – j xil mahsulot birligiga sarflanadigan i xil xomashyo miqdori;

c_j – j xil mahsulot birligidan olinadigan daromad;

Masalaning shartlarini jadvalda ko‘rsatamiz:

Xomashyo turi	**Xomashyoning umumiy miqdori**	A_1	A_2	...	A_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Daromad		c_1	c_2	...	c_n

Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulot miqdorlarini x_j $(j=\overline{1,n})$ bilan belgilasak, masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$f=c_1 x_1+c_2 x_2+...+c_n x_n \to \max$$
$$a_{11} x_1+a_{12} x_2+...+a_{1n} x_n \le b_1,$$
$$a_{21} x_1+a_{22} x_2+...+a_{2n} x_n \le b_2,$$
$$..................................$$
$$a_{m1} x_1+a_{m2} x_2+...+a_{mn} x_n \le b_m,$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\quad b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Mustaqil yechishga doir masalalar

Quyidagi iqtisodiy masalalarning matematik modellari tuzilsin:

1. Tumanga qarashli n ta jamoa xo'jaligining ekin maydonlari mos holda $S_1, S_2,...,S_n$ ga teng. Tuman rejasiga ko'ra, m xil ekindan $p_1, p_2,..., p_m$ miqdorda hosil olinishi kerak. j - jamoa xo'jaligining i - ekindan maydonning bir gektaridan olishni kutadigan ekin miqdori a_{ij} birlik.

Jamoa xo'jaliklari bo'yicha max hosil olinishi uchun ekin maydonlari qanday taqsimlanishi kerak.

2. Sexda 3 ta bir-birini almashtira oladigan qurilma-stanoklar bor, ularning quvvatlari oyiga mos ravishda 400, 850, 300 norma-vaqtgacha. Sex 5 xil mahsulot tayyorlash majburiyatini olgan: P_1-600 birlik; P_2-350, P_3-450, P_4-500, P_5-600 birlik. Birinchi stanok har bir xil mahsulotning bir birligini tayyorlashi uchun mos holda 0,3; 0,6; 0,4; 0,8 va 0,5 soat sarflaydi, ikkinchi stanok – 0,6; 0,8; 0,7 va 0,9 soat, uchinchi stanok – 1,4; 0,5; 0,9; 0,6 va 1 soat sarflaydi. Bir birlik mahsulot tayyorlash uchun birinchi stanokning xarajatlari mos holda - 20, 10, 40, 50 va 80 pul birligi; ikkinchisiniki – 50, 40, 30, va 60; uchinsiniki - 65, 90, 30, 20 va 50. Mahsulotlar bir birligining bahosi mos holda – 80, 100, 60, 50 va 85 pul birligiga teng bo'lsa majburiyat bajarilishini kafolatlaydigan mahsulot ishlab chiqarish rejasi shunday tuzilsinki:

- maksimal daromad olinsin;
- tayyorlangan mahsulotlarning umumiy bahosi minimal bo'lsin;
- qurilma – stanoklarning sarflagan vaqti minimal bo'lsin;
- P_1 xil mahsulotdan uchta, P_2 dan bitta, P_3 dan ikkitadan qilib tuziladigan komplektlar soni maksimal bo'ladigan rejaning iqtisodiy matematik modelini tuzing.

3. Firma stol va stullar ishlab chiqarishga ixtisoslashgan. Ularni tayyorlashga ishlatiladigan 72m^3 birinchi xil va 56m^3 ikkinchi xil yog'och mahsulotlari mavjud. Stol va stullarning bir-birligini tayyorlashga sarflangan yog'och mahsulotlarining normasi jadvalda berilgan:

	1-xil yog'och	2-xil yog'och
stol	0,18	0,08
stul	0,09	0,28

Firma bitta stoldan 4,4 pul birligi sof daromad oladi, stuldan esa – 2,8. Maksimal daromad olish uchun firma nechtadan stol va stullar tayyorlashi mumkin. Bunday masalaning iqtisodiy-matematik modelini tuzing.

4. Uzunligi 750 sm dan bo'lgan simlarning uzunliklari 250 sm, 200 sm va 150 sm kesmalarga qirqish kerak. Uzunligi 250 sm bo'lgan kesmadan 200000 ta, 200 sm ligidan 250000 ta va 150 sm li kesmadan 50000 ta tayyorlash buyurtmasi olindi. Eng kam chiqindi chiqishini ta'minlab buyurtma bajariladigan eng kam sondagi simlar qirqiladigan optimal qirqish rejasining iqtisodiy matematik modelini tuzing.

5. Savdo firmasi P_1, P_2, P_3 xil mahsulotlar sotadi. Buning uchun 460m^2 maydonga ega bo'lgan foydali joydan va 500 odam/soat ishchi vaqtidan foydalaniladi. Firmaning tovar aylantirishi (tovar aylanmasi) 240000 pul birligiga teng. Maksimal daromad keltiradigan tovar aylantirish rejasini tuzish zarur. Ma'lumotlar jadvalda berilgan. Bu masalaning iqtisodiy-matematik modelini tuzing.

Ko'rsatkichlar	1000 pul birl. aylantirishga sarflangan resurs		
	P_1	P_2	P_3
Foydali maydon, m^2	1,5	2	3
Ishchi vaqti, odam/soat	3	2	1,5
Daromad	50	65	70

6. Uchta baza o'zlarining bir xil mahsulotlarini 4 ta iste'molchiga taqsimlab berishlari kerak. Bazadagi mahsulot miqdori, iste'molchining talab birligi hamda bir birlik mahsulotni bazalardan iste'molchilarga yetkazib berish uchun sarflangan xarajatlar jadvalda berilgan. Mahsulot tashishni shunday rejalashtiringki, ularni tashishga sarflangan xarajatlar minimal bo'lsin. Bu masalaning iqtisodiy-matematik modelini tuzing.

Bazalar	Iste'molchilar				Mahsulot miqdori
	V_1	V_2	V_3	V_4	
A_1	4	9	3	5	25
A_2	2	7	6	4	50
A_3	1	8	7	2	75
Iste'molchining talab biriligi	40	35	45	30	

2-bob. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

2.1. Asosiy tushunchalar. Chiziqli programmalashtirish masalasining qo'yilishi

Chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli chegaraviy shartlar qo'yilgan holda aniqlash bilan shug'ullanadi. Shuning uchun, chiziqli programmalashtirish masalalari funksiyaning shartli ekstremum masalalari qatoriga kiradi. Lekin chiziqli programmalashtirish masalalari ko'p o'zgaruvchili bo'lgani uchun matematik analizdagi funksiya ekstremumini aniqlashning klassik usulini to'g'ridan-to'g'ri qo'llash mumkin emas. Shuning uchun chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishning maxsus usullari ishlab chiqilgan. Ular yordamida, ko'pgina masalalarni, ayniqsa, iqtisodiy masalalarni yechish maqsadga muvofiq.

Ta'rif. Berilgan

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n * b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n * b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n * b_m,\\
&x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},\quad b_i\geq 0,\ i=\overline{1,m},
\end{aligned}
$$

bu yerda $*$ $-$ $\leq,\geq,=$ belgilardan biri.

Chiziqli chegaraviy shartlar (chiziqli sistema)ni qanoatlantiruvchi va

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

funksiyaga ekstremum (max, min) qiymat beruvchi nomanfiy x_j o'zgaruvchilarning qiymatlarini topish masalasiga chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.

Bu yerda a_{ij}, b_i, c_j $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ – berilgan o'zgarmas sonlar.

Ba'zan, chiziqli programmalashtirish masalasining o'zgaruvchilariga ba'zi yoki barcha j lar uchun $x_j\ \leq 0$ yoki $b_i\leq x_i\leq d_i$ shartlar ham qo'yilishi mumkin. O'zgaruvchilarga nisbatan bunday chegaralanishlarga *to'g'ri* chegaralanishlar deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishga qo'llaniladigan usullarning ko'pchiligi chegaraviy shartlarning o'ng va chap qismlarini bog'lovchi belgilarning qo'yilishiga ham ma'lum shartlar qo'yadi, masalan, eng keng qo'llaniladigan simpleks usul (bu usulga keyinroq to'xtalamiz) yordamida quyidagi ko'rinishda beriladigan chiziqli programmalashtirish masalalari yechiladi:

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max\ (\min) \tag{2.1.1}$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,
\end{aligned}
\tag{2.1.2}
$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\quad b_i\geq 0,\ i=\overline{1,m}, \tag{2.1.3}$$

bu yerda, «→» belgi berilgan shartlarda f maqsad funksiyaning qiymatini maksimallashtirish (minimallashtirish) ma'nosiga egadir. (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) – ko'rinishida beriladigan chiziqli programmalashtirish masalasini kononik formadagi chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasi shartlari chiziqli tenglamalar va tengsizliklar sistemasidan iborat quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \qquad (2.1.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=\overline{1,m_1}, \qquad (2.1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{m_1+1,m_2}, \qquad (2.1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i=\overline{m_2+1,m}; \qquad (2.1.7)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}; \qquad (2.1.8)$$

Bunday masalani kononik formaga, ya'ni chegaraviy shartlar faqat chiziqli tenglamalardan iborat bo'lgan ko'rinishga o'tkazish uchun masalani kengaytirilgan teng kuchli masalaga aylantiriladi.

Buning uchun (2.1.6) tengsizlikning chap qismiga $x_{n+i} \ge 0, i=\overline{m_1+1,m_2}$ qo'shiladi, (2.1.7) tengsizligida esa $x_{n+i} \ge 0,\ i=\overline{m_2+1,m}$ ayriladi va har bir tengsizlik belgisi tenglik belgisi bilan almashtiriladi. x_{n+i} o'zgaruvchi qo'shimcha o'zgaruvchi deyiladi.

Maqsad funksiyaning max qiymatini topish masalasidan uning min qiymatini topish masalasiga ham o'tish mumkin:

$$\max_X \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min_X \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$$

Qulaylik uchun bundan keyin biz chiziqli programmalashtirish masalasining maqsad funksiyasini min qiymatini topish usullarini ko'ramiz.

Chiziqli programmalashtirish masalasini turli formalarda yozish mumkin:

a) Vektor forma.

$$P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n=P_0 \qquad (2.1.9)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi va

$$Z=(CX) \qquad (2.1.10)$$

chiziqli funksiyaga min (max) qiymat beruvchi $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ge 0$ vektorni aniqlash kerak.

Bu yerda (CX) - skalyar ko'paytma, $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ - vektor,

$$P_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{m2}\end{bmatrix},\ \dots,\ P_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{bmatrix},\ P_0=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{bmatrix}$$ – bir ustunli vektorlar.

b) Matritsali forma.

Chiziqli funksiya

$$f=CX\to \min\ (\max) \qquad (2.1.11)$$

Chegaraviy shartlar:

$$AX=B\ ,\ X\geq 0, \qquad (2.1.12)$$

Bu yerda $C=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ - bir qatorli matritsa; $A=\begin{bmatrix}a_{11}\,a_{12}\,\dots\,a_{1n}\\a_{21}\,a_{22}\,\dots\,a_{2n}\\\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}\,a_{m2}\,\dots\,a_{mn}\end{bmatrix}$ matritsa

berilgan chiziqli sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan, $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}$ – ustun matritsa.

c) Yig'indi belgisi bilan beriladigan forma.

$f=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$ – chiziqli funksiyaning min(max) qiymati

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j\geq 0,\qquad j=\overline{1,n}$$

shartlarda aniqlansin.

2.2. Chiziqli programmalashtirish masalasining yechimlari haqida

Chiziqli programmalashtirish masalasi yechimlarining ta'riflari ustida to'xtalamiz. Vektor formada berilgan quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini ko'raylik:

$$f(X)=CX$$

maqsad funksiyaning min qiymati

$$P_1x_1+P_2x_2+\dots+P_nx_n=P_0,$$

$$X\geq 0$$

chegaraviy shartlarda topilsin.

1-ta'rif. (2.1.9)-chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi n o'lchovli $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ vektor berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining mumkin bo'lgan yechimi deyiladi.

2-ta'rif. (2.1.11)-maqsad funksiyaga min(max) qiymat beruvchi $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – mumkin bo'lgan yechimni masalaning optimal yechimi deyiladi.

f maqsad funksiyaning $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ mumkin bo'lgan yechimdagi qiymati $f(X^*)$ bo'lsin.

Agar har qanday X uchun $f(X) \geq f(X^*)$ $\left(f(X) \leq f(X^*)\right)$ tengsizlik bajarilsa, $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ - mumkin bo'lgan yechimga masalaning maqsad funksiyasiga min (max) optimal qiymat beruvchi optimal yechim deyiladi.

3-ta'rif. (2.1.9) tenglamada musbat x_i koeffitsiyentlar bilan qatnashuvchi P_i ($i = \overline{1,m}$) vektorlar o'zaro chiziqli bog'liqsiz bo'lsa, mumkin bo'lgan $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ yechimni masalaning tayanch yechimi deyiladi.

Har bir P_i vektor m o'lchovli bo'lgani uchun musbat koordinatalar soni m dan ortmaydi.

4-ta'rif. Musbat koordinatalari soni m ga teng bo'lgan $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tayanch yechim - xosmas tayanch yechim, aks holda esa xos tayanch yechim deyiladi.

5-ta'rif. Chiziqli programmalashtirish masalasining (2.1.2) chiziqli sistemasi nomanfiy ($X \geq 0$) yechimga ega bo'lmasa (sistema birgalashmagan bo'lsa), masalaning o'zi ham yechimga ega bo'lmaydi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini (ChPM) kononik ko'rinishga keltirishga doir misollar ko'raylik.

1-misol. Quyidagi ko'rinishda berilgan ChPMni kononik ko'rinishga keltiring:

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max;$$
$$2x_1 \quad\quad - x_3 \leq -1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Chiziqli sistemaning birinchi tengsizligiga x_4 va ikkinchi tengsizligiga x_5 qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritamiz. Natijada quyidagi kononik ko'rinishdagi ChPM hosil qilinadi:

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max;$$
$$2x_1 \quad\quad + x_3 - x_4 = 1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad\quad = 6,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

2-misol. Quyidagi masalani kononik ko'rinishdagi ChPMga keltiring:

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$$
$$x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 = 8$$
$$3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 6$$
$$-2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4$$
$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Bu yerda barcha chegaraviy shartlar tenglamalardan iborat, lekin x_2 va x_4 o'zgaruvchilarga nomanfiylik sharti qo'yilmagani uchun, masalani kanonik ko'rinishdagi ChPM deyish mumkin emas. Masalani kononik ko'rinishga keltirish uchun x_2 va x_4 yangi o'zgaruvchilarning ayirmalari shaklida ifodalaymiz:

$$x_2 = x_2^1 - x_2^2, x_4 = x_4^1 - x_4^2,$$
$$x_2^1 \geq 0, x_2^2 \geq 0, x_4^1 \geq 0, x_4^2 \geq 0.$$

x_2 va x_4 o'zgaruvchilarning bu ifodalarini masala shartiga qo'ysak, kononik ko'rinishdagi quyidagi ChPMga kelamiz:

$$\begin{aligned}
&2x_1 - 3x_2^1 + 3x_2^2 + 5x_3 - x_4^1 + x_4^2 \to \max \\
&x_1 - 3x_2^1 + 3x_2^2 + 9x_3 + x_4^1 - x_4^2 = 8 \\
&3x_1 + 7x_2^1 - 7x_2^2 + 2x_3 - 4x_4^1 + 4x_4^2 = 6 \\
&-2x_1 + 6x_2^1 - 6x_2^2 + 5x_3 - 2x_4^1 + 2x_4^2 = 4 \\
&x_1 \geq 0, x_2^1 \geq 0, x_2^2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4^1 \geq 0, x_4^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Mustaqil yechishga doir masalalar

Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalarini matritsali va vektor formalarda yozing:

1. $$\begin{aligned}
&y = -1 + x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max, \\
&0 = 2 + x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4, \\
&0 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\
&0 = 2 + 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
&y = 16x_1 + 10x_2 \to \min, \\
&5x_1 + 3x_2 \leq 90, \\
&3x_1 + 4x_2 \leq 70, \\
&x_1 + x_2 = 20, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,2.
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
&y = 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 \to \max, \\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{3}{2}, \\
&x_1 + x_2 \leq 2, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}
&y = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max; \\
&x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\
&2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_6 = 1, \\
&4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 8, \\
&x_j \geq 0, j = \overline{1,7}.
\end{aligned}$$

5. Yuqoridagi 1- 3 masalalarga teng kuchli kononik ko'rinishdagi chiziqli programmalashtirish masalalarni tuzing.

6. $$\begin{aligned}
&y = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max; \\
&2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\
&x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_6 = 1, \\
&4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 8. \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\
&x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

2.3. Qavariq to'plam. Qavariq kombinatsiya

Chiziqli programmalashtirish masalasining xossalari qavariq to'plam xossalari bilan uzviy bog'liqdir.

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, ..., X_n$ vektor (nuqta)lar n o'lchovli E_n Evklid fazosining ixtiyoriy nuqtalari bo'lsin.

1-ta'rif. $X_1, X_2, ..., X_n$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi deb,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0, \quad (\ i = \overline{1,m})$$

shartlarni qanoatlantirib, ixtiyoriy α_i sonlarga nisbatan tuzilgan $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$ yig'indiga aytiladi.

Tekislikda $A_1(x_1^1, x_2^1)$ va $A_2(x_1^2, x_2^2)$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasini aniqlaylik. Buning uchun shu nuqtalarni tutashtiruvchi yo'naltirilgan $A_1 A_2$ kesmani olamiz. A_1 va A_2 nuqtalarning koordinatalari orqali $A_1 A_2$ kesmada yotgan ixtiyoriy $A(x_1, x_2)$ nuqtaning x_1, x_2 koordinatalarini topamiz.

$\overline{AA_1} = (x_1^1 - x_1, x_2^1 - x_2)$ va $\overline{AA_2} = (x_1^2 - x_1, x_2^2 - x_2)$ vektorlar o'zaro parallel va bir xil yo'nalgan. Shuning uchun $\overline{AA_1} = \lambda(\overline{AA_2}), 0 \leq \lambda \leq 1$.

Bundan esa $x_1^1 - x_1 = \lambda(x_2^1 - x_1)$, $x_1^2 - x_2 = \lambda(x_2^2 - x_2)$

yoki

$$x_1 = (1-\lambda)x_1^1 + \lambda x_1^2, \tag{2.3.1}$$

$$x_2 = (1-\lambda)x_2^1 + \lambda x_2^2. \tag{2.3.2}$$

Bu tengliklarda

$$\lambda_1 = 1 - \lambda, \ \lambda_2 = \lambda \tag{2.3.3}$$

belgilanishlar kiritsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \lambda_2 x_1^2, \\ x_2 &= \lambda_1 x_2^1 + \lambda_2 x_2^2, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{2.3.5}$$

(2.3.4) tengliklarda A nuqtaning koordinatalari A_1 va A_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

Agar $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ va $\lambda_2 = 0$ bo'lsa A nuqta $A_1 A_2$ kesmaning A_1 uchi bilan; $\lambda_1 = 0$ va $\lambda_2 = 1$ bo'lsa, A_2 nuqta bilan ustma-ust tushadi, A_1 va A_2 nuqtalar $A_1 A_2$ kesmaning chetki nuqtalari yoki uchlari deyiladi.

2- ta'rif. G to'plam qavariq to'plam deyiladi, agar u o'zining ixtiyoriy ikkita nuqtasi bilan birga, ularning qavariq kombinatsiyasini ham o'z ichiga olsa. Chetki nuqta qavariq to'plamning boshqa hech qanday 2 ta nuqtasining qavariq kombinatsiyasi bo'lmaydi.

3-ta'rif. Chiziqli programmalashtirish masalasining bo'sh to'plam bo'lmagan mumkin bo'lgan yechimlar to'plami masalaning yechim ko'pburchagi yoki yechim sohasi deyiladi.

Tekislikda qavariq ko'pburchak chekli uchlarga ega bo'lgan chegaralangan, yopiq to'plamdir.

1-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining mumkin bo'lgan yechimlar to'plami (agar bo'sh to'plam bo'lmasa) qavariq to'plam bo'ladi.

Isbot. X_1 va X_2 nuqtalar

$$AX = B,$$

$$X \geq O,$$

$$y = CX \rightarrow max(min)$$

chiziqli programmalashtirish masalasining mumkin bo'lgan yechimlari bo'lsin.

$X=\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2$ nuqta ham berilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimi bo'lishini isbot qilish kerak, ya'ni X nuqta $AX=B$, $X\geq 0$ shartlarni qanoatlantirishi kerak. X_1 va X_2 – mumkin bo'lgan yechimlar bo'lgani uchun

$$AX_1=B;\ X_1\geq 0 \text{ va}$$

$$AX_2=B;\ X_2\geq 0 \text{ shartlar bajariladi.}$$

X nuqtani ham $AX=B$ tenglikka qo'yamiz:

$$AX=A(\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2)=\lambda_1 AX_1+\lambda_2 AX_2=\lambda_1 B+\lambda_2 B=(\lambda_1+\lambda_2)B=B$$

$X_1\geq 0$, $X_2\geq 0$ va $\lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0$ bo'lgani uchun $X\geq 0$ bo'ladi.

Demak, X nuqta ham chiziqli programmalashtirish masalasining mumkin bo'lgan yechimi bo'ladi.

2-teorema. Chegaralangan, yopiq, qavariq ko'pburchak o'zining uchlarini qavariq kombinatsiyasidan iborat.

Teoremaning isbotini keltirmaymiz.

4-ta'rif. Agar chiziqli programmalashtirish masalasining mumkin bo'lgan yechimlari, yechim ko'pburchagining chetki nuqtalariga mos kelsa, ular bazis yechimlar deyiladi.

Bu ta'rifdan, musbat komponentli bazis yechimlar tayanch yechimlar bo'lishi kelib chiqadi.

2.4. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini. Masalani grafik usulda yechish

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish, uni geometrik tasvirlashga asoslangan. Ikki o'lchovli fazo (tekislik)da berilgan chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish uchun grafik usulni qo'llash maqsadga muvofiq. $n\geq 3$ o'lchovli fazoda berilgan masalalarni grafik usul bilan yechish noqulay, chunki bu holda, yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakni yasash qiyinlashadi.

Ikki o'lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini ko'ramiz:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leq b_m \qquad (2.4.1)\\
&x_1\geq 0, x_2\geq 0, \qquad (2.4.2)\\
&y=c_1x_1+c_2x_2\to \max(\min) \qquad (2.4.3)
\end{aligned}$$

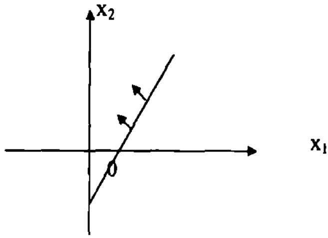
Faraz qilaylik, (2.4.1) sistema (2.4.2) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega hamda ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin.

Tekislikda to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz va sonlarning har bir (x_1,x_2) juftligiga tekislikda koordinatalari x_1 va x_2 bo'lgan nuqtani mos qo'yamiz. Avval berilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimlari qanday nuqtalar to'plamini tashkil qilishini ko'raylik.

Ma'lumki, ikki o'zgaruvchili $a_1x_1 + a_2x_2 \le a$ tengsizlik tekislikda $a_1x_1 + a_2x_2 = a$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi. Bu yarim tekislik to'g'ri chiziqqa nisbatan qaysi nuqtalar to'plami ekanini aniqlashtirish uchun $a_1x_1 + a_2x_2 \le a$ tengsizlikka tekislikdagi ($a_1x_1 + a_2x_2 = a$ to'g'ri chiziqda yotmagan) ixtiyoriy nuqtani qo'yib ko'rish mumkin. Olingan nuqta tengsizlikni qanoatlantirsa, shu nuqta yotgan yarim tekislik, aks holda ikkinchi yarimtekislik, qidirilayotgan yarimtekislik bo'ladi. Buni quyidagi misolda ko'raylik.

Misol. $4x_1 - 6x_2 \le 3$ tengsizligi bilan aniqlanadigan yarimtekislikni chizmada ko'rsating.

$4x_1 - 6x_2 = 3$ to'g'ri chiziq tekislikda yasaladi. To'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tmaganligi sababli O(0,0) nuqtani tengsizlikka qo'yib, tekshirib ko'rish mumkin. Bunda, 0 < 3 to'g'ri munosabat hosil bo'ladi. Demak, $4x_1 - 6x_2 \le 3$ tengsizlik O(0,0) nuqtani o'z ichiga oluvchi yarim tekislikni aniqlaydi.



Shuningdek, (2.4.1) va (2.4.2) tengsizliklarning har biri mos holda $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1,m}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. (2.4.1), (2.4.2) tengsizliklarning har birini qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami ular aniqlaydigan yarimtekisliklarning kesishishidan hosil bo'ladigan umumiy nuqtalar to'plami (qavariq to'plam)dan iborat bo'ladi. Bunday nuqtalar to'plamiga berilgan ikki o'zgaruvchili ChPMning mumkin bo'lgan yechim sohasi deyiladi.

(2.4.3) chiziqli funksiya ham ma'lum bir o'zgarmas $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ qiymatda to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Mumkin bo'lgan yechim soha - qavariq to'plamni hosil qilish uchun

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m$$

to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchak yasaladi.

Faraz qilaylik, bu ko'pburchak ABCDE bo'lsin (1-shakl). Chiziqli funksiyani ixriyoriy o'zgarmas c_0 songa teng deb olaylik.

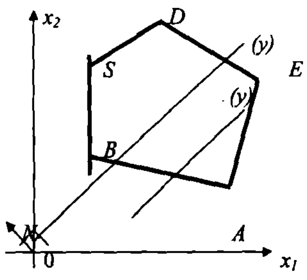
Natijada $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0 = const$ to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqni (2.4.3) maqsad funksiyaning gradient vektori bo‘lgan $\overline{ON} = (c_1, c_2)$ vektor yo‘nalishda yoki unga teskari yo‘nalishda o‘ziga parallel ravishda shunday surib borish kerakki, bu vektor yechim sohani bosib o‘tsin.

Qavariq ko‘pburchakning chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat beruvchi chetki nuqtasini aniqlaymiz.

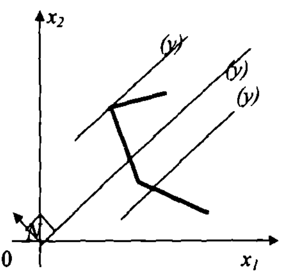
Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko‘pburchak chegaralanmagan bo‘lsa, ikki hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0 = const$ to‘g‘ri chiziq $\overline{ON}$ vektor bo‘yicha yoki unga qarama-qarshi yo‘nalishda siljib borib, har vaqt qavariq ko‘pburchakni kesib o‘tadi. Ammo, na minimal, na maksimal qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo‘ladi (4-shakl).

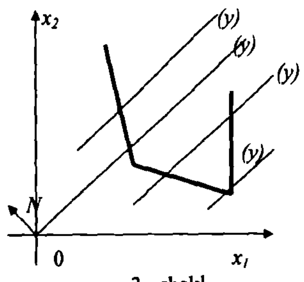
2-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0 = const$ to‘g‘ri chiziq $\overline{ON}$ vektor bo‘yicha siljib borib qavariq ko‘pburchakning birorta chetki nuqtasida o‘zining minimum yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funksiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (2-shakl) yoki quyidan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan bo‘lishi mumkin (3-shakl).



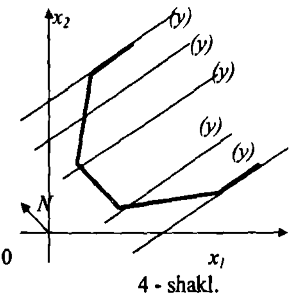
1 - shakl.



2 - shakl.



3 - shakl.



4 - shakl.

1-misol. Quyidagi chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yeching:

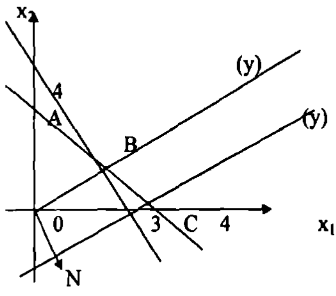
$$4x_1+3x_2\le 12,$$
$$3x_1+4x_2\le 12,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,$$
$$y_{max}=2x_1-5x_2.$$

Yechish. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakni yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$4x_1+3x_2=12 \quad (L_1),$$
$$3x_1+4x_2=12 \quad (L_2)$$

chiziqlarni yasaymiz.

Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechimlar sohasi OABC ko'pburchakni tashkil qiladi. Endi koordinatalar boshidan $\overline{ON}=(2,\ -5)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq $2x_1-5x_2=const$ tenglama orqali ifodalanadi. Uni $\overline{ON}$ vektor yo'nalishida o'ziga parallel siljitib boramiz. Natijada chiziqli funksiyaga maksimal qiymat beruvchi $C=(3,0)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari $x_1=3$, $x_2=0$. Masalaning optimal yechimi $X=(3,0)$ va $y_{max}=6$ bo'ladi.



Mustaqil yechishga doir masalalalar

Quyidagi masalaning matematik modelini tuzing va grafik usulda yeching.

Tadbirkor 2 xil mahsulot ishlab chiqarish uchun ikki xil resursdan foydalanadi. Resurslarning zaxirasi birinchi xilidan - 156 birlik, ikkinchi xilidan -63 birlikni tashkil qiladi. Birinchi xil mahsulotning bir birligidan - 400so'm, ikkinchisidan - 500so'm daromad olinadi. Resurslarning taqsimlanish me'yori jadvalda berilgan:

Resurslar	**Bir birlik mahsulotga resursning sarflanishi**	
	1	2
I	2	1,6
II	0,5	0,8
Daromad (so'm)	400	500

Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalari grafik usulda yechilsin:

1. $2x_1+x_2\to\max$

$x_1-x_2\le1,$

$\frac{1}{2}x_2-x_3\le1,$

$2x_1+x_3\le2\ ,$

$x_i\ge0,\ i=1,2,3.$

2. $2x_1-x_2\to\max$

$1\le x_1+x_2\le3,$

$2\le x_1-2x_2\le4,$

$1\le2x_1-x_2\le3,$

$x_1\ge0,\ \ x_2\ge0\ .$

3. $-x_1-x_2+x_3\to\min$

$x_1+2x_2-x_3+x_4=3,$

$x_1-4x_2+x_3=-2,$

$x_i\ge0,\ \ i=\overline{1,4}.$

4. $1{,}5x_1+3x_2\to\max$

$-x_1+2x_2\le2\ ,$

$-x_1+x_2\ge-2\ ,$

$x_1\ge0\ ,\ 0\le x_2\le3.$

2.5. Chiziqli programmalashtirish masalasini analitik yechish usuli (simpleks usul)

Dastlab berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining chegaraviy shartlarida m ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan birlik vektorlar mavjud, deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmagan holda bu vektorlar birinchi m ta $P_1,P_2,...,P_m$ vektorlardan iborat deylik. U holda masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned}
&x_1+a_{1,m+1}x_{m+1}+...+a_{1n}x_n=b_1,\\
&x_2+a_{2,m+1}x_{m+1}+...+a_{2n}x_n=b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_m+a_{m,m+1}x_{m+1}+...+a_{mn}x_n=b_m,
\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

$$x_j\ge0\ ,\ j=\overline{1,n},\tag{2.5.2}$$

$$y_{\min}=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n.\tag{2.5.3}$$

(2.5.1) sistemani vektor ko'rinishda yozamiz:

$$P_1x_1+P_2x_2+...+P_mx_m+P_{m+1}x_{m+1}+...+P_nx_n=P_0\tag{2.5.4}$$

$P_1,P_2,...,P_m$ vektorlar n o'lchovli vektor fazodagi o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan birlik vektorlardan iborat bo'lib, bu fazoning bazisini tashkil qiladi. (2.5.1) da $x_1,x_2,...,x_m$ o'zgaruvchilarni bazis o'zgaruvchilar, $x_{m+1},x_{m+2},...,x_n$ o'zgaruvchilarni esa bazis bo'lmagan (ozod) o'zgaruvchilar deb qabul qilib, bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarni nolga tenglaymiz. Natijada:

$$X_0=(x_1=b_1,x_2=b_2,...,x_m=b_m,x_{m+1}=0,...,x_n=0)\tag{2.5.5}$$

boshlang'ich yechimni hosil qilamiz. (5) yechimga quyidagi

$$P_1x_1+P_2x_2+...+P_nx_n=P_0\tag{2.5.6}$$

yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lganligi sababli, topilgan boshlang'ich (2.5.5) yechim tayanch yechim bo'ladi.

Endi boshlang'ich yechimdan foydalanib, yangi tayanch yechimni topish mumkinligini ko'rsatamiz. $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar n o'lchovli vektor fazoning bazisini tashkil qilgani uchun $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlarning ixtiyoriysini P_j bazis vektorlar orqali faqat bir xil yoyilmasini topish mumkin, ya'ni: $j=\overline{1,n}$ uchun $P_j = P_1 x_{1j} + P_2 x_{2j} + ... + P_m x_{mj}$ (2.5.7)

Faraz qilaylik, bazisga kirmagan birorta vektor, masalan P_{m+1} ning yoyilmasidagi koeffitsiyentlardan kamida bittasi (masalan, $x_{1,m+1}$) noldan farqli bo'lsin:

$$P_{m+1} = P_1 x_{1,m+1} + P_2 x_{2,m+1} + ... + P_m x_{m,m+1} \qquad (2.5.8)$$

Ixtiyoriy θ>0 (θ - hozircha noma'lum son) ni olib, (2.5.8) tenglikning ikki tomonini unga ko'paytirib, hosil bo'lgan natijani (2.5.6) dan ayiramiz. Natijada quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$P_1(x_1 - \theta x_{1,m+1}) + P_2(x_2 - \theta x_{2,m+1}) + ... + P_m(x_m - \theta x_{m,m+1}) + \theta P_{m+1} = P_0 \qquad (2.5.9)$$

Agar $x_1 - \theta x_{1,m+1}, x_2 - \theta x_{2,m+1}, ..., x_m - \theta x_{m,m+1}, \theta$ sonlarning har biri nomanfiy bo'lsa, $X' = (x_1 - \theta x_{1,m+1}, x_2 - \theta x_{2,m+1}, ..., x_m - \theta x_{m,m+1}, \theta, 0, 0, ..., 0)$ vektor yechim bo'ladi. X dan farq qiluvchi X' yechim qidirilayotgani uchun θ ning faqat musbat qiymatlari qaraladi. Shuning uchun $x_{i,m+1}>0$ bo'lgan komponentalarni ko'ramiz. Demak, shunday $\theta>0$ topishimiz kerakki, hamma i lar uchun $x_{i,m+1}>0$, bo'lganda $x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0$ tengsizlik bajarilsin.

Bunlardan, $0 < \theta \leq \frac{x_i}{x_{i,i+1}}$ tengsizlik hosil bo' ladi.

X' yechim $x_{i,m+1}>0$ tengsizlik qanoatlantiriladigan $\theta\left(0 < \theta \leq \min \frac{x_i}{x_{i,i+1}}\right)$ uchun yechimdir. Lekin tayanch yechim o'z ichiga m+1 ta komponentlarni olmaydi, shuning uchun X' yechimdagi kamida bitta komponentani nolga aylantirish kerak. Faraz qilaylik,

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_k}{x_{k,m+1}} \qquad \text{bajarilsin.}$$

Bu holda X' yechimning k komponentasi $x_k - \theta x_{k,m+1}$=0 bo'ladi. θ ning qiymatini (1.5.9) ga qo'yib quyidagi yoyilmani hosil qilamiz:

$$P_1(x_1 - \theta_0 x_{1,m+1}) + P_2(x_2 - \theta_0 x_{2,m+1}) + ... + P_{k-1}(x_{k-1} - \theta_0 x_{k-1,m+1}) + P_{k+1}(x_{k+1} - \theta_0 x_{k+1,m+1}) +$$
$$+ ... + P_m(x_m - \theta_0 x_{m,m+1}) = P_0.$$

Bu yoyilmaga

$$X' = (x_1 - \theta_0 x_{1,m+1}, x_2 - \theta_0 x_{2,m+1}, ..., x_{k-1} - \theta_0 x_{k-1,m+1}, x_{k+1} - \theta_0 x_{k+1,m+1}, ..., x_m - \theta_0 x_{m,m+1}, \theta_0, 0, 0, ..., 0)$$

yechim mos keladi. Demak, yangi yechimning komponentalari quyidagicha aniqlanar ekan:

$$
\begin{aligned}
&x_i' = x_i - \theta_0 x_{i,m+1},\\
&x_k' = 0, x_{m+2}' = \ldots = x_n' = 0\\
&x_{m+1}' = \theta_0
\end{aligned}
\qquad (2.5.10)
$$

Bundan keyingi tayanch yechimni hosil qilish uchun bazisga kirmagan ixtiyoriy vektorning $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bazis vektorlar orqali yoyilmasini aniqlash hamda shunday θ>0 sonni topish kerakki, uning yordamida yangi vektor bazisga kirsin va eski bazis vektorlardan birortasi bazisdan chiqsin. Shunday qilib, yangi tayanch yechimlarni hosil qilish jarayoni bazisga kiritiladigan va bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashdan iboratdir.

Bazisga kiritiladigan vektorni tanlash kriteriysi simpleks usulning asosiy elementlaridan biri hisoblanadi. Agar bazisga kiritilayotgan P_{m+1} vektorning yoyilmasida barcha $x_{i,m+1}\le 0$ bo'lsa, (2.5.9) yoyilmadagi birorta vektorni bazisdan chikaruvchi θ>0 ni topib bo'lmaydi. Bu holda X' yechim m+1 musbat komponentalarni o'z ichiga oladi. $P_1, P_2, \ldots, P_m$, P_{m+1} vektorlar sistemasi esa o'zaro chiziqli bog'liq bo'lib, qavariq ko'pburchakning chetki nuqtasini emas, balki ichki nuqtasini ifodalaydi. Bu nuqtada esa chiziqli funksiya o'zining minimum qiymatiga erisholmaydi. Bu holda chiziqli funksiya quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

Optimallik kriteriysi. Optimal yechimni topish

Quyidagi ko'rinishda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining

$$
\begin{aligned}
&x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\\
&x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\\
&y_{\min} = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n
\end{aligned}
\qquad (2.5.11)
$$

yechimlari mavjud va ular xosmas deb faraz qilamiz, ya'ni barcha b_i>0, $i=\overline{1,m}$. Masalaning

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (2.5.12)$$

tayanch yechimi va unga mos keluvchi o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan $P_1, P_2, \ldots, P_m$ vektorlar sistemasi ma'lum bo'lsin. U holda

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0 \qquad (2.5.13)$$

va

$$y_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \qquad (2.5.14)$$

Bu yerda: y_0 - chiziqli funksiyaning X tayanch yechimdagi qiymati, $x_i > 0$ va c_j $j=\overline{1,n}$ - chiziqli funksiyaning koeffisientlari.

$P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lganligi sababli ixtiyoriy bazis bo'lmagan P_j vektorning bu vektorlar orqali faqat bitta yoyilmasini topish mumkin:

$$x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + ... + x_{mj}P_m = P_j \ , \ j = \overline{1,n}. \qquad (2.5.15)$$

Bu vektorga chiziqli funksiyaning

$$c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + ... + c_mx_{mj} = y_j \ , \ j = \overline{1,n} \qquad (2.5.16)$$

qiymati mos keladi. P_j vektorga mos keluvchi chiziqli funksiyaning koeffitsiyentini c_j bilan belgilaymiz.

ChPM yechimlarining shunday to'plamini tuzish mumkinki, ularning har biri uchun $y < y_0$ (y – ChPM maqsad funksiyasining qiymati) tengsizlik o'rinlidir.

1-hol. y-sonlarining quyi chegarasi cheklangan bo'lsa, shunday yangi yechim topish mumkinki, u o'zidan oldingisiga qaraganda kichik qiymatga ega bo'ladi.

2-hol. y - sonlarining quyi chegarasi cheksiz bo'lsa, shunday yangi yechim topilishi mumkinki, uning koordinatalari m+1 ta musbat sonlardan tashkil topib, qiymati har qancha kichik bo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilganlarni isbotsiz qabul qilamiz.

Berilgan boshlang'ich yechimdan boshlab tayanch yechimlar ketma-ketligini hosil qilib, jarayonni optimal yechim topilguncha davom ettirish mumkin. Bu jarayon simpleks usuldan iborat. Endi simpleks usulning algoritmi bilan tanishaylik.

Faraz qilaylik: 1) m ta chiziqli bog'liqsiz vektorlar tanlanganki, ular biror tayanch yechimning bazislari bo'lsin; 2) masalaning chegaraviy shartlari m - nchi tartibli birlik matritsaga ega bo'lsin.

Birinchi hol uchun m ta chiziqli bog'liqsiz vektorlar - $P_1, P_2, ..., P_m$ va masalaning boshlang'ich tayanch yechimi - $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ bo'lsin. Bu vektorlardan tashkil topgan $(P_1, P_2, ..., P_m)$ matritsani B bilan belgilaymiz. U holda $BX = P_0$.

Bundan: $$X=B^{-1}P_0$$

va

$$X_j = B^{-1}P_j, \quad x_i \geq 0$$

kelib chiqadi. Bu yerda $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $(x_i \geq 0)$ va $X_j = (x_{1j}, x_{2j}', ..., x_{mj})$ – vektor ustunlar. Simpleks jarayonni boshlashdan avval masalaning vektorlarini quyidagidek guruhlaymiz:

$$(R_0 | P_1, P_2, ..., P_m | P_{m+1}, ..., P_n)$$

yoki

$$(R_0 | V | P_{m+1}, ..., P_n). \qquad (2.5.17)$$

Elementlari ayrim qismlardan iborat bo'lgan (2.5.17) matritsani V^{1} ga ko'paytiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(V^{1}\, R_0 | V^{1}\, V | \, V^{1}\, P_{m+1}, ..., \, V^{1}\, P_n)$$

yoki

$$(X \,|\, I_m \,| X_{m+1}, ..., X_n).$$

So'ngra har bir $j = \overline{1,n}$ uchun y_j-c_j ni hisoblaymiz. Agar barcha j lar uchun y_j-$c_j \leq 0$ bo'lsa, topilgan tayanch yechim optimal yechim bo'ladi. Agar y_j-c_j ayirma ba'zi j lar uchun musbat bo'lsa, topilgan tayanch yechim optimal yechim bo'lmaydi, bu yechimni optimal yechimga yaqin bo'lgan boshqa yechim bilan almashtirish kerak bo'ladi.

Berilgan masalada dastlabki $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar m o'lchovli vektor fazodagi bazisni tashkil qilsin, ya'ni

$$V=(P_1, P_2, ..., P_m)= I_m$$

bo'lsin, bu yerda I_m- m o'lchovli birlik matritsa. Bu holda $V^1= I_m$ bo'lganligi sababli $X=R_0$ va $X_j=R_j$ bo'ladi.

Simpleks jarayonni boshlash uchun chiziqli sistemasi $AX=V$ ko'rinishda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasi uchun $x_i = b_i$, $x_{ij} = a_{ij}$ deb qabul qilib, quyidagilar hisoblanadi:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i, \quad y_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \quad j = \overline{1,n}$$

y_0 va y_j-c_j larni jadvalning m+1 qatoridagi tegishli ustunlarga joylashtiramiz. Bazis vektorlar uchun har doim y_j - c_j=0 bo'ladi. Agar y_j-c_j≤0, $j = \overline{1,n}$ bo'lsa, $X = (x_1, x_2, ..., x_m) = (b_1, b_2, ..., b_m)$ optimal yechim bo'ladi. Bu yechimdagi chiziqli funksiyaning qiymati y_0 ga teng.

Endi kamida bitta j uchun y_j-c_j>0 bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu holda topilgan tayanch yechimni optimal yechimga yaqinroq yechim bilan almashtirish kerak, buning uchun

$$\max_{y_j - c_j > 0}(y_j - c_j) = y_k - c_k = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni bazisga kiritib, bazisdan

$$\min_{x_{ik}>0} \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}} = \theta$$

shartni qanoatlantiruvchi P_ℓ vektorni chiqarish kerak bo'ladi.

Yangi yechim uchun $P_1, ..., P_{l-1}, P_{l+1}, ..., P_m, P_k$ vektorlar bazis vektorlar bo'ladi.

Yangi tayanch yechimni hosil qilish va uning optimal yechim ekanligini tekshirish uchun P_0 va P_j vektorlarning bazis vektorlar orqali yoyilmasini hosil qilish kerak. Boshlang'ich bazis $(P_1, P_2, ..., P_m)=I_m$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} P_0 &= x_1 P_1 + ... + x_l P_l + ... + x_m P_m, \\ P_k &= x_{1k} P_1 + ... + x_{lk} P_l + ... + x_{mk} P_m, \qquad (2.5.18) \\ P_j &= x_{1j} P_1 + ... + x_{lj} P_l + ... + x_{mj} P_m. \end{aligned}$$

(2.5.18) dan:

$$P_l = \frac{1}{x_{lk}}(P_k - x_{1k} P_1 - ... - x_{mk} P_m). \qquad (2.5.19)$$

P_l ning ifodasini P_0 ga qo'ysak, P_0 ning quyidagi ifodasi hosil bo'ladi:

$$P_0 = (x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}})P_1 + ... + \frac{x_l}{x_{lk}} P_k + ... + (x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}) P_m$$

Shunday qilib, $P_0 = x_1' P_1 + ... + x_k' P_k + ... + x_m' P_m$ munosabat bilan aniqlanadigan yangi

$$X' = (x_1', \dots, x_k', \dots, x_m'), \ x_i' \geq 0$$

tayanch yechim ushbu

$$x_i' = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}, \ i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m; \quad x_k' = \frac{x_l}{x_{lk}}$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Xuddi shunday, R_j vektorning yangi bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasini hosil qilamiz:

$$P_j = x_{1j}' P_1 + \dots + x_{kj}' P_k + \dots + x_{mj}' P_m,$$

bu yerda

$$x_{ij}' = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \ i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m;$$

$$x_{kj}' = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}. \tag{2.5.20}$$

Bu formula esa Jordan-Gaussning to'la ajratish formulasidan iboratdir. Haqiqatan ham, $j=k$ da

$$x_{ik}' = x_{ik} - \frac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0, \ i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m,$$

$$x_{ik}' = \frac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1, \ i = l,$$

ya'ni bazisga kiritilayotgan vektorning x_{lk} ga mos keluvchi elementi 1 ga teng bo'lib, qolgan elementlari 0 ga teng bo'ladi.

Yangi yechim uchun

$$y_j' - c_j = x_{1j}' c_1 + x_{kj}' c_k + \dots + x_{mj}' c_m - c_j, \ j = \overline{1, n}$$

bo'lganligi sababli, (2.5.20) dan foydalanib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\Delta_j = y_j' - c_j = y_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (y_k - c_k) \tag{2.5.21}$$

Shuningdek,

$$y_0' = y_0 - \frac{x_l}{x_{lk}} (y_k - c_k) \quad \text{ni topamiz.} \tag{2.5.22}$$

Yuqoridagilardan xulosa qilib aytganda, simpleks jadval ustida tartib bilan quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Har bir j uchun $y_j - c_j = \Delta_j$ lar tekshiriladi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ bo'lsa, topilgan yechim optimal yechim bo'ladi.

2. Agar birorta j uchun $y_j - c_j > 0$ bo'lsa, bazisga kiritiladigan vektor tanlanadi. Bazisga

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi R_k vektor kiritiladi.

3. Bazisdan chiqarilishi kerak bo'lgan vektor aniqlanadi. Bazisdan

$\min\limits_{x_{ik} > 0} \left(\frac{x_i}{x_{ik}} \right) = \frac{x_l}{x_{ik}}$ ga mos keluvchi P_l vektor chiqariladi.

Agar P_k vektorga mos keluvchi barcha $x_{ik} \leq 0$ bo'lsa, chiziqli funksiya quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

4. Aniqlovchi element $x_{ik} > 0$ tanlangandan so'ng simpleks jadval (2.5.20) formula orqali almashtiriladi.

Shunday yo'l bilan har bir iteratsiyada yangi tayanch yechim topiladi. Simpleks usul yoki optimal yechimni beradi, yoki masaladagi chiziqli funksiyaning chekli minimum ga ega emasligini aniqlaydi.

2.6. Sun'iy bazis vektor usuli

Biz yuqorida, chiziqli programmalashtirish masalasining boshlang'ich tayanch yechimi mavjud va boshlang'ich yechimni tuzish mumkin bo'ladigan m o'lchovli birlik matritsa masala shartida qatnashadi, deb faraz qildik. Bu birlik matritsa yordamida optimal yechimga o'tishga yordam beradigan yechimni tuzish mumkin. Agar chiziqli programmalashtirish masalasining chegaraviy shartlari $AX \leq B$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, to'g'ridan-to'g'ri simpleks usul algoritmidan foydalanish mumkin.

Amalda uchraydigan ko'p chiziqli programmalashtirish masalalari yechimga ega bo'lgan holda birlik matritsani o'z ichiga olmaydi. Bunday masalalarni yechish uchun «sun'iy bazis vektor» usul qo'llaniladi.

Umumiy holda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini ko'ramiz:

$$
\begin{aligned}
& x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
& x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
& x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}, \\
& y_{\min} = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.
\end{aligned}
$$

Bu masalaning shartiga birlik matritsani kiritish uchun sistemadagi har bir tenglamaning chap qismiga sun'iy o'zgaruvchi deb ataluvchi $x_{n+i} \geq 0$ noma'lumni mos ravishda qo'shamiz, hamda

$$
y_{\min} = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m}
$$

funksiyani minimallashtirish bilan bog'liq bo'lgan quyidagi kengaytirilgan masalani hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
& x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
& x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} + = b_m, \\
& x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n+m}, \\
& y_{\min} = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + M(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m})
\end{aligned}
$$

Bu yerdagi M - kattalik oldindan berilmagan yetarlicha katta musbat son. $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar sun'iy bazis vektorlar deb ataladi. Agar boshlang'ich masala yechimga ega bo'lsa, bu yechim kengaytirilgan masalaning ham yechimi bo'ladi. Kengaytirilgan masalaga simpleks usulni qo'llab topilgan yechimda har bir x_{n+i} nolga teng bo'lsa, bu yechim berilgan masalaning ham yechimi bo'ladi.

Berilgan masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi teoremadan foydalanamiz.

Teorema. Agar kengaytirilgan masalaning $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ optimal yechimida $x_{n+i}=0$ $(i=\overline{1,m})$ bo'lsa, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yechim berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimini topish uchun yuqoridagi simpleks jadvaldan qo'shimcha (m+2) qatori bilan farq qiluvchi simpleks jadvaldan foydalaniladi. Jadvalning (m+1) va (m+2) -qatorini to'ldirish uchun y_j-c_j ayirma $y_j-c_j=\alpha_j+\beta_j M$ ko'rinishda ifodalanadi.

Bazisga (m+2)-qatorning musbat elementlarining eng kattasi mos keluvchi vektor kiritiladi. Hamma sun'iy bazis vektorlar bazisdan chiqarilguncha (m+2) - qatordan, so'ngra optimal yechim topilgunga qadar (m+1)- qatordan foydalaniladi. Masalani simpleks usul qo'llab yechish jarayonida m+2–qatordagi koeffitsiyentlarning barchasi manfiy bo'lsa, masala optimal yechimga ega bo'lmaydi yoki max Δ_j ustunda birorta ham musbat element qatnashmasa, berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining bazis yechimi mavjud bo'lishi mumkin, lekin optimal yechimi mavjud bo'lmaydi. Simpleks usul algoritmi bu holda ham takrorlanadi. Buni misolda tushuntirish va sun'iy bazis usulining afzalliklarini ko'rsatish kerak.

Misol. $y = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ chiziqli funksiyaning maksimum qiymati quyidagi chegaraviy shartlarda aniqlansin:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad\quad &= 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad\quad &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. & \end{aligned}$$

Bu masala, qo'yilgan shartlarda $y = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ chiziqli funksiyaning minimum qiymatini yuqoridagi chegaraviy shartlar saqlangan holda topish bilan ekvivalent. Chegaraviy shartlardagi uchinchi tenglama x_4 o'zgaruvchiga nisbatan P_4 birlik vektorga ega, qo'shimcha ravishda ikkita P_5, P_6 sun'iy bazis vektorlarni kiritish kifoya. Bu holda boshlang'ich yechim $X = (0,0,0,10,15,20)$ va chiziqli funksiyaning unga mos qiymati 10+35M. y_j larning har biri P_j va s vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng. Masalan,

$$z_1 - c_1 = M + 2M + 1 - (-1) = 2 + 3M.$$

$(m+2, j)$ elementlarining eng kattasi $(m+2,3)$ dagi 8 bo'lgani uchun P_3 vektorni bazisga kiritamiz. Unga mos $\theta_0 = \frac{20}{5}$ ga to'g'ri kelgan P_6 bazisdan chiqariladi. Birinchi jadvaldan ikkinchisiga o'tish uchun yuqoridagi (2.5.20) formuladan foydalaniladi.

1-jadval (iteratsiya)

				-1	-2	-3	1	M	M
i	bazis	s	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	M	15	1	2	3	0	1	0
2	P_6	M	20	2	1	5	0	0	1
3	P_4	1	10	1	2	1	1	0	0
4			10	2	4	4	0	0	0
5			35	3	3	8	0	0	0

2 -jadval (iteratsiya)

				-1	-2	-3	1	M
i	bazis	s	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_5	M	3	-1/5	7/5	0	0	1
2	P_3	-3	4	2/5	1/5	1	0	0
3	P_4	1	6	3/5	9/5	0	1	0
4			-6	2/5	16/5	0	0	0
5			3	-1/5	7/5	0	0	0

3 -jadval (iteratsiya)

				-1	-2	-3	1
i	bazis	s	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	-2	15/7	-1/7	1	0	0
2	P_3	-3	25/7	3/7	0	1	0
3	P_4	1	15/7	6/7	0	0	1
4			-90/7	6/7	0	0	0

4 -jadval (iteratsiya)

				-1	-2	-3	1
i	bazis	s	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	-2	5/2	0	1	0	1/6
2	P_3	-3	5/2	0	0	1	-3/6
3	P_1	-1	5/2	1	0	0	7/6
4			-15	0	0	0	-1

Bazis yechimlar: $X_1 = (x_5, x_6, x_4) = (15,20,10)$, $X_2 = (x_5, x_3, x_4) = (3,4,6)$,

$$X_3 = (x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}\right), \quad X_4 = (x_2, x_3, x_1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

4-jadvalning to'rtinchi qatorida joylashgan sonlar $y_j - c_j \leq 0$ tengsizlikni qanoatlantirgani uchun X_4 bazis yechim optimal yechim bo'ladi. Optimal yechimdagi funksiyaning maksimal qiymati $y_{max} = 15$, chunki minimal qiymat $y_{min} = -15$.

2.7. Chiziqli programmalashtirishda Lagranj funksiyasi

Matematik analizda quyidagi teorema isbotlanadi: agar $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1,m}$ tenglamalar bilan aniqlanadigan sohada $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtada (ba'zi qo'shimcha shartlarda) ekstremumga erishsa, shunday $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sonlari mavjudki, $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqta

$$F(X, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + ... + \lambda_m g_m(x)$$

funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

Boshqacha aytganda, $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqta $F(X, \lambda)$ funksiyaning ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ larning ba'zi qiymatlarida) mumkin bo'lgan ekstremum nuqtalaridan biri bo'ladi. Bu teorema ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumini izlashda katta ahamiyatga ega.

Bu yerda $F(X, \lambda)$ funksiya $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1,m}$ tenglamalar bilan aniqlanadigan sohada $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga nisbatan Lagranj funksiyasi, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ - Lagranj ko'paytuvchilari deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalalari ham shartli ekstremum masalalariga kiradi. Lekin, teoremada o'zgaruvchilar ixtiyoriy ishorali bo'lishi mumkin, ChPM da esa o'zgaruvchilarga, ko'p hollarda nomanfiylik sharti qo'yiladi. Shuning uchun yuqoridagi teoremani chiziqli programmalshtirish masalasiga to'g'ridan-to'g'ri qo'llash mumkin emas. Chiziqli programmalashtirishdagi o'zgaruvchilarga qo'yiladigan shartni hisobga oladigan quyidagi teorema, bir vaqtning o'zida o'zaro ikkilangan ChPM ning yechimlarini aniqlashga yordam beradi.

Teorema. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasining

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

mumkin bo'lgan yechimi $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ optimal yechim bo'lishi uchun, shunday $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sonlari mavjud bo'lishi kerakki, ular uchun:

$$F(X, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda_1 (a_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j) + ... + \lambda_m (a_m - \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j)\ ,\ i = \overline{1,m}.$$

Lagranj funksiyasi $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ nuqtada ($X \geq 0$ tengsizlik qanoatlantiriladigan sohada) maksimumga erishadi.

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Mustaqil yechishga doir masalalar

Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalarini yeching:

1. $2x_1+3x_2 \to \min$
$$2x_1-x_2-x_3 \ge 3,\quad x_1-x_2+x_3 \ge 2,\quad x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

2. $x_1+3x_2+5x_3-x_4 \to \max$
$$x_1+4x_2+4x_3+x_4=6,\quad x_1+6x_2+8x_3+2x_4=10,\quad x_i \ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

3. $x_1+x_2+x_3 \to \max$
$$-x_1+x_2+x_3=2,\quad 3x_1-x_2+x_3=0,\quad x_i \ge 0,\ j=1,2,3.$$

4. $3x_1+5x_2 \to \max$
$$-x_1+x_2+x_3 \le 5,\quad -x_1+5x_2 \le 41,\quad 3x_1+5x_2+x_3 \le 77,\quad x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$$

5. $x_1+4x_2-7x_3 \to \max$
$$2x_1-2x_2+14x_3=2,\quad x_1-2x_2+10x_3=0,\quad x_j \ge 0,\ i=1,2,3,\quad (x_0=(2;1;0)).$$

6. $56x_1+37x_2+2x_3 \to \min$
$$4x_1+5x_2-x_3 \ge 3,\quad 9x_1+3x_2+2x_3 \ge 4,\quad x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$$

Quyidagi masalalarning iqtisodiy-matematik modellarini tuzib, simpleks usulda yeching:

1-masala. Oyoq kiyimlar fabrikasi 3 turdagi oyoq kiyim ishlab chiqarishga mo'ljallangan, ya'ni etik, krossovka va botinka. Bu mahsulotlarni tayyorlash uchun uch xil S_1, S_2, S_3 xomashyodan foydalaniladi. Bir juft oyoq kiyimga sarflanadigan xomashyo miqdori va bir kunga sarflanadigan xomashyo hajmi quyidagi jadvalda berilgan.

Xomashyo turi	**1 juft oyoq kiyim uchun sarflanadigan xomashyo (sh.b.)**			**1 kunda sarflanadigan xomashyo (sh.b.)**
	etik	**krossovka**	**botinka**	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Mahsulot ishlab chiqarishning kunlik hajmi topilsin.

2-masala. Tikuv fabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 artikuldagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini tikish uchun sarflanadigan turli artikuldagi gazlamalar normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir artikuldagi gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing va yeching.

Gazlama artikuli	**1ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)**				**Gazlamalarning umumiy miqdori (m)**
	I	II	III	IY	
1.	1	-	2	1	180
2.	-	1	3	2	210
3.	4	2	-	4	800
Mahsulotlar bahosi (ming so'm)	9	6	4	7	

3-masala. Xo‘jalik karam, kartoshka va ko‘p yillik o‘tlar ekishga moslashgan. Buning uchun xo‘jalik ixtiyorida 850ga haydaladigan yer maydoni, 15000 tonna organik o‘g‘itlar, 50000 kishi/kun, mehnat resurslari mavjud. Mahsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan yer, organik o‘g‘it va mehnat resurslari xarajati quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xo‘jalik karam, kartoshka va ko‘p yillik o‘tlardan qancha ishlab chiqarganda pul ifodasidagi yalpi mahsulot miqdori maksimal bo‘ladi. Masalaning matematik modelini tuzing va yeching.

Ko‘rsatkichlar	Ekin turi		
	karam	**kartoshka**	**ko‘p yillik o‘t**
Mehnat sarfi (kishi/kun)	50	30	10
Organik o‘g‘itlar sarfi (t)	20	15	10
Yalpi mahsulot chiqimi (so‘m)	1000	800	200

4-masala. Ratsion P_1 va P_2 mahsulotlardan iborat. Ularning har biriga A, B va C vitaminlar kiradi. Bir sutkalik minimal iste’mol A vitamin uchun 100 birlik, B dan 80 birlik, C dan esa 160 birlikni tashkil qiladi. Bir birlik P_2 mahsulotning bahosi 0,3 so‘m, P_1 niki esa 0,2 so‘m. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori keltirilgan. Eng arzon tushadigan ratsion variantini topish masalasining matematik modelini tuzing va masalani yeching.

Vitaminlar	Bir birlik mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori	
	P_1	P_2
A	0,1	0,5
B	0,25	0,1
C	0,2	0,4

5-masala. Aviakompaniya ikki turdagi samolyotda ma’lum bir yo‘nalishlarda passajirlarni tashishni amalga oshiradi. Birinchi tur samolyot ekipaji 3 kishidan iborat bo‘lib, bir reysda 45 ta passajirni tashiydi, ikkinchi tur samolyot ekipaji 6 kishidan iborat bo‘lib, bir reysda 80 ta passajirni tashiydi. Birinchi tur samolyotni ekspluatatsiya qilish 600 shartli belgi (sh.b.), ikkinchi tur samolyotni ekspluatatsiya qilish 900 (sh.b.) bo‘ladi. Rejadagi davr ichida ushbu yo‘nalishda 5000 ta passajir tashish kerakligi ma’lum. Agar har bir reysda 360 kishidan ortiq bo‘lmagan kishini tashish mumkin bo‘lsa, ikkala turdagi samolyotlardagi reyslar miqdori qancha bo‘lganda samolyotlarni ekspluatatsiya qilish xarajatlari minimal miqdorda bo‘ladi? Masalaning matematik modelini tuzing va yeching.

6-masala. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda A vitamindan 6 birlik, B vitamindan 12 birlik, C vitamindan 4 birlik bo‘lishi kerak.

Mollarni boqish uchun ikki turdagi yemdan foydalaniladi. Jadvalda yem tarkibidagi foydali ozuqa moddalari ulushi, ozuqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoj va yemlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo'lgan kundalik ratsionni aniqlang.

Ozuqa moddalari	**1kg yemdagi ozuqa moddalari miqdori**		**Mollarning ozuqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoji**
	I	II	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
1kg yemning narxi	50	60	

7-masala. Sex uchta texnologiya bo'yicha ishlashi mumkin. Birlik vaqt orasida har bir texnologiya bo'yicha resurslarning sarflanish normasi va har bir texnologiyani ish unumdorligi (pul birligida) jadvalda berilgan. Texnologiyalardan foydalanishning intensivligi aniqlansin.

Resurslar	**Texnologiya**			**Resurs hajmi**
	T-1	T-2	T-3	
Ish kuchi (odam/soat)	15	20	25	1200
Xomashyo (t)	2	3	2,5	150
El/energiya (kvt/soat)	35	60	60	3000
Texnologiyaning ish unumdorligi	300	250	450	

3-bob. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHDA IKKILANGANLIK NAZARIYASI

3.1. O'zaro ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalalarining iqtisodiy talqini

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasi «ikkilangan» masala deb ataluvchi boshqa bir chiziqli programmalashtirish masalasi bilan uzviy bog'liq bo'ladi. Masalalar orasidagi bog'lanish shundan iboratki, ulardan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining ham yechimini aniqlash mumkin. O'zaro bog'liq bo'lgan bunday masalalarni birgalikda ikkilangan masalalar deb ataymiz.

Misol sifatida ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz. Korxonada n xil mahsulot ishlab chiqarilsin. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun korxonada m xil ishlab chiqarish vositalari b_i, $i=\overline{1,m}$ miqdorlarda mavjud bo'lsin. Har bir j xil $j=\overline{1,n}$ mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan i-vositaning miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin. Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada chegaralangan vositalardan foydalanib pul ifodasida (c_j) korxona maksimal mahsulot ishlab chiqarsin.

Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan j xil mahsulotning miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
& a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \\
& \quad x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \\
& y_{\max} = c_1x_2 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n .
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

Endi mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vositalarni baholaymiz. Vositalarning bahosi va ishlab chiqariladigan mahsulotning bahosi bir xil o'lchov birligiga ega deb faraz qilamiz. W_i ($i=\overline{1,m}$) bilan i xil vositaning bir birligining bahosini belgilaymiz. U holda barcha j xil mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ishlab chiqarish vositalarining bahosi $\min\limits_{x_{ik}>0}(\frac{x_i}{x_{ik}}) = \frac{x_i}{x_{ik}}$ birlikni tashkil qiladi. Sarf qilingan barcha vositalarning bahosi ishlab chiqarilgan mahsulot bahosidan oshmasligi kerak, ya'ni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,n}.$$

Barcha mavjud vositalarning bahosi $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i w_i$ yig'indi orqali ifodalanadi. Shunday qilib, berilgan masalaga ikkilangan masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$a_{11}w_1+a_{12}w_2+\ldots+a_{1n}w_m\geq c_1,$$
$$a_{12}w_1+a_{22}w_2+\ldots+a_{2n}w_m\geq c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}w_1+a_{m2}w_2+\ldots+a_{mn}w_m\geq c_n, \qquad (3.1.2)$$
$$w_i\geq 0,\ i=\overline{1,m},$$
$$Z_{\min}=b_1w_2+b_2w_2+\ldots+b_mw_m.$$

Ikkilangan masaladagi W_i o'zgaruvchilar i-vositaning bahosi deb ataladi.

3.2. O'zaro ikkilangan masalalarning matematik modellari

Endi kanonik formada berilgan quyidagi ChPM ni ko'raylik:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,$$
$$a_{12}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \qquad (3.2.1)$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},$$
$$y_{\max}=c_1x_2+c_2x_2+\ldots+c_nx_n.$$

Bu masalaga ikkilangan masalaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\geq c_1,$$
$$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\geq c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\geq c_n, \qquad (3.2.2)$$
$$y_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},$$
$$z_{\max}=b_1y_2+b_2y_2+\ldots+b_my_m,$$

bu yerda a_{ij}, b_i, c_j birinchi masaladagi o'zgarmas sonlar y_i ikkilangan masaladagi o'zgaruvchilar.

Misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasini tuzing:

$$3x_1+2x_2-x_3\to\max,$$
$$2x_1-2x_2+x_3-3x_4=8,$$
$$x_1+4x_2-2x_3+x_4=4,$$
$$2x_1-x_2-x_3=2,$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0.$$

Yuqorida ko'rsatilganiga asosan ikkilangan masala yangi y_1, y_2, y_3 o'zgaruvchilarga nisbatan quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$
\begin{aligned}
&8y_1+4y_2+2y_3 \to \max,\\
&2y_1+y_2+2y_3 \ge 3,\\
&-2y_1+4y_2-y_3 \ge 2,\\
&y_1-2y_2-y_3 \ge -1,\\
&-3y_1+y_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Chiziqli programmalashtirish masalasini matritsa formasini

$$
\begin{aligned}
&AX=B,\\
&X\ge 0,\\
&f=CX\to\max
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

yozsak, unga ikkilangan masala quyidagicha bo'ladi:

$$
\begin{aligned}
&YA\ge C,\\
&z=YB\to\min
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

Bu yerda $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_m\end{pmatrix}$ - bir ustunli matritsa. Boshlang'ich masalalarning berilishiga ko'ra o'zaro ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalalari simmetrik va simmetrik bo'lmagan masalalarga bo'linadi.

Simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalarda berilgan masaladagi chegaralovchi shartlar tenglamalardan, ikkilangan masaladagi chegaralovchi shartlar esa tengsizliklardan iborat bo'ladi. Masalan, simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalarning matritsali ifodasi quyidagicha bo'ladi:

Berilgan masala: Ikkilangan masala:

$$
\begin{aligned}
&AX=B,\\
&X\ge 0,\\
&f=CX\to\max
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&YA\ge C,\\
&z=YB\to\min
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

Berilgan masala: Ikkilangan masala:

$$
\begin{aligned}
&AX=B,\\
&X\ge 0,\\
&f=CX\to\max
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&YA\le C,\\
&z=YB\to\max
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

Ikkala masalada ham $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ vektor - qator, $B=(b_1,b_2,...,b_m)$ vektor-ustun, $A=(a_{ij})$ - chegaralovchi shartlarning koeffitsiyentlaridan tashkil topgan matritsa.

Endi o'zaro ikkilangan simmetrik chiziqli programmalashtirish masalalarini ko'raylik. Simmetrik ikkilangan masalalarning simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalardan farqi shundan iboratki, berilgan va ikkilangan masaladagi chegaralovchi shartlar tengsizliklardan iborat bo'ladi va ikkilangan masaladagi noma'lumlarga manfiy bo'lmaslik sharti qo'yiladi.

Berilgan masala: Ikkilangan masala:

$$
\begin{aligned}
&AX\ge B,\\
&X\ge 0,\\
&f=CX\to\max.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&YA\le C,\\
&Y\ge 0,\\
&z=YB\to\min.
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

Berilgan masala: Ikkilangan masala:

$$AX \le B, \quad YA \ge C,$$
$$X \ge 0, \quad Y \ge 0, \qquad (3.2.8)$$
$$f = CX \to \max. \quad z = YB \to \min.$$

Tengsizliklar sistemasini qo'shimcha o'zgaruvchilar yordami bilan tenglamalar sistemasiga aylantirish mumkin. SHuning uchun simmetrik ikkilangan masalalarni simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalaga keltirish mumkin. Demak, simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalarning yechimlari haqidagi teorema simmetrik ikkilangan masalalar uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

Simmetrik ikkilangan masalalarni yechish uchun ulardan qulay bo'lgan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining yechimini aniqlash mumkin. Buni quyida keyinroq keltiriladigan teoremaning isbotida ko'rish mumkin.

Misol.

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2,\\
&x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3,\\
&x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6,\\
&2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3,\\
&x_j \ge 0, (j = 1,2,3)\\
&y_{\min} = x_1 + 2x_2 + 3x_3.
\end{aligned}$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzishdan avval chegaralovchi shartlarni bir xil ko'rinishdagi tengsizliklarga keltiramiz. Buning uchun ikkinchi tengsizlikning belgisini almashtiramiz:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2,\\
&-x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 3,\\
&x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6,\\
&2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3,\\
&x_j \ge 0, (j = 1,2,3),\\
&y_{\min} = x_1 + 2x_2 + 3x_3.
\end{aligned}$$

Hosil bo'lgan masalaga ikkilangan masalaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned}
&2w_1 - w_2 + w_3 + 2w_4 \le 1,\\
&2w_1 - w_2 + w_3 + w_4 \le 2,\\
&-w_1 + 4w_2 - 2w_3 - 2w_4 \le 3,\\
&w_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,\\
&Z_{\max} = 2w_1 + 3w_2 + 6w_3 + 3w_4.
\end{aligned}$$

Quyidagi masalaga ikkilangan masala tuzing:

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 - x_3 \le 4,\\
&x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5,\\
&2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6,\\
&x_j \ge 0, j = 1,2,3,\\
&y_{\min} = 2x_1 + x_2 + 5x_3.
\end{aligned}$$

Masalaning shartlari tengsizliklardan iborat, demak, berilgan masalaga simmetrik bo'lgan ikkilangan masala tuzish kerak. Bunga erishish uchun 1 tengsizlikni «-1» ga ko'paytiramiz. Natijada quyidagi simmetrik ikkilangan masalalarni hosil qilamiz:

Berilgan masala:	Ikkilangan masala:
$-x_1+x_2+x_3 \geq -4,$	$-w_1+w_2+2w_3 \leq 2,$
$x_1-5x_2+x_3 \geq 5,$	$w_1-5w_2-w_3 \leq 1,$
$2x_1-x_2+3x_3 \geq 6,$	$w_1+w_2+3w_3 \leq 5,$
$x_j \geq 0,\ j=1,2,3,$	$w_i \geq 0,\ i=1,2,3,$
$y_{min}=2x_1+x_2+5x_3.$	$Z_{max}=-4w_1+5w_2+6w_3.$

Ikkilangan masalalarning optimal yechimlari o'zaro quyidagi teorema asosida bog'langan.

Teorema. Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masaladan birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funksiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni:

$$f_{min}=z_{max}.$$

Agar bu masalalardan birining chiziqli funksiyasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda ikkinchi masala hech qanday yechimga ega bulmaydi.

Isbot.

$$\begin{aligned} &f=CX \to \min \\ &AX=b, \\ &X \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Ko'rinishida berilgan masala optimal yechimga ega va uni simpleks usul bilan topish mumkin deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmasdan optimal yechimdagi bazis vektorlar birinchi m ta $P_1, P_2, \ldots, P_m$ vektorlardan iborat deb qabul qilamiz. Shu vektorlarning komponentlaridan tuzilgan matritsani B bilan belgilaymiz. Oxirgi simpleks jadval dastlabki simpleks jadvalning $P_1, P_2, \ldots, P_m, P_{m+1}, \ldots, P_n$ vektorlarini bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasini o'z ichiga oladi, ya'ni dastlabki simpleks jadvaldagi har bir P_j vektor uchun oxirgi simpleks jadvalda quyidagi munosabatlarni qanoatlantiruvchi X_j vektor mos keladi:

$$P_j=BX_j \quad yoki \quad B^{-1}P_j=X_j$$

$\overline{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ bilan oxirgi simpleks jadvalning elementlaridan tashkil topgan matritsani belgilaymiz. Simpleks jadvalning dastlabki m ta vektorlari bazis vektorlardan iborat bo'lganligi sababli $\overline{X}$ matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A=B\overline{X}, \quad B^{-1}A=\overline{X}, \tag{3.2.10}$$

$$b=BX^{*}, \quad B^{-1}b=X^{*}, \tag{3.2.11}$$

$$f_{min}=C^{*}X^{*}, \tag{3.2.12}$$

$$\Delta=C^{*}\overline{X}-C \leq 0. \tag{3.2.13}$$

Bu yerda $C^{\circ}=(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ - bazis vektorlarga tegishli bo'lgan C–vektorning komponentlaridan tuzilgan vektor – qator. Endi

$$Y^{\circ}=C^{\circ}B^{-1} \qquad (3.2.14)$$

formula orqali aniqlanuvchi Y^0 ni ikkilangan masalaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz. (3.2.10), (3.2.11) munosabatlarga asosan:

$$Y^{\circ}A-C=C^{\circ}B^{-1}A-C=C^{\circ}\overline{X}-C\leq 0.$$

Demak, $Y^{\circ}A-C\leq 0$ yoki $Y^{\circ}A\leq C$.

Shunday qilib, $YA\leq C$ shartni qanoatlantiruvchi Y° vektor ikkilangan masalaning yechimi bo'ladi. Bu yechimdagi masalaning chiziqli funksiyasining qiymati $z(Y^0)=Y^0b$ ga teng.

(3.2.11) va (3.2.12) ga asosan,

$$f_{\min}=Y^0b=C^0B^{-1}b=C^0X^0=f(X^0)=q, \qquad (3.2.15)$$

bundan ko'rinadiki, ikkilangan masala chiziqli funksiyasining Y° yechimdagi qiymati berilgan masalaning chiziqli funksiyasining optimal q qiymatiga teng ekan.

Endi Y° yechim ikkilangan masalaning optimal yechimi ekanligini ko'rsatamiz. (3.2.9) masalaning shartlarini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy n o'lchovli X va (3.2.6) masalaning shartlarni qanoatlantiruvchi m o'lchovli Y vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$YAX=Yb=z(Y),$$

$$YAX\leq CX=f(X).$$

Bularni solishtiririb boshlang'ich ChPMning har qanday X yechimi va unga ikkilangan masalaning Y yechimlari uchun bajariladigan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$z(Y)=f(X). \qquad (3.2.16)$$

Demak, o'zaro ikkilangan ChPMning chiziqli funksiyalarining optimal qiymatlari uchun ham $\max z(Y)=\min f(X)$ (3.2.17)

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ikkinchi tomondan (3.2.15) ga ko'ra Y^0 yechim uchun

$$f_{\min}=Y^0b=z(Y^0).$$

Demak, Y^0 da ikkilangan masalaning chiziqli funksiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishadi.

Xuddi shunday yo'l bilan, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, berilgan masala ham optimal yechimga ega bo'lishini va o'zaro ikkilangan masalalarning optimal yechimlari uchun

$$\min f(X)=\max Z(W) \qquad (3.2.18)$$

tenglik o'rinli bo'lishini isbot qilish mumkin.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash uchun berilgan masalaning chiziqli funksiyasi quyidan chegaralanmagan deb faraz qilamiz. U holda (3.2.18) ga asosan

$$z(Y)\leq -\infty$$

tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bu ifoda ma'noga ega bo'lmaganligi sababli ikkilangan masala yechimga ega bo'lmaydi. Xuddi shuningdek, ikkilangan masalaning chiziqli funksiyasi yuqoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak:

$$f(X) \geq +\infty$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik ham ma'noga ega bo'lmaganligi sababli, berilgan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot qilingan teoremaga asosan o'zaro ikkilangan masalalardan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining yechimini aniqlash mumkin.

Mustaqil yechishga doir masalalalar

Quyidagi ChPM ga ikkinlangan ChP masalalari tuzilsin;

1. $y = 9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \to \max$
$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6,$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 5,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

2. $y = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 14,$
$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 4,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

3. $y = 3x_1 + 2x_2 \to \min$
$7x_1 + 2x_2 \geq 14,$
$4x_1 + 5x_2 \geq 20,$
$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

4. $y = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 40,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 30,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

3.3. Ikkilangan simpleks usul

Ikkilangan simpleks usul oddiy simpleks usulga nisbatan ba'zi qulayliklarga ega:

1) Ikkilangan simpleks usul bo'yicha yechilayotgan masala shartlaridagi b_i ozod hadlar musbat bo'lmasligi ham mumkin.

2) Ikkilangan simpleks usul bilan bir vaqtning o'zida ham berilgan masalaning, ham ikkilangan masalaning yechimi topiladi yoki ikkala masalaning yechimi mavjud emasligi aniqlanadi.

3) Berilgan masalaning chegaralovchi shartlari "$\geq$" belgi bilan bog'langan yoki uning ba'zi ozod hadlari manfiy bo'lgan masalalarni, ikkilangan simpleks usul bilan yechganda bajariladigan hisoblash ishlarining soni kamayadi.

4) Ikkilangan simpleks usul bilan ishlab chiqarishning ba'zi zarur tavsiflarini aniqlash mumkin. Masalan, bir vaqtning o'zida ham ishlab chiqarish yechimini, ham ishlab chiqarishga sarf qilinadigan hamma vositalarning bahosini hisoblash mumkin.

Oddiy simpleks usul singari ikkilangan simpleks usulning har bir iteratsiyasi (qadami)da n o'lchovli X vektor almashib boradi. Faqat, shunga e'tibor berish kerakki, simpleks usuldan farqli ravishda, ikkilangan simpleks usul bilan topilgan n o'lchovli X vektor tayanch yechim bo'lmasligi mumkin. Bunday yechimni *chala tayanch* yechim deb ataymiz. Ikkilangan simpleks usul bo'yicha chala tayanch yechimlarni almashtirish jarayoni tayanch yechim topilguncha takrorlanadi. Topilgan tayanch yechim esa masalaning optimal yechimi bo'ladi.

1-teorema. Agar chala tayanch yechim masalaning tayanch yechimi bo'lsa, u optimal yechim ham bo'ladi.

2-teorema. Agar masalaning chala tayanch yechimining komponentalaridan kamida bittasi, masalan, $x_j < 0$ bo'lib, barcha j lar uchun $x_{ij} \geq 0$ bo'lsa, berilgan masala tayanch yechimga ega bo'lmaydi.

3-teorema. Agar topilgan chala tayanch yechim $\overline{X}$ uchun $\Delta_j = y_j - c_j \leq 0$ bo'lganda, $x_k < 0$ bo'lib, kamida bitta $x_{kj} < 0$ bo'lsa, u holda $\overline{X}$ ni yangi chala tayanch yechim $\overline{X'}$ ga almashtirish natijasida chiziqli funksiyaning qiymati kamayadi. $\overline{X}$ vektorni $\overline{X'}$ ga almashtirish uchun bazisdan P_k vektor chiqarilib, bazisga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi P_s vektor kiritiladi:

$$x_k < 0, \quad x_{kj} < 0 \quad \text{va}$$

$$\left|\frac{\Delta_s}{x_{ks}}\right| < \left|\frac{\Delta_j}{x_{kr}}\right|, \ (j \neq s, \ x_{kj} < 0).$$

Misol. Quyidagi masalani yeching va unga ikkilangan masalaning yechimini ikkilangan simpleks usuli yordami bilan toping.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 &= 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_6 &= 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 - x_7 &= 0, \\ x_j \geq 0, \ j &= \overline{1,7}, \\ y_{min} &= 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4. \end{aligned}$$

Bu masalani x_5, x_6, x_7 qo'shimcha o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_5, P_6, P_7 vektorlarni bazis vektorlarga aylantirish uchun berilgan masaladagi tenglamalarning har birini (-1) ga ko'paytiramiz. Natijada quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 &= 8, \\ x_2 + 3x_3 - 6x_4 + x_6 &= -4, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + x_7 &= 0, \\ x_j \geq 0, \ j &= \overline{1,7}, \\ y_{min} &= 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3w_1 - 2w_3 &\leq 4, \\ -2w_1 + w_2 &\leq 3, \\ w_1 + 3w_2 - w_3 &\leq 10, \\ -5w_1 - 6w_2 + w_3 &\leq 5, \\ w_1 \leq 0, \ w_2 \leq 0, \ w_3 &\leq 0, \\ Z_{max} &= -8w_1 - 4w_2. \end{aligned}$$

Bular o'zaro ikkilangan masalalardir.

Birinchi masalada P_5, P_6, P_7 vektorlarni bazis vektorlar deb qabul qilib, simpleks jadvalni to'ldiramiz. j=1,2,3,4,5,6,7 uchun $\Delta_j = y_j - c_j \leq 0$ bo'ladi.

Demak, $X^{\circ} = B^{-1}b = (-8, -4, 0)$ – vektor masalaning chala tayanch yechimi bo'ladi. Ikkilangan masalaning bu bazisdagi qiymati:

$$Y^{\circ} = C^{\circ}B^{-1} = (0,0,0).$$

Chala tayanch yechim X ning eng kichik manfiy elementiga mos keluvchi P_5 vektorni bazisdan chiqaramiz va

$$\theta = \min_{x_{1j}<0} \frac{\Delta_j}{x_{1j}} = \min_{x_{1j}<0} \frac{y_j - c_j}{x_{1j}} = \frac{\Delta_s}{x_{14}} = 1 > 0$$

shartni qanoatlantiruvchi P_4 vektorni bazisga kiritamiz. x_{14} - aniqlovchi element bo'ladi. Yangi simpleks jadvalda barcha j lar uchun

$$\Delta_j = y_j - c_j \le 0$$

Berilgan masalaning yangi chala tayanch yechimi $X' = (8/5,\ 28/5,\ -8/5)$ bo'ladi. Yangi bazisga mos keluvchi ikkilangan masalaning tayanch yechimi

$$Y^0 = (-1,0,0)$$

vektordan iborat va chiziqli funksiyaning unga mos keluvchi qiymati:

$$Y' = Y(X') = Z = Z(Y') = 8$$

Misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ikkilangan masalani tuzing va berilgan masalani simpleks usulda yechib, ikkinchi masalaning ham yechimini aniqlang.

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 &= 5, \\ x_j \ge 0,\ j &= 1,2,3,4,5,6, \\ f_{\min} &= x_2 - x_4 - 3x_5. \end{aligned}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 &\le 1, \\ -y_1 + 2y_2 &\le -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 &\le -3, \\ y_1 \le 0, y_2 \le 0 y_3 &\le 0, \\ z_{\max} &= y_1 + 2y_2 + 5y_3. \end{aligned}$$

Berilgan masalani simpleks usul yordamida yechamiz.

1-jadval

Bazis vektor	$c_j^{базис}$	P_0	0	1	0	-1	-3	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	1	1	2	0	-1	1	0
P_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
P_6	0	5	0	3	0	0	1	1
Δ_j			0	-1	0	1	3	0

2-jadval

Bazis vektor	$c_j^{базис}$	P_0	0	1	0	-1	-3	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
P_3	0	3	1	-2	1	1	0	0
P_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
Δ_j		-3	-3	-7	0	4	0	0

3-jadval

Bazis vektor	$c_j^{базис}$	P_0	0	1	0	-1	-3	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
P_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
P_6	0	1	-2	3	-1	0	0	1
Δ_j		-15	-7	1	-4	0	0	0

4-jadval

Bazis vektor	$c_j^{базис}$	P_0	0	1	0	-1	-3	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	-3	4	3	0	1	0	1	0
P_4	-1	11/3	-1/3	0	1/3	1	0	2/3
P_2	1	1/3	-2/3	1	-1/3	0	0	1/3
Δ_j		-46/3	19/3	0	-11/3	0	0	-1/3

Berilgan masalaning optimal yechimi oxirgi simpleks jadvaldan $X^* = (0, 1/3, 0, 11/3, 4, 0)$ va funksiyaning optimal qiymati $f_{min} = -46/3$.

Oxirgi simpleks jadvaldan berilgan masalaga ikkilangan masalaning yechimini topamiz. Ikkilangan masalalarning yechimlari haqidagi yuqoridagi teoremaga asosan ikkilangan masalaning yechimi $Y^* = C^* B^{-1}$ munosabatdan topiladi.

Bu yerda B^{-1} matritsa oxirgi jadvaldagi bazisga kirgan vektorlarning komponentlaridan tuzilgan.

$$B = (P_5, P_4, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = (A_1, A_3, A_6) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Oxirgi jadvalning o'zidan: $C^0 = (-3 \ -1 \ 1)$ga ko'ra:

$$Y^* = C^* B^{-1} = (-3 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (-19/3 \quad -11/3 \quad -1/3).$$

Bu yechimda $z_{max} = -46/3$.

Mustaqil yechishga doir masalalalar

Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalariga ikkinlangan masalalar tuzing va ikkilangan simpleks usulda yeching:

1. $y = 9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \to \max$

$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 8,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

2. $y = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 14,$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

3. $y = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 40,$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 30,$$
$$x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

4. $y = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2,$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3,$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

4 - bob. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

O'zgaruvchilarga butun sonli bo'lishlik sharti qo'yilgan chiziqli programmalashtirish masalalari katta amaliy ahamiyatga egadir. Bunday masalalar butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi. Butun sonli programmalashtirish masalalariga optimal jadval tuzish, ratsional bichish, transport vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash, bo'linmaydigan mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalalari kiradi. Chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelidagi o'zgaruvchilarning hammasiga yoki ma'lum qismiga butun son bo'lishlik sharti qo'yilsa, butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi:

$$f_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$
$$x_j - butun, \quad j = \overline{1,n_1}$$

yoki

$$AX = B,$$
$$X \ge 0 \quad va\ butun,$$
$$y_{\min(\max)} = CX.$$

Bu yerda $*$ - "$\le, \ge, =$" belgilaridan birini bildiradi. Masalaning matritsa formada yozilgan matematik modelidagi chegaraviy shart tenglamalar sistemasidan iborat, chunki tengsizliklar qatnashgan chiziqli sistemani qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yo'li bilan teng kuchli tenglamalar sistemasiga aylantirish mumkin.

Sayyor savdogar haqidagi masala. Faraz qilaylik, P_0 shaharda yashovchi sayyor savdogar n ta $P_1, P_2, ..., P_n$ shaharlarda bir martadan bo'lib, minimal vaqt orasida P_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin. Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun sayyor savdogarning P_i shahardan P_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini $t_{ij}, (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$ bilan hamda uning har bir P_i shahardan P_j shaharga borish variantining xarakteristikasini x_{ij} bilan belgilaymiz. Agar savdogar P_i shahardan P_j ga borsa $x_{ij}=1$, bormasa $x_{ij}=0$ bo'ladi. Bu masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishga egadir:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,m}; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}; \qquad x_{ij} = 0 \text{ yoki } x_{ij} = 1,$$

$$y_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij}.$$

4.1. Optimal joylashtirish masalasi

Faraz qilaylik, m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ punktlarda bir xil mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalarni joylashtirish kerak bo'lsin. Har bir korxonaning ish quvvatini bildiruvchi $x_i, (i = \overline{1,m})$ chekli butun sonli qiymatlarni qabul qiladi. Har bir A_i

punktda mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xarajat korxonaning ishlab chiqarish quvvatiga bog'liq bo'lib, $f_i(x_i)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bu funksiyani chiziqli deb qabul qilamiz va

$$f_i(x_i)=c_i x_i$$

ko'rinishda ifodalaymiz.

Bundan tashqari, n-ta punktda bu mahsulot iste'mol qilinadi. Har bir iste'mol qiluvchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi mos ravishda $b_1,b_2,...,b_n$ birliklarni tashkil qiladi deb faraz qilamiz va har bir A_i ishlab chiqaruvchi punkt bilan bog'langan hamda transport xarajatlarining matritsasi $C=(c_{ij})$ dan iborat bo'lsin.

A_i punktdan j punktga yuboriladigan mahsulot miqdorini x_{ij} bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagicha ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=x_i,\quad i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ge b_j,\quad j=\overline{1,n},$$

$$x_{ij}\ge 0 \text{ va butun son},$$

$$y=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to \min.$$

4.2. Butun sonli programmalashtirish masalasini yechishning Gomori usuli

Butun sonli programmalashtirish masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar to'liq butun sonli programmalashtirish masalalari, agar ularning ma'lum bir qismi uchungina bu shartlar qo'yilsa, qisman butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi. Butun sonli programmalashtirish masalasi chiziqli programmalashtirish masalasidan o'zgaruvchilarga qo'yilgan qo'shimcha shartlar (butun bo'lishlik) bilan farq qiladi. Bu shartlarning qatnashishi butun sonli programmalashtirish masalasini yechish jarayonini qiyinlashtiradi. Natijada chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish uchun qo'llaniladigan usullarni butun sonli programmalashtirish masalalariga qo'llash mumkin bo'lmay qoladi.

Butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ulardan amerikalik olim R. Gomori yaratgan usul optimal yechimni beruvchi aniq usul hisoblanadi.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat. Berilgan butun sonli programmalashtirish masalasida noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan, ularni oddiy chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida simpleks usuldan foydalanib yechamiz.

Agar yechim butun sonlardan iborat bo'lsa, u butun sonli programmalashtirish masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks holda, noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi. Bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga kiritib yoziladi va bazis yechim almashtiriladi. Buning uchun noma'lumni kesuvchi tenglamadan ajratiladi va uning qiymatini boshqa tenglamalarga qo'yib chiqiladi. Bunday ishlar masalaning butun sonli yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Har bir siklda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab, bu tenglama yordamida berilgan masalaning yechimlaridan tashkil topgan K - qavariq to'plamning kasr sonli yechimlarini o'z ichiga olgan qismini kesib boriladi. Kesish jarayoni K to'plamning faqat butun sonli yechimlarni o'z ichiga olgan qismi topilguncha yoki bunday qism mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Butun sonli (masalaning barcha o'zgaruvchilariga butun bo'lishlik sharti qo'yilganda) programmalashtirishtirish masalasini yechishning Gomori algoritmi quyidagicha:

1. Simpleks usul yordamida:

a) chegaraviy shartlar sistemasi birgalashmagan (yechish tugadi);

b) optimal yechim yo'q (yechish tugadi);

v) butun sonli optimal yechim mavjud va uni aniqlash;

g) chekli butun sonli optimal yechimni topish uchun 2 bo'limga o'tish;

2. Kesuvchi o'zgaruvchi tanlansin va 3 bo'limga o'tilsin;

3. Kesuvchi tenglama tuzish uchun sistemaning tenglamasi tanlansin va 4 bo'limga o'tilsin;

4. Kesuvchi tenglama tuzib tenglamalar sistemasiga kiritilsin va 1 bo'limga o'tilsin;

Kesuvchi tenglama chiziqli bo'lib, masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasini shunday kessinki, topilgan optimal yechim hamda mumkin bo'lgan butun yechimlar sohasi saqlansin.

Agar chegaraviy shartlar sistemasidagi tenglamalardan hech bo'lmasa birining ozod hadi kasr sondan iborat bo'lib, o'zgaruvchilarning barcha koeffitsiyentlari butun sonlardan iborat bo'lsa masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi

Masalaning chegaraviy shartlar sistemasi birgalashmagan holda ham berilgan butun sonli programmalashtirish masalasi yechimga ega bo'lmaydi.

Kesuvchi tenglama tuzish uchun sistemaning ixtiyoriy tenglamasini tanlash mumkin, lekin uning ozod hadi albatta kasr sondan iborat bo'lishi kerak. Kesuvchi tenglama quyidagicha tuziladi:

1. Kesuvchi tenglamaning ozod hadi tanlangan tenglamaning ozod hadidan uning butun qismidan katta bo'lmagan butun son ayirish yo'li bilan hosil qilinadi.

2. Kesuvchi tenglamaning o'zgaruvchilarining koeffisiyentlari tanlangan tenglamadagi mos koeffitsiyentlardan unga yaqin bo'lgan va o'zidan kichik bo'lmagan butun son ayrilib tuziladi.

3.Kesuvchi o'zgaruvchi qo'shiladi (bu o'zgaruvchi sistemadagi o'zgaruvchilardan farqli).

Faraz qilaylik, $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'lsin va hech bo'lmasa bitta x_i koordinatasi kasr sondan iborat bo'lsin. Bazisga kirmagan o'zgaruvchilar to'plamini N bilan belgilaylik va optimal yechim hosil qilingan oxirgi simpleks jadval asosida x_i ni bazisga kirmagan x_j, $j \in N$ bo'yicha yoyamiz:

$$x_i = b_{i0} - \sum_{j \in N} x_{ij} x_j, \quad i = 0,1,2,...,n.$$

x_i - kasr son bo'lgani uchun unga yaqin, lekin o'zidan katta bo'lmagan butun sonni $[x_i]$ bilan belgilab, kasr qismni $\{x_i\} = x_i - [x_i] > 0$ kabi aniqlaymiz va quyidagi kesuvchi tenglamani hosil qilamiz:

$$z_i = z_i(X) = -\{b_{i0}\} - \sum_{j \in N} (-\{x_{ij}\}) x_j,$$

$$z_i \geq 0 \text{ va butun.}$$

Kesuvchi tenglama tuzishning bunday usulini isbotsiz qabul qilamiz.

Misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasining butun nomanfiy yechimi topilsin:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10,$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 11,$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13,$$
$$y_{max} = 4x_1 + 5x_2 + x_3.$$

Masalaning chegaraviy shartlarini qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yo'li bilan tenglamalar sistemasiga keltiramiz va simpleks usul bilan simpleks jadvalda yechamiz:

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10,$$
$$x_1 + 4x_2 + x_5 = 11,$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13,$$
$$x_j \geq 0 \ \textit{va butun}, \ j = \overline{1,6},$$
$$y_{max} = 4x_1 + 5x_2 + x_3.$$

1-jadval

№	Bazis vektorlar	$c^{баз}$	P_0	4	5	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	1	3	2	0	1	0	0
2	P_5	0	0	1	4	0	0	1	0
3	P_6	0	1	3	3	1	0	0	1
			1						
			1						
			3						
	Δ_j			-4	-5	-1	0	0	0

2-jadval

№	Bazis vek-torlar	$c^{базис}$	P_0	4	5	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	9/2	5/2	0	0	1	-1/2	0
2	P_2	5	11/4	1/4	1	0	0	1/4	0
3	P_6	0	19/4	9/4	0	1	0	-3/4	1
	Δ_j		55/4	-11/4	0	-1	0	5/4	0

3-jadval

№	Bazis vektorlar	$c^{базис}$	P_0	4	5	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	4	9/5	1	0	0	2/5	-1/5
2	P_2	5	23/10	0	1	0	-1/10	3/10
3	P_3	1	7/10	0	0	1	-9/10	-3/10
	Δ_j		194/10	0	0	0	11/10	7/10

3-jadvalda masalaning optimal $X=\left(\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\right)$ yechimi topildi, lekin vektorning koordinatalari butun emas. Oxirgi jadvalning uchinchi qator tenglamasiga nisbatan kesuvchi tenglama tuzamiz va uni 4-jadvalga kiritamiz:

$$z_1 = -\frac{7}{10} + \frac{9}{10}x_4 + \frac{3}{10}x_5 .$$

4-jadval

Bazis vektorlar	$c^{базис}$	P_0	4	5	1	0	0	z
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_1	4	9/5	1	0	0	2/5	-1/5	
P_2	5	23/10	0	1	0	-1/10	3/10	
P_3	1	7/10	0	0	1	-9/10	-3/10	
	Δ_j	194/10	0	0	0	11/10	7/10	0
	z	-7/10	0	0	0	-9/10	-3/10	1

4-jadvalda z qatorga nisbatan aniqlovchi koeffitsiyentlar hisoblab, P_5 vektorni bazisga kiritsak, P_0 vektorning komponentlari butunga aylanadi, ya'ni X=(2,2,1) va maqsad funksiyaning qiymati - $y_{max}=19$.

4.3. Tarmoqlar va chegaralar usuli

Endi butun sonli programmalashtirish masalasini yechishning *tarmoqlar* va *chegaralar* usulini kommivoyajer haqidagi masalada tushuntiramiz. Faraz qilaylik, $C=\left[c_{ij}\right]$ matritsaning elementlari savdogarni i shahardan j shaharga borishidagi xarajatlari bo'lsin. Har bir shahardan bir martadan o'tuvchi n ta $(i,\ j)$ tartiblashtirilgan juftligini t sikl deb ataymiz.

$$t=\left[(i_1,\ j_2),\ (i_2,\ j_2),\ldots,(i_{n-1},\ i_n),\ (i_n,\ i_1)\right].$$

Har bir $(i,\ j)$ juftlik marshrutning kommunikatsiyasini tashkil etiladi. U holda t sikl uchun marshrutning elementlari kommunikatsiyalar bo'yicha quyidagi yig'indi orqali aniqlanadi:

$$z(t)=\sum_{(i,j)\in t} c_{ij}.$$

Agar C matritsaning i nchi qator elementlaridan yoki j nchi ustun elementlaridan ularning eng kichigini ayirsak, matritsaning har bir qatorida va ustunida hech bo'lmasa bittadan nol hosil bo'ladi va yangi hosil bo'ladigan matritsa C matritsaning xossalariga ega bo'ladi. Yangi matritsa keltirilgan matritsa deyiladi. C matritsaning elementlari nomanfiyligi aniq. Keltirilgan matritsani hosil qilish uchun tanlanadigan element eng kichik element bo'lgani uchun uning elementlari ham nomanfiydir. Eng kichik elementlar yig'indisini h^k bilan belgilaymiz, k – keltirishning tartib nomeri. Keltirilgan matritsa uchun t siklidagi xarajatlarni $z^1(t)$ bilan belgilasak, $z(t)=h^1+z^1(t)$ ifoda hosil bo'ladi. Bu yerdagi h^1 berilgan matritsa uchun t sikldagi harajatlarning quyi chegarasi deyiladi. Hamma sikllar to'plamini o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratishni uchlarga ega bo'lgan daraxt ko'rinishida tasvirlash mumkin. Uchlarga bir-biriga o'tish mumkin bo'lgan $(i,\ j)$ va mumkin bo'lmagan $(\overline{i,\ j})$ shaharlar juftliklarini joylashtiriladi. $(\overline{i,\ j})$ dan o'tuvchi shox i shahardan j shaharga o'tish mumkin bo'lmagan barcha marshrutlarni o'z ichiga oladi. Masalan, $(\overline{k,\ l})$ uchdan o'tuvchi shox i shahardan j ga o'tish mumkin bo'lgan barcha marshrutlarni o'z ichiga oladi, lekin k dan l ga o'tish mumkin emasligini ko'rsatadi.

Mustaqil yechishga doir masalalalar

Quyidagi masalalarning optimal butun sonli nomanfiy yechimlari topilsin:

1. $f=3x_1+2x_2+x_3\to\min,$
$$x_1+3x_2+x_3\ge 10,\quad 2x_1+4x_3\ge 14,\quad 2x_2+x_3\ge 7,\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$$

2. $f=3x_1+2x_2+x_3\to\min,$
$$x_1+3x_2+x_3\ge 10,\quad 2x_1+4x_3\ge 14,\quad 2x_2+x_3\ge 7,\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$$

3. $f=4x_1+3x_2\to\max,$
$$8x_1+2x_2\le 88,\quad 0\le x_1\le 22,\quad 5x_2\le 90,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0.$$

4. $f=x_1+x_2\to\max,$
$$-x_1+4x_2\le 12,,\quad 4x_1-x_2\le 12,\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

5-bob. PARAMETRLI CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

Optimallashtirish masalalarini chiziqli programmalashtirish usullari bilan yechish uchun bu masalalardagi koeffitsiyentlar aniq, o'zgarmas son qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilinadi. Lekin amalda esa, ko'pchilik masalalarda bu koeffitsiyentlarning taqribiy qiymatlari yoki ularning o'zgarish oralig'i ma'lum bo'ladi. Shuning uchun chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi har bir koeffitsiyentning o'zgarishiga qanchalik bog'liqligi, ya'ni masaladagi koeffitsiyentlarning o'zgarishi uning yechimiga qanday ta'sir qilishini aniqlash masalasi qo'yiladi. Ana shunday masalalarni hal qilish parametrli chiziqli programmalashtirishning predmetini tashkil qiladi.

G sohada aniqlangan quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasidagi

$$AX \le B, \tag{1}$$

$$X \ge 0, \tag{2}$$

$$y_{max} = CX \tag{3}$$

A matritsaning elementlari mahsulotlarni chegaralangan resurslarda (B vektor koordinatalari) tayyorlanish texnologiyasini ifodalasin. Iqtisodiy ma'no jihatdan umumiy daromad maksimum bo'lishi kerak. Agar j xil mahsulotni tayyorlashda i xil resursning sarflanish normasi o'zgaruvchan, masalan mumkin bo'lgan o'zgarish chegarasi $\left[a_{ij}, a'_{ij}\right]$ bo'lsa, yuqoridagi (1) chegaraviy shartni $(A+\lambda A')X \le B$ tengsizlik bilan almashtirish kerak bo'ladi, bu yerda $A=(a_{ij})$, $A'=(a'_{ij})$ $m\times n$ tipli matritsalar bo'lib, λ - qandaydir o'zgaruvchan parametr, uning ma'nosiga keyinroq to'xtalamiz. Ishlab chiqarishni rejalashtirishning bunday qo'yilgan masalasi parametrli programmalashtirish masalalarini izlanishlariga olib keladi.

Faraz qilaylik, T davrda bir xil mahsulotlarni ishlab chiqarish va saqlash shunday tashkil qilinsinki, korxonaning umumiy xarajatlari minimal bo'lsin.

Belgilashlar kiritamiz:

s_t – t $(t=1,2,\ \dots\ ,T)$ davr boshidagi mahsulot zaxirasi;

r_t – mahsulotga bo'lgan talab;

x_t – t davrdagi ishlab chiqarish hajmi;

d – t davrda bir birlik mahsulotni saqlashga sarflangan xarajatlar;

e – birlik mahsulotni ishlab chiqarishda ishlab chiqarish vositalarini sozlashga sarflangan xarajatlar;

k – intervalda ishlab chiqarilgan mahsulotlar qisman yoki to'laligicha sarflanishi mumkin.

Ixtiyoriy k interval uchun mahsulot ishlab chiqarish hajmi va ularni saqlashni quyidagi munosabat bilan ifodalash mumkin:

$$s_k = s_0 + \sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} r_j \ge 0;\ \ k=1,2,\ \dots\ ,N.$$

Bu yerda N $[0,T]$ davrda mahsulot jo'natilgan intervallar soni, barcha $j=\overline{1,N}$ uchun $x_j \ge 0,\ r_j \ge 0,\ s_j \ge 0$, sarflangan umumiy xarajatlar quyidagi yig'indiga teng:

$\sum_{j=1}^{N} s_j d+\sum_{j=1}^{N} e y_j$, bu yerda $y_j - s_j = x_j - x_{j-1}$, $y_j \geq 0$, $z_j \geq 0$ va ularning ma'nosi: y_j ishlab chiqarishni kengaytirish, z_j ishlab chiqarishning j davri bilan $j-1$ davri orasidagi farq. Agar d va e larning qiymatlari oldindan ma'lum bo'lsa, $\lambda = \frac{e}{d}$ belgilashni kiritib, maqsad funksiyasi $f_{\min}(s,y) = \sum_{j=1}^{N}(s_j + \lambda y_j)$ ko'rinishda bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalasiga kelamiz va uning optimal yechimini simpleks usul bilan yechish mumkin. Lekin d va e lar o'zaro bog'liq holda $\lambda = \frac{e}{d}$ ham turli oraliqlarda turli qiymatlarni qabul qilishi mumkin va bu holda maqsad funksiyaning koeffitsiyentlari masalaning yechimiga katta ta'sir ko'rsatadi.

5.1. Maqsad funksiyasi parametrga bog'liq bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish

Chiziqli programmalashtirish masalasini ko'ramiz:

$$AX = B,$$

$$X \geq 0,$$

$$y_{\min} = CX.$$

Agar masalaning faqat maqsad funksiyasidagi C vektorning komponentlari λ parametrga bog'liq bo'lsa, ya'ni, $C = C' + \lambda C''$, $(\delta \leq \lambda \leq \varphi)$ ko'rinishga ega bo'lsa, berilgan masala funksiyasi parametrga bog'liq bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalasi deb ataladi.

Faraz qilaylik, quyidagi parametrli programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (i = \overline{1,m}), \qquad (5.1.1)$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,n}), \qquad (5.1.2)$$

$$y_{\min} = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + \lambda c_j'') x_j, \quad (\delta \leq \lambda \leq \varphi). \qquad (5.1.3)$$

Bu yerda: δ, φ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lib, λ parametrning o'zgarish chegaralari; c_j', c_j'', b_i – berilgan o'zgarmas sonlar.

λ ning o'zgarish sohasidagi har bir qiymati uchun shunday $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor topish kerakki, u (5.1.1) va (5.1.2) shartlarni qanoatlantirib, (5.1.3) chiziqli funksiyani minimumga erishtirsin.

Faraz qilaylik, berilgan masala kamida bitta tayanch yechimga ega bo'lsin. U holda simpleks usulni qo'llab, $\lambda = \delta$ uchun masalaning optimal yechimini topish yoki $\lambda = \delta$ da masalaning yechimi mavjud emasligini aniqlash mumkin.

A) hol. $\lambda = \delta$ da masalaning optimal yechimi topilgan bo'lsin. Chiziqli funksiyaning koeffitsiyentlari λ ning funksiyasi sifatida $c_j = c_j' + \lambda c_j''$ berilganligi sababli ixtiyoriy bazis yechimda $\Delta_j = z_j - c_j$ ayirmani ham λ ning funksiyasi sifatida ifodalash mumkin, ya'ni: $z_j - c_j = \alpha_j + \lambda \beta_j$. Topilgan optimal yechim uchun $\alpha_j + \lambda \beta_j \leq 0$ tengsizlik o'rinlidir. Bu esa

$$\alpha_j+\lambda\beta_j\le 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (5.1.4)$$

tengsizliklar sistemasining birgalikda ekanligini ko‘rsatadi. Bundan barcha $\beta_j<0$ uchun

$$\lambda\ge-\frac{\alpha_j}{\beta_j}$$

va barcha $\beta_j>0$ uchun

$$\lambda\le-\frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Belgilashlar kiritamiz:

$$\underline{\lambda}=\begin{cases}\max\limits_{\beta_j<0}(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}),\\ -\infty,\ agar\ \ \beta_j\ge 0\end{cases} \quad \text{va} \quad \overline{\lambda}=\begin{cases}\min\limits_{\beta_j>0}(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}),\\ +\infty,\ agar\ \ \beta_j\le 0.\end{cases} \qquad (5.1.5)$$

U holda (5.1.1) - (5.1.3) masalaning $\lambda=\delta$ dagi optimal yechimi λ ning $\underline{\lambda}\le\lambda\le\overline{\lambda}$ intervaldagi hamma qiymatlari uchun ham optimal yechim bo‘ladi.

Agar $\lambda=+\infty$ bo‘lsa, λ ning hamma qiymatlari uchun optimal yechim topilgan bo‘ladi va ishlash jarayoni tugaydi.

Faraz qilaylik, $\overline{\lambda}$ chekli sondan iborat bo‘lsin. U holda $\beta_k>0$ uchun $\overline{\lambda}=-\frac{\alpha_k}{\beta_k}$. Agar barcha $x_{ik}\le 0$ bo‘lsa, simpleks usulning xususiyatiga ko‘ra $\lambda>\overline{\lambda}$ bo‘lganda masalani chiziqli funksiyasi quyidan chegaralanmagan bo‘ladi. Agar kamida bitta $x_{ik}>0$ bo‘lsa, simpleks usulni qo‘llab bazisdan P_i vektor chiqarilib, uning o‘rniga P_k vektor kiritiladi. Natijada simpleks jadval o‘zgaradi, masalaning yangi yechimi topiladi.

Topilgan yangi yechim uchun quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Yangi yechim λ ning kamida bitta qiymati uchun optimal yechim bo‘ladi va agar u λ ning $\underline{\lambda}'\le\lambda\le\overline{\lambda}'$ intervaldagi hamma qiymatlari uchun optimal yechim bo‘lsa, $\underline{\lambda}'=\overline{\lambda}$ qabul qilinadi.

Isbot. Yangi yechim simpleks usul asosida topilgani uchun

$$\alpha_j'+\lambda\beta_j'\le 0,\quad j=\overline{1,n} \qquad (5.1.6)$$

tengsizliklar sistemasi birgalashgan. Haqiqatan ham, $\lambda=\overline{\lambda}$ uchun yangi kiritilgan P_k vektorga nisbatan $z_k-c_k=\alpha_k+\overline{\lambda}\beta_k$ bajariladi. Demak, $\lambda=\overline{\lambda}$ (5.1.6) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Endi har qanday $\lambda<\overline{\lambda}$ (5.1.6) tengsizliklar sistemasini qanoatlantirmasligini ko‘rsatish kerak. Buning uchun aksi bajariladi deb faraz qilaylik. Xususan, biror λ uchun (5.1.6) tengsizliklar sistemasi qanoatlantirilsin:

$$\alpha_l'+\lambda\beta_l'\le 0,\quad j=\overline{1,n}\ \text{ yoki}$$

$$\alpha_l'=-\frac{\alpha_k}{x_{lk}},\quad \beta_l'=-\frac{\beta_k}{x_{lk}},\ (x_{lk}>0) \qquad (5.1.7)$$

munosabatlarga ko‘ra $-\alpha_k-\beta_k\le 0$. $\beta_k>0$ bo‘lgani uchun oxirgi tengsizlikdan

$\lambda \geq -\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \overline{\lambda}$ hosil bo'ladi. $\overline{\lambda}$, $\underline{\lambda}$ kattaliklar λ parametrning *kritik qiymatlari*, λ ning turli qiymatlariga mos optimal yechimlar esa *kritik yechimlar* deyiladi.

Xuddi shuningdek, λ ning bir o'zgarish intervalidan boshqasiga ketma-ket o'tib borish mumkin. Bu jarayon intervallardan biri $\lambda = \varphi$ ni o'z ichiga olguncha yoki ko'rilayotgan intervaldagi λ ning qiymatlari uchun yechimning optimallik sharti bajarilmaguncha, ya'ni optimal yechim yo'qligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

B) hol. Masala $\lambda = \delta$ da yechimga ega emas. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) P_k bazisga kirishi kerak bo'lgan vektor. Shartga ko'ra, $\alpha_k + \delta\beta_k > 0$ va barcha $x_{ik} \leq 0$. Bu holda $\beta_k \geq 0$ bo'lsa, masalaning chiziqli funksiyasi λ ning har qanday qiymati uchun quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

2) $\beta_k < 0$ bo'lsa, $\alpha_k + \lambda\beta_k > 0$ tengsizlik λ ning $\lambda < \lambda_1' = -\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ qiymatlari uchun o'rinli bo'ladi. Bu holda masala λ ning $\sigma \leq \lambda < \lambda_1'$ intervaldagi qiymatlari uchun optimal yechimga ega bo'lmaydi. Lekin $\lambda = \lambda_1'$ da tekshirish kerak.

Faraz qilaylik, $\lambda_1 = \min\limits_{\beta_j > 0}\left(-\frac{\alpha_i}{\beta_j}\right)$. Bu holda topilgan yechim masalaning $\lambda_1' \leq \lambda \leq \lambda_1$ dagi yechimi bo'ladi va masalani yechish jarayoni A holdagidek davom ettiriladi.

Agar $\alpha_j + \lambda_1'\beta_j \leq 0$ tengsizlik hamma j lar uchun bajarilmasa $\max(\alpha_j + \lambda_1'\beta > 0)$ qiymatga mos keluvchi vektor bazisga kiritilib, yangi yechimga o'tib boriladi yoki yechim yo'qligi aniqlanadi.

Yuqoridagilardan quyidagilarni xulosa qilish mumkin:

- maqsad funksiyasi parametrga bog'liq bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usul yordamida yechish mumkin;
- masalaning optimal yechimi parametrning boshlang'ich chegara qiymati uchun aniqlanadi va kritik qiymatlar intervali tayinlanadi;
- har bir interval uchun tegishli optimal yechim mavjudligi aniqlanib boriladi.

5.2. Ikkilangan parametrli chiziqli programmalashtirish masalasi

Maqsad funksiyasi parametrga bog'liq bo'lgan har qanday chiziqli programmalashtirish masalasiga ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasini mos qo'yish mumkinki, uning chegaraviy shartlaridagi ozod hadlar parametrga bog'liq bo'lib qoladi.

Ikkilangan masalaning qo'yilishi quyidagicha:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i + tb_i',\ t \in [\sigma, \rho],\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirib, $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ chiziqli maqsad funksiyaga minimum (maksimum) qiymat beruvchi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorni aniqlash kerak.

σ, ρ – haqiqiy sonlar.

Faraz qilaylik, qo‘yilgan masaladagi t parametrining boshlang‘ich σ qiymatidagi optimal yechimi $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ topilgan bo‘lsin. Har bir $\overline{x}_i$ koordinata σ ga nisbatan chiziqli funksiyadir, ya’ni:

$$\overline{x}_i = q_i + \sigma p_i \geq 0 \qquad (5.2.1)$$

bo‘lgani uchun bu tengsizliklar sistemasi birgalashgan.

Agar:

1) $p_i = 0$ bo‘lsa, $\overline{X}$ yechim barcha t lar uchun optimal yechim bo‘ladi.
2) $p_i \geq 0$ bo‘lsa, $\overline{X}$ yechim barcha $t \geq \sigma$ lar uchun optimal yechim bo‘ladi.
3) $p_i \leq 0$ bo‘lsa, $\overline{X}$ yechim barcha $t \leq \sigma$ lar uchun optimal yechim bo‘ladi.

Umumiy holda, p_i musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin. Shuning uchun $\overline{X}$ yechim optimal bo‘ladigan t ning qiymatlar intervalini aniqlash kerak bo‘ladi:

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\limits_{p_i>0}\left(-\dfrac{q_i}{p_i}\right), & agar\ \ p_i < 0\ \ mavjud\ bo'lsa, \\ -\infty, & agar\ barcha\ i\ lar\ uchun\ \ p_i \geq 0\ bo'lsa; \end{cases}$$

$$\overline{t} = \begin{cases} \min\limits_{p_i>0}\left(-\dfrac{q_i}{p_i}\right), & agar\ \ p_i > 0\ \ mavjud\ bo'lsa, \\ +\infty, & agar\ barcha\ i\ lar\ uchun\ \ p_i \leq 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

Quyi chegara $\underline{t}$ uchun $\overline{t} \geq -\dfrac{q_i}{p_i}$, yuqori chegara $\overline{t}$ uchun tsa $\overline{t} \leq -\dfrac{q_i}{p_i}$ o‘rinlidir.

Yuqoridagi munosabatlardan $\overline{X}$ yechim t ning $\underline{t} \leq t \leq \overline{t}$ intervaldagi barcha qiymatlari uchun optimal yechim bo‘ladi.

Teorema. Agar $\overline{t} = -\dfrac{q_i}{p_i}$ ga mos P_l vektor bazisdan chiqarilsa va $\dfrac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \min\limits_{x_{lj}<0} \dfrac{z_j - c_j}{x_{lj}}$ tenglikka mos P_k vektor bazisga kiritilsa, t ning hech bo‘lmasa bitta qiymati uchun yangi optimal yechim hosil bo‘ladi. Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Misol. Parametrli chiziqli programmalashtirish masalasi yechilsin:

$$y_\lambda(X) = -2\lambda x_1 - (2-4\lambda)x_2 + \lambda x_3 \rightarrow \min, \ \lambda \in (-\infty, +\infty),$$

$$x_1 - x_2 - 2x_4 = 1,$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{(1,4)}$$

Chegaraviy shartlardagi har bir tenglamaga bittadan (x_5, x_6, x_7) sun’iy bazis o‘zgaruvchi kiritamiz, u holda maqsad funksiya sun’iy bazis usuli asosida o‘zgaradi:

$$y_\lambda(X) = -2\lambda x_1 - (2-4\lambda)x_2 + \lambda x_3 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min, \ \lambda \in (-\infty, +\infty),$$

$$x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_1+x_2+5x_3+x_6=2,$$
$$x_1-2x_2+x_3+x_4+x_7=1,$$
$$x_j\geq 0 \quad j=(\overline{1,7}),$$

M-katta musbat son deb hisoblangani

Masalani simpleks jadvalga joylashtiramiz:

1-jadval

Bazis vektor	$c^{базис}$	P_0	-2λ	$-2+4\lambda$	λ	0	M	M	M
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	M	1	1	-1	0	-2	1	0	0
P_6	M	2	1	1	**5**	0	0	1	0
P_7	M	1	1	-2	1	1	0	0	1
Δ_j			$3M+2\lambda$	$-2M+2-4\lambda$	$6M-\lambda$	$-M$	0	0	0

Sun'iy bazis usuliga ko'ra M-katta musbat son deb hisoblangani uchun simpleks usul algoritmiga ko'ra:

$\max\limits_j \Delta_j=\max(3M+2\lambda,\ -2M+2-4\lambda,\ 6M-\lambda,\ -M)=6M-\lambda=\Delta_3$ (1-jadvalda qora qilib ajratilgan). Shuning uchun P_3 vektorni bazisga kiritamiz, uchinchi ustun elementlariga nisbatan eng kichik aniqlovchi koeffitsiyent $\min\limits_{j-1}\left(1:1,\ \frac{2}{5}:\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}:\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}$ ga mos keluvchi P_6 vektorni bazisdan chiqaramiz (yo'naltiruvchi element - 5 ham qora bilan ajratilgan). Sun'iy bazis vektorlar bazisdan chiqib ketguncha simpleks jarayonni davom ettiramiz (bazisdan chiqqan sun'iy bazis vektorlar keyingi jadvallarda yozilmasligi mumkin):

2-jadval

Bazis vektor	$c^{базис}$	P_0	-2λ	$-2+4\lambda$	λ	0	M	M
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7
P_5	M	1	1	-1	0	-2	1	0
P_3	λ	2/5	1/5	1/5	1	0	0	0
P_7	M	3/5	**4/5**	-11/5	0	1	0	1
Δ_j			**(9/5)** $M+$ **(11/5)** λ	(-16/5)M 2-(19/5) λ	0	$-M$	0	0

$\max\Delta_j=\left(\frac{9}{5}M+\frac{11}{5}\lambda,\ -\frac{16}{5}M+2-\frac{19}{5}\lambda\right)=\frac{9}{5}M+\frac{11}{5}\lambda=\Delta_1$ ga mos P_1 vektorni bazisga kiritib, P_7 ni bazisdan chiqaramiz, chunki uning aniqlovchi koeffitsiyenti eng kichik.

3-jadval

Bazis vektor	$c^{базис}$		-2λ	$-2+4\lambda$	λ	0	M
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_5	M	1/4	0	7/4	0	-13/4	1
P_3	λ	1/4	0	3/4	1	-1/4	0
P_1	-2λ	3/4	1	-11/4	0	5/4	0
Δ_j			0	(7/4) M 2- (9/4) λ	0	(-13/4) M (-11/4)λ	0

4-jadval

Bazis vektor	$c^{базис}$	P_0	-2λ	$-2+4\lambda$	λ	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	$-2+4\lambda$	1/7	0	1	0	-13/7
P_3	λ	1/7	0	0	1	8/7
P_1	-2λ	8/7	1	0	0	-27/7
Δ_j			0	0	0	26/7- 10/7) λ

4-jadvalda λ ning quyi chegarasida optimallik sharti bajarildi, ya'ni $\lambda=-\infty$ da 26/7 - 10/7$\lambda \le 0$. Bu tengsizlikni yechib, λ ning yuqori chegarasini topamiz: $\bar{\lambda}_1=-13/5$. Demak, $X=(8/7, 1/7, 1/7)$- yechim λ ning $-\infty<\lambda\le-13/5$ oraliqdagi qiymatlari uchun optimaldir, $f(X)=-2/7-(11/7)\lambda$.

λ ning yangi o'zgarish oralig'iga tegishli optimal yechimni topish uchun P_4 vektorni P_3 ning o'rniga kiritamiz.

5-jadval

Bazis vektor	$c^{базис}$	P_0	-2λ	$-2+4\lambda$	λ	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	$-2+4\lambda$	3/8	0	1	13/8	0
P_4	0	1/8	0	0	7/8	1
P_1	-2λ	13/8	1	0	27/8	0
Δ_j			0	0	-13/4 -(5/4) λ	0

-13/5<λ<∞ qiymatlarda $X^{оптимал}=(13/8, 3/8, 0, 1/8)$ va $f_{\min}(\lambda)=-3/4-(7/4)\lambda$.

6-bob. TRANSPORT MASALASI

6.1. Transport masalasining qo‘yilishi, matematik modeli va asosiy teoremalar

Transport masalasi chiziqli programmalashtirish masalalari orasida nazariy va amaliy nuqtai nazardan eng yaxshi o‘zlashtirilgan masalalardan biri bo‘lib, undan sanoat va qishloq xo‘jaligi mahsulotlarini tashishni optimal rejalashtirish ishlarida muvaffaqiyatli ravishda foydalanilmoqda.

Transport masalasi maxsus chiziqli programmalashtirish masalalari sinfiga tegishli bo‘lib, chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishning simpleks usulidan farqli ravishda transport masalasini yechish uchun uning maxsus xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan. Masalaning chegaralovchi shartlaridagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan (a_{ij}) matritsaning elementlari 0 va 1 raqamlardan iborat bo‘ladi. Transport masalasining matematik modelini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkinligi bizga ma’lum:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \ (i=\overline{1,m}), \tag{6.1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \ (j=\overline{1,n}), \tag{6.1.2}$$

$$x_{ij} \geq 0, (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}), \tag{6.1.3}$$

$$y_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \tag{6.1.4}$$

Bu yerdagi (6.1.1) shart - har bir ishlab chiqaruvshi punktlardagi mahsulot to‘la taqsimlansin, (6.1.2) - esa har bir iste’mol qiluvchi punktning talabi to‘la qanoatlantirilsin degan ma’nolarni bildiradi. Mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan umumiy transport xarajatlari (6.1.4) chiziqli funksiya orqali ifodalanadi.

Masaladagi har bir a_i, b_j, c_{ij} manfiy bo‘lmagan sonlar. Agar (6.1.1) – (6.1.4) masalada

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \tag{6.1.5}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, ya’ni ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig‘indisi unga bo‘lgan talablar yig‘indisiga teng bo‘lsa, u holda bu masalani yopiq modelli transport masalasi, aks holda esa ochiq modelli transport masalasi deyiladi. Lekin har qanday ochiq transport masalasini yopiq masalaga keltirish mumkin. Buni ikki holda ko‘rish mumkin:

1-hol. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Bu holda masala shartiga aslida mavjud bo‘lmagan (fiktiv) n + 1 – inchi shunday iste’molchi kiritiladiki, uning mahsulotga bo‘lgan talab birligi $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ - ga teng va $c_{i,n+1} = 0$, $i=\overline{1,m}$.

2-hol. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Yuqoridagiga o‘xshash, bu holda mahsulot miqdori $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ - ga teng bo‘lgan $m+1$ - chi ta’minotchi masala shartiga kiritiladi va $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Har ikkala holda ham hosil bo‘ladigan kengaytirilgan transport masalasi boshlang‘ich masalaga ekvivalent bo‘ladi.

Lekin, bu modeldagi (6.1.3) shartga qo‘shimsha $x_{ij} \le d_{ij}$ shart ham qo‘yilishi mumkin. Bunday masalalarga o‘tkazish qobiliyati chegaralangan masalalar deyiladi va ularni yechishga mo‘ljallangan maxsus usullar mavjud. Ko‘p indeksli (tranzitli) transport masalalari ham katta ahamiyatga ega. Bunga misol qilib quyidagi masalani ko‘raylik.

Masala. Biror viloyatning turli tumanlarida l ta paxtani qayta ishlash zavodlari mavjud. Har bir zavod m sortli paxtani qayta ishlashi mumkin. Zavodlarning qayta ishlagan paxtalarini n ta iste’molchiga taqsimlashi kerak. Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

a_{ik} bilan i- chi zavoddan k- inshi iste’molchiga hamma sortlar bo‘yicha tashilishi kerak bo‘lgan paxta tonnasini;

b_{jk} bilan k- chi iste’molchiga zarur bo‘lgan j - sortli paxta tonnasini;

d_{ij} bilan i- chi zavoddan tashib ketiladigan j - sortli paxta tonnasini;

x_{ijk} bilan i- chi zavodda qayta ishlangan j - sortli paxtani k - chi iste’molchiga tashilgan tonnasini;

c_{ijk} bilan i- chi zavodda qayta ishlangan j - sortli paxtaning bir tonnasini k - chi iste’molchiga tashish uchun sarflangan transport xarajatni belgilaylik.

$x_{ijk} \ge 0$ o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular quyidagi

$$\sum_j x_{ijk} = a_{ik}, \quad \sum_i x_{ijk} = b_{jk}, \quad \sum_k x_{ijk} = d_{ij}$$

sistemani qanoatlantirsin va

$$y = \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk} \quad \text{funksiya minimumga erishsin.}$$

Qo‘yilgan masala ma’noga ega bo‘lishi uchun, albatta quyidagi tengliklar bajarilishi zarur:

$$\sum_k a_{ik} = \sum_j d_{ij}, \quad \sum_i a_{ik} = \sum_j b_{jk}, \quad \sum_k d_{ij} = \sum_k b_{jk}.$$

Endi yuqorida berilgan (6.1.1),(6.1.4) shartlar bilan berilgan transport masalasining yechimlari haqidagi teoremalar bilan tanishamiz.

1-teorema. Har qanday (6.1.1)–(6.1.4) ko‘rinishdagi yopiq modelli transport masalasi yechimga ega.

Isbot. Shartga ko‘ra $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A > 0$.

U holda,

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}, \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

berilgan transport masalasining yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \geq 0, \ chunki\ \ a_i \geq 0, \ \ b_j \geq 0, \ \ A > 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j.$$

Demak, $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ qo'yilgan transport masalasining hamma shartlarini qanoatlantiradi, shuning uchun bu miqdor masalaning yechimi bo'ladi.

2-teorema. Transport masalasining shartlaridan tuzilgan matritsaning rangi $m+n-1$ ga teng.

Isbot. Haqiqatdan ham, bu matritsa kengaytirilgan holda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

Bu matritsaning ixtiyoriy qatori (masalan 1-qatori) qolgan qatorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'rsatish mumkin. $m+1, m+2, \ldots, m+n$ qatorlarni o'zaro qo'shib, natijasidan $2, 3, \ldots, (m+n)$ qatorlarni ayirsak 1-qatorni hosil qilamiz. Demak, A matritsaning rangi $r(A) \leq m+n-1$. Endi $2, 3, \ldots, (m+n)$- qatorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemani tashkil etishini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sonlar olib ularga mos ravishda $2, 3, \ldots, (m+n)$ - qatorlarni ko'paytirib o'zaro qo'shamiz va natijasiga tenglaymiz. Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \ldots + 0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + \ldots + 0\cdot\beta_n = 0, \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \ldots + 0\cdot\alpha_m + 0\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_2 + \ldots + 0\cdot\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \ldots + 0\cdot\alpha_m + 0\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + \ldots + 1\cdot\beta_n = 0 \end{cases} \quad (6.1.6)$$

va

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \ldots + 0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + \ldots + 0\cdot\beta_n = 0, \\ 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + \ldots + 0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_2 + \ldots + 0\cdot\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \ldots + 1\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + \ldots + 0\cdot\beta_n = 0 \end{cases} \quad (6.1.7)$$

(6.1.6) sistemadan

$$\beta_1 = 0, \ \beta \ = 0, \ldots, \beta_n = 0 \quad (6.1.8)$$

ekani va (6.1.7) sistemadan

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_1 = 0, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m + \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (6.1.9)$$

kelib chiqadi. Bundan (6.1.8) ga asosan $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$ bo'ladi. Demak, A matritsaning $m+n-1$ ta qatori o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemani tashkil etiladi va demak $r\ (A) \leq n+m-1$ bo'ladi.

3-teorema. Transport masalasining har qanday yechimidagi x_{ij} $(x_{ij} > 0)$ larning soni $m + n - 1$ dan ortmaydi. Bunday x_{ij} larga mos P_{ij} vektorlar chiziqli bog'liqsiz bo'ladi.

4-teorema. Agar masaladagi barcha a_i va b_j lar butun sonlardan iborat bo'lsa, transport masalasining yechimi butun sonli bo'ladi.

Teoremaning isbotini transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimlarini topish usullaridan ko'rish mumkin.

5-teorema. Ixtiyoriy transport masalasining optimal yechimi mavjuddir.

Isbot. 1-teoremaga asosan masalaning kamida bitta yechimi mavjuddir. (6.1.1), (6.1.2) shartlardagi koeffitsiyentlar va barcha a_i va b_j lar musbat butun son bo'lganligi sababli x_{ij} ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi va uning qiymati mos a_i va b_j larning qiymatidan oshmaydi.

Shunday qilib, transport masalasi yechimlaridan tashkil topgan to'plam bo'sh to'plam bo'lmaydi, u chegaralangan to'plam bo'ladi. Demak, transport masalasi optimal yechimga ega.

6.2. Transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimini topish usullari

Boshqa chiziqli programmalashtirish masalalari kabi, transport masalasini yechish jarayoni boshlang'ich tayanch yechimini topish bilan boshlanadi. Transport masalasining boshlang'ich yechimini topish usullari ko'p bo'lib, quyida «shimoli-g'arb burchak» usuli va «minimal element» usuli bilan tanishamiz.

Shimoliy-g'arb burchak usuli. Faraz qilaylik yopiq (biz quyida faqat yopiq transport masalalarini yechishni ko'ramiz) transport masalasining shartlari quyidagi transport jadvaliga joylashtirilgan bo'lsin.

a_i / b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

«Shimoliy-g'arb burchak» usulining g'oyasi quyidagilardan iborat. Eng avval jadvalning shimoliy-g'arbida joylashgan (1,1) katakda taqsimlanishi kerak bo'lgan mahsulot miqdori (x_{11} noma'lumning qiymati)ni aniqlaymiz.

Agar birinchi qadamda 1) $a_1 < b_1$ bo'lsa, $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1$ va $j = 2,3,4,...,n$ lar uchun $x_{1j} = 0$ bo'ladi. 2) $a_1 > b_1$ bo'lsa, $x_{11} = \min(a_1, b_1) = b_1$ va barcha $i = 2,3,4,...,m$ lar uchun $x_{i1} = 0$ bo'ladi. 3) $a_1 = b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1 = b_1$. Faraz qilaylik, bularning birortasi bajarilsin: $a_1 < b_1$ (yoki $a_1 > b_1$).

Bu holda 1-qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1-qadam

$$\begin{bmatrix} & 0 & b_2 & b_3 \dots b_n \\ a_1 - b_1 & x_{11} = b_1 & x_{12} & x_{13} \dots x_{1n} \\ a_2 & 0 & x_{22} & x_{23} \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & 0 & x_{m2} & x_{m3} \dots x_{mn} \end{bmatrix} \text{ yoki } \begin{bmatrix} & b_1 - a_1 & b_2 & b_3 \dots b_n \\ 0 & x_{11} = a_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} \dots x_{mn} \end{bmatrix}$$

Endi ikkinchi qatordagi a_i elementning qiymatini topamiz:

$a_2 > b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21} = b_1 - a_1$ va $x_{i1} = 0$, $(i = \overline{3,n})$, lekin bu nollar transport jadvalining tegishli katagida ko'rsatilmaydi;

$a_2 < b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21} = a_2$ va $x_{2j} = 0, (j = \overline{2,n})$. Bu holda ham nollar transport jadvalining tegishli katagida ko'rsatilmaydi.

Xuddi shunday har bir qadamda birorta x_{ij} ning qiymati topiladi va a_i yoki b_j nolga aylantiriladi.

Uchinchi holda: $x_{ij} = a_i = b_j$. Yuqoridagi 6.1 mavzuning uchinchi teoremasidagi transport masalasining har qanday yechimidagi x_{ij} $(x_{ij} > 0)$ larning soni $m + n - 1$ dan ortmaydi degan sharti bajarilishi uchun jadvalning $(i+1, j)$ katagi $x_{i+1,j} = 0$ qiymat bilan, yoki $(i, j+1)$ katagi $x_{i,j+1} = 0$ qiymat bilan to'ldiriladi.

Bu jarayon barcha a_i va b_j lar nolga aylanguncha takrorlanadi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati a_i va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordami bilan topiladi, shuning uchun a_i va b_j lar butun bo'lganda topilgan tayanch yechim butun sonli bo'ladi. Bundan tashqari, yuqoridagi 3-teoremaga asosan tayanch yechimdagi noldan farqli x_{ij} noma'lumlar soni m + n - 1 dan oshmaydi. Bu usulni yaxshiroq tushunish uchun quyidagi misolni ko'raylik.

Misol. Bir xil mahsulotlarga ega bo'lgan uchta ta'minotchining mahsulot miqdorlari: $a_1 = 120$, $a_2 = 130$, $a_3 = 110$ birliklarni tashkil qilsin. Bu mahsulotlarga talab birliklari: $b_1 = 115$, $b_2 = 135$, $b_3 = 110$. Ta'minotchilardan iste'molshilarga bir birlik mahsulot tashishga sarflanadigan transport xarajatlar matritsasi berilgan:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 5 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Masalaning boshlang'ich yechimini shimoliy-g'arb burchak usulida topish uchun masala shartlarini transport jadvalga joylashtiramiz va jadvalning o'rta kataklariga ta'minotchilardan iste'molchilarga yetkazib berilishi mumkin bo'lgan mahsulot miqdorini yozamiz.

$a_i \backslash b_j$	115	135	110
120	4 115	8 5	3
130	5	9 130	6 0
110	5	8	3 110

Yuqoridagi 3-teoremaga ko'ra transport jadvalida mahsulot taqsimlangan (to'ldirilgan) kataklar soni $m + n - 1$ ga teng bo'lishi kerakligini hisobga olib, jadvalning (3,2) katagiga $x_{23} = 0$ miqdorda mahsulot taqsimlandi. Demak, berilgan masalaning boshlang'ich yechimi:

$$x_{11} = 115, \ x_{12} = 5, \ x_{22} = 130, \ x_{33} = 110.$$

Minimal xarajatlar usuli. Transport masalasining yechimini topish uchun kerak bo'ladigan iteratsiyalar soni boshlang'ich tayanch yechimni tanlashga bog'liq. Optimal yechimga yaqin bo'lgan tayanch yechimni topish masalaning optimal yechimini topishni tezlashtiradi. Adabiyotda transport masalasining boshlang'ich yechimini topish uchun transport xarajatlarini nazarga oluvchi ko'p usullar ma'lum. Ularning hammasi shimoliy-garb burchak usulining transport xarajatlarini nazarga oluvchi modifitsirlangan holidir.

Minimal xarajatlar usulining g'oyasi quyidagilardan iborat.

Iste'molchi va ta'minotchilarning soniga mos (m+1,n+1) tipli transport jadvali tuziladi.

a_i / b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Transport masalasining berilganlari transport jadvaliga joylashtirilib, (c_{ij}) - matritsaning $\min_{i,j} c_{ij} = c_{i_1 j_1}$ elementi topib belgilanadi. Agar bunday elementlar bir nechta bo'lsa, ulardan ixtiyoriy biri tanlanadi.

U holda $\min_{i,j} c_{ij} = c_{i_1 j_1}$ ning qiymati x_{i1} ёки x_{j2}= $\min(a_{i1} b_{j1})$ ko'rinishda aniqlanadi. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1. $a_{i_1} \le b_{j_1}$ Bu holda i_1 qatorning barcha $x_{i_1 j}(j \neq j_1)$ elementlari 0 ga teng, bunday holda i_1 qator e'tibordan chetda qoldiriladi, ya'ni uning kataklariga mahsulot taqsimlanmaydi.

2. $a_{i_1} > b_{j_1}$ Bu holda esa j_1 ustunning barcha $x_{i,j_1}(i \neq i_1)$ elementlari 0 bo'ladi va j_1 ustun kataklariga mahsulot taqsimlanmaydi.

Ma'lumki, yangi matritsadagi ustun va qatorlar soni C matritsanikidan bittaga kam bo'ladi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi C matritsa uchun bajarilgan ishlar yangi matritsa uchun bajariladi.

m ta ishlab chiqaruvshi punktni n ta iste'mol qiluvchi punktga bog'lovchi transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimini topish uchun minimal xarajatlar usulida n + m − 1 ta qadamdan iborat ishlarni bajarish kerak. Yuqoridagi shimoliy-g'arb burchak usulida ko'rilgan transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimini minimal element usulini qo'llab topaylik.

Misol.

$a_i \backslash b_j$	115	135	110
120	4 10	8	3 110
130	5 105	9 25	6
110	5	8 110	3

Avval eng kichik transport xarajatli ($c_{13} = 3$) katakka $x_{13} = 110$ birlik mahsulot taqsimlaymiz. Uchinchi iste'molchining mahsulotga bo'lgan talabi qondirilgani uchun uchinchi ustunning boshqa qatorlariga mahsulot taqsimlanmaydi, ya'ni bu ustunning ikkinchi, uchinchi qatorlari e'tibordan chetda qoldiriladi. Endi keyingi kichik transport xarajatli (kichik elementli) katakni mahsulot taqsimlashga tanlaymiz. $c_{12} = 4$ bo'lgan (1,2) katakka mahsulot taqsimlaymiz. $a_1 - b_3 = 120 - 110 = 10$ va $b_1 = 115$ sonlarining kichigini $x_{12} = 10$ deb qabul qilamiz. Birinchi ta'minotchining mahsuloti taqsimlab bo'lingani uchun birinchi qator boshqa qaralmaydi. $c_{21} = 5$ bo'lgan (2,1) katakka $x_{21} = 105$ birlik mahsulot taqsimlaymiz, $x_{11} + x_{21} = 10 + 105 = 120 = b_1$ bo'lgani uchun birinchi ustunga boshqa mahsulot taqsimlanmaydi. Mahsulot taqsimlash jarayonini ta'minotchilarning mahsulotlari to'la taqsimlanguncha va ikkinchi iste'molchining ham talabi qondirilguncha davom etib, transport masalasining boshlang'ich yechimini topamiz: $x_{11} = 10$, $x_{13} = 110$, $x_{21} = 105$, $x_{22} = 25$, $x_{32} = 110$.

Berilgan transport masalasining shimoliy-g'arb burchak usulida va hozir ko'rilgan minimal element usulida topilgan yechimlaridagi umumiy transport xarajatlarni solishtiraylik:

1) $y = 115 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 130 \cdot 9 + 110 \cdot 3 = 2000$ shimoliy-g'arb burchak usulida topilgan $x_{11} = 115$, $x_{12} = 5$, $x_{22} = 130$, $x_{33} = 110$ - yechimdagi umumiy transport xarajat.

2) $y_1 = 10 \cdot 4 + 110 \cdot 3 + 105 \cdot 5 + 25 \cdot 9 + 110 \cdot 8 = 2000$ - minimal element usulida topilgan $x_{11} = 10$, $x_{13} = 110$, $x_{21} = 105$, $x_{22} = 25$, $x_{32} = 110$ - yechimdagi umumiy transport xarajat.

Bu misolimizda har ikkala usulda ham umumiy transport xarajatlar teng bo'ldi, lekin bunday tenglik har qanday transport masalasi uchun bajariladi degan xulosani keltirib chiqarmaydi. Bunga misol qilib yana bir transport masalasini ko'raylik.

Shimoliy-g'arb burchak usulida mahsulot taqsimlangan masala:

$a_i \backslash b_j$	120	145	115
100	4 100	2	3
150	3 20	7 130	6
130	5	8 15	10 115

Boshlang'ich tayanch yechim: $x_{11}=100,\ x_{21}=20,\ x_{22}=130,\ x_{32}=15,\ x_{33}=115,$

$$y=100\cdot4+20\cdot3+130\cdot7+15\cdot8+115\cdot10=2640.$$

Minimal element usulida mahsulot taqsimlangan masala:

$a_i \backslash b_j$	120	145	115
100	4	2 100	3
150	3 120	7 30	6
130	5	8 15	10 115

Boshlang'ich tayanch yechim: $x_{12}=100,\ x_{21}=120,\ x_{22}=30,\ x_{32}=15,\ x_{33}=115,$

$$y_1=100\cdot2+120\cdot3+30\cdot7+15\cdot8+115\cdot10=2040.$$

Boshlang'ich yechim qanday tuzilganidan qat'iy nazar (hatto optimal yechim turlicha bo'lishi mumkin), transport masalasining umumiy minimal (optimal) transport xarajatlari yagonadir.

6.3. Transport masalasining yechimini optimallikka tekshirishning potensiallar usuli

Transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimidan boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi tayanch yechimlarga o'tib borib, chekli sondagi iteratsiyadan so'ng masalaning optimal yechimini topish masalasini hal qilishda potensiallar usulidan foydalanish mumkin. Har bir iteratsiyada topilgan tayanch yechim optimal yechim ekanini tekshirish uchun har bir mahsulot ishlab chiqaruvchi (ta'minotchi) va iste'mol qiluvchi (iste'molchi) punktga uning potensiali deb ataluvshi u_i va v_j sonlar mos qo'yiladi. Bu potensiallar shunday tanlanadiki, o'zaro bog'langan ta'minotchi va iste'molchilarga mos keluvshi potensiallar yig'indisi c_{ij} ga teng bo'lishi kerak.

Teorema. Transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ optimal yechimiga

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij}, \ (x_{ij}^* > 0), \qquad (6.3.1)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $n + m$ ta u_i^* va v_j^* potensiallar mos keladi.

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Potensiallar usulining algoritmi quyidagilardan iborat:

1. Transport masalasining shartlari (agar berilgan masala ochiq transport masalasi bo'lsa u yopiq transport masalasiga keltiriladi) transport jadvaliga joylashtiriladi va yuqorida ko'rilgan usullarning biridan foydalanib, boshlang'ich tayanch yechim topiladi.

2. Topilgan tayanch yechimni optimal yechim ekanligini tekshirish uchun har bir to'ldirilgan ($x_{ij} > 0$) katakcha uchun $u_i + v_j = c_{i,j}$ potensial tenglamalar tuziladi. Ma'lumki, transport masalasining yechimidagi mahsulot miqdorini bildiruvchi o'zgaruvchilar (mahsulot taqsimlangan kataklar) soni $n+m$-1 ta bo'lishi kerak. Demak, potensial tenglamalar sistemasi $n+m$ ta noma'lumli $n+m$-1 tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ortiq bo'lganligi sababli, sistema cheksiz ko'p yechimlidir. Yechimlardan ixtiyoriy birini topish uchun potensiallarning ixtiyoriy bittasiga ixtiyoriy qiymat, soddalik uchun nol qiymat berib, qolganlarining qiymatlarini birin-ketin topish mumkin.

Potensiallarning son qiymatlari aniqlab bo'lingach, barcha bo'sh kataklar uchun $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ hisoblanadi. Agar barcha i va j lar uchun

$$\Delta_{ij} \le 0, \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, transport masalasining topilgan yechimi optimal yechim bo'ladi.

3. Agar i va j larning kamida bir qiymati uchun $\Delta_{ij} > 0$ tengsizlik bajarilsa, tayanch yechimdan yangi yechimga o'tiladi. Buning uchun $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{lk}$ shartni qanoatlantiruvchi (l,k) katakcha mahsulot taqsimlash uchun (vaqtincha noma'lum bo'lgan θ son bilan) belgilanadi. So'ngra soat strelkasi bo'yicha yoki unga qarama-qarshi (bir xil) yo'nalishda (l, k) katakchadan boshlab harakat qilib, uchlari to'ldirilgan kataklarga to'g'ri keluvchi to'g'ri burchakli yopiq kontur hosil qilinadi va konturning uchlariga (l,k) katakchadan boshlab tartib bilan almashinuvchi (+) va (-) ishoralar qo'yib boriladi. Natijada K - ta uchlarga ega bo'lgan kontur hosil bo'ladi:

$$K = K^- \cup K^+,$$

bu yerda K^-, K^+ - (-) va (+) ishorali katakchalar soni. θ ning son qiymati quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$\theta = \min_{x_{ij} \in K^-} x_{ij} = x_{pq}.$$

4. Yangi tayanch yechim aniqlanadi, konturning (+) ishora qo'yilgan uchlari to'g'ri kelgan kataklardagi mahsulot miqdorlariga θ ning qiymati qo'shiladi, (-) ishoradagilaridan bu qiymat ayriladi. Konturning uchlariga to'g'ri kelmagan mahsulot miqdorlari o'zgartirilmaydi.

Topilgan yangi tayanch yechim uchun yana qaytadan potensiallar sistemasi tuziladi va yangi yechimning optimal yechim bo'lishlik sharti tekshiriladi. Agar yangi tayanch yechim optimal yechim bo'lmasa, yana qaytadan 3 - 4 punktlarda bajarilgan ishlar takrorlanadi. Takrorlanish jarayoni optimal yechim topilguncha, ya'ni transport jadvalidagi barcha bo'sh kataklar uchun

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$$

shart bajarilguncha davom etadi.

Misol. Transport jadvalida berilgan quyidagi masalaning boshlang'ich yechimini shimoliy-g'arb burchak usulida topib, optimal yechimni potensiallar usuli yordamida aniqlaylik.

1-jadval

a_i/b_j	30	20	10	u_i
20	1 - 20	3 1 $+\theta$	6 1	0
15	2 + 10	5 - 5	7 1	1
25	4 2	5 15	8 10	1
v_j	1	4	7	

Boshlang'ich tayanch yechim:

$$x_{11} = 20,\ x_{21} = 10,\ x_{22} = 5,\ x_{32} = 15,\ x_{33} = 10.$$

Bu yechimga mos potensial tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$$u_1 + v_1 = 1,$$
$$u_2 + v_1 = 2,$$
$$u_2 + v_2 = 5,$$
$$u_3 + v_2 = 5,$$
$$u_3 + v_3 = 8.$$

Sistemadagi u_1 ning qiymatini 0 ga teng deb olaylik. U holda potensiallarning $u_2 = 1, u_3 = 1, v_1 = 1, v_2 = 4, v_3 = 7$ qiymatlarini hosil qilamiz, hamda mahsulot taqsimlanmagan (bo'sh) kataklar uchun $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ formula yordamida topilgan $\Delta_{12} = 1,\ \Delta_{13} = 1,\ \Delta_{23} = 1,\ \Delta_{31} = -2$ qiymatlarni 1-jadvalning mos kataklarini yuqori o'ng burchaklariga joylashtiramiz. Bu yerda $\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 1$ bir xil eng katta qiymat bo'lgani uchun $\min(c_{12} = 3,\ c_{13} = 6,\ c_{31} = 7) = 3$ ga mos (1, 2) katakka θ noma'lum sonni yozamiz va uning qiymatini aniqlaymiz: $\theta = \min(x_{11} = 20,\ x_{22} = 5) = 5$. $x_{22} = 5$ bo'lgan (2, 2) katakni bo'shatamiz, "+" ishora qo'yilgan kataklardagi mahsulot miqdorlariga 5 birlik qo'shamiz, "-" ishoradagilardan 5 birlikni ayiramiz.

$\theta=\min(x_{11}=20,\ x_{22}=5)=5$. $x_{22}=5$ bo'lgan (2, 2) katakni bo'shatamiz, "+" ishora qo'yilgan kataklardagi mahsulot miqdorlariga 5 birlik qo'shamiz, "-" ishoradagilardan 5 birlikni ayiramiz. Natijani yangi ikkinchi transport jadvaliga ko'chiramiz.

2-jadval

a_i/b_j	30	20	10	u_i
20	1 15	3 5	6 0	0
15	2 15	5 -1	7 0	1
25	4 -1	5 15	8 10	2
v_j	1	3	6	

2- jadval uchun potensial qiymatlar hamda bo'sh kataklar uchun Δ_{ij} - larning qiymatlarini hisoblaymiz. 2-jadvalda barcha i, j lar uchun $\Delta_{ij}<0$ tengsizlik bajarildi. Demak, quyidagi yechim berilgan transport masalasining optimal yechimi bo'ladi:

$$x_{11}=15,\ x_{12}=5,\ x_{21}=15,\ x_{32}=15,\ x_{33}=10,$$
$$y_{\min}=1\cdot15+3\cdot5+2\cdot15+5\cdot15+8\cdot10=215.$$

6.4. Transport masalasini yechishning Brudno usuli

Agar potensiallar usulida boshlang'ich reja tuzib olinishi kerak bo'lsa, quyida ko'riladigan usulda mahsulot taqsimoti bir transport jadvalidan yangisiga o'tishda orttirib boriladi. Bu usulning algoritmi takrorlanuvchan quyidagi amallar ketma-ketligini o'z ichiga oladi:

1. Masalaning berilganlarini tayyorlash.

Transport masalasining berilganlari jadvalga joylashtiriladi. Agar masala ochiq bo'lsa, uni albatta yopiq masalaga aylantirish kerak. Ikkinchi va keyingi barcha jadvallar (sikllar)da ta'minotchilarning mahsulot birliklarini (a_i) va iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talab birliklarining (b_j) qiymatlari o'zgartirilmasdan ko'chiriladi.

2. Shartli darajalarni hisoblash.

Birinchi siklda transport xarajatlari (c_{ij}) o'zgarmaydi. Ikkinchi va keyingi sikllarda o'zidan oldingi siklning musbat qatorlaridagi c_{ij} qiymatlar o'zgartirilmasdan, manfiy qatorlaridagi c_{ij} qiymatlarning har biriga esa $\Delta_{\min}$ (8-punktga qarang) qo'shib ko'chiriladi.

3. Ta'minotchilarni tanlash (belgilar sistemasini tuzish).

Birinchi siklda jadvalning har bir ustunida bitta va faqat bitta $\min c_{ij}$ ga ega bo'lgan katakka belgi (kvadratcha) qo'yiladi. Ikkinchi va keyingi sikllarda o'zidan oldingi jadvaldan bir xil ustun va qator xarakteristikaga (7-punktga qarang) ega bo'lgan belgilar raqamsiz ko'chiriladi. Δ_{min} hisoblangan ustunning musbat qatorlarining $\min c_{ij}$ (agar ular birnechta bo'lsa, ihtiyoriy biri) ga ega katagiga qo'shimcha belgi (kvadratcha) qo'yiladi.

4. Ta'minot tartibini aniqlash (belgilarni raqamlash).

Barcha sikllarda birinchi ustundan boshlab, o'z ustunida yagona raqamlanmagan belgi 1, 2, 3, .. tartibida raqamlanadi. Ustunlar ko'rib bo'lingandan so'ng belgilarni raqamlash qatorlar (birinchi qatordan boshlab, ketma-ket) bo'yicha davom ettirilib, o'z qatorida yagona raqamlanmagan belgiga navbatdagi raqam qo'yiladi. Jarayon barcha belgilar raqamlanguncha davom etadi.

5. Mahsulot taqsimoti (x_{ij} - qiymatlarini aniqlash).

Kataklarga qo'yilgan raqamlarning ortib borish tartibida x_{ij} ning qiymati i punktda taqsimlab bo'linmagan mahsulot miqdorini va j- iste'molchining qondirilmagan talabini hisobga olgan holda aniqlanadi.

6. Tuzilgan rejani optimallikka tekshirish. Jadvalning har bir ustuniga nisbatan $B_j = \sum_i x_{ij}$ hisoblanadi va $m+1$ qatorga mos holda yoziladi. Agar barcha ustunlarda $b_j = B_j$ tenglik bajarilsa tuzilgan reja optimal bo'ladi, aks holda keyingi punktdagi ishlar bajariladi.

7. Ustun va qator xarakteristikalarni (UX va QX) aniqlash. a). $b_j \succ B_j$ ustunlarda UX qatorga (m+2 -chi qatorga) (-) ishora qo'yiladi; b) jadvalning QX ustunida (n+1 – chi ustunda) ishoralar qo'yish uchun belgilardagi oxirgi raqamdan boshlab pasayish tartibida ketma-ket hamma raqamlar qarab chiqiladi. Agar ko'rilayotgan raqamning UX si (-) bo'lsa QX ustunga ham (-) qo'yiladi, aks holda bu raqamga tegishli UX ham QX ham vaqtincha ishorasiz qoldiriladi;
v) raqamlar kamayish tartibida (oxirgisidan boshlab) yana bir marta ko'rib chiqiladi. Ko'rilayotgan raqamga tegishli QX (-) ishorali bo'lib, $x_{ij} \neq 0$ bo'lsa, shu belgining UX ham (-) ishora, $x_{ij} = 0$ holda esa (+) ishora oladi; g) ishorasiz UX va QX ga (+) ishoralar qo'yiladi. Belgisiz qator musbat qator hisoblanadi.

8. Δ_j , Δ_{min} qiymatlarini aniqlash.

Ustun xarakteristikalari (-) bo'lgan ustunlardagina Δ_j ning qiymati hisoblanadi. Uning uchun ko'rilayotgan ustunning musbat qator xarakteristikalarga ega bo'lgan c_{ij} qiymatlarning eng kichigidan shu ustundagi belgisi bor katakdagi c_{ij} ning qiymati ayriladi. Δ_j ning eng kichik qiymati Δ_{min} kabi belgilanadi. Bu qiymatlar aniqlangandan so'ng yangi siklga o'tiladi. Jarayon iste'molchilarning mahsulotlari to'la taqsimlanib, iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talablari to'la qondirilguncha davom ettiriladi.

Misol. Yuqorida potensiallar usuli bilan yechilgan transport masalasini Brudno usuli bilan yeching.

1- jadval

a_i/b_j	30	20	10	QX
20	1 └1 20	3 └2 0	6 └3 0	-
15	2 └	5	7	+
25	4	5	8	+
B_j	20	0	0	
UX	-	-	-	
Δ_j	1	2	1	

Birinchi ustunda $c_{11}=\min\limits_i(c_{i1})=1$ bo'lgan (1,1) katakka; ikkinchi ustunda $c_{12}=\min\limits_i(c_{i2})=3$ bo'lgan (1,2) katakka; ushinchi ustunda $c_{13}=\min\limits_i(c_{i3})=6$ bo'lgan (1,3) katakka belgilar qo'yamiz va ularni raqamlaymiz va shu kataklarga raqamlarni ortib borish tartibida mahsulot taqsimlaymiz: $x_{11}=20, x_{12}=0$, $x_{13}=0$. B_i qatorni to'latamiz. Barcha ustunlarda $b_j \neq B_j$ bo'lgani uchun, ularning har birini ustun xarakteristikasi (UX) minus ishoralidir. Faqat uchinchi raqam bo'yicha birinchi qatorning xarakteristikasi manfiy bo'ladi va belgisiz qatorlar musbat qatorlar hisoblanadi hamda $\Delta_1=2\text{-}1=1$, $\Delta_2=5\text{-}3=2$, $\Delta_3=7-6=1$, $\Delta_{min}=\Delta_1=1$. Qo'shimsha belgini Δ_{min} tanlangan ustunning musbat qatorlaridagi eng kam xarajatli c_{21} katagiga qo'yamiz. Yangi 2-jadvalga belgilarning hammasini raqamsiz ko'chiramiz va qaytadan raqamlaymiz.

2-jadval

a_i/b_j	30	20	10	QX
20	2 └3 0	4 └1 20	7 └2 0	-
15	2 └4 15	5	7	-
25	4	5 └	8	+
B_j	15	20	0	
UX	-	-	-	
Δ_j	2	1	1	

3-jadval

a_i/b_j	30	20	10	QX
20	3 ⌊4 10	4 ⌊5 0	8 ⌊1 10	-
15	3 ⌊2 15	6	8	-
25	4	5 ⌊3 20	8 ⌊	+
B_j	25	20	10	
UX	-	+	-	
Δ_j	1		0	

3-jadvaldagi ⌊5 raqamli belgi har xil ishorali xarakteristikalarga ega bo'lgani uchun yangi jadvalga ko'chirilmaydi.

4-jadval

a_i/b_j	30	20	10
20	3 ⌊4 15	4	8 ⌊5 5
15	3 ⌊2 15	6	8
25	4	5 ⌊1 20	8 ⌊3 5
B_j	30	20	10

Demak, $x_{11}=15$, $x_{13}=5$, $x_{21}=15$, $x_{32}=20$, $x_{33}=5$ va $y=215$.

Mustaqil yechishga doir masalalalar

Quyidagi transport masalalarini potensial va Brudno usullari bilan yeching va yechimlarni solishtiring:

a_i/b_j	200	200	100
200	8	3	6
150	5	7	9
50	6	9	4

a_i/b_j	60	30	20
20	11	9	7
55	6	8	12
35	10	5	4

a_i / b_j	60	35	20
60	5	4	1
60	4	2	6
35	7	3	5

a_i / b_j	150	140	100
75	5	6	3
150	9	2	5
80	8	1	4

a_i / b_j	200	150	50
130	3	5	7
100	1	4	6
170	5	2	12

a_i / b_j	28	22	50
17	3	5	2
43	11	4	6
17	5	2	12

7-bob. O'YINLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI

7.1. Asosiy tushunchalar va misollar

O'yinlar nazariyasi ziddiyatli holatlarning matematik modelini o'rganish orqali mukammal yoki samarador qaror qabul qilish imkoniyatini o'rganadi. Matematik o'yinlar nazariyasining asoschilari D. J. Fon Neyman va O. Morgenshternlardir.

Har qanday ziddiyatli holat ijtimoiy-iqtisodiy holatning matematik modeli bo'lib quyidagilardan tashkil topgandir:

1) ishtirok etuvchi tomonlar;

2) har bir tomonning imkoniyatlar to'plami;

3) tomonlarning maqsadlari.

Ziddiyatli holatlarning ushbu tashkil etuvchilarini matematika tili yordamida tasvirlash natijasida o'yin tushunchasi kelib chiqadi.

Ziddiyat ishtirokchilari odatda o'ynovchilar yoki ishtirokchilar deyilib, $I = \{1,2,...n\}$ o'ynovchilar to'plamini bildiradi, ya'ni o'ynovchilar soni chekli.

«Agar n ta $P_1P_2...P_n$ o'ynovchilar biror G o'yinni o'ynayotgan bo'lsa, P_i-o'ynovchi bu o'yinda yutib chiqishi uchun qanday strategiyani tanlashi kerak?» Bu yerda biz «o'yin» deyilganda ma'lum kelishib olingan shart va qoidalar to'plamini, «partiya» deganda shu shart va qoidalarning amalga oshirilishini tushunamiz. Har bir partiyadan keyin P_i o'ynovchi o'yinning yutug'i deb atalmish - v_i yutuqqa ega bo'ladi. Ba'zi o'yinlarda yutqaziladigan pullar yig'indisi yutilgan pullar yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan, ikki kishilik o'yinda P_1 o'ynovchi v_i so'm yutqazsa, P_2 o'ynovchi v_i so'm yutishi mumkin. Bu holda o'yindagi yutuqlar yig'indisi 0 ga teng bo'ladi:

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 0.$$

Bu yerda biz har bir o'ynovchi faqat yutadi deb faraz qilamiz, chunki biror o'ynovchi v so'm yutqazsa uning yutug'i $(-v)$ so'mga teng deb olinishi mumkin. O'yinlar, shart va qoidalarga ko'ra va o'ynovchilar soniga qarab turlicha bo'ladi. Biz quyida ikki kishilik o'yinlarni ko'ramiz. Har qanday G o'yin, o'yin matritsasi deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \ a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlanishi mumkin. Bu matritsa birinchi o'ynovchi uchun yutuqlar matritsasi deb ataladi.

a_{ij} element - P_1 o'ynovchi matritsaning i-qatoriga mos keluvchi yurishini, P_2 o'ynovchi j - ustunga mos keluvchi yurishni tanlagandagi P_1 o'ynovchining yutuq summasini bildiradi.

Har bir o'ynovchining ziddiyat holatidagi harakat rejasi yoki joiz xattiharakatlari ushbu P_i o'ynovchining *strategiyasi* deyiladi. Har bir o'ynovchining x_i xatti – harakatlar to'plamini X_i, $i \in I$ deb belgilaymiz.

Ta'rif. Har bir P_i, $i \in I$ o'ynovchi $x_i \in X_i$ strategiyasini tanlasin, u holda $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i \in I} X_i$ *o'yin holati* deyiladi.

O'yin holatlari to'plamini $X = \prod_{i \in I} X_i$: deb belgilaymiz. Har bir o'yin holati $x \in X_i$ da P_i o'ynovchining yutug'i $V_i(x)$ funksiya orqali aniqlangan bo'lsin.

Demak, har qanday ziddiyatli holatlar

$$\Gamma = \{I,\ X,\ V_i,\ i \in I\} \qquad (7.1.1)$$

uchlik yordamida beriladi va ushbu uchlik *koalisiyasiz (guruhsiz)* o'yin yoki oddiygina qilib o'yin deyiladi. Bunday deyilishiga sabab, har bir o'ynovchi hech qanday guruhga qo'shilmay, faqat o'z yutug'ini kattalashtirish maqsadida harakat qiladi.

Misollar

1) «Reyting – nazorati ishi»

Talaba (P_1 o'ynovchi)-reyting nazorat ishiga tayyorgarlik ko'rishi kerak. Ustoz (P_2 o'ynovchi)-reyting nazoratini qabul qilishi kerak, har bir ishtirokchining 2 tadan strategiyasi mavjuddir. Talaba yaxshi tayyorgarlik ko'rishi (YA) yoki yomon tayyorgarlik ko'rishi mumkin (YO). Ustoz reyting nazoratidan talaba o'tdi deb hisoblashi (+) yoki talaba reyting nazoratini topshira olmadi (-) deb hisoblashi mumkin.

O'ynovchilarning yutuqlari matritsasini quyidagicha aniqlaymiz:

Talaba yutuqlari $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{array}{c} Я \\ Ё \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & +1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, ustoz yutuqlari $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{array}{c} Я \\ Ё \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$

b) «Ikki kishilik Morro o'yini» (ikki barmoqli Morro o'yini)

O'yin qoidasi: har bir o'ynovchi 1 yoki 2 barmog'ini oshib 1 yoki 2 raqamini e'lon qiladi. Agar P_1 o'ynovchi P_2 o'ynovchi ochgan barmoqlar sonini topgan bo'lsa, P_2 o'ynovchi esa topolmagan bo'lsa P_1 o'ynovchining yutug'i ochilgan barmoqlar soniga teng bo'ladi, bu holda P_2 o'ynovchi ushbu miqdorni yutqazadi. Agar ikkala o'ynovchi ham to'g'ri topgan bo'lsa, bu holda har bir o'ynovchining yutug'i 0 ga teng bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, o'ynovchilarning strategiyalari sifatida $(i;\ j)$ juftliklar bo'lib, bu yerda $i,(i=1,2)$ ochilgan barmoqlar soni $j,(j=1,2)$ aytilgan barmoqlar sonini bildiradi.

P_1 o'ynovchining yutuqlari matritsasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1;1) & (1;2) & (2;1) & (2;2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ushbu matritsada P_1 o'ynovchi (2; 2) strategiyani, P_2 o'ynovchi esa (1; 2) strategiyani tanlasa, P_1 o'ynovchi 3 birlikni yutqazadi va mos ravishda P_2 o'ynovchi 3 birlikni yutadi. Ushbu o'yin matritsali o'yindir, chunki bitta yutuq matritsasi yordamida berilayapti. Quyida biz ikki kishilik o'yinlar haqida mulohaza yuritamiz.

7.2. Strategiyalar haqida

1-ta'rif. Komponentlari $x_i \geq 0$ va $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ shartlarni qanoatlantiruvshi $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor qator P_1 o'ynovchining aralash strategiyasi deyiladi. Komponentlari $y_j \geq 0$ va $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1$ shartlarni qanoatlantiruvshi $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektor ustun P_2 o'ynovchining aralash strategiyasi deyiladi

2-ta'rif. i-komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentlari 0 ga teng bo'lgan $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ aralash strategiyani P_1 o'ynovchining i-sof strategiyasi deb aytamiz.

Masalan, (1, 0, 0), (0,1,0), (0,0,1).

Xuddi shuningdek, j-komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentlari 0ga teng bo'lgan $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ aralash strategiyani P_2 o'ynovchining sof strategiyasi deb ataymiz. P_1 o'ynovchining aralash strategiyalar to'plamini S_1 bilan, P_2 o'ynovchining aralash strategiyalar to'plamini S_2 bilan belgilaymiz.

Endi yutuq matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} .....a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} .....a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \; a_{m2} .....a_{mn} \end{pmatrix}$$

bo'lgan matritsali o'yinni ko'raylik.

Agar P_1 o'ynovchi i-sof strategiyani tanlasa, u kamida $\min_j a_{ij}$ yutuqqa ega bo'ladi. P_1 o'ynovchi o'zi yutug'ini maksimal qilishga harakat qiladi. Demak, u shunday i-sof strategiyasini tanlashi kerakki, uning yutug'i max bo'lsin, ya'ni P_1 o'ynovchi $\max_i (\min_j a_{ij})$ beruvshi sof strategiyani tanlaydi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 3\\ 4 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ o'yin matritsasi berilgan bo'lsa, P_1 o'ynovchi 1-sof strategiyani tanlasa, u eng kamida 0 yutuqqa ega bo'ladi; 2-sof strategiyada uning yutug 'i kamida 1 ga teng bo'ladi; 3- sof strategiyada esa kamida – 1 yutuqqa ega bo'ladi. Demak, u 2-sof strategiyani tanlaydi va bu holda uning yutug'i $\max_i(\min_j a_{ij})=a_{22}=1$ bo'ladi. Agar P_2 o'ynovchi:

1-sof strategiyani tanlasa, u eng ko'pi 4 birlik yutqazadi, 2-sof strategiyada 5 birlik, 3-sof strategiyada 3 birlik, 4-sof strategiyada 4 birlik yutqazadi.

P_2 o'ynovchi o'zining yutqazishini minimal qilishga harakat qiladi. Demak, 3-sof strategiyani tanlaydi. P_2 uchun yutqazish summasi $\min_j \max_i a_{ij}=a_{23}=3$.

7.3. Matritsali o'yinning yechimi

Matritsali G o'yinning yechimi deb shunday

$$\overline{X}=(\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ldots,\overline{x_m}),\qquad \overline{Y}=(\overline{y_1},\ \overline{y_2},\ldots,\overline{y_n})$$

juft aralash strategiyalarga va haqiqiy υ songa aytiladiki, agar $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ sof strategiyalar uchun

$$E(\overline{X},\ j)\geq\upsilon$$

bo'lib, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ sof strategiyalar uchun

$$E(i,\ \overline{Y})\leq\upsilon$$

bo'lsa, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ vektorlar optimal strategiyalar, υ esa o'yinning bahosi deb ataladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ matritsali o'yin uchun $X=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $Y=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ - vektorlar optimal strategiyalar bo'lib, o'yinning bahosi nolga teng.

Ikki ishtirokchining umumiy yutuq miqdori nolga teng bo'lgan chekli o'yinini tahlil etaylik. $A=(a_{ij})$ matritsali o'yinda birinchi ishtirokchining m dona sof strategiyalari $i=1,2,\ldots\ m$ va ikkinchi ishtirokchining n dona $j=1,2\ldots.n$ strategiyalari mavjud bo'lsin. Agar ishtirokchilar mos ravishda i va j strategiyalarni tanlagan bo'lsa, ushbu holda (i,j) o'yin holatida P_1 o'ynovchining yutug'i a_{ij} miqdoriga, P_2 o'ynovchining yutug'i esa mos ravishda $-a_{ij}$ miqdoriga teng bo'ladi.

$$a_{ij}+(-a_{ij})=0$$

ushbu o'yindagi barcha yutuqlar $A=(a_{ij})$ matritsa yordamida ifodalansa, A-yutuqlar yoki to'lovlar matritsasi deb nomlanadi.

$A=(a_{ij})$ matritsaning i-satrida P_1 o'ynovchining yutuqlari $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ joylashgan bo'lib, yutuq qiymati P_2 o'ynovchining tanlagan usuli j - ga bog'liq bo'ladi.

Har bir o'ynovchi o'z yutug'ini kattalashtirishga harakat qilmoqda, P_1 o'ynovchi A matritsaning mos qatorlarini, P_2 o'ynovchi esa ustunlarini tanlash orqali

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yutuq matritsali o'yinda o'z yutuqlarini kattalashtirish uchun o'ynovchilar qanday harakat qilmoqlari kerak?

Eslatib o'tamizki, P_1 ishtirokchining strategiyasi sifatida $A=(a_{ij})$, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ yutuq matritsaning satrini tanlash (P_1 o'ynovchining sof strategiyasi) va o'z navbatida P_2 o'ynovchining strategiyasi sifatida ustunni tanlash (P_2 o'ynovchining sof strategiyasi) qabul qilinadi.

Faraz qilamizki, o'ynovchilar o'zlarini oqilona tutadilar.

O'yin matritsasi $a_{ij}=-a_{ij}$ xossaga ega bo'lgan o'yin simmetrik o'yin deb ataladi.

Simmetrik o'yinda o'yin bahosi 0 ga teng bo'lib, P_1 va P_2 o'ynovchilarning optimal strategiyalari bir xil bo'ladi. Haqiqatan ham P_1 o'ynovchi uchun yutuqlar funksiyasi

$$E(X,\ Y)=XAY=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j$$

hamda $X=Y$ bo'lganligi uchun

$$E(X,\ Y)=XAX=0$$

Demak, ikkala o'ynovchi ham bir xil aralash strategiyani qo'llashsa, o'yinning bahosi 0 ga teng bo'lar ekan. Endi P_1 va P_2 larning optimal strategiyalari mos ravishda $\overline{X}$ *ва* $\overline{Y}$ bo'lsin, u holda

$$\max_X\ \min_Y\ XAY=\min_Y \overline{X}AY=\upsilon.$$

Agar P_2 ixtiyoriy aralash strategiya qo'llansa, $\overline{X}AY\geq\upsilon$, lekin bizga ma'lumki, $\overline{X}=Y$ bo'lganda $\overline{X}AY=0$ bo'ladi. Demak, $\overline{X}A\overline{X}\geq\upsilon$ ekan.

Xuddi shuningdek,

$$\min_Y \max_X\ XAY=\max_X XA\overline{Y}=\upsilon.$$

P_1 ixtiyoriy aralash strategiya qo'llansa, $XA\overline{Y}\leq\upsilon$ bo'ladi. Lekin $X=\overline{Y}$ uchun $\overline{Y}A\overline{Y}=0$, $\overline{Y}A\overline{Y}\leq\upsilon$. Demak, bir tomonda $\upsilon\leq 0$ bo'lsa, ikkinchi tomondan, $\upsilon\geq 0$ bo'ladi. Bulardan $\upsilon=0$ ekan, hamda ikkala o'ynovchi ham bir xil strategiya bilan o'ynar ekan.

Teorema. Agar A o'yin matritsasining har bir a_{ij} elementiga biror tayin ω son qo'shsak, hosil bo'lgan yangi o'yinda optimal strategiyalar o'zgarmaydi, faqat o'yinning bahosi ω birlik ortadi, ya'ni yangi o'yinning bahosi $\upsilon+\omega$ teng bo'ladi.

Isbot. Berilgan o'yin uchun:

$$E_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j\ , \qquad (7.3.1.)$$

yangi o'yin uchun esa

$$E_2(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i(a_{ij}+\omega)y_j. \qquad (7.3.2.)$$

(7.3.2.) ni ochib chiqsak:

$$E_2(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j\ +\omega\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j. \qquad (7.3.3.)$$

Bizga ma'lumki,

$$\sum_i x_i=\sum_j y_i=1.$$

Shuning uchun (7.3.1.) dan va (7.3.3.) dan

$$E_2(X,Y)=E(X,Y)+\omega \qquad (7.3.4.)$$

hosil bo'ladi. Demak, ω o'zgarmas son optimal strategiyalarga ta'sir etmaydi. Agar har partiyadan oldin P_2 o'ynovshi P_1 ga ω miqdorda to'lov to'lasa, $E_2(X,Y)=E_1(X,Y)+\omega=\upsilon+\omega$ tenglik o'rinli bo'ladi. ω ni shunday tanlash mumkinki, A matritsaning elementlari musbat bo'lsin, uning natijasida o'yinning υ bahosi ham musbat bo'lsin. Endi matritsali o'yin uchun asosiy teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Har bir matritsali o'yin uchun $\max\limits_X \min\limits_Y E(X,Y)$ va $\min\limits_Y \max\limits_X E(X,Y)$ mavjud va o'zaro teng bo'lsa matritsali o'yin yechimga ega.

Minimaks qoidasi va egar nuqtalar

Agar P_1 o'ynovchi i-satr sof strategiyasini tanlagan bo'lsa, u holda P_2 o'ynovchi shunday j- ustun sof strategiyasini tanlashi kerakki, a_{ij} yutuq $a_{i1},a_{i2},...,a_{in}$ yutuqlar ichida eng kichigi bo'lishi kerak, ushbu eng kichik yutuq miqdorini a_i deb belgilaylik, ya'ni

$$a_i=\min_{j=\overline{1,n}}a_{ij},$$

bunday usulda aniqlangan a_i - yutuq P_1 o'ynovchi i - satr sof strategiyasini tanlagandagi kafolatlangan yutug'i deyiladi, chunki P_2 o'ynovchining ixtiyoriy xatti-harakatiga qaramasdan, P_1 o'ynovchi a_i yutuqdan kam bo'lmagan yutuqqa ega. Har bir o'ynovchi o'z yutug'ini kattalashtirishga intilayotgani tufayli P_1 o'ynovchi o'z sof strategiyalari ichidagini tanlaydiki, ushbu sof strategiya a_i- yutuqqa eng katta qiymatini beradi, ya'ni

$$v_*=\max_{i=\overline{1,m}}a_i=\max_{i=\overline{1,m}}\min_{j=\overline{1,n}}a_{ij}.$$

Ushbu yutuqni ta'minlovshi p- sof strategiya **maksimin strategiya** deb ataladi va v_*-bo'lsa o'yinning quyi qiymati deyiladi.

Ikkinchi o'ynovchi uchun shunga o'xshash fikr yuritish asosida, agar u j - strategiyani (A-matritsaning j-ustunini) tanlagan bo'lsa,

$$b_j=\max_{i=\overline{1,m}}a_{ij}$$

miqdor P_2 o'ynovchining kafolatlangan yutig'i bo'ladi. Shu tufayli P_2 o'ynovchi shunday q-strategiyasini tanlashi kerakki, uning kafolatlangan yutig'i eng kichik, ya'ni:

$$v^* = b_q = \min_{j=\overline{1,n}} b_j = \min_{j=\overline{1,n}} \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij} \qquad \text{bo'lsin.}$$

Bu holda v^* miqdor o'yinning sof strategiyalaridagi yuqori qiymati, q - sof strategiya esa **minimaks strategiyasi** deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, maksimin strategiyasini tanlash natijasida P_1 o'ynovchi v_* yutuqdan kam bo'lmagan, P_2 o'ynovchi bo'lsa, v^* yutuqdan ko'p bo'lmagan yutiqqa ega bo'ladilar.

Ixtiyoriy matritsali o'yin uchun $v^* \geq v_*$.

Ushbu tengsizlik bajarilishini isbotlash qiyinchilik tug'dirmaydi.

Aslida $v^* = v_*$ hol juda muhimdir. O'yinda o'ynovchining yuqori va quyi qiymatlari teng bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar $A = (a_{ij})$ yutuqlar matritsasi egar nuqtaga ega bo'lsa, ya'ni shunday (p, q) sof strategiyalar juftligi mavjud bo'lsaki, ular uchun

$$a_{iq} \leq a_{pq} \leq a_{pj}, \quad i = \overline{1,m} \text{ va } j = \overline{1,n}$$

tengsizlik o'rinlidir.

Bunday (p, q) egar nuqtalar $A = (a_{ij})$ matritsali o'yinda (p, q) - muvozanat holatini beradi. Agar (p, q) egar nuqta bo'lsa, u holda P_1 va P_2 o'ynovchilar uchun p va q sof strategiyalardan mos ravishda chetga chiqish ularning kafolatlangan yutuqlarini faqatgina kamaytirishi mumkin. Shu tufayli p va q sof strategiyalar mukammal sof strategiyalar deb ataladi va (p, q) juftlikda aniqlangan $v = v_* = v^*$ miqdor matritsali o'yin bahosi deyiladi.

Agar $v_* < v^*$ bo'lsa, u holda $A = (a_{ij})$ matritsa sof strategiyalarda egar nuqtaga ega bo'lmaydi va o'yin sof strategiyalarda yechimga ega emas.

«Egar» nuqtani aniqlash quyidagi tartibda bajarilishi mumkin:

1. A yutuqlar matritsasining har bir satrida α_i-eng kichik elementni aniqlaymiz, $i = \overline{1,m}$.

2. Ushbu tanlangan α_i, $i = \overline{1,m}$, o'z ustunidagi maksimal element bo'ladimi? Shuni tekshiramiz. Agar shunday ustun mavjud bo'lsa, aniqlangan i_0 satr va j_0 ustun egar nuqtani aniqlaydi. Bu holda o'yin qiymati $a_{i_0 j_0}$ ga teng bo'ladi.

Agar shunday ustun mavjud bo'lmasa, ushbu matritsali o'yinda sof strategiyalarda «egar» nuqta mavjud bo'lmaydi.

Misol. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsali o'yinda P_1 o'ynovshi 1-sof strategiyani tanlasa, eng kamida 3 birlik yutadi, 2-sof strategiyada 1 birlik, 3-sof strategiyada esa 0 birlik yutadi. P_1 o'ynovchi o'zining yutug'ini maksimal qilishga harakat qiladi. Shuning uchun u 1-sof strategiyani tanlaydi. Bu holda uning yutug'i $\max_i(\min_j a_{ij}) = 3$ ga teng. Xuddi shuningdek, P_2 o'ynovchi 1-sof strategiyani tanlasa, u eng ko'pi bilan 3 birlik yutqazadi. 2-sof strategiyada 7, 3-sof strategiyada 6 birlik yutqazadi. P_2 o'ynovchi o'zining yutug'ini minimallashtirishga harakat qiladi. Shuning uchun $\min_j(\max_i a_{ij}) = \min(3, 7, 6) = 3$ shartni qanoatlantiruvchi 1-sof strategiya $Y = (1, 0, 0)$ni tanlaydi.

Berilgan o'yin matritsasi uchun birinchi qator va birinchi ustunda joylashgan $a_{11} = 3$ element egar nuqtadir.

7.4. «Egar» nuqtasiz matritsali o'yinlar

Yutuqlar matritsasi $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ bo'lgan *G(A)* o'yinni ko'raylik.

P_1 o'ynovchi A matritsaning 1-satrini tanlash ehtimoli x bo'lsin, bu yerda $0 \le x \le 1$, u holda $1-x$ P_1 o'ynovchi tomonidan A-matritsaning 2-satrini tanlash ehtimoli bo'ladi.

Mos ravishda u P_2 o'ynovchi tomonidan 1-ustunni va $1-y$ P_2 o'ynovchi tomonidan 2-ustunni tanlash ehtimolliklari bo'lsin, bu yerda $0 \le y \le 1$. Faraz qilaylik, o'ynovchilar $(x, 1-x)$ va $(y, 1-y)$ aralash strategiyalarni tanlagan bo'lishsin u holda o'rtacha kutilayotgan yutuq miqdori quyidagiga teng:

$$E(x,y) = (-1)xy + 3x(1-y) + 4y(1-x) - 2(1-x)(1-y)$$

soddalashtirishdan so'ng quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$E(x,y) = -10\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right) + 1.$$

Agar, P_1 o'ynovchi $x^* = x = \frac{1}{2}$ ehtimollikni tanlasa, ixtiyoriy $y \in [0,1]$ uchun $E(x^*, y) = 1$ bo'ladi, ya'ni P_1 o'ynovchi P_2 o'ynovchining tanlovidan qat'i nazar bir birlik yutuqqa ega bo'ladi.

Agar P_2 o'ynovchi $y^* = y = 3/5$ ehtimollikni qabul qilsa, P_1 o'ynovchining ixtiyoriy $x \in [0,1]$ tanlovidan qat'i nazar bir birlikdan ortiq bo'lmagan yutqazuvga ega bo'ladi.

Demak, $x^* = \frac{1}{2}$ va $y^* = 3/5$ aralash strategiyalardagi «egar» nuqta bo'lib, bu holda o'yin qiymati $v^* = 1$ ga tengdir:

$$x^* = (1/2; 1/2), \quad y^* = (3/5; 2/5), \quad v^* = 1.$$

Yuqorida aytib o'tilganidek, «egar» nuqtasi mavjud va «egar» nuqtasi mavjud bo'lmagan matritsali o'yinlar orasida katta tafovut bor bo'lib, ushbu tafovut ushbu o'yinlar bir necha bor takrorlanganda yaqqol seziladi.

Ko'rilgan *G(A)* o'yinda «egar» nuqta mavjud emas $(\min_j \max_i a_{ij} = 1 > \max_i \min_j a_{ij} = -1)$, shu tufayli maksimin va minimaks sof strategiyalar ham mavjud emas.

Faraz qilaylik, G(A) o'yin bir necha bor takrorlanuvchi bo'lsin, ushbu holda P_1 o'ynovchi 1-satrni tanlagan holda uning yutug'i 3 ga yoki -1 ga teng bo'ladi, agar P_2 o'ynovchi mos ravishda 2-yoki 1- ustunlarni tanlasa. Agar P_1 o'ynovchi 2-satrini tanlagan holda uning yutug'i yoki 4 yoki (-2) birlikka teng bo'ladi, P_2 o'ynovchi mos ravishda 1-yoki 2- ustunlarni tanlagan holda. Ushbu tenglikdan ko'rinib turibdiki, P_1 o'ynovchining yutug'i P_2 o'ynovchining tanloviga bog'liq yoki aksincha. Agar P_2 o'ynovchi P_1 o'ynovchining tanlagan strategiyasini aniq bilsa, P_1 o'ynovchini to'liq yutishi mumkin.

Shu sababli ushbu o'yinlarda tanlanayotgan sof strategiyalarning maxfiyligi juda muhimdir. Ushbu tasdiq «egar» nuqta mavjud bo'lmagan har bir matritsali o'yinlar uchun o'rinlidir.

Quyidagi savol tug'iladi: takrorlanuvshi o'yinda P_2 o'ynovchining ixtiyoriy xatti-harakatida P_1 o'ynovchining unga kafolatlangan yutuqni ta'minlaydigan xatti-harakati mavjudmi?

Biror bir sof strategiyasini muntazam ravishda qo'llash kafolatlangan yutuqni ta'minlay olmasligini aniqlagach, P_1 o'ynovchi sof strategiyalarni tasodifiy ravishda tanlashga o'tsin. Agar tasodifiy tanlash to'g'ri tashkil etilsa, ushbu usul ko'zlangan maqsadni berishi mumkin.

P_1 o'ynovchining aralash strategiyalar to'plamini S_1 bilan, P_2 o'ynovchining aralash strategiyalar to'plamini S_2 bilan belgilansa, quyidagi ta'rifni keltirish mumkin:

1-ta'rif. Aralash strategiyalar $X^* \in S_1$ va $Y^* \in S_2$ uchun

$$E=(X,Y^*) \le E(X^*,Y^*) \le E(X^*,Y), \quad X \in S_1 \text{ va } Y \in S_2 \qquad (7.4.1)$$

bo'lsa, u holda (X^*,Y^*) nuqta $E(X,Y)$ funksiyaning «egar» nuqtasi bo'ladi.

2-ta'rif. Agar (X^*,Y^*) nuqta G(A) o'yin uchun egar nuqta bo'lsa, u holda $X^*(Y^*)$ P_1 o'ynovchining (P_2 o'ynovchining) **optimal aralash strategiyasi** deyiladi.

Optimal aralash strategiyalar har bir o'ynovchiga raqibining xatti-harakatida qat'i-nazar kafolatlangan yutuqni ta'minlaydi.

1-teorema (asosiy teorema). Ixtiyoriy matritsali o'yinda aralash strategiyalarda «egar» nuqta holati mavjud va

$$v_* = v^* \qquad (7.4.2.)$$

o'rinlidir.

Isboti. Ushbu teoremadagi (7.4.2.) tenglik bajarilishi uchun zaruriy va yetarlilik sharti, $E(X,Y)$ funksiyaning egar nuqtasi mavjudligidir. Ikkinchi tomondan agar (X^*,Y^*) $E(X,Y)$ funksiyaning egar nuqtasi bo'lsa u holda

$$E(X^*,Y^*) = v_* = v^* \qquad (7.4.3.)$$

tenglik o'rinlidir.

Agar o'ynovchilar mos ravishda $X \in S_1$ va $Y \in S_2$ aralash strategiyalarini tanlasa, P_1 o'ynovchi uchun o'rtacha yutuq (yutuqning matematik kutililishi) quyidagi ifodaga teng bo'ladi:

$$E(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_iy_j\ .$$

1-izoh. $E(X,Y)$ funksiyasi (X,Y)lar bo'yicha uzluksiz bo'lib, $(X,Y)\in S_1 * S_2$, S_1 va S_2 - chekli yopiq to'plamlar bo'lgani uchun v_* va v^* doimo mavjuddir

3-ta'rif. Matritsali o'yinda

$$v_*=\max_{i=\overline{1,m}}\min_{j=\overline{1,n}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\ , \qquad (7.4.4.)$$

$$v^*=\min_{i=\overline{1,m}}\max_{j=\overline{1,n}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j \qquad (7.4.3.)$$

mos ravishda o'yinning quyi va yuqori qiymatlari deyiladi. Agar $v_*=v^*=v$ bo'lsa v- **o'yin bahosi** deyiladi.

2-teorema. Ixtiyoriy matritsali o'yinlarda optimal aralash strategiyalar $X^*\in S_1$ va $Y^*\in S_2$ mavjud.

Teoremani yutuqlar matritsasi $A=(a_{ij})$ elementlari uchun $a_{ij}>0,\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$ hol uchun isbotlaymiz (matritsaning barcha elementlariga bir xil musbat o'zgarmas sonni qo'shish bilan bu holga keltirish mumkin).

Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalarini quramiz:

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+....+x_m\to\min\\&\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\ge 1,\quad j=\overline{1,n},\\&x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\end{aligned}\qquad (7.4.4.)$$

va ushbu masalaga ikkilangan SHPMni tuzaylik:

$$\begin{aligned}&y_1+y_2+....+y_n\to\max\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\le 1,\quad i=\overline{1,m},\\&y_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}.\end{aligned}\qquad (7.4.5.)$$

Boshlang'ich shartga ko'ra har bir $a_{ij}>0$ shunday $X^1=(x_1^1,x_2^1,...,x_m^1)>0$ vektor mavjudki, bu vektor (7.4.4.) masalaning joiz yechimi bo'ladi. Misol tariqasida bunday vektor sifatida har bir komponenti $x_i^1=\dfrac{1}{a},\quad i=\overline{1,m}$, bu yerda $a>0$ va $A=(a_{ij})$ matritsaning eng kichik elementi.

Ikkinchi tomondan $y=(0,0,...,0)$ vektor ham masalaning joiz yechimi bo'ladi.

To'g'ri va ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalalarining joiz yechimlar to'plami bo'sh to'plam emasligidan o'zaro ikkilangan SHPMning yechimlari haqidagi teoremaga ko'ra ikkala masalaning ham optimal yechimlari mavjud bo'ladi, ya'ni shunday $\overline{X}=(\overline{x}_1,...\overline{x}_m)$ va $\overline{Y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2,...\overline{y}_m)$ vektorlar mavjudki, ular uchun

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{x_i}=\sum_{j=1}^{n}\overline{y_j}=\lambda>0\ . \qquad (7.4.6.)$$

Ushbu optimal yechimlar asosida

$$X^*=\frac{1}{\lambda}\overline{X} \quad \text{va} \quad Y^*=\frac{1}{\lambda}\overline{Y}$$

vektorlarni quramiz va ularning mos ravishda P_1 va P_2 o‘ynovchilarning optimal aralash strategiyalari elementlarini ko‘rsatamiz. Bu holda o‘yin qiymati $v=\frac{1}{\lambda}$ bo‘ladi.

Haqiqatan ham (7.4.6.) tenglikdan

$$x_i^*=\frac{1}{\lambda}\overline{x_i}\ge 0,\quad i=\overline{1,m} \quad \text{va} \quad y_j^*=\frac{1}{\lambda}\overline{y_j}\ge 0,\quad j=\overline{1,n} \ \text{deb qabul qilsak,}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^*=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\lambda}\overline{x_i}\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m}\overline{x_i}=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda=1, \qquad \sum_{j=1}^{n}y_j^*=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\overline{y_j}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\overline{y_j}=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda=1$$

tengliklarni hosil qilamiz, ya’ni $X^*\in S_1$, va $Y^*\in S_2$.

Birinchi o‘ynovchining (X^*,Y^*) aralash strategiyadagi yutug‘i

$$E(X^*,Y^*)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*y_j^*=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i y_j}.$$

Ikkinchi tomondan $\overline{X}$ va $\overline{Y}$ (7.4.4.) va (7.4.5.) shartlarini qanoatlantirishdan va (7.4.6.) ni e’tiborga olsak, quyidagi tenglik hosil bo‘ladi:

$$\lambda=\sum_{j=1}^{n}\overline{y_j}=\sum_{j=1}^{n}1\cdot\overline{y_j}\le\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\overline{x_i}\right),\ \overline{y_j}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{y_j}\right)\overline{x_i}\le\sum_{i=1}^{m}\overline{x_i}=\lambda.$$

Ushbu qo‘sh tengsizlikdan

$$E(X^*,Y^*)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i y_j}=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\lambda=\frac{1}{\lambda} \qquad (7.4.7.)$$

kelib chiqadi.

Agar $X\in S$ va $Y\in S_2$ ixtiyoriy aralash strategiyalar bo‘lsa, u holda (7.4.3) va (7.4.5))dan

$$E(X^*,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i y_j}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\overline{x_i}\right)y_j\ge\frac{1}{\lambda},\qquad E(X,Y^*)\le\frac{1}{\lambda}$$

hosil qilamiz. Ushbu tengsizlik va (7.4.7) tenglikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$E(X,Y^*)\le E(X^*,Y^*)\le E(X^*,Y),\qquad X\in S_1,\qquad Y\in S_2\ .$$

Ya’ni, $\{X^*,Y^*\}$ aralash strategiya G(A) o‘yinda egar nuqtani hosil qiladi. Demak X^* va Y^* mos ravishda P_1 va P_2 o‘ynovchilarning optimal aralash strategiyalari bo‘lib, o‘yin qiymati $v=\frac{1}{\lambda}>0$ bo‘ladi.

Teorema isbotlandi.

2-izoh. Ushbu teoremani isbotlash jarayonida matritsali o‘yinning optimal strategiyalari quriladi va ushbu optimal aralash strategiyalar chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish orqali topiladi.

4-ta'rif. Agar aralash strategiyalar $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_m^*)\in S_1$ va $Y^*=(y_1^*,y_2^*,...,y_n^*)\in S_2$ larda $x_i^*>0$ va $y_j^*>0$ bo'lsa, ularga mos keluvshi i- va j- sof strategiyalar **aktiv strategiyalar** deyiladi. P_1 o'ynovchining P_2 o'ynovchi j-sof strategiyasini qo'llagandagi o'rtacha yutug'ini $E(X^*,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*$ deb aniqlaymiz.

3-teorema (aktiv strategiyalar haqida). Agar $X^*=(x_1^*,...,x_m^*)\in S_1$ va $Y^*=(y_1^*,...,y_n^*)\in S_2$ lar optimal aralash strategiyalar bo'lsa, u holda P_1 o'ynovchining ixtiyoriy aktiv strategiyasi i va P_2 o'ynovchining ixtiyoriy aktiv strategiyasi j uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$E(i,Y^*)=v. \quad \text{va} \quad E(X^*,j)=v. \tag{7.4.8.}$$

Isboti. Optimal aralash strategiyalarni aniqlashga ko'ra

$$E(X^*,j)\ge v, \quad j=\overline{1,n}. \tag{7.4.9.}$$

Faraz qilaylik, $E(X^*,j)>v$ bo'lsin, u holda $Y^*=(y_1^*,y_2^*,...,y_n^*)$ optimal aralash strategiya uchun va $y_j^*>0$ dan quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n}E(x^*,j)y_j^*=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*\right)y_j^*=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*y_j^*=E(X^*,Y^*)=v$$

tengsizlikni va $E(x^*,y^*)=v$ tenglikdan $v>v$ qarama-qarshilik kelib chiqishi teoremani isbotlaydi. Teorema isbotlandi.

7.5. Matritsali o'yinlarni yechish usullari (analitik va geometrik usullar)

Ushbu paragrafda (2×2) bo'lgan matritsali o'yinlarni geometrik va analitik usulda yechish keltirilib, so'ngra $(2\times m)$ va $(m\times2)$ o'lchamli o'yinlar (2×2) o'lchamli o'yinga keltiriladi.

1. (2×2) **o'lchami matritsali o'yin**

Ushbu o'yinda har bir o'ynovchi 2 strategiyaga ega bo'lib, yutuqlar matritsasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Agar A-matritsali o'yinda «egar» nuqta mavjud bo'lsa, minimaks qoidasiga asosan o'yin yechimi yengil anilaqlanadi.

Faraz qilaylikki, o'yinda «egar» nuqta mavjud bo'lmasin, bu holda o'yinda aralash optimal strategiyalar va o'yin qiymatini aniqlaymiz.

Optimal aralash strategiyalarni quyidagicha belgilaylik:

$$x^*=(x_1^*,x_2^*) \text{ va } y^*=(y_1^*,y_2^*)$$

$$x_1^*+x_2^*=1,\ 0\le x_1^*;x_2^*\le1,$$

$$y_1^*+y_2^*=1,\ 0\le y_1^*;y_2^*\le1,$$

bu yerda v - o'yin qiymati .

Agar P_1 o'ynovchi optimal $x^*=(x_1,x_2)$ aralash strategiyasini qo'llasa, P_2 o'ynovchi 1-sof strategiyasini qo'llasa, ya'ni 1-ustunni tanlasa, P_1 o'ynovchining yutug'i $a_{11}x_1 + a_{21}x_2$ ga teng bo'lib, o'yin qiymati v ga teng, ya'ni:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v.$$

Agar P_2 o'ynovchi 2-sof strategiyasini (2-ustun) qo'llasa,

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v$$

hosil bo'ladi. Berilishi bo'yicha $x_1 + x_2 = 1$ tenglikdan x_1 va x_2 larni aniqlash uchun quydagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 &= v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= v, \\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned} \qquad (7.5.1)$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib x_1, x_2 va v miqdorlarni aniqlaymiz:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) \qquad va$$

$$v^* = a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^*$$

va P_2 o'ynovchi uchun aralash strategiyalar $y^* = (y_1, y_2)$ quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

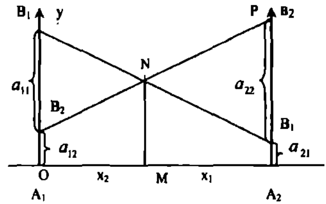
$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 &= v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= v, \\ y_1 + y_2 &= 1. \end{aligned} \qquad (7.5.2)$$

Yuqorida keltirilgan yechish usuli analitik bo'lib, (2×2) o'yin o'lchamlari kichik bo'lganligi uchun ushbu masala yechimini grafik usulida topish mumkin.

P_1 o'ynovchining sof strategiyalarini A_1 va A_2 (1- va 2-satrlar) va P_2-o'ynovchining sof strategiyalarini B_1 va B_2 (1- va 2-ustunlar) belgilaylik.

Tekislikning absissa o'qida $[A_1, A_2]$ bir birlik uzunlikdagi kesma olaylik. Ushbu kesmaning A_1 uchi koordinata boshi bo'lsin.

$[A_1, A_2]$ kesmaning uchlaridan o'tkazilgan perpendikular to'g'ri chiziqlarda P_1 - o'ynovchining yutuqlarini belgilaylik (3.1-chizma). A_1 uchidan o'tuvchi perpendikular ordinata Oy o'qi bilan mos tushib, x_1=1 va x_2=0 strategiya mosdir, A_2 uchidan o'tkazilgan A_2P perpendikular A_2 sof strategiyaga mos kelib x_1= 0 va x_2=1. Agar P_2 o'ynovchi B_1 sof strategiyasini qo'llasa, P_1 o'ynovchining yutug'i a_{11} ga teng, agar P_1 o'ynovchi A_1 sof strategiyani qo'llasa, a_{21} teng, A_2 strategiyasini qo'llasa, a_{11} va a_{21} miqdorlarni Oy va A_2P kesmalarida mos ravishda aniqlab, ushbu nuqtalarni B_1B_1 kesma bilan tutashtiramiz (1-shakl). B_1B_2 kesmaning ixtiyoriy ordinatasi P_1 - o'ynovchining o'rtacha yutug'iga teng bo'ladi, agar u A_1 va A_2 strategiyalarini X_1^* va X_2 ehtimolliklar bilan mos ravishda qo'llasa, (7.5.1) tenglamalar hosil bo'ladi.



1-shakl

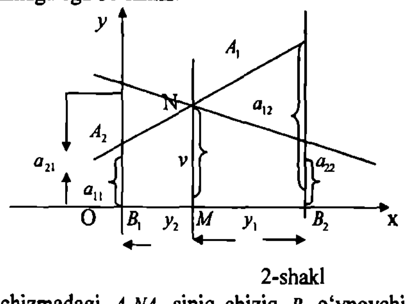
Agar P_2 o‘ynovchi B_2 sof strategiyasini qo‘llasa, B_2B_2 kesmani hosil qilamiz, P_1 o‘ynovchi A_1 va A_2 sof strategiyalarni x_1 va x_2 ehtimolliklar bilan mos ravishda tanlasa, B_2B_2 kesmaning ordinatalari P_1 o‘ynovchining o‘rtasha yutug‘iga teng bo‘ladi.

B_2NB_1 siniq chiziqning ordinatalari P_1 o‘ynovchining u aralash strategiyalarini qo‘llagandagi minimal yutug‘ini belgilaydi. P_1 o‘ynovchi minimal yutuqlar ichidan eng kattasini tanlash maqsadidadir va bu optimal yechim N nuqta bo‘ladi. N nuqtaning ordinatasi o‘yin qiymati ν ga teng bo‘lib, uning absissa o‘qiga proyeksiyasi, ya’ni M nuqta P_2 o‘ynovchi uchun optimal aralash strategiya $x^* = (x_1, x_2)$ni aniqlaydi.

Bu yerda $x_1 = MA_2$ va $x_2 = A_1M$.

N nuqta koordinatalarini aniqlash uchun (7.5.1) tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Ikkinchi o‘ynovchining optimal aralash strategiyasi $y^* = (y_1, y_2)$ni topish uchun P_1 va P_2 o‘ynovchining o‘rinlarini almashtirish kerak bo‘ladi, ya’ni A matritsani transponirlaymiz. U holda P_2 o‘ynovchining strategiyasi sifatida satrlarni tanlash, P_1 o‘ynovchi uchun ustunlarni tanlashga to‘g‘ri keladi. Grafik usuldan foydalanib, quyidagi chizmaga ega bo‘lamiz:



2-shakl

Ushbu chizmadagi A_2NA_1 siniq chiziq P_2 o‘ynovchining eng katta yutqiziqlar chizig‘idir. P_2 o‘ynovchi o‘z yutqizig‘ini kichraytirishga intiladi. Shu tufayli u N nuqtani tanlaydi, N nuqta koordinatalari $y^* = (y_1, y_2)$ optimal aralash strategiyalarni va o'yin qiymati v ni (7.5.2) sistemadan aniqlaydi.

2. $(2\times n)$ **turdagi o'yinlarni yechish**

$(2\times n)$ turdagi o'yinlarni yechish quyidagicha amalga oshiriladi:

1) 1-sakldagi o'yinning tasviri quriladi, faqatgina ikkita B_1B_1 va B_2B_2 to'g'ri chiziqlar bilan birgalikda $B_3B_3,...,B_nB_n$ to'g'ri chiziqlar ham quriladi;

2) P_1 o'ynovchining quyi yutuqlar siniq chizig'i aniqlanib, ushbu siniq chiziqda eng katta ordinatali N nuqta tanlanadi. Ushbu nuqta ordinatasi o'yin qiymatiga teng bo'ladi;

3) N nuqtada kesishuvshi $B_{i_0}B_{i_0}$ va $B_{j_0}B_{j_0}$ to'g'ri chiziqlar aniqlanib, ushbu aktiv strategiyalar P_2 o'ynovchining optimal strategiyasini aniqlashda ishtirok etadilar. B_{i_0} va B_{j_0} aktiv strategiyalar aniqlangandan keyin $(2\times n)$matritsali o'yin (2×2) o'yinga aylanadi. Ushbu o'yinda P_1 o'ynovchi A_1 va A_2 strategiyalarini P_2 o'ynovchi bo'lsa, faqatgina B_{i_0} va B_{j_0} strategiyalarini musbat ehtimollik bilan qo'llaydi. Hosil qilingan (2×2) o'yinni yechish yuqorida ko'rsatilgani kabi amalga oshiriladi. N nuqta ikkitadan ko'p to'g'ri chiziqlar kesishmasidan ham hosil bo'lishi mumkin.

3. $(m\times 2)$ **matritsali o'yinlarni yechish**

Ushbu holda $(m\times 2)$ o'yinni yechish quyidagicha amalga oshiriladi:

1) Transponirlangan $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m}$ matritsa uchun o'yinning 2- shakli chiziladi. Bu holda A_iA_i chiziq bir nechta bo'lishi mumkin;

2) P_2 - o'ynovchi yutuqlarining yuqori chegarasi quriladi va ushbu siniq chiziqda eng kichik ordinatali M nuqta tanlanadi. Ushbu nuqtaning ordinatasi o'yin qiymatiga teng bo'ladi;

3) M nuqta kesishuvchi $A_{i_0}A_{i_0}$ va $A_{i_1}A_{i_1}$ to'g'ri chiziqlar aniqlanadi va ushbu to'g'ri chiziq indekslariga mos P_1 o'ynovchining i_0 va i_1 aktiv strategiyalari aniqlanadi. Buning natijasida (2×2) matritsali o'yin hosil qilinadi va yuqoridagi usullarning ixtiyoriy biri bilan yechiladi.

4. Strategiyalar orasida ustunlik xossasi

Matritsali o'yinlarni yechishda yutuq matritsasining o'lchamlarini ixchamlashtirib olish hisoblashlarni kamaytiradi. Yutuq matritsalarini o'lchamlarini ixchamlashtirishda o'ynovchilarning optimal bo'lmagan strategiyalaridan voz kechish asosiy usuldir. Ushbu usul strategiyalar o'rtasidagi ustunlik xususiyatiga asoslangandi.

1-ta'rif. G(A) matritsali o'yinda P_1 o'ynovchining i_0 sof strategiyasi i_1 sof strategiya ustidan ustunlikka ega deyiladi, agar

$$a_{i_0j}\geq a_{i_1j},\quad j=\overline{1,n} \text{ bo'lsa.} \tag{7.5.3}$$

2-ta'rif. P_2 o'ynovchining j_0 sof strategiyasi j_1 sof strategiyasidan ustunlikka ega deyiladi, agar $-a_{ij_0}\geq -a_{ij},\quad i=\overline{1,m}$.

Izoh. P_2 o'ynovchining j_1-strategiyasi ustunlikka ega bo'lmagan strategiya deyiladi.

Ustunlik strategiyalaridan foydalanish qoidalari: P_1 o'ynovchi o'zining ustunlik strategiyalarini musbat ehtimollik bilan qo'llab, o'z yutug'ini oshiradi, P_2 o'ynovchi bunday strategiyalarni nol ehtimollik bilan qo'llab, o'z yutig' ini kamaytiradi.

Ustunlik strategiyalarini qo'llash qoidalariga amal qilish natijasida boshlang'ich yutuq matritsasining o'lchamlarini nol ehtimollik bilan tanlanuvchi satr va ustunlari tashlab yuborish hisobiga kamaytirish mumkin.

Ixchamlashtirilgan matritsali o'yin asosida boshlang'ich o'yin yechimlari quyidagicha aniqlanadi:

a) boshlang'ich o'yin qiymati ixchamlashtirilgan o'yin qiymatiga tengdir;

b) o'shirib tashlangan sof strategiyalar optimal yechimda nol ehtimollik bilan ishtirok etadilar.

5. Matritsali o'yinlarni yechishning asosiy bosqichlari

Birinchi bosqish: matritsali o'yinda egar nuqta mavjudligini tekshirish, agar u mavjud bo'lsa, optimal strategiyalar va o'yin qiymati egar nuqtada aniqlanadi.

Ikkinchi bosqish: yutuq matritsasining o'lchamlarini ustunlik strategiyalarini qo'llash qoidasi asosida ixchamlashtirish.

Uchinshi bosqish: optimal aralash strategiyalar va o'yin qiymatini grafik, analitik yoki chiziqli programmalashtirish usullari yordamida topish.

7.6. Matritsali o'yinlar va chiziqli programmalashtirish. Matritsali o'yinni chiziqli programmlashtirish masalasiga keltirish

Faraz qilaylik, yutuqlar matritsasi yordamida berilgan matritsali o'yinning elementlari manfiy bo'lmasin, ya'ni $a_{ij} > 0$ va $v(A) > 0$ o'yin yutug'i bo'lsin. Ushbu faraz umumiylikni kamaytirmaydi, chunki A matritsa elementlariga o'zgarmas musbat son qo'shish bilan yuqoridagi holga o'tish mumkin. Yutuq matritsasining bunday o'zgartirilishi optimal aralash strategiyalarni o'zgartirmaydi.

Matritsali o'yin sof strategiyalarida egar nuqtaga ega bo'lmasin, shu tufayli optimal aralash strategiyalarni topamiz.

Kelgusida $X^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$ va $Y^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$ mos ravishda P_1 va P_2 o'ynovchilarning optimal strategiyalarini bildirsin.

Faraz qilaylikki, P_1 o'ynovchi o'zining X optimal aralash strategiyasini, P_2 o'ynovchi bo'lsa $j(j = \overline{1,n})$ sof strategiyasini qo'llasin. U holda P_1^* o'ynovchining kutilayotgan o'rtacha yutug'i quyidagiga

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m, \quad 1 \le j \le n \qquad (7.6.1)$$

teng bo'ladi. Ushbu yutuq o'yin v dan kichik emasligini e'tiborga olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m \ge v, \quad 1 \le j \le n. \qquad (7.6.2)$$

Tengsizlikning ikkala tomonini $v > 0$ ga bo'lib yuborib

$$a_{ij}\frac{p_1}{v} + a_{ij}\frac{p_2}{v} + ... + a_{mj}\frac{p_m}{v} \ge 1, \quad j = 1,2,...,n \qquad (7.6.3)$$

tengsizlikni hosil qilamiz va

$$x_i = \frac{p_i}{v}, \; i = 1,2,....,m \qquad (7.6.4)$$

o'zgaruvchilarni kiritib

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{mj}x_m \ge 1, \qquad j = 1,2,...,n$$

tengsizliklar sistemasi hosil bo'ladi. Bu yerda $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$

Yangi o'zgaruvchilarni aniqlash va (7.6.4) tenglikdan

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v} \qquad (7.6.5)$$

tenglik kelib chiqadi.

P_1 o'ynovchi o'z yutug'i v - ni kattalashtirishga intilayotganligi uchun (7.6.5) ifoda o'zining katta qiymatiga v minimumga erishganda erishadi.

Demak, (7.6.2)-(7.6.5) formulalardan quyidagi kelib chiqadi, P_1 o'ynovchining optimal aralash strategiyalari va o'yin qiymati v ni aniqlash quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga keltiramiz:

$$f(x) = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min \qquad (7.6.6)$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge 1, \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge 1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge 1, \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; ... \; , x_m \ge 0. \end{aligned} \qquad (7.6.7)$$

Ushbu (7.6.6), (7.6.7) chiziqli programmalashtirish masalasi simpleks usul yordamida yechiladi va deylik $(x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ optimal yechim bo'lsin.

U holda (7.6.4) dan quyidagi kelib chiqadi:

$$v = \frac{1}{x_1^* + x_2^* + ... + x_m^*}, \qquad p = x_i^* \cdot v = \frac{x_i}{x_1^* + x_2^* + ... + x_m^*}. \qquad (7.6.8)$$

Ushbu tarzdagi yo'l bilan P_2 o'ynovchi uchun (7.6.4) - (7.6.7) munosabatlarga o'xshash munosabatlarni aniqlaymiz va $Y^* = (q_1, ..., q_n)$ lar uchun

$$q_j = u_j^* \cdot v = \frac{u_j^*}{u_1^* + u_2^* + ... + u_m^*} \qquad (7.6.9)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*$ chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi:

$$\begin{aligned} &f(u) = u_1 + u_2 + ... + u_n \to \max \\ &a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1j}u_j + ... a_{1n}u_n \le 1, \\ &a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2j}u_j + ... a_{2n}u_n \le 1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mj}u_j + ... a_{mn}u_n \le 1, \\ &u_1 \ge 0, \; u_2 \ge 0, \; ... \; , u_n \ge 0. \end{aligned} \qquad (7.6.10)$$

Matritsali o'yinning qiymati $v(A)$ va Y^* optimal aralash strategiyalari quyidagi o'zaro ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasini yechish orqali hosil qilinishi mumkin.

Boshlang'ich masala | **Ikkilangan masala**

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \qquad f(u)=\sum_{j=1}^{n} u_j \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1, \quad j=\overline{1,n}, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_i \ge 1, \quad i=\overline{1,m}, \tag{7.6.11}$$

$$x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m} \qquad u_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$$

O'yin qiymati v va aralash strategiyalar p_i, q_j quyidagicha hisoblanadi:

$$v=\frac{1}{x_1^*+x_2^*+...+x_m^*}=\frac{1}{u_1^*+...+u_n^*}. \tag{7.6.12}$$

Bu yerda X^* va Y^* mos ravishda boshlang'ich va ikkilangan masalalarning optimal yechimlari.

2-misol. Quyidagi

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 7 & -5 \\ 6 & 5 & 11 \end{bmatrix} \tag{7.6.13}$$

matritsali o'yin optimal strategiyalarni aniqlang. Ushbu matritsali o'yinning egar nuqtasi mavjud emas. Demak, yechim aralash strategiyalarda aniqlanadi. O'yin qiymati shartni qanoatlantirish uchun, A matritsaning har bir elementiga 6 qiymatni qo'shib shiqamiz:

$$A^1=A+6E=\begin{bmatrix} 1 & 13 & 1 \\ 12 & 11 & 17 \end{bmatrix}.$$

E matritsaning har bir elementi 1 ga teng.

Ushbu A^1 matritsa uchun $v(A^1)>0$ va $v(A)=v(A^1)-6$ bo'ladi.

$$y_1+y_2+y_3 \to \max$$
$$y_1+13y_2+6y_3+y_4=1,$$
$$12y_1+11y_2+17y_3+y_5=1,$$
$$y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,5},$$
$$\bar{y}=(0,\,0,\,0,\,1,\,1).$$

Ushbu chiziqli programmalashtirish masalasini P_2 o'ynovchining optimal aralash strategiyalarini topish uchun simpleks usul yordamida yechamiz. Ushbu masalaning optimal yechimi.

$$y^*=(y_1^*,\,y_2^*,\,y_3^*)=\left(\frac{2}{145},\,\frac{11}{145},\,0\right),$$

$$q_1^*=\frac{y_1^*}{y_1^*+y_2^*+y_3^*}=\frac{2}{13}, \quad q_2^*=\frac{y_2^*}{y_1^*+y_2^*+y_3^*}=\frac{11}{13}, \quad q_3^*=\frac{y_3^*}{y_1^*+y_2^*+y_3^*}=0,$$

$$v(A^1)=\frac{1}{y_1^*+y_2^*+y_3^*}\frac{145}{13}=11\frac{2}{13}, \quad v(A)=v(A^1)-6=11\frac{2}{13}-6=5\frac{2}{13}.$$

7.7. Matritsali o'yinlarning iqtisodga tatbiqi

Matritsali o'yinlar iqtisodiy muammolarning tahlilida keng qo'llaniladi. Har bir iqtisodiy vaziyat yoki holat iqtisodiy tizimdagi ishtirokchilarning o'zaro munosabati natijasida kelib chiqadi. Iqtisodiy tizimdagi ishtirokchilarning xatti-harakatlarini oldindan to'liq holda bashorat qilib bo'lmaydi. (Misol uchun: talab miqdori, ob-havo, bozordagi raqobat va boshqalar).

Shu tufayli iqtisodiy vaziyatlar noaniqlik yoki qarama-qarshilik holatlarida ro'y beradi va bu qabul qilinayotgan qarorlarga o'z ta'sirini o'tkazadi. Bu hollarda samarador yoki mukammal qarorlar qabul qilish uchun o'yin modellarini qurish va ular asosida qarorlar qabul qilish maqsadga muvofiqdir. Quyida o'yinlar nazariyasi asosida qaror qabul qilish samaradorligini ko'rsatuvchi bir necha iqtisodiy masalalarni ko'rib o'tamiz.

1-misol (mahsulot yetkazib berish).

Omborda n turdagi mahsulot bo'lib, savdo rastasiga ushbu mahsulotlardan faqat 1 turi yuborilishi mumkin bo'lsin. Shunday turdagi mahsulotni tanlash kerakki, ushbu mahsulotni savdo rastasiga yuborish maqsadga muvofiq bo'lsin. Agar $j,(j=\overline{1,n})$ turdagi mahsulot savdo rastasiga yuborilsa va ushbu mahsulot xaridorgir bo'lsa, savdo rastasi buning natijasida P_j, $(j=\overline{1,n})$ miqdorda sof foyda oladi, aksincha bo'lib chiqsa, $S_j,(j=\overline{1,n})$ miqdorda zarar ko'radi. Xaridor talabi aniq berilmagan holda savdo rastasi va xaridor orasida ziddiyat vujudga keladi. Ushbu ziddiyatli o'yinni ko'rish mumkin: savdo rastasi P_1 o'ynovchi, xaridor talabi P_2 o'ynovchi sifatida qabul qilinib, har bir o'ynovchi o'z strategiyalariga egadirlar. P_1 o'ynovchining $i=\overline{1,n}$ ta strategiyasi i - mahsulotni savdo rastasiga yuborish bo'lsa, P_2 o'ynovchining ham $j=\overline{1,n}$ strategiyasi mavjud bo'lib, bu $j=\overline{1,n}$ - turdagi mahsulotga xaridor talabidir.

P_2 o'ynovchi P_1 o'ynovchiga qarshi o'ynasin, ya'ni unga eng katta zarar yetkazmoqchi bo'lsin, bu holda ko'rilayotgan o'yin shakli antigonistik (matritsali) o'yin bo'lib, yutuq matritsasi quyidagicha beriladi)

$$A=\begin{pmatrix} P_1 & -S_1 & -S_1 \ldots -S_1 \\ -S_2 & P_2 & -S_2 \ldots -S_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -S_n & -S_n & -S_n \ldots P_n \end{pmatrix} \qquad (7.7.1)$$

Soddalik uchun $P_i \equiv P = const$ va $S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq S_n$. O'yin tahlilini soddalashtirish uchun A yutuq matritsasining har bir elementini $P=const$ miqdorga kamaytirib quyidagi yangi

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & -h_1 & -h_1 \ldots -h_1 \\ -h_2 & 0 & -h_2 \ldots -h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -h_n & -h_n & -h_n \ldots 0 \end{pmatrix} \qquad (7.7.2)$$

matritsani hosil qilamiz, bu yerda $h_i = S_i + P$ va $h_1 > h_2 \ldots > h_n > 0$.

Ilgari olingan natijalarga asosan ushbu o'yinning optimal aralash strategiyalari $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ va o'yin yutug'i v^* quyidagicha aniqlanadi:

1) Agar $h_n\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{h_s}\right)-(n-1)>0$ bo'lsa, u holda (7.7.3)

$$x_i^* = \left(h_i \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}, \quad i=\overline{1,m}, \qquad y_j^* = \left[\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s} - (n-1)\right] \cdot \left(h_j \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{7.7.4}$$

$$v = -(n-1)\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}.$$

2) Agar $h_n\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s} - (n-1)\right) \le 0$ (7.7.5)

bo'lsa u holda $v = -h_n$ va P_1 o'ynovchining optimal strategiyasi n-satrni 1 ehtimollik bilan qabul qilishdan, ya'ni $X^* = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ P_2 o'ynovchining optimal strategiyasi (7.7.5) formula va quyidagi tengsizlikdan tanlab olinadi:

$$\begin{cases} y_j^* \le 1 - \dfrac{h_n}{h_j} & agar \quad 1 \le j \le n-1, \\ y_n^* = 0. \end{cases} \tag{7.7.6}$$

Misol uchun

$$y_j^* = \frac{1}{K}\left(1 - \frac{h_n}{h_j}\right), \quad 1 \le j \le n-1, \quad y_n^* = 0,$$

bu yerda, shartga ko'ra $K = \left(n - h_n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1} > 0.$

Boshlang'ich A yutuq matritsali G(A) o'yin qiymatini aniqlash uchun v o'yin qiymatiga P miqdorini qo'shish kerak, ya'ni

$$v(A) = P - (n-1)\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}$$

Savdo rastasi uchun talab noma'lum bo'lgan holda maksimal foyda olish uchun quyidagi qoidaga amal qilish maqsadga muvofiqdir: agar $v(A)>0$ yoki

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{P}{S_j + P} - (n-1) > 0 \tag{7.7.7}$$

bo'lsa u holda (7.6.4.) shart asosida o'z strategiyasini tanlash kerak, mabodo (7.6.7) shart bajarilmasa, u holda hech qanday mahsulot savdo rastasiga yuborilmasligi kerak.

2-misol (ekin ekish).

Qishloq xo'jaligiga P_1 o'ynovchi 2 turdagi A_1 va A_2 ekin turini ekishni mo'ljallamoqda. Ushbu ekinlar uchun ajratilgan maydonlar miqdorini shunday aniqlash kerakki, olinadigan hosildan keladigan foyda eng katta bo'lsin. Hosildorlikka ob-havo sharoiti va tabiat (P_2 o'ynovchi) o'z ta'sirini ko'rsatadi deb hisoblaymiz. Lalmikor va sug'oriladigan yerlardagi dehqonchilikda tabiat va ob-havo eng noqulay kelgan hollardan kelib chiqib, ekin maydonlarini aniqlash maqsadga muvofiqdir.

Keltirilgan farazlarga asosan P_1 o'ynovchi 2 ta sof strategiyaga, A_1 yoki A_2 turdagi ekinni ekish.

P_2 o'ynovchining sof strategiyalari quyidagilardan iborat:

B_1 : qurg'oqchilik;

B_2 : suv serob;

B_3 : sersuv va ortiqcha namgarchilik;

B_4 : ekinlarning xasharotlar va sel bilan zararlanishi.

Ushbu ziddiyatli holatning modelini matritsali o'yin sifatida qurish uchun yutuqlar matritsasini aniqlash zarur. Ushbu yutuq matritsasini aniqlashda (h_{ij} $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,4})$ i-turdagi ekinning tabiatning B_j holati ro'y bergandagi hosildorligi va a_i $(i=1,2)$ 1 sentner i tur ekindan olinadigan foyda berilgan bo'lsin, u holda

$$A=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \end{array}$$
$$A=\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & a_1h_{11} & a_1h_{12} & a_1h_{13} & a_1h_{14} \\ A_2 & a_2h_{21} & a_2h_{22} & a_2h_{23} & a_2h_{24} \end{array}.$$

Asosiy teóremaga ko'ra G(A) matritsali o'yin aralash strategiyalarda doimo yechimga ega bo'ladi. Agar $X^*=(x_1^*,x_2^*)$ P_1 o'ynovchining optimal aralash strategiyasi bo'lsa, tabiatning B_j holatida P_1 o'ynovchining kutilayotgan foydasi uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$H_j=a_1h_{1j}x_1^*+a_2h_{2j}x_2^*\geq v, \qquad j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Albatta, kutilayotgan foyda aynan olingan foydaga teng bo'lmaydi, lekin ekin maydonlarini bir necha yil davomida ushbu qoida asosida ekilsa, kutilayotgan foyda olingan foydalarning o'rtacha yilligiga teng bo'ladi.

Misollar yechish

G(A) matritsali o'yinlarni turli usullarda yechishni ko'ramiz.

1-misol. «Egar» nuqta mavjud hol.

Yutuq matritsasi quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1=-3, \\ \alpha_2=1. \end{array}$$

Yechish. Ushbu o'yinda P_1 o'ynovchi tomonidan 2-sof strategiyani va P_2 o'ynovchi tomonidan 3-ustunni tanlash sof strategiyasini qo'llashi egar nuqtaga olib keladi, chunki

$$\max_{i=1,2}\min_{j=1,2,3} a_{ij}=\min_{j=1,2,3}\max_{i=1,2} a_{ij}=a_{23}=1.$$

Demak, $v=a_{23}=1$.

2-misol (2×2 **o'yin).** Yutuq matritsasi quyidagicha berilgan:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

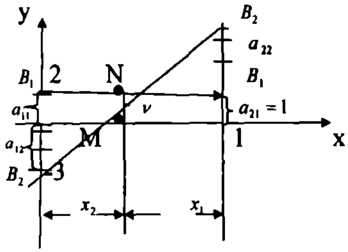
Yechish. Ushbu matritsali o'yinda egar nuqta mavjud emas, chunki

$$\max_i \min_j a_j=1<\min_j \max_i a_{ij}=2,$$

shu tufayli o'yinchilarning optimal strategiyalardan iborat bo'ladi va ikkala strategiyalari ham faol bo'ladi.

Ushbu o'yinning chizmasini ko'raylik (P_1 o'ynovchi uchun).

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = -3,$$
$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = 4.$$



1-chizma

N nuqta B_1B_1 va B_2B_2 kesmalarning kesishish nuqtasidir, bu yerda

$B_1B_1 : 2x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$ va $B_2B_2 : (-3)x_1 + 4x_2 = 0$

to'g'ri chiziqlar tenglamalarini tenglash natijasida

$$2x_1 + x_2 = -3x_1 + 4x_2,$$
$$5x_1 = 3x_2$$

tenglamalarni hosil qilamiz.

$x_1 + x_2 = 1$ -ni hisobga olsak, $5(1 - x_2) = 3x_2 \rightarrow x_1 = \frac{3}{8}, \quad x_2 = \frac{5}{8}$ aralash strategiyani topamiz. O'yin qiymati:

$v = 2 \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8} = 1{,}375$. Demak, P_1 o'ynovchining optimal alash strategiyasi

$$x^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right).$$

Ushbu natijani faol strategiyalar haqidagi 2-teorema asosida qurilgan

$$2x_1 + x_2 = v,$$
$$-3x_1 + 4x_2 = v,$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

tenglamalar sistemasini yechishdan ham hosil qilinishi mumkin. P_2 o'ynovchining optimal strategiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$2y_1 - 3y_2 = v,$$
$$y_1 + 4y_2 = v,$$
$$y_1 + y_2 = 1.$$

Natijada quyidagi optimal strategiya va yutuq summasiga ega bo'lamiz:

$$y^* = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right), \quad v = \frac{11}{8}.$$

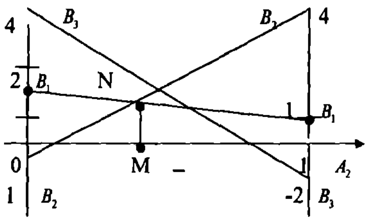
3-misol ((2 x n) - o'yin).

Yutuq matritsasi quyidagicha berilgan:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

o'yinni tahlil qilaylik.

Yechish. Ushbu o'yinda ham egar nuqta mavjud emas. Ushbu turdagi o'yinlarni (7.4.1) va (7.4.2) tenglamalar sistemasi orqali topish har doim ham P_I samarador emasdir. Shu tufayli ushbu o'yinning chizmasidan va o'ynovchining 2ta faol strategiyasini tanlash orqali (2x2) bo'lgan matritsali o'yinga keltirib olish maqsadga muvofiqdir. (2x2) holga keltirilgan o'yinni 2-misol asosida yechish mumkin.Ushbu o'yinning P_I o'ynovchi uchun chizmasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



2-chizma

2- chizmadan ko'rinib turibdiki, o'yin qiymati $v = |MN| = 5$ va N nuqta B_1B_1 va B_2B_2 to'g'ri chiziqlarning kesishishi, natijasida aniqlanmoqda, demak o'ynovchining 1-va 2-sof strategiyalari musbat ehtimollik bilan, 3-strategiyasi bo'lsa, nol ehtimollik bilan tanlanadi.

Bu holda boshlang'ich (2×3) o'yin (2×2) o'yin keltiriladi va bu o'yinning yutuq matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{bo'lib,}$$

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad y^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right), \quad v = 1{,}5$$

ga teng. Boshlang'ich o'yin uchun optimal strategiyalar:

$$x_{onm} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad y_{onm} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0\right) \qquad \text{bo'lib,}$$

o'yin qiymati $v = 1{,}5$ ga teng.

4-misol ($m\times 2$ **o'yin**).

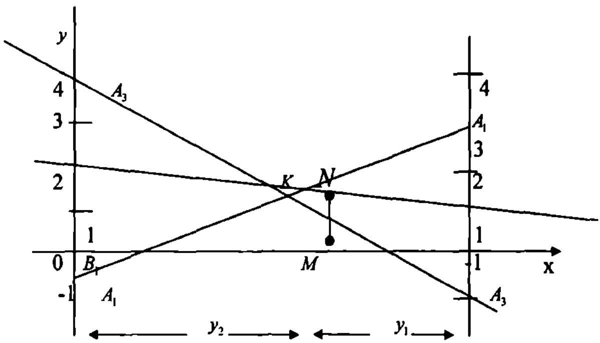
Yutuq matritsasi A bo'lgan G(A) o'yinni yeching:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Yechish. Ushbu o'yinni yechish uchun matritsani transponirlab olamiz:

$$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

va ikkinchi o'ynovchi uchun chizma chizamiz (3 -chizma).



3-chizma

Ushbu rasmda siniq chiziq A_2KNA_1 P_2 o'ynovchining aralash strategiyalarda eng katta yutqiziqlarini bildiradi. P_2 o'ynovchi o'z yutqizig'ini kichiklashtirishga harakat qilgani uchun, uning eng kichik yutqizig'i $v=|MN|$ N nuqtaning ordinatasiga teng bo'ladi. N nuqta A_1A_1 va A_3A_3 chiziqlarning kesishishida yotibdi, shu tufayli P_1 o'ynovchi uchun aktiv strategiyalar. A_1 va A_3 lar bo'ladi. Bu holda G(A) o'yin yana (2×2) matritsali o'yinga keltiriladi. Ushbu o'yinning yutuq matritsasi

$$A^1=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

bo'ladi. Ushbu o'yinni 2-misolda qo'llangan usul asosida yechib:

$$x=(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),\quad y=(y_1,y_2)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$$ va $v=1{,}4$ larni hosil qilamiz.

Boshlang'ich o'yin uchun

$$x^*=\left(\frac{1}{5},0,\frac{4}{5}\right),\quad y^*=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$$ va $v=1{,}4$ bo'ladi.

5-misol. O'yin matritsasi berilgan:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ -6 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

O'yin bahosi topilsin.

Ko'rinib turibdiki, 2 - qator 4 - qatordan, 5 - ustun esa 4-ustundan ustunlikka ega, shu tufayli 2- qator va 4-ustunlarni tashlab yuboramiz va quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda ham 2 - qator 3 - qatordan, 1-ustun 2-ustundan 3-ustun 4-ustundan ustunlikka ega, shu tufayli 3 - qator, 1 va 4 - ustunlarni tashlab yuborib quyidagi yutuq matritsasini hosil qilamiz:

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ushbu (2×2) - matritsali o'yinni 2 - misol kabi yechib:

$$x^*=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right), \qquad y^*=\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right), \qquad \nu=1{,}375$$

hosil qilamiz. Boshlang'ich o'yin uchun:

$$x^*=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8},0,0\right) \quad y^*=\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8},0,0\right) \quad \nu=1{,}375.$$

6-misol. O'yinlarni simpleks usul bilan yechish. Quyidagi matritsali o'yin uchun o'yin qiymati va optimal strategiyalarini toping:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (7.7.8)$$

Ko'rinib turibdiki, $\tilde{A}$ yutuqlar matritsasida sof strategiyalarda egar nuqta mavjud emas, shu tufayli mukammal strategiyalarni aralash strategiyalar ishidan izlash kerak. Matritsali o'yinlar uchun keltirilgan asosiy teoremaga asosan bunday optimal strategiyalar doimo mavjuddir.

Yuqorida keltirilgan (7.7.7) matritsali o'yinni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirib yechamiz. Eng avvalo $\tilde{A}$ matritsaga shunday α sonni qo'shamizki, $\tilde{A}+\alpha\cdot E$ matritsa elementlari manfiymaslik shartini qanoatlantirsin, misol uchun $\alpha=2$ bo'lsin (yoki ixtiyoriy $\alpha\geq 2$). U holda quyidagi yutuq matritsasiga ega bo'lamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ushbu A va $\tilde{A}$ matritsali o'yinlarning yutuq qiymatlari orasida quyidagi bog'lanish mavjud $v(A) = v(\tilde{A}) + 2$ bo'lib optimal strategiyalar ikkala o'yin uchun ham bir xil.

A-matritsali o'yinning optimal strategiyalarni aniqlash uchun quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalarini tuzamiz.

Boshlang'ich masala

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 \to \min \\
& 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, \\
& 4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1, \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Ikkilangan masala

$$
\begin{aligned}
& u_1 + u_2 + u_3 \to \max \\
& 2u_1 + 1u_2 + 4u_3 \leq 1, \\
& 3u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq 1, \\
& 2u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 1, \\
& u_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Boshlang'ich masalaga mos quyidagi masalani ko'rib, uni sun'iy bazis usulda yechamiz:

$$x_1 + x_2 + x_3 + M(u_1 + u_2 + u_3) \to \min$$

$$
\begin{aligned}
& 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + u_1 = 1, \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_5 + u_2 = 1, \\
& 4x_1 + 4x_2 + x_3 - x_6 + u_3 = 1, \\
& x_i \geq 0. \ i = \overline{1,6}, \ u_i \geq 0, \ i = 1,2,3,
\end{aligned}
$$

chiziqli programmalashtirish masalasi uchun simpleks-jadval quyida keltirilgan:

1- jadval

				1	1	1	0	0	0	M	M	M
№	$Б$	$C_б$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	u_1	u_2	u_3
1	u_1	M	1	2	3	2	−1	0	0	1	0	0
2	u_2	M	1	1	2	4	0	−1	0	0	1	0
3	u_3	M	1	4	4	1	0	0	−1	0	0	1
M			3	7	9	7	−1	−1	−1	0	0	0
			0	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0

Ushbu masalaning optimal yechimi:

$x^* = \left(0, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \ 0, \ 0, \ \frac{1}{8}, \ 0, \ 0, \ 0 \right)$ga teng bo'ladi va (7.7.4) masalaning optimal yechimi mos ravishda

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right) \text{ bo'ladi.}$$

Aniqlangan $\bar{x}$ va (7.7. 5) formuladan v o'yin qiymati aniqlaymiz:

$$v = \frac{1}{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{3}.$$

P_1 o'ynovchining optimal aralash strategiyalarini aniqlaymiz:

$$p_1 = \overline{x_1} \cdot v = 0 \cdot \frac{8}{3} = 0,$$

$$p_2 = \overline{x_2} \cdot v = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3},$$

$$p_3 = \overline{x_3} \cdot v = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

optimal aralash strategiya $X^* = \left(0;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ ga teng bo'ladi.

P_2 o'ynovchining optimal aralash strategiyasi Y^* ham shunday usulda aniqlanadi,

$$Y^* = \left(\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\ \right).$$

$\Gamma(\tilde{A})$ matritsali o'yin yutug'i $\tilde{v} = v - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ ga teng bo'ladi.

P_1 o'ynovchiga uning 2-sof strategiyasi v yutuqni ta'minlar edi, optimal aralash strategiyalarni qo'llash, unga $\frac{2}{3} > 0$ yutuqtni ta'minlamoqda.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Grafik va analitik usullar yordamida quyidagi G(A)-matritsali o'yinning optimal aralash strategiyalari va o'yin qiymatini toping:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} n & -1 & m & 1 \\ -1 & n & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} n & -2 \\ 1 & 2m \\ -2 & 4 \\ -m & 5 \end{pmatrix}$;

v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, bu yerda $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

2. Strategiyalar orasidagi ustunlik tushunchasidan foydalanib, boshlang'ich G(A) o'yinni (2×2) o'lchamli o'yinga keltiring va G(A) o'yin uchun optimal aralash strategiyalar va o'yin qiymatini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix} +3 & -1 & 2 & 3m & 4 \\ m & 1 & -3 & 0 & 2 \\ m & 2n & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ m, n = 1, 2, 3, \dots .$$

3. Chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish yo'li bilan G(A) matritsali o'yinni yeching.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A=\begin{pmatrix} -1 & -m & 2 \\ -1 & n+1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$

b) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$ $\quad m, n = 1, 2, 3, \dots$

4. Savdo rastasiga mahsulotlar yetkazib berish masalasi uchun o'yin modelini matritsali o'yin shaklida quring, optimal strategiyalarni va o'yin yutug'ini aniqlang.

Izoh. a) va b) misollarni yechish jarayonida 6-bobdagi (6. 4) va (6. 6) formulalardan foydalaning

a)

Foyda va zarar	Tovar turi			
	1	2	3	4
Sotuvdan kelgan foyda	30	30	30	30
Sotilmay qolgandagi zarar	12	8	10	6

Foyda va zarar	Tovar turi					
	1	2	3	4	5	6
Sotuvdan kelgan foyda	60	60	60	60	60	60
Sotilmay qolgandagi zarar	16	12	10	8	18	14

b)

Foyda va zarar	Tovar turi					
	1	2	3	4	5	6
Sotuvdan kelgan foyda	60	$12(1+\lvert p-3\rvert)$	60	$10+$ $+(1+\lvert q-7\rvert)$	60	60
Sotilmay qolgandagi zarar	16	12	9	6	7	8

Foyda va zarar	Tovar turi			
	1	2	3	4
Sotuvdan kelgan foyda	$10p$	22	10	$30+2q$
Sotilmay qolgandagi zarar	9	8	6	4

5. Ekinzorlarga 4 turdagi $A_i, i=\overline{1,4}$, ekin shunday tanlab ekilishi kerakki, noqulay ob-havo sharoitida ham yig'ib olingan hosildan kelgan foydaning kutilmasi eng katta bo'lsin. Ushbu masalaning ma'lumotlari jadvalda keltirilgan.

Ushbu masalaning modelini matritsali o'yin ko'rinishida tuzing, optimal strategiyalar va hosilni sotishdan kutilayotgan foyda-o'yin qiymatini maksimallashtiring.

№	Tabiat va ob-havo	Hosildorlik s/ga			
		A_1	A_2	A_3	A_4
1	Qurg'oqshilik	10	20	5	10
2	Suv serob	30	$50(1+\|q-2\|)$	20	$60(1+\|q-8\|)$
3	Suv serobligi va namgarchilik	$20(1+\|q-6\|)$	40	15	50
4	Boshqa holatlar	5	10	10	0
	1 sentner hosil qiymati	12	6	7	4

$p, q = 1,2,3....$

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ matritsali o'yinga ekvivalent chiziqli programmalashtirish masalasini tuzing va uni yechib o'yin bahosini aniqlang.

7. $A=(a_{ij})$ o'yin matritsasi bir nechta egar nuqtaga ega bo'lishi mumkinmi?

8. Ikkita o'ynovchi bir-biridan holi ravishda 1,2,3,4 sonlaridan birini o'ylaydi. Agar o'ynovchilardan birining o'ylagan soni ikkinchisinikidan bir birlikka ko'p bo'lsa, u ikkinchiga yutuqning ush birligini to'laydi. Agar o'ynovchi ikkinchisi o'ylagan sondan hesh bo'lmasa ikki birlikka katta son o'ylagan bo'lsa, u yutuqning to'rt birligini to'laydi. Bir xil sonlar o'ylansa o'yin durrang deb hisoblanadi. Bu o'yinning to'lov matritsasi tuzilsin.

9. O'ynovchilar 1 dan k gacha bo'lgan sonlardan birini o'ylaydilar. Agar birinchi o'ynovchi X ni, ikkinchisi Y ni tanlasa $X \geq Y$ holda birinchi o'ynovchi yutuqning X-Y birligini yutadi; $X<Y$ holda esa yutuqning X+Y birligini to'laydi. k =5 uchun o'yin matritsasini tuzing.

10. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ o'yin matritsasining egar nuqtasi topilsin.

11. 3-misoldagi o'yin matritsasida X = (0,1; 0,4; 0,5) va Y = (0,3; 0,3; 0,4) strategiyalarda o'rtacha yutuq nechaga teng.

8 - bob. TAQSIMOT MASALALARI

8.1. Seriyali ishlab chiqarishni optimallashtirish masalasi

Masalaning qo‘yilishi:

$$\sum_i x_{ij} = b_i,\quad \sum_j c_{ij}x_{ij} \le a_i,\quad x_{ij} \ge 0\,,\quad i=\overline{1,k}\quad,\quad j=\overline{1,l}$$

chegaraviy shartlarda $y=\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ - funksiyaning minimum qiymati topilsin.

Qo‘yilgan masalani yechish algoritmini berishdan avval quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$t=1,2,...$ – sikl nomeri;

$a_i, (i=\overline{1,k})$ – mahsulot ishlab chiqarish quvvati (1-punktga qaralsin);

b_j, $(j=\overline{1,l})$–mahsulot hajmi (1-punktga qaralsin);

c_{ij} – samaradorlik koeffitsiyenti (1-punktga qaralsin);

c_{ij}^t – samaradorlik indeksi (2-punktga qaralsin);

p– mahsulot taqsimlash mumkinligini (3-punktga qaralsin) va taqsimot tartibini (4-punktga qaralsin) ko‘rsatuvchi belgi;

x_{ij}^t–i–quvvat hisobiga ishlab chiqarilgan j mahsulot hajmi (5- punktga qaralsin);

z_{ij}^t –j– tur mahsulot hajmini qondirishga sarflangan i - quvvat miqdori (5-punktga qaralsin);

B_j^t– qondirilmagan hajm (6- punktga qaralsin);

ux_j^t, qx_i^t – ustun va qator xarakteristikalar (7-punktga qaralsin);

Δ_j^t – indekslarning minimal ortishi (8-punktga qaralsin).

Bularni matritsa formada quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

t a_i/b_j	b_1 .... b_j .... b_l	b_{l+1}	Qator xarakteristikasi (QX)
a_1 : a_i : a_k	c_{ij} c_{ij}^t r x_{ij}^t z_{ij}^t	r	(+) yoki (–) ishora qo‘yiladi
β_j^t	$\beta_j^t = b_j = \sum x_{ij}^t$		
UX	(+) yoki (-) ishora		
Δ_j^t			

Seriyali mahsulot ishlab chiqarish masalasini yechishning algoritmi:

1. *Asosiy ko‘rsatkichlar*:

a_i - vaqt fondi va h.k., b_j - mahsulot ishlab chiqarishga mo‘ljallangan moslamalar va h.k. soni, c_{ij}^t - birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan vaqt normasi va h.k. bo'lishi mumkin. Bu kattaliklar masala shartida berilgan bo'ladi va t sikldan $t+1$ siklga o'tganda ularning qiymatlari o'zgarmaydi.

2. *Samaradorlik indeksi*:

a) masala shartida berilganlar jadvalga joylashtiriladi. Jadvalning har bir ustuniga $c_{ij}^{1} = \lg c_{ij} - \min_{j} \lg(c_{ij}), \ (i=\overline{1,k})$ qo'shimcha ustunning barcha qatorlarida $c_{i,l+1}^{1} = 0$.

b) barcha $t > 1$, $j = \overline{1, l+1}$ uchun:

$$c_{ij}^{t} = \begin{cases} c_{ij}^{t-1} & \textit{- musbat qatorlarda,} \\ c_{ij}^{t-1} + \Delta_{\min}^{t-1} & \textit{- manfiy qatorlarda.} \end{cases}$$

Musbat va manfiy qatorlarning ta'riflarini 7-punktdan, $\Delta_{\min}^{t}$ - ta'rifini 8-punktdan qarang.

3-punktga o'tiladi.

3. *Ta'minotchilarni tanlash* (*belgilar sistemasini hosil qilish*):

a) birinchi siklda matritsaning $c_{ij}^{t}=0$ bo'lgan asosiy ustunlarining kataklaridan biriga belgi qo'yiladi, qo'shimcha ustunning esa barcha kataklariga belgi qo'yiladi.

b) $t > 1$ sikllarda yangi matritsaga tuzatilgan belgilar sistemasi o'zidan oldingi matritsadan nomersiz ko'chiriladi (1-punktga qaralsin).

4-punktga o'tiladi.

4. *Belgilarni nomerlash* (*taqsimot tartibini aniqlash*):

Faqat asosiy ustunlardagi belgilar nomerlanadi. Nomerlash tartib bilan avval birinchi ustundan boshlab, hamma ustunlar keyin birinchi qatordan boshlab, hamma qatorlar va yana ustunlar va h.k. qarab chiqilib, o'z ustunida (qatorida) yagona nomerlanmagan belgiga (albatta, birdan boshlab) navbatdagi nomer qo'yiladi.

5-punktga o'tiladi.

5. *Taqsimot rejasini tuzish*:

a) belgilar nomerlarini qat'iy tartibi bo'yicha tegishli kataklarga x_{ij}^{t} va z_{ij}^{t} qiymatlar hisoblanadi. Buning uchun quyidagilarni hisoblash kerak:

1) qoldiq hajm - $b_j^{*} = b_j - \sum_{i} x_{ij}^{t}$,

2) qoldiq quvvat - $a_i^{*} = a_i - \sum_{j} z_{ij}^{t}$.

Agar $c_{ij} b_j^{*} \le a_i^{*}$ tengsizlik bajarilsa $x_{ij}^{t} = b_j^{*}$ va $z_{ij}^{*} = c_{ij} x_{ij}^{t}$ hisoblanadi, $c_{ij} b_j^{*} > a_i^{*}$ tengsizlik bajarilgan holda esa $z_{ij}^{t} = a_i^{*}$ va $x_{ij}^{t} = \dfrac{z_{ij}^{t}}{c_{ij}}$ hisoblanadi.

b) qo'shimcha - b_{l+1} ustunda hech qanday qiymatlar hisoblanmaydi, taqsimot bajarilgandan so'ng $z_{i,l+1}^{t} = a_i - \sum_{j} z_{ij}^{t}$ aniqlanadi.

6-punktga o'tiladi.

6. *Tekshirish:*

a) barcha asosiy ustunlar uchun $\beta_j^{t} = b_j - \sum_{i} x_{ij}^{t}$ qiymatlar hisoblanadi.

b) o'z qatorida hech bo'lmasa bitta nolga teng bo'lmagan β_j^{t} mavjudmi?

Ha $\rightarrow$ 7-punktga o'tilsin; yo'q $\rightarrow$ 12-punktga o'tilsin.

7. *Quvvat qoldiq'ini tekshirish*:

b_{l+1} ustunda $z'_{i,l+1}$ ning hech bo'lmasa bitta nolga teng bo'lmagan qiymati mavjudmi?

Ha $\rightarrow$ 8-punktga o'tilsin; yo'q $\rightarrow$ 13-punktga o'tilsin.

8. *Ustun va qator xarakteristikalari:*

a) $\beta'_j > 0$ bo'lgan ustunlarning UX (ustun xarakteristikasi) qatoriga minus ishoralar qo'yib chiqiladi;

b) belgili kataklarning hammasi nomerlarning oxirgisidan boshlab ularning pasayish tartibida qarab chiqiladi va ustun xarakteristikasi qatorida matritsaning qaralayotgan katagida $x'_{ij} > 0$ va unga mos qatorning xarakteristikasi ham minus (manfiy) bo'lsa hech qanday qo'shimcha belgi qo'yilmaydi.

Belgili kataklar bir marta qarab chiqilgandan so'ng ishorasiz qolgan ustun xarakteristikasi (UX) va qator xarakteristikalar (QX) ga plyus ishora qo'yib chiqiladi.

9. *Yangi siklga o'tish mumkinligini tekshirish*:

Minus ishora qo'yilgan ustunlarning birortasida plyus (musbat) ishora qo'yilgan qatorda hech bo'lmasa bitta c'_{ij} - indeks mavjudmi?

Ha $\rightarrow$ 10 - punktga o'tilsin; yo'q $\rightarrow$ 13-punktga o'tilsin.

10. Δ'_j, $\Delta'_{\min}$ *(ustunlar bo'yicha indekslarning minimal ortishi) ni aniqlash:*

a) Musbat ustunlar uchun Δ'_j hisoblanmaydi;

b) manfiy ishorali ustunlarda: $\Delta'_j = \min_i c'^{+}_{ij} - \min_i c'^{-}_{ij}$,

bu yerda: $\min_i c'^{+}_{ij}$ j – ustunning musbat qatorlaridagi eng samaradorlik indeksi, $\min_i c'^{-}_{ij}$ j - ustunning barcha manfiy qatorlaridagi eng kichik samaradorlik indeksi;

v) Δ'_j larning eng kichigidan bittasi $\Delta'_{\min}$ bilan belgilanib, doiraga olinadi.

11-punktga o'tilsin.

11. *Belgilarni tuzatish (ta'minotchilarni yangitdan tanlash):*

a) hamma ustunlar, shu bilan birga qo'shimcha ustun ko'rib chiqiladi va har xil ishorali ustun va qator xarakteristikalariga ega bo'lgan belgilar o'chiriladi;

b) $\Delta'_{\min}$ tanlangan ustunning musbat qatorlaridagi eng kichik samaradorlik indeksiga ega bo'lgan katagiga yangi qo'shimcha belgi qo'yiladi.

1-punktga o'tilsin, ya'ni yangi sikl boshlansin.

12. *Optimal yechim*:

Oxirgi siklda hosil qilingan x'_{ij}, z'_{ij} qiymatlar masalaning optimal yechimi bo'ladi. Stop!

Masala. Korxona uchta dastgohda uch xil mahsulot ishlab chiqarish imkoniyatiga ega. Har bir dastgoh uchala xil mahsulotni ham tayyorlashi mumkin. 1-dastgohning vaqt fondi 600 soatni, ikkinchisiniki 300 soatni, uchinchisiniki 440 soatni tashkil qiladi. Korxona birinchi xil mahsulotdan 40 birlik, ikkinchi xilidan 100 birlik, uchinchi xilidan 50 birlik tayyorlash majburiyatini olgan. Mahsulotlarni tayyorlashga sarflanadigan vaqt normalari jadvalda berilgan. Imkoni boricha vaqtni iqtisod qilib, dastgohlarni ish bilan band bo'lishining optimal rejasi tuzilsin.

Yechish. Masalaning berilganlarini jadvalga joylashtiramiz:

a_i/b_j	40	100	50
600	8	2	24
300	8	4	12
440	12	2	16

1-sikl

a_i/b_j	40	100	50	QX	b_{i+1}
600	8 0 $\boxed{1}$ 40 320	2 0	24 301	+	0 280
300	8 0 .	4 301	12 0 $\boxed{3}$ 25 300	-	0 0
440	12 176	2 0 $\boxed{2}$ 100 200	16 124 □	+	0 240
b_j^1	0	0	25		
UX	+	+	-		
Δ_j			124		

Birinchi siklda har bir ustundagi c_{ij} lar o‘z ustunida eng kichik bo‘lgan c_{ij} ga bo‘lib, bo‘linmani logorifmining mantissasini esa mos katakning o‘ng yuqori burchagiga yozamiz. Masalan, birinchi ustundagi 8, 8, 12 sonlarning har biri *min*(8, 8, 12) = 8 ga bo‘lib, bo‘linmalar logorifmlarining mantissalari 0, 0, 176 sonlarni mos holda (1,1), (2,1), (3,1) kataklarning o‘ng yuqori burchagiga yozildi. Endi har bir ustunda $\min c^1_{ij}$ ga mos katakka □ - kvadratcha belgilanadi. Birinchi ustunda c^1_{11}=0, ikkinchi ustunda $c^1_{32}=0$ va uchinchi ustunda c^1_{23}=0. Demak, (1,1), (3,2) va (2,3) kataklarga □ - belgi qo‘yamiz. O‘z ustunida yagona bo‘lgan belgilar tartib bilan nomerlandi va ularning tartibiga rioya qilgan holda $x_{11}=40,\ z_{11}=40\cdot 8=320$; $x_{22}=100,\ z_{22}=100\cdot 2=200$; $x_{23}=25,\ z_{23}=25\cdot 12=300$ qiymatlar aniqlanadi. Uchinchi tur mahsulot miqdori 25 birlikka bajarilib, yetmadi, shuning uchun bu ustunning UX qatoriga (-) ishora qo‘yiladi va oxirgi $\boxed{3}$ nomer bo‘yicha QX ustunning ikkinchi qatoriga ham (-) ishora qo‘yiladi. $\boxed{2}$, $\boxed{1}$ nomerlar bo‘yicha QX ustunning birinchi va uchinchi qatorlariga va bir vaqtda UX qatorning birinchi, ikkinchi ustunlariga (+) ishoralar qo‘yiladi. (-) UX ga mos Δ_3=124-0=124 hisoblanib, (3,3) katakka qo‘shimcha belgi (□) qo‘yilib, keyingi siklga o‘tiladi. Keyingi siklga o‘tishda belgilar nomersiz ko‘chadi. (-) UX li ustunlarning barcha c^2_{ij} larning qiymatlariga $\min\Delta_j=\Delta_3$=124 soni qo‘shib ko‘chiriladi va ikkinchi sikl jadvalida birinchi sikldagi kabi jarayonlar takrorlanadi va bunday jarayon b_j qator elementlari nolga aylanguncha davom ettiriladi.

2-sikl

a_i/b_j	40	100	50	QX	b_{i+1}
600	8 0 $\boxed{1}$ 40 320	2 0 $\square$	24 301	+	0 280
300	8 124	4 425	12 124 $\boxed{3}$ 25 300	-	124 0
440	12 176	2 0 $\boxed{2}$ 100 200	16 124 $\boxed{4}$ 15 240	-	0 0
b_j	0	0	10		
UX	+	-	-		
Δ_j		0	77		

Ikkinchi siklda ham birinchi sikldagi kabi jarayon takrorlanadi.

3-sikl

a_i/b_j	40	100	50	QX	b_{i+1}
600	8 0 $\boxed{1}$ 40 320	2 0 $\boxed{5}$ 80 150	24 301		0 120
300	8 124	4 425	12 124 $\boxed{2}$ 25 300		124 0
440	12 116	2 0 $\boxed{4}$ 20 40	16 124 $\boxed{3}$ 25 400		0 0
b_j	0	0	0		

Oxirgi jadvalda optimal yechim topildi. Demak, birinchi dastgoh hammasi bo'lib 470 soat vaqt sarflab birinchi xil mahsulotning hamma 40 birligini va ikkinchi xilining 80 birligini tayyorlaydi. Ikkinchi dastgoh esa hamma 300 soat vaqtini sarflab uchinchi xil mahsulotning 25 birligini tayyorlaydi. Uchinchi dastgoh ikkinchi xil mahsulotning 20 birligini, uchinchi xil mahsulotning esa 25 birligini tayyorlab, hamma 440 soatini sarflaydi.

Mustaqil yechishga doir masalalar

Matritsali ko'rinishda berilgan seriyali ishlab chiqarish masalalarining optimal rejalari tuzilsin:

a_i/b_j	200	120	200
480	2	1	2
120	3	2	1
550	4	4	4

a_i/b_j	50	10	40
75	3	1	2
100	4	0,5	3
100	6	0,5	2

a_i/b_j	500	400	1000
1000	4	3	6
3000	6	2	5
6000	8	1	8

a_i/b_j	40	100	50
300	4	1	12
200	6	7	8
400	4	2	6

	200	160	400
300	3	2	1
600	6	2	0,5
400	4	3	0,5

	400	240	400
480	1	0,5	1
120	1,5	1	0,5
560	2	2	2

8.2. Oqimli ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasi

Masalaning qo'yilishi:

Quyidagi chegaraviy shartlarda:

$$\sum_i x_{i1} = \sum_i x_{i2} = \dots = \sum_i x_{il},$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_j \frac{1}{c_{ij}} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,k} \quad j = \overline{1,l},$$

$$y = \sum x_{ij}$$

funksiyaning maksimum qiymati topilsin.

Masalani yechish algoritmini keltirishdan avval belgilashlar kiritamiz:

i, $i = \overline{1,k}$ – ta'minotchi raqami;

j, $j = \overline{1,l}$ – iste'molchi raqami;

t –sikl raqami;

c_{ij} – samaradorlik koeffitsiyenti (1- punktga qaralsin);

c^t_{ij} – samaradorlik indeksi (2- punktga qaralsin);

x_{ij} – i quvvat hisobiga bajariladigan j- hajm birligi (4- punktga qaralsin);

z_{ij} – i quvvatning j- hajmni bajarishga sarflanadigan qismi;

t_{ij} – j - hajm qondirilishi uchun i - quvvat birligi (4- punktga qaralsin);

b_j – bajarilgan j - hajmning umumiy miqdori (5- punktga qaralsin);

Δ_j – indekslarning umumiy ortishi (7- punktga qaralsin).

Masalani yechish uchun matritsa sxemasidan foydalanamiz:

№	1 . . . j . . . l
1 : i : k	c_{ij} c^t_{ij} z_{ij} x^t_{ij}
b_j	$b^t_j = \sum_i x_{ij}$
UX	«+» yoki «-» ishoralar
Δ_j	

Oqimli ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasini yechish algoritmi:

1. *Asosiy ko'rsatkichlar*:

Quvvat nomeri ($i=\overline{1,k}$), hajm nomeri ($j=\overline{1,l}$) va samaradorlik indeksi (c_{ij}) masala shartidan olinadi va barcha sikllarda o'zgarmaydi. Masalan, agar i ma'lum turdagi dastgohlarning nomerlari, j mahsulot turi (detal, detal/operatsiya va h.k) bo'lsa, komplekt mahsulot ishlab chiqarishning mumkin bo'lgan maksimal imkoniyati: $c_{ij}=\dfrac{a_i}{t_{ij}g_j}$ bo'ladi, bu yerda

a_i – ishlab chiqarish davrida i turdagi dastgohning ish vaqti fondi;

t_{ij} – i turdagi dastgohda j turdagi mahsulotning bir birligini tayyorlashga sarflanadigan vaqt normasi;

g_j – bitta komplektga kiruvchi j - turdagi mahsulot miqdori.

Agar j hajm bajarilishi uchun i quvvat yetarli bo'lmasa, masalani yechish uchun tuzilgan matritsaviy mos katak o'chirib qo'yiladi.

2. *Samaradorlik indeksi*:

a) birinchi siklning har bir ustunida:

$$c^1_{ij} = \lg c_{ij} - \min_i \min(\lg c_{ij}) \text{ hisoblanadi;}$$

b) barcha $t>1$ uchun esa musbat qatorlarda: $c^t_{ij} = c^{t-1}_{ij}$, manfiy qatorlarda: $c_{ij} = c^{t-1}_{ij} + \Delta^{t-1}_{\min}$ (6,7-punktlarga qaralsin).

3. *Belgilarni qo'yish* (*ta'minotchi tanlash*):

Hamma sikllarda samaradorlik indekslari o‘z qatorida eng katta (bir yoki bir nechta o‘zaro teng) bo‘lgan kataklarga belgi qo‘yiladi (barcha qatorlarda).

4. *Quvvatlarni taqsimlash* (z'_{ij}, x'_{ij}):

a) belgi qo‘yilmagan kataklarda $z'_{ij}=0$ (nolni katakga yozmagan ma’qul);

b) qaralayotgan qatorda yagona belgi mavjud bo‘lsa, belgili katakka $z'_{ij}=1$ yoziladi;

v) birdan ortiq belgiga ega bo‘lgan qatorlarda z'_{ij} - lar qiymatlarining yig`indisi birga tenglanadi va z'_{ij} - lar qiymatlari noaniq bo‘lgan ustunlardagi qondirilgan hajmlar ($\sum_j c_{ij}z'_{ij}$) o‘zaro tenglanib, tenglamalar sistemasi tuziladi. Sistemani yechib, z'_{ij} larning qiymatlari barcha ustunlarda aniqlangandan so‘ng $z'_{ij}>0$ kataklarda $x'_{ij}=c_{ij}z'_{ij}$ qiymatlar hisoblanadi va mos kataklarga joylashtiriladi.

Eslatma. Tenglamalar sistemasini yechish jarayonida $z'_{ij}<0$ hosil bo‘lsa, $z'_{ij}=0$, $z'_{ij}>1$ da esa $z'_{ij}=1$ qiymatlar qabul qilinadi.

5. *Optimallikni tekshirish:*

a) barcha ustunlarda $b'_j=\sum_i x_{ij}$ hisoblanadi;

b) barcha ustunlar bo‘yicha $b'_1=b'_2=...=b'_l$ tengliklar bajarilsa 8-inchi punktga, bajarilmasa 6- punktga o‘tilsin.

6. *Ustun xarakteristikasi* (UX):

Eng kichik qiymatli (bir yoki bir nechta o‘zaro teng) b'_j ga ega bo‘lgan ustunlarning UX qatoriga «-» ishora, qolganlariga esa «+» ishora qo‘yiladi.

7. Δ_j *va* Δ_{min} *- larning qiymatlarini aniqlash*:

a) ustun xarakteristikasiga «+» ishora qo‘yilgan ustunlar uchun Δ_j ning qiymati hisoblanmaydi;

b) «-» ishorali ustunda Δ_j ning qiymati uchun «+» ishorali ustunning samaradorlik indeksidan shu ustunning belgi qo‘yilgan katagidagi samaradorlik indeksini ayirmasining minimum qiymati olinadi:

$$\Delta_j=\min_i\left[c'^{+}_{ij}-c'_{ij}\right],\ i=\overline{1,l};$$

v) $\Delta_{min}=\min_j \Delta_j$ tanlanadi;

g) b'_j qiymatlarning o‘zaro tenglik sharti bajarilmagan, lekin Δ_j larning birorta ham qiymatini hisoblash mumkin bo‘lmaydi. Bu holda quvvatlarni to‘la sarflash mumkin emas.

8. *Optimal yechimni yozish*:

Optimal yechim oxirgi siklda topilgan x_{ij} va z_{ij} qiymatlaridan iboratdir.

Masala. Mahsulot ishlab chiqarish rejalashtirilgan davrda komplekt mahsulotni shunday tayyorlash kerakki, har bir xil mahsulotdan teng miqdorda bo‘lsin. Quyidagi jadvalning birinchi qatorida komplektga kiruvchi mahsulot turlari, birinchi ustunda esa mahsulotlarni tayyorlash mumkin bo‘lgan dastgoh nomerlari, o‘rta qismida – quvvat berilgan.

№	1	2	3
1	90	80	80
2	30	30	50
3	20	20	60

1-sikl

№	1		2		3	
1	90 $z_{11}=1$	4,5 $\boxed{653}$	80	4 602	80	1,6 204
2	30 $z_{21}=0$	1,5 $\boxed{176}$	30 $z_{22}=1$	1,5 $\boxed{176}$	50	1 0
3	20	1 0	20	1 0	60 $z_{33}=1$	1,2 $\boxed{79}$
b_j	90		30		60	
UX	+		-		+	
Δ_j			51			

Birinchi siklda har bir ustundagi eng kichik quvvat miqdoriga tegishli ustundagi quvvat miqdorlariga bo'lib, bo'linmani mos katakning o'ng yuqori burchagiga yozamiz, bu sonlarning logorifmining mantissasini esa uning pastiga joylashtiramiz. Masalan, birinchi ustundagi 90,30,20 sonlarning har biri *min*(90,30,20)=20 ga bo'lib, 4,5; 1,5; 1 sonlarni mos holda (1,1), (2,1), (3,1) kataklarning o'ng yuqori burchagiga yozildi. Ularning logorifmlarini mantissalari c_{11}^1=653, c_{21}^1=176, c_{31}^1=0 (samaradorlik indekslar) esa mos ravishda tegishli kataklarga joylashtirildi. Endi har bir qatorda $\max c_{ij}^1$ qiymatlar □ - kvadratchada belgilanadi. Birinchi qatorda c_{11}^1=653, ikkinchi qatorda c_{21}^1=176 va c_{22}^1=176, uchinchi qatorda c_{31}^1=0. Birinchi qatorda belgi yagona bo'lgani uchun $z_{11}=1$, ikkinchi qatorda $z_{21}+z_{22}=1$, uchinchi qatorda belgi yagona bo'lgani uchun, belgi qo'yilmagan kataklarda $z_{ij}^l=0$. Birinchi ustunda ikkita belgi bo'lgani uchun $\sum_j c_{ij}z_{ij}^1$ - yig'indilar o'zaro tenglanadi, yani:

$$90z_{11}+30z_{21}=30z_{22}=60z_{33}$$

tenglamalar sistemasi tuziladi. Yuqoridagi eslatmani hisobga olsak, $z_{11}=1$, $z_{21}=0$, $z_{22}=1$, $z_{33}=1$ hosil bo'ladi. $x_{ij}^l=c_{ij}z_{ij}^l$ formulaga ko'ra: $x_{11}=90\cdot1=90$, $x_{22}=30\cdot1=30$, $x_{33}=60\cdot1=60$ sonlar b_j qatorning mos kataklariga yoziladi, so'ngra UX qatorning $\min b_j$=30 ga mos katagiga (-) ishora, qolgan kataklariga (+) ishora qo'yildi va (-) ishorali ustunda yuqoridagi qoida bo'yicha $\Delta_2=653-602=51$ hisoblandi. Ikkinchi siklga o'tish uchun ikkinchi ustunning barcha samaradorlik indekslariga $\Delta_2=51$ qo'shib ko'chiriladi va ikkinchi siklda birinchi sikldagi kabi amallar takrorlanadi.

2-sikl

№	1	2	3
1	90 $\boxed{653}$ $z_{11}=\frac{11}{17}$	80 $\boxed{653}$ $z_{12}=\frac{6}{17}$	80 204
2	30 76	30 $\boxed{227}$ $z_{22}=1$	50 0
3	20 0	20 51	60 $\boxed{79}$ $z_{33}=1$
b_j	58,2	58,2	60
UX	-	-	+
Δ_j	79	$\boxed{27}$	

3-sikl

№	1	2	3
1	90 $\boxed{680}$ $z_{11}=13/20$	80 $\boxed{680}$ $z_{12}=7/20$	80 204
2	30 203	30 $\boxed{255}$ $z_{22}=1$	50 0
3	20 27	20 $\boxed{79}$ $z_{32}=1/40$	60 $\boxed{79}$ $z_{33}=39/40$
b_j	58,5	58,5	58,5

Demak, birinchi tur dastgohlar ish vaqtining 13/20 qismida birinchi xil, 7/20 qismida esa ikkinchi xil mahsulotlarni tayyorlasa, ikkinchi tur dastgohlar esa faqat ikkinchi xil mahsulotlarni tayyorlasa, uchinchi tur dastgohlar ish vaqtining 1/40 qismida ikkinchi xil, 39/40 qismida esa uchinchi xil mahsulotlarni tayyorlasa, maksimal miqdorda komplektlar ishlab chiqarish mumkin ekan. Har bir tur mahsulotdan esa 58.5 birlik tayyorlanishi mumkin ekan.

Mustaqil yechishga doir masalalar

№	1	2	3
1	430	344	660
2	86	86	344
3	172	172	1000

№	1	2	3
1	10	24	12
2	20	18	8
3	4	12	18

№	1	2	3
1	365	511	511
2	73	292	438
3	146	365	657

№	1	2	3
1	152	133	152
2	76	76	133
3	95	95	190

№	1	2	3
1	15	6	4
2	5	3	10
3	10	8	5

№	1	2	3
1	40	35	40
2	25	25	50
3	20	20	35

9 - bob. QAVARIQ FUNKSIYALAR

9.1. Asosiy tushunchalar

Qavariq to'plam haqidagi ba'zi tushunchalar bilan yuqoridagi mavzularda tanishgan edik. Ularni quyidagi tushunchalar bilan to'ldiramiz:

$$X = \{X \in E_n, X = \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1, -\infty < \lambda < +\infty\} \qquad (9.1.1)$$

nuqtalar to'plami $X_1, X_2 \in E_n$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $0 \le \lambda \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi λ uchun (9.1.1) $X_1, X_2 \in E_n$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani ifodalaydi. $0 \le \lambda \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi λ uchun $X = \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1$ nuqta X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

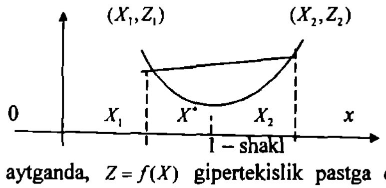
Agar $G \subset E_n$ to'plam o'zining ixtiyoriy X_1, X_2 nuqtalari bilan birga bu nuqtalarning ixtiyoriy qavariq kombinatsiyasini ham o'z ichiga olsa, bunday to'plam qavariq to'plam deyiladi. $G \subset E_n$ qavariq to'plamga tegishli X nuqtani ixtiyoriy $X_1, X_2 \in G$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifoda qilib bo'lmasa, bu nuqta G to'plamning chetki nuqtasi deyiladi. Chetki nuqta chegaraviy nuqta bo'lishi kerak, lekin har qanday chegaraviy nuqta chetki nuqta bo'lmaydi. Ba'zi chegaraviy nuqtalar chetki nuqtalarni tutashtiruvchi kesmada yotishi mumkin. G qavariq to'plam bo'lsa, u ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2 \dots, X_n \in G$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan X nuqtani ham o'z ichiga oladi, ya'ni agar $X_1 \in G, X_2 \in G, \dots, X_n \in G$ bo'lsa,

$$X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \; X \in G, \; \lambda_j \ge 0, \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad \text{bo'ladi.}$$

1-ta'rif. Agar $f(X)$ funksiya $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ son uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda X_1)) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1) \qquad (9.1.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(X)$ funksiya pastga qavariq funksiya deyiladi.



1 – shakl

Boshqacha aytganda, $Z = f(X)$ gipertekislik pastga qavariq bo'lishi uchun uning ixtiyoriy ikkita (X_1, Z_1) *va* (X_2, Z_2) nuqtalarini tutashtiruvchi kesma gipertekislikning sirtida yoki undan yuqorida yotishi kerak (1-shakl). Agar $f(X)$ funksiya $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalar va λ son $(0 \le \lambda \le 1)$ uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1) \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1) \qquad (9.1.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(X)$ yuqoriga qavariq funksiya deb ataladi. $Z = f(X)$ gipertekislik yuqoriga qavariq bo'lsa, uning ixtiyoriy ikki (X_1, Z_1), (X_2, Z_2)

nuqtalarini tutashtiruvchi kesma shu gipertekislikning sirtida yotadi yoki uning pastidan o'tadi (2-shakl). Agar ixtiyoriy ikkita X_1, $X_2 \in G$ nuqtalar va λ son $(0<\lambda<1)$ uchun

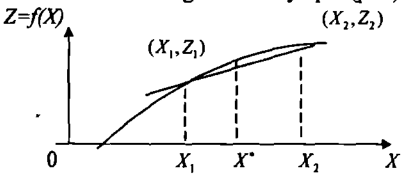
$$f(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)<\lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1) \qquad (9.1.4)$$

yoki

$$f(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)>\lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1) \qquad (9.1.5)$$

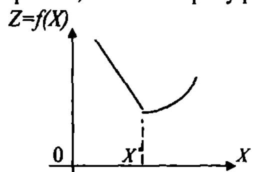
tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $G\subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya qat'iy pastga qavariq yoki qat'iy yuqoriga qavariq bo'ladi.

Geometrik nuqtai nazardan qat'iy past (yuqori)ga qavariq funksiyaning ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma unga nisbatan yuqori (past)dan o'tadi.



2 – shakl

Agar $f(X)$ funksiya $G\subset E_n$ da qat'iy yuqoriga qavariq bo'lsa, $-f(X)$ funksiya shu to'plamda qat'iy pastga qavariq bo'ladi va aksincha. 3-shaklda $f(X)$ funksiya $X>X^*$ da qat'iy pastga qavariq bo'lib, $X<X^*$ da qat'iy pastga qavariq emas.



3 – shakl

1-misol. $Z=CX$ chiziqli funksiya E_n fazoning har qanday nuqtasida pastga (yuqori)ga qavariq bo'ladi. Haqiqatan ham, X_1, $X_2\in E_n$ va ixtiyoriy λ son uchun

$$C(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)=\lambda CX_2+(1-\lambda)CX_1 \qquad (9.1.6)$$

o'rinli, lekin (9.1.6) dan ko'rinadiki, chiziqli funksiya qat'iy yuqoriga ham, pastga ham qavariq bo'la olmaydi.

Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq funksiya bo'lsa, ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2, ..., X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$f(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j)\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(X_j),$$

$$\lambda_j\ge 0,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \qquad (9.1.7)$$

Xuddi shuningdek, agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan yuqoriga qavariq funksiya bo'lsa, ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2, ..., X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$f(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j)\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(X_j),$$
$$\lambda_j\geq 0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \qquad (9.1.8)$$

Qavariq funksiyalarning *ayrim xususiyatlari* bilan tanishamiz.

1. G qavariq to'plamda berilgan $f(X)$ funksiya pastga qavariq bo'lsa, ixtiyoriy haqiqiy b son uchun $f(X)\leq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, X_1, $X_2\in G$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular $f(X_1)\leq b$ va $f(X_2)\leq b$ tengsizliklarni qanoatlantirsin. U holda $X=(1-\lambda)X_1+\lambda X_2$, $X\in G$ nuqta uchun

$$f(X)=f((1-\lambda)X_1+\lambda X_2)\leq b$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Haqiqatan ham, $f(X)$ pastga qavariq funksiya bo'lgani sababli:

$$f(X)=f((1-\lambda)X_1+\lambda X_2)\leq(1-\lambda)f(X_1)+\lambda f(X_2)\leq b.$$

2. G qavariq to'plamda berilgan $f(X)$ funksiya yuqoriga qavariq bo'lsa, b ixtiyoriy son bo'lganda

$$f(X)\geq b$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami yuqoriga qavariq bo'ladi.

3. Ikkita G_1 va G_2 qavariq to'plamning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'lganligi sababli yuqoridagi xossalardan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X)$ $(i=\overline{1,m})$ funksiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo'lib, $b_i(i=\overline{1,m})$ ixtiyoriy sonlar bo'lganda

$$g_i(X)\leq b_i(g_i(X)\geq b_i),\quad i=\overline{1,m}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami pastga (yuqoriga) qavariq to'plam bo'ladi.

4. G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X)(i=\overline{1,m})$ funksiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan

$$g(X)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\, g_i(X),\ \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ i=\overline{1,m} \qquad (9.1.9)$$

funksiya ham pastga (yuqoriga) qavariq bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $g_i(X)$ funksiyalar pastga qavariq bo'lsin, ya'ni

$$g_i(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq\lambda g_i(X_1)+(1-\lambda)g_i(X_2) \qquad (9.1.10)$$

tengsizlik ixtiyoriy haqiqiy son $0\leq\lambda\leq 1$ uchun o'rinli bo'lsin. U holda

$$g_i(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\, g_i(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2).$$

Bundan (9.1.10) ga asosan

$$g_i(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\lambda\, g_i(X_1)+(1-\lambda)g_i(X_2)),$$
$$0\leq\lambda_i\leq 1, i=\overline{1,m}$$

yoki
$$g(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq\lambda\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\, g_i(X_1)+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\, g_i(X_2)= \qquad (9.1.11)$$
$$\lambda\, g(X_1)+(1-\lambda)g(X_2)$$

(9.1.11) dan $g(X)$ funksiyaning pastga qavariq ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, yuqoriga qavariq funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham yuqoriga qavariq bo'lishini isbot qilish mumkin.

5. G qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarining fiksirlangan qiymatlarida, pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi zarur va yetarlidir.

6. Agar $f_1(X), f_2(X),\ldots,f_n(X)$ funksiyalar qavariq G to'plamda aniqlangan funksiyalar bo'lsa, $f(X)=\max\limits_{1\le i\le m} f_i(X)$ funksiya ham qavariq bo'ladi.

9.2. Qavariq funksiyaning ekstremumi

$f(X)$ qavariq funksiyaning $G\subset E_n$ to'plamdagi global maksimumi (minimumi) deb har qanday $X\in G$ nuqtada ham

$$f(X^*)\ge f(X)\ (f(X^*)\le f(X))$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^*\in G$ nuqtaga aytamiz. Agar bu tengsizlik $X^*\in \varepsilon(X^*)$ $(\varepsilon(X^*)=\{X\big|X-X^*\big|<\varepsilon\})$ o'rinli bo'lsa, X^* nuqta $f(X)$ funksiyaga lokal maksimal (minimal) qiymatni beruvchi nuqta bo'ladi.

Qavariq funksiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremalarni keltiramiz:

1-teorema. Agar $f(X)$ funksiyaning G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq funksiya bo'lsa, uning ixtiyoriy lokal minimumi global minimum bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $f(X)$ funksiya $X^*\in G$ da lokal va $X^{\bullet}\in G$ da global minimumga erishsin. U holda

$$f(X^*)>f(X^{\bullet}).$$

$f(X)$ funksiya pastga qavariq bo'lganligi sababli ixtiyoriy $0\le\lambda\le1$ uchun

$$f(\lambda X^{\bullet}+(1-\lambda)X^*)\le\lambda f(X^{\bullet})+(1-\lambda)f(X^*) \qquad (9.2.1)$$

G to'plamda qavariq bo'lganligi uchun esa

$$X=\lambda X^{\bullet}+(1-\lambda)X^*\in G,\ \lambda\in[0,1] \quad \text{bajariladi.}$$

(9.2.1) dagi $f(X^{\bullet})$ ni $f(X^*)$ ga almashtirsak,

$$f(\lambda X^{\bullet}+(1-\lambda)X^*)<\lambda f(X^*)+(1-\lambda)f(X^*)=f(X^*) \qquad (9.2.2)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

λ sonni shunday tanlab olamizki, natijada $X=\lambda X^{\bullet}+(1-\lambda)X^*$ nuqta $X^*\in G$ nuqtaga iloji boricha yaqin, ya'ni $\left|X-X^*\right|<\varepsilon$ bo'lsin. Lekin, bu holda (9.2.2) dan ko'rinadiki, $X^*\in G$ nuqtada $f(X)$ funksiya lokal minimumga erishmaydi. Bu esa teorema shartiga qarama – qarshidir. Demak, $X^{\bullet}=X^*$ bo'lishi kerak.

2-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda pastga (yuqoriga) qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita X_1, $X_2\in G$ nuqtalarda global ekstremumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

Isbot. Faraz qilaylik, berilgan $f(X)$ funksiya ikkita X_1 va X_2 nuqtalarda global minimumga erishsin. U holda ixtiyoriy $X\in G$ nuqta uchun $m=f(X_1)=f(X_2)<f(X)$

o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda m $f(X)$ funksiyaning global minimum qiymati. Endi X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan $\tilde{X}$ nuqtani olamiz:

$$\tilde{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$$

hamda bu nuqtadagi $f(X)$ funksiyaning qiymatini aniqlaymiz:

$$f(\tilde{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)$$

$f(X)$ funksiya pastga qavariq funksiya bo‘lgani uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$f(\tilde{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2).$$

Bundan $f(X_1) = f(X_2) = m$ ekanini hisobga olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(\tilde{X}) = f(X_1) = m.$$

Demak, $\tilde{X}$ nuqtada ham $f(X)$ funksiya global minimumga erishadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

Xuddi shunday yo‘l bilan yuqoriga qavariq $f(X)$ funksiya G qavariq to‘plamda qavariq bo‘lib, unga tegishli ikkita X_1 va X_2 nuqtalarda global maksimumga erishsa, u shu nuqtalarning ixtiyoriy qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan X nuqtada ham global maksimumga erishishini ko‘rsatish mumkin.

3-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan qat’iy pastga qavariq funksiya bo‘lsa, u o‘zining global minimumiga shu to‘plamning faqat bitta nuqtasida erishadi.

Isbot. Faraz qilaylik, $f(X)$ funksiya ikkita $X_1, X_2 \in G$ nuqtalarda global minimumga erishsin, ya’ni

$$f(X_1) = f(X_2) = m, \tag{9.2.3}$$

bu yerda m $f(X)$ funksiyaning global minimum qiymati. Endi X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan $f(X)$ nuqtani qaraymiz. Yuqorida isbot qilingan 2-teoremaga asosan

$$f(\tilde{X}) = m. \tag{9.2.4}$$

Ikkinchi tomondan $f(X)$ funksiya qat’iy pastga qavariq bo‘lganligi sababli

$$f(\tilde{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan (9.2.3) ga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$f(\tilde{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < m.$$

Shunday qilib, (9.2.4) ga zid bo‘lgan xulosaga keldik. Shuning uchun farazimiz noto‘g`ri bo‘lib, teorema shartini qanoatlantiruvchi $f(X)$ funksiya G to‘plamning faqat bitta nuqtasida global minimumga erishadi degan xulosaga kelamiz.

4-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan qat’iy yuqoriga qavariq funksiya bo‘lsa, u o‘zining global maksimumiga shu to‘plamning faqat bitta nuqtasida erishadi.

Bu teorema 3–teorema kabi isbot qilinadi.

5-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan pastga qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, ixtiyoriy ichki $X^0 \in G$ *ea* $X \in G$ nuqtalar uchun

$$[\nabla f(X^0)]' \; (X - X^0) \le f(X) - f(X^0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $f(X)$ funksiyaning $X^\circ \in G$ nuqtadagi gradiyenti:

$$\nabla f(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_n}\right)'.$$

Isbot. $f(X)$ funksiya pastga qavariq bo'lganligi sababli ixtiyoriy $0\le\lambda\le 1$ son uchun

$$X+(1-\lambda)X^0)\le\lambda\, f(X)+(1-\lambda)\, f(X^0)$$

Bundan

$$\frac{f(X^0+\lambda(X-X^0))-f(X^*)}{\lambda}\le f(X)-f(X^0) \qquad (9.2.5)$$

U holda Teylor formulasiga asosan

$$f(X^0+\lambda(X-X^0))=f(X^0)+\nabla f(X^0+\theta\lambda(X-X^0))\,\lambda(X-X^0),\quad 0\le\theta\le 1$$

munosabat o'rinli bo'lganligi sababli ixtiyoriy $\lambda\ne 0$ uchun (9.2.5) quyidagiga teng kuchli bo'ladi:

$$[\nabla f(X^0+\theta\lambda(X-X^0))]'\;(X-X^0)\le f(X)-f(X^0)$$

Bundan $\lambda\to 0$ da isbotlash talab qilingan

$$[\nabla f(X^0)]'\;(X-X^0)\le f(X)-f(X^0),\quad \forall X\in G$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Shunday yo'l bilan $f(X)$ yuqoriga qavariq funksiya bo'lgan hol uchun

$$[\nabla f(X^0)]'\;(X-X^0)\ge f(X)-f(X^0)$$

tengsizlikning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

6-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0\in G$ nuqtada $\nabla f(X^0)=0$ bo'lsa, $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada global minimumga erishadi.

Isbot. $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lgani uchun yuqorida isbot qilingan 5-teoremaga asosan

$$[\nabla f(X^0)]'\;(X-X^0)\le f(X)-f(X^0),\quad \forall X\in G. \qquad (9.2.6)$$

Bundan tashqari teoremaning shartiga ko'ra

$$\nabla f(X^0)=0$$

U holda (9.2.6) dan

$$f(X)-f(X^0)\ge 0,$$

ya'ni

$$f(X^0)\le f(X),\quad \forall X\in G.$$

Demak, X^0 nuqtada $f(X)$ funksiya eng kichik qiymat (global minimum)ga erishadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

7-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan yuqoriga qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0\in G$ nuqtada $\nabla f(X^0)=0$ bo'lsa, $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada global minimumga erishadi.

Bu teorema yuqoridagi 6-teorema kabi isbot qilinadi.

10-bob. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

10.1. Lokal va global ekstremum qiymatlar

Yevklid fazosi E_n da $f(X), g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Quyidagi

$$g_1(X) \le 0,$$
$$g_2(X) \le 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g_m(X) \le 0$$

shartlarnig barchasini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorlarni mumkin bo'lgan vektorlar, yoki qisqacha qilib mumkin bo'lgan nuqtalar deb ataymiz.

Barcha mumkin bo'lgan nuqtalar ichidan $f(X)$ funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtani topish masalasini shartli ekstremum masalasi deb ataymiz.

Masala simvolik ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$f(X) \to \min(\max) \qquad (10.1.1)$$

$$g_i(X) \le 0\,, \ i=\overline{1,m}\,, \qquad (10.1.2)$$

bu yerda $g_i(X) \le 0$, $i=\overline{1,m}$ munosabatlar qo'yilgan shartlarni ifodalaydi. Shu sababli mos masalaga shartli ekstremum masalasi deb ataladi. Agar masalada i=0 bo'lsa, ya'ni (10.1.2) kabi yoki boshqacha shartlar qo'yilmasa, mos masalaga shartsiz ekstremum masalasi deyiladi va bunday masalalar matematik tahlil kursida yetarli darajada o'rganilgan. Biz bu yerda asosiy e'tiborni shartli ekstremum masalasiga qaratimiz.

Yuqorida bayon etilgan (10.1.1), (10.1.2) masala berilgan $f(X)$ va $g_i(X), i=\overline{1,m}$ funksiyalarning tabiatiga qarab, turlicha nomlanadi va tatbiq etiladi. Agar funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz bo'lsa, masala chiziqsiz programmalashtirish masalasi deb ataladi. Shunga o'xshash chiziqli programmalashtirish, kvadratik programmalashtirish, qavariq programmalashtirish kabi qator masalalarni keltirish mumkin.

Biz quyida $\min f(X) = \max(-f(X))$ ekanligini e'tiborga olib, masalaning maqsad funksiyasini minimumga tekshiramiz, ya'ni quyidagi masalani qaraymiz:

$$f(X) \to \min \qquad (10.1.3)$$

$$g_i(X) \le 0,\ i=\overline{1,m}\,. \qquad (10.1.4)$$

Odatda (10.1.3), (10.1.4) masalani shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli ekstremum masalasi deb ataladi. Biroq bu masalani yordamchi o'zgaruvchilar kiritish yo'li bilan tenglik tipidagi masalaga keltirish mumkin:

$$f(X) \to \min \qquad (10.1.5)$$

$$g_i(X) + x_{n+i} = 0\,, \quad i=\overline{1,m}\,, \qquad (10.1.6)$$

bu yerda x_{n+i}, $i=\overline{1,m}$ – qo'shimcha o'zgaruvchilar deb ataladi. Shu sababli, umumiyatga ziyon yetkazmasdan, bundan buyon quyidagi shartlari tenglik tarzida bo'lgan masalani o'rganamiz:

$$f(X) \to \min \qquad (10.1.7)$$

$$g_i(X)=0\,,i=\overline{1,m}\,. \qquad (10.1.8)$$

Ta'rif: Yuqoridagi (10.1.7), (10.1.8) masalada $f(X)$ funksiyaga minimum qiymat beruvchi X^0 mumkin bo'lgan nuqta masalaning yechimi deb ataladi, ya'ni:

$$f(X^0)=\min f(X),$$
$$g_i(X)=0\,,\, i=\overline{1,m}.$$

Umuman olganda, bunday shartli minimum nuqta mutlaq (global) shartli minimum nuqta deyiladi. Shunga o'xshash nisbiy (lokal) shartli minimum nuqtani ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Biror yetarlicha kichik ε>0 berilganda X^0 ning ε atrofidan olingan barcha X mumkin bo'lgan nuqtalar uchun $f(X^0)\le f(X)$ shart bajarilsa, X^0 – nisbiy (lokal) shartli minimum nuqta deb ataladi.

Agar (10.1.7), (10.1.8) masalada $f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalarning tabiati haqida ma'lumotlar qancha ko'p bo'lsa, masalani yechish imkoniyati ham shuncha kengayib boradi. Biz $f(X)$ va $g_i(X)$ larni uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilib, masalani yechishning klassik usullaridan birini keltiramiz.

Noma'lumlarni yo'qotish usuli

Agar o'rganilayotgan (10.1.7), (10.1.8) masalada

$$\left\{\frac{dg_1(X^0)}{dx},\dots,\frac{dg_m(X^0)}{dx}\right\}=m \qquad (10.1.9)$$

bo'lsa, lokal minimum X^0 ni quyidagicha topish mumkin. Ma'lumki, agar (10.1.9) shart bajarilsa, oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga ko'ra, $g_i(X)=0\,,\, i=\overline{1,m}$ munosabatdan, X^0 nuqta atrofida o'zgaruvchilardan m tasining qolganlari orqali ifodalash mumkin. Aniqlik uchun dastlabki $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilarni aniqlash mumkin bo'lsin deylik:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n)\\ x_2 &= \varphi_2(x_{m+1},\dots,x_n)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_m &= \varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n) \end{aligned} \qquad (10.1.10)$$

Bu munosabatlarni inobatga olgan holda $f(X)\to\min$ ni quyidagicha ifodalaymiz:

$$f(X)=f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\varphi_2(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n)=$$
$$=F(x_{m+1},\dots,x_n)\to\min$$

Endi, $f(X)$ ning nisbiy shartli minimum nuqtasi $F(x_{m+1},\dots,x_n)$ ning shartsiz nisbiy minimum nuqtasi bilan ustma-ust tushishini, teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlash qiyinchilik tug'dirmaydi. $F(x_{m+1},\dots,x_n)$ ning minimum nuqtasini, ya'ni $x_{m+1}^0,\dots,x_n^0$ ni topgandan so'ng (10.1.10) munosabatlar yordamida $x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,x_m^0$ larni va natijada $X^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,x_n^0)$ nuqtani aniqlaymiz.

Bu usulni aniq masalada namoyish etaylik.

Masala. Berilgan S yuzali metallgan gaz yoki neft mahsulotlari saqlash uchun eng katta sig'imli idish yasash talab etilayotgan bo'lsin. Bosimga chidamlilik va tashishga qulaylik kabi parametrlar idishni silindr shaklida yasashni taqozo etadi.

Shunday qilib, to'la sirti S bo'lgan barcha silindrlar ichidan eng katta hajmga ega bo'lganini topish masalasini qaraylik.

Yechish. Masalani analitik ifodalaymiz:

$$\pi x^2 u \to \max \qquad (10.1.11)$$

$$2\pi x^2 + 2\pi x u = S \qquad (10.1.12)$$

munosabatdan

$$u = (S - 2\pi x^2)/2\pi x$$

qiymatni (10.1.11) ga qo'yib, quyidagi shartsiz ekstremum masalasiga kelamiz:

$$f(X) = x/2(S - 2\pi x^2) \to \max$$

Bundan shartsiz maksimumning zaruriy shartiga ko'ra, hosila olib topamiz:

$$f'(x) = 1/2(S - 6\pi x^2)$$

$f'(x)=0$ dan $x_0=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $u_0=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ larga ega bo'lamiz. x_0 nuqta atrofida 1-tartibli hosila o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirishini hisobga olib, x_0, u_0 miqdorlar biz izlagan miqdorlar ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, eng katta sig'imli silindr – asosining diametri balandligiga teng bo'lgan silindrdir. Bu masalaning mohiyati shundaki, tejalgan har bir metall bo'lagi katta iqtisodiy foyda keltiradi.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining **optimal yechimini geometrik talqindan** foydalanib topish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini, ya'ni mumkin bo'lgan yechimlar to'plamini qurish kerak (agar bu to'plam bo'sh bo'lsa, masala yechimga ega bo'lmaydi).
2. $f(x_1, x_2 ..., x_n) = Q$ gipersirtni yasash kerak.
3. Q ning qiymatini o'zgartirib borib, eng past sath – gipersirt topiladi yoki furksiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanadi.
4. Mumkin bo'lgan yechimlar to'plamining eng past sath gipersirt bilan kesishgan nuqtasi aniqlanadi va f funksiyaning bu nuqtadagi qiymati topiladi.

10.2. Shartsiz optimallashtirish masalalari

Shartsiz ekstremum masalasining yechimini topish talab qilingan bo'lsin, ya'ni

$$f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

funksiyaning maksimumini (minimumini)

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$$

nuqtalarda qidirish kerak bo'lsin.

$f(X)$ funksiya birinchi tartibli hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsa, uning ekstremumi quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (10.2.1)$$

Demak, berilgan $f(X)$ funksiya X_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta (10.2.1) sistemaning yechimi bo'lishi kerak.

Agar $f(X)$ funksiya X_0 nuqtada lokal maksimumga erishsa, shunday $\varepsilon>0$ son mavjud bo'ladiki, ixtiyoriy $X\in\varepsilon\ (X_0)$ nuqta uchun ($\varepsilon\ (X_0)$ X_0 nuqtaning kichik ε atrofidagi nuqtalar to'plami) $f(X)\le f(X_0)$ tengsizlik bajariladi.

$X\in\varepsilon\ (X_0)$ nuqtani $X=X_0+h\ell_j,\ 0<|h|<\varepsilon,$ ko'rinishda yozamiz, bu yerda $\ell_j\ (j=\overline{1,n})$ birlik vektorlar. Bu holda $0<|h|<\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi h uchun

$$f(X_0+h\ell_j)-f(X_0)\le 0, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (10.2.2)$$

o'rinli bo'ladi, bundan:

$$\frac{f(X_0+h\ell_j)-f(X_0)}{h}\le 0, \quad h>0 \qquad (10.2.3)$$

va

$$\frac{f(X_0+h\ell_j)-f(X_0)}{h}\ge 0, \quad h<0 \qquad (10.2.4)$$

(10.2.3) va (10.2.4) tengsizliklardan $h\to+0$ da va $h\to-0$ da limitga o'tib, mos ravishda $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}\le 0$ va $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}\ge 0$ tengsizliklarni hosil qilish mumkin.

Bulardan

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (10.2.5)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Xuddi shunday yo'l bilan X_0 nuqta $f(X)$ funksiyaga lokal minimum beruvchi nuqta bo'lgan holda ham, (10.2.5) o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin. (10.2.5) tengliklar X_0 nuqtada $f(X)$ funksiya lokal maksimum yoki minimumga ega bo'lsa, shu nuqtada undan n ta $x_1,x_2,\dots,x_n$ noma'lumlar bo'yicha olingan xususiy hosilalar 0 ga teng bo'lishi kerakligini ko'rsatadi. Lekin bunda (10.2.1) shartni qanoatlantiruvchi har qanday nuqta ham funksiyaga lokal minimum yoki maksimum qiymat beradi degan xulosa kelib chiqmaydi. Masalan, $f(X)$ funksiya uchun $f'(X)=0$ shart egilish nuqtasida o'rinli bo'lib, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin. Shuningdek, ikki argumentli $f(x_1,x_2)$ funksiya uchun $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$ shartlar egar nuqtada ham bajarilib, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin.

(10.2.1) sistemaning yechimlarini statsionar nuqtalar deb ataymiz. Berilgan $f(X)$ funksiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funksiya ekstremumga erishavermaydi.

Demak, (10.2.1) shart funksiya ekstremumining mavjudligi uchun zaruriy shart, lekin u yetarli shart emas. Quyidagi teorema statsionar nuqtaning birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari uzluksiz bo'lgan n o'zgaruvchili uzluksiz

$f(X)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyaning ekstremal nuqtasi bo'lishi uchun yetarlilik shartini ko'rsatadi.

Teorema. X_0 statsionar nuqta ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi Gesse matritsasi deb ataluvchi

$$H|X_0|=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1\,\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2}\cdots & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n\,\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsa musbat aniqlangan (bu holda X_0 – minimum nuqta) yoki manfiy aniqlangan (bu holda X_0 – maksimum nuqta) bo'lishi yetarlidir.

Isbot. Teylor teoremasiga asosan, $0<\theta<1$ da

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\nabla f(X_0)h+\frac{1}{2}h'H\left[X_0+\theta h\right]\cdot h, \qquad (10.2.6)$$

bu yerda $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)$ $-n$ o'lchovli vektor ustun, h' esa n o'lchovli vektor qator va $|h_j|$ $(j=\overline{1,n})$– yetarli darajada kichik son, $H[X_0+\theta h]$ – Gesse matritsasining $X_0+\theta h$ nuqtadagi qiymati.

$$\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n}\right)'$$

n o'lchovli gradiyent deb ataluvchi vektor.

X_0 nuqta statsionar nuqta bo'lganligi uchun bu nuqtada (10.2.5) o'rinli bo'ladi, demak, bu holda

$$\nabla f(X_0)=0 \qquad (10.2.7)$$

(10.2.6) va (10.2.7) dan

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\frac{1}{2}h'H\left[X_0+\theta h\right]h \qquad (10.2.8)$$

Faraz qilaylik, X_0 minimum nuqta bo'lsin. U holda

$$f(X_0+h)>f(X_0)$$

tengsizlik ixtiyoriy $h\neq 0$ uchun o'rinli bo'ladi, demak, bu holda

$$\frac{1}{2}h'H\left[X_0+\theta h\right]h>0$$

$f(X)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uzluksiz bo'lganligi uchun $\frac{1}{2}h'Hh$ miqdor X_0 va $X_0+\theta h$ nuqtalarda bir xil ishorali bo'ladi va $h'H[X_0]h$ kvadratik formadan iborat. Shuning uchun bu formaning (jumladan $h'H[X_0+\theta h]h$ formaning) musbat bo'lishi $H[X_0]$ ning musbat aniqlangan matritsa bo'lishiga bog'liq.

Demak, X_0 statsionar nuqta minimum nuqta bo'lishi uchun shu nuqtadagi Gesse matritsasi ($H[X_0]$) musbat aniqlangan bo'lishi yetarli ekan. Xuddi shunday yo'l bilan X_0 statsionar nuqtaning maksimum nuqta bo'lishi uchun $H[X_0]$ manfiy aniqlangan bo'lishi yetarli ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-teorema. X_0 statsionar nuqtada

$f'(X_0)=0,\ f''(X_0)=0,\dots,f^{(n-1)}(X_0)=0$ va $f^{(n)}(X_0)\neq 0$ bo'lsa, bu nuqta:

a) n toq son bo'lganda egilish nuqta;

b) n juft son bo'lganda ekstremal nuqta bo'ladi hamda $f^{(n)}(X_0)<0$ da funksiya maksimumga, $f^{(n)}(X_0)>0$ da minimumga erishadi.

10.3. Shartli optimallashtirish masalalari

Faraz qilaylik, n o'lchovli R^n fazoda $f(x), g_1(x), g_2(x),\dots,g_m(x)$ skalyar funksiyalar berilgan bo'lsin. Quyidagi:

$$g_1(X)\le 0,$$
$$g_2(X)\le 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$g_m(X)\le 0$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi barcha $X\in R^n$ nuqtalar ichidan shunday $X^0\in R^n$ nuqtani aniqlash kerakki, u nuqtada $f(X)$ funksiya minimumga erishsin:

$$f(X^0)=\min f(X)$$

Aniqlik uchun masalada minimum haqida so'z yuritdik. Agar $f(X)$ funksiya minimumga erishgan nuqtada $f(X)$ funksiya maksimumga erishishini inobatga olsak, bu masalani umumiy deb qarash mumkin. Shunday qilib, masala quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$f(X)\to \min \qquad (10.3.1)$$

$$g_i(X)\le 0,\ i=\overline{1,m},\quad X\in R^n, \qquad (10.3.2)$$

bu yerda (10.3.2) chegaraviy shartlar asosiy shartlarni tashkil etadi. Shu sababli, (10.3.1), (10.3.2) masalaning yechimi bo'lgan $X^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ nuqta shartli minimum nuqta deyiladi. Bu nuqtani izlash masalasiga esa, shartli minimum masalasi deyiladi. Agar $X=\{X: g_i(X)\le 0,\ i=\overline{1,m},\ X\in R^n\}$ deb belgilasak, (10.3.1) va (10.3.2) masalani boshlang'ich berilgan masalaning xususiy holi ekanligini payqash qiyin emas. Yuqoridagi (10.3.2) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni **joiz** nuqtalar deb ataymiz.

(10.3.1), (10.3.2) masalani ixtiyoriy tabiatli funksiyalar sinfi uchun o'rganish mushkul. Shu sababli mazkur bo'limda bu funksiyalarni barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz va uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.

Qaralayotgan masalani o'rganishga qulaylik tug`dirish maqsadida, yordamchi o'zgaruvchilar kiritish hisobiga uni quyidagicha, chegaraviy shartlari tenglik tarzida bo'lgan masalaga keltirish mumkin.

Lemma. Chegaraviy shartlari tengsizlik tarzida bo'lgan (10.3.1), (10.3.2) masala quyidagi

$$f(X)\to \min \qquad (10.3.3)$$

$$g_i(X)+x_{n+i}^2=0,\quad i=\overline{1,m} \qquad (10.3.4)$$

masalaga ekvivalent.

Bu yerda x_{n+i} lar yordamchi o'zgaruvchilar bo'lib, ekvivalentlik quyidagi ma'noda: agar $X^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ joiz nuqta (10.3.1), (10.3.2) masalasining yechimi bo'lsa

$$\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,x_{n+1}^0,\dots,x_{n+m}^0\right)=\left(X^0,\left[-g_1(X^0)\right]^{1/2},\dots,\left[-g_m(X^0)\right]^{1/2}\right) \qquad (10.3.5)$$

nuqta (10.3.3),(10.3.4) masalaning yechimi bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $X^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ nuqta (10.3.1), (10.3.2) masala yechimi bo'lib, unga mos (10.3.5) nuqta (10.3.3), (10.3.4) masalaning yechimi bo'lmasin. U holda (10.3.3), (10.3.4) masalaning shunday joiz nuqtasi

$$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1},\dots,\bar{x}_{n+m})=(\bar{x},\bar{x}_{n+1},\dots,\bar{x}_{n+m})$$

topiladiki, bu nuqta uchun quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$f(\bar{X})<f(X^0),$$

$$g_i(\bar{X})+\bar{x}_{n+i}^2=0,$$

bundan

$$f(\bar{X})<f(X^0),$$

$$g_i(\bar{X})=-x_{n+i}^2\le 0$$

kelib chiqadi. Bu esa $X^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ nuqtani (10.3.1), (10.3.2) masalaning yechimi deyilishiga zid.

Endi, deylik, X_0 nuqta (10.3.3), (10.3.4) masalaning yechimi bo'lib, mos X^0 nuqta (10.3.1), (10.3.2) masalaning yechimi bo'lmasin. U holda shunday boshqa X^* joiz nuqta topiladiki,

$$f(X^*)<f(X^0), \qquad (10.3.6)$$

$$g_i(X^*)\le 0,\ i=\overline{1,m} \qquad (10.3.7)$$

shart bajariladi. Agar X^* nuqtani

$$x_{n+1}^*=\left(\left[-g_1(X^*)\right]^{1/2},\dots,x_{n+m}^*\right)=\left[-g_m(X^*)\right]^{1/2}$$

kabi nuqtalar bilan to'ldirsak, hosil bo'lgan $(X^*,x_{n+1}^*,\dots,x_{n+m}^*)$ joiz nuqta uchun (10.3.6), (10.3.7) munosabatlar yordamida

$$f(X^*)<f(X^0),$$

$$g_i(X^*)+\left[x_{n+i}^*\right]^2=0$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu esa X^0 nuqtani (10.3.3), (10.3.4) masalaning yechimi deb olinishga zid. Lemma isbotlandi.

Yuqoridagi lemma shartli minimum masalasini chegaraviy shartlari tenglik tarzida bo'lgan holda o'rganish kifoya ekanligini asoslaydi. Shu sababli, belgilashlarni saqlagan holda ushbu

$$f(X) \to \min \tag{10.3.8}$$

$$g_i(X) = 0, i = \overline{1,m}, X \in R_n, \tag{10.3.9}$$

shartli minimum masalasini asosiy masala sifatida tadqiq etamiz.

Ta'rif. Yuqoridagi (10.3.8), (10.3.9) masalada $f(X)$ funksiya X^0 joiz nuqtada nisbiy shartli minimumga erishadi deyiladi, agar shu nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan ixtiyoriy joiz nuqta x uchun

$$f(X^0) \le f(X)$$

shart bajarilsa.

Quyida qaralayotgan masalaning shartli nisbiy minimum nuqtasini topish bilan shug`ullanamiz.

10.4. Shartli optimallashtirish masalasini noma'lumlarni yo'qotish usuli bilan yechish

Faraz qilaylik, (10.3.8), (10.3.9) masala qaralayotgan bo'lsin.

Agar m<n bo'lsa, ba'zi hollarda (10.3.9) tengliklardan noma'lumlarning m tasini qolgan n-m tasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. Qanday shartlar bajarilganda bunday bo'lishi quyidagi lemmadan ko'rinadi.

Lemma. Agar $g_i(X) = 0$, $i = \overline{1,m}$ tengliklarda, $X = X^0$ nuqtada

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(X^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2(X^0)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{10.4.1}$$

matritsaning rangi m ga teng bo'lsa, ya'ni nolda farqli birorta m-inchi tartibli minor topilsa, X^0 nuqta atrofida (10.3.9) tengliklarni m ta nomalumlariga nisbatan yechish mumkin bo'ladi.

Bu lemmaning isboti oshkor bo'lmagan funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremadan kelib chiqadi.

Deylik, qaralayotgan masala uchun (10.4.1) matritsaning rangi m ga teng bo'lsin. U holda masaladagi noma'lumlardan m tasini «yo'qotish» mumkin.

Yuqoridagi lemmaga ko'ra (aniqlik uchun dastlabki m ta o'zgaruvchilarga nisbatan) quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{10.4.2}$$

(10.4.2) ni (10.3.8) ga qo'yib,

$$\begin{aligned} f(X) &= f(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \varphi_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = \\ &= F(x_{m+1}, \dots, x_n) \to \min \end{aligned} \tag{10.4.3}$$

masalaga ega bo'lamiz.

Teorema. Yuqoridagi (10.3.8), (10.3.9) shartli ekstremum masalasi (10.4.3) shartsiz ekstremum masalasiga ekvivalent.

Bu yerda ekvivalentlik shu ma'nodaki, agar $X^0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ joiz nuqta (10.3.8), (10.3.9) masalaning shartli nisbiy minimum nuqtasi bo'lsa, $\left(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\right)$ joiz nuqta (10.4.3) masalaning shartsiz minimum nuqtasi bo'ladi va aksincha, $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ joiz nuqta (10.4.3) masalaning shartsiz minimum nuqtasi bo'lsa $\left(\varphi_1\left(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\right), \dots, \varphi_m\left(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\right), x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\right)$ nuqta (10.3.8), (10.3.9) masalaning shartli minimum nuqtasi bo'ladi.

Bu teoremaning isboti teskarisini faraz qilish yo'li bilan amalga oshiriladi.

Usulni aniq bir masalada ko'raylik.

Masala. Qurilish maydonchasidan to'g`ri magistral yo'lgacha bo'lgan masofa 9 km bo'lib, magistral bo'ylab 15 km uzoqlikda boshqarma joylashgan. Zudlik bilan boshqarmaga borish zarurati tug`ildi. Agar ulovning magistral yo'lgacha bo'lgan tezligi 8 km/s, yo'l bo'ylab 10 km/s bo'lsa, eng qisqa vaqt ichida boshqarmaga borish uchun qanday yo'lni tanlash kerak?

Yechish: Dastlab masalaning matematik modelini tuzaylik. Aniqlik uchun magistral yo'lning izlanayotgan nuqtasini S orqali belgilaylik. Agar qurilish maydonchasini A, boshqarmani D, yo'lning maydonchaga eng yaqin nuqtasini V orqali belgilasak (1-chizma) masala sharti quyidagicha ifodalanadi:

$$T_{AC} + T_{CD} \to \min$$

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 0,$$

bu yerda T_{AS} va T_{SD} – mos masofalarni bosib o'tish uchun ketadigan vaqt.

1-chizma

$AC = x_1$, $BC = x_2$ deb belgilsak, quyidagi

$$\frac{x_1}{8} + \frac{15 - x_2}{10} \to \min, \qquad (10.4.3)$$

$$9^2 + x_2^2 - x_1^2 = 0 \qquad (10.4.4)$$

shartli minimum masalasiga ega bo'lamiz. (10.4.4) shartdan

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + 81}$$

qiymatni topib (10.4.3) ga qo'ysak, ya'ni x_1 ni «yo'qotsak», ushbu

$$F(x_2) = \frac{\sqrt{x_2^2 + 81}}{8} + \frac{15 - x_2}{10} \to \min$$

shartsiz minimum masalasiga ega bo'lamiz.

$$F'(x_2)=\frac{2x_2}{8\cdot\sqrt{x_2^2+81}}-\frac{1}{10}=0$$

shartdan $x_2=12$ va $F''(x_2)>0$ bo'lganligi tufayli $x_2=12$ da funksiya minimumga erishadi.

Demak, eng qisqa vaqtda manzilga yetish uchun D nuqtadan 3 km yuqorida joylashgan E nuqtagacha dala bo'ylab, ED masofani esa magistral yo'l bo'yicha bosib o'tish kerak ekan.

Noma'lumlarni yo'qotish usuli har doim ham yaxshi samara beravermaydi. Ba'zi hollarda noma'lumlardan birini boshqasi orqali ifodalash mushkul bo'lib qoladi. Quyidagi masalani qaraylik:

$$x_1^3-x_2^3\to extr, \qquad (10.4.5)$$

$$x_1^5+(x_1-x_2)^2+x_2^5=2. \qquad (10.4.6)$$

Bu masalada (10.4.6) tenglikdan noma'lumlardan birinchi ikkinchisi orqali analitik ifodalashning qiyinligini izohlashga hojat yo'q.

Shu sababli, shartli minimum masalasini yechishning boshqa usullarini keltirish zarurati paydo bo'ladi. Quyida shunday usullardan birini keltiramiz.

10.5. Lagranj ko'paytuvchilari usuli

Faraz qilaylik, quyidagi shartli minimum masalasi qaralayotgan bo'lsin:

$$f(X)\to\min \qquad (10.5.1)$$

$$g_i(X)=0,\ i=\overline{1,m},\ X\in R^n. \qquad (10.5.2)$$

Lagranj ko'paytuvchilari deb ataladigan yordamchi $\Lambda=(\lambda_0,\Lambda)=(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m)$, $m+1$-o'lchovli vektor yordamida tuzilgan ushbu

$$F(X,\overline{\Lambda})=\lambda_0 f(X)+\lambda_1 g_1(X)+...+\lambda_m g_m(X)$$

funksiya Lagranj funksiyasi deb ataladi.

Teorema. Agar (10.5.1), (10.5.2) masalada X^0 joiz nuqta shartli nisbiy minimum nuqta bo'lsa, shunday birortasi noldan farqli bo'lgan $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m$ sonlar topiladiki, shu nuqta Lagranj funksiyasi uchun statsionar nuqta bo'ladi, ya'ni

$$\frac{\partial F(X^0,\overline{\Lambda})}{\partial x_j}=0. \qquad (10.5.3)$$

Isbot. Agar (9.5.3) ni yoyib yozsak, u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\lambda_0\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_j}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_j}=0.$$

Bu esa ushbu

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j},\ \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_j},...,\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_j} \qquad (10.5.4)$$

m+1 ta vektorning chiziqli bog`liq ekanligini anglatadi. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni (10.5.4) vektorlar chiziqli erkli bo'lsin. Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\begin{aligned} f(X)-f(X^0)-\varepsilon&=0,\\ g_1(X)&=0,\\ &\dots\dots\\ g_m(X)&=0. \end{aligned} \qquad (10.5.5)$$

Bu tenglamaning o‘ng tomonidan iborat vektor-funksiyani $G(X,\varepsilon)$ deb belgilasak, (10.5.5) ni $G(X,\varepsilon)=0$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu tenglamada (X^0,0) nuqta atrofida oshkor bo‘lmagan funksiyaning mavjudlik shartlari bajariladi:

1) $G(X^0,0)=0,$

2) $\left|\dfrac{\partial G(X^0,0)}{\partial x_j}\right| = \det\left\{\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}, \dfrac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_j}, \dots, \dfrac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_j}\right\} \neq 0.$

Demak, $\varepsilon=0$ atrofida m+1 o‘lchovli (deylik, dastlabki m+1 o‘zgaruvchiga nisbatan) $X=X(\varepsilon)$ funksiya mavjud. Buni $x_{m+2}(\varepsilon)=\left(x^0_{m+2}(\varepsilon),\dots,x^0_n(\varepsilon)\right)=X^0_n$ lar bilan n o‘lchovli qilib to‘ldirsak:

$$x_i = x_i(\varepsilon),\ i=\overline{1,n}$$

funksiyaga ega bo‘lamiz va $\varepsilon=0$ atrofida funksiya (10.5.5) tenglikni qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} &f(X(\varepsilon))\equiv f(X^0)+\varepsilon\\ &g_1(X(\varepsilon))\equiv 0\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &g_m(X(\varepsilon))\equiv 0. \end{aligned}$$

Jumladan, $\bar{\varepsilon}<0$ uchun, $X=X(\bar{\varepsilon})$ joiz nuqtada

$$f(X(\bar{\varepsilon}))<f(X^0)$$

ga ega bo‘lamiz. Bu esa X^0 ni nisbiy minimum deyilishga zid. Teorema isbotlandi.

Izoh. Qaralayotgan masalada noma’lumlar soni n+m+1 ta bo‘lib $(x_1,\dots,x_n;\ \lambda_0,\ \lambda_1,\dots,\lambda_m)$, ularni aniqlash uchun Lagranj ko‘paytuvchilar usuli n+m ta tenglikdan iborat bo‘lgan munosabatlarni beradi:

$$\left(\frac{\partial F(X,\bar{\Lambda})}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n},\ g_i(X)=0,\ i=\overline{1,m}\right).$$

Demak, bu usul yordamida umuman olganda, noma’lumlarni bir qiymatli topib bo‘lmaydi. Biroq Lagranj ko‘paytuvchilar qoidasining asosini ifodalovchi (10.5.3) tenglik $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ko‘paytuvchilarga nisbatan bir jinsli bo‘lgani uchun, agar $\lambda_0\neq 0$ bo‘lsa, barcha tengliklarni λ_0 ga bo‘lib,

$$1,\lambda_1,\dots,\lambda_m$$

kabi ko‘paytuvchilarga ega bo‘lishga imkon beradi. Natijada, bunday ko‘paytuvchilar uchun Lagranj funksiyasi

$$F(X,\Lambda)=f(X)+\lambda_1 g_1(X)+\dots+\lambda_m g_m(X)$$

kabi ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerda $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$.

Ta’kidlash lozimki, har doim ham $\lambda_0\neq 0$ deb olib bo‘lavermaydi. Fikrimizning isboti sifatida bir misol keltiraylik.

Misol.

$$f(X)=x_1+x_2^2\to\min,$$
$$g(X)=x_1^3-x_2^2=0$$

bo'lsin. Bu masalaning yechimi (0, 0) nuqtadan iborat ekanligi ravshan. Biroq, bu nuqtada

$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1+x_2^2+\lambda\left(x_1^3-x_2^2\right)$$

funksiya uchun Lagranj ko'paytuvchilar qoidasi o'rinli emas:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=1+3\lambda x_1^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2-2\lambda x_2.$$

Bu esa qachon $\lambda_0\neq 0$ deb olish mumkinligini o'rganish zarurligini taqozo etadi.

10.6. Normal masalalar

Lagranj ko'paytuvchilar qoidasidan ko'rinadiki, agar $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ko'paytuvchilar bo'lsa, ixtiyoriy $k\neq 0$ son uchun $k\lambda_0,k\lambda_1,\dots,k\lambda_m$ ham Lagranj ko'paytuvchilari bo'ladi.

Ta'rif. Agar shartli nisbiy minimum nuqtaga mos keluvchi Lagranj ko'paytuvchilari orasida $0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ kabilari bo'lmasa mos nuqta, normal nuqta masala esa normal masala deb ataladi.

Normal masalaning tadqiqot uchun qulayligi quyidagi lemmadan ko'rinadi.

Lemma. Normal masala uchun Lagranj ko'paytuvchilari mavjud va yagonadir.

Isbot. Mavjudligi Lagranj funksiyasining bir jinsliligi va $\lambda_0\neq 0$ shartdan kelib chiqadi va ko'paytuvchilar $1,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Deylik, X^0 shartli nisbiy minimum nuqta bo'lib, unga ikki xil Lagranj ko'paytuvchilari mos kelsin: $1,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ va $1,\alpha_1,\dots,\alpha_m$. Bu yerda hech bo'lmasa birorta k uchun ($\lambda_k\neq\alpha_k$) quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lsin:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_j}=0,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}+\alpha_1\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x_j}+\dots+\alpha_m\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Bulardan birini ikkinchisidan ayirib

$$(\lambda_1-\alpha_1)\frac{\partial g(X^0)}{\partial x_j}+\dots+(\lambda_m-\alpha_m)\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu esa X^0 nuqtaga

$$0,\lambda_1-\alpha_1,\dots,\lambda_m-\alpha_m,$$

kabi ko'paytuvchi mos kelayotganligini ko'rsatadi va bu zidlik lemmani isbotlaydi.

Teorema. Qaralayotgan (10.5.1), (10.5.2) masalada X^* joiz nuqta normal nuqta bo'lishi uchun u nuqtada

$$\frac{\partial g_1(X^*)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial g_m(X^*)}{\partial x_j} \qquad (10.6.1)$$

vektorlarning chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. X^* normal nuqta bo'lib, unga mos (10.6.1) vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin, ya'ni shunday $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ (birortasi noldan farqli) sonlar topilsinki,

$$\beta_1 \frac{\partial g_1(X^*)}{\partial x_j} + \dots + \beta_m \frac{\partial g_m(X^*)}{\partial x_j} = 0$$

o'rinli bo'lsin. Bu munosabat esa X^* nuqtaga $0, \beta_1, \dots, \beta_m$ ko'paytuvchilar mos kelayotganligini anglatadi. Bu esa normallikka zid.

Endi, (10.6.1) vektorlar chiziqli erkin bo'lib, X^*- normal nuqta bo'lmasin. U holda shunday $0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ ko'paytuvchilar topiladiki (birortasi noldan farqli bo'lgan):

$$0 \cdot \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(X^*)}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m(X^*)}{\partial x_j} = 0$$

bo'ladi. Bu esa (10.6.1) vektorlarning chiziqli bog'liqligini anglatadi. Bu zidlik teoremani to'la isbotlaydi.

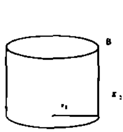
Izoh. Normal masala uchun Lagranj ko'paytuvchilar qoidasining asosiy munosabatlari

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial F(X^0, \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$$

ko'rinishda bo'lib, n+m ta tenglikni tashkil etadi. Bu tengliklar esa n+m ta noma'lumlarni, ya'ni $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ larni bir qiymatli topishga imkon beradi.

Masala. Ma'lumki, neft savdosida o'lchov birligi sifatida barrel ishlatiladi. Sig'imi bir barrel bo'lgan silindrik idishning o'lchamlari qanday bo'lganda uni yasashga kam metall sarf qilinadi?

Yechish. Dastlab masalaning matematik modelini tuzaylik. Idish asosi radiusini x_1, balandligini x_2 orqali belgilasak, quyidagi analitik masalaga ega bo'lamiz (2-chizma):



2-chizma

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \to \min \qquad (10.6.2)$$

$$\pi x_1^2 x_2 = V_0 \qquad (10.6.3)$$

Bu yerda V_0 – idishning bir barrelga mos sig'imi. (10.6.2), (10.6.3) masala shartli ekstremum masalasidir:

$$f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \to \min,$$
$$g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V_0 = 0.$$

Masalani normallikka tekshiraylik:

$$\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\pi x_1x_2\\ \pi x_1^2\end{pmatrix}\neq 0,, \qquad (10.6.4)$$

chunki shartga ko'ra, $x_1>0,\ x_2>0$.

Demak, Lagranjning normal funksiyasini tuzish mumkin:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=2\pi x_1^2+2\pi x_1x_2+\lambda\left(\pi x_1^2x_2-V_0\right)..$$

Ko'paytuvchilar qoidasiga ko'ra, agar (x_1, x_2) ekstremal nuqta bo'lsa, u nuqtada

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=4\pi x_1+2\pi x_2+2\lambda\pi x_1x_2=0,$$

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=2\pi x_1+\lambda\pi x_1^2=0,$$

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,\lambda)}{\partial\lambda}=\pi x_1^2x_2-V_0=0,$$

tengliklar o'rinli bo'lishi zarur. Bu tenglamalar sistemasini yechib, $x_2^0=2x_1^0$ ni topamiz, ya'ni eng kam material sarflash uchun bochkaning balandligini asos aylanasi diametriga teng qilib olish zarur ekan. Agar bochkalar shu usulda yasalsa, iqtisodiy samara eng yuqori bo'lishi shubhasizdir.

10.7. Shartli minimumning yetarlilik sharti

Lagranj ko'paytuvchilari usuli zaruriy shart bo'lib, joiz nuqta qaralayotgan funksiyaning shartli minimum nuqtasi bo'lsa ham, maksimum nuqtasi bo'lsa ham u nuqtada (10.5.3) shart bajarilaveradi. Bu nuqtalarni farqlash uchun yetarlilik shartini keltiramiz.

Ta'rif. Agar shunday m o'lchovli Λ vektor topilsa va shu nuqtada (10.3.7) tengliklar bajarilsa, qaralayotgan (10.5.1), (10.5.2) masalada X^0 joiz nuqta shartli-statsionar nuqta deyiladi.

Teorema. Qaralayotgan masalada $f(X)$, $g_i(X)$, $i=\overline{1,m}$ funksiyalar X^0 nuqta atrofida ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. Shartli-statsionar nuqtaning shartli nisbiy minimum nuqta bo'lishi uchun

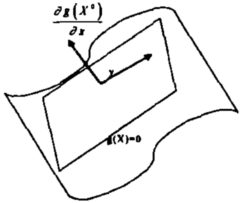
$$\frac{\partial g^T(X^0)}{\partial x}y=0 \qquad (10.7.1)$$

gipertekislikda

$$y^T\frac{\partial^2F(X^0,\Lambda)}{\partial x^2}y \qquad (10.7.2)$$

kvadratik formaning aniq musbat bo'lishi yetarlidir.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilib, uning asosiy shartlarini tahlil qilaylik. (10.7.1) va (10.7.2) ifodalardagi T belgi transponirlash belgisi bo'lib, (10.7.1) tenglik $g(X)=0$ gipersirtga (bu yerda $g(X)=(g_1(X),\dots,g_m(X))$ funksiya $X=X^0$ nuqtada o'tkazilgan urinma gipertekislikni ifodalaydi (3-chizma)



3 - chizma

Demak, (10.7.2) shart (10.7.1) gipertekislikda

$$\frac{\partial^2 F(X^0, \Lambda)}{\partial x^2}$$

matritsaning musbat aniqlangan bo'lishi, ya'ni (10.7.2) kvadratik formaning musbat aniqlangan bo'lishini anglatadi.

Bu shartni 10.6 mavzuda (bochkalar haqida)gi masalaga qo'llab ko'raylik.

Masalada (10.7.1) gipertekislik

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

tenglikdan iborat bo'lib, uni (10.6.4) yordamida yozsak,

$$2\pi x_1 x_2 y_1 + \pi x_1^2 y_2 = 0$$

yoki

$$2x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0 \qquad (10.7.3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shartli-statsionar $\left(x_1^0, x_2^0\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}};\ 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)$ nuqtada esa (10.7.3)

tenglik u_1=-u_2 to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Ikkinchi tartibli matritsa esa

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

korinishda bo'lib, shartli-statsionar nuqtada uning elementlari mos holda

$$\begin{pmatrix} 4\pi + 2\lambda\pi x_2^0 & 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 \\ 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsaning elementlaridan iborat bo'ladi. Bunga mos kvadratik formani (10.7.4)) urinma to'g'ri chiziqda tekshirsak,

$$\begin{pmatrix} -y_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\pi + \lambda\pi x_2^0 & 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 \\ 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ga ega bo'lamiz. Shartli-statsionar nuqtada $x_2^0 = 2x_1^0$ va $\lambda = -\frac{2}{x_1^0}$ ni inobatga olsak, soddalashtirishlardan so'ng kvadratik formaning qiymati $4y_2^2$ ga teng ekanligini ko'ramiz. Bu esa aniq musbat sondir.

Shunday qilib, V_0 barrel neft tashiydigan silindrik bochkaning eng samarali formasini yasash uchun uning o'lchamlarini

$$x_1^0=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}},\quad x_2^0=2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

kabi olish zarur va yetarli ekan.

10.8. Chegaraviy shartlari tengsizlik tarzida bo'lgan masalalar

Chegaraviy shartlari tenglik tarzida bo'lgan yuqoridagi masala uchun keltirilgan tasdiqlardan foydalanib, chegaraviy shartlari tengsizlik tarzida bo'lgan masalalar uchun ham ayrim natijalarni keltiramiz.

Faraz qilaylik, quyidagi masala qaralayotgan bo'lsin:

$$f(X)\to\min, \tag{10.8.1}$$

$$g_i(X)\le 0,\ i=\overline{1,m}. \tag{10.8.2}$$

Bu masalani tenglik tipidagi ushbu

$$f(X)\to\min \tag{10.8.3}$$

$$g_i(X)+x_{n+i}^2=0,\ i=\overline{1,m} \tag{10.8.4}$$

masalaga ekvivalentligini yuqorida keltirgan edik. Shu ekvivalentlikdan foydalanib, (10.8.3) va (10.8.4) masala uchun nisbiy shartli minimumning zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaymiz.

Ta'rif. Biror $g_k(X)\le 0,\ 1\le k\le m$ chegaraviy shart X^0 joiz nuqtada aktiv (faol) deyiladi, agar $g_k(X^0)=0$ bo'lsa hamda passiv (sust) deyiladi, agar $g_k(X^0)<0$ bo'lsa.

Ko'rsatish mumkinki, agar X^0 joiz nuqtada aktiv bo'lgan $i_1,i_2,\dots,i_k$ indeksli barcha chegaraviy shartlar uchun

$$\frac{\partial g_{i_1}(X^0)}{\partial x},\frac{\partial g_{i_2}(X^0)}{\partial x},\ \dots\ ,\frac{\partial g_{i_k}(X^0)}{\partial x},\ 1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le m \tag{10.8.5}$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, (10.8.3)-(10.8.4) masala uchun $\left\{X^0,\left[-g_1(X^0)\right]^{1/2},\dots,\left[-g_m(X^0)\right]^{1/2}\right\}$ nuqta normal nuqta bo'ladi. Shu sababli, (10.8.5) vektorlarni chiziqli erkli deb faraz qilib, Lagranj normal funksiyasini yozamiz:

$$\bar F(X,x_{n+1},x_{n+2},\dots,x_{n+m},\lambda)=f(X)+\lambda_1g_1(X)+\dots+\lambda_mg_m(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_{n+i}^2.$$

Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga binoan, agar $X^0=\{X^0,x_{n+1}^0,\dots,x_{n+m}^0\}$ (bu yerda $x_{n+i}^0=\left[-g_i(X^0)\right]^{1/2},\ i=\overline{1,m}$) nuqta (10.8.3)-(10.8.4) masalaning nisbiy shartli minimum nuqtasi bo'lsa, bu nuqtada

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar F(X^0)}{\partial x}=\frac{\partial f(X^0)}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial x}+\dots+\lambda_m\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial\bar F(X^0)}{\partial x_{n+1}}=2\lambda_1x_{n+1}^0=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial\bar F(X^0)}{\partial x_{n+m}}=2\lambda_mx_{n+m}^0=0
\end{aligned} \tag{10.8.6}$$

munosabatlarning o'rinli bo'lishi zarur.

Agar (10.8.3) va (10.8.4) masala uchun ham Lagranj funksiyasini

$$F(X,\lambda)=f(X)+\lambda_1 g_1(X)+...+\lambda_m g_m(X)$$

kiritsak, nisbiy minimumning zaruriy sharti, ya'ni (10.8.6) munosabatlar

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial x}=0, \qquad (10.8.7)$$

$$\lambda_i x_{n+i}^0=0 \ \ yoki \ \ \lambda_i g_i(X^0)=0, \ i=\overline{1,m} \qquad (10.8.8)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Odatda, (10.8.7) shartni passivlikni to'ldiruvchi shart deyiladi.

Shunday qilib, (10.8.1), (10.8.2) masalada $f(X)$ funksiya X^0 joiz nuqtada nisbiy shartli minimumga erishishi uchun shu nuqtada (10.8.7) va (10.8.8) shartlarning bajarilishi zarur.

Lagranj funksiyasining ikkinchi tartibli hosilalari matritsasi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial x^2} & 0 \\ & 2\lambda_1 \ \ 0 \ ... \ 0 \\ 0 & .... \\ & 0 \ \ \ 0 \ ... \ 2\lambda_m \end{pmatrix} \qquad (10.8.9)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $\frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial x^2}$ ham $n\times n$ o'lchovli matritsadan iborat. (10.8.9) matritsaga nisbatan yozilgan kvadratik forma va (10.8.4) chegaraviy shartlar uchun yozilgan urinma gipertekisliklarni yozib, ayrim soddalashtirishlar bajarsak, (101.8.1), (10.8.2) masala uchun quyidagi yetarlilik shartini olamiz.

Ta'rif. Qaralayotgan (10.8.1), (10.8.2) masalada X^0 joiz nuqta shartli-statsionar nuqta deyiladi, agar shunday $\Lambda=\{\lambda_1,...,\lambda_m\}\geq 0$ topilsaki, $F(X,\Lambda)=f(X)+\lambda_1 g_1(X)+...+\lambda_m g_m(X)$ Lagranj funksiyasi uchun

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial x}=0,$$

$$\lambda_i g_i(X^0)=0, \ \ i=\overline{1,m}$$

shartlar bajarilsa.

Teorema. (10.8.1), (10.8.2) masalada shartli-statsionar nuqtaning nisbiy minimum nuqta bo'lishi uchun, X^0 nuqtada aktiv bo'lgan $i_1,i_2,...,i_k$ indeksli chegaraviy shartlarga nisbatan tuzilgan

$$\frac{\partial g_{i_1}(X^0)'}{\partial x}y=0, \ ... \ ,\frac{\partial g_{i_k}(X^0)'}{\partial x}y=0$$

gipertekislikda

$$y'\frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial x^2}y$$

kvadratik formaning aniq musbat bo'lishi yetarlidir.

Yuqoridagi shartlarni aniq bir masala uchun qo'llab ko'raylik.

Masala.

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-12x_1+16x_2\to extr,$$
$$g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-25\le 0.$$

Bu masaladagi chegaraviy shart aktiv bo'lgan nuqtada

$$\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2x_2\end{pmatrix}\ne 0$$

bo'lgani uchun Lagranjning normal funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2-12x_1+16x_2+\lambda(x_1^2+x_2^2-25)$$

Chegaraviy shartlari tengsizlik tarzida bo'lgan masala uchun keltirilgan (10.8.7), (10.8.8) zaruriy shartga asosan, biror joiz nuqtada funksiya shartli ekstremumga erishsa, u nuqtada quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishi zarur:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1-12+2\lambda x_1=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2+16+2\lambda x_2=0,$$
$$\lambda(x_1^2+x_2^2-25)=0.$$

Oxirgi tenglikda, $\lambda=0$ bo'lsa $(x_1^2+x_2^2-25\le 0)$, $x_1=6$, $x_2=-8$ bo'lib, bu joiz nuqta bo'lmaydi, shu sababli $\lambda\ne 0$. Demak, $x_1^2+x_2^2=25$ bo'lishi zarur. Natijada, quyidagi sistemani yechib,

$$x_1+\lambda x_1=6,$$
$$x_2+\lambda x_2=-8,$$
$$x_1^2+x_2^2=25.$$

A(+3; -4) va B(-3; +4) ekstremal nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu yerda A nuqtaga $\lambda=+1$ va B nuqtaga $\lambda=-3$ qiymatlar mos keladi. Dastlab funksiyani A(3; -4) nuqtada tekshiraylik. Bu nuqtaga mos urinma tekislik

$$3y_1=4y_2$$

to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Ikkinchi tartibli kvadratik forma esa

$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=4(y_1^2+y_2^2)>0$$

aniq musbat bo'ladi. Demak, funksiya A(3, 4) nuqtada shartli minimumga erishadi, hamda $f_{\min}=f(3,-4)=-75$ bo'ladi.

Endi funksiyani B(-3; 4) nuqtada tekshiraylik. Bu nuqtaga mos urinma tekislik ham $3u_1=4u_2$ bo'ladi. Mos ikkinchi tartibli kvadratik forma

$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=-4(y_1^2+y_2^2)<0$$

bo'lib, aniq manfiy bo'ladi. Bu esa B(-3, 4) nuqtada funksiya shartli maksimumga erishishini tasdiqlaydi:

$$f_{\max}=f(-3,4)=125.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Deraza ramasi to'g'ri to'rtburchak shaklida bo'lib, tepa qismi yarim aylanadan iborat. Agar ramaning perimetri berilgan bo'lsa, uning o'lchamlari qanday bo'lganda yuzasi eng katta bo'ladi?

2. Asosi diametri 40 sm bo'lgan g'o'ladan to'g'ri to'rtburchakli ko'ndalang kesimga ega bo'lgan ustun tayyorlash lozim bo'lsin. Agar ustun asosi a va b o'lchamlarga ega bo'lib, ustunning mustahkamligi bh^2 ga to'g'ri proporsional bo'lsa (h-ustunning balandligi), uning o'lchamlari qanday bo'lganda mustahkamligi eng yuqori bo'ladi?

3. Buyurtma bo'yicha, hajmi 72 sm^3 bo'lgan qopqoqli qutini shunday yasash kerakki, asosining tomonlari 1:2 nisbatda bo'lsin. Qutining o'lchamlari qanday bo'lganda uni tayyorlashga eng kam taxta ketadi, ya'ni iqtisodiy tejamkorlik eng yuqori bo'ladi?

4. Balandligi 1,4 m bo'lgan kartina ko'rgazma devoriga osilgan bo'lib, uning pastki asosi kuzatuvchi ko'zidan 1,8 m balandlikda joylashgan. Kartinani ko'rish burchagi eng katta bo'lishi uchun, kuzatuvchi devordan qancha uzoqda turishi kerak?

5. Bir bet qog'ozda matn 384 sm^2 joyni egallashi shart. Tepa va pastdan 3 sm dan, yon tomonlardan esa 2 sm dan joy qoldiriladi. Agar qog'ozni tejash asosiy maqsad bo'lsa, qog'ozning eng samarali o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

6. Paraxodda yonilg'i sarfi ikki qismga bo'linadi. Ulardan biri tezlikka bog'liq bo'lib, yonilg'iga 4800 so'm/soat, ikkinchi qismi esa tezlikning kubiga proporsional bo'lib, tezlik 10 km/soat bo'lganda 300 so'm/soat sarflaydi. Tezlik qanday bo'lganda, 1 km yo'lga sarflangan jami xarajat (yonilg'i sarfi) minimal bo'ladi.

7. Qayiq qirg'oqning eng yaqin nuqtasidan 3 km masofada turgan bo'lib, maqsad o'sha nuqtadan 5 km naridagi to'g'ri chiziqli qirg'oqda joylashgan mayoqqa borish bo'lsin. Agar qayiqning tezligi 4 km/soat, yo'lovchining qirg'oq bo'ylab tezligi 5 km/soat bo'lsa, u manzilga eng qisqa vaqtda borishi uchun qanday marshrutni tanlashi kerak?

8. Hajmi $16\pi м^3$ bo'lgan silindrlar ichidan to'la sirti eng kichik bo'lgan silindr o'lchamlarini toping.

9. Uzunligi 1m bo'lgan simni to'g'ri to'rtburchak shaklida qanday o'lchamlarda bukish kerakki, u bilan chegaralangan yuza maksimal bo'lsin?

10. Perimetri 20 sm bo'lgan teng yonli uchburchaklardan qaysi biri eng katta yuzaga ega bo'ladi?

11. Yarim doiraga ichki chizilgan (bir tomoni diametrda yotadi) to'g'ri to'rtburchaklar ichidan eng katta yuzalisini toping.

12. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi 294 m^2 yuzaga ega bo'lgan maydonchani devor bilan o'rash va yana devor bilan uni teng ikkiga bo'lish kerak bo'lsin. Maydonchaning chiziqli o'lchamlari qanday bo'lganda jami devor uzunligi eng qisqa bo'ladi?

13. Trapetsiyaning yon qirralari uning kichik asosiga teng bo'lib, uning katta asosiga yopishgan burchagi qanday bo'lganda yuzasi maksimal bo'ladi.

14. Berilgan doiraga maksimal yuzali ichki uchburchakni chizing.

15. Berilgan doiraga tomonlari kvadratlarining yig'indisi maksimal bo'lgan uchburchak ichki chizilsin.

16. Tekislikda x_1, x_2 va x_3 nuqtalar berilgan. Shunday x_0 nuqtani topingki, x_0 dan berilgan nuqtalargacha bo'lgan masofalar kvadratlarning yig'indisi eng kichik bo'lsin.

17. Ellipsga tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan maksimal yuzali ichki to'g'ri to'rgburchak chizilsin.

18. $x_1x_2 \to extr,$
$x_1 + x_2 - 1 = 0.$

19. $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \to extr$
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

20. $x_1^2 + x_2^2 \to extr,$
$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} - 1 = 0.$

21. $x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2 \to extr,$
$4x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0.$

22. $\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 \to extr,$
$x_1 - x_2 - \frac{\pi}{4} = 0.$

23. $x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to extr,$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$

24. $x_1x_2 + x_2x_3 \to extr,$
$x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0,$
$x_2 + x_3 - 2 = 0,$
$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0.$

25. Shartli ekstremum masalasini yechish usulidan foydalanib, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

1) $\frac{x_1^n + x_2^n}{2} \geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n,$
$n \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

2) $x_1 - 2x_2 - 3 \to extr,$
$0 \leq x_1 \leq 1,$
$0 \leq x_2 \leq 1,$
$0 \leq x_1 + x_2 \leq 1.$

3) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \to extr,$
$|x_1| + |x_2| - 1 \leq 0.$

4) $x_1 + x_2 + x_3 \to extr,$
$x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leq 0,$
$x_3 - 1 \leq 0.$

26. Berilgan musbat sonni shunday ikkita musbat qo'shiluvchiga ajratingki, ularning teskari qiymatlari yig'indisi minimal bo'lsin.

27. Berilgan musbat a sonni shunday n ta qo'shiluvchiga ajratingki, ularning kvadratlari yig'indisi minimal bo'lsin.

28. O'lchamlari qanday bo'lganda V hajmli ochiq, to'rtburchakli vanna eng kam sirtga ega bo'ladi?

29. Perimetri 2r bo'lgan shunday to'rtburchakni aniqlangki, uni tomonlaridan biri atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi eng katta bo'lsin.

30. $u = x^2$ parabola va $x - u = 2$ to'g'ri chiziq orasidagi masofani toping.

11-bob. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH

11.1. Kun – Takker shartlari

Qavariq programmalashtirish optimallashtirish masalasining bir bo'limi bo'lib, u pastga (yuqoriga) qavariq funksiyani qavariq to'plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o'rgatadi.

Boshqacha qilib aytganda, qavariq programmalashtirish masalasi deganda

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{11.1.1}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{11.1.2}$$

$$Z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \min \tag{11.1.3}$$

ko'rinishdagi masala nazarda tutiladi, bunda $g_i(X)$, $f(X)$ funksiyalar $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq funksiyalar. Agar $f(X)$, $g_i(X)$ funksiyalar G da aniqlangan yuqoriga qavariq funksiyalar bo'lsa, qavariq programmalashtirish masalasi quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge b_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{11.1.4}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{11.1.5}$$

$$Z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max \tag{11.1.6}$$

(11.1.1) – (11.1.3) va (11.1.4) – (11.1.6) masalalarning yechimini aniqlashda klassik Lagranj usulining chegaraviy shartlari orasida tengsizliklar qatnashgan masalalar uchun umumlashtirishga ko'maklashuvchi Kun – Takker teoremasi markaziy o'rinni egallaydi. Kun – Takker teoremasi (11.1.1) – (11.1.3) yoki (11.1.4) – (11.1.6) masalaning optimal yechimi va bu masala uchun tuzilgan Lagranj funksiyasining egar nuqtasi orasidagi munosabatni o'rgatadi. (11.1.1) – (11.1.3) yoki (11.1.4) – (11.1.6) masalaga mos keluvchi Lagranj funksiyasini yuqorida ko'rilgan usul yordamida tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

yoki

$$F(X, \Lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(X), \tag{11.1.7}$$

bu yerda λ_i $(i = \overline{0,m})$ Lagranjning noma'lum ko'paytuvchilari bo'lib, $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$.

1-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada $F(X^0, \Lambda)$ funksiya minimumga erishib, $\Lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ nuqtada $F(X, \Lambda^0)$ funksiya maksimumga erishsa, $F(X^0, \Lambda^0)$ nuqta Lagranj funksiyasi (11.1.7) ning *egar* nuqtasi deyiladi.

Agar $F(X^0, \Lambda^0)$ nuqta (11.1.1) - (11.1.3) masala uchun tuzilgan Lagranj funksiyasi $F(X, \Lambda)$ ning egar nuqtasi bo'lsa, $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ning kichik musbat ε atrofidagi $(\varepsilon(X^0) = \{X / |X - X_0| < \varepsilon\})$ ixtiyoriy $x_j \ge 0$ uchun va Λ^0 ning ε atrofidagi $(\varepsilon(\Lambda^0) = \{\Lambda / |\Lambda - \Lambda_0| < \varepsilon\})$ ixtiyoriy $\Lambda \ge 0$ uchun

$$F(X^0, \Lambda) \le F(X^0, \Lambda^0) \le F(X, \Lambda^0) \tag{11.1.8}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

$F(X, \Lambda)$ Lagranj funksiyasi (11.1.4) – (11.1.6) masala uchun tuzilgan bo'lsa, bu munosabat quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F(X, \Lambda^0) \le F(X^0, \Lambda^0) \le F(X^0, \Lambda). \qquad (11.1.9)$$

(11.1.8), (11.1.9) munosabatlar Lagranj funksiyasi (11.1.7) ning egar nuqtasining mavjudligi haqidagi, $f(X)$ *va* $g_i(X)$ $(i=\overline{1,m})$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lmagan hol uchun zaruriy va yetarlilik shartlaridan iborat.

$f(X)$ *va* $g_i(X)$ $(i=\overline{1,m})$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgan holda Lagranj funksiyasi (11.1.7) ning egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari (11.1.1) – (11.1.3) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \ge 0, \qquad (11.1.10)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \ge 0, \qquad (11.1.11)$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \le 0, \qquad (11.1.12)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i^0 \ge 0. \qquad (11.1.13)$$

Maqsad funksiyasining maksimumi qidiriladigan (11.1.4) – (11.1.6) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \le 0, \qquad (11.1.14)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \ge 0, \qquad (11.1.15)$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \le 0, \qquad (11.1.16)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i^0 \ge 0. \qquad (11.1.17)$$

Osonlik bilan ko'rsatish mumkinki, agar (11.1.10) – (11.1.13) va (11.1.14) – (11.1.17) munosabatlar bajarilsa, (11.1.8)–(11.1.9) munosabat o'z-o'zidan bajariladi. Shuning uchun, bundan keyin Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligi haqida Kun – Takker shartlari sifatida (11.1.10) – (11.1.13) va (11.1.14) – (11.1.17) shartlarni tushunamiz. Bunda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. $f(X)$ funksiya egar nuqtaga ega bo'lishi uchun maqsad funksiyaning minimumi qidiriladigan (11.1.1) – (11.1.3) masala uchun (11.1.10) – (11.1.13) shartlarning, maqsad funksiyaning maksimumi qidiriladigan (11.1.4) – (11.1.6) masala uchun (11.1.14) – (11.1.17) shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir (teoremani isbotsiz qabul qilamiz).

Qavariq programmalashtirish masalasi (11.1.1) – (11.1.3) ning ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari qanday hosil bo'lishi bilan tanishamiz.

Buning uchun masalaga $m+n$ ta S_i $(i=\overline{1,m})$ va t_j $(j=\overline{1,n})$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)+S_i=b_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{11.1.18}$$

$$x_j-t_j=0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{11.1.19}$$

$$S_i \geq 0, \quad t_j \geq 0 \tag{11.1.20}$$

$$Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \min. \tag{11.1.21}$$

(11.1.18) - (11.1.20) tengsizliklar berilgan masalaning chegaraviy shartlaridan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilganligidan dalolat beradi. (11.1.18) – (11.1.21) masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-S_i-g_i(x_1,\dots,x_n)]+\sum_{j=1}^{n}\overline{\lambda_j}(t_j-x_j). \tag{11.1.22}$$

Lokal ekstremum mavjudligining zaruriy shartidan:

$$\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{11.1.23}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial \lambda_j}=0, \quad \frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial \overline{\lambda}_j}=0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{11.1.24}$$

(11.1.23) tenglikni tahlil qilamiz. Uni quyidagicha yoyib yozish mumkin:

$$\lambda_0^0\frac{\partial F(X^0)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j}-\overline{\lambda_j^0}=0. \tag{11.1.25}$$

Bundan tashqari

$$\begin{cases} b_i+S_i-g_i(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)=0, \\ t_j-x_j^0=0 \end{cases} \tag{11.1.26}$$

tengliklar o'rinli.

t_j^0 noma'lumlar bilan bog`liq bo'lgan $\overline{\lambda_j^0}$ Lagranj ko'paytuvchisi uchun

$$\lambda_j^0\ t_j^0=0$$

shart bajarilishi kerak.

$t_j^0>0$ bo'lganda $\overline{\lambda_j^0}=0$ bo'ladi va (11.1.25) ga asosan

$$\lambda_0\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j}=0. \tag{11.1.27}$$

Agar $t_j^0>0$ (demak, $x_j^0=0$) bo'lsa, u holda $\overline{\lambda_j^0}=0$ noldan farqli bo'lishi ham mumkin. Uning ishorasi quyidagi mulohaza orqali aniqlanadi: agar $x_j-t_j=0$ tenglikning o'ng tomonini manfiy songa o'zgartirsak, (11.1.1) – (11.1.3) masalaning aniqlanish sohasi kengayadi, chunki ixtiyoriy $x_j \geq 0$ miqdor $x_j \geq b_j$ $(b_i<0)$ tenglikni qanoatlantiradi va $Z^0=f(X^0)$ miqdor o'zgarmaydi (ortmaydi), demak, $\frac{\partial F(X^0)}{\partial b_j} \geq 0$ yoki $\overline{\lambda_j^0} \geq 0$. Shunday qilib, $x_i=0$ da zaruriy shart quyidagidan iborat bo'ladi:

$$\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial x_j}=\lambda_0^0\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} \geq 0, \tag{11.1.28}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial x_j} = \left[\lambda_0^0 \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j}\right] X^0 = 0 \qquad (11.1.29)$$

Endi $\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0,\quad i = \overline{1,m}$ tenglikni xuddi yuqoridagidek tahlil qilib, quyidagi zaruriy shartlarni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial x_i} \le 0, \qquad (11.1.30)$$

$$x_i^0 \frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0,\quad \lambda_i^0 \ge 0. \qquad (11.1.31)$$

(11.1.28) – (11.1.31) shartlar (11.1.4) – (11.1.8) masala uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial x_j} \le 0, \qquad (11.1.32)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial x_j} = 0,\quad x_j^0 \ge 0, \qquad (11.1.33)$$

$$\frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \ge 0, \qquad (11.1.34)$$

$$x_i^0 \frac{\partial F(X^0,\ \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0,\quad \lambda_i^0 \ge 0. \qquad (11.1.35)$$

Yuqoridagi (11.1.28) – (11.1.31), (11.1.32) – (11.1.35) shartlar berilgan qavariq programmalashtirish masalasining ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartidan iborat.

11.2. Kun – Takker teoremasi

$$g_i(X) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge b_i,\quad i = \overline{1,m} \qquad (11.2.1)$$

$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n} \qquad (11.2.2)$$

$$Z = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \qquad (11.2.3)$$

qavariq programmalashtirish masalasini ko‘raylik.

Agar kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g_i(X) > b_i\ (i = \overline{1,m})$ tengsizlik bajarilsa (bunga Sleyter sharti deyiladi), Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o‘rinlidir.

Teorema. $X^0 \ge 0$ nuqta (11.2.1) - (11.2.3) masalaning optimal yechimi bo‘lishi uchun bu nuqtada (11.1.32) - (11.1.35) shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligining isboti yuqoridagi (11.1.28) - (11.1.31) va (11.1.32) - (11.1.35) shartlarni keltirib chiqarish jarayonida ko‘rsatilgan.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, X^0 nuqtada (11.1.32) - (11.1.35) shartlar bajarilsin. U holda shunday $\Lambda^0 \ge 0$ mavjud bo‘lib, (X^0, Λ^0) nuqta $F(X, \Lambda)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo‘ladi, ya’ni bu nuqtada (11.2.4) munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$F(X,\ \Lambda^0) \le F(X^0,\ \Lambda^0) \le F(X^0,\ \Lambda), \qquad (11.2.4)$$

bu yerda

$$F(X,\Lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(X)-b_i). \qquad (11.2.5)$$

(11.2.5) dan foydalanib, (11.2.4) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0(g_i(X)-b_i)\le f(X^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0(g_i(X^0)-b_i)\le$$

$$\le f(X^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(X^0)-b_i),\ X\ge 0,\ \Lambda\ge 0. \qquad (11.2.6)$$

(11.2.6) ning o'ng tomonidagi

$$f(X^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0(g_i(X^0)-b_i)\le f(X^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(X^0)-b_i)$$

munosabat ixtiyoriy $\Lambda\ge 0$ uchun o'rinli. Bunda (11.1.34) va (11.1.35) ga asosan

$$g_i(X^0)-b_i)\ge 0,\quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0(g_i(X^0)-b_i)=0. \qquad (11.2.7)$$

Endi (11.2.6) ning chap tomonidagi tengsizlikdan, (11.2.7) ga asosan, $\forall X\ge 0$ uchun $f(X^0)\ge f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0(g_i(X)-b_i)$. Bu yerda, Sleyter shartiga ko'ra $g_i(X)-b_i>0$ va $\lambda_i^0\ge 0$. Demak,

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0(g_i(X)-b_i)\ge 0$$

Shuning uchun

$$f(X^0)\ge f(X),\ \forall X\ge 0.$$

Bundan X^0 berilgan masalaning optimal yechimi ekanligi ko'rinadi. Shu bilan teorema isbotlandi.

1-misol.

$$2x_1+x_2\ge 2,$$
$$2x_1+x_2\le 8,$$
$$x_1+x_2\le 6,$$
$$Z=f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2\to\max$$

Masalani grafik usulda yechib, uning optimal yechimi $X^0=(0{,}8;\ 0{,}4)$ va $f(0{,}8;\ 0{,}4)=0{,}8$ ekanini ko 'rish mumkin.

Endi shunday $\Lambda^0\ge 0$ mavjud bo'lib, (X^0,Λ^0) da Kun-Takker shartlarining bajarilishini ko'rsatamiz.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\Lambda)=-x_1^2-x_2^2+\lambda_1(2x_1+x_2-2)+\lambda_2(8-2x_1-x_2)+\lambda_3(6-x_1-x_2)$$

X^0 nuqtada masalaning 2-chegaraviy sharti qat'iy tengsizlikka aylanadi. Demak, bu masala uchun Sleyter sharti bajariladi. Bu holda masala normal bo'lib, $\lambda^0\ne 0$ bo'ladi. Shuning uchun $\lambda^0=1$ deb qabul qilinadi.

Lagranj funksiyasidan $x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2x_1+2\lambda_1-\lambda_3,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=-2x_2+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=2x_1+x_2-2,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=8-2x_1-x_2,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}=6-x_1-x_2$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_2}=8-2\cdot 0,8-0,4=6>0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_3}=6-0,8-0,4=4,8>0.$$

$$\lambda_i^0\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_i}=0$$

shartga ko‘ra λ_2 va λ_3 larning qiymatlari nolga teng.

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_1}=2\cdot 0,8+0,4-2=0$$

bo‘lgani uchun λ_i nolga teng bo‘lmagan qiymat qabul qilishi ham mumkin.

$$\lambda_j^0\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_j}=0,\quad x_j^0>0.$$

Demak, $j=1,2$ qiymatlar uchun $\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial \lambda_j}=0$ bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases}-2\cdot 0,8+2\lambda_1-\lambda_3=0\\ -2\cdot 0,4+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0.\end{cases}$$

$\lambda_2,\ \lambda_3=0$ bo‘lgani uchun $\lambda_1=0,8$ va $\Lambda^0=(0,8;0,0)$. Demak, $(X^0,\Lambda^0)=(0,8;\ 0,4;\ 0,8;\ 0,0)$ nuqtada, haqiqatan ham, Kun-Takker shartlari bajarildi, ya’ni u egar nuqta ekan.

2-misol. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, $X^0=(1,0)$ nuqta quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasining yechimi ekanligi ko‘rsatilsin:

$$f(X)=x_1^2-2x_1+3x_2^2\to\max$$

$$4x_1+5x_2\le 8$$

$$2x_1+\ x_2\le 4$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Yechish.

$X^0=(1,0)$ nuqtada chegaraviy shartlar qat’iy tengsizlikka aylanadi, demak Sleyter sharti bajariladi. Bu holda $\lambda^0=1$ deb qabul qilishimiz mumkin.

Shuning uchun Lagranj funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=x_1^2-2x_1+3x_2^2+\lambda_1(4x_1+5x_2-8)+\lambda_2(2x_1+x_2-4),$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0.$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz:

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_1}=(2x_1-2+4\lambda_1+2\lambda_2)_{X^0}\ge 0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_2}=(6x_2+5\lambda_1+\lambda_2)_{X^0}\ge 0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial\lambda_1}=(4x_1+5x_2-8)_{X^0}=-4<0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial\lambda_2}=(2x_1+x_2-8)_{X^0}=-2<0,\quad \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_1}x_1^0=0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial x_2}x_2^0=0,\ x_1,x_2\geq 0;\quad \frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial\lambda_1}\lambda_1^0=0\Rightarrow(-4)\cdot 0\Rightarrow\lambda_1^0=0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda^0)}{\partial\lambda_2}=\lambda_2^0=0\Rightarrow(-2)\lambda_2^0=0\Rightarrow\lambda_2^0=0.$$

Shunday qilib, $(X^0,\Lambda^0)=(1;0;0;0)$ nuqta Kun-Takkerning hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, u Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun $X^0=(1,0)$ nuqta berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasining yechimidan iborat.

11.3. Kvadratik programmalashtirish masalasi

Kvadratik programmalashtirish masalasi chiziqsiz programmalashtirish masalasining xususiy holidan iboratdir. Uning matematik modelidagi chegaraviy shartlar chiziqli tenglama va tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa umumiy holda chiziqli va kvadratik formalarning yig`indisidan iborat bo'ladi.

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j\{*\}\,b_i,\ i=\overline{1,m} \qquad (11.3.1)$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (11.3.2)$$

$$Z=f(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+d_{11}x_1^2+d_{12}x_1x_2+\ldots+d_{nn}x_n^2\to\max(\min). \qquad (11.3.3)$$

Bu yerda, $(*)$ belgi $\geq,\ =,\ \leq$ belgilarning biridan iborat.

Masala matritsa shaklida:

$$AX\{*\}\,B, \qquad (11.3.4)$$

$$X\geq 0, \qquad (11.3.5)$$

$$Z=SX+X'DX\to\max(\min). \qquad (11.3.6)$$

Bu yerda A matritsa m qator va n ustunli matritsadir, D matritsa n o'lchovli kvadrat matritsa, B m o'lchovli, X va S esa n o'lchovli vektorlar. Shunday qilib (11.3.1) - (11.3.3) yoki (11.3.4) - (11.3.6) ko'rinishda berilgan masalani kvadratik programmalashtirish masalasi deb ataymiz.

Bu masala chiziqli programmalashtirish masalasidan shu bilan farq qiladiki, uning maqsad funksiyasida kvadratik forma $X'DX$ qatnashadi. Bu kvadratik formaga bog`liq ravishda $f(X)$ maqsad funksiya pastga yoki yuqoriga qavariq bo'lishi mumkin. Ana shunday hollar uchun, ya'ni kvadratik programmalashtirish masalasi yagona optimal (global) yechimga ega bo'lgan hollar uchun masalani effektiv yechish usullari yaratilgan.

Kvadratik programmalashtirish masalasi (11.3.1) - (11.3.3) berilgan bo'lsin. Maqsad funksiyaning minimumi qidiriladigan masalani uning maksimumi qidiriladigan masalaga keltirish mumkin bo'lganligi sababli (11.3.3) ning o'rniga bundan keyin

$$Z = SX + X'DX \to \max(\min) \qquad (11.3.7)$$

funksiyani ko'ramiz.

Bundan keyin $f(X)$ funksiyani yuqoriga qavariq funksiya, ya'ni $X'DX$ kvadratik formani yuqoriga qavariq funksiya deb faraz qilamiz. Bu holda (11.3.1) - (11.3.3) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami qavariq to'plam bo'lgani uchun kvadratik programmalashtirish masalasi yagona optimal yechimga ega bo'ladi.

Masalaning (11.3.1) shartlarini qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yordamida tenglamalarga keltirish mumkin bo'lgani uchun (11.3.1) - (11.3.3) masalani quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$AX = B,$$

$$X \geq 0,$$

$$Z = SX + X'DX \to \max(\min).$$

Bu masalaning yechimi optimal yechim bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini aniqlaymiz. Buning uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(X,\Lambda)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_k x_j + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right).$$

$F(X,\Lambda)$ funksiyadan x_j va λ_i bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{k=1}^{n} x_k d_{kj} - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Yuqoridagi munosabatlarga asoslanib, Kun- Takkerning shartlarini (X^0, Λ^0) nuqtaga nisbatan yozamiz:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)_{X^0,\Lambda^0} \leq 0, \quad X_0^{\prime}\cdot\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)_{X^0,\Lambda^0} = 0, \quad X^0 \geq 0 \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}\right)_{X^0,\Lambda^0} \leq 0, \quad \lambda_i^0\cdot\left(\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}\right)_{X^0,\Lambda^0} = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0, \end{cases} \qquad (11.3.8)$$

Agar shunday Λ^0 vektor mavjud bo'lib, X^0, Λ^0 lar uchun (11.3.1) - (11.3.6) shartlar o'rinli bo'lsa, X^0 vektor berilgan kvadratik programmalashtirish masalasining optimal yechimi bo'ladi.

Endi (11.3.1) tengsizlikni qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yordamida tenglamaga aylantiramiz:

$$S' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 + V^* = 0.$$

Bundan

$$V^* = A'\Lambda^0 + 2DX^0 - S'.$$

Bu holda kvadratik programmalashtirish masalasi yechimining optimal yechim bo'lishlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$S' + 2DX^* - A'\Lambda^* + V^* = 0,$$

$$X^*V^* = 0,\ X^* \geq 0,\ V^* \geq 0.$$

Berilgan masaladagi shartlar tenglama ko'rinichida bo'lganligi sababli Λ ga musbat bo'lishlik sharti qo'yilmaydi. Demak, xulosa qilib shuni aytish mumkinki, quyidagi:

$$AX = V,$$
$$2DX - A'\Lambda^{*} + V + S' = 0,$$
$$X \geq 0, V \geq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $X \geq 0, V \geq 0$ vektorlar berilgan masalaning yechimi bo'ladi.

Mustaqil yechishga doir masalalar

1. Quyidagi kvadratik funksiya kononik ko'rinishga keltirilsin.

1. $f = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$

2. $f = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - \frac{5}{4}x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{5}{4}x_3^2.$

2. Quyidagi kvadratik programmalashtirish masalasining yechimini Kun-Takker shartlaridan foydalanib toping:

a) $f = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2 \to \max$
$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

b) $f = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \to \max$
$$x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$2x_1 + x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

12-bob. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH

12.1. Dinamik programmalashtirishning asosiy tushunchalari

Dinamik programmalash ko‘p bosqichli masalalarning mukammal yechimini aniqlashni ta’minlovchi matematik usullardan biridir. Ushbu usul Bellmanning optimallik qoidasiga asoslangan bo‘lib, u uch bosqichdan iborat.

1. Boshlang`ich masala asosida turkum masalalar hosil qilinadi, turkumdagi parametrlarning ma’lum bir qiymatlarida ko‘rilayotgan boshlang`ich masala hosil bo‘ladi.

2. Aniqlangan turkum masalalar uchun Bellmanning optimallik qoidasi asosida asosiy tenglama (Bellman tenglamasi) tuziladi.

3. Bellman tenglamasi yechiladi va ushbu yechimlar asosida optimal yechim quriladi.

Bellmanning optimallik qoidasini ko‘rib chiqaylik. Optimal xatti-harakat, boshlang`ich holat va ushbu holatga olib kelgan yechim qanday bo‘lishidan qat’i nazar kelgusidagi yechimlar boshlang`ich holatga nisbatan optimal yechim bo‘lishi kerak.

Dinamik programmalash masalasining qo‘yilishi: diskret boshqariluvchan tizimda boshlang`ich S_0 holatni oxirgi S_N holatga o‘tkazuvchi shunday boshqaruvni topish kerakki, maqsad funksiya o‘zining ekstremum qiymatiga erishsin.

Ko‘p bosqichli jarayonning yechimini aniqlash ikki usulda amalga oshirilishi mumkin: boshlang`ich holatdan oxirgi holatga qarab, yoki oxirgi holatdan boshlang`ich holatga qarab.

N - bosqichdagi tizim holatini aniqlashda $N-1$ bosqichdagi tizim holatini bilish zarurdir. Tizim diskret bo‘lganligi uchun bu holatlar

$$S_{N-1,1}, S_{N-1,2}, \dots, S_{N-1,k} \qquad (12.1.1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Har bir $S_{N-1,j}$, $j=\overline{1,k}$ holatni S_N holatga o‘tkazuvchi shartli optimal $U^*_{N,j} = U^*_{N,j}(S_{N-1,j})$ boshqaruvni aniqlaymiz. Ushbu shartli optimal boshqaruv $U^*_{N,j}$ maqsad funksiya uchun ekstremum qiymatni beradi. Ushbu fikrning davomi sifatida $N-1$ bosqich uchun shartli optimal boshqaruvni aniqlaymiz. Bu boshqaruvni aniqlash uchun tizimning $N-2$ bosqichidagi mumkin bo‘lgan

$$S_{N-2,1}, S_{N-2,2}, \dots, S_{N-2,c} \qquad (12.1.2)$$

holatlarini bilish zarurdir.

Mumkin bo‘lgan har bir holat $S_{N-2,j}$, $j=\overline{1,c}$ uchun shartli optimal $U^*_{N-2,j} = U^*_{N-2,j}(S_{N-2,j})$ yechimni aniqlaymiz.

Ushbu shartli optimal boshqaruv (yechim) $W\left(U^*_{N-1,\ell}\right)+W\left(U^*_{N-1,j(\ell^*)}\right)$ maqsad funksiyaga ekstremum qiymat beradi.

Boshqacha qilib aytganda $(N-i)$ bosqichda shartli optimal yechim U^*_{N-i} $(N-(i+1))$ bosqichning har bir mumkin bo‘lgan holati uchun quyidagi maqsad funksiya

$$\left[W\left(U^*_{N-i,j}\right)+\dots+W\left(U^*_{N-1,j}\right)+W\left(U^*_{N,j}\right)\right]$$

uchun ekstremum qiymatini ta'minlaydi.

Ushbu shartli maksimal yechimlarni qurish jarayoni birinchi bosqich uchun $U_1^*(S_0)$ optimal yechim aniqlanguncha davom ettiriladi. Aniqlangan $U_1^*(S_0)$ optimal yechim

$$W^* = \left[W(U_{1,j}^*) + \ldots + W(U_{N-i,j}^*) + \ldots + W(U_{N,j}^*)\right]$$

maqsad funksiyaga ekstremum qiymat beradi.

Optimal yechimni erishilgan holatdan optimal ravishda kelgusi holatga davom ettirish Bellmanning optimallik qoidasi deyiladi. Bellmanning optimallik qoidasi asosida optimal yechimni qurish algoritmini tuzish va funksiya qiymatlarini rekkurent ravishda oldingi qiymatlar asosida hisoblash mumkin bo'ladi, ya'ni:

$$B_{N-i}(S_i) = \underset{U_{i+1}}{extr}\left[W_{i+1}(S_{i+1}, U_{i+1}) + B_{N-(i+1)}(S_{i+1})\right] \qquad (12.1.3)$$

bu yerda $i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$ qiymatlarni qabul qiladi.

Bellman tenglamasida $U_i = (U_i^1, U_i^2, \ldots, U_i^m)$ boshqaruv vektori, $S_i = (S_i^1, S_i^2, \ldots, S_i^n)$ - sistemaning i-bosqichdagi Bellman funksiyasi, ya'ni maqsad funksiyaning ekstremum qiymatidir. Yuqorida keltirilgan Bellman (12.1.3) tenglamasi funksiya qiymatlarini rekkurent ravishda hisoblash imkoniyatini beradi, ya'ni $B_0(S_N)$asosida $B_1(S_{N-1})$ni va $B_1(S_{N-1})$asosida $B_2(S_{N-2})$va h.k.

1. Dinamik programmalashtirish yordamida optimal yechimni aniqlash algoritmi:

1) Oxirgi holat uchun Bellmanning ekstremal tenglamasini yozib olamiz:

$$B_1(S_{N-1}) = extr\{W_N(S_{N-1}, U_N) + B_0(S_N)\} \qquad (12.1.4)$$

2) $W_N(S_{N-1}, U_N)$ funksiyaning qiymatlarini S_{N-1}^i mumkin bo'lgan holatlar va U_N boshqaruv uchun hisoblab, optimal U_N^* va $B_1(S_{N-1})$larni aniqlaymiz;

3) Bellmanning asosiy tenglamasini ixtiyoriy $\ell = N-i$, $i = N-1, N-2, \ldots, 0$ bosqichlar uchun quramiz;

4) shartli optimal yechimlarini qurish jarayoni $\ell = 0$ bo'lganda to'xtatiladi;

5) shartli optimal yechimlar asosida boshlang`ich holat S_0 uchun optimal yechim tanlangandan so'ng, kelgusi optimal yechimlarni shartli optimal yechimlardan hosil qilamiz va ko'rilayotgan masalaning optimal yechimi $B_N(S_0)$ni aniqlaymiz.

12.2. Investitsiyalarni optimal taqsimlash masalasi

Quyidagi masala bilan tanishaylik. Umumiy miqdori A birlik bo'lgan investitsiya n yilga optimal taqsimlansin. Agar investitsiyaning x miqdorini i - yilda sarflansa, $f_i(x)$ foyda olinadi. Maksimal foyda olish uchun investitsiyani yillar o'rtasida qanday taqsimlash kerak?

Faraz qilaylik, x_i i- yil uchun ajratilgan investitsiya miqdori bo'lsin. U holda ko'rilayotgan investitsiyalarni taqsimlash masalasining matematik modeli

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A,$$
$$x_i \geq 0 \ \ va\ butun,\ i=\overline{1,n} \qquad (12.2.1)$$

ko'rinishini oladi.

(12.2.1) chiziqsiz programmalashtirish masalasining o'ziga xosligi shundan iboratki, uning maqsad funksiyasi $f(x)$ va asosiy chegaraviy shart funksiyasi $g(x)$ *separabeldir*, ya'ni ular bir o'zgaruvchili funksiyalar yig'indisi shaklida ifodalangan.

Ekstremal masalani dinamik programmalashtirish usuli bilan yechishning birinchi bosqichi berilgan masalani unga o'xshash masalalar oilasiga invariant turkumlashdan iborat. Bu bosqich ma'lum ma'noda san'at bo'lib, har bir muayyan holda tadqiqotchining tajribasi, sezgi va mahoratiga bog'liqdir. Ushbu (12.2.1) masala uchun ixtiyoriy $k,\ 1 \leq k \leq n$ yillar mobaynida va $y,\ 0 \leq y \leq A$ investitsiya jamlamasiga ega bo'lgan investitsiyalarni taqsimlashning ushbu

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = y,\ \ x_i \geq 0,\ i=\overline{1,k} \qquad (12.2.2)$$

masalalarini qarashdan iboratdir. $k=n,\ y=A$ bo'lganda (12.2.2) masalalar oilasidan boshlang'ich (12.2.1) masala olinadi.

(12.2.2) masalalar oilasidan olingan ixtiyoriy masala maqsad funksiyasining optimal qiymati Bellman funksiyasi deyiladi:

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \qquad (12.2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = y,\ \ x_i \geq 0,\ i=\overline{1,k}.$$

Masalani dinamik programmalashtirish usuli bilan yechishning ikkinchi bosqichi - Bellman funksiyasi uchun rekkurent tenglamani olishdan iboratdir. Bu bosqichda Bellmanning optimallik prinsipi umumiy holda qo'llaniladi. (12.2.1) masala uchun uning mohiyati quyida keltiriladigan mulohazalar orqali beriladi. Bu mulohazalar oddiy matematik dalillarga asoslangan va yetarlicha universaldir. Izlanayotgan tenglamani tuzishda invariant joylashning to'g'riligi namoyon bo'ladi. (12.2.2) masalada k yilga $z,\ 0 \leq z \leq y$ miqdoridagi investitsiya ajratamiz. Bunda k - yildan olinadigan foyda $f_k(z)$ ga teng bo'ladi. 1,2, ..., k-1 nomerli yillar uchun esa u-z miqdoridagi investitsiya qoladi. Aytaylik, bu investitsiya qolgan yillarga optimal taqsimlangan bo'lsin. (12.2.3) ning aniqlanishiga ko'ra $k-1$ ta yildan keladigan foydaning maksimal miqdori $B_{k-1}(y-z)$ ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, k yilga z miqdorida investitsiya ajratilganda barcha k yillar va y investitsiya jamlamasidan

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z) \qquad (12.2.4)$$

foyda olamiz.

Agar z miqdorni $0 \leq z \leq y$ chegarasida o'zgartirib, (12.2.4) umumiy foyda maksimal bo'ladigan $x_k^0(y)$ (k - yil uchun investitsiyaning optimal miqdori) qiymatini topamiz:

$$f_k\left(x_k^0(y)\right)+B_{k-1}\left(y-x_k^0(y)\right)=\max_{0\le z\le y}\left[f_k(z)+B_{k-1}(y-z)\right] \qquad (12.2.5)$$

Ikkinchi tomondan (12.2.3) ga asosan investitsiya miqdori u bo'lganda k ta yildan olinadigan maksimal foyda $B_k(y)$ ga tengdir. Bu qiymatni (12.2.5) ifodaning o'ng tomoniga tenglashtirib, $B_k(y)$ funksiya uchun

$$B_k(y)=\max_{0<z\le y}\left[f_k(z)+B_{k-1}(y-z)\right] \quad k=\overline{1,n}, \quad 0\le y\le A, \qquad (12.2.6)$$

tenglamani olamiz. Bu Bellman tenglamasi deb ataladi. (12.2.6) tenglama $B_k(y)$ funksiyaning k argumentiga nisbatan rekkurent bo'lganligidan uni yechish uchun boshlang'ich shart berilishi kerak. Uning (12.2.3) dan k=1 bo'lganda topish mumkin:

$$B_1(y)=\max f_1(x_1),\ x_1=y,\ x_1\ge 0.$$

Shunday qilib, Bellman tenglamasi (12.2.6) uchun boshlang'ich shart

$$B_1(y)=f_1(y) \qquad (12.2.7)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Masalani dinamik programmalashtirish usuli bilan yechishning uchinchi (va oxirgi) bosqichi Bellman tenglamasining yechimini izlashdan va u bo'yicha (12.2.1) masalaning yechimini qurishdan iboratdir. (12.2.6) tenglamada $k=2$ deb olamiz:

$$B_2(y)=\max_{0\le z\le y}\left[f_2(z)+B_1(y-z)\right], \qquad (12.2.8)$$

bu ifodaning o'ng tomonida berilgan $f_2(z)$ funksiya va (12.2.7) dan topilgan $B_1(y)$ funksiya bor. Shuning uchun (12.2.8) formula ma'lum bir o'zgaruvchili funksiyaning maksimallashtirish bilan $B_2(y)$ funksiyaning hisoblash imkonini beradi. So'ngra (12.2.6)da $k=3,4,\dots,n$ deb olib, har bir holda bir o'zgaruvchili funksiyaning maksimallashtirish amalini bajarib, ketma-ket $B_3(y), B_4(y),\dots,B_n(y)$ funksiyalarni olamiz.

(12.2.3)ga asosan $B_n(A)$ son (12.2.1) boshlang'ich masala uchun maksimal foydadan iboratdir. Investitsiyaning yillar bo'yicha optimal taqsimotini topish uchun (12.2.5) ifodaga murojaat qilamiz. Unda $k=n$, $y=A$ deb olamiz. (12.2.5)ning aniqlanishi bo'yicha, agar barcha n ta yil uchun investitsiya miqdori A ga teng bo'lsa, oxirgi yilga (bu holda n-yilga) ajratilgan investitsiyaning optimal miqdoriga teng bo'lgan $x_n^0(A)$ sonni olamiz. Shunday qilib boshlang'ich masala $x^0=\{x_1^0,\dots,x_n^0\}$ optimal rejasining x_n^0 komponenti topildi: $x_n^0=x_n^0(A)$.

Agar *n-yil* uchun x_n^0 miqdor ajratilsa, u holda qolgan *n-1* ta yil uchun $A-x_n^0$ miqdordagi investitsiya qoladi. (12.2.5) da $k=n-1$, $y=A-x_n^0$ deb olamiz va $x_{n-1}^0(A-x_n^0)$ni topamiz. Ravshanki, (12.2.1) masalaning x^0 optimalning oxirgidan oldingi komponenti $x_{n-1}^0=x_{n-1}^0(A-x_n^0)$ ga tengdir. Jarayonni davom ettirib, (12.2.1) boshlang'ich masala yechimining $x_{n-2}^0,\dots,x_1^0$ komponentlarini topamiz.

Natijani tahlil qilamiz. Usulning afzalliklari:

1) boshlang'ich n ta o'zgaruvchi bo'yicha maksimallashtirish masalasi (12.2.1) bitta o'zgaruvchi bo'yicha $n-1$ ta maksimallashtirish masalasi (12.2.6)ga keltirildi hamda natija – global optimal rejadan iborat bo'ladi;

2) yechish jarayonida masala elementlarining analitik xossalaridan foydalanilmadi; berilgan funksiyalar jadval, grafik, algoritm va h.k. ko'rinishda berilishi mumkin edi;

3) $B_k(y)$ larni hisoblash natijalari bo'yicha A va n ning qiymatlarini variatsiyalab, (12.2.1) masalaning yechimini oson hosil qilish mumkin; bu (12.2.1) masala yechimini ko'rsatilgan parametrlarning o'zgarishiga sezgirligini tahlil qilish imkonini beradi.

Usulning asosiy kamchiligi Bellman tomonidan o'z vaqtida «o'lchovning qarg`ishi» deb atalgan bo'lib, u shundan iboratki, (12.2.6) Bellman tenglamasini yechishda ko'plab funksiyalarni esda saqlashga to'g`ri keladi. Berilgan bitta investitsiyani taqsimlash masalasida ular bir o'zgaruvchili funksiyalardan iborat. Umumiy holda esa argumentlarning soni investitsiyaning xillari soniga teng bo'ladi. EHMda ko'p o'zgaruvchili funksiyalar jadvallarini tuzish operativ xotira imkoniyati chegaralanganligidan prinsipial qiyinchiliklarga olib keladi, shuning uchun bu usulning muhokama qilinayotgan shu kamchiligi ko'p o'lchovli masalalarni yechishda dinamik programmalashtirishning yuqorida bayon etilgan klassik usulini amalga oshirish imkonini bermaydi. «O'lchov qarg`ishi»ni bartaraf etishning turli usullari tavsiya qilingan.

Misol. (12.2.1) masalaga oid sonli misol qaraylik. Bu yerda $n=3$, $A=5$ va funksiyalar quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$f_1(x)=x \ \ agar \ \ x=\overline{0,5} \ bol'sa$$

$$f_2(x)=\begin{cases} 0 & agar \ x=0 \ yoki \ x=1 \ bol'sa \\ x-1 & agar \ x=2,3,4 \ bol'sa \\ 7 & agar \ x=5 \ bol'sa \end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} 0 \ agar \ x=0 \ bo'lsa \\ 2 \ agar \ x=1 \ yoki \ x=2 \ \ bo'lsa \\ 3 \ agar \ x=3,4,5 \ bo'lsa \end{cases}$$

Bellman tenglamasini tuzamiz.

$n=1$ uchun $B_1(y)=\max\limits_{x_3\le y} f_3(x)=f_3(y)$, $\quad y=\overline{0,5}$.

y	$\bar{x}_3(y)$	$B_1(y)$
0	0	0
1	1	2
2	2	2
3	3	3
4	4	3
5	5	3

$n=2$ *uchun*

$$B_2(y)=\max_{x_2}\{f_2(x_2)+B_1(y-x_2)\}, \ y=\overline{0,5}.$$

y	$\bar{x}_3(y)$	$B_2(y)$
0	0	0
1	0	2
2	0	2
3	0; 2	3
4	3	4
5	5	7

$n=3$ da:

$$B_3(5)=\max_{0\le x_1\le 5}\{f_1(x_1)+B_2(y-x_1)\}=\max\{0+B_2(5);1+B_2(4);2+B_2(3);3+B_2(2);4+B_2(1);5+B_2(0)\}=$$
$$=\max\{0+7;1+4;2+3;3+2;4+2;5+0\}=\max\{7;5;3;5;6;5\}=7;\ x_1(5)=0.$$

(12.2.6) qaralayotgan masalada maksimal foyda $B_3(5)=7$ bo'ladi. Investitsiyalarni optimal taqsimlashni topamiz. $x_1^0(5)=0$ bo'lganligidan, birinchi yilga investitsiya ajratmaymiz: $x_1^0=0$. Shunday qilib, 2, 3-yillarga to'liq 5 hajmdagi investitsiya qoladi. $x_2^0(5)=5$ ekanligini topamiz. Demak, maksimal foyda olish uchun hamma investitsiyalarni ikkinchi yilga ajratish kerak $(x_2^0=5)$. Shuning uchun $x_3^0=0$.

12.3. Samolyotni optimal yuklash masalasi

Quyidagi masalani tahlil qilaylik. N turdagi qadoqlangan mahsulotlar berilgan bo'lib, ushbu mahsulotlar bilan umumiy yuk ko'tarish quvvati W birlikka teng bo'lgan samolyotni to'ldirish kerak bo'lsin. Har bir $j\in N$ mahsulotning bir donasining og'irligi p_j birlik va undan keladigan sof foyda c_j birlikni tashkil etsin. Samolyotni shunday mahsulotlar bilan to'ldirish kerakki:

1) yukning umumiy og'irligi W birlikdan oshmasin;
2) yuklangan mahsulotlardan olinadigan umumiy sof foyda eng katta bo'lsin.

Ushbu masalaning chiziqli optimallashtirish modelini quramiz va uni dinamik programmalashtirish usuli bilan yechamiz. Masalada aniqlanishi kerak bo'lgan miqdor j-mahsulotdan neshta dona olinishidir, shu tufayli x_j deb j mahsulot sonini belgilaymiz, u holda

p_jx_j miqdor x_j - dona j-mahsulot og'irligi;

c_jx_j miqdor x_j - dona j-mahsulotdan keladigan sof foyda bo'ladi.

Bu bellgilashlarda $p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$ – yukning umumiy og'irligini, $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ – yukdan keladigan umumiy sof foydani bildiradi. Masala shartiga ko'ra chiziqli optimallashtirish modelini tuzamiz.

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\to\max$$
$$p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n\le W, \qquad (12.3.1)$$
$$x_j\ge 0-\text{butun.}$$

Hosil qilingan masalani dinamik programmalashtirish usuli bilan yeshamiz. Ushbu masalani yechishda mahsulotlar soni va samolyotning yuk ko'tarish quvvati bo'yicha induksiya usulini qo'llaymiz. $n=1$, ya'ni samolyot faqat 1-mahsulot bilan to'ldirilsin. U holda $f_1(\alpha)$-yuk ko'tarish quvvati α birlikka teng bo'lgan samolyot 1-mahsulot bilan to'ldirilgandagi maksimal sof foyda miqdori $\alpha = \overline{0,W}$.

$$f_1(\alpha) = \max_{\substack{p_1 x_1 \le \alpha \\ x_1 \ge 0 - butun}} \{c_1 x_1\} = \max_{x_1 = 0, \left[\frac{\alpha}{p_1}\right]} c_1 x_1 = c_1 x_1(\alpha) = c_1 \left[\frac{\alpha}{p_1}\right], \qquad (12.3.2)$$

bu yerda $x_1(\alpha)$ – optimal yechim. Samolyotning yuk ko'tarish quvvati - α ni 0 dan W gacha o'zgartirish natijasida quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

α	$x_1(\alpha)$	$f_1(\alpha)$
0	0	0
1	$\left[\frac{1}{p_1}\right]$	$c_1\left[\frac{1}{p_1}\right]$
2	-	-
-	-	-
W	$\left[\frac{W}{p_1}\right]$	$c_1\left[\frac{W}{p_1}\right]$

Kelgusi bosqichda mahsulotlar sonini yana bitta mahsulotga oshiramiz, ya'ni yuk ko'tarish quvvati $\alpha = \overline{0,W}$ bo'lgan samolyotni $\{1\}$ va $\{2\}$ mahsulotlar bilan to'ldiramiz. Agar $\{2\}$ mahsulotdan x_2 dona olinsa, uning og`irligi $p_2 x_2$ miqdorga va undan keladigan foyda $c_2 x_2$ miqdorga teng bo'ladi. Bu holda $\{1\}$ mahsulot uchun $\alpha - p_2 x_2$ og`irlik ajratilishi mumkin. Bu og`irlik $\{1\}$ mahsulot bilan optimal ravishda to'ldirilsa, undan keladigan foyda $f_1(\alpha - p_2 x_2)$ □ga teng bo'ladi. Maqsadimiz umumiy foydani kattalashtirish bo'lganligi tufayli, $\{2\}$ mahsulotlar soni x_2 miqdor shunday tanlanishi kerakki, buning natijasida ikkala mahsulotdan olinadigan umumiy foyda

$$c_2 x_2 + f_1(\alpha - p_2 x_2) \text{ eng katta bo'lsin,}$$

ya'ni

$$f_2(\alpha) = \max_{\substack{p_2 x_2 \le \alpha \\ x_2 \ge 0 - butun}} \{c_2 x_2 + f_1(\alpha - p_2 x_2)\} = \max_{x_2 = 0, \left[\frac{\alpha}{p_2}\right]} \{c_2 x_2 + f_1(\alpha - p_2 x_2)\} \qquad (12.3.3)$$

$f_2(\alpha)$-yuk ko'tarish quvvati α birlikka teng bo'lgan samolyot $\{1\}$, $\{2\}$ mahsulotlar bilan optimal to'ldirilganda olinadigan maksimal foyda miqdorini belgilaydi. Ushbu hol uchun ham $\alpha = \overline{0,W}$ qiymatlari uchun $f_2(\alpha)$ va $x_2(\alpha)$ miqdorlar jadvalini quramiz:

α	$x_2(\alpha)$	$f_2(\alpha)$
0	$x_2(0)$	$f_2(0)$
1	$x_2(1)$	$f_2(1)$
2	-	-
-	-	-
W	$x_2(W)$	$f_2(W)$

Bu jarayon quyidagi rekkurent formula asosida davom ettiriladi.

$$f_k(\alpha) = \max_{x_k=0\left[\frac{\alpha}{p_k}\right]} \{c_k x_k + f_{k-1}(\alpha - p_k x_k)\}, \qquad (12.3.4)$$

Hosil bo'lgan formula ko'rilayotgan masala uchun dinamik programmalashtirishning rekkurent formulasi deyiladi. Yuqorida keltirilgan masalani aniq ma'lumotlarda dinamik programmalashtirish usuli bilan yechamiz: $n = 3,\ W = 11,\quad p_1 = 4,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\quad c_1 = 10,\ c_2 = 9,\ c_3 = 7.$

$n = 1$ bo'lgan hol uchun masalani yechamiz:

$$f_1(\alpha) = \max_{\substack{p_1 x_1 \le \alpha \\ x_1 \ge 0 - butun}} c_1 x_1 = c_1 \cdot x_1(\alpha) = c_1\left[\frac{\alpha}{p_1}\right] = 10\left[\frac{\alpha}{4}\right] \quad \alpha = \overline{0, 11}.$$

α	$x_1(\alpha)$	$f_1(\alpha)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	1	10
5	1	10
6	1	10
7	1	10
8	2	20
9	2	20
10	2	20
11	2	20

$n = 2$ bo'lgan holda

$$f_2(\alpha) = \max_{x_2=0,\left[\frac{\alpha}{p_2}\right]} \{c_2 x_2 + f_1(\alpha - p_2 x_2)\} = \max_{x_2=0\left[\frac{\alpha}{3}\right]} \{9 \cdot x_2 + f_1(\alpha - 3x_2)\}$$

α	$x_2(\alpha)$	$f_2(\alpha)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	1	9
4	0	10
5	0	10
6	2	18
7	1	19
8	0	20
9	3	27
10	2	28
11	1	29

$n = 3$ bo'lgan hol uchun $f_3(11)$ ni hisoblaymiz:

$$f_3(11)=\max_{\substack{2x_3\le 11\\ x_3\ge 0,butun}}\{7x_3+f_2(11-2x_3)\}=\max_{x_3=0,5}\{7x_3+f_2(11-2x_3)\}=\max\{7\cdot 0+29;\ 7\cdot 1+27;$$

$$7\cdot 2+19;\ 7\cdot 3+10;\ 7\cdot 4+9;\ 7\cdot 5+0\}=\max\{29;34;33;31;37;35;\}=37,\quad x_3(11)=4.$$

Demak, $\{3\}$-mahsulotdan 4 dona olish kerak ekan, bu holda $\{1,2\}$ mahsulotlar uchun $\alpha_2=11-2\cdot 4=3$ birlik og'irlikka mos optimal yechimni $n=2$ dagi jadvaldan aniqlaymiz.

$x_2(\alpha_2)=x_2(3)=1$

Agar $\{2\}$ mahsulotdan bir dona olinsa, u holda $\{1\}$ mahsulot uchun ajratilgan og'irlik $\alpha_1=\alpha_2-3x_2(\alpha_2)=3-3\cdot 1=0$ va $x_1(\alpha_1)=x_1(0)=0$ bo'ladi.

Optimal yechim

$x_{optimal}=(0,1,4)$ va maksimal foyda $f^{max}=f_3(11)=10\cdot 0+9\cdot 1+7\cdot 4=37$.

12.4. Ikki dastgohda detallarga ishlov berish

Faraz qilaylik, $i\in I=\{1,2,\dots,n\}$ nomerli n ta detal va ikkita dastgoh berilgan bo'lsin. Har bir detalga avval birinchi dastgohda, so'ngra ikkinchi dastgohda ishlov berish kerak. Birinchi dastgohda i- detalga ishlov berish vaqti a_i ga, ikkinchisida esa b_i ga teng bo'lsin. Dastgohlar bir vaqtda $t=0$ momentda ishga tushiriladi. Barcha detallarga ishlov berish umumiy vaqti minimal bo'lishi uchun detallarni ishlov berishga qanday ketma-ketlikda tushirish kerak?

Bu masalani o'xshash masalalar oilasiga turkumlaymiz. Oilaning umumiy elementini quyidagicha quramiz: Boshlang'ich I partiyadan $i_1,i_2,\dots,i_k$ nomerli k ta detaldan ajratib olamiz. Qolgan k ta detalning har biriga avval birinchi dastgohda, so'ngra ikkinchisida ishlov berilsin, lekin endi birinchi dastgoh $t=0$ momentda ishga tushiriladi, ikkinchisi esa birinchi dastgoh ishga tushirilganidan u birlik vaqt o'tgandan so'ng ishga tushiriladi.

Ushbu

$$B_{n-k}(i_1,i_2,\dots,i_k\,/\,y)\tag{12.4.1}$$

orqali Bellman funksiyasini, ya'ni qolgan $n-k$ ta detalga yuqorida ko'rsatilgan shartlarda ishlov berishning minimal vaqtini belgilaymiz.

Bellman tenglamasini tuzish uchun quyidagicha ish ko'ramiz. Qolgan $I_k=I\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$ nomerli detallar to'plamidan ixtiyoriy i- detalni olamiz va ishlov berishga birinchi qo'yamiz. Birinchi dastgoh i detalga ishlov berishni y momentda tugallaydi. Ikkinchi dastgoh i - detaldan

agar $y\le a_i$ bo'lsa, a_i+b_i momentda, (12.4.2)

agar $y>a_i$ bo'lsa, $y+b_i$ momentda bo'shaydi.

Aytaylik, qolgan $I_k\setminus\{i\}$ nomerli detallar ishlov berishga optimal ketma-ketlikda tushirilgan bo'lsin. Ular uchun birinchi dastgohdan $t=a_i$ momentdan boshlab foydalanish mumkin. Ikkinchi dastgoh esa $I_k\setminus\{i\}$ dan olingan detallarga ishlov berish uchun (12.4.2) ga asosan ularga ishlov berish uchun dastgoh ishga tushirilganidan

$$t_i=b_i+\max\{0,y-a_i\}\tag{12.4.3}$$

vaqt birligi o'tgandan keyin ishga tushiriladi. Bellman funksiyasining aniqlanishiga ko‘ra $I_k \setminus \{i\}$ dan olingan detallarga ishlov berishning minimal vaqti $B_{n-k-1}(i_1, i_2, \dots, i_k, i/t_i)$ ga teng. Shunday qilib, I_k dan olingan n-k ta detalga yuqorida ko‘rsatilgan usul bilan ishlov berish vaqti

$$a_i + B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i/t_i) \qquad (12.4.4)$$

ga tengdir. I_k dan har bir detalni birinchi navbatda ishlov berish uchun tanlab olib, (12.4.4) sonlar ichida minimalini topamiz:

$$\min_{i \in I_k}\left\{a_i + B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i/t_i)\right\}. \qquad (12.4.5)$$

Ravshanki, (12.4.5) son (12.4.1) songa tengdir:

$$B_{n-k}(i_1, \dots, i_k / y) = \min_{i \in I_k}\left\{a_i + B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i/t_i)\right\}. \qquad (12.4.6)$$

Bellman tenglamasi olindi. Agar k=n-1 deb olsak, ya’ni $I = \{1, \dots, n\}$ dan i dan boshqa barcha detallarni ajratib olsak (4.6) rekkurent tenglama uchun

$$B_1(1, \dots, i+1, \dots n/y) = \begin{cases} a_i + b_i, & agar \;\; y \le a_i \;\; bo'lsa, \\ y + b_i, & agar \;\; y > a_i \;\; bo'lsa \end{cases} \qquad (12.4.7)$$

boshlang`ich shartni olamiz.

(12.4.6) tenglamani (12.4.7) boshlang`ich shartda yechib, detallarga ishlov berishning optimal ketma-ketligini qurish mumkin. Bu holda masalaning yechimini (12.4.6) tenglamani tahlil qilib olamiz.

Agar $B_n(y)$ orqali ikkinchi dastgohning detallariga birinchi dastgohda ishlov berish boshlanganidan y vaqt birligi o‘tgandan keyin ishga tushirilganda, I dan olingan barcha n ta detalga ishlov berish vaqtini belgilasak, (12.4.6) dan $k=0$, $k=1$ bo‘lganda

$$B_n(y) = \min_{i \in I}\left\{a_i + B_{n-1}(i/t_i)\right\}, \qquad (12.4.8)$$

$$B_{n-1}(i/t_i) = \min_{i \in I \setminus \{i\}}\left\{a_i + B_{n-1}(i, j/t_{ij})\right\} \qquad (12.4.9)$$

ekanligini olamiz, bu yerda (12.4.3)ga ko‘ra

$$t_{ij} = b_j + \max\left\{0, t_i - a_j\right\}. \qquad (12.4.10)$$

(12.4.9)ni (12.4.8)ga keltirib qo‘yamiz:

$$B_n(y) = \min_{i \in I} \min_{i \in I \setminus \{i\}}\left\{a_i + a_j + B_{n-2}(i, j/t_{ij})\right\} \qquad (12.4.11)$$

$a_i + a_j + B_{n-2}(i, j/t_{ij})$ son I dan olingan detallar ichida avval i detalga, so‘ngra j - detalga ishlov berilib, qolgan detallarga optimal ketma-ketlikda ishlov berilgandagi vaqtga tengdir. Agar faqat i- va j- detallarga ishlov berish tartibini almashtirsak, I dan olingan barcha detallarga ishlov berish vaqti $a_i + a_j + B_{n-2}(i, j/t_{ij})$ ga tengdir, bu yerda

$$t_{ij} = b_j + \max\left\{0, t_j - a_i\right\}. \qquad (12.4.12)$$

Bellman funksiyasining fizik ma’nosidan kelib chiqadiki, $B_{n-2}(i, j/y)$ funksiya y bo‘yicha kamaymaydigan funksiyadir (ikkinchi dastgohni ishga tushirishni kechiktirish detallarga ishlov berishning minimal vaqtini qisqartira olmaydi). Shuning uchun

$$B_{n-2}\left(i,j/t_{ij}\right) \le B_{n-2}\left(i,j/t_{ji}\right), \ agar \ t_{ij} \le t_{ji} \ bo'lsa;$$
$$B_{n-2}\left(i,j/t_{ji}\right) \le B_{n-2}\left(i,j/t_{ij}\right), \ agar \ t_{ji} \le t_{ij} \ bo'lsa$$

tengsizliklar bajariladi. Agar (12.4.11)da bu tengsizliklarni hisobga olsak, detallarni ishlovga qo'yishning optimal ketma-ketligida, agar $t_{ij} \le t_{ji}$ bo'lsa, i-detalga j-detaldan oldin ishlov beriladi, degan xulosaga kelamiz. $t_{ji} \le t_{ij}$ bo'lganda avval j-detalga ishlov berilishi zarur. (12.4.10) dan $y = 0$ bo'lganda ushbuni olamiz:

$$t_{ij} = b_i + \max\left\{0, b_i + \max\{0, 0 - a_i\} - a_j\right\} = b_j + \max\left\{0, b_i - a_j\right\} =$$
$$= \begin{cases} b_j, & agar \ b_j \le a_i \ bo'lsa, \\ b_j + b_i - a_j, agar & b_i > a_j \ bo'lsa. \end{cases} \qquad (12.4.13)$$

Shunga o'xshash

$$t_{ji} = \begin{cases} b_i \ agar \ b_j \le a_i \ bo'lsa, \\ b_i + b_j - a_i, \ agar \ b_j > a_i \ bo'lsa. \end{cases} \qquad (12.4.14)$$

(12.4.13), (12.4.14)dan detallarni ishlov berishga qo'yish optimal ketma-ketligini qurishning sodda algoritmi kelib chiqadi. Berilganlarni 5.1-jadvalga o'tkazamiz. a_i, b_i elementlar orasida eng kichigini topamiz, u a_{i_0} elementdan iborat bo'lsin:

$$a_{i_0} = \min_{i=1,n} a_i \le \min_{i=1,n} b_j. \qquad (12.4.15)$$

Bu holda

$$t_{i_0 j} \le t_{j i_0}, \quad j = \overline{1,n} \qquad (12.4.16)$$

tengsizliklar bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, (12.4.14) dan $t_{ji_0} = b_{i_0} + b_j - a_{i_0}$ ekanligini olamiz. U holda (12.4.15)ga asosan $t_{ji_0} \ge b_j, t_{ji_0} \ge b_{i_0} + b_j - a_j$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, bulardan (12.4.13)ni hisobga olsak, (12.4.16) tengsizliklar kelib chiqadi. (12.4.16) munosabat i_0 -ràqamli detalga birinchi navbatda ishlov berilishi lozimligini ko'rsatadi.

5.1-jadvalning $a_i, b_i, i = \overline{1,n}$ elementlari ichida b_{j_0} element minimal bo'lsin, ya'ni:

$$b_{j_0} = \min_{j=1,n} b_j \le \min_{j=1,n} a_j. \qquad (12.4.17)$$

Bu holda j_0 raqamli detalga oxirgi navbatda ishlov berilishi kerak. Haqiqatan, (12.17) shartlardan

$$t_{j_0 i} = b_i, t_{ij_0} \ge b_{j_0}, t_{ij_0} \ge b_{j_0} + b_i - a_{j_0} \qquad (12.4.18)$$

munosabatlar o'rinlidir. (12.4.18) dan (12.4.13) ni hisobga olganda tasdig'imizning to'g'ri ekanligini ko'rsatuvchi

$$t_{ij_0} \le t_{j_0 i}, i = \overline{1,n}$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

4.1-jadval

Detallar №	1	2	...	i	...	n
№1 dastgoh	a_1	a_2	...	a_i	...	a_n
№2 dastgoh	b_1	b_2	...	b_i	...	b_n

Birinchi va oxirgi navbatda bajariladigan detallar topilgandan keyin jadvaldan mos ustun o'chiriladi va amallar kam sonli detallar uchun davom ettiriladi.

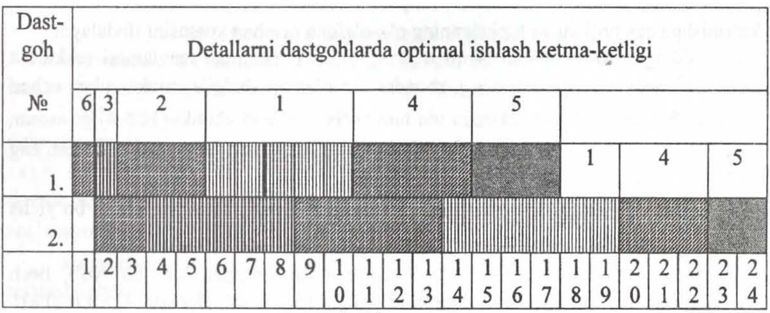
Izoh. Agar $a_{i_0} = b_{i_0}$ bo'lsa, o'chirib tashlanmagan raqamli detallar ichida i_0 detalga birinchi yoki oxirgi navbatda ishlov berilishining farqi yo'q. Unga doimo birinchi navbatda ishlov beriladi deb hisoblash mumkin.

Sonli misolni ko'raylik, $n=6$ bo'lsin va detallarga ishlov vaqtlari quyidagi jadvalda keltirilgan bo'lsin.

Detallar nomi	1	2	3	4	5	6
Birinchi dastgoh	5	3	1	4	3	1
Ikkinchi dastgoh	6	5	5	3	2	2

Berilgan sonli misol uchun optimal ketma-ketlik quyidagichadir: $6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 5$.

Detallarga ishlov berish grafigi Gant sxemasi yordamida 1-chizmada tasvirlangan bo'lib, unda absissalar o'qi bo'yicha vaqt, ordinatalar o'qida dastgohlarning raqamlari qo'yilgan.



1-chizma

Optimal yechimda ikkinchi dastgohda detallarga ishlov berish ketma-ketligi birinchi dastgohdagi detallarga ishlov berish ketma-ketligi bilan bir xilda bo'ladi. Optimal ishlov berish vaqti $f_{\min} = 24$ ga teng.

12.5. To'rda eng qisqa masofani aniqlash

Aytaylik, $S=\{I,U\}$ to'r bo'lib, unda faqat $(i,j)\in U$ yoylarning xarakteristikalari $c_{ij}\geq 0$, ya'ni i tugundan j tugungacha masofa berilgan bo'lsin. Belgilangan ikkita $s,t\in I$, tugun uchun s dan t gacha minimal uzunlikka ega bo'lgan yo'lni topish talab qilinadi (s dan t ga yo'l deb, s dan t ga bo'lgan shunday to'rga aytiladiki, s dan t ga harakat qilganda uning yoylari to'g'ri chiziqlardir).

Bu masalani o'xshash masalalar oilasiga turkumlaymiz.

Oilaning umumiy masalasi s tugundan ixtiyoriy $j\in I$ tugungacha eng qisqa yo'lni qurishdan iborat. B_j deb Bellman funksiyasini - s dan j gacha eng qisqa yo'l uzunligini belgilaymiz. B_j funksiya qanoatlantiradigan tenglamani tuzishda s dan j gacha yo'l uchun oxirgi yoyni ixtiyoriy tanlab olamiz: $(i,j)\in U$ va s dan $i\in I_j^-$ tugunga eng qisqa yo'l topilgan, deb faraz qilamiz, bu yerda $I_j^- - j$ bilan $(i,j)\in U$ yoylar yordamida tutashtirilgan $i\in I$ tugunlar to'plamidir. U holda s dan j ga bo'lgan *yo'lning uzunligi*

$$B_i+c_{ij} \qquad (12.5.1)$$

ga teng bo'ladi. $i\in I_j^-$ tugunlarni saralab, (12.5.1) sonlar ichida minimalini topamiz:

$$\min_{i\in I_j^-}\left(c_{ij}+B_i\right). \qquad (12.5.2)$$

Ma'lumki, (12.5.2) s dan j ga bo'lgan eng qisqa yo'lning uzunligidir. Aniqlanishiga ko'ra Bellman funksiyasi B_j ga teng bo'lganligidan B_i uchun quyidagi Bellman tenglamasi olinadi:

$$B_j=\min_{i\in I_j^-}\left(c_{ij}+B_i\right). \qquad (12.5.3)$$

(12.5.3) tenglama uchun chegaraviy shart

$$B_s=0 \qquad (12.5.4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi va funksiyaning o'z-o'zidan ravshan xossasini ifodalaydi.

Oldingi paragraflardan farqli o'laroq, (12.5.3) Bellman tenglamasi rekkurent emas. I^* deb $i\in I$ tugunlarning shunday to'plamini belgilaymizki, ular uchun Bellman funksiyasining B_i qiymati ma'lum bo'lsin. $I^*\neq\varnothing$ chunki (12.5.4) ga asosan $s\in I^*$. Agar $t\in I^*$ bo'lsa, masala yechilgan bo'ladi: $B_t - S$ dan t gacha bo'lgan eng qisqa yo'lning uzunligidir.

Faraz qilaylik, $t\,\overline{\in}\, I^*$ bo'lsin. S to'rda $I^*, s\in I^*, t\,\overline{\in}\, I^*$ to'plam bo'yicha $U(I^*)=\{(i,j)\in U: i\in I^*, j\,\overline{\in}\, I^*\}$ kesim quramiz. $U(I^*)\neq\varnothing$ deb qabul qilaylik.

Ma'lumki, S tugundan $k\,\overline{\in}\, I^*$ tugungacha bo'lgan har bir yo'l hech bo'lmaganda $U(I^*)$ dan olingan bitta yoyni o'z ichiga oladi. Demak, $c_{ij}\geq 0,(i,j)\in U$ bo'lganligidan har bir $k\,\overline{\in}\, I^*$ tugun uchun,

$$B_k\geq \min_{(i,j)\in U(I^*)}\left(B_i+c_{ij}\right)=B_{i^*}+c_{i^*j^*},\, k\,\overline{\in}\, I^* \qquad (12.5.5)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (i_*,j_*)- kesimining yoyi bo'lganligidan $i_*\in I^*, j_*\,\overline{\in}\, I^*$.

(12.5.5) da $k = j_*$ deb olamiz. U holda (12.5.3) ga asosan

$$B_{j^*} = B_{i^*} + c_{i^*j^*}$$

ekanligini olamiz. j_* tugunini I^* to‘plamga qo‘shamiz va yechishni davom ettiramiz. Chekli sondagi qadamlardan so‘ng $B_t$ni topamiz, yoki $U(I^*) \neq \varnothing$ bo‘lgan I^* to‘plamini quramiz. Ikkinchi hol S to‘rda s dan t ga yo‘llar yo‘q ekanligini anglatadi. Bellman tenglamasini yechishning yuqorida bayon qilingan tarixini S to‘rda *belgilar usuli* yordamida amalga oshirish mumkin. I^* orqali Bellman funksiyasining qiymatlari ma’lum bo‘lgan tugunlar to‘plamini va $\omega(I^*) = \{j \in I:(i,j) \in U(I^*)\}$ orqali I^* to‘plam bilan qo‘shni tugunlar to‘plamini belgilaymiz. Agar $\omega(I^*) = \varnothing$ bo‘lsa, S to‘rda s dan t ga yo‘l mavjud emas. $\omega(I^*) \neq \varnothing$ bo‘lsin. B'_j sonlarni (I^*bilan qo‘shni j *tugunlarning vaqtincha belgilarini*) hisoblaymiz:

$$B'_j = \min_{i \in I^* \cap I^-(j)} \left(B_i + c_{ij}\right),\ j \in \omega(I^*) \qquad (12.5.6)$$

va ular orasida minimalini topamiz:

$$B'_{j^*} = \min B'_j,\ \ j \in \omega(I^*).$$

$j_* \overline{\in} I^*$ tugun uchun Bellman funksiyasining B_{j^*} qiymati B'_{j^*} ga tengdir.

j^*tugunni I^* to‘plamga qo‘shamiz va amallarni takrorlaymiz. $B_j, j \in I^*$, sonlar *tugunlarning o‘zgarmas belgilari* deb ataladi. Har bir iteratsiyada o‘zgarmas belgilar to‘plami ortib bordi. Chekli sondagi iteratsiyalardan so‘ng t tugun

j^* o‘zgarmas B_t belgini oladi yoki uni olmaydi va $\omega(I^*) = \varnothing$. Ikkinchi hol s dan t ga yo‘l yo‘qligini bildiradi.

Birinchi holda B_t kattalik s dan t gacha eng qisqa yo‘lning uzunligidir. Eng qisqa yo‘lni (12.5.3) ga asosan o‘zgarmas belgilar bo‘yicha qurish mumkin. B_t belgi bo‘yicha B_{i_1} belgini shunday topamizki, $B_t = c_{i_1 t} + B_{i_1}$ bo‘lsin. B_{i_1} bilan ham shunga o‘xshash ish ko‘ramiz: $B_{i_1} = c_{i_2 i_1} + B_{i_2}$ va h.k.

12.6. «Ishonchli ta’minotchi» haqidagi masala

«Ishonchli ta’minotchi» korxonasi malum bir mahsulotni ishlab chiqarib iste’molchilariga o‘z vaqtida yetkazib berishni kafolatlaydi.

Ushbu mahsulotga bo‘lgan talab vaqt (davr)ga qarab o‘zgaradi. Korxona N davr davomida o‘z iste’molchilarini mahsulot bilan ta’minlashi shart. Mahsulotga $t \in \overline{1,N}$ davrdagi talab D_t, $t \in \overline{1,N}$ ga teng bo‘lsin. Korxona t davrdagi talabni shu davrda ishlab chiqorilgan x_t miqdordagi mahsulot bilan yoki korxona omborlarida saqlanayotgan i_t-mahsulotlar hisobiga qondirish mumkin.

Korxona iste’molchilarning talabini eng kam sarf-xarajatlar bilan qondirishni rejalashtirmoqda. Shu tufayli korxona rahbariyati har bir davrda iste’molchilar talabini to‘liq qondirgan holda ishlab chiqarilishi zarur bo‘lgan va omborda saqlanishi kerak bo‘lgan mahsulot miqdorini butun rejalashtirilayotgan N davr ichida umumiy sarf-xarajatlarning eng kichik miqdorini ta’minlaydigan holda tanlab olmoqchi.

Ko‘p bosqichli ushbu masalaning matematik modelini quraylik.

$C_t(x_t, i_t)$ deb t davrda x_t dona mahsulot ishlab chiqarish va i_t mahsulotni omborda 1 davr mobaynida saqlash bilan bog`liq bo'lgan sarf-xarajatlar miqdorini belgilaylik.

Iste'molchilar talabini to'liq qondirish bilan bog`liq shart u holda quyidagicha ifodalanadi:

$$x_t + i_{t-1} \geq D_t, t = \overline{1, N}.$$

Korxonaning t-davrdagi maksimal ishlab chiqarish quvvati x_t^{max} ga ombordagi maksimal mahsulot miqdori i_t^{max} ga teng bo'lsin.

Rejalashtirilayotgan butun davr mobaynidagi umumiy sarf-xarajatlar quyidagiga teng bo'ladi:

$$\sum_{t=1}^{n} C_t(x_t, i_t).$$

Iste'molchilar talablarining qondirilishi va ishlab chiqarish quvvatlariga bo'lgan shartlar, rejalashtirish davri boshida ombordagi mahsulot miqdori i_0 va davr oxirida omborda qolishi kerak bo'lgan i_N mahsulotni hisobga olgan holda tuzilgan matematik modelimiz quyidagi ko'rinishda aks ettiriladi:

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{n} C_t(x_t, i_t) \rightarrow \min \\
&i_{t-1} + x_t \geq D_t, \qquad t = \overline{1.n} - 1, \\
&i_{n-1} + x_n = D_n + i_N, \quad t = n, \qquad\qquad\qquad (12.6.1)\\
&0 \leq x_t \leq x_t^{max}, \quad butun, \\
&0 \leq i_t \leq i_t^{max}, \quad butun.
\end{aligned}$$

Ushbu ko'p bosqichli masalani yechishda dinamik programmalash usulidan foydalanib, dinamik proglammalashning rekkurent formulalarini keltirib chiqaramiz. Ushbu formulalarni keltirib chiqarishda dinamik programmalashda keng qo'llaniladigan deduksiya usulidan foydalanib, rejalashtirilayotgan vaqtni teskari tarzda harakatlantiramiz, ya'ni $\tau = N - t$ teskari vaqt o'zgaruvchisini kiritamiz va quyidagi belgilashlarni amalga oshiramiz:

$$d_t = D_{N-t+1}, \ t = \overline{1, n}\ , \ \tilde{x}_t = x_{N-t+1}, \ t = \overline{1, n}.$$

$f_k(i)$ – rejalashtirish davrining tugashiga k davr qolib, ushbu davr boshida omborda i dona mahsulot saqlanayotgan holda, qolgan k davr mobaynida iste'molchilarning talabini to'liq qondirish uchun zarur eng minimal sarf-xarajat miqdorini belgilaymiz.

Agar teskari vaqt bo'yicha belgilangan k-davr boshida omborda i dona mahsulot mavjud bo'lsa va $\tilde{x}_k$ dona mahsulot ishlab chiqarilsa, iste'molchining d_k miqdordagi talabi qondirilgandan so'ng $k+1$ davr boshiga kelib $\tilde{i}_k = i + \tilde{x}_k - d_k$ miqdorida mahsulot qoladi. k davrda $\tilde{x}_k$ mahsulot ishlab chiqarish va i_k mahsulotni 1 davr mobaynida saqlash bilan bog`liq sarf-xarajatlar

$$C_k(\tilde{x}_k, \tilde{i}_k) = C_k(\tilde{x}_k, \ i + \tilde{x}_k - d_k) \text{ ga tengdir.}$$

Dinamik programmalashtirishning Bellman optimallik mezoniga ko'ra

$$f_k(i) = \min_{\tilde{x}_k + i \geq d_k} \{C_k(\tilde{x}_k, i - \tilde{x}_k - d_k) + f_{k-1}(i + \tilde{x}_k - d_k)\} \qquad (12.6.2)$$

rekkurent formulani hosil qilamiz.

Ushbu rekkurent formulani qo'llash uchun quyidagi boshlang'ich shartlardan foydalanamiz:

$$f_*(i) = 0, \qquad i = \overline{0, i_{max}},$$
$$\widetilde{x}_1 = d_1 + \widetilde{i}_N - \widetilde{i}_{N-1} = D_N + i_N - i_{N-1}.$$

Buning natijasida

$$f_1(i) = C_1(\widetilde{x}, \widetilde{i}) = C_1(d_1 + i_N - i,\ i_N) \qquad (12.6.3)$$

funksiyaning $(i = \overline{0, i_{max}})$ o'zgargandagi qiymatlar jadvalini hosil qilamiz, toki $D_i + i_N - i \geq 0$.

$k=1$ i	$\widetilde{x}_1(i)$	$f_1(\widetilde{x}_1(i), i)$
0	$D_N + i_N$	$f_1(\widetilde{x}_1(0))$
1	$D_N + i_N - 1$	$f_1(\widetilde{x}_1(1))$
$\widetilde{i}_{max}$	$D_N + i_N - i_{max}$	$f_1(\widetilde{x}_1(i_{max}))$

$k = 2$ hol uchun:

$$f_2(i) = \min_{\substack{\widetilde{x}_2 + i \geq d_2 \\ i = 0, \widetilde{i}_{2max}}} \{C_2(\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2 + i - d_2) + f_1(\widetilde{x}_2 + i - d_2)\}$$

rekkurent formulani hosil qilamiz va ushbu formula asosida hisoblangan funksiya qiymatlarini quyidagi jadvalda aks ettiramiz:

X / S	0	1	....	$\widetilde{i}_{2max}$	$\widetilde{i}_2(i)$	$f_2(i)$
0					$\widetilde{x}_2(0)$	$f_2(0)$
1					$\widetilde{x}_2(1)$	$f_2(1)$
...	...					
$\widetilde{i}_{2max}$					$\widetilde{x}_2(\widetilde{i}_{2min})$	$f_2(\widetilde{i}_{2max})$

Izoh: Agar $i + x$ o'zgaruvchilarining ba'zi qiymatlarida $i + x \geq d_2$ shart yoki $i + \widetilde{x}_2 - d_2 \leq i_2^{max}$ shartlar bajarilmasa, ushbu kataklar to'ldirilmaydi.

$k = n$ va $\widetilde{i} = i_0$ bo'lgan holda boshlang'ich masalaning yechimini hosil qilamiz

$$f_n(i_0) = \min_{\substack{0 + \widetilde{x}_n \geq d_n \\ \widetilde{x}_n \in 0, \widetilde{x}_n^{max}}} \{c_n(\widetilde{x}_n, i_0 + \widetilde{x}_n - d_n) + f_{n-1}(i_0 + \widetilde{x}_n - d_n)\},$$

ya'ni:

$$f_n(i_0) = \min_{\substack{\{x_t + i_{t_1} \geq D_t,\ t = \overline{1,n} \\ x_N + i_{N-1} = D_N + i_N\}}} \sum_{t=1}^{n} c_t(x_t, i_t).$$

Shartli optimal yechimlar $\widetilde{x}_k(i)$ lar asosida optimal yechimni quyidagicha yechish mumkin:

$$
\begin{gathered}
x_t = \tilde{x}_n(i_0),\\
i_1 = i_0 + \tilde{x}_n(i_0) - d_n = i_0 + \tilde{x}_1(i_0) - D_1,\\
x_2\left(i_0 + \tilde{x}_1(i_0) - D_1\right) = \tilde{x}_{n_1}\left(i_0 + \tilde{x}_n(i_0) - d_n\right),\\
i_2 = x_2(i_1) + i_1 - D_2,\\
x_N(i_{N-1}) = \tilde{x}_1(i_{n-1}) + i_{n-1} - d_1 = D_N + i_N - i_{N-1},\\
i_N = i_N.
\end{gathered}
$$

Yuqorida bayon etilgan usulni quyidagi iqtisodiy masalani yechish uchun tatbiq etaylik:

$N=3;\ D_1=3;\ D_2=4;\ D_3=2,$

$i_0=2;\ i_3=1;\ x_t=\overline{0,4},\ t=\overline{1,3},$

$i_t=\overline{0,3},\ t=\overline{1,3},$

$c_t(x_t, i_t) = c(x_t) + h(i_t)\ \left(t=\overline{1,3}\right)$ – sarf-xarajat funksiyasi,

$c(x_t) = \begin{cases} 0 & , x_t = 0, \\ 18 + 3x_t & , x_t = \overline{1,4}. \end{cases}$ – ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi.

$h(i_t) = 2 \cdot i_t,\ i_t = \overline{0,3},\ \left(t=\overline{1,3}\right) - i_t$ dona mahsulotni omborda 1 davr mobaynida saqlash bilan bog`liq sarf-xarajatlar funksiyasi.

$$k=1 \ \ da \qquad \tilde{x}_1(i) = d_1 + \tilde{i}_0 - i = D_3 + i_3 - i = 2 + 1 - i = 3 - i,$$

i	$\tilde{x}_1(i)$	$f_1(i)$	$h_1(i_1)=0,$
0	3	$f_1(0)=27$	$f_1(0) = \min\limits_{\tilde{x}_1+0 \geq d}\{c_1(\tilde{x}_1) + h_1(i_1) + f_0(i_1)\} = c_1(3-0) = 18 + 3 \cdot 3 = 27$
1	2	$f_1(1)=24$	$f_1(1) = c_1(3-1) = c_1(2) = 18 + 3 \cdot 2 = 24$
2	1	$f_1(2)=21$	$f_1(2) = c_1(3-2) = c_1(1) = 18 + 3 = 21$
3	0	$f_1(3)=0$	$f_1(3) = c_1(3-3) = c_1(0) = 0$

$$k=2 \ \ f_2(i) = \min\limits_{\tilde{x}_2+i \geq d_2}\left\{c(\tilde{x}_2) + h(i + \tilde{x}_2 - d_2) + f_1(i + \tilde{x}_2 - d_2)\right\} =$$

$$= \min\limits_{\tilde{x}_2+i \geq 4}\left\{c(\tilde{x}_2) + h(i + \tilde{x}_2 - 4) + f_1(i + \tilde{x}_2 - 4)\right\}$$

i \ x	0	1	2	3	4	$\tilde{x}_2(i)$	$f_2(i)$
0					30 + 0 + 27 = 57	4	57
1				27 + 0 + 27 = 54	30 + 2 × 1 + 24 = 56	3	54
2			24 + 0 + 27 = 51	27 + 2 × 1 + 24 = 53	30 + 2 × 2 + 21 = 55	2	51
3		21 + 0 + 27 = 48	24 + 2 × 1 + 24 = 50	27 + 2 × 2 + 21 = 52	30 + 2 × 3 + 0 = 36	0	36

$$f_2(0)=\min_{\tilde{x}_2+0\ge 4}\{c(\tilde{x}_2)+h(0+\tilde{x}-4)+f_1(0+\tilde{x}_2-4)\}=c(4)+h(4+0-4)+f_1(4+0-4)=$$
$$=18+3\cdot 4+2\cdot(4+0-4)+27=57,$$
$$f_2(1)=\min_{\tilde{x}_2+1\ge 4}\{c(\tilde{x}_2)+h(1+\tilde{x}_2-4)+f_1(\tilde{x}_2+1-4)\}=$$
$$=\min\{c(3)+h(1+3-4)+f_1(3+1-4);\ c(4)+h(1+4-4)+f_1(4+1-4)\}=$$
$$=\min\{27+2\cdot 0+27;30+2\cdot 1+24\}=54,\ \tilde{x}_2(1)=3,$$
$$f_2(2)=\min_{\tilde{x}_2+2\ge 4}\{c(\tilde{x}_2)+h(2+\tilde{x}_2-4)+f_1(\tilde{x}_2+2-4)\}=$$
$$=\min\left\{\begin{matrix}c(2)+h(2+2-4)+f_1(2+2-4);\ c(3)+h(2+3-4)+f_1(3+2-4);\\ c(4)+h(2+4-4)+f_1(4+2-4)\end{matrix}\right\}=$$
$$=\min\{51,53,55\}=51,\ \tilde{x}_2(2)=2,$$
$$f_2(3)=\min_{\tilde{x}_2+3\ge 4}\{c(\tilde{x}_2)+h(3+\tilde{x}_2-4)+f_1(3+\tilde{x}_2-4)\}=$$
$$=\min\left\{\begin{matrix}c(1)+h(3+1-4)+f_1(3+1-4);\ c(2)+h(3+2-4)+f_1(3+2-4);\\ c(3)+h(3+3-4)+h(3+3-4);c(4)+h(3+4-4)+f_1(3+4-4)\end{matrix}\right\}=$$
$$=\min\{48,50,52,36\}=36,\quad \tilde{x}_2(3)=0,$$
$$k=3,\quad i_0=2,$$
$$f_3(i_0=2)=\min_{i_0+\tilde{x}_3\ge d_3}\{c(\tilde{x}_3)+h(i_0+\tilde{x}_3-d_3)+f_2(i_0+\tilde{x}_3-d_3)\}=\min_{2+x_3\ge 3}\{c(x_3)+2(2+\tilde{x}_3-3)+f_2(2+\tilde{x}_3-3)\}=$$
$$=\min\left\{\begin{matrix}c(1)+2(2+1-3)+f_2(2+1-3);\ c(2)+2(2+2-3)+f_2(2+2-3);\\ c(3)+2(2+3-3)+f_2(2+3-3);\ c(4)+2(2+4-3)+f_2(2+4-3)\end{matrix}\right\}=$$
$$=\min\{21+2\cdot 0+57,24+2\cdot 1+54,27+2\cdot 2+51;\ 30+2\cdot 3+36\}=\min\{78,80,82,72\}=72,\quad \tilde{x}_3(2)=4;$$
$$x_1(2)=\tilde{x}_3(2)=4;\ i_1=i_0+x_1(2)^{-d}=2+4=6-3=3,$$
$$x_2(3)=0,\ i_2=i_1+x_2(3)-d_2=3+0-3=0,\ x_3(0)=4,$$
$$x_{\text{опт}}=(4;\ 0;\ 4),$$
$$f_{\min}(2)=72.$$

Mahsulotga bo‘lgan umumiy talab $D_1+D_2+D_3+i_3=3+4+2+1=10$, umumiy taklif:

$$i_0+x_1+x_2+x_3=2+4+0+4=10,$$

<umumiy talab> = <umumiy taklif>

$$10=10.$$

Musatqil ishlash uchun masalalar

1. Samolyotni optimal yuklash masalasi.

Mahsulotlar turi N = 4.

Samolyot maksimal yuk ko‘tarish quvvati

$W=\min\{K,2m+5n\}$

$p_1 = n + 2m;\ p_2 = \left[\dfrac{m+5}{4}\right] + 1;\ p_3 = \left[\dfrac{2n+m}{3}\right] + 1;\ p_4 = \left[\dfrac{2m+3n}{5}\right] + 1,$

$c_1 = n + 2m;\ c_2 = 2n + m;\ c_3 = 2n + 3 \cdot m;\ c_4 = 3n + 4m$

$K = 12,\ 13,\ \dots$

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

$m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

2. To‘rda eng qisqa masofani aniqlash masalasi. Shaharlar orasidagi bosqichlar soni N = 3.

$C_{AC_i} = 10 \cdot m \cdot i + (7 - i) \cdot n, \qquad i = \overline{1,e},$

$C_{C_i \cdot D_j} = 9n(i - j) + 5m(20 - (i + j)) \quad i = \overline{1,p}, \qquad j = \overline{1,q}$

$C_{D_j \cdot B} = 15 \cdot m \cdot j + 10(10 - j) \cdot n, \qquad j = \overline{1,q},$

$m, n = 1,\ 2,\ 3, \dots$

$p, q = 3,\ 4,\ 5, \dots$

3. «Ishonchli ta’minotchi» haqidagi masala

$N = 4,$

$i_o = \min\{3; k + 1; m + 1\},$

$i_N = \min\{2; k + 1; m\},$

$D_1 = \min\{3, k + m\},$

$D_2 = \min\{4; 2k + m\},$

$D_3 = \min\{5; k + m + 2\},$

$D_4 = \min\{2; m\},$

$$C(x_7) = \begin{cases} 0, & x_7 = 0 \\ (10k + 3m) + 2km \cdot x_7, & x_7 = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$h(i_t) = (3k + 4m) \cdot i_t, \quad i_t = \overline{0,4},$

$k, m = 1,\ 2,\ 3, \dots, 10.$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов. //Под ред. Ш.В. Грачевой, М.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черёмных - М.: ЮНИТИ –ДИАНА, 2004.

2. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций. -М., 2006.

3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата. –М.: Дело, 2005.

4. Ермаков В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. -М.: ИНФРА – М, 2006.

5. Волошин Г.Я. Методы оптимизации в экономике. -М.: Дело и Сервис, 2004.

6. Шикин Е.В., Чхартшвиили А.Х. Математические методы и модели в управлении. –М.: Дело, 2004.

7. Крамер Н.Ш. Исследование операций в экономике. -М., 2005.

8. Джемилев Н.И., Эйдельнант Н.И. Сборник задач по математическому программированию. -Т.: Ўқитувчи, 1990.

9. Багриновский К.А. Экономико-математические методы и модели. Учебное пособие. -М.: РУДН, 1999.

10. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. Учебное пособие. -М., 2003.

11. Jumayev X.N., Otaniyozov B., Yugay L.P., Jalilov A. Matematik programmalashtirish. Darslik. – T.: Adabiyot jamg`armasi nashriyoti, 2005.

12. Safayeva Q. Matematik dasturlash. Darslik. –T.: Iqtisod-Moliya, 2004.

Beknazarova Naima, Jumayev Xosiyat Nikiyevich

Matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullari (O'quv qo'llanma)

"Иқтисодиёт" - 2012

Muharrir
Boboyeva N.S.
Texnik muharrir
Mirhidoyatova D.M.

Litsenziya AI № 089 15.03. 2007 y. Terishga berildi 07.05.2012. Bosishga ruxsat etildi 05.07.2012. Qog`oz bichimi 60x80 1/16. Times garniturasi. Ofset muhri. Ofset qog'ozi. Shartli bosma tabog`i 11,0. Hisob nashr varag'I 10,9.
Адади 150 нусха. 38-сонли буюртма. Баҳоси келишилган
Toshkent davlat iqtisodiyot universitetining bosmaxonasida bosildi. 100003. Toshkent. O`zbekiston shoh ko`chasi, 49-uy.

22.172 **Matematik programmalashtirish va optimallashtirish usullari:** O‘quv qo‘llanma. /Beknazarova N., Jumayev X.N. - T.: Иқтисодиёт, 2012. -105 b.

1. Beknazarova N.,
2. Jumayev X.N.

ISBN 978-9943-333-45-1

UDK 517.9
BBK 22.172