O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

SH. SHORAXMETOV, D.S. ASROQULOVA,
J.J. QURBONOV

IQTISODCHILAR UCHUN OLIY MATEMATIKADAN MASALALAR TO'PLAMI

TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

Sh.Shoraxmetov, D.S.Asroqulova,
J.J.Qurbonov

IQTISODCHILAR UCHUN OLIY MATEMATIKADAN MASALALAR TO‘PLAMI

O‘zbekitson Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligii Ilmiy-uslubiy va o‘quv-uslubiy birlashmalari faoliyatini muvofiqlashtiruvchi kengashi tomonidan iqtisodiyot yo‘nalishidagi oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun o‘quv qo‘llanma.
2010-yil 17-iyun 234-sonli buyrug‘i asosida berilgan 234-23-guvoxnoma asosida tavsiya etilgan

TOSHKENT - IQTISODIYOT - 2012

UDK 517.9
BBK 22.172

Shorahmetov Sh., Asroqulova D.S., Qurbonov J.J. Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to'plami: O'quv qo'llanma. – T.: Iqtisodiyot, 2012. -239 b.

O'quv qo'llanma oliy matematikadan iqtisodchilarga mo'ljallangan noan'anaviy dasturlar asosida yaratildi. Unda Oliy matematikaning chiziqli algebra, analitik geometriya, differensial va integral hisobi, differensial tenglamalar, qatorlar kabi bo'limlariga tegishli masala va misollar (jumladan iqtisodiy mazmundagi masalalar) berildi. Har bir bo'limda qisqacha nazariy ma'lumotlar keltirilib, ularning qo'llanishi ko'plab mashqlarda tushuntirildi.

O'quv qo'llanma iqtisodiyot yo'nalishidagi talabalar uchun mo'ljallangan.

Mas'ul muharrir f.m.f.n., dots. Gulomov A.
Taqrizchilar: f.m.f.n., dots. Qurbonov O.,
prof. Abdushukurov A. – O'zMu "Ehtimollar nazariyasi" kafedrasi mudiri

Шорахметов Ш., Асрокулова Д.С., Курбанов Ж.Ж. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. – Т.: Иктисодиёт, 2011. - 239 стр.

В соответствии с учебной программой подготовки экономистов в сборник включены задачи (в том числе задачи экономическим содержанием) по основным разделом общего курса высшей математики: аналитическая геометрия, линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, ряды.

В начале каждого раздела приводится необходимый теоретический минимум и подробно разъясняется его использование на большом количестве примеров.

Ответственный редактор к.ф.м.н., доц. А. Гулямов

Рецензенты: к.ф.м.н., доц. О. Курбанов,
проф. А. Абдушукуров - заведующей кафедрой «Теории вероятности» НУ Уз

ISBN 978-9943-333-93-3

UDK 517.9
BBK 22.172

MUNDARIJA

So'z boshi 6
1-bob. DASTLABKI TUSHUNCHALAR 7
1.1. Matematik modellashtirish 7
1.2. Iqtisodiy obyektlarining matematik modellari 7
1.3. Funksiya va uning berilish usullari 16
1.4. Funksiya xossalari 17
1.5. Elementar funksiyalar 18
1.6. Grafiklarni almashtirish 19
1.7. Iqtisodiyotda uchraydigan funksiyalar 20
Mavzu yuzasidan savollar 21
Adabiyotlar 21
2-bob. MATRITSA VA DETERMINANTLAR 23
2.1. Matritsalar. Diaganal va birlik matritsalar 23
2.2. Matritsalarni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish 23
2.3. Matritsalarni ko'paytirish 24
2.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant 29
2.5. Minor. Algebraik to'ldiruvchi 30
2.6. Yuqori tartibli matritsaning determinanti va uning xossalari 30
2.7. Teskari matritsa. Xosmas matritsa 33
2.8. Matritsaning rangi. Elementar almashtirishlar 36
2.9. Matritsalar algebrasining iqtisodiyotda qo'llanilishi 39
Mavzu yuzasidan savollar 43
Adabiyotlar 43
3-bob. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI 44
3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimi 44
3.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish 44
3.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish 47
3.4. Umumiy ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish. 48
3.5. Kroneker – Kapelli teoremasi 50
Mavzu yuzasidan savollar 59
Adabiyotlar 59
4-bob. CHIZIQLI FAZO ELEMENTLARI 60
4.1. Tekislik va fazoda vektorlar 60
4.2. Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmalari 65
4.3. Chiziqli fazo va uning o'lchovi 67
4.4. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi. n-o'lchovli chiziqli fazo bazisi va koordinatalari 68
4.5. Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma tushunchasi 69
4.6. Chiziqli operator 70
4.7. Kvadratik formalar 71
4.8. Iqtisodiyotda chiziqli modellar. Savdoning chiziqli modeli 73
Mavzu yuzasidan savollar 76
Adabiyotlar 77
5-bob. ANALITIK GEOMETRIYANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA

USULLARI. 78
5.1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqlar.. 78
5.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar Aylana, ellips, giperbola va parabola tenglamalar.. 84
5.3. Fazo tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari.. 90
Mavzu yuzasidan savollar.. 98
Adabiyotlar.. 99
6-bob. LIMITLAR. 100
6.1. Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti. 100
6.2. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. 100
6.3. Yaqinlashuvchi ketma – ketlikning xossalari. 101
6.4. Funksiyaning limiti. 102
6.5. Noaniqliklar. 103
6.6. Bir tomonlama limitlar.. 103
Mavzu yuzasidan savollar.. 114
Adabiyotlar.. 114
7-bob. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI. 115
7.1. Funksiya uzluksizligini hisoblash usullari. 115
7.2. Funksiyaning uzilishi va uning turlari 116
7.3. $[X]$, $\{x\}$, $\sin X$, $X(x)$ funksiyalar.. 118
7.4. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari.. 118
7.5. Bo`lsano Koshining teoremalari.. 119
Mavzu yuzasidan savollar.. 123
Adabiyotlar.. 123
8-bob. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL HISOBI.. 125
8.1. Funksiya hosilasi.. 125
8.2. Hosilaning geometrik ma’nosi.. 126
8.3. Hosila olish qoidalari. 129
8.4. Teskari va murakkab funksiyalarning hosilasi. 130
8.5. Funksiya differentsiali va uning tarkibiy hisoblashlardagi tatbiqlari.. 132
8.6. Yuqori tartibli hosilalar. 134
8.7. Differensial hisobning asosiy teoremasi. 135
8.8. Teylor formulasi. 135
8.9. Lopital qoidasi. 136
8.10. Funksiya ekstremumlari.. 137
8.11. Funksiyani hosila yordamida tekshirish.. 137
Mavzu yuzasidan savollar.. 146
Adabiyotlar.. 147
9-bob. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR. 149
9.1. Ko‘p o‘zgaruvchi funksiya va uning berilish usullari.. 149
9.2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti.. 150
9.3. Funksiyaning uzluksizligi. 152
9.4. Xususiy hosilalar. 153

9.5. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali 155
9.6. Yuqori tartibli hosila 157
9.7. Ko'p o'zgaruvchi funksiyalarning lokal ekstremumlari 158
9.8. Shartli ekstremum 159
9.9. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotda qo'llanilishi 164
Mavzu yuzasidan savollar 168
Adabiyotlar 169
10-bob. INTEGRAL HISOB 170
10.1. Boshlang'ich funksiya va integral 170
10.2. Noaniq integral xossalari 170
10.3. Elementar funksiyalar noaniq integrallari jadvali 170
10.4. Integrallashning asosiy usullari 171
10.5. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash 180
10.6. Aniq integral 182
Mavzu yuzasidan savollar 186
Adabiyotlar 186
11-bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR 188
11.1. Differensial tenglama haqida tushuncha. Umumiy yechim, umumiy integral 188
11.2. O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar 189
11.3. Bir jinsli differensial tenglamalar 191
11.4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar 193
11.5. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar 195
11.6. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar 195
11.7. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar 197
11.8. Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati 199
Mavzu yuzasidan savollar 213
Adabiyotlar 213
12-bob. QATORLAR 214
12.1. Sonli qatorlar, asosiy tushunchalar 214
12.2. Yaqinlashuvchi sonli qatorlar va ularning xossalari 214
12.3. Musbat haqli qatorlar 217
12.4. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Leybnis teoremasi 226
12.5. Ishorasi ixtiyoriy bo'lgan sonli qatorlar 227
12.6. Funksional qatorlar 227
12.7. Darajali qatorlar 229
12.8. Funksiyani darajali qatorga yoyish 233
Mavzu yuzasidan savollar 235
Adabiyotlar 236
Foydalanilgan adabiyotlar 237

SO'Z BOSHI

Jahon ta'lim tizimida matematika fanidan ma'lum bir soha (xususan ijtimoiy gumanitar, iqtisod sohalari) talabalari uchun maxsus darslik, o'quv qo'llanma yaratish yangilik emas. Bunday kitoblarning o'ziga xosligi shundan iborat:

- bir tomondan matematika – MATEMATIKAligicha qolib, fundamental fan sifatida matematik tushunchalar, aksiomalar, teoremalarning uzviy bog'lanishda mantiqiy izchilligida qat'iy bayon qilinishi zarur. Talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlashlarning sintezi bo'lgan – matematik fikrlashni shakllantirishga xizmat qilishi kerak;

- ikkinchi tomondan muayyan sohaning talab va ehtiyojlaridan kelib chiqib, uning o'ziga xos jihatlarini aks ettirishi lozim. Talabalarning matematikani maqsadli o'rganishini ta'minlash bilan birga o'zlashtirishini osonlashtirishi kerak.

Masalaning bu ikki tomoni ma'lum mutanosiblikda shunday uyg'unlashuvi kerakki, natijada kurs ma'lum sohaning muayyan masalalarini yechishga retsetlar beruvchi qo'llanma yoki talabalarda matematika faqat hisoblashlarni o'rganadigan fan degan tushunchani hosil qilmasligi kerak. Mana shu tamoyildan kelib chiqib, matematikaga "tabiat haqidagi barcha bilimlarimizni sistemaga soluvchi, tabiat va jamiyatdagi jarayonlarning matematik modellarini o'rganuvchi fan" deb ta'rif berilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma oliy matematikadan maxsus iqtisodchilar uchun yozilgan bo'lib, ko'p hollarda matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini berildi va iqtisodiy mazmundagi masala, misollar keltirildi.

O'quv qo'llanmada modellashtirish, matritsa va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli fazo elementlari, limitlar nazariyasi, bir o'zgaruvchili va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi, integral hisob elementlari, oddiy differensial tenglamalar va qatorlarga doir misol va masalalar berilgan.

Barcha bo'limlarda qisqa nazariy ma'lumotlar keltirilgan. Qator masalalar yechimlari bilan berilgan nazorat ishlari hamda mustaqil yechish uchun misol va masalalar tavsiya etilgan.

Mualliflar masalalar to'plamini yozishda bergan maslahatlari, fikr-mulohazalari hamda yordamlari uchun TDIU "Oliy matematika" kafedrasi professor-o'qituvchilari va laborantlariga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

Mazkur kitob o'zbek tilidagi iqtisodchilar uchun maxsus yozilgan dastlabki masalalar to'plami bo'lganligi uchun kamchiliklardan xoli bo'lmasa kerak. Kamchiliklarni bartaraf etish va kitobning sifatini yaxshilash borasidagi fikr-mulohazalarini bildirgan o'rtoqlarga mualliflar oldindan o'z minnatdorchiligini bildiradilar.

1-bob. DASTLABKI TUSHUNCHALAR .

1.1. Matematik modellashtirish

Jamiyatning rivoj topishi cheklangan resurslar (xomashyo, texnika vositalari, kapital qo'yilmalari, yer, suv va boshqalar)dan oqilona foydalanish, optimal yechimlar topish, iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish, uni tahlil qilish, prognoz berishni taqozo etadi.

Matematik model – real ishlab chiqarish jarayonini aks ettiruvchi formal munosabatlar majmuidir. Real hayotda uchraydigan jarayonlarni muqobil matematik modelini yaratish g'oyatda murakkab vazifa. Shu sababli ba'zi shartlar bilan tuzilgan matematik model asl holdan biroz farq qiladi. Biror jarayon uchun model tuzilayotganda qancha ko'p ta'sir etuvchi faktorlar e'tiborga olinsa (ko'p o'zgaruvchi funksiyalar sifatida qaralganda), tuzilgan model shuncha aniqroq bo'ladi.

Biz bilgan $y=ax+b$ chiziqli, $y=ax^2+bx+c$ kvadratik, $y=x^a$ $(x \in R)$ darajali, $y=a^x$ ko'rsatkichli va boshqa elementar funksiyalar iqtisodiy jarayonlarning matematik modeli sifatida ko'p qo'llaniladi.

Model so'zi lotincha *„modulus"* so'zidan olingan bo'lib, o'lchov, me'yor, miqdor degan ma'nolarni anglatadi. Iqtisodiyotdagi obyektlarni matematik modellashtirish yordamida iqtisodiy jarayonlarni kuzatish va tahlil qilish mumkin. Iqtisodchilar modellarni qurayotib muhim faktorlarni ajratib olishadi va qo'yilgan masalani yechish uchun uncha muhim bo'lmagan parametrlarni hisobga olishmaydi.

Matematik modellar ahamyatini quyidagilarda ko'rish mumkin:

- iqtisodiy matematik modellar yordamida moddiy, mehnat va pul resurslaridan oqilona foydalanish;
- matematik modellar va usullar iqtisodiy va tabiiy fanlarni rivojlantirishda yetakchi vosita bo'lib xizmat qiladi;
- matematik modellarga, ularning iqtisodiy jarayonni adekvat aks ettirishi yetarli bo'lmaganda tuzatish kiritish mumkin;
- matematik modellar yordamida iqtisodiy jarayonlar faqatgina chuqur tahlil qilinibgina qolmasdan, balki ularning yangi o'rganilmagan qonuniyatlarini ham ochish imkoniyati yaratiladi. Shuningdek, ular yordamida iqtisodiyotning kelgusidagi rivojlanishini oldindan bashorat qilish mumkin bo'ladi;
- matematik modellar hisoblash ishlarini mexanizatsiyalash va avtomatlashtirish bilan birga aqliy mehnatni yengillashtiradi, iqtisodiy soha xodimlari mehnatining ilmiy asosini tashkil etadi va ularni boshqarib turadi.

1.2. Iqtisodiy obyektlarning matematik modellari

Iqtisodiy obyektlarning matematik modellarini tuzish quyidagi bosqichlardan iborat:

1) iqtisodiy jarayon har tomonlama o'rganib chiqiladi. Nazariy va sifat jihatdan tahlil qilinib, uning parametrlari ichki va tashqi informatsion aloqalar, ishlab chiqarish resurslari, rejalashtirish davri kabi ko'rsatkichlar aniqlanadi;

2) izlanayotgan noma'lum o'zgaruvchilar qanday maqsadni ko'zda tutilishi, natija nimalarga olib kelishi aniqlanadi;

3) modellashtirilayotgan jarayonning iqtisodiy matematik modeli tenglama, tengsizliklar tizimi shaklida ifodalanadi;

4) tuzilgan matematik modelning miqdoriy yechimini aniqlaydigan usul tanlanadi;

5) masalani yechish uchun kerak bo'lgan barcha iqtisodiy (umumiy) ma'lumotlar to'planadi;

6) olingan ma'lumotlar statistik tahlil qilinib, tanlangan usul va matematik model orqali qo'yilgan vazifa yechiladi;

7) olingan natija har tomonlama (iqtisodiy) tahlil qilinib, optimal variant tanlanadi.

Yuqorida aytib o'tilgan bosqichlar bir-biri bilan chambarchas bog'liq bo'lib, biri ikkinchisini to'ldirib turadi va bu usullar har qanday masalalarni hal qilishda eng optimal yo'lni tanlashda qo'llaniladi.

Iqtisodiy jarayonning birinchi modeli fransuz olimi F. Kene tomonidan yaratilgan. U 1758-yilda "Iqtisodiy jadval", 1766-yilda "Arifmetik formula" nomli asarlarini chop ettirgan. F. Kene o'z asarlarida jamiyatda takror ishlab chiqrishning asosiy bosqichlarini matematik model shaklida ifodalagan.

XIX asrda modellashtirish sohasiga L. Val'ras, O. Kurno, V. Pareto, F. Edjvort kabi matematiklar o'zlarining katta hissalarini qo'shganlar. 1930-1950-yillarda bu sohada o'sish darajasi sezilmadi. 1960-1980-yilllarda iqtisodiy matematik modellashtirish yo'nalishi deyarli qayta tug'ildi.

XX asrda Nobel mukofotining sovrindorlari D. Xiks, R. Solou, V. Leontyevlarning ilmiy tadqiqotlari ham iqtisodiyotda matematik modellar qo'llanilishi bilan bog'liq edi. Bu jarayon davom etgan keyingi yillarda ham iqtisod sohasidagi Nobel mukofotlarining ko'pchiligi matematik modellarga berildi. Iqtisodchilar turli iqtisodiy hodisalarni o'rganish uchun uni iqtisodiy model deb ataladigan sodda, formal ko'rinishidan foydalanadilar.

Har qanday iqtisodiy tekshirish, nazariya (iqtisodiy model) va amaliyot (statistik ma'lumotlar)ning birlashmasidan iborat. Kuzatilayotgan hodisalarni tushuntirish va tasvirlash uchun nazariy modeldan foydalaniladi, modelni qurish va asoslash uchun esa statistik ma'lumotlar yig'iladi.

Iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari tenglama, tengsizlik, formula ko'rinishida ifodalanadi. Masalan: Bank aholidan quyidagi shartlar bilan omonat qabul qiladi: bankning yillik foiz stavkasi R (R – o'nli kasrda ifodalangan foiz stavkasi, ya'ni, agar R=0,12 bo'lsa, stavka 12 %ni tashkil etadi); foizlarni qo'shib hisoblashlar yiliga k marta amalga oshiriladi (agar k=4 bo'lsa, foizlar har kvartalda, agar k=12 bo'lsa, foizlar har oyda qo'shib hisoblanadi va h.k.). U holda har bir qo'shib hisoblash davrida qo'yilgan omonat $i=\frac{R}{k}$ foizga ortadi.

Faraz qilaylik, omonatchi bank hisobiga A_0 so'm qo'ygan bo'lsa, u holda birinchi qo'shib hisoblash davridan keyingi summa:

$$A_1 = A_0 + A_0 \times i = A_0(1+i),$$

ikkinchi davr oxirida

$$A_2 = A_1 + A_1 \times i = A_1(1+i) = A_0(1+i)(1+i) = A_0(1+i)^2,$$

xuddi shunday n – qo'shib hisoblash davridan keyin

$$A_n = A_0(1+i)^n \qquad (1.1)$$

hosil bo'ladi.

Shunday qilib $A_0, A_1, A_2, A_n...$ elementlar ketma-ketligi $b_1 = A_0(1+i)$, mahraji $q=(1+i)$ bo'lgan geometrik progressiyani tashkil qiladi.

1. Yillik stavkasi 8 % bo'lgan bankka 100 000 so'm omonat qo'yiladi. Foizlar har kvartalda qo'shib hisoblanadi. Hisobda 5 yildan keyin qanday summa hosil bo'ladi?

Yechish. Masalani yechish uchun avval uning matematik modelini tuzib olamiz. Masalaning shartiga ko'ra, $A_0 = 100000$ so'm, $R = 0.08$, $k = 4$, $n = 4\cdot 5 = 20$.

5 yil davomidagi qo'shib hisoblashlar soni (1.1) formuladan foydalanib:

$$A_{20} = 100000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{20} = 100000(1.02)^{20} \approx 146595 \text{ so'm.}$$

Javob: Bank hisobida 5 yildan keyin 146 595 so'm hosil bo'ladi.

2. Aziza har 3 oyning oxirida bankka 30 000 so'm qo'yadi, bankning yillik stavkasi 10 % foizlarni har kvartalda qo'shib hisoblaydi. Azizaning hisobida 5 yildan keyin qanday summa hosil bo'ladi?

Yechish.

Berilgan

$P = 30000$

$i = \frac{0,1}{4}$

$k = 4$

$n = 20$

$S_{20} - ?$

Demak, $n = 20$ marta omonat qo'yiladi. n – omonat P so'm, $(n-1)$ esa bankda bir to'lov davri saqlangan, mos foizlarni qo'shib hisoblanganidan keyin $P(1+i)$ so'm. $n-2$–omonat bankda 2 davr saqlangan $P(1+i)^2$ so'm va h.k. Xuddi shuningdek, 1–omonat $P\cdot(1+i)^{n-1}$ so'mga aylanadi. Hisobdagi umumiy summa:

$$S_n = P + P(1+i) + P(1+i)^2 + \ldots + P(1+i)^{n-1}$$

Yig'indining hadlari $b_1=P$, $q=(1+i)$ bo'lgan geometrik progressiyani tashkil qiladi.

$$S_n = \frac{P(1-(1+i)^n)}{1-(1+i)} = \frac{P(1-(1+i)^n)}{-i} = \frac{P((1+i)^n-1)}{i}.$$

Demak, masalaning matematik modeli ifodasi:

$$S_n = \frac{P((1+i)^n-1)}{i} \qquad (1.2)$$

Bu formuladan foydalanib:

$$S = 30000\frac{((1+0,025)^{20}-1)}{0,025} \approx 300\cdot 2554,5 \approx 766340 \text{ so'm}$$

Javob: Azizaning hisobida 5 yildan so'ng 766340 so'm hosil bo'ladi. Bunda bankdan foizlar hisobiga olingan summa 766340-30 000·4·5 = 166 340 so'm.

3. Alisher o'z qizini kelgusi 4 yil davomida har oyda 10 000 so'mdan renta bilan ta'minlab turish uchun bankka qancha pul qo'yishi kerak? Bankning foiz stavkasi yiliga 12 %, qo'shib hisoblashlar har oyda amalga oshiriladi.

Yechish.

Berilgan
$P = 10\,000$
$n = 12\cdot 4 = 48$
$i = \frac{0.12}{12} = 0.01$
A_{48} - ?

Qo'yiladigan omonat summasi A ni

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

ko'rinishda ifodalab olamiz. (bu yerda A_1 – omonatning birinchi davrida orttirib olinadigan qismi, A_2 – ikkita davrda ortganidan keyin olinadigan qismi, va h.k.). Agar P renta kattaligi bo'lsa, u holda

$$P = A_1(1+i)$$

$$P = A_2(1+i)^2$$

....

$$P = A_n(1+i)^n,$$

Bu yerda i – bitta qo'shib hisoblash davridagi bank foizi. Bundan

$$A_1 = \frac{P}{1+i},\quad A_2 = \frac{P}{(1+i)^2},\ \ldots\ A_n = \frac{P}{(1+i)^n}$$

va natijada,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n = P\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right);$$

qavs ichidagi ifoda $b_1 = \frac{1}{1+i}$ va $q = \frac{1}{1+i}$ bo'lgan geometrik progressiyaning birinchi n ta hadi yig'indisidan iborat. Natijada, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ formulaga ko'ra:

$$A = \frac{P}{1+i}\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{P\left((1+i)^n-1\right)}{i(1+i)^n} = \frac{P}{i}\left(1-(1+i)^{-n}\right) = P\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Shunday qilib, n marta P so'mdan olib turish uchun bir marta qo'yiladigan omonat kattaligi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A = P\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (1.3)$$

Demak, masalaning matematik modeli tuzildi, endi son qiymatlarini qo'yamiz:

$$A = 10000\cdot\frac{1-(1{,}01)^{-48}}{0.01} \approx 379739{,}6$$

Javob: Bankka 379739,6 so'm qo'yilishi kerak.

Nominal va real stavka bir-biridan farqlanadi. Real foiz stavkasi - yil davomida bank hisobidagi summaning haqiqiy o'sishi. Nominal stavka esa – bank e'lon qilgan stavka.

4. $R = 0{,}06$ va $k = 12$ bo'lgan bank uchun real foiz stavkasini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, bankning nominal stavkasi 6%, foizlar yiliga 12 marta qo'shib hisoblanadi. Faraz qilaylik, boshlang'ich summa A_0 so'm, u holda bir yildan keyin bank hisobidagi summa (12 oydan keyin)

$$A_{12} = A_0\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} = A_0(1{,}005)^{12} = A_0\cdot 1{,}0617,$$

omonatning bir yilda o'sish foizi quyidagi proporsiyadan topiladi:

$$A_0 \rightarrow 100\%$$

$$A_{12} - A_0 \rightarrow x\%$$

$$x = \frac{A_{12} - A_0}{A_0} \cdot 100\% = \frac{1{,}0617A_0 - A_0}{A_0} \cdot 100\% = 6{,}17\%.$$

Shunday qilib, real foiz stavkasi - 6,17%.

5. Quyidagi jadvalda bank e'lon qilgan nominal foiz stavka R, boshlang'ich omonat summasi A_0 va yillik foiz qo'yib hisoblashlar soni k berilgan n ta to'lov davridan keyin bank hisobida hosil bo'ladigan summani aniqlang.

Variant	R, %	A_0 (ming so'm)	K marta	n	Variant	R, %	A_0 (ming so'm)	K marta	n
1	12	80	6	24	16	15	50	3	12
2	6	120	4	20	17	12	140	5	20
3	8	150	3	15	18	8	100	10	32
4	9	100	4	20	19	10	100	6	24
5	14	200	4	16	20	12	60	6	12
6	18	140	2	10	21	14	70	5	20
7	20	80	3	15	22	15	60	4	8
8	15	150	4	20	23	10	80	2	16
9	20	120	4	20	24	8	80	4	20
10	20	100	6	24	25	6	36	6	24
11	25	80	4	12	26	16	320	7	28
12	16	75	2	36	27	12	240	8	32
13	14	120	4	28	28	8	20	3	12
14	12	140	6	42	29	6	160	4	40
15	14	150	8	16	30	12	120	10	36

6. Komil universitetga kirganida, ota-onasi uni chet elda o'qishni davom ettirishi uchun 6 000 AQSH doll. yig'moqchi bo'lishdi. Bu summani ta'minlash uchun ota-ona 2006-yil 1-sentabrdan to 2010-yil 1-martgacha har oyda bankka pul qo'yib turmoqchi bo'lishdi. Tanlangan bankning yillik foiz stavkasi 9 %, har oyda to'laydi. Har oyda ular bankka qanchadan pul qo'yib turishlari kerak.

7. Bill 35 yoshida yiliga 9 %ni har oyda qo'shib hisoblaydigan sug'urta kompaniyasi bilan shunday shartnoma tuzdi: Bill 65 yoshgacha har oyda 350 AQSH doll. to'lab turadi. Nafaqaga chiqqandan keyingi 10 yil davomida hosil bo'lgan fonddan har oy bir xil miqdorda pul olib turadi. Bill har oyda qanchadan pul olib turadi?

8. Bank murakkab foizlar bo'yicha yiliga 24 % dan qo'shib hisoblashlarni har oyda bajaradi. Boshlang'ich summa 360 pul birligi bo'lsa, 8 oydan keyin qo'yilgan omonat summasi qancha bo'ladi?

9. Erkin har oyning oxirida bankka 500$ dan qo'yib turadi. Bank e'lon qilgan nominal stavka 7 %, yiliga 2 marta qo'shib hisoblanadi. 8 yildan keyin uning bankdagi hisobida qanday summa hosil bo'ladi?

Transport masalasining matematik modeli. m ta obyektda $a_1, a_2, \ldots, a_m$ miqdorda bir xil mahsulot bor. Bu mahsulotlarni n ta iste'molchiga $b_1, b_2, \ldots, b_n$

miqdorda yetkazib berish zarur. $c_{ij}(i=1, 2, \ldots, m;\ \ j=1, 2, \ldots, n)$ – bir birlik yukni har bir i – obyektdan j – iste'molchiga yetkazib berish narxi ma'lum. Yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, bunda barcha obyektlardagi mahsulotlar to'la tarqatilsin, iste'molchilarning talabi to'laligicha qondirilsin hamda barcha yuklarni tashishga ketgan xarajat minimal bo'lsin.

Transport masalasining jadval shaklidagi ko'rinishi quyidagicha:

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Transport masalasining noma'lumlari $X_{ij}(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ bilan har bir i – obyektdan j – iste'molchiga yetkazib beriladigan yuk miqdorini belgilab, model tuzamiz. Barcha m ta obyektdagi yuklar to'la tarqatilishini quyidagi tenglamalar sistemasi bilan ifodalaymiz:

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+\ldots+X_{1n}=a_1 \\ X_{21}+X_{22}+\ldots+X_{2n}=a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{m1}+X_{m2}+\ldots+X_{mn}=a_m \end{cases}$$

Barcha n ta iste'molchi talablari to'la qondirilishini keyingi tenglamalar sistemasi bilan ifodalaymiz:

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}+\ldots\ldots+X_{m1}=b_1 \\ X_{12}+X_{22}+\ldots\ldots+X_{m2}=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{1n}+X_{2n}+\ldots\ldots+X_{mn}=b_n \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra $X_{ij}\geq 0(i=1,m,\ \ j=1,m,\ \ j=1,n)$ va barcha mahsulotni tashish uchun ketgan xarajatlar:

$$Y=c_{11}X_{11}+c_{12}X_{12}+\ldots+c_{1n}X_{1n}+c_{21}X_{21}+c_{22}X_{22}+\ldots+c_{2n}X_{2n}+\ldots+c_{m1}X_{m1}+c_{m2}X_{m2}+$$
$$+\ldots+c_{mn}X_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_{ij}$$

funksiyani minimallashtirish kerak. Odatda bu funksiya maqsad funksiyasi deyiladi. Bularning barchasini birlashtirgan holda transport masalasining umumiy ko'rinishdagi matematik modelini hosil qilamiz:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad (j=\overline{1,n})$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1,m}\ j=\overline{1,n})$$

$$Y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}X_{ij} \to \min$$

Quyidagi transport masalasini matematik tahlillar asosida yechimini keltirib o'tamiz.

10. A_1, A_2, A_3 – korxonalarga B_1 va B_2 omborlardan mahsulot yetkazib berish xarajatlari va B_1, B_2 omborlarning mahsulot zaxiralari hamda har bir korxonaning mahsulotga bo'lgan talablari quyidagi jadvalda berilgan:

A_j / B_i	50	70	100
100	1	3	2
120	5	2	4

Reja qanday tuzilganda har bir B_i ombordagi mahsulotlar to'liq taqsimlanadi va A_j korxona talabi to'la qondirilgan holda yukni tashish uchun qilingan xarajatlar minimal bo'ladi.

Yechish. B_i ombordan A_j korxonaga X_{ij} miqdorda mahsulot yetkazib berilsin. (i = 1,2; j = 1, 2, 3). U holda B_i ombordagi jami mahsulotlar miqdori:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 120 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi. Har bir A_j korxonaga keltirilgan mahsulotlar esa quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} = 50 \\ X_{12} + X_{22} = 70 \\ X_{13} + X_{23} = 100 \end{cases}$$

barcha yuklarni tashish uchun qilingan sarf xarajatlar esa

$$Y = X_{11} + 3X_{12} + 2X_{13} + 5X_{21} + 2X_{21} + 4X_{23}$$

ga teng bo'ladi. Demak, masalaning shartiga ko'ra unga tuzulgan matematik model quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 120 \\ X_{11} + X_{21} = 50 \\ X_{12} + X_{22} = 70 \\ X_{13} + X_{23} = 100 \end{cases}$$

$$Y = X_{11} + 3X_{12} + 2X_{13} + 5X_{21} + 2X_{31} + 4X_{23} \to \min$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2\ j=\overline{1,3}).$$

Maqsad funksiyani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$Y = (X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 2(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 2X_{12} + X_{13} + 3X_{21} + 2X_{23} =$$
$$= 100 + 240 + (X_{12} + X_{13}) + X_{12} + 2(X_{21} + X_{23}) + X_{21} = 340 + 100 - X_{11} + X_{12} + 2(120 - X_{22}) + X_{21} =$$
$$= 680 - X_{11} + (70 - X_{22}) - 2X_{22} + (50 - X_{11}) = 800 - 2X_{11} - 3X_{22}$$

Demak, $Y = 800 - 2X_{11} - 3X_{22} \to \min$ bo'lishi uchun X_{11} va X_{22} noma'lumlar eng katta bo'lishi kerak:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} = 50 \\ X_{12} + X_{22} = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{11} \le 50 \\ X_{22} \le 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max X_{11} = 50 \\ \max X_{22} = 70 \end{cases} \Rightarrow \min(Y) = 800 - 100 - 210 = 490$$

Demak, masalaning optimal yechimi:

$$X_{11} = 50,\ X_{12} = 0,\ X_{13} = 50,\ X_{21} = 0,\ X_{22} = 70,\ X_{23} = 50.$$

11. Korxonada uch xil xomashyodan foydalanib ikki turdagi mahsulot ishlab chiqariladi. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulotga ketadigan xarajatlar, xomashyo zaxiralari va ulardan olinadigan foyda ko'rsatilgan. Eng ko'p foyda olish modelini tuzing.

Xomashyo zahirasi	Har bir turdagi bir-birlik mahsulot uchun qilingan xarajat	
	№1	№2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Olinadigan foyda	40	50

Quyidagi misollarni yeching:

12.

$$Z(x) = 3X_1 - 2X_2 + X_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2X_1 - 3X_3 < -1 \\ 3X_1 - 4X_2 + 2X_3 > 6 \\ X_1 + 2X_2 - X_3 > 2 \end{cases}$$
$$X_i \ge 0 \quad i = 1,2,3$$

13.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 > 4 \\ X_1 - X_2 + 3X_3 < 5 \\ 2X_1 + 3X_2 - 2X_4 > 4 \\ X_1 + 3X_2 = 8 \end{cases}$$
$$Z(x) = 2X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 \to \max$$
$$X_i \ge 0 \quad i = 1,2,3,4$$

14.

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 = 2 \\ 9X_1 - X_2 - 6X_3 - 5X_4 = 6 \end{cases}$$
$$Z(x) = 4X_1 - X_2 + 3X_3 + 4X_4 \to \max$$
$$X_i \ge 0 \quad i = 1,2,3,4$$

15.

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 + 2X_5 = 3 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 9X_5 = 3 \\ 2X_1 - 3X_2 - X_3 + 2X_4 - X_5 = 1 \end{cases}$$

$$Z(x) = 9X_1 - 11X_2 - 3X_3 + 8X_4 + 5X_5 \to \max$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

16.

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 - 4X_4 + 2X_5 = 5 \\ 3X_1 - X_2 + 2X_3 + 7X_4 + 9X_5 = 8 \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 + 9X_4 + 3X_5 = 15 \end{cases}$$

$$Z(x) = X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + 3X_5 \to \max$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Quyidagi transport masalalarining matematik modelini tuzing:

17.

a_i \ b_i	40	20
20	7	4
30	5	5
10	6	8

18.

a_i \ b_j	100	50	50
50	-9	7	1
70	8	5	3
80	4	2	6

19.

a_i \ b_j	200	150	80	110
40	8	-5	15	12
250	10	12	7	8
120	9	4	8	7
130	5	9	6	3

20.

a_i \ b_j	250	300	200	200
200	9	8	3	1
350	7	10	6	4
400	2	3	8	12

1.3. Funksiya va uning berilish usullari

Barcha ratsional (Q) va irratsional (I) sonlar to'plami birgalikda haqiqiy sonlar to'plamini tashkil qiladi. Haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi. X va Y lar haqiqiy sonlarning biror qism to'plamlari bo'lib, x va y mos ravishda shu to'plamlar elementlari $x\in X$, $y\in Y$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamning bitta y soni mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deb ataladi va $f:X\to Y$ yoki $y=f(x)$ kabi belgilanadi. Bu ta'rifdagi X va Y lar orasidagi bog'lanish funksional bog'lanish deyiladi.

X to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. Y to'plam, ya'ni X ning har bir x elementiga mos kelgan $f(x)$ elementlar to'plami funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi.

Funksiyalar *jadval, grafik, analitik* usullarda berilishi mumkin: $y=f(x)$ funksiya analitik usulda berilganda uning X va Y sohalari berilmagan bo'lishi mumkin, ammo ular $f(x)$ funksiyaning xossalaridan foydalanib aniqlanadi.

Agar X sohani Y sohaga akslantirganda o'zaro bir qiymatli moslik, ya'ni $y=f(x)$ funksiya bajarilsa, u holda x ni y orqali $x=g(y)$ kabi ifodalash mumkin. Oxirgi funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi.

$x=g(y)$ funksiya uchun Y aniqlanish sohasi X esa funksiyaning o'zgarish sohasi bo'ladi. $g(f(x))=x$ va $f(g(y))=y$ bo'lgani uchun $y=f(x)$ va $x=g(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'ladi.

21. Funksiyaning qiymatlar to'plamini toping:

$$y=\frac{1}{3\sin 2x+4\cos 2x}.$$

Yechish. Maxrajda qavsdan tashqariga $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ni chiqaramiz: $y=\dfrac{1}{5(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x)}$ $\frac{3}{5}=\cos\beta.\frac{4}{5}=\sin\beta$ deb faraz qilib (bunday bo'lishi mumkin, chunki $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$), quyidagini olamiz: $\dfrac{1}{5(\cos\beta\sin 2x+\sin\beta\cos 2x)}$, yoki $y=\dfrac{1}{5\sin(2x+\beta)}$. $\sin(2x+\beta)$ ifoda $[-1;1]$ kesmada (yoki $5\sin(2x+\beta)$ $[-5;5]$ kesmada) barcha mumkin bo'lgan qiymatlarni qabul qilishini hisobga olib quyidagini topamiz: $y\in(-\infty;\frac{1}{5}]\cup[\frac{1}{5};+\infty)$

22. $y=10^{-2x^2}$ funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaga teskari funksiyaning aniqlanish sohasi, shu funksiyaning qiymatlar to'plamidan iborat. $y=10^{-2x^2}$ funksiyaga teskari funksiyani topamiz, x ni y orqali ifodalab, $-2x^2=\lg y$ yoki $x^2=-\frac{1}{2}\lg y$, $x^2\geq 0$ bo'lgani uchun $-\frac{1}{2}\lg y\geq 0$ bundan $\lg y\leq 0$ va $y\in(0;1]$, ya'ni topilgan yarim interval berilgan funksiyaning qiymatlar to'plami bo'ladi.

Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

23. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\lg(x+1)}}{x-1}+2^{\sqrt{10-x}}$

24. $y=\dfrac{\sqrt[6]{16-x^2}}{\lg(x-1)^2}$

25. $y=\sqrt{4-x}\,\lg x$

26. $y=\dfrac{\sqrt{\sin x-0{,}5}}{\sqrt[3]{x-2}}-\log_2(x-1)$

27. $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\lg x}$

Funksiyalarning qiymatlar sohasini toping:

28. $y=5\sin x+2\cos x$.

29. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$

30. $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$

31. $y=\dfrac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$

1.4. Funksiya xossalari

a) Aniqlanish sohasi X dan iborat bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun har qanday $x\in X$ uchun $-x\in X$ bo'lib, hamda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa funksiya juft $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa toq, aks holda $f(x)$ umumiy ko'rinishdagi funksiya deyiladi.

b) Biror X oraliqda $y=f(x)$ funksiya uchun argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta (kichik) qiymati mos kelsa, funksiya o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi. O'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deb ataladi.

c) $f(x)$ funksiya uchun shunday o'zgarmas $T(T\neq 0)$ son topilsaki, $\forall x\in X$ da $x-T,\ x,\ x+T\in X$ bo'lib $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ davriy funksiya, musbat T lar ichida eng kichigi funksiyaning davri deyiladi.

d) Agar shunday $M>0$ son mavjud bo'lsaki, barcha $x\in X$ uchun $|f(x)|<M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ X oraliqda chegaralangan deyiladi. Aks holda funksiya chegaralanmagan deyiladi.

e) $u=\varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D, qiymatlar to'plami V bo'lsin. $y=f(u)$ funksiyaning aniqlanish sohasi V bo'lib, o'zgarish sohasi E bo'lsin. U holda, $y=f(\varphi(x))$ funksiya aniqlanish sohasi D va o'zgarish sohasi E bo'lgan murakkab funksiya bo'ladi.

f) $y=f(x)$ ko'rinishdagi funksiya oshkor funksiya, $F(x,y)=0$ tenglama bilan ifodalangan funksional bog'lanish oshkormas funksiya deyiladi.

Funksiyalarning juft-toqligini aniqlang:

31. $y=\dfrac{x^4}{\cos x}-\sqrt{1-x^2}$

Yechish. Ta'rifga asosan tekshiramiz.

$$y(-x)=\frac{(-x)^4}{\cos(-x)}-\sqrt{1-(-x)^2}=\frac{x^4}{\cos x}-\sqrt{1-x^2}=y(x)$$

Demak, berilgan funksiya o'zining aniqlanish sohasida juft funksiya ekan.

32. $y=3^x\sin x$

Yechish. $y(-x)=3^{-x}\sin(-x)=-3^{-x}\sin x$. Ta'rifga asosan, $y(-x)\neq y(x)$ va $y(-x)\neq -y(x)$ bo'lganligi uchun berilgan funksiya umumiy ko'rinishdagi funksiya.

33. Funksiyaning eng kichik musbat davrini toping: $y = 2\ sin\ 4x$

Yechish. Davriy funksiyaning ta'rifiga ko'ra barcha x va $T \neq 0$ lar uchun $y(x+T) = y(x)$ bo'lishi kerak. Demak, $2sin(4(x+T)) = 2sin4x$, yoki $sin(4(x+T))-sin4x = 0$, bundan

$$2\sin\frac{4x+4T-4x}{2}\cos\frac{4x+4T+4x}{2} = 0$$

Ya'ni, $\sin 2T\cos(4x+2T) = 0$. Hosil qilingan tenglik barcha x lar uchun bajariladi, qachonki o'zgarmas ko'paytuvchi $sin2T = 0$ bo'lganda. Demak, eng kichik musbat davri esa $T = \frac{\pi}{2}$.

$T > 0$ son f(x) funksiya uchun eng kichik musbat davr bo'lsin. U holda y=f(kx+b) funksiyaning eng kichik musbat davri $\frac{T}{|K|}$ bo'ladi.

Funksiyalarning juft-toqligini aniqlang.

34. $y = x + \sin x$

35. $y = x\sin x$

36. $y = \frac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}e^{-x^2}$

37. $y = \frac{x^3\cos x}{2^{x^2}} + \sin x$

38. $y = \lg\left(\frac{2-x^3}{2+x^3}\right)$

39. $y = \frac{\sin x}{x^3}$

40. $y = (\sin^2 x + \cos x)x^3$

41. $y = x^2\ln x$

42. $y = 3^{4x}x^2 + \cos x$

43. $y = \frac{tgx}{-x^4 + x^2 + x}$

44. $y = \frac{x^4}{\sin x} - x^3\ln(1+x^2)$

45. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$

Funksiyalarning eng kichik davrini toping yoki davriy emasligini isbotlang

46. $y = 4\cos(\frac{\pi}{2} + 3x)$

47. $y = 3tg4x + 1$

48. $y = \sin^2 x$

49. $y = \sin\frac{1}{x}$

50. $y = x\sin x$

51. $y = \sin^2 4x$

1.5. Elementar funksiyalar

Quyidagi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi:

a) Darajali funksiya $y = x^n$ $(x > 0)$

b) Ko'rsatkichli funksiya $y = a^x, a > 0, a \neq 1 (x \in (-\infty; +\infty);\ y \in (0; +\infty))$

c) Logarifmik funksiya $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 (x \in (0; +\infty); y \in (-\infty; +\infty)$

d) Trigonometrik $y = sinx$, $y = cosx$, funksiyalar $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. Qiymatlar to'plami esa $-1 \leq y \leq 1$.

e) Teskari trigonometrik $y = arcsinx$, $y = arccosx$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $-1 \leq x \leq 1$, qiymatlar to'plami esa mos ravishda $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ va $0 \leq y \leq \pi$.

$y = arctgx$, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$, qiymatlar to'plami esa $-\pi/2 < y < \pi/2$, $y = arcctgx$. Funksiyaning aniqlanish to'plami $(-\infty; +\infty)$, qiymatlar sohasi esa $0 < y < \pi$.

Elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar yordamida tuzilgan murakkab funksiyalarga aytiladi.

1.6. Grafiklarni almashtirish

$y=f(x)$ funksiyaning grafigi uchun quyidagi almashtirishlar mavjud:

a) $y=f(x+a)$ – funksiyaning grafigini Ox o'qiga parallel $|a|$ birlikka siljitadi, ($a>0$ - chapga, $a<0$ – o'ngga);

b) $y=f(x)+b$ – funksiya grafigini Oy o'qi bo'yicha $|b|$ birlikka siljitadi, ($b>0$ – yuqoriga, $b<0$ pastga);

c) $y=c\,f(x)$ $(c\neq0)$ – grafik $c>1$ da Oy o'qiga nisbatan c marta cho'ziladi, $0<c<1$ da esa c marta qisqaradi; $c<0$ da grafik Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslanadi.

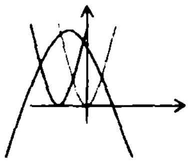
d) $y=f(kx)$ $(k\neq0)$ – grafik $k>1$ da $y=f(x)$ ning grafigidan Ox o'qiga nisbatan k marta cho'ziladi, $0<k<1$ da k marta qisqaradi. $k<0$ da grafik Oy o'qiga nisbatan simmetrik akslanadi.

Funksiyalar grafigini chizing:

52. $y=1-2x^2-4x$

Yechish. To'la kvadrat ajratamiz. $y=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x+1)+3=-2(x+1)^2+3$.

Grafiklarni almashtirishdan foydalanamiz. (Grafik 1)



a) $y=x^2$ funksiyaning grafigini chizamiz:

b) $y=(x+1)^2$ ning grafigini, $y=x^2$ ni bir birlik chapga siljitish bilan hosil qilamiz.

c) $y=2(x+1)^2$ grafigini $y=(x+1)^2$ grafikni Oy o'qi bo'yicha 2 marta cho'zish bilan hosil qilamiz.

d) $y=-2(x+1)^2$ grafigini yasash uchun $y=2(x+1)^2$ning grafigini Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiriladi.

e) $y=-2(x+1)^2+3$ grafigi $y=-2(x+1)^2$ning grafigini Oy o'qi bo'yicha 3 birlik yuqoriga siljitish bilan hosil qilinadi.

53. $y(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ funksiya berilgan. $y(\frac{1}{x})$ ni toping.

Yechish. $y(\frac{1}{x})$ ni topish uchun funksiya ifodasidagi x o'rniga $\frac{1}{x}$ ni qo'yish lozim.

$$y\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}-2},\quad \text{yoki}\quad y\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+2x}{1-2x}.$$

54. Ma'lumki, $y(x)=2x+5$ va $y(3-2z(x))=10-6x$. $z(x)$ni toping.

Yechish. Bir tomondan $y(3-2z(x))$ ni $y(x)$dan x o'rniga $(3-2z(x))$ ni qo'yib hosil qilish mumkin; boshqa tomondan shartga ko'ra $y(3-2z(x))=10-6x$. Shunday qilib quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$2(3-2z(x))+5=10-6x$$
$$z(x)=1{,}5x+0{,}25.$$

55. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ funksiya berilgan, $y(\frac{4-x}{2+x})$ ni toping.

56. $y=2^x$ berilgan, $y(\log_{0,5}x)$ ni toping.

57. Ma'lumki, $y(x)=\frac{3-x}{2+x}$, $y(\frac{1+z(x)}{2})=\frac{1}{x}$. $z(x)$ ni toping.

58. Ma'lumki, $y=3^x$, $y(4z(x))=\frac{1}{x^2}$. $z(x)$ ni toping.

Funksiyalarning grafiklarini chizing.

59. $y = 7+6x-x^2$

60. $y=\frac{3x-2}{x+1}$

61. $y=3\cdot 2^{x+1}$

62. $y=2\log_2(4+x)$

63. $y=2\cos(2x+\frac{\pi}{2})$

64. $y=\frac{1-5x}{2-5x}$

1.7. Iqtisodiyotda uchraydigan funksiyalar

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

P – (price) narx;
Q – (quantity) miqdor;
R – (revenue) daromad;
π – (profit) foyda;
TC – (total cost) umumiy xarajat;
FC – (fixed cost) o'zgarmas xarajat;
VC – (average cost) o'zgaruvchan xarajat;
$TC = FC + VC$

Iqtisodiyotda talab va taklif, daromad, xarajat, foyda, Kobb Duglas, Lorens funksiyalaridan foydalaniladi. Iste'molchilar tomonidan sotib olingan tovar miqdori Q_D va tovar narxi orasidagi bog'lanish $Q_D = f(P)$ talab funksiyasi deyiladi. Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_S va tovar narxi orasidagi bog'lanish $Q_S = g(P)$ taklif funksiyasi deyiladi.

Muvozanat narxni topish uchun $\begin{cases} Q_D = f(P) \\ Q_S = g(P) \end{cases}$ sistema yechiladi.

Ishlab chiqaruvchining daromadi tovar narxi P bilan sotilgan miqdori Q ning ko'paytmasidan iborat R=PQ foyda funksiyasi π daromad va umumiy xarajat funksiyalarining ayirmasidan iborat $\pi = R - TC$.

65. Tovarga bo'lgan talab darajasi oilaning daromad darajasi x bilan $y=a-\frac{b}{x+c}$ formula bilan bog'langan. Oila daromadining darajasi 158 p.b. bo'lganda tovarga bo'lgan talab darajasini toping. x = 50 bo'lganda y = 0, x = 74 bo'lganda, y = 0,8 va x = 326 bo'lganda y = 2,3 ekanligi ma'lum.

Yechish:

$$\begin{cases} a-\frac{b}{50+c}=0 \\ a-\frac{b}{74+c}=0{,}8 \\ a-\frac{b}{326+c}=2{,}3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-\frac{b}{50+c} \\ \frac{b}{50+c}-\frac{b}{74+c}=0{,}8 \\ \frac{b}{50+c}-\frac{b}{326+c}=2{,}3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{b(74+c-50-c)}{(50+c)(74+c)}=0{,}8 & (1) \\ \frac{b(326+c-50-c)}{(50+c)(326+c)}=2{,}3 & (2) \\ a=\frac{b}{50+c} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24b=0{,}8(c+50)(c+74) & (1) \\ 276b=2{,}3(c+326)(c+50) & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 30b=(c+50)(c+74) & (1) \\ 120b=(c+326)(c+50) & (2) \end{cases}$$

$$\frac{30b}{120b}=\frac{(c+50)(c+74)}{(c+3260)(c+50)} \quad \frac{1}{4}=\frac{c+74}{c+326}$$ dan c=10 kelib chiqadi.

yuqoridagilardan esa b=168, a=2,8 ekanligi kelib chiqadi.

Demak, talabning daromadga bog'liq grafigi $y = 2,8 - \frac{168}{x+10}$ ga teng ekan.

X=158 p.b bo'lganda talab miqdori $y= 2,8 - \frac{168}{158+10} = 1,8$ ga teng bo'lar ekan.

Javob: 1,8.

66. Firma sport tovarlari ishlab chiqaradi, sport kostyumining narxi $P_1=30$ p.b. bo'lganda, bir kunlik sotilish miqdori $Q_1=50$ ta, narx $P_2=32$ p.b. bo'lganda esa sotilish miqdori $Q_2=40$ ta. Talab funksiyasi chiziqli. Bu tovarni ishlab chiqarishga ketgan xarajat TC =20+6Q. Agar kunlik foyda 580 p.b. bo'lsa, bir kunda ishlab chiqarilgan va sotilgan tovar miqdorini aniqlang. Tovar qanday narxda sotilgan?

Yechish. Talab chiziqli bo'lganligi uchun ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}=\frac{P-P_1}{P_2-P_1}$ dan foydalanib, talab funksiyasi $P=40-0,2Q^2$ ni topamiz.

$$R=PQ=(40-0,2Q)Q=40Q-0,2Q^2$$

Ishlab chiqaruvchining foydasi $\pi = R - TC = 40Q - 0,2Q^2 - 20 - 6Q$.

Masalaning shartiga ko'ra foyda 580 p.b. ekanligidan

$-0,2Q^2+34Q-20=580 \quad | \cdot (-5)$

$Q^2-170Q+3000=0$ kvadrat tenglamani yechib $Q_1=150$; $Q_2=20$ ni topamiz.

Unga mos keluvchi narxlar esa talab funksiya $P_1=10$, $P_2=36$.

67. B tovar ishlab chiqaruvchining umumiy xarajati TC=36+6Q, bu tovarga bo'lgan talab funksiyasi esa P=20-0,5Q ifoda bilan berilgan, bu yerda Q ming birlikda ishlab chiqarilgan va sotilgan tovar miqdori, P tovarning birlik narxi. Foyda 60000 so'mdan kam bo'lmasligi uchun nechta tovar ishlab chiqarish kerak?

68. Quyidagi berilganlardan foydalanib masalani yeching: P=30-0,25Q, TC=200+5Q va foyda 400000 so'mdan kam bo'lmasligi kerak?

69. Uyali telefon ishlab chiqaradigan firmaning xarajat funksiyasi TC=10+4Q bu yerda Q bir oyda ishlab chiqarilgan telefonlar miqdori. Firmaning daromad funksiyasi $R=0,125Q^2+ 7Q$.Agar bir oyda 28000 telefon ishlab chiqarilgan va sotilgan bo'lsa , foydani toping.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Matematik modelning mohiyati nimadan iborat?
2. Iqtisodiy obyektlarning matematik modelini tuzish bosqichlarini sanab o'ting.
3. Transport masalasining matematik modeli qanday tuziladi?

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.
2. Сафаева К. Математик дастурлаш. –Т.: Ибн Сино, 2004.
3. Саипназаров Ш.А., Ортикова М.Т. Бошлангич молиявий математика асослари. – Т.: ТДИУ, 2002.

4. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. –Т.: Ўкитувчи, 1996.
5. Замков О.О., Толстопятенко А.Б., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС, 2004.
6. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. – М., 2005.
7. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.
8. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.
9. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. -Н., 2008.
10. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. -М., 2008.
11. Ермаков В.И. Общий курс высшей математика для экономистов. –Н., 2010.

2-bob. MATRITSA VA DETERMINANTLAR

2.1. Matritsalar. Diagonal va birlik matritsalar

Sonlarning m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklida tuzilgan jadvali m×n o'lchamli matritsa deyiladi. U

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

ko'rinishida yoziladi. Bunda a_{ij}- haqiqiy sonlar $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ va matritsaning elementlari hisoblanib i va j lar mos ravishda qator va ustun indekslari, $m\times n-A$ matritsaning o'lchami deb ataladi. (2.1) formuladagi A matritsaning qisqacha ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$A = \|a_{ij}\|,\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$$

Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda bu matritsa nol matritsa deb ataladi.

Matritsaning qatorlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bu matritsa kvadrat matritsa deyiladi.

Kvadrat matritsaning bosh diagonaldan tashqari barcha elementlari nolga teng bo'lsa, bunday matritsa diagonal matritsa deb ataladi.

Diagonal matritsaning bosh diagonalidagi barcha elementlari birga teng bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deyiladi.

Agar ikkita A va B matritsalarning o'lchamlari bir xil bo'lib, elementlari ham mos ravishda o'zaro teng, ya'ni $a_{ij} = b_{ij} (i=\overline{1,m}\ j=\overline{1,n})$ bo'lsa, ular o'zaro teng matritsalar deyiladi.

2.2. Matritsalarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish

Bir xil o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarning yig'indisi deb mos elementlar yig'indisi $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ ga teng bo'lgan $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi. Matritsalarning bunday qo'shishning kommutativligi va assosiativligi ravshandir. Matritsalar ustida ayirish amali ham mavjud bo'lib, natijada elementlari berilgan matritsaning mos elementlari ayirmasiga teng bo'lgan matritsa hosil bo'ladi.

Matritsalarni songa ko'paytirish uchun uning har bir elementi shu songa ko'paytiriladi.

1. A va B matritsalarning yig'indisini hisoblang. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Yechish. $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+8 \\ 6+7 & 5+2 \\ 1+4 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 13 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

2. Quyidagi amallarni bajaring. $2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Yechish. $2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}$

3. Agar $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $\frac{1}{2}B - \frac{5}{2}A$ ni hisoblang.

4. Do'konga birinchi hafta 3 turdagi tovar keltirildi: muzlatkich, televizor va kir yuvish mashinalari. Quyidagi

$$X_1 = (10;\ 12;\ 8)$$

vektor 10 ta muzlatkich, 12 ta televizor va 8 ta kir yuvish mashinalari keltirilganligini bildiradi. Agar 2-hafta bu tovarlar quyidagi

$$X_2 = (5;\ 8;\ 10)$$

miqdorda keltirilgan bo'lsa, umumiy tovarlar miqdorini aniqlang.

Yechish. Matritsalarni qo'shish qoidasiga asosan umumiy miqdor quyidagiga teng bo'ladi:

$$X_1 + X_2 = (10;\ 12;\ 8) + (5;\ 8;\ 10) = (15;\ 20;\ 18).$$

5. 2.4. masala shartidagi do'konlar soni ikkita bo'lsin, u holda tovarlarni keltirishni ikkata satr va uchta ustunli matritsa yordamida ifodalash mumkin. Birinchi satr 1-do'konga, ikkinchisi 2-do'konga keltirilgan mahsulotlar miqdori. Tovarlarning ikkita do'konga birinchi marta olib kelinishi quyidagi $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 5 & 20 & 14 \end{pmatrix}$ matritsa bilan, ikkinchi marta olib kelinishi esa $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 12 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan bo'lsa, keltirilgan ja'mi tovarlar miqdorini aniqlang.

6. Tarmoqdagi m ta zavod n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. $A_{m\times n}$ matritsa – har bir zavodning birinchi kvartalda beradigan mahsulot hajmi, $B_{m\times n}$ matritsa esa zavodlarning ikkinchi kvartalda beradigan mahsulot hajmi. $(a_{ij};\ b_{ij})$ – i - zavodning j - turdagi mahsulotdan ishlab chiqarish hajmi. Quyidagilarni aniqlang:

a) ikkala kvartaldagi mahsulot hajmi;

b) ikkinchi va birinchi kvartalda har zavodlar ishlab chiqargan tovarlar hajmi orasidagi farq;

c) agar bir birlik mahsulotning qiymati λ bo'lsa, yarim yillikda ishlab chiqarilgan mahsulot qiymatini toping.

2.3. Matritsalarni ko'paytirish

$m\times k$ o'lchamli A matritsaning $k\times n$ o'lchamli B matritsaga ko'paytmasi deb $m x n$ o'lchamli shunday $C = A\cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi A matritsaning i-satr elementlarini B matritsaning j-ustunidagi mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Agar $AB = BA$ bo'lsa, u holda A va B matritsalar o'rni almashinadigan yoki kommutativ matritsalar deyiladi. Matritsalarning kommutativlik sharti ba'zi hollardagina bajariladi. Masalan:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}$$ matritsalar uchun

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot6+0\cdot10{,}5+2\cdot3&1\cdot2+0\cdot6+2\cdot6&1\cdot6+0\cdot10{,}5+2\cdot3\\3\cdot6+1\cdot10{,}5+0\cdot3&3\cdot2+1\cdot6+0\cdot6&3\cdot6+1\cdot3+0\cdot3\\0\cdot6+2\cdot10{,}5+0\cdot3&0\cdot2+2\cdot6+0\cdot6&0\cdot6+2\cdot3+0\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&14&12\\28{,}5&12&21\\21&12&6\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\cdot1+2\cdot3+6\cdot0&6\cdot0+2\cdot1+6\cdot2&6\cdot2+2\cdot0+6\cdot0\\10{,}5\cdot1+6\cdot3+3\cdot0&10{,}5\cdot0+6\cdot1+3\cdot2&10{,}5\cdot2+6\cdot0+3\cdot0\\3\cdot1+6\cdot3+3\cdot0&3\cdot0+6\cdot1+3\cdot2&3\cdot2+6\cdot0+3\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&14&12\\28.5&12&21\\21&12&6\end{pmatrix}$$

$AB=BA$ bo'lib, A va B matritsalarning kommutativlik sharti bajarildi.

Matritsalarni ko'paytirishda quyidagi hollar mavjud:

1) $A\cdot B$ ko'paytma aniqlanmagan;

2) $A\cdot B$ ko'paytma aniqlangan lekin $A\cdot B\neq B\cdot A$;

3) shunday A va B matritsalar borki, ular uchun $A\cdot B$ ko'paytma aniqlangan va $A\cdot B=B\cdot A$ bo'ladi.

Matritsalarni ko'paytirish kommutativ emas, lekin assotsiativ ya'ni umumiy holda $A\cdot B\neq B\cdot A$

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

4) shunday $A\neq0$, $B\neq0$ matritsalar mavjudki $A\cdot B=0$ bo'ladi.

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\5&5&5\\2&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

7. Matritsalarning ko'paytmasini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&-5\\1&2&-3&4\\-1&-2&3&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&-1\\1&3&2\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Yechish.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1-5\cdot2&2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3-5\cdot0&2\cdot1-3\cdot1+4\cdot2-5\cdot1\\1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot2&1\cdot2+2\cdot1-3\cdot3+4\cdot0&1\cdot1-2\cdot1-3\cdot2+4\cdot1\\-1\cdot3-2\cdot4+3\cdot1+1\cdot2&-1\cdot2-2\cdot1+3\cdot3+1\cdot0&-1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&19&2\\16&-5&-3\\-6&5&8\end{pmatrix}$$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A \cdot B$ ni toping.

Yechish. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1-1\cdot2-3\cdot1 \\ 4\cdot1+2\cdot2-0\cdot1 \\ -1\cdot1+1\cdot2-1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Bozordan 4 hafta davomida xarid qilingan 3 xil mahsulot; go'sht, guruch, yog' miqdori A matritsa va ularning narxlari esa B matritsa bilan berilgan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$$

To'rt hafta davomida bu mahsulotlarni sotib olish uchun sarflanadigan xarajatni aniqlang.

Yechish.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qaraymiz, a_{ij} – i-haftada j - turdagi xarid qilingan mahsulotning miqdori, b_{ij} esa j - turdagi mahsulotning narxi. A va B matritsalarni ko'paytirishdan hosil bo'lgan C matritsa elementlari c_{ij} esa i - haftada qilingan xarajatni anglatadi. Umumiy xarajat esa $\sum_{i=1}^{3} c_{ii}$ ga teng bo'ladi. Demak,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 5400 \\ 6800 \\ 5400 \end{pmatrix}$$

Demak, mos ravishda 1, 2, 3, 4 - haftalarda qilinadigan xarajatlar C matritsaning elementlari shaklida hosil bo'ldi. Umumiy xarajat esa 4400+5400+6800+5400 = 22000 ga teng.

10. Zavoddan yangi ishlab chiqarilgan dvigatellarning 40 %*i* qayta ta'mirlashga beriladi, qolgani foydalanishga chiqarib yuboriladi. Statistik ma'lumotlarga qaraganda ta'mirlangan dvigatellarning 65 %*i* yana qayta ta'mirlashga qaytariladi va 35%*i* yaxshi ishlab ketadi. Qayta ta'mirlashni talab qilmagan dvigatellarning 20%*i* 1 oydan keyin qayta ta'mirlashni talab qiladi. Qolgani esa yaxshi ishlab ketadi. 2 oydan keyin yaxshi ishlab ketadigan va qayta ta'mirlash kerak bo'lgan dvigatellar qismini aniqlang. Masala sharti xuddi shu tarzda davom etsa 3 oydan keyingisini ham aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilgandan keyin barcha dvigatellarning 0,6 qismi yaxshi ishlaydi, 0,4 qismi esa qayta ta'mirlashni talab qiladi. Bir oydan keyin yaxshi ishlab ketadigan dvigatellar ulushi 0,6Ч0,8+0,4Ч0,35 = 0,62 ni, qayta ta'mirlanishi kerak bo'lgan dvigatellar ulushi esa 0,6Ч0,2+0,4Ч0,65 = 0,38 ni tashkil etadi. t–holatdagi aniqlikni beruvchi X_t qatorni kiritamiz. $X_t = (x_{1t}; x_{2t})$, bunda x_{1t} – t momentdagi yaxshi ishlab ketadigan dvigatellar ulushi. x_{2t} - t momentdagi qayta ta'mirlanishi kerak bo'lgan dvigatellar ulushi. Quyidagi matritsani qaraymiz;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bunda a_{ij} – dvigatellar ulushi, i – dvigatellar holati (ishlab ketishi yoki yo'qligi: 1- yaxshi ishlab ketadi, 2- ta'mirlash kerak), j - bir oydan keyingi holati. Ko'rinib turibdiki, matritsaning qatoridagi elementlari yig'indisi 1 ga teng bo'lishi kerak va barcha elementlar nomanfiy.

$$X_0 = (0{,}6 \quad 0{,}4), \qquad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix};$$

bir oydan keyin

$$X_1 = X_0A = (0{,}6 \quad 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} = (0{,}62 \ 0{,}38);$$

ikki oydan keyin

$$X_2 = X_1 \times A = X_0 \times A^2 = (0{,}6 \quad 0{,}4) \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}6 \ \ 0{,}4) \times \begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4925 \end{pmatrix} = (0{,}629 \ ; \ 0{,}371),$$

$X_3 = X_2 \times A = X_0A^3 = (0{,}634 \quad 0{,}366)$. Umumiy holda $X_t = X_0 \times A^t$ formula o'rinli.

Matritsani transponirlash – A matritsadan satrlari va ustunlari o'rni almashgan A' matritsaga o'tishdir. A' matritsa A matritsaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, agar A matritsani o'lchami $m \times n$ bo'lsa, u holda transponirlangan matritsaning o'lchami $n \times m$ bo'ladi.

Masalan:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 20 \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Transponirlashning xossalari:

1) $(A')' = A$ 3) $(A+B)' = A' + B'$

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$ 4) $(AB)' = B'A'$

11. Korxona uch turdagi mebel ishlab chiqarib, mahsulotini 4 ta tumanda sotadi.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsada b_{ij} – i – turdagi mebelning j - tumandagi qiymati. Agar $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$ matritsa orqali bir oyda tumanlarga tarqatilgan mebellar miqdori berilgan bo'lsa, korxonaning har bir tumandan oladigan pul miqdorini aniqlang.

Yechish. B matritsani transponirlaymiz, ya'ni diagonal atrofida buramiz va A matritsaga ko'paytirsak har bir tumandan qanchadan pul miqdori tushishi kelib chiqadi:

$$C = B' \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 2040 \\ 540 \\ 1020 \end{pmatrix},$$

bunda c_{ii} - i tumandan mebellarni sotishdan tushgan pul miqdori.

12. Korxona 4 xil xomashyodan foydalanib, 3 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. A matritsaning elementlari a_{ij} $(i=\overline{1,4};\, j=\overline{1,3})$ orqali j - turdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan i - xomashyo miqdori aniqlanadi. B matritsa korxonaning ma'lum bir vaqt oralig'ida ishlab chiqargan mahsulot miqdorini ifodalaydi.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$$

mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan umumiy xom ashyo miqdorini toping.

13. Telefon apparatlarini ta'mirlovchi usta 70 % telefonlarni past darajada, 20 % o'rta darajada va 10 % to'liq ta'mirdan chiqardi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra 70 % past darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10 % past darajada, 60 % o'rta darajada, 30 % ni to'liq ta'mirlanadi. O'rta darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20 % past darajada, 50 % o'rta, 30 % ni to'liq ta'mirlashadi. To'liq ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60 % past darajada, 40 % o'rta darajada ta'mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa, 1, 2, 3 – yillardan keyingi har bir darajada ta'mirlangan telefonlar ulushini aniqlang.

14. Ikki turdagi yog' mahsuloti uchta do'konda sotiladi. Birinchi va ikkinchi kvartallarda ikki turdagi yog'ning uchta do'konda sotilish hajmini mos ravishda A va B matritsalar bilan berilgan.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 20 \\ 25 & 20 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 12 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}.$$

1) ikkala kvartal davomida sotilgan mahsulotlar hajmini aniqlang.
2) Ikkinchi kvartalda sotilgan mahsulot hajmining birinchi kvartalda sotilgan mahsulot hajmidan farqini aniqlang.

15. Korxona ikki turdagi xom ashyodan foydalanib, 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. A matritsa bilan j - xil mahsulotga i - turdagi xomashyoning ishlatilish hajmi berilgan. B matritsa esa bir kvartalda ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi. Xomashyo birligining narxi P matritsa bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang.

1) ishlatilgan jami xomashyo miqdorini aniqlovchi C matritsani;
2) sarflangan jami xomashyoning umumiy narxi;

$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P=(6;3)$ $b)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P=(3;5)$

16. Zavod tikuv mashinalarini ishlab chiqaradi va ishlab chiqarilgan mashinalar ikki holatda bo'ladi. 1) yaxshi ishlab ketadigan mashinalar, 2) ta'mirlashni talab qiladigan mashinalar. Ishlab chiqarilgan mashinalarning P %*i* yaxshi ishlab ketadigan va (100-P) %*i* qayta ta'mirlashni talab qiladigan mashinalar hisoblanadi. Statistik ma`limotlarga qaraganda yaxshi ishlab ketgan mashinalarning 1 oydan keyin 70%*i* yaxshi ishlaydi va 30 %*i* qayta ta`mirlashni talab qiladi. Qayta ta'mirlangan mashinalar esa bir oydan keyin 60 %*i* yaxshi ishlab ketadigan va 40 %*i* qayta ta`mirlashni talab qiladi. Yana bir oydan keyin bu mashinalarning ishlab ketish holatlari qanday bo'ladi?

a) $P=80$ *b*) $P=50$ *c*) $P=20$

17. Quyidagi amallarni bajaring:

$$3\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

18. A va B matritsalar berilgan, $A\cdot B=(c_{ij})$ matritsaning c_{32} elementini toping.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 5\\ 9 & 2 & -3 & 4\\ -1 & -5 & 3 & 11\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\\ 1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

2.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Ikkinchi tartibli matritsaning determinanti deb quyidagi songa aytiladi:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{2.1}$$

uchinchi tartibli matritsaning determinanti deb quyidagi songa aytiladi.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11} \tag{2.2}$$

2.19. Berilgan matritsalarni determinantini hisoblang.

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}\qquad b)\ A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix}\qquad c)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Yechish.

a) $|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 4-2\cdot 5=2$.

b) $|A|=\begin{vmatrix}5 & 8\\ 4 & 7\end{vmatrix}=5\cdot 7-4\cdot 8=3$

c) $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot5\cdot4+2\cdot3\cdot2+4\cdot1\cdot8-8\cdot5\cdot2-3\cdot3\cdot1-4\cdot2\cdot4=-17$

2.5. Minor. Algebraik to'ldiruvchi

Determinant a_{ik} elementining M_{ik} minori deb, bu element turgan qator va ustunni o'chirish natijasida hosil bo'lgan determinantga aytiladi.

Determinant a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik} \qquad (2.3)$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Har qanday determinant ixtiyoriy satri (ustuni) elementlarining mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisidan iborat, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in} \qquad (2.4)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & \dots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj} \qquad (2.5)$$

(2.4) va (2.5) tengliklar mos ravishda determinantning i-satr va j-ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi. (2.4) va (2.5) formulalar matritsalarning determinantlarini hisoblash uchun qo'llaniladi.

2.6. Yuqori tartibli matritsaning determinanti va uning xossalari

Kvadrat matritsa uchun shu matritsaning elementlaridan tuzilgan n - tartibli determinantni hisoblash mumkin. Bu determinant $det\,A$ yoki $|A|$ orqali belgilanadi:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.6)$$

Determinantning asosiy xossalari

1. Agar determinantning barcha satr elementlarini ustun elementlariga (yoki aksincha), almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi ($\det A=\det A'$).

2. Agar determinantning ikki yonma-yon turgan satr (ustun) elementlari o'rnini mos ravishda almashtirsak, determinantning qiymati qarama-qarshi ishoraga o'zgaradi.

3. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari umumiy k ko'paytuvchiga ega bo'lsa, u holda bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin.

4. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlariga proporsional bo'lsa, u holda determinant qiymati nolga teng bo'ladi.

5. Agar determinantning satr (ustun) elementlari ikki ifodaning yig'indisi ko'rinishida bo'lsa, u holda determinant ikki determinant yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

6. Agar determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustun (satr)ning mos elementlarini umumiy ko'paytuvchi m soniga ko'paytirib qo'shilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

20. Berilgan determinantni to'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish. 1) To'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib yechamiz:

$$|A| = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41} + a_{42}M_{42} - a_{43}M_{43} + a_{44}M_{44} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546$$

2) Uchunchi ustun elementlarini nolga aylantirish usuli bilan hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40+12) + 7(68+18) = 546$$

21. Berilgan determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 13 & 14 & 15 & 13 \\ 18 & 18 & 23 & 22 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 25 & 29 & 30 & 26 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 13 & -17 \\ 10 & 15 & 22 & 3 \\ 5 & 9 & 13 & 6 \\ 9 & 15 & 21 & 17 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} -2 & 6 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 12 & 10 & 8 \\ 8 & 6 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ - & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

22.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$ ekanligini isbotlang.

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = 1\cdot b\cdot ab + a\cdot ac\cdot 1 + 1\cdot c\cdot bc - bc\cdot b\cdot 1 - ac\cdot c\cdot 1 - 1\cdot a\cdot ab = b^2a + a^2c + c^2b -$$

$$-b^2c - c^2a - a2b = b^2(a-c) + ac(a-c) - b(a-c)(a+c) = (a-c)(b^2 + ac - ab - bc) =$$

$$= (c-a)(c-b)(b-a)$$

23. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsa $|A|$ni hisoblang.

24. Berilgan determinantni uch usul bilan hisoblang:

a) i-satr bo'yicha yoyib;

b) j-ustun elementlari bo'yicha yoyib;

c) Oldin j - ustundagi bittadan boshqa elementlarini nolga aylantirib, so'ngra shu ustun elementlari bo'yicha yoyib.

$$a)\ \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$i = 3,\ \ j = 2 \qquad\qquad i = 4,\ \ j = 1$$

25. Tenglamani yeching. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & x-1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

26. $y = \begin{vmatrix} 1 & x-2 & 2 \\ 3 & x & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ to'gri chiziq funksiysianing burchak koeffitsiyentini toping va grafigini chizing.

2.7. Teskari matritsa. Xosmas matritsa

A kvadrat matritsa uchun $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$ tenglik bajarilsa, u holda A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.(E birlik matritsa).

A kvadrat matritsaning determinanti noldan farqli, ya`ni $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda A matritsa xosmas matritsa deb ataladi.

A kvadrat matritsaning teskari matritsasi mavjud (va yagona) bo'ladi, faqat va faqat bu matritsa xosmas bo'lsa.Teskari matritsa quyidagi munosabat yordamida hisoblanadi.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

bu yerda $|A|$ - A matritsaning determinanti, A_{ij} esa a_{ij} elmentining algebraik to'ldiruvchisi.

27. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33;$ va $\begin{matrix} A_{11}=-16,\ A_{12}=9,\ A_{13}=31 \\ A_{21}=9,\ A_{22}=-3,\ A_{23}=-3 \\ A_{31}=11,\ A_{32}=0,\ A_{33}=-11 \end{matrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Tekshirib ko'ramiz:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16+27+22 & -32-45+77 & -16+27-11 \\ 9-9+0 & 18+15+0 & 9-9+0 \\ 31-9-22 & 62+15-77 & 31-9+11 \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

28. Quyidagi berilgan matritsaga teskari matritsani aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Yechish.

$$|A|=1\cdot2\cdot1+5\cdot1\cdot6-3\cdot2\cdot1-6\cdot2\cdot1+2\cdot1\cdot1-3\cdot5\cdot1=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

29. Quyidagi matritsali tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Demak, $AX=B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \left(A^{-1}\cdot A=E\right)E\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$$A=1\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ 4 & 8 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ 4 & 8 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ 4 & 8 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 20\\ -1 & -3 & 28\\ -2 & -1 & 17\end{pmatrix}$$

30. Quyidagi matritsalarning teskari matritsasini aniqlang.

1. $\begin{pmatrix}2 & -6 & 2\\ 8 & 4 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -15\\ 6 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}4 & 3 & 5\\ 6 & 7 & 1\\ 9 & 1 & 8\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}0 & 4 & 8\\ 14 & -4 & -4\\ 4 & 8 & 0\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 7\\ 8 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 11\\ 7 & -5 & 0\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}3 & -5 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -7 & -2\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 3 & -5 & -6\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 8 & 3 & -6\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}2 & -5 & 0\\ 3 & 5 & -1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 6\\ 3 & 3 & 13\end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ -2 & -5 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}5 & 8 & 1\\ 3 & -2 & 6\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 6 & -10 & 6\\ 4 & 14 & -2\end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 0 & 4 & -6\\ 10 & -8 & -4\end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$

$$25.\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad 26.\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}\qquad 27.\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-3&-4&-5\\-6&-7&-8\end{pmatrix}$$

$$28.\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\\-7&-8&-9\end{pmatrix}\qquad 29.\begin{pmatrix}4&5&7\\8&12&1\\11&2&3\end{pmatrix}\qquad 30.\begin{pmatrix}10&11&12\\9&8&7\\1&2&3\end{pmatrix}$$

31. Quyidagi matritsalarni teskari matritsasini toping

$$a)\begin{pmatrix}1&4&2&3\\1&-2&1&-2\\1&-1&1&1\\0&-10&-2&-5\end{pmatrix}\qquad b)\begin{pmatrix}-2&1&-3&1\\-1&1&-2&2\\1&-3&1&-4\\-3&3&-5&5\end{pmatrix}$$

2.8. Matritsaning rangi. Elementar almashtirishlar

$m\times n$ o'lchamli A matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga aytiladi va $rang(A)$ yoki $r(A)$ kabi belgilanadi.

Matritsa ustidagi quyidagi almashtirishlar elementar almashtirishlar deb ataladi:

a) faqat nollardan iborat satrni (ustunni) o'chirish;

b) ikki satr (ustun)ning o'rnini almashtirish;

c) bir satr (ustun)ning barcha elementlarini biror ko'paytuvchiga ko'paytirib, boshqa satr (ustun) elementlariga qo'shish;

d) satr (ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish;

Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

e) matritsani transponirlash

32 Berilgan matritsaning rangini toping.

$$A=\begin{pmatrix}5&2&1&3\\3&-1&1&2\\1&2&4&8\\3&-1&1&2\end{pmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{pmatrix}5&2&1&3\\3&-1&1&2\\1&2&4&8\\3&-1&1&2\end{pmatrix}\ \boxed{-1}\ \boxed{-4}\ \boxed{-1}\ + \ + \rightarrow\begin{pmatrix}5&2&1&3\\-2&-3&0&-1\\-19&-6&0&-4\\-2&-3&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&-3&-2&-1\\0&-6&-19&-4\\0&-3&-2&-1\end{pmatrix}\ \boxed{-2}\ \boxed{-1}\ + \ +$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&-3&-2&-1\\0&0&-15&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Demak, $r(A)=3$.

33. Berilgan matritsalarning rangini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4 & 1\\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2\\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12\\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

34.

$$\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

35. Matritsalarning rangini toping.

1. $\begin{pmatrix}25 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 4\\ -3 & 1 & 10\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}5 & 6 & 11\\ 7 & 8 & 15\\ 31 & 36 & 67\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}5 & 9 & 15 & 20 & 25\\ 2 & 3 & 6 & 8 & 10\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-3 & 1 & -6\\ 1 & 0 & 2\\ 7 & 2 & 14\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}9 & 4 & -1 & 5\\ 17 & -3 & -8 & 5\\ 5 & -2 & -3 & 1\\ -13 & 9 & 10 & -1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}15 & 13 & 21\\ -7 & 5 & -4\\ 23 & 31 & 38\\ 8 & 2-18 & 17\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}-9 & 20 & -3 & -6\\ -5 & 2 & -3 & -4\\ 8 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -3\\ 4 & 9 & 11\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 9 & -1\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\\ 9 & 18 & 27\\ 4 & 3 & 12\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}3 & 23 & 43 & 63 & 83\\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41\\ 4 & 24 & 44 & 64 & 84\\ 8 & 58 & 108 & 158 & 208\\ 6 & 46 & 86 & 126 & 166\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}3 & 4 & -4\\ 2 & 12 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}4 & 5 & 2 & 2\\ -2 & -3 & -4 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ 10 & 11 & 7 & 8\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 15 \\ 31 & 36 & 67 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 15 & 20 & 25 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 & 5 \\ 17 & -3 & -8 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ -13 & 9 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 15 & 13 & 21 \\ -7 & 5 & -4 \\ 23 & 31 & 38 \\ 8 & 18 & 17 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -9 & 20 & -3 & -6 \\ -5 & 2 & -3 & -4 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

2.9. Matritsalar algebrasining iqtisodiyotda qo'llanilishi

36. Korxona 3 xil xomashyodan foydalanib 5 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xomashyo sarflash me'yori A matritsa bilan berilgan.

$$A=\begin{pmatrix}4&2&1&3&6\\3&2&4&5&3\\2&1&5&2&4\end{pmatrix}$$

Xomashyoning birlik narxi $B=$ (10 25 30) matritsa bilan berilgan. Agar ishlab chiqarish rejasi (90, 110, 140, 180, 200) bo'lsa, korxonaning umumiy xarajatini toping.

Yechish. Avvalo ishlab chiqilgan mahsulotlar har bir turining bir birligiga ketadigan xarajatni topamiz. Buning uchun B va A matritsalarni ko'paytiramiz:

$$C=B\cdot A=(10\ 25\ 30)\cdot\begin{pmatrix}4&2&1&3&6\\3&2&4&5&3\\2&1&5&2&4\end{pmatrix}=(175\ 100\ 260\ 215\ 255)$$

$$D=\begin{pmatrix}90\\110\\140\\180\\200\end{pmatrix}$$

Umumiy xarajatni topish uchun C va D matritsalarni ko'paytiramiz.

$$X=(175\ 100\ 260\ 215\ 255)\cdot\begin{pmatrix}90\\110\\140\\180\\200\end{pmatrix}==152850$$

37. Korxona 2 xil xomashyo sarflab 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xomashyo sarflash normasi quyidagi matritsa bilan berilgan:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\5&4\\1&6\end{pmatrix}$$

Bu yerda a_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2$) element i - mahsulot birligiga j - xomashyodan qancha sarflanishini ko'rsatadi. Mahsulot ishlab chiqarish rejasi satr matritsa bilan berilgan

$C=(80;\ 120;\ 100)$. Har bir tur xomashyoning narxi ustun matritsa bilan berilgan. $B=\begin{pmatrix}30\\50\end{pmatrix}$ quyidagilarni aniqlang:

1) mahsulot ishlab chiqarish rejasiga zarur bo'lgan xomashyo miqdori,

2) xomashyoning umumiy narxi.

Yechish. Xomashyo miqdorini topish uchun C va A matritsalarni ko'paytiramiz:

$$D = C\cdot A = \begin{pmatrix}180 & 120 & 100\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}860 & 1320\end{pmatrix}.$$

Xomashyoning umumiy narxini topish uchun D va B matritsalarni ko‘paytiramiz:

$$X = D\cdot B = \begin{pmatrix}860 & 1320\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix} = 91800.$$

38. Hafta davomida bozordan xarid qilinadigan uch turdagi mahsulotga sarflanadigan pul miqdorini hisoblash kerak bo‘lsin. A matritsa bilan har hafta sotib olinadigan mahsulot miqdori, har bir mahsulot birlik narxi esa B matritsa bilan berilgan:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}\quad B = \begin{pmatrix}1000\\ 600\\ 300\end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalarni ko‘paytirishdan har haftada sarf qilingan pul miqdori kelib chiqadi. $C = A\cdot B = \begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1000\\ 600\\ 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6000\\ 8000\\ 8700\\ 7600\end{pmatrix}.$

C matritsani har bir elementini qo‘shib chiqsak umumiy xarajat kelib chiqadi.

X= 6000+8000+8700+7600 = 30300

39. Korxona 2 xil xomashyoni sarflab 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarflash normasi A matritsa bilan berilgan. Har bir xomashyo turining narxi ustun matritsa B bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasi satr matritsa C bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasiga kerak bo‘lgan xomashyo miqdorini va uning umumiy narxini aniqlang.

$$A = \begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\qquad C = \begin{pmatrix}120 & 150 & 70\end{pmatrix}\qquad B = \begin{pmatrix}30\\ 40\end{pmatrix}$$

Yechish. C va A matritsalarni ko‘paytirib har bir tur xomashyoning qanchadan ishlatilishini aniqlaymiz. Umumiy narxini aniqlash uchun esa D va B matritsalarni ko‘paytiramiz, bunda

$$D = C\cdot A = \begin{pmatrix}120 & 150 & 70\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1530 & 830\end{pmatrix}\quad X = D\cdot B = \begin{pmatrix}1530 & 830\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 40\end{pmatrix} = 79100$$

40. Korxona 2 xil xomashyo turini sarflab 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo sarflash normasi A matritsa bilan, mahsulot ishlab chiqarish rejasi esa satr matritsa C bilan berilgan. Har bir xomashyo turining narxi ustun matritsa B bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasiga kerak bo‘lgan xomashyo miqdorini va narxini aniqlang.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad C=(120\ 150\ 60) \qquad B=\begin{pmatrix}20\\ 30\end{pmatrix}.$$

Yechish. C va A matritsalarni ko'paytirib har bir tur xomashyoning qanchadan ketganligini topamiz: $D=C\cdot A(120\ \ 150\ \ 60)\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=(930\ \ 720)$ xom ashyoning umumiy narxini aniqlash uchun D va B matritsalarni ko'paytiramiz: $X=D\cdot B=(930\ \ 720)\cdot\begin{pmatrix}20\\ 30\end{pmatrix}=40200$

41. Korxona 3 xil xomashyodan foydalanib 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Quyidagi jadvalda korxonaning kunlik mahsulot ishlab chiqarish hajmi, sarflanadigan xomashyo miqdori, narxi va kunlik ish miqdori berilgan.

Mahsulot turi	Korxonaning kunlik mahsulot ishlab chiqarish unumdorligi	Xomashyo sarfi (og'irlik birligida)
1	13 10 8 13 5	2 13 13
2	13 4 6 5 13	5 2 1
3	4 13 2 1 5	13 1 13
4	13 13 1 1 4	4 13 13
	Yillik ish kuni	Xomashyo narxi
	200 300 160 150 200	50 60 40

Quyidagilarni topish talab qilinadi:

1) har bir korxonaning mahsulot turlari bo'yicha yillik mahsuldorligi;
2) har bir korxonaning xomashyo turlariga bo'lgan ehtiyoji;
3) har bir korxonaning ko'rsatilgan turdagi va miqdordagi mahsulotni ishlab chiqarishga zarur bo'lgan xomashyoni sotib olish uchun yillik kredit summasi.

Yechish. Korxonaning kunlik mahsulot ishlab chiqarish unumdorligi A, xom ashyo sarfi B, yillik ish kunini C va xomashyo narxini D matritsa bilan belgilaymiz.

$$A=\begin{pmatrix}13 & 10 & 8 & 13 & 5\\ 13 & 4 & 6 & 5 & 3\\ 4 & 13 & 2 & 1 & 5\\ 13 & 13 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 13 & 13\\ 5 & 2 & 1\\ 13 & 1 & 13\\ 4 & 13 & 13\end{pmatrix},$$

$$C=(200\ \ 300\ \ 160\ \ 150\ \ 200), \qquad D=(50\ \ 60\ \ 70)$$

1) korxonaning yillik mahsuldorligini topish uchun C matritsani ustun matritsa shaklida yozib olamiz va $S=A\times C^T$ ni hisoblaymiz.

$$S=\begin{pmatrix}13 & 10 & 8 & 13 & 5\\ 13 & 4 & 6 & 5 & 13\\ 4 & 13 & 2 & 1 & 5\\ 13 & 13 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}200\\ 300\\ 160\\ 150\\ 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9830\\ 8110\\ 6170\\ 7610\end{pmatrix}$$

2) Korxonaning xomashyo turlariga bo'lgan ehtiyojini topish uchun A matritsani transpornirlaymiz, ya'ni diagonal atrofida buramiz va B matritsaga ko'paytiramiz:

$$Q = A' \times B = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 4 & 13 \\ 10 & 4 & 13 & 13 \\ 8 & 6 & 2 & 1 \\ 13 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 13 & 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 13 & 13 \\ 5 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \\ 4 & 13 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & 368 & 403 \\ 261 & 320 & 472 \\ 76 & 131 & 149 \\ 68 & 193 & 200 \\ 156 & 148 & 195 \end{pmatrix}$$

3) Har bir korxonaning ko'rsatilgan turdagi va miqdordagi maxsulotni ishlab chiqarishga ketadigan xomashyoni sotib olish uchun zarur bo'lgan yillik kredit summasini topish uchun D matritsani ustun matritsa shaklida yozib olamiz va $P = Q \times D'$ ni hisoblaymiz.

$$P = \begin{pmatrix} 195 & 368 & 403 \\ 261 & 320 & 472 \\ 76 & 131 & 149 \\ 68 & 193 & 200 \\ 156 & 148 & 195 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47950 \\ 5113 \\ 17620 \\ 22980 \\ 24480 \end{pmatrix}$$

42. Ikki turdagi resursdan foydalanib, 3 xil mahsulot ishlab chiqariladi. A matritsa bilan j - turdagi mahsulotga, i- turdagi resursning ishlatilish hajmi berilgan. X matritsa esa bir kvartal davomida ishlab chiqariladigan mahsulotlar hajmi. Har bir resurs birligining narxi P matritsa bilan berilgan.

1) jami ishlatilgan resurslarni aniqlovchi S matritsani aniqlang;

2) jami sarflangan resurslarni umumiy narxini aniqlang.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P = (6\,;3)$ $P = (3\,;5)$ $P = (2\,;4)$

43. Korxonada ikki xil xom ashyodan foydalanib 3 turdagi mahsulot ishlab chiqariladi. Bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan xom ashyo normasi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan. Agar har bir turdagi xomashyo narxi $P = (2 \quad 3)$ va ishlab chiqarilgan tovarlar hajmi

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar bilan berilgan bo'lsa, u holda mahsulot ishlab chiqarish uchun qilingan jami xarajatlarni aniqlang.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi va matritsalar ustida qanday amallar aniqlangan? Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matritsaning determinanti va xossalari.
3. Minor va algebraik to'ldiruvchi nima?
4. Teskari matritsa nima?
5. Matritsaning rangi nima?
6. Matritsalar ustida qanday elementar almashtirishlarni bilasiz?
7. Matritsaning iqtisodiyotda qo'llanilishi.

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.
2. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры задачи. - М.: Экзамен, 2005.
3. Красс М.С., Чупринов Б.П. Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: Дело, 2000.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1998.
5. Минорский И.П. Сборник задач по высшей математике. – М., 2004.
6. Данко П.Е., Попов А.Т., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая Школа, 1998.
7. Высшая математика для экономистов. /Под.ред. Н.Ш. Крамера. – М.: ЮНИТИ, 2006.
8. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўқитувчи, 3-жилд, 1996.
9. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М.: Проспект, 2005.
10. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.
11. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - Н., 2008.
12. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М., 2008.
13. Ермаков В.И. Общий курс высшей математика для экономистов. – Н., 2010.

3-bob. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

3.1. Chizqli tenglamalar sistemasi va uning yechimi

Noma'lumlar soni n ta bo'lgan m ta chiziqli tenglamalar sistamasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

bu yerda a_{ij} – noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlar; b_i lar esa sistemaning ozod hadlari ($i = 1,2,\dots m$; $j = 1,2,\dots n$) deyiladi.

(3.1) tenglamalar sistemasida $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar o'rniga mos ravishda $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ o'zgarmas sonlarni qo'yish natijasida berilgan tenglamalar sistemasi ayniyatlar sistemasiga aylansa, u holda $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ lar (3.1) sistemaning yechimi deb ataladi.

Kamida bitta yechimga ega tenglamalar sistemasi birgalikdagi tenglamalar sistemasi deyiladi. Yechimga ega bo'lmagan tenglamalar sistemasi birgalikda emas deb ataladi. Agar ikkita tenglamalar sistemasi bir xil yechimga ega bo'lsa, yoki ikkisi ham yechimga ega bo'lmasa, ular teng kuchli deb ataladi.

3.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish

(3.1) tenglamalar sistemasini matritsa ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin: $A \cdot X = B$ bunda,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Chiziqli tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng ($m = n$) va sistema matritsasi A – xosmas, ya'ni $detA \neq 0$ bo'lsa, bu sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Bu holda sistemaning **Kramer usuli**dagi yechimi quyidagicha bo'ladi:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. Bunda Δ - sistema matritsasining determinanti, Δ_k - sistema determinantining k - ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinant.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $\Delta = 0$ va $\Delta_i = 0 (i = 1,2,\dots n)$ bo'lsa, berilgan tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Agar $\Delta=0$ bo'lib, Δ_i lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

1. Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 + 30 + 12 - 12 - 15 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 6 + 6 - 8 - 3 = -9$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 15 - 6 - 6 - 30 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 20 + 8 - 6 - 5 = 13$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{1} = -9 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -10 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 13.$$

2. Tenglamalar sistemalarini Kramer usulidan foydalanib yeching.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = \dfrac{2}{3} \\ 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 = \dfrac{32}{3} \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \dfrac{-32}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \dfrac{29}{8} \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{4}x_3 = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{6}x_1 + \dfrac{2}{9}x_2 + x_3 = \dfrac{2}{3} \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -11 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 32 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 16 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 38 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 10x_3 = 33 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 17 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 34 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 40 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 32 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -17 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 29 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 29 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$

$$29.\begin{cases}2x_1+7x_2-3x_3=13\\ x_1-2x_2+x_3=2\\ 5x_1-2x_2+3x_3=16\end{cases} \qquad 30.\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=0\\ x_1+2x_2-5x_3=-1\\ 3x_1-2x_2+2x_3=-1\end{cases}$$

3.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish

Agar tenglamalar sistemasining (m = n) matritsasi xosmas, ya'ni $detA\neq 0$ bo'lsa, u holda sistemaning matritsa ko'rinishdagi yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$X=A^{-1}\cdot B$$

bunda, A^{-1}- (3.2) munosabatdagi A matritsaning teskari matritsasi, B esa ozod hadlar matritsasi.

3. Quyidagi tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching.

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=1\\ x_1+2x_2+3x_3=0\\ 3x_1+4x_2+6x_3=1\end{cases}$$

Yechish.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\3&4&6\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$|A|=24+27+16-24-24-1=1\neq 0\ \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

demak, $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1$.

4. Matritsali tenglamani yeching.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-6&4&6\\-2&0&7\end{pmatrix}.$$

Yechish. $$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-6&4&6\\-2&0&7\end{pmatrix}$$

$$AX=B\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&1&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Demak, $$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.4. Umumiy ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish deganida biz sistemadagi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli bilan sistemani yechishni tushunamiz. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechganda, berilgan sistema uchburchak shaklini yo trapetsiya shaklini yoki sistemada ishtirok etayotgan biror-bir tenglama $0 = a(a \neq 0)$ ko'rinishini olib qoladi.

Agar sistema uchburchak shakliga keltirilgan bo'lsa, u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Agar sistemadagi biror-bir tenglama $0 = a(a \neq 0)$ ko'rinishga ega bo'lsa, sistema yechimga ega bo'ladi.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasining ($m=n$ bo'lishi shart emas) Gauss usulida yechishning mohiyati shundan iboratki, unda noma'lumlar ketma-ket yo'qotilib, sistema uchburchaksimon shaklga keltiriladi. Agar sistema uchburchaksimon shaklga kelsa, u yagona yechimga ega bo'ladi va uning noma'lumlari oxirgi tenglamadan boshlab topib boriladi (sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, noma'lumlar ketma-ket yo'qotilgach, u trapetsiyasimon shaklga keladi.).

5. Sistemani Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olamiz:
Birinchi qadamda $a_{11} \neq 0$ bo'lishi zarur, lekin $a_{11} = 1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to'rtinchi satrlarning ornini almashtiramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \quad \boxed{-5}\ \boxed{3}\ \boxed{-2}$$

1-qadam. Birinchi satr elementlarini –5, 3 va -2 ga ko'paytirib, ularni mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi satrlarga qo'shamiz, chunki maqsad a_{11} element ostida nollardan iborat " zina " hosil bo'lsin.

2-qadamni o'tkazish uchun, ya'ni matritsada $a_{22} \neq 0$, lekin $a_{22} = 1$ yoki $a_{22} = -1$ bo'lgani qulayroq. Shuning uchun ikkinchi va uchinchi satrlar o'rnini almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad \boxed{4} \quad \boxed{3}$$

2-qadam. Ikkinchi satr elementlarini 4 va 3 ga ko'paytirib mos ravishda uchinchi va to'rtinchi satr elementlariga qo'shamiz, natijada a_{22} element tagida ikkinchi ustunda "zina" hosil bo'ladi.

3-qadam. Hosil bo'lgan matritsada $a_{33} = 26 \neq 0$, uchinchi satr elementini $-\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$ ga ko'paytirib, to'rtinchi satrga qo'shamiz. Natijada:

$$-\frac{13}{13} \times \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matritsa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchidan $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, ikkinchidan $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchidan $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz. Javob: (5; 7; 0; 1)

6. Berilgan tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Yechish.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & -8 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

Bundan $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 2 \\ 0\cdot x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -1 \end{cases}$

oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -1 \leftrightarrow 0 = -1$ bunday bo'lishi mumkin emas, demak yechim yo'q.

3.5. Kroneker – Kapelli teoremasi

(3.1.) Tenglamalar sistemasida koeffitsiyentlardan iborat A matritsa ozod hadlari bilan birgalikda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

olinsa, kengaytirilgan matritsa deb ataladi.

Kroneker - Kapelli teoremasi: (3.1) sistema yechimga ega bo'lishi uchun rangA=rangB bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (3.1) da barcha b_i $i=(1\dots n)$ ozod hadlari nolga teng bo'lsa, bu tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraylik. Bu sistema har doim yechimga ega. Chunki uning hech bo'lmaganda 1ta trivial $x_i=0$ $(i=1,2,\dots n)$ yechimi bor. Uning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lishi uchun $r(A)=r<\min(m,n)$ bo'lishi zarur va yetarlidir

7. Quyidagi berilgan tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching:

1. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4=7 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=13 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4=-3 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=6 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4=-21 \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4=-33 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1+7x_2+4x_3+6x_4=28 \\ 15x_1+30x_2+7x_3+8x_4=97 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+8x_4=35 \\ 6x_1+9x_2+3x_3+4x_4=33 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=4 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=-2 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4=6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4=19 \\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4=11 \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4=8 \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4=21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4=-5 \\ 13x_1+8x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=-1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4=-11 \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4=-7 \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4=5 \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4=-1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4=-14 \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=-3 \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4=-2 \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=-5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4=15 \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4=18 \\ x_1-3x_2-5x_3-x_4=-12 \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4=21 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4=8 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=2 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4=3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4=19 \\ 6x_1+2x_2+2x_3-x_4=5 \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-5 \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4=10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+4x_4=-4 \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=4 \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4=30 \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=-2 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=3 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4=17 \\ 2x_1-4x_2-2x_3+4x_4=6 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=8 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4=-6 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4=24 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4=-3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=-6 \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4=-10 \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4=-14 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=-6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4=5 \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4=22 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=-5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4=35 \\ 8x_1+4x_2+2x_3+3x_4=24 \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4=15 \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4=25 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3-4x_4=-19 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=-6 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4=16 \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4=20 \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4=9 \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4=17 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4=6 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=5 \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4=7 \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4=6 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4=-22 \\ x_1+7x_2+x_3-2x_4=12 \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4=18 \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4=16 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4=25 \\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4=34 \\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4=11 \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4=14 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3+10x_4=41 \\ 5x_1+x_2+2x_3+5x_4=21 \\ 4x_1+3x_2+7x_4+5x_3=35 \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4=17 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=0 \\ x_1-3x_2+x_3-x_4=-12 \\ 4x_1-7x_2+5x_3-x_4=-30 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4=-13 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-3x_4=6 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=13 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3-17x_4=-1 \end{cases}$

8. Bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0 \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning oxirgi tenglamasini birinchi o‘ringa yozamiz, so‘ngra uni zinapoya shakliga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & 8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matritsaning rangi r = r(A) = 2. x_1, x_2 o‘zgaruvchilarning bazis minori $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$; x_1, x_2 ni asosiy o‘zgaruvchilar sifatida tanlab olamiz va ularni asosiy bo‘lmagan x_3, x_4, x_5 lar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Fundamental yechimlar sistemasi e_1, e_2, e_3 ni hosil qilish uchun asosiy bo'lmagan o'zgaruvchi x_3, x_4, x_5 larni birlik matritsa E_3 satr elementlari bilan almashtiramiz. $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ da sistemaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \\ 8x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

bundan $x_1 = \frac{19}{8}$, $x_2 = \frac{7}{8}$ ya'ni bazis yechimni hosil qilamiz: $e_1 = \left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1, 0, 0\right)$

1) Shunga o'xshash yana ikkita bazis yechimni topamiz:

$$x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 0 \text{ da } e_2 = \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0, 1, 0\right);$$

$$x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1 \text{ da } e_3 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0, 0, 1\right).$$

Topilgan yechimlar (vektorlar) e_1, e_2, e_3 fundamental sistemani tashkil qiladi. e_1, e_2, e_3 yechimlarning komponentlarini mos ravishda 8, 8, 2 ga ko'paytirib butun komponentli yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

(19; 7; 8; 0; 0), (3; -25; 0; 8; 0), (-1; 1; 0; 0; 2).

Ko'p tarmoqli iqtisodiyotning Leontev modeli

Ko'p tarmoqli xo'jalikni boshqarish alohida tarmoqlar orasidagi balansni talab qiladi. Har bir tarmoq, bir tomondan ishlab chiqaruvchi, ikkinchi tomondan boshqa tarmoq ishlab chiqargan mahsulotning iste'molchisidir. Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste'mol qilish orqali bog'lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo'lib mashhur amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936-yil matematik model ko'rinishida ifodalagan. U 1929-1932-yillarda amerikadagi iqtisodiy depressiyani tahlil qilishga urungan bu model matritsalar algebrasiga asoslagan.

Balans munosabatlar

Quyidagi

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = \overline{1,n})$$

tenglama balans munosabat deyiladi. Bu yerda x_i – i tarmoq mahsulotining umumiy hajmi (yalpi ishlab chiqarish) x_{ij} – j – tarmoqning x_j – mahsulotni ishlab chiqarish mobaynida iste'mol qilingan i – tarmoqning mahsulot miqdori; y_i – i – tarmoqning ishlab chiqarishdan tashqariga realizatsiya (iste'mol) uchun mo'ljallangan mahsulot miqdori yoki chekli iste'mol mahsuloti. Sodda ko'rinishda balans munosabatning ko'rinishi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.4)$$

(3.4) tenglamalar balans tenglamalar deyiladi. Leontev quyidagi muhim faktni o'rnatgan: $a_{ij} = x_{ij}/x_j$; uzoq vaqt davomida juda sekin o'zgaradi, uni o'zgarmas son sifatida qarash mumkin. Bu tushunarli chunki ishlab chiqarish texnologiyasi uzoq vaqt bir xil darajada saqlanib qoladi, natijada j – tarmoqning o'z mahsuloti x_j miqdorni ishlab chiqarishi uchun i - tarmoqning iste'mol qilish hajmi o'zgarmas son.

(3.4) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \quad (3.5)$$

Matritsa ko'rinishida esa

$$X = A \cdot X + Y \quad (3.6)$$

yoki

$$(E - A) \cdot X = Y \quad (3.7)$$

bu yerda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

X - yalpi mahsulot, A - to'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsiyentining matritsasi, Y - chekli iste'mol. (3.6) munosabat tarmoqlararo modelning chiziqli tenglamasi deyiladi. Tarmoqlararo modelning asosiy vazifasi A matritsa ma'lum bo'lsa va berilgan Y vektorni ta'minlansa, yalpi mahsulot ishlab chiqarish vektori X ni topishdan iborat. X quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$X = (E - A)^{-1} Y = SY. \quad (3.8)$$

$S = (E - A)^{-1}$ matritsa to'la xarajatlar matritsasi deyiladi. Agar ixtiyoriy $Y \geq 0$ vektor uchun, (3.7) tenglamaning shunday $X \geq 0$ yechimi mavjud bo'lsa, $A \geq 0$ matritsa samarali deyiladi. Agar $a_{ij} \geq 0$ barcha $i, j = \overline{1,n}$, $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ va shunday j nomer mavjud bo'lib, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ bo'lsa, A matritsa samarador deyiladi, ya'ni $a_{ij} > 0$ bo'lsa, ixtiyoriy ustun (satr) elementlari yig'indisi birdan kichik bo'lsa, A matritsaning samaradorligi saqlanadi. Qiymatli balans holi qaralganda o'rganilayotgan j xo'jalik mahsulotini tannarxi 1 so'mdan oshmasligi uni rentabilligini bildiradi. Masalan quyidagi matritsada ifodalangan mahsulot samarador:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

9. Quyidagi matritsalar mahsuldorligini tekshiring.

a) $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 1,1 & 0,3 \end{pmatrix}$

Tarmoqning yalpi mahsulot miqdori va barcha tarmoqlarga bo'lgan pul xarajatlari orasidagi farq tarmoqning **sof mahsuloti** deyiladi.

10. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo'ljallangan xarajat koeffitsiyentlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot
		sanoat	qishloq xo'jaligi	
Ishlab chiqarish	sanoat	0,3	0,25	300
	qishloq xo'jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilar:

a) tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning sof mahsuloti;

b) agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20 %ga, sanoatniki 10 %ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsiyentini A matritsa va chekli mahsulot vektori Y ni yozib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,25\\ 0,15 & 0,12\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}$$

bundan $E-A=\begin{pmatrix}1-0,3 & -0,25\\ -0,15 & 1-0,12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & -0,25\\ -0,15 & 0,88\end{pmatrix}$ matritsani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matritsasi

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,5785}\begin{pmatrix}0,88 & 0,15\\ 0,25 & 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.52 & 0.26\\ 0,43 & 1.21\end{pmatrix}.$$

(3.8) formula bo'yicha yalpi mahsulot vektori X ni aniqlaymiz:

$$X=\begin{pmatrix}1,52 & 0,26\\ 0,43 & 1,21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}482\\ 250\end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0.3\cdot 482=144.6$.

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning sof mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		sanoat	qishloq xo'jaligi		
Ishlab chiqarish	sanoat	144,6	62,5	300	482
	qishloq xo'jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

(b) shartga ko'ra chekli mahsulot vektori:

$$Y=\begin{pmatrix}300\cdot 1{,}1\\100\cdot 1{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\120\end{pmatrix}$$

U holda (3.8) formulaga asosan mahsulot vektori quyidagicha bo'ladi:

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}532{,}8\\287{,}1\end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo'jaligida 287,1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

11. Oyoq kiyimlari ishlab chiqaradigan fabrika S_1, S_2, S_3 xomashyodan foydalanib 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Har bir juft oyoq kiyimiga xomashyodan sarflanish me'yori quyidagi jadvalda berilgan:

Xomashyo turi	Bir juft oyoq kiyimiga sarflanadigan xomashyo miqdori			Bir kunda sarflanadigan xomashyo
	etik	krasovka	tufli	
S_1	4	2	3	1700
S_2	1	3	1	1100
S_3	7	1	4	2100

Bir kunda ishlab chiqariladigan har bir turdagi oyoq kiyimning sonini hisoblang.

Yechish. x_1, x_2, x_3 - mos ravishda etik, krasovka, tuflidan bir kunda ishlab chiqariladin oyoq kiyimlar soni. U holda har bir turdagi xomashyoning sarflanishiga mos quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3=1700\\x_1+3x_2+x_3=1100\\7x_1+3x_2+4x_3=2100\end{cases}$$

tuzilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulidan foydalanib yechamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2 & 3\\1 & 3 & 1\\7 & 1 & 4\end{vmatrix}=-10\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1700 & 2 & 3\\1100 & 3 & 1\\2100 & 1 & 4\end{vmatrix}=-1500\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 1700 & 3\\1 & 1100 & 1\\7 & 2100 & 4\end{vmatrix}=-2500$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1700\\1 & 3 & 1100\\7 & 1 & 2100\end{vmatrix}=-2000\Rightarrow x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=150;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=250;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=200$$

12. Korxona 3 xil xomashyodan foydalanib 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning tavsifi quyidagi jadvalda berilgan:

Xomashyo turi	Har bir mahsulotga sarflanadigan xomashyo (og'irlik birligida)			Xomashyo zaxirasi (o'girlik birligida)
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Berilgan xomashyo zaxirasidan foydalanib har bir tur mahsulotning ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. Zaxirani to'la sarflash sharti bilan har bir tur xomashyo uchun balans munosabatlarni quyidagi 3 ta noma'lumli 3 ta tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozib olamiz.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix}$$

demak $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{21} & \frac{11}{21} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{21} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

13. Firma ikkita bo'limdan iborat. O'tgan yilgi umumiy foyda 12 mln. p/b ni tashkil qiladi. Bu yil birinchi bo'lim foydasini 70 %ga, ikkinchisinikini esa 40 % ga oshirish rejalashtirilgan. Natijada umumiy foyda 1,5 marta ortishi kerak.

Har bir bo'limning: a) o'tgan yildagi; b) bu yildagi foydasi qanday kattalikda?

Yechish. Faraz qilaylik, x va y – birinchi va ikkinchi bo'limlarning o'tgan yildagi foydasi. U holda masala shartini quyidagi sistema ko'rinishida yozish mumkin.

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 1{,}7x + 1{,}4y = 18. \end{cases}$$

Sistemani yechib, $x=4$, $y=8$ ni hosil qilamiz. Natijada a) birinchi bo'limning o'tgan yildagi foydasi – 4 mln. p/b, ikkinchi bo'limniki esa – 8 mln. p/b; b) bu yil birinchi bo'limning foydasi $1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ mln. p/b, ikkinchisiniki esa $1{,}4 \cdot 8 = 11{,}2$ mln. p/b ni tashkil qiladi.

14. Ofisni jihozlash uchun firma 29 predmet: narxi 20 ming p/b bo'lgan bir nechta kompyuter, 8,5 ming p/b dan ofis stollari, narxi 1,5 p/b bo'lgan stullar sotib olishga 236 ming p/b ajratdi. Keyinroq ma'lum bo'lishicha boshqa joyda kompyuterlarni 19,5 ming p/b dan, stollarni 8 p/b dan, stullarni esa oldingi narxda olish mumkin. Har bir jihozdan arzon narxlarda qanday miqdorda sotib olinganligini aniqlang.

Yechish. Faraz qilaylik x_1, x_2, x_3 mos ravishda kompyuter, stol va stullar soni. Quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29 \\ 20x_1 + 8{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 236 \\ 19{,}5x_1 + 8(x_2 + 1) + 1{,}5x_3 = 236 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29 \\ 20x_1 + 8{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 236 \\ 19{,}5x_1 + 8x_2 + 1{,}5x_3 = 228 \end{cases}$$

Hosil qilingan tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechamiz:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&29\\20&8{,}5&1{,}5&236\\19{,}5&8&1{,}5&228\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&29\\20&8{,}5&1{,}5&236\\-0{,}5&-0{,}5&0&-8\end{pmatrix}(2)=\begin{pmatrix}1&1&1&29\\20&8{,}5&1{,}5&236\\-1&-1&0&-16\end{pmatrix}(20)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&29\\0&-11{,}5&-18{,}5&-344\\0&0&1&13\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+\quad x_2+\quad x_3=29\\-11{,}5x_2-18{,}5x_3=-344\\1\cdot x_3=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=13\\x_2=9\\x_1=7\end{cases}$$

Demak, firma 7 ta kompyuter, 10 ta stol va 13 ta stul sotib olgan.

15. Tikuv fabrikasi 3 kun davomida kostyum, plash va kurtkalar ishlab chiqardi. 3 kun mobaynida ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori va ishlab chiqarish uchun sarflanadigan pul xarajatlari quyidagi jadvalda berilgan:

Kunlar	Mahsulot ishlab chiqarish miqdori			Xarajatlar (ming pul birligida)
	kostyumlar	plashlar	kurtkalar	
Birinchi	50	10	30	176
Ikkinchi	35	25	20	168
Uchinchi	40	20	30	184

Har bir mahsulot tannarxini toping.

16. Korxona uch xil xomashyodan foydalanib uch xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xomashyo sarfi va xomashyo zaxirasj quyidagi jadvalda berilgan. Har bir mahsulotdan ishlab chiqarish miqdorini aniqlang.

a)

Xomashyo turi	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarfi, mahsulot birligining og'irligi			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

b)

Xomashyo turi	Har bir mahsulotga sarflanadigan xomashyo (og'irlik birligida)			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	6	5	4	2200
2	10	8	3	3350
3	7	12	5	3390

c)

Xomashyo turi	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarfi, mahsulot birligining og'irligi			Xomashyo zaxirasi (o'girlik birligida)
	1	2	3	
1	8	4	10	3000
2	6	7	4	2700
3	13	2	3	2650

d)

Xomashyo turi	Har bir mahsulotga sarflanadigan xomashyo (og'irlik birligida)			Xomashyo zaxirasi (o'girlik birligida)
	1	2	3	
1	4	4	7	2900
2	5	3	5	2260
3	7	2	9	3500

Mavzu yuzasidan savollar

1. Kramer formulasi qanday ko'rinishga ega va qachon qo'llaniladi?
2. Chiziqli algebraik tenglamalr sistemasi qanday shart bajarilganda yagona yechimga ega bo'ladi?
3. Uchta noma'lumli ikkita tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
4. Qanday shart bajarilganda n noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi notrivial yechimga ega?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsalar usuli bilan qanday yechiladi?
6. Kroneker – Kapelli teoremasi qanday ifodalanadi?

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematica. - T.: Fan va texnologiya, 2007.
2. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. - М., 2004.
3. Красс М.С., Чупринов Б.П. Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: Дело, 2000.
4. Соатов Ё.У. Олий математика. -Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994, 3-жилд, 1996.
5. Шипачев В.С. Курс высшей математики. -М.: Проспект, 2005.
6. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.
7. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.
8. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. -Н., 2008.
9. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. -М., 2008.
10. Ермаков В.И. Общий курс высшей математика для экономистов. –Н., 2010.

4-bob. CHIZIQLI FAZO ELEMENTLARI

4.1. Tekislik va fazoda vektorlar

1. *Ta'rif.* Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan yo'naltirilgan kesma *vektor* deb ataladi va $\overline{AB}$ yoki $\bar{a}$ kabi belgilanadi.

$\bar{a}$ vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\bar{a}|$ kabi belgilanadi. Oxiri boshi bilan ustma – ust tushadigan vektor nol vektor deb ataladi va 0 bilan belgilanadi. Agar $|\bar{a}| = 1$ bo'lsa, u holda a birlik vektor deyiladi.

Bir to'g'ri chizqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kolleniar* vektorlar deyiladi.

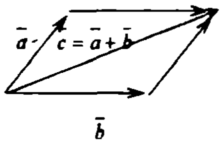
Agar ikki vektor o'zaro kolleniar, bir xil yo'nalgan va modullari teng bo'lsa, bu vektorlar teng vektorlar deyiladi.

Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar* vektorlar deyiladi.

2. $\bar{a}$ vektorning λ soniga ko'paytmasi deb, $\bar{a}$ ga kolleniar, ($\lambda > 0$ da u bilan yo'nalishdosh,

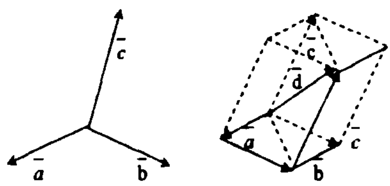
$\lambda < 0$ da esa yo'nalishi qarama – qarshi) hamda moduli $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ga teng bo'lgan $\lambda\bar{a}$ (yoki $\bar{a}\lambda$) vektorga aytiladi.

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yig'indisi deb uchburchak yoki parallelogramm qoidasi bo'yicha aniqlanadigan $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ vektorga aytiladi. (4.1–rasm)



(4.1–rasm)

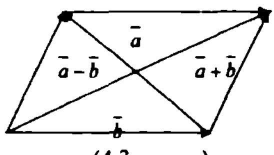
Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotmagan a, b, c, vektorlarning yig'indisi a, b, c, vektorlarga qurilgan parallelipiped dioganalini beradi. $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$



a) *b)*

(4.2 – rasm)

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi deb $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$ vektorga aytiladi (4.3–rasm)



(4.3 – rasm)

3. $\bar{a}$ vektorning (x, y, z) koordinatalari deb, boshlang'ich nuqtasi koordinata boshi bilan ustma - ust tushganda, oxirgi nuqtasining koordinatalariga aytiladi.

$$\bar{a}=(x, y, z) \text{ vektorni } \bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}, \qquad (4.1)$$

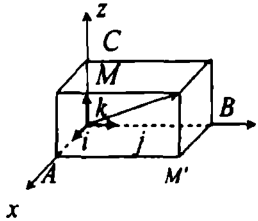
ko'rinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - birlik vektorlar (ortlar), mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarining musbat yo'nalishi bilan mos tushadi:

$$|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1.$$

4. $|\bar{a}|$ vektorning uzunligi

$$|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4.3)$$

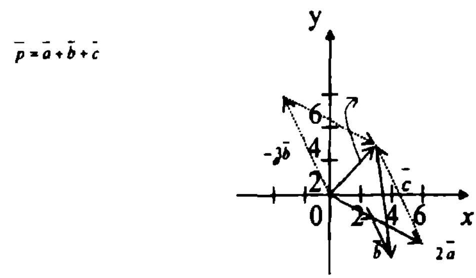
formula bilan aniqlanadi (4.4 - rasmga qarang).



(4.4 – rasm)

Misol. Uchta vektor berilgan: $\bar{a}=(1;-1)$, $\bar{b}=(1;-2)$, $\bar{c}=(1;7)$. $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ ni yasang, uning uzunligini toping va $\bar{p}$ vektorni $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bo'yicha yoying.

Yechish. $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ vektorni yasash ko'pburchak qoidasiga asosan rasmda ko'rsatilgan. U holda vektorni (4.3) formulaga asosan $\bar{p}=\sqrt{3^2+4^2}=5\ \bar{p}$ vektorni $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bo'yicha yoyish, uni quyidagi ko'rinishda ifodalashdir: $\bar{p}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$, bu yerda α va β - haqiqiy sonlar uni aniqlash uchun $(3;4)=\alpha(3;-1)+\beta(1;-2)$ yoki quyidagi $\begin{cases} 3=3\alpha+\beta \\ 4=-\alpha-2\beta \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yozib olamiz. Olingan sistemani yechib, $\alpha=2$, $\beta=-3$; ya'ni $\bar{p}=2\bar{a}-3\bar{b}$ ni olamiz. Demak, $\bar{p}$ vektorning $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bo'yicha yoyilmasi $2\bar{a}$ va $-3\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm dioganalidan iborat (4.5-rasmda ko'rsatilgan).



(4.5 – rasm)

5. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sonlariga aytiladi, bunda mos ravishda $\alpha, \beta, \gamma - \bar{a}$ vektorning Ox, Oy, Oz o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{4.4}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \text{ bunda } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{4.5}$$

6. Ikkita $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ yig'indisining koordinatalari va $\bar{a}$ vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \tag{4.6}$$

$$\lambda\bar{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \tag{4.7}$$

7. $\bar{a}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi deb $pr_l\,\bar{a}$

$$pr_l\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi \tag{4.8}$$

songa aytiladi, bu yerda φ $\bar{a}$ vektor va l o'q orasidagi burchak.

8. Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ($\bar{a}$, $\bar{b}$) deb

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \cos\varphi \tag{4.9}$$

songa aytiladi. $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{4.10}$$

formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar kvadrati

$$(\bar{a}, \bar{a}) = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.11}$$

yoki

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} \tag{4.12}$$

9. $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{4.13}$$

formula orqali aniqlanadi.

10. Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, ya'ni $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

11. Ikkita $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kolleniarlik (parallellik) sharti

$$\bar{b} = k\bar{a}, \text{ yoki } \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{k}; \tag{4.14}$$

ortogonallik (perpendikulyarlik) sharti

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \text{ yoki } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \tag{4.15}$$

Misollar.

1. Berilgan $\bar{a} = (2; -1; -2)$ va $\bar{b} = (8; -4; 0)$ vektorlar bo'yicha quyidagilarni toping:

a) $\bar{c} = 2a$ va $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$;

b) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini;

c) $\bar{d}$ vektorning skalyar kvadratini;

d) $(\bar{c}, \bar{d})$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini

e) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlar orasidagi burchakni

Yechish. a) Ta'rifga asosan $\bar{c} = 2\bar{a} = (4; -2; -4)$; $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a} = (6; -3; 2)$.

b) (4.3) formulaga asosan, $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini
$|\bar{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$; $|\bar{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7$.

c) Vektorning skalyar kvadrati (4.11) formulaga asosan $(\bar{d}, \bar{d}) = \bar{d}^2 = |\bar{d}|^2 = 7^2 = 49$.

d) Vektorlarning skalyar ko'paytmasi (4.10) formulaga asosan, $(\bar{c}, \bar{d}) = 4 \cdot 6 + (-2)(-3) + (-4) \cdot 2 = 22$

e) Vektorlar orasidagi burchak (4.13) formulaga asosan $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{c}, \bar{d})}{|\bar{c}||\bar{d}|} = \dfrac{22}{6 \cdot 7} \approx 0.52$

bundan $\varphi = \arccos 0.52 \approx 58^\circ$.

2. Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinatsiyasi $\bar{c}$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o'zaro ortogonalligini aniqlang:

$$\bar{a} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \bar{b} = (-1, 2, -2), \quad \bar{c} = 3\sqrt{2}\,\bar{a} - \bar{b}.$$

Yechish. $|\bar{a}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 \qquad |\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

$$\bar{c} = 3\sqrt{2}\,\bar{a} - \bar{b} = 3\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{ya'ni} \quad \bar{c} = (1, 1, 5). \; |\bar{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2} = 3\sqrt{3}$$

$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \cdot (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-2) = 0$ bo'lgani uchun berilgan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar ortogonal, ya'ni ular orasidagi burchak kattaligi: $(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$

3. $\bar{a} = (2; 1; -1)$ vektorga kolleniar va $(\bar{a}, \bar{b}) = 3$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{b}$ vektorni toping.

Yechish. Faraz qilaylik, $b = (x_b, y_b, z_b)$ bo'lsin, u holda $(\bar{a}, \bar{b}) = 3 = 2x_b + y_b - z_b$. Kolleniarlik sharti esa $\frac{x_b}{2} = \frac{y_b}{1} = \frac{z_b}{-1} = t$ ni beradi. Bundan $x_b = 2t$, $y_b = t$, $z_b = -t$; ularni birinchi tenglikka qo'yib turib t=0,5 ni hosil qilamiz va $x_b = 1$, $y_b = 0.5$, $z_b = -0.5$. Demak, $b = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

4. $a = (5; 2; 5)$ vektorning $b = (2; -1; 2)$ vektor o'qidagi proyeksiyasini toping.

Yechish. $pr_b a=\frac{(a,b)}{|b|}=\frac{2\cdot 5+(-1)\cdot 2+5\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{18}{3}=6.$

3. Agar $\bar a+2\bar b$ va $5\bar a-4\bar b$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa, $\bar a$ va $\bar b$ birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $(\bar a+2\bar b)(5\bar a-4\bar b) = 5\bar a^2+6\overline{ab}-8\bar b^2=6\overline{ab}-3=0, \Rightarrow 6\overline{ab}=3\Rightarrow \overline{ab}=\frac{1}{2}$. U holda

$$\cos\varphi=\frac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

4. Quyidagi $b=(8;-3;-10;10)$ vektorni

$$a_1=(1;0;4;3);\ a_2=(-2;3;1;4);\ a_3=(1;1;-4;5);$$

$a_4=(1;-2;0;3)$ vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida yoyish mumkin yoki yo‘qligini tekshiring.

Yechish. $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=b$ vektor tenglamani koordinatalarda chiziqli tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozib olamiz va uni Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3\\ 4 & 1 & -4 & 0 & -10\\ 3 & 4 & 5 & 3 & 10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 3 & \boxed{1} & -2 & -3\\ 0 & 9 & -8 & -4 & -41\\ 0 & 10 & 2 & 0 & -14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 & 11\\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 33 & 0 & -20 & -66\\ 0 & 4 & 0 & 4 & -8\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 & 11\\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 33 & 0 & -20 & -66\\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-53} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\ \begin{cases} x_1=1\\ x_2=-2\\ x_3=3\\ x_4=0\end{cases}$$ – yagona yechimi.

Demak, b vektor berilgan a_1, a_2, a_3, a_4 vektorlar sistemasi orqali yagona usulda yoyilishi mumkin: $b=a_1-2a_2+3a_3+0\cdot a_4$.

7. $a=(5;\ 1;\ -2)$ va $b=(1;\ 5;\ -2)$ vektorlar berilgan. $3\bar a-\bar b$ vektorning:

a) $3\bar a-\bar b$ vektorning koordinata o‘qlarida hosil qilgan proyeksiyalarini;

b) uzunligini;

c) yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

8. Quyidagi $\bar a$ va $\bar b$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlar modullarini, ularning chiziqli kombinatsiyasi $\bar c$ vektor koordinatalarini va uzunligini, $\bar a$ va $\bar b$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini, ular orasidagi burchak kattaligini, o‘zaro ortogonalligini aniqlang:

a) $\bar a=(0,0,-1,1)$, $\bar b=(1,1,1,1)$ $\bar c=2\bar a+\bar b$.

b) $\bar a=(1,2,3)$, $\bar b=(-5,3,2)$, $\bar c=-4\bar a+3\bar b$.

9. $\bar{a}=2\bar{m}+4\bar{n}$ va $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$ vektorlar berilgan, bu yerda $\bar{m}$ *va* $\bar{n}$ birlik vektorlar, ular orasidagi burchak 120°. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

10. Tekislikda uchta $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar berilgan. Ma'lumki, $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=3$

$(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}})=60^\circ$,

$(\widehat{\bar{b}\,\bar{c}})=60^\circ$, $\bar{d}=-\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$ vektor uzunligini toping.

11. α va β ning qanday qiymatlarida $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ va $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ vektorlar: *a*) kolleniar, *b*) ortogonal?

12. $\overline{OA}$ vektor OX, OY va OZ o'qlari bilan mos ravishda $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ burchaklar hosil qiladi. Agar $B(2;\ 2;\ -2\sqrt{2})$ bo'lsa, $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlarning perpendikulyarligini isbotlang.

13. Uchta $\bar{a}(2;-2)$, $\bar{b}(2;-1)$, $\bar{c}(2;4)$ vektorlar berilgan. $\bar{p}=2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ vektorning koordinatalarini toping hamda *a* va *b* vektorlar bo'yicha yoying.

14. To'rtta vektor berilgan:

$\bar{a}=(2;\ 1;\ 0)$, $\bar{b}=(1;\ -1;\ 2)$, $\bar{c}=(2;\ 2;\ -1)$, $\bar{d}=(3,\ 7,\ -7)$. $\bar{a}$ vektorni $\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ vektorlar bo'yicha yoying.

15. $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-6\bar{k}$ vektorning uzunligini va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

16. *m* ning qanday qiymatlarida $\bar{a}=m\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$ va $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-m\bar{k}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

17. $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ vektorning $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$ vektor yo'nalishidagi proyeksiyasini toping.

18. $\bar{a}=3\bar{i}-6\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}$ va $\bar{c}=3\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$ vektorlar berilgan. $\bar{a}+\bar{c}$ vektorni $\bar{b}+\bar{c}$ vektorga proyeksiyasini toping.

4.2. Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmalari

$\bar{a}$ vektorning $\bar{b}$ vektorga *vektor ko'paytmasi* deb, $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\bar{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyar;
2. $\bar{c}$ vektor uchidan qaralganda $\bar{a}$ vektordan $\bar{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini o'ng uchlik deyiladi);
3. $\bar{c}$ vektorning moduli $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni $|\bar{c}|=S=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$ (φ - $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak).

Vektor ko'paytmasining asosiy xossalari:

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$;
2. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$;
3. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$;
4. Agar $\bar{a}=0$, yoki $\bar{b}=0$, yoki $\bar{a}\parallel\bar{b}$ bo'lsa, u holda $\bar{a}\times\bar{b}=0$. Xususan $\bar{a}\times\bar{a}=0$.

Koordinata o'qlari ortlarining vektor ko'paytmasi:

$\bar{i}\times\bar{i}=0,\ \bar{j}\times\bar{j}=0,\ \bar{k}\times\bar{k}=0;$ $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\ \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}.$ agar $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k},$ $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ bo'lsa, u holda

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo'lsa, u holda $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

19. $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}$ va $\bar{b}=3\bar{j}-4\bar{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzasini hisoblang.

Yechish. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasi shu vektorlarning vektor ko'paytmasining moduliga teng: $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$. Vektor ko'paytmani topamiz:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=-12\bar{i}+4\bar{j}-9\bar{k}.$$

Demak, $S=\sqrt{(-12)^2+4^2+(-9)^2}=\sqrt{144+16+81}=\sqrt{241}$ kv birlik.

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlarning *aralash ko'paytmasi* $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ deb, $(\bar{a}\times\bar{b})$ vektor ko'paytmaning $\bar{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi. Aralash ko'paytmaning xossalari:

4. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.

Bu xossadan aralash ko'paytmani $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ ko'rinishida belgilash mumkin ekanligi kelib chiqadi.

5. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}$, ya'ni ko'paytiriluvchi vektorlar o'rinlari doiraviy almashtirilganda aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi;

6. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{c}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, ya'ni qo'shni ikkita vektorlarning o'rinlari alamshtirilganda aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi;

7. agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$ bo'ladi.

Agar

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$$
$$\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+a_z\bar{k}$$
$$\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$$

bo'lsa, u holda

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Agar $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 .$$

Aralash ko'paytma ko'paytiriluvchi vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmiga ishora aniqligiga teng, ya'ni $V = \pm(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

20. Uchlari $A(1, 2, 0)$; $B(-1, 2, 1)$; $C(0; -3; 2)$ va $D(1, 0, 1)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

Yechish. Piramidaning A uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz:

$\overline{AB} = \{-2; 0; 1\}$, $\overline{AC} = \{-1; -5; 2\}$, $\overline{AD} = \{0; -2; 1\}$. Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'lganligi sababli

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ kub birlik.}$$

21. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = 45^{\circ}$li burchak tashkil qilib, $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 5$ bo'lsa, $\bar{p} = \bar{a} - 2\bar{b}$ va $\bar{q} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuzini hisoblang.

22. Uchlari $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$ nuqtalardan iborat uchburchak yuzini hisoblang.

23. Piramidaning uchlari berilgan: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Uchburchakning D uchidan tushirilgan balandligi uzunligini toping.

24. Uchburchakning uchlari berilgan: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Uning B uchidan AC tomoniga tushirilgan balandligining uzunligini hisoblang.

25. Uchlari $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$ nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini hisoblang.

4.3. Chiziqli fazo va uning o'lchovi

Barcha kompleks sonlarning qism to'plami P quyidagi xossalarni bajarsa, sonli maydon deyiladi:

- Agar $\alpha, \beta \in P$, u holda $\alpha + \beta \in P$ va $\alpha \cdot \beta \in P$;
- Agar $\alpha \in P$, u holda $(-\alpha) \in P$;
- Agar $\alpha \in P$ va $\alpha \neq 0$, u holda $\frac{1}{\alpha} \in P$.

Barcha ratsional, haqiqiy, kompleks sonlar to'plami sonli maydon bo'la oladi. Elementlari $x, y, z, \ldots$ bo'lgan V to'plam ustida vektor fazo aniqlangan deyiladi, agar $x + y \in V$, va $x \in V$, $\forall \alpha \in P$ uchun $\alpha \cdot x \in V$ bo'lsa va quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lsa:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. shunday $\exists o \in V$ element mavjud bo'lsaki, $\forall x \in V$ uchun $x+0 = x$ bo'lsa;
4. $\forall x \in V$ uchun $\exists -x \in V$, $x + (-x) = 0$;
5. $1 \cdot x = x$, $1 \in P$, $x \in V$;

6. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$; $\alpha,\beta\in P$; $x\in V$;

7. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $\alpha\in P$; $x,y\in V$;

8. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

Vektor fazoning elementlari vektorlar deb ataladi.

Haqiqiy (kompleks) koordinatali barcha n o'lchovli vektorlar to'plami R^n (C^n) orqali belgilanadi. Quyidagi tartiblangan $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ n - likka, n- o'lchovli vektor deyiladi.

To'plamdagi n – o'lchovli vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish:

$(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,...\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_{12}...\alpha_{1n}+\beta_n)$,

$\lambda(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...\lambda\alpha_n)$

amallari uni vektor yoki chiziqli fazoga aylantiradi.

26. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri sonli to'plam bo'lishini aniqlang:

a) barcha butun sonlar to'plami;

b) $a+b\sqrt{3}$ ko'rinishdagi barcha sonlar to'plami, bu yerda a va b – ratsional sonlar;

c) $m+n\sqrt{3}$ ko'rinishdagi barcha sonlar to'plami, bu yerda m va n – butun sonlar;

d) $a+bi$ ko'rinishdagi kompleks sonlar, bu yerda a va b – ratsional sonlar.

27. Quyidagi to'plamlarning vektor fazo bo'lishini aniqlang (to'plam elementlarini qo'shish va ularni songa ko'paytirish odatdagiday aniqlangan).

a) elementlari haqiqiy yoki kompleks sonlardan iborat barcha kvadrat matritsalar;

b) darajasi n bo'lgan barcha ko'phadlar;

c) $f(2)=0$ shartni qanoatlantiradigan barcha ko'phadlar to'plami;

d) $f(2)=1$ shartni qanoatlantiradigan barcha ko'phadlar to'plami;

e) $[a;b]$ kesmada uzluksiz barcha funksiyalar;

f) barcha haqiqiy sonlar;

g) barcha kompleks sonlar.

4.4. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi. n- o'lchovli chiziqli fazo bazisi va koordinatalari

x_1, x_2, ..., x_n vektorlarning chiziqli kombinasiyasi deb $\bar{x}=\lambda_1\bar{x_1}+\lambda_2\bar{x_2}+...+\lambda_n\bar{x_n}$ formula bilan aniqlanuvchi $\bar{x}$ vektorga aytiladi, bunda λ_1, λ_2,... λ_n- tayin sonlar.

Agar $\bar{x_1},\bar{x_2},...\bar{x_n}$ vektorlar sistemasi uchun kamida bittasi noldan farqli shunday λ_1, λ_2,..., λ_n sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1\bar{x_1}+...+\lambda_n\bar{x_n}=0 \qquad (4.16)$$

shart bajarilsa, bu sistema chiziqli bog'liqli deyiladi. Agar yuqoridagi tenglik faqat $\lambda_1=...=\lambda_n=0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, x_1, x_2, ..., x_n vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

Ikkita kolleniar vektor har doim chiziqli bo'gliqlidir. Uchta komplanar vektor har doim chiziqli bog'liqli.

n ta chiziqli bog'liqmas vektorlar sistemasi $\bar{e_1},\bar{e_2},...\bar{e_n}$ berilgan bo'lib, ixtiyoriy $\bar{x}$ vektorni ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni

$$\bar{x}=a_1\bar{e_1}+...+a_n\bar{e_n} \qquad (4.17)$$

shaklida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda berilgan sistema bazis deyiladi.

(4.17) tenglik $\bar{x}$ vektorning $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ... \bar{e}_n$ bazis bo'yicha yoyilmasi deyiladi. Fazoda chiziqli bog'liq bo'lmagan har qanday uchta $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektor bazis tashkil qiladi, shu sababli fazodagi har qanday $\bar{x}$ vektor shu bazis bo'yicha yoyilishi mumkin. n o'lchovli V fazoda $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ... \bar{e}_n$ bazisni ajratib olamiz $\forall x \in V$ uchun $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$ yagona yoyilma mavjud. $a_1, a_2, ... a_n$ sonlar x vektorning koordinatalari bo'lib, bunday yoziladi:

$$x = \{ a_1, a_2, ... a_n \}.$$

Agar bazisning vektorlari o'zaro perpendikulyar va birlik uzunlikka ega bo'lsa, bu bazis ortonormallangan bazis deyiladi va u ortlar deb ataluvchi $i, j, k, ... n$ vektorlar orqali belgilanadi.

28. $\bar{a}_1(1.3.5.7)$, $\bar{a}_2(3.5.7.1)$, $\bar{a}_3(5,7,1,3)$, $\bar{a}_4(7.1.3.5)$ vektorlar chiziqli bog'liqmi?

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ vektorlar chiziqli erkli.

29. Barcha n – o'lchovli vektorlardan iborat R^n fazoning o'lchamini aniqlang va bazisini toping.

Yechish. Dioganal sistemalarning vektorlari $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)$ chiziqli bog'liqsiz va har bir n – o'lchovli vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ sistema bo'yicha yoyiladi. Demak, $e_1, e_2, ..., e_n$ - R^n bazis va $\dim R^n = n$.

30. Darajasi n dan oshmaydigan barcha $P_n(t)$ ko'phadlar fazosining o'lchamini aniqlang va bazisni toping.

Yechish. $1, t, t^2, ..., t^n$ ko'phadlar chiziqli bog'liqsiz sistemasi tashkil qiladi, va darajasi n dan yuqori bo'lmagan har bir ko'phad bu sistema bo'yicha yoyiladi. Demak $1, t, t^2, ..., t^n$ - $P_n(t)$ fazoning bazisi va $\dim P_n(t) = n + 1$.

4.5. Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma tushunchasi

n o'lchovli V fazoda $x = (a_1, a_2 ... a_n)$ va $y = (\beta_1, \beta_2 ... \beta_n)$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ularning skalyar ko'paytmasi $x \cdot y = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... a_n\beta_n$ formula bilan aniqlanadi va quyidagi xossalarga ega:

1) $xy = yx$

2) $(x + y)z = xz + yz$;

3) $(\alpha x)y = \alpha(xy)$;

4) $xx > 0$, agar $x \neq 0$;

Evklid fazosi. Haqiqiy sonlar to'plami ustida aniqlangan vektor fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa u Evklid fazosi deyiladi. Vektorning uzunligi $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... a_n^2}$. Uzunligi birga teng vektor birlik vektor deyiladi.

$e_1, e_2, ... e_n$ bazis orto deyiladi, agar $i \neq j$ da $e_i \cdot e_j = 0$ bo'lsa, Evklid fazosining vektorlari uchun Koshi-Bukyakovskiy va uchburchak tengsizligi bajariladi:

$$|xy| \le |x||y|$$
$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

4.6. Chiziqli operator

Chiziqli operator ustida amallar. Chiziqli operatorning xos sonlari va xos vektorlari.

Agar fazodagi har bir x vektorga o'sha fazoning aniq $y = Ax$ vektori mos qo'yilgan bo'lib, u ushbu $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$ chiziqlilik shartiga bo'ysunsa u holda A chiziqli operator deyiladi, bu yerda x_1 va x_2 fazoning ixtiyoriy vektorlari λ_1 va λ_2 ixtiyoriy sonlar. Agar shunday noldan farqli $x \in R^n$ vektor mavjud bo'lsaki,

$$Ax = \lambda x \qquad (4.18)$$

tenglik bajarilsa λ son A chiziqli operatorning xos soni, x esa xos vektor deyiladi. Boshqacha aytganda matritsani uning xos vektoriga ko'paytmasi, bu vektorni λ baravar, cho'zish $(\lambda > 1)$ yoki siqish $(\lambda < 1)$ dan iborat. $\lambda = 1$ da vektor o'zgarmaydi.

(4.18) tenglikning boshqacha ko'rinishi

$$(A - \lambda E)x = 0$$

E – birlik matritsa, 0 – vektor, A matritsaning elementlari a_{ij} – bo'lsa, A chiziqli operatorning $e_1, \ldots, e_n$ bazisdagi matritsasi yana A harfi bilan belgilanadi.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

xarakteristik matritsa deyiladi. $A - \lambda E = 0$ tenglama xarakteristik tenglama deyiladi.

31. Matritsaning xos son va xos vektorini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. Matritsaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

bundan $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Xos vektorni topish uchun:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ $\lambda_1 = 2$ ga mos keluvchi xos vektor

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ sistemaning yechimi bo'ladi, bu bitta tenglama, $x_2 = b$ deb olsak, $x_1 =$ $(-2b, b) = b(-2, 1)$ bo'ladi.

$\lambda_2 = 5$ xos songa mos keluvchi xos vektor

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

erkli o'zgaruvchini $x_2 = c$ deb olsak. $x_2 = (c, c) = c(1, 1)$. b va c ixtiyoriy sonlar bo'lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil uzunlikdagi xos vektorlar mos kelishi mumkin. Masalan, bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar

$x_1=(-2, 1)$, $x_2=(1, 1)$.

4.7. Kvadratik formalar

Kvadratik forma deb $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumlarning har bir qo'shiluvchisi bir noma'lumning kvadrati, yoki ikkita turli noma'lumning ko'paytmasidan iborat yig'indiga aytiladi. Kvadratik formani $L = X'AX$ yoki $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ ko'rinishida yozish mumkin. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi deb, noma'lumlarning ko'paytmasini o'z ichiga olmagan berilgan kvadratik formaga ekvivalent formaga aytiladi.

$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ kvadrtik forma kanonik ko'rinishga ega deyiladi, agar barcha $i \neq j$ da $a_{ij} = 0$ bo'lsa, ya'ni: $L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$.

Har qanday kvadratik formani noma'lumlarni chiziqli almashtirish $X = SY$ (bu yerda $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - o'zgaruvchilarning ustun matritsasi) yordamida kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

Agar barcha $x \neq 0$ da $L(x) > 0$($L(x) < 0$) bo'lsa, u holda $L(x)$ musbat (manfiy) aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

32. Kavdratik formaning matritsasini yozing.

$F = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Yechish. $x_ix_k = x_kx_i$ $(i \neq k)$ ko'paytmalarning koeffitsiyentlarini $a_{ik} + a_{ki}$ bilan belgilaymiz, bunda $a_{ik} = a_{ki}$. $(a_{ik} + a_{ki})x_ix_k$ hadni $a_{ik}x_ix_k + a_{ki}x_kx_i$ ko'rinishda yozib olamiz. Bunda F kvadratik formani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$F = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_1 - 5x_2^2 + 3x_2x_3 - x_3x_1 + 3x_3x_2 + 8x_3^2$. Endi F kvadratik formaning A matritsasi: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Ixtiyoriy kvadratik formaning o'zgaruvchilarini nomaxsus chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

Buni misolda namoyish etamiz. $L=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$ kvadratik formani olamiz. x_1^2 oldidagi koeffitsiyent noldan farqli bo'lgani uchun x_1 bo'yicha to'liq kvadratga keltiramiz:

$L=2(x_1^2+2x_1x_2)-3x_2^2=2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2^2)-3x_2^2=2(x_1+x_2)^2-5x_2^2$

Agar $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2$ desak, $L=2y_1^2-5y_2^3$ kanonik ko'rinish hosil bo'ladi.

33. Quyidagi matritsaga mos kvadratik formani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Yechish. $L = X'AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Quyidagi kvadratik formalarning matritsasini yozing.

34. $F = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

35. $F = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$

36. $F = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$

37. $F = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

Quyida berilgan kavdratik formalarni kanonik ko'rinishga keltiring.

38. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

39. $F = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

40. $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

41. $F = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$

42. Uchlari A, B, C nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

№	A	B	C
1	(1, -1, 1)	(-1, 1, 2)	(2, -2, 4)
2	(4, 5, 2)	(-5, 0, -2)	(1, -4, 0)
3	(8, 2, -6)	(0, -5, 1)	(4, 1, -3)
4	(5, 4, 3)	(-2, 2, 1)	(0, 4, 4)
5	(-10, 8, -4)	(-7, 7, -3)	(-9, 5, -7)
6	(3, 6, -3)	(2, 5, -2)	(1, 4, -3)
7	(-5, 3, 1)	(-2, 0, 1)	(-1, 4, -1)
8	(4, -2, 2)	(3, 2, 2)	(4, 2, -4)
9	(2, -1, 2)	(0, -1, 1)	(-3, 0, 1)
10	(6, 2, 5)	(5, 2, 4)	(7, 3, 5)
11	(-1, 2, 2)	(-3, 6, 2)	(2, -3, 1)
12	(5, 4, 10)	(4, 5, 9)	(1, 6, 11)
13	(8, 4, -4)	(7, 2, -3)	(9, 4, 1)
14	(2, 5, -1)	(3, 6, -1)	(-1, 4, -3)
15	(1, 1, -1)	(2, -3, -4)	(2, 1, -2)

43. Piramidaning uchlari A, B, C, D nuqtalarda yotadi. Piramidaning hajmini toping.

№	A	B	C	D
1	(2, -1, 0)	(1, -2, -2)	(-1, 2, 1)	(1, 0, 2)
2	(-3, -1, 0)	(-1, -1, 6)	(2, 2, 1)	(0, 2, 1)
3	(6, 1, -2)	(0, -4, 5)	(-3, 2, 1)	(1, 0, 1)
4	(1, -3, 7)	(-1, 0, 3)	(2, 3, 0)	(0, 3, 1)
5	(5, 3, -4)	(1, 0, 2)	(2, 3, 0)	(-1, 3, 10)
6	(0, 2, 5)	(-2, -1, 2)	(2, 5, 1)	(7, 6, 10)
7	(1, 2, 1)	(-6, 0, 5)	(-3, 0, 0)	(-1, 2, 4)
8	(-8, 5, -2)	(2, 1, -4)	(-2, -1, 7)	(-3, 6, 4)
9	(2, 4, 8)	(3, 6, 9)	(-1, 0, 0)	(1, 0, 0)
10	(4, 2, -1)	(-2, -1, 3)	(10, 0, -1)	(1, 1, 1)
11	(1, 2, 3)	(2, 3, 4)	(3, 4, 5)	(4, 5, 6)
12	(-1, -3, -2)	(-4, -3, 2)	(2, 2, 0)	(-1, 0, 7)
13	(0, -1, -2)	(5, 3, 4)	(-1, 1, 1)	(3, 0, 3)
14	(2, 2, 2)	(-3, -3, -3)	(1, 2, 0)	(-2, -3, 1)
15	(1, 0, 2)	(5, 3, -2)	(2, 1, 4)	(-2, -3, 8)

4.8. Iqtisodda chiziqli modellar. Savdoning chiziqli modeli

n ta mamlakatning budjeti $x_1, x_2, \ldots x_n$ tovarlar sotib olishga sarflanadi. Biz ayriboshlashning chiziqli modeli - xalqaro savdo modelini qaraymiz.

j – mamlakatning i – mamlakat tovarini sotib olishga sarflaydigan x_j – budjetning bir qismi a_{ij} koeffitsiyentlar matritsasini kiritamiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

U holda bor budjet mamlakatning ichidan va tashqarisidan tovar sotib olishga sarflansa,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad (4.20)$$

o'rinli bo'ladi. (4.19) matritsa (4.20) shart bilan savdoning strukturaviy matritsasi deyiladi. i – mamlakatning ichki va tashqi savdodan daromadi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

Balanslashtirilgan (defitsitsiz) savdo sharti tabiiy ravishda quyidagichadir: har bir mamlakatning budjeti savdodan tushadigan daromaddan oshmasligi kerak, $P_i \geq x_i$, ya'ni

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i \quad i = \overline{1,n}$. Bu shartda tengsizlik belgisi bo'lishi mumkin emasligi isbotlanadi va

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases} \qquad (4.21)$$

(4.21) sistema matritsa ko'rinishida

$$A\overline{X} = \overline{X} \text{ yoki } (A - E)\overline{X} = \overline{0} \qquad (4.22)$$

Matritsaning xos soni $\lambda = 1$ ga mos keluvchi xos vektor taqchilliksiz xalqaro savdoning budjetlaridan iborat bo'ladi.

Misol. To'rtta mamlakat savdosining strukturaviy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

budjetlar yig'indisi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (shartli pul birligi) bo'lsa, bu mamlakatlarning budjetini toping.

Yechish. Berilgan strukturaviy matritsa A ning xos soni $\lambda = 1$ ga mos keluvchi xos vektor $\bar{x}$ ni

topish kerak, $(A - E)\bar{x} = 0$ ya'ni tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bu sistemaning rangi uchga teng bo'lgani uchun, noma'lumlardan bittasi erkli o'zgaruvchi va u orqali qolganlari ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib xos vektor x ning komponentlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig'indisiga qo'yib c kattalikni topamiz: c = 1210, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz.

$$x_1 = 1400, \quad x_2 = 1460, \quad x_3 = 2200, \quad x_4 = 1210.$$

44. Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq yoki erkli ekanligini aniqlang.

$$A_1 = (3, 5, 1, 4), \quad A_2 = (-2, 1, -5, -7), \quad A_3 = (-1, -2, 0, -1).$$

Yechish. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$ bundan quyida tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 13x_2 \end{cases}$$

Oxirgi hosil qilingan tenglamalar sistemasining nolmas yechimlari ham mavjud. (Masalan $x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 13$). Demak, A_1, A_2, A_3 vektorlar chiziqli bog'liq ekan.

45. Quyida berilganlarga ko'ra B=(2, 7, 11, 6) vektorni A_1=(2, 4, 0, 3), A_2 = (-3, 0, 1, 3), A_3(1, -1, 10, -3) vektorlar orqali ifodalash mumkinmi?

Yechish. $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Bundan

$$(2, 4, 0, 3)x_1 + (-3, 0, 1, 3)x_2 + (1, -1, 10, -3)x_3 = (2, 7, 11, 6) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 = 7 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \\ 3 \cdot x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1$$

Demak, $B = 2A_1 + A_2 + A_3$

46. Quyida berilgan uchta vektorlar bazis hosil qilishini tekshiring.

$$\bar{a} = \{0{,}3{,}1\}, \bar{b} = \{1, -2, 0\}, \quad \bar{c} = \{1{,}0{,}1\}.$$

Yechish. $\bar{a} - \lambda_1\bar{b} - \lambda_2\bar{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3 + 2\lambda_1 - 0 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 1 - 0 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Bundan ko'rinadiki berilgan yuqoridagi sistemani yechimi yo'q. Demak $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar chiziqli erkli.

47. Berilgan vektorlar orasidagi burchak kosinusini aniqlang va skalyar ko'paytmasini toping.

$$\bar{a} = \{1, 1, 3\}$$
$$\bar{b} = \{-1, 1, 3\}$$

Yechish. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 1\cdot(-1)+1\cdot1+3\cdot3 = 9$

$|\bar{a}| = \sqrt{1^2+1^2+3^2} = \sqrt{11}$ $\quad |\bar{b}| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+3^2} = \sqrt{11}$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$

formuladan $9 = \sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot\cos\varphi$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{9}{11}$.

48. Agar $A_2 - A_1$ va $A_3 - A_1$ vektorlar proporsional bo'lmasa, u holda A_1, A_2, A_3 vektorlar chiziqli bog'liq emasligini ko'rsating.

Yechish. $A_1(a_1, b_1, c_1)$ $\quad A_2(a_2, b_2, c_2)$ $\quad A_3(a_3, b_3, c_3)$

$A_2 - A_1 = (a_2 - a_1;\ b_2 - b_1;\ c_2 - c_1)$, $A_3 - A_1 = (a_3 - a_1;\ b_3 - b_1;\ c_3 - c_1)$. $A_2 - A_1$ va $A_3 - A_1$ vektorlar proporsional emasligidan

$$\begin{cases} a_3 - a_1 \neq \lambda(a_2 - a_1) \\ b_3 - b_1 \neq \lambda(b_2 - b_1) \\ c_3 - c_1 \neq \lambda(c_2 - c_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda-1)a_1 - \lambda a_2 + a_3 \neq 0 \\ (\lambda-1)b_1 - \lambda b_2 + b_3 \neq 0 \\ (\lambda-1)c_1 - \lambda c_2 + c_3 \neq 0 \end{cases}$$

Demak, $\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \neq \lambda_3 a_3 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \neq \lambda_3 b_3 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \neq \lambda_3 c_3 \end{cases}$ bo'lib, A_1, A_2, A_3 vektorlarning chiziqli bog'liq emasligi kelib chiqadi.

Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiring.

49. $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_3x_1$

Yechish. Nomalum x_1 ni o'z ichiga olgan hadlarni guruhlab, to'la kvadrat ajratamiz:

$F = x_1^2 + (2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 -$
$- (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + (x_2 + x_3))^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2$

Endi x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilardan y_1, y_2, y_3 o'zgaruvchilarga

o'tamiz. $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

natijada kvadratik formaning kanonik ko'rinishini hosil qilamiz: $F = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$.

50. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1$

Yechish.

$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 + x_3^2$

Belgilash kiritamiz, $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow F = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$

Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq yoki erkli ekanligini aniqlang.

51. $a_1 = (2,-1, 3, 5)$, $a_2 = (6,-3, 3, 15)$ $\qquad$ **52.** $a_1 = (-4, 2, 8), a_2 = (14,-7,-28)$

53. $a_1 = (-7, 5, 19)$, $a_2 = (-5, 7, -7)$, $a_3 = (-8, 7, 14)$

54. $a_1=(0,1,1,0)$, $a_2=(1,1,3,1)$, $a_3=(1,3,5,1)$, $a_4=(0,1,1,2)$.

Barcha shunday a sonlarni topingki bunda, B vektor, A_1, A_2, ... , A_n vektorlarga chizqli bog'liq bo'lsin.

55. $b=(2,a,3)$, $a_1=(1,2,1)$, $a_2=(3,4,5)$, $a_3=(4,5,7)$.

56. $b=(15,6,a)$, $a_1=(5,2,1)$, $a_2=(10,4,2)$.

57. $b=(3,5,a)$, $a_1=(2,4,3)$, $a_2=(1,6,5)$, $a_3=(1,5,4)$

58 Nol bo'lmagan b vektor a_1, a_2, a_3 va a_1, a_5, a_6 vektorlar bilan mos ravishda chizqli bog'liq bo'lsa, u holda a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 vektorlar chizqli bog'liq vektorlar sistemasi ekanligini isbot qiling.

59. Quyidagi berilgan vektorlarni bazis hosil qilishini tekshiring.

$\bar{a}=\{4,0,1\}$, $\bar{b}=\{3,1,-1\}$, $\bar{c}=\{0,-2,1\}$

60. $\bar{a}=\{1,0,4\}$, $\bar{b}=\{-1,1,3\}$, $\bar{c}=\{1,-2,0\}$

61. $\bar{a}=\{1,2,-1\}$, $\bar{b}=\{-3,0,2\}$, $\bar{c}=\{1,-1,4\}$

62. $\bar{a}=\{1,2,-1\}$, $\bar{b}=\{2,3,0\}$, $\bar{c}=\{-1,1,2\}$

Berilgan vektorlarninig skalyar ko'paytmasini va uzunliklarini aniqlang.

63. $\bar{a}=\{9,10,1\}$, $\bar{b}=\{4,0,-4\}$. **64.** $\bar{a}=\{7,0,6\}$, $\bar{b}=\{-2,-1,5\}$.

65. $\bar{a}=\{2,5,-3\}$, $\bar{b}=\{0,7,3\}$. **66.** $\bar{a}=\{17,-1,8\}$, $\bar{b}=\{-2,-1,5\}$.

Quyida berilgan formulalarni kanonik ko'rinishga keltiring.

67. $F=2x_1^2-3x_2^2-4x_1x_2-8x_2x_3+4x_3x_1$ **68.** $F=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$

69. $F=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+8x_3x_1$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Vektor deb nimaga aytiladi?
2. Vektorning moduli uning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
3. Vektorlar uchun qanday chiziqli amallar aniqlangan?
4. Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
5. Vektorlarning kolleniarlik shartlari.
6. Bazis deb nimaga aytiladi?
7. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
8. Ikki vektor orasidagi burchak nima?
9. Ikkita vektorning vektor ko'paytmasi nima?
10. Vektorlarning aralash ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
11. Vektorlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
12. Qanday vektorlar komplanar deb ataladi?
13. Vektor va aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi.
14. Chiziqli fazoning ta'rifi.
15. n o'lchovli fazoda vektorning uzunligi, vektorlarning skalyar ko'paytmasi, ular orasidagi burchak qanday aniqlanadi?

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematica -T., Fan va texnologiya, 2007.

2. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи. -М., Экзамен 2005.

3. Красс М.С., Чупринов Б.П. Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании. -М.: Дело, 2000.

4. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. -М., 2004.

5. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.

6. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под редакцией Ермакова В.И. -М.: Инфра – М, 2003.

7. Минорский И.П. Сборник задач по высшей математике. – М., 2004.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. –М., Наука, 1998.

9. Данко П.Е., Попов А.Т., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1998.

10. Соатов Ё.У. Олий математика. -Т.: Ўқитувчи, 3-жилд, 1996.

11. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. -М., 2008.

12. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. -Н., 2008.

13. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. -М., 2008

14. Ермаков В.И. Общий курс высшей математика для экономистов. –Н., 2010.

5-bob. ANALITIK GEOMETRIYANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA USULLARI

5.1. Tekislikda to'g'ri chiziqlar

Tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \quad \left(A^2+B^2\neq 0\right) \tag{5.1}$$

Burchak koeffitsiyentli tenglamasi

$$y=kx+b, \tag{5.2}$$

(k – burchak koeffitsiyenti, b – boshlang'ich ordinati).

Kesmalarga nisbatan tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{5.3}$$

(a va b Ox va Oy o'qlarda ajratgan kesmalar).

$M_1(x_1;\ y_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Ikkita to'g'ri chiziq $y = k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ yoki $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin, ular orasidagi φ burchak

$$tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} \tag{5.4}$$

yoki

$$\cos\varphi=\frac{\pm(A_1A_2+B_1B_2)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

formulalar bilan topiladi.

To'g'ri chiziqlarning parallellik sharti:

$$k_1=k_2 \quad \text{yoki} \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \tag{5.5}$$

To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti:

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \quad \text{yoki} \quad A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0 \tag{5.6}$$

$M_0(x_0;\ y_0)$ nuqtadan $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

formula bilan aniqlanadi.

Misollar.

1. $M_1(2,\ 0)$ va $M_2(3,\ 4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ formulaga ko'ra,

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-0}{4-0}\ \Rightarrow\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{4}$$

2. Berilgan to'g'ri chiziqlarni o'zaro parallel va perpendikulyar bo'lgan juftliklarga ajrating.

1) $2y+3x+5=0$ 2) $6y+9x-25=0$

3) $2y + x + 8 = 0$ 4) $y - 2x + 10 = 0$

Yechish. $A_1 = 3 \quad A_2 = 9 \quad A_3 = 1 \quad A_4 = -2$

$B_1 = 2 \quad B_2 = 6 \quad B_3 = 2 \quad B_4 = 1$

(5.6) formulaga ko'ra $A_3A_4 + B_3B_4 = 0$ tenglik o'rinli ekanligidan 3) va 4) – to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar. (5.5) formulaga ko'ra $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{3}$ tenglik qanoatlanganligidan 1) va 2) to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel.

3. $M(0;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\bar{a} = \{2,1\}$ vektorga parallel tog'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. $M(0,3,)$ nuqtadan o'tuvchi biror to'g'ri chiziq tenglamasini qaraymiz. Demak bu to'g'ri chiziq $M(0,3,)$ va $M_0(x,y)$ nuqtalardan o'tadi hamda $\bar{a}$ ga parallel bo'ladi. U holda $\overline{MM_0}$ va $\bar{a}$ vektorlar kolleniar. Vektorlarning kolleniarlik shartidan $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}$ to'g'ri chiziq tenglamasi hosil bo'ladi.

4. $3x + y - 6 = 0$ to'g'ri chiziq va $A(-3;\ 1)$, $B(3;\ 3)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

Yechish. $A(-3;\ 1)$ va $B(3;\ 3)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $y = kx + b$ bo'lsin, u holda

$$\begin{cases} 1 = -3k + b \\ 3 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

Demak, $y = -3x + 6$ va $y = \frac{1}{3}x + 2$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlaymiz.

(5.4) formualga ko'ra ($k_1 = -3$, $k_2 = \frac{1}{3}$) $tg\varphi = \dfrac{-3 - \frac{1}{3}}{1 - 1} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

5. $C(1;\ 1)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata burchagidan yuzasi 2 kv. birlik bo'lgan uchburchak ajratadigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozib olamiz. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ a va b ni topish kerak. To'g'ri chiziq $C(1;\ 1)$ nuqtadan o'tgani uchun uning koordinatalari bu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \text{ yoki } a + b = ab.$$

Koordinata burchagidagi uchburchakning yuzi $\pm S = \frac{1}{2}ab$ yoki $ab = \pm 4$ shunday qilib, ikkita tenglamalar sistemasini yechish kerak:

$$1.\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 4; \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} a + b = -4, \\ ab = -4; \end{cases}$$

Bu sistemalarni yechib:

1) $b = 4 - a,\ a(4 - a) = 4,\ a^2 - 4a + 4 = 0;\ a_1 = 2, b_1 = 2.$

2) $b = -4 - a,\ a(4 + a) = 4,\ a^2 + 4a - 4 = 0;\ a_{2,3} = -2 \pm 2\sqrt{2}.\ a_2 = -2 + 2\sqrt{2}, b_2 = -2 - 2\sqrt{2},$

$a_3 = -2 - 2\sqrt{2}, b_3 = -2 + 2\sqrt{2}.$

Demak, masala shartini qanoatlantiruvchi uchta to‘g‘ri chiziq mavjud:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{2\sqrt{2}-2}+\frac{y}{-2-2\sqrt{2}}=1$; 3) $\frac{x}{-2-2\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}-2}=1$.

6. Uchlari $A(7;9)$, $B(2;-3)$, $C(3;6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning:

a) M medianalar kesishish nuqtasi koordinatalarini

b) A uchidan chiqib BC tomonini E nuqtada kesib o‘tuvchi AE bessektrisasi asosi E nuqta koordinatalarini aniqlang.

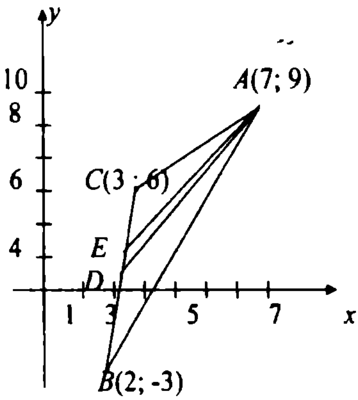
Yechish. *a*) D nuqta BC tomonni o‘rtasi bo‘lganligi uchun (1-rasm)

$$x_D=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$$

$$y_D=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{6-3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow D\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$$

M medianalar kesishish nuqta bo‘lganligi uchun bu AD kesmani $\lambda=2:1$(uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda) nisbatda bo‘ladi. Demak M nuqtani koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot\frac{5}{2}}{1+2}=4\quad y_M=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot\frac{3}{2}}{1+2}=4$$



(1- rasm)

Demak, $M(4;4)$.

b) Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra:

$|AC|=\sqrt{(7-3)^2+(9-6)^2}=5$, $|AB|=\sqrt{(7-2)^2+(9+3)^2}=13$.

AE bissektrisa BC tomonni quyidagicha nisbatda bo‘ladi:

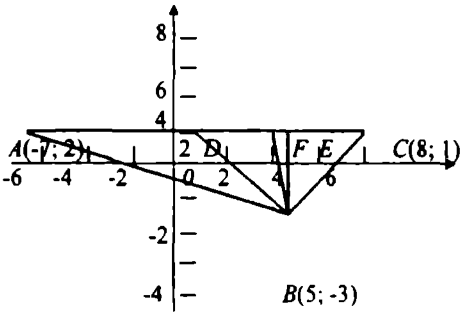
$$\lambda=\frac{|CE|}{|EB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{5}{13}\Rightarrow x_E=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{5}{13}\cdot 2}{1+\frac{5}{13}}=\frac{49}{18},\quad y_E=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{6+\frac{5}{13}\cdot(-3)}{1+\frac{5}{13}}=\frac{7}{2}$$

Demak, $E(\frac{49}{18};\frac{7}{2})$.

7. Uchlari $A(-7;2)$; $B(5;-3)$; $C(8;1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakni B uchidan chiqarilgan mediana, balandlik, bissektrisa tenglamalarini tuzing.

Yechish. $B(5;-3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami quyidagi ko'rinishda bo'ladi (2-rasm):

$$y+3=k(x-5) \qquad (*)$$



(2 - rasm)

BD mediana tenglamasini tuzamiz. Buning uchun avval D nuqtaning koordinatalarini aniqlab, B va D nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. D nuqta AC tomonning o'rtasi ekanligidan uning koordinatalari $x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-7+8}{2}=\frac{1}{2}$, $y_D=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

$D(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ bo'ladi. BD mediana burchak koeffitsiyenti esa $k_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{3/2+3}{1/2-5}=-1$

bo'ladi.

$(*)$ formulaga $k=-1$ ni qo'yib BD mediana tenglamasini quyidagicha tuzib olamiz:

$$y+3=-(x-5) \text{ yoki } x+y-2=0.$$

BE balandlik tenglamasini tuzamiz, bunda AC va BE to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidan foydalanamiz. AC to'g'ri chiziq burchak koeffitsiyenti $k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-2}{8+7}=-\frac{1}{15}$.

AC va BE to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lganligi uchun (5.6) formulaga ko'ra $k_{BE}=-\frac{1}{k_{AC}}=15$.

Demak, $(*)$ formulaga ko'ra BE to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y+3=15(x-5) \text{ yoki } 15x-y-78=0.$$

BE bissektrisa tenglamasini tuzamiz:

$$\angle ABF=\angle FBC \Rightarrow \ tg\angle ABF=tg\angle FBC \Rightarrow \qquad (5.4)$$

formulaga ko‘ra: $\dfrac{k_{BF}-k_{BC}}{1+k_{BF}\cdot k_{BC}}=\dfrac{k_{AB}-k_{BF}}{1+k_{AB}\cdot k_{BF}} \Rightarrow \dfrac{k_{BF}-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}k_{BF}}=\dfrac{-\frac{5}{12}-k_{BF}}{1-\frac{5}{12}k_{BF}} \Rightarrow$

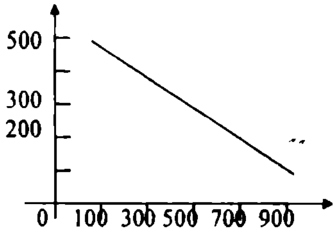
$33k_{BF}^2+11k_{BF}-33=0$ $(k_{BF})_1=-\frac{11}{3}$, $(k_{BF})_2=\frac{3}{11}$. BF bissektrisa Ox o‘q bilan o‘tmas burchak tashkil qilganligi uchun $(k_{BF})_1=-\frac{11}{3}$ yechimni olamiz. Demak BF bissektrisa tenglamasi $y+3=-\frac{11}{3}(x-5)$ yoki $11x+3y-46=0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

8. Quyidagi jadvalda muzqaymoqning narxi va unga mos keluvchi bir kunlik sotilish miqdori berilgan.

P sotilish narxi	100	200	300	400	500
Q sotilish miqdori	900	700	500	300	100

- $P=f(Q)$ funksiya grafigini chizing.
- Muzqaymoqqa bo‘lgan talab funksiyasini toping.

Yechish. Talab funksiyasi chiziqli bo‘lgani uchun ixtiyoriy ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidan foydalanib, uni ko‘rinishini topamiz.



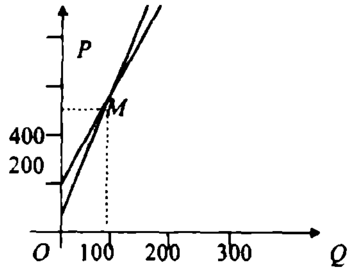
3 – rasm

$\dfrac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}=\dfrac{P-P_1}{P_2-P_1}$; $\dfrac{Q-900}{300-900}=\dfrac{P-100}{400-100}$, $\dfrac{Q-900}{-600}=\dfrac{P-100}{300}$ 200

$\dfrac{Q-900}{-2}=P-100 \Rightarrow P=-\dfrac{Q}{2}+550$. $k=-\dfrac{1}{2}$; $b=550$

9. Ikki turdagi transport vositasi bilan yuk tashish xarajatlari $P=100+4Q$ va $P=200+3Q$ funksiyalar bilan ifodalangan. Bunda Q – yuz kilometrlardagi masofa, P – pul birligidagi transport xarajatlari. Qaysi masofadan boshlab ikkinchi yuk tashish mashinasida birinchisiga qaraganda yuk tashish arzonga tushadi.

Yechish. $\begin{cases} P=4Q+100 \\ P=3Q+200 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechib to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz $M(100;\ 500)$. Rasmdan ko‘rinib turibdiki Op o‘q bo‘yicha (xarajat narxi) qaralganda M nuqtadan yuqorida ikkinchi mashina uchun sarf-xarajat birinchi mashinanikiga qaraganda pastda joylashgan. Demak, $M(100;\ 500)$ dan boshlab uning yuqori qismida ikkinchi mashina xarajatlari kam bo‘ladi.



(4 – rasm)

10. $5x - y + 10 = 0$ va $8x + 4y + 9 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tuvchi va $x+3y = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

11. $3x + 4y - 1 = 0$ va $4x - 3y + 5 = 0$ tenglamalar bilan berilgan ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

12. Parallelogramm ikkita tomonining tenglamalari $x+y+5=0$ va $x - 4y = 0$ bo'lib, diagonallarining kesishish nuqtasi $O(2;-2)$ bo'lsa, qolgan tomonlarining tenglamalarini tuzing.

13. $A(-4;\ 1)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar tenglamalarini tuzing.

14. Uchlari $A(1;\ -3)$ va $B(4;\ 3)$ nuqtalarda bo'lgan kesmani uchta teng qismlarga ajrating va bo'linish nuqtalarining koordinatalarini aniqlang.

15. Agar uchburchak tomonlari o'rtalari koordinatalari A(-2; 1), B(2; 3), C(4; -1) lar bo'lsa, uning uchlari koordinatalarini aniqlang.

16. (3; -1) nuqta oraqli o'tuvchi va Ox o'qi bilan 45^0 burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

17. $A(-3;\ 1)$ va $B(3;\ 3)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq va $3x+y-6=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisa tenglamasini tuzing.

18. Uchburchakning $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ -1)$, $C(0;\ 4)$ uchlaridan uning qarama – qarshi tomoniga parallel to'g'ri chiziq o'tkazing va shu to'g'ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing.

19. Uchburchakning uchta uchi koordinatalari A(-1; 3), B(3; -2), C(5; 3) lar berilgan. *a*) uchta tomoni tenglamasi, *b*) *B* uchidan chiqqan medianasi, *c*) *C* uchidan *AB* tomoniga tushirilgan balandlik tenglamalarini tuzing.

20. Uchburchak ikki uchi koordinatalari $A(-2;\ 1)$, $B(3;\ -4)$ va balandliklari kesishish nuqtasi $D(5;\ -1)$ berilgan. Berilgan uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

21. Diagonallari 10 sm va 6 sm, katta diagonali Ox o'qida, kichigi esa Oy o'qida joylashgan romb tomonlari tenglamasini tuzing.

22. Tovar ishlab chiqarish xarajatlari quyidagicha: mahsulot miqdori 100 ta bo'lganda xarajat 200 p/b, 300 ta bo'lganda 500 p/b, agar xarajat funksiyasi chiziqli bo'lsa, 500 ta mahsulot ishlab chiqarishga qancha xarajat sarflanishini aniqlang.

23. Ishlab chiqaruvchiga 60 ta tovardan 300 p/b, 100 ta dan esa 800 p/b foyda keladi. Agar foyda funksiyasi chiziqli bo'lsa, u holda 500 ta tovarni sotishdan keladigan foydani toping.

24. Tovarni ikkita magazinda sotishdan keladigan foyda $P = -2+3Q$ va $P = -3+\frac{16}{5}Q$ funksiyalar bilan ifodalanadi. Bunda Q – yuz donada miqdor, P – foyda birligi, ming so'mda. Qaysi miqdordan boshlab ikkinchi magazinda savdo qilish foydali bo'ladi?

25. Firma tovarining narxi 2000 so'm bo'lganda, bu tovardan 400 ta, 4000 so'm bo'lganda esa 700 ta ishlab chiqaradi. Bu mahsulotga bo'lgan taklif funksiyasini toping.

26. Gvozdikaga bo'lgan talab narx 100 so'm bo'lganda xarid 2000 dona, 200 so'm bo'lganda esa 1500 dona. Gvozdikaga bo'lgan talab funksiyani toping.

27. B tovarni ishlab chiqarishga sarflanadigan o'zgaruvchan xarajat quyidagicha:

Q	20	40
VC	500	650

O'zgarmas xarajat esa 9000 p/b bo'lsa, xarajat funksiyasini toping.

28. Ikki turdagi transport vositasi bilan yuk tashish xarajatlari $y = 150+50x$ va $y = 250+25x$ tenglamalar bilan ifodalanadi. Qaysi masofadan boshalab ikkinchi turdagi transport vositasiga ketgan xarajatlar birinchisiga nisbatan kam bo'ladi?

29. Ishlab chiqarish hajmi y ni mehnat unumdorligi x ga bog'liqligi chiziqli va $x = 3$ da $y = 185$, $x = 5$ da $y = 305$ bo'lsa, ishlab chiqarish tenglamasini toping. $x = 20$ da ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

5.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola tenglamalari

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy^2 + Ey + F = 0 \quad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right) \qquad (5.7)$$

Aylana. Berilgan nuqtadan bir xil R masofada joylashgan nuqtalar to'plamning geometrik o'rniga aylana deyiladi. Berilgan nuqta uning markazi R, masofa esa uning radiusi deyiladi.

Radiusi R ga teng, markazi $C(x_0,y_0)$ va $O(0;0)$ nuqtalarda bo'lgan aylanalarning mos ravishda tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (5.8)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5.9)$$

30. Quyidagi tenglama bilan berilgan aylana markazining koordinatalari va radiusini toping.

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$$

Yechish. Hadlarni guruhlab, to'la kvadrat ajratamiz. $x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 11 = 0$ yoki $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$. Bundan aylana markazi $C(4; -3)$ va radiusi $R = 6$.

31. Markazi (0; 3) nuqtada bo'lgan (3; 7) nuqtadan o'tuvchi aylana radiusini toping.

Yechish. (5; 8) formulaga ko'ra: $(3-0)^2+(7-3)^2=R^2$; $3^2+4^2=R^2$; $R^2=5^2$; $R=5$.

32. Radiusi $\sqrt{13}$ ga teng hamda (1; 0) va (0; -1) nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

Yechish. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=13$ (5.8). Aylana (1; 0) va (0; -1) nuqtalardan o'tganligi uchun $\begin{cases}(1-x_0)^2+(0-y_0)^2=13\\(0-x_0)^2+(-1-y_0)^2=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x_0-1)^2+y_0^2=13\\x_0^2+(y_0+1)^2=13\end{cases}\Rightarrow$

$$(x_0-1)^2+y_0^2=x_0^2+(y_0+1)^2$$
$$x_0^2-2x_0+1+y_0^2=x_0^2+y_0^2+2y_0+1$$
$$x_0=-y_0\quad=>(-y_0-1)^2+y_0^2=13$$
$$2y_0^2+2y_0-12=0\quad y_0^2+y_0-6=0$$
$$y_0=-3\quad=>\quad x_0=3$$
$$y_0=2\quad=>\quad x_0=-2$$

demak, masala shartini qanoatlantiruvchi 2 aylana:

$$(x-3)^2+(y+3)^2=3(x+2)^2+(y-2)^2=13$$

33. Uchta $A(-4;\ 1)$, $B(2;\ 7)$, $C(8;\ 1)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

Yechish. (5.8)ga ko'ra va A, B, C nuqtalar aylanada yotganligi uchun, ularning koordinatalari bu (5.8) tenglikni qanoatlantiradi:

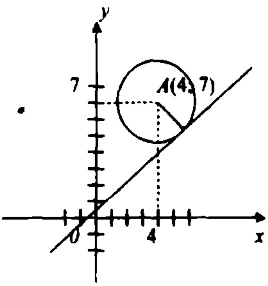
$$\begin{cases}(-4-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2\\(2-x_0)^2+(7-y_0)^2=R^2\\(8-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2\end{cases}$$

Birinchi tenglamadan ikkinchisi, keyin uchinchisini ayirib (mustaqil) $x_0=2$, $y_0=1$, keyin esa bu sonlarni birorta tenglamaga qo'yib, $R=6$ ekanligini topamiz. Demak, aylananing umumiy tenglamasi $(x-2)^2+(y-1)^2=36$ bo'ladi.

34. Markazi $A(4;\ 7)$ nuqtada bo'lgan va $3x-4y+1=0$ to'g'ri chiziqqa urinadigan aylana tenglamasini yozing.

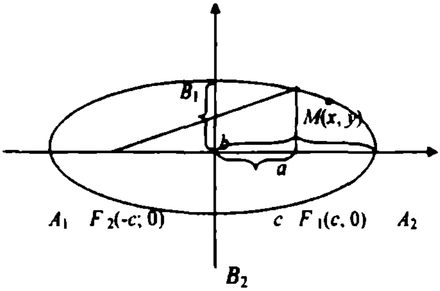
Yechish. Aylananing radiusi A nuqtadan $3x-4y+1=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofadan iborat. Bu masofani nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasidan foydalanib topamiz (5-rasm). Bunda $A(4;\ 7)$ nuqatadan $3x-4y+1=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz.

$d=\frac{|3\cdot4-4\cdot7+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3\Rightarrow R=3$. Demak, aylana tenglamasi $(x-4)^2+(y-7)^2=9$.



(5 - rasm)

Ellips. Ellips deb, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi ikki F_1, F_2 nuqtalarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi (6-rasm).



(6 - rasm)

Ellipsning kanonik tenglamasi (koordinata o'qlari ellips o'qlari bilan ustma-ust tushganda):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (5.10)$$

bu yerda a va b – ellips yarim o'qlari.

Agar $a > b$ bo'lsa,

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad (5.11)$$

F_1(C; 0) va F_2(C; 0) – ellips fokuslari.

Ellips ekssentritsiteti (e < 1 ellips uchun)

$$e=\frac{c}{b} \qquad (5.12)$$

Ellipsnig $M(x, y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofa (fokal radiuslar) quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$r_1 = a - ex, \; r_2 = a + ex \qquad (5.13)$$

Ellipsning direktrisalari tenglamalari

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c} \qquad (5.14)$$

35. $9x^2+25y^2=225$ ellips berilgan. Uning yarim o'qlari, fokuslari koordinatalarini, ekssentritsitetini, direktrisalari tenglamalarini toping.

Yechish. $9x^2+25y^2=225 => \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ $a = 5$, $b = 3$ – o'qlari

$a > b$ =>(5.11) formuladan $c^2=a^2-b^2=25-9=16$ $c = \pm 4$

Fokuslari: F_1 = (4; 0) va F_2 = (-4; 0)

Ekssentritsiteti $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{4}{5}$

(5.14) formualga ko'ra direktrisalari tenglamalari $y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{5}{\frac{4}{5}}=\pm\frac{25}{4}$

36. O'z harakati davomida $x = 9$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $A(1;\,0)$ nuqtaga uch marta yaqinroq bo'lgan nuqtalarning trayektoriyasini aniqlang.

Yechish. $|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $|MM_1| = \sqrt{(9-x)^2}$ M_1 bilan M nuqtadan $x = 9$ to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi belgilangan. U holda $3\cdot\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(9-x)^2}$. Tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, $8x^2 + 9y^2 = 72$ yoki $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ tenglamani hosil qilamiz, bu yerda $a = 3$; $b = 2\sqrt{2}$.

37. Agar $2x-5y-30 = 0$ to'g'ri chiziq $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsga urinib o'tishi ma'lum bo'lsa, shu urinish nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish. $2x-5y-30 = 0$ to'g'ri chiziq va $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsning umumiy nuqtasini

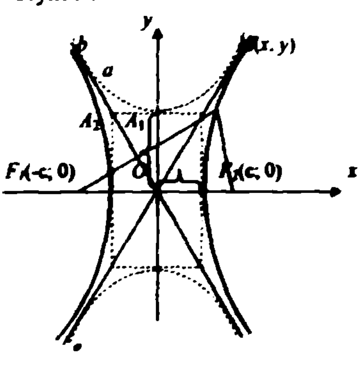
$$\begin{cases} \frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1 \\ 2x - 5y - 30 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib topamiz. To'g'ri chiziq ellipsga uringanligi uchun ular bitta umumiy nuqtaga ega. Demak, tenglamalar sistemasi bitta yechimga ega bo'lishi kerak.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1 \\ 2x - 5y - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\left(\frac{5y+30}{2}\right)^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1 \Rightarrow \frac{(y+6)^2}{12} + \frac{y^2}{24} = 1 \quad y^2 + 8y + 16 = 0 \quad \Rightarrow y = -4 \quad x = 5. \\ x = \frac{5y+30}{2} \end{cases}$$

Demak, urinish nuqta $M(5;\,-4)$ bo'ladi.

Giperbola. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas sondan iborat nuqtalarning geometrik o'rni *giperbola* deyiladi.



(7 – rasm)

Giperbolaning kanonik tenglamasi (koordinata o'qlari giperbola o'qlari bilan ustma-ust tushadi)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.15}$$

a, b – mos ravishda gipebolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlari (7 – rasm)

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (5.16)$$

$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$– giperbola fokuslari, $c>a$, giperbola ekssentritsiteti ($e > 1$) (5.12) formula bilan topiladi.

Giperbolaning $M(x;y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalar:

$$r_1 = |ex-a|,\ r_2 = |ex + a| \qquad (5.17)$$

Giperbolaning ikkita assimtotasi mavjud:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (5.18)$$

Giperbolaning direktrisalari tenglamalari:

$$y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{b^2}{c} \qquad (5.19)$$

38. $16x^2-9y^2=144$ giperbola berilgan. Uning yarim o‘qini, fokuslari koordinatalarini, ekssentritsitetini, direktrisasi va assimptotalari tenglamasini toping.

Yechish. Berilgan giperbolaning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasini yozib olamiz.

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ $=>$ $a^2 = 9$, $b^2 = 16$ $=>$ o‘qlari $a = 3$, $b = 4$ (5.16) formulaga ko‘ra $c^2=a^2+b^2=25$ $c = \pm 5$. Fokuslari: $F_1(5;\ 0)$ va $F_2(-5;\ 0)$ (5.12) formuladan ekssentrisiteti $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$.

Direktrisasi (5.14) formulaga ko‘ra $y=\pm\frac{b^2}{c}=\pm\frac{9}{5}$, assimptotalari tenglamalari (5.18) formulaga ko‘ra $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$

Fokuslari absissa o‘qida, koordinata boshiga nisbatan simmetrik va uchlari orasidagi masofa $2c$=20, asimtota tenglamalari $y=\pm\frac{3}{4}x$ bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Asimptota tenglamalari $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$ bo‘lgani uchun $b=4k,\ a=3k,\ k>0$,

(k – proporsionallik koeffisenti)ni $c=\sqrt{a^2+b^2}$ formulaga qo‘yib k = 2 ni topamiz, u holda b = 8, a = 6 bo‘ladi. Demak biz izlayotgan giperbolaning umumiy tenglamasi $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ bo‘ladi.

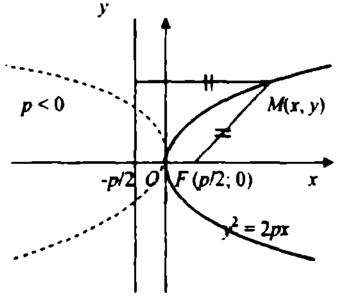
40. Tenglamasi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ bo‘lgan ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslaridan, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra $a_g=c_e$, $c_g=a_e$. $a_e=\sqrt{8}$, $b_e=\sqrt{5}$ shuning uchun $a_g=c_e=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$, $b_g=\sqrt{c_g^2-a_g^2}=\sqrt{5}$; demak izlanayotgan giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. bo‘ladi.

Parabola. *Ta'rif.* Berilgan nuqta (fokus) dan va berilgan to'g'ri chiziq (direktrisa) dan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plamining geometrik o'rniga *parabola* deyiladi. (8 – rasm).

Uchi koordinatalar boshida bo'lgan (agar y Ox o'qiga simmetrik bo'lsa) parabola tenglamasi

$$y^2 = 2px \tag{5.20}$$



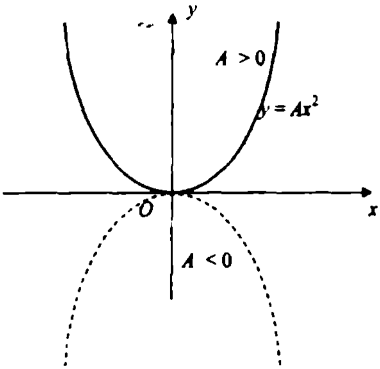
(8 – rasm)

agar y Oy o'qiga simmetrik bo'lsa

$$x^2 = 2py \tag{5.21}$$

yoki

$$y = Ax^2 \tag{5.22}$$



(9 – rasm)

bu yerda p yoki $A = \frac{1}{2p}$ - parabola parametrlari. (9 – rasm)

Parabola fokusi $F(\frac{p}{2};0)$ dan Ox o'qigacha bo'lgan masofa (fokal- radius)

$$r = x + \frac{p}{2} \tag{5.23}$$

formula bo'yicha topiladi.

Parabolaning direktrisasi:

$$x=-\frac{p}{2} \tag{5.24}$$

41. Agar parabolaning uchi koordinatalar boshida bo'lib, u $A(2;\ 4)$ nuqtadan o'tsa va Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lsa, uning tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. Ox o'qiga simmetrik va $O(0;\ 0)$ nuqtadan o'tganligi uchun (5.20) formulaga ko'ra $y^2=2px$ => $4^2=4p$

$$p=4 \;\; => \;\; y^2=8x \text{ va } F=\left(\frac{p}{2};0\right) \;\; => \;\; F(2;0)$$

42. Uchi koordinata boshida bo'lgan parabola $A(2;\ 4)$ nuqta orqali o'tadi va Ox o'qiga nisbatan simmetrik. Parabolaning tenglamasi, fokuslari va direktrisalarini toping.

Yechish. Parabola $O(0;\ 0)$ nuqtadan o'tgani uchun, Ox o'qiga simmetrik bo'lgani uchun uning tenglamasi $y^2 = 2px$ ko'rinishda. A nuqtaning koordinatasini bu tenglamaga qo'yib $4^2 = 2p\cdot 2$, ya'ni $p = 4$ ekanligini topamiz. Demak parabola tenglamsi $y^2 = 8x$, uning direktrisasi esa $x = -2$, fokusi $F(2;\ 0)$.

43. Berilgan $F(2;\ 0)$ nuqtadan va $y = 2$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing

Yechish. $M(x,\ y)$ izlanayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda $|MF|=MA$ yoki $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(y-2)^2}$ bu yerda $A(x,\ 2)$, M nuqtadan $y = 2$ to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning kesishish nuqtasi. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib $x^2-4x+4+y^2=y^2-4y+4$ yoki $y=-\frac{1}{4}x^2+x$ parabola tenglamasini hosila qilamiz.

5.3. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari

Berilgan $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqta orqali o'tuvchi va $n=(A,\ B,\ C)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{5.25}$$

Kesmalarga nisbatan tenglamasi esa

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{5.26}$$

(a, b, c mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlaridan ajratilgan kesmalar);

Tekislikning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5.27}$$

$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ikkita tekislik $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ berilgan bo'lsin. Ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusi φ quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{5.28}$$

Ikkita tekislikning parallellik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{5.29}$$

Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{5.30}$$

Fazoda to'g'ri chiziq tenglamasi:

Ikkita tekislikning kesishish chizig'i sifatida:

$$\begin{cases} A_1x_1+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{5.31}$$

Berilgan $M(x_1,y_1,z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori $S=(m,n,p)$ bo'lgan.

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{5.32}$$

to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$\begin{aligned} x&=x_1+mt, \\ y&=y_1+nt, \\ z&=z_1+pt \end{aligned} \tag{5.33}$$

Berilgan ikki nuqta $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{5.34}$$

Ikkita to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorlari $S_1(m_1,n_1,p_1)$ va $S_2(m_2,n_2,p_2)$ berilgan bo'lsin. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{5.35}$$

Fazoda ikkita to'g'ri chiziqning parallellik sharti:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{5.36}$$

Fazoda ikkita to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \tag{5.37}$$

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ to'g'ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik berilgan bo'lsin.

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak φ quyidagi munosabatdan aniqlanadi:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{5.38}$$

To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik sharti:

$$Am+Bn+Cp=0 \tag{5.39}$$

To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{5.40}$$

44. *a*) $M(1;\ -2;\ 3)$ nuqtadan o'tuvchi va $n = (3;\ -4;\ 5)$ vektorga perpendikulyar,

b) $M(1;\ -2;\ 3)$ nuqtadan o'tuvchi va $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ tekislikka parallel bo'lgan tekisliklarning tenglamasini tuzing.

Yechish.

a) (5.25) formulaga ko'ra $A=3,\ B=-4,\ C=5$ va $x_0=1,\ y_0=-2,\ z_0=3$

$$=> 3(x-1) - 4(y+2) + 5(z-3) = 0$$

$$3x - 4y + 5z - 26 = 0$$

b) $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan tekislik $M(1;\ -2;\ 3)$ nuqtadan o'tsin va $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ tekislikka parallel bo'lsin. U holda (5.30) formulaga asosan $\frac{A}{3} = \frac{B}{-4} = \frac{C}{5} \Rightarrow A = \frac{3C}{5}\ B = -\frac{4C}{5};\ \frac{5D}{C} = 4$ bo'lsin $=> 3x - 4y + 5z + 4 = 0$

M nuqta shu tekislikka tegishli ekanligidan $3\cdot1 - 4\cdot(-2) + 5\cdot3 + 4 = 0 => 4 = -26$

demak $3x - 4y + 5z - 26 = 0$

45. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ to'g'ri chiziq va $M(2;\ 0;\ 1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Tekislik M nuqtadan o'tganligi uchun (5.25 formula)

$A(x-2) + B(y) + C(z-1) = 0$ $S = (1;\ 2;\ -1)$ yo'naltiruvchi vektor $n = (A;\ B;\ C)$ tekislikning normal vektoriga perpendikulyar $\Rightarrow S\cdot n = 0$

$$A+2B-C = 0$$

Ikkinchi tomondan $A(1;\ -1;\ -1)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotadi, demak u tekislikka ham tegishli

$$A(1-2) + B(-1) + C(-1-1) = 0$$

$$-A - B - 2C = 0$$

$$\begin{cases} A+2B-C=0 \\ A+B+2C=0 \end{cases} => \begin{cases} B=3C \\ A=-5C \end{cases}$$

Demak,

$$(-5(x-2) + 3y + (z-1))c = 0 \qquad (c \neq 0)$$

$$5x - 3y - z - 9 = 0$$

46. Berilgan $A(4;\ 4)$ nuqta va $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ aylana bilan $y = -x$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi orqali o'tuvchi aylana tenglamasini yozing.

47. Koordinata boshidan $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ aylanaga o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

48. Quyidagi aylanalarning markazlari va radiuslarini toping.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ *b*) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2{,}5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 7y = 0$ *d*) $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 19 = 0$

49. $A(-3;\ 0)$, $B(3;\ 6)$ nuqtalar berilgan. Diametri AB kesmadan iborat bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

50. Koordinata boshidan va $x+y+a = 0$ to'g'ri chiziqning $x^2 + y^2 = a^2$ aylana bilan urinish nuqtalari orqali o'tuvchi aylana tenglamasini yozing.

51. Berilgan $A(1;\ -2)$, $B(0;\ -1)$ va $C(-3;\ 0)$ nuqtalar orqali o'tuvchi aylanaga koordinata boshidan o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

52. $x^2+y^2-4x+6y-5=0$ aylananing Ox o'qi bilan kesishish nuqtalariga o'tkazilgan radiuslari orasidagi burchakni toping.

53. $A(3;\ 0)$ nuqta $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ aylanani ichida yotishini ko'rsating va A nuqtada teng ikkiga bo'linadigan vatar tenglamasini yozing. (*Ko'rsatma: izlanayotgan vatar OA ga perpendikulyar, bunda O – aylananing markazi.*)

54. $3x^2+3y^2-6x+8y=0$ tenglama bilan berilgan aylana radiusini va markazini aniqlang.

55. $A(3;\ 1)$ va $B(-1;\ 3)$ nuqtalardan o'tuvchi va markazi $3x-y-2=0$ to'g'ri chiziqda yotuvchi aylana tenglamasini tuzing.

56. $x^2+y^2+4x-4y=0$ va $x+y=0$ tenglamalarning kesishishidan hosil bo'lgan va $M(4;\ 4)$ nuqtadan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

57. Yarim o'qi 5, ekssentritsiteti $\frac{12}{13}$ ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

58. Yer ellips bo'yicha harakatlanadi va uning fokuslaridan birida quyosh joylashgan. Yerdan quyoshgacha bo'lgan eng qisqa masofa taxminan 147,5 million kilometr, eng katta masofa esa 152,5 million kilometr. Yer orbitasining katta yarim o'qi va ekssentrisitetini toping.

59. Koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik ellips $M(2;\ \sqrt{3})$ va $B(0;\ 2)$ nuqtalar orqali o'tadi. Uning tenglamasini yozing va M nuqtadan fokuslarigacha bo'lgan masofani toping.

60. Koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik, fokuslari Ox o'qida joylashgan, $M(2;\ \sqrt{21})$ nuqta orqali o'tuvchi ellipesning ekssentritsiteti $\varepsilon=\frac{3}{4}$. Ellips tenglamasini yozing va uning fokal radius vektorini aniqlang. (*Ko'rsatma: fokal radius vektorlar, ya'ni $M(x,\ y)$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar $r_1=a-ex$, $r_2=a+ex$ formulalar bilan topiladi*)

61. Fokal radiuslarini yig'indisi $2\sqrt{5}$, fokuslari $F_1(-2;\ 0)$, $F_2(2;\ 0)$ nuqtalarda bo'lgan ellips tenglamasini yozing.

62. Fokuslari orasidagi masofa katta va kichik yarim o'qlari orasidagi masofaga teng bo'lgan ellipsning ekssentritsitetini toping.

63. $x^2+4y^2=4$ ellipsga uchlaridan biri katta yarim o'qning oxiri bilan ustma – ust tushadigan to'g'ri burchakli uchburchak chizilgan. Uning qolgan ikki uchining koordinatalarini toping. (*Ko'rsatma: tomonlaridan biri $k=tg30^0$ og'ma tenglamasi yozilib, ellips bilan kesishish nuqtasi topiladi.*)

64. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda, o'ng fokusigacha bo'lgan masofa chap fokusigacha bo'lgan masofadan to'rt marta uzun bo'lgan nuqtani toping.

65. $x^2+y^2=36$ aylananing barcha ordinatalarini uch marta qisqartirishdan hosil bo'lgan egri chiziqning tenglamasini yozing.

66. O'z harakati davomida $A(0;\ 1)$ nuqtagacha bo'lgan masofa $y-4=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofadan ikki marta qisqa bo'lgan M nuqtaning trayektoriyasini aniqlang.

67. $x^2-4y^2=16$ giperbolani yasang, asimptotalarini toping. fokuslari, ekssentritsiteti, asimptotalari orasidagi burchakni toping.

68. $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 bo'lgan M nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo'lgan masofani toping.

69.Giperbolaning kanonik tenglamasini yozing: *a*) fokuslari orasidagi masofa 10, uchlari orasidagi masofa esa 8 ga teng. *b*) haqiqiy o'q $a = 2\sqrt{5}$, ekssentritsiteti esa $e = \sqrt{1.2}$.

70. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellepsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo'lgan giperbola tenglamasini yozing.

71. Berilgan $M_1(2\sqrt{7};-3)$ $M_2(-7;-6\sqrt{2})$ nuqtalar orqali o'tuvchi koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik giperbola tenglamasini yozing.

72. Asimptotasi $y=\pm\frac{3}{5}x$ va $M(10;-3\sqrt{3})$ nuqtadan o'tuvchi giperbola tenglamasini yozing.

73. F (0; 2) nuqtadan va y = 4 to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'mining tenglamasini yozing.

74. *a*) $y^2=4x$; *b*) $y^2=-4x$; *c*) $x^2=4y$; *d*) $x^2=-4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolani chizing, fokuslari, direktritsa tenglamasini yozing.

75. $y^2=4x$ parabolada, fokal radiusi 4 bo'lgan nuqtani toping.

76. Agar parabola $x+y = 0$ to'g'ri chiziq va $x^2+y^2+4y = 0$ aylananing kesishish nuqtalari orqali o'tsa hamda Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'lsa, uning kanonik tenglamasi va direktritsasini yozing.

77. A(0; 0), B(-1; 2) nuqtalar orqali o'tuvchi va Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini yozing.

78. A(0; 0), B(2; 4) nuqtalar orqali o'tuvchi va Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini yozing.

79. Diametri 80 m va chuqurligi 10 m bo'lgan parabola shaklidagi chuqurlik qazilgan. Bu chuqurlikning quyi nuqtasidan markaz bo'yicha qanday masofada parabolaning fokusi joylashgan.

80. *a*) Ox o'qi va A(1; -1; 3) nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

b) Oy o'qi va B(2; 1; -1) nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

81. M_0(2; -3; 1) nuqta orqali o'tuvchi va $x - 4y + 5z + 1 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

82. M_1(2; -15; 1) va M_2(3; 1; 2) nuqtalar orqali o'tuvchi va $3x - y - 4z = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

83. M_1(2;-1;-1) va M_2(3; 3; -1) nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

84. A(1; 2; 1) nuqtaning $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasini toping.

85. M(4; -4; 2) nuqta orqali o'tuvchi va xOz tekisligiga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

86. Ox va Oy o'qlaridan a = 1, b = -1 kesma ajratuvchi va A(2; 3; 4) nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

87. Berilgan egri chiziqlarning kanonik tenglamasini tuzing va grafigini chizing.

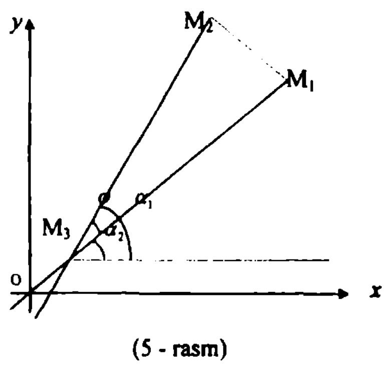
Variant	Masala sharti	Variant	Masala sharti
1.	$x^2-4x+y^2-6y+4=0$ $9x^2+25y^2-225=0$ $25x^2-49y^2-1225=0$ $y^2=9x$	10.	$x^2-10x+y^2+2y+22=0$ $9x^2+16y^2-144=0$ $9x^2-49y^2-441=0$ $y^2=8x$
2.	$x^2+6x+y^2-10y+30=0$ $4x^2+49y^2-196=0$ $16x^2-25y^2-400=0$ $y^2=7x$	11.	$x^2+10x+y^2-12y+45=0$ $4x^2+25y^2-100=0$ $25x^2-36y^2-900=0$ $y^2=-9x$
3.	$x^2+2x+y^2-4y-11=0$ $25x^2+36y^2-900=0$ $25x^2-64y^2-1600=0$ $y^2=5x$	12.	$x^2-2x+y^2+10y+25=0$ $16x^2+36y^2-576=0$ $4x^2-25y^2-100=0$ $y^2=-7x$
4.	$x^2-6x+y^2+8y=0$ $16x^2+25y^2-400=0$ $25x^2-49y^2-1225=0$ $y^2=16x$	13.	$x^2+2x+y^2-6y-15=0$ $9x^2+49y^2-441=0$ $16x^2-49y^2-784=0$ $y^2=-5x$
5.	$x^2+6x+y^2+6y+14=0$ $25x^2+49y^2-1225=0$ $9x^2-36y^2-324=0$ $y^2=3x$	14.	$x^2-6x+y^2-4y-23=0$ $25x^2+64y^2-1600=0$ $4x^2-9y^2-36=0$ $y^2=-16x$
6.	$x^2-2x+y^2+2y+1=0$ $4x^2+16y^2-64=0$ $4x^2-9y^2-36=0$ $y^2=4x$	15.	$x^2+4x+y^2+8y-29=0$ $16x^2+49y^2-784=0$ $36x^2-64y^2-2304=0$ $y^2=-3x$
Variant	Masala sharti	Variant	Masala sharti
7.	$x^2+4x+y^2-2y-31=0$ $4x^2+9y^2-36=0$ $4x^2-16y^2-64=0$ $y^2=2x$	16.	$x^2-6x+y^2-4y+4=0$ $25x^2+9y^2-225=0$ $49y^2-25x^2-1225=0$ $y^2=-4x$
8.	$x^2-8x+y^2+4y-29=0$ $36x^2+49y^2-1764=0$ $9x^2-25y^2-225=0$ $y^2=6x$	17.	$x^2-10x+y^2+6y+30=0$ $49x^2+4y^2-196=0$ $25y^2-16x^2-400=0$ $y^2=-2x$
19.	$x^2+8x+y^2-6y=0$ $25x^2+16y^2-400=0$ $64y^2-25x^2-1600=0$ $y^2=-x$	25.	$x^2+2x+y^2-10y-22=0$ $16x^2+9y^2-144=0$ $49y^2-9x^2-441=0$ $x^2=3y$

20.	$x^2-6x+y^2-6y+14=0$ $49x^2+25y^2-1225=0$ $36y^2-9x^2-324=0$ $y^2=-8x$	26.	$x^2-12x+y^2+10y+45=0$ $25x^2+4y^2-100=0$ $36y^2-25x^2-900=0$ $x^2=4y$
21.	$x^2+2x+y^2-2y+1=0$ $16x^2+4y^2-64=0$ $9^2-4y^2-36=0$ $x^2=9y$	27.	$x^2+10x+y^2-2y+25=0$ $36x^2+16y^2-576=0$ $25y^2-4x^2-100=0$ $x^2=2y$
22.	$x^2-2x+y^2+4y-31=0$ $9x^2+4y^2-36=0$ $16y^2-4x^2-64=0$ $x^2=7y$	28.	$x^2-6x+y^2+2y-15=0$ $49x^2+9y^2-441=0$ $49y^2-16x^2-784=0$ $x^2=6y$
23.	$x^2+4x+y^2-8y-29=0$ $49x^2+36y^2-1692=0$ $25y^2-9x^2-225=0$ $x^2=5y$	29.	$x^2-4x+y^2-6y-23=0$ $49x^2+16y^2-784=0$ $36y^2-4x^2-144=0$ $x^2=y$
24.	$x^2-8x+y^2+8y+23=0$ $36x^2+9y^2-324=0$ $36y^2-16x^2-576=0$ $x^2=16y$	30.	$x^2+8x+y^2+4y-29=0$ $64x^2+25y^2-1600=0$ $64y^2-36x^2-2304=0$ $x^2=8y$

Uchburchakning yuzini hisoblash

Faraz qilaylik, $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ - uchburchak uchlari. U holda yuza quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\pm S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \qquad (5.41)$$



(5 - rasm)

Uchburchak yuzasi

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}M_1M_2\cdot M_1M_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}M_1M_2\cdot M_1M_2(\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_2\cos\alpha_1)$$

$M_1M_3\cdot\cos\alpha_2=x_1-x_3$, $\quad M_1M_3\cdot\sin\alpha_2=y_1-y_3$,

$M_2M_3\cdot\cos\alpha_1=x_2-x_3$, $\quad M_2M_3\cdot\sin\alpha_1=y_2-y_3$.

$$\pm S=\frac{1}{2}((y_2-y_3)(x_1-x_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3))=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}$$

agar M_3 koordinata boshi bilan ustma-ust tushsa, u holda $x_3=y_3=0$ va

$$\pm S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

agar uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, u holda uchburchakning yuzi nolga teng va biz bundan uch nuqtaning bir to‘g‘ri chiziqda yotish shartini hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}=0 \qquad (5.42)$$

88. $M_1(0;2)$; $M_2(2;6)$; $M_3(1;4)$ nuqtalar bir to‘g‘ri chizqda yotishini ko‘rsating.

Yechish.

$$\begin{vmatrix}0-1 & 2-4\\ 2-1 & 6-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2-(-2)=0$$

89. Uchlari $M_1(3;-2)$; $M_2(-4;0)$; $M_3(2;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak yuzasini hisoblang.

Yechish. (5.41) formulaga ko‘ra:

$$\pm S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3-2 & -2-5\\ -4-2 & 0-5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -7\\ -6 & -5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(-47)\Rightarrow S=23{,}5$$

90. Quyidagi nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotishini tekshiring.

Variant	M_1	M_2	M_3
1.	(0;5)	(1;3)	(2;1)
2.	(1;5)	(-2;-1)	(3;9)
3.	(-1;-9)	(2;6)	(3;11)
4.	(-1;2)	(2;11)	(3;14)
5.	(0;5)	(-1;1)	(2;13)
6.	(0;-2)	(2;0)	(3;1)
7.	(2;5)	(1;3)	(-2;-3)
8.	(0;5)	(1;8)	(-1;2)
9.	(0;7)	(-1;9)	(2;3)
10.	(2;5)	(7;2)	(-1;3)
11.	(1;2)	(-1;14)	(-2;20)
12.	(3;5)	(-2;5)	(4;4)
13.	(0;1)	(1;10)	(-1;8)
14.	(6;3)	(2;4)	(6;5)
15.	(1;8)	(0;5)	(2;11)

Variant	M_1	M_2	M_3
16.	(9;1)	(1;2)	(2;1)
17.	(-1;5)	(0;3)	(2;-1)
18.	(-3;2)	(0;2)	(1;5)
19.	(2;8)	(-2;2)	(4;11)
20.	(1;0)	(0;8)	(-1;3)
21.	(-1;-3)	(-2;-1)	(0;-5)
22.	(0,5;4)	(-2;-4)	(4;0,5)
23.	(0;1)	(-1;5)	(-3;10)
24.	(1;-3)	(2;-8)	(0;2)
25.	(2;12)	(-1;-12)	(0;-4)
26.	(0;5)	(1;12)	(2;19)
27.	(1;3)	(-1;-9)	(3;15)
28.	(0;1)	(1;3)	(-1;-1)
29.	(0;3)	(1;8)	(-2;-7)
30.	(1;5)	(0;-2)	(-2;-16)

91. Uchlari quyidagi nuqtalarda bo'lgan ucburchak yuzini hisoblang.

Variant	M_1	M_2	M_3	Variant	M_1	M_2	M_3
1.	(2;5)	(1;2)	(3;1)	16.	(1;6)	(3;5)	(2;4)
2.	(3;5)	(-2;-1)	(3;10)	17.	(0;7)	(4;8)	(3;9)
3.	(-10;-5)	(0;3)	(4;1)	18.	(1;8)	(3;6)	(3;4)
4.	(-1;2)	(2;5)	(3;10)	19.	(3;2)	(2;11)	(3;20)
5.	(0;2)	(3;1)	(3;4)	20.	(3;5)	(-1;1)	(2;3)
6.	(0;2)	(2;0)	(4;2)	21.	(2;-2)	(3;1)	(4;2)
7.	(2;5)	(3;3)	(-2;-3)	22.	(5;5)	(1;2)	(-2;-2)
8.	(1;5)	(2;8)	(-1;3)	23.	(5;5)	(9;8)	(3;0)
9	(2;7)	(0;4)	(2;3)	24.	(-7;7)	(5;2)	(2;-2)
10.	(3;5)	(7;2)	(-1;4)	25.	(2;5)	(-2;2)	(-8;-4)
11.	(3;2)	(-1;10)	(-2;12)	26.	(3;2)	(-1;10)	(-2;11)
12.	(4;5)	(-2;3)	(4;4)	27.	(3;4)	(5;6)	(7;8)
13.	(3;1)	(2;5)	(-1;4)	28.	(0;1)	(1;2)	(-1;5)
14.	(6;4)	(2;5)	(6;3)	29.	(5;3)	(3;4)	(7;5)
15.	(1;0)	(0;5)	(2;11)	30.	(1;8)	(10;5)	(2;15)

Mavzu yuzasidan savollar

1. Tekislikdagi analitik geometriyaning sodda masalalarini ko'rsating va sanab o'ting.
2. Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalarini yozing.
3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.
4. Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa.
5. Tekislikdagi 2 ta to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
6. Tekislikdagi 2 ta to'g'ri chiziqning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.
7. Tekislikdagi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini aniqlash formulalari.
8. Tekislikda to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing.
9. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan foydalanib talab va taklif funksiyasinini toping.
10. Tekislik tenglamasi $Ax + By + Cx + D = 0$ bo'lsa, u koordinatalar sistemasiga nisbatan quyidagi hollarda qanday joylashadi?

    a) D=0; *b*) A=0; *v*) A=0, B=0; g) A=0, B=0, D=0; *d*) A=0, D=0.
11. Tekislik tenglamasini yozing.
12. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.
13. Ikkita parallel tekislik orasidagi masofa.
14. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
15. Ikki tekislik orasidagi burchak.
16. To'g'ri chiziq va tekislikning kesilish nuqtasi qanday topiladi?

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. -T.: Fan va texnologiya, 2007.

2. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры задачи. - М., Экзамен, 2005.

3. Кремер Н.М. и другие. – Высшая математика для экономистов. -М., 2004.

4. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.

5. Минорский И.П. Сборник задач по высшей математике. – М., 2004.

6. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. - М., Инфра – М., 2003.

7. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. –Т., Ўкитувчи, 1996.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебра. – М.: Наука, 1998 .

9. Шипачев В. С. Курс высшей математики. - М.: Проспект, 2005.

10. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўкитувчи, 3-жилд. 1996.

11. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.

12. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - Н., 2008.

13. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.,-2008.

14. Ермаков В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. - Н., 2010.

6-bob. LIMITLAR

6.1. Sonli ketma- ketliklar va ularning limiti

Agar har bir natural n songa biror qoida yoki qonun asosida bitta a_n son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ sonli ketma – ketlik deyiladi:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \qquad (6.1)$$

Boshqacha qilib aytganda sonli ketma-ketlik n- natural argumentning funksiyasidir: $a_n = f(n)$.

Masalan: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$; $\{-1+(-1)^n\}$ yoki

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$0, 2, 0, 2, \dots$$

Agar har qanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda o'zgarmas a son $\{a_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Agar shunday M musbat son mavjud bo'lib, har qanday natural n soni uchun

$$|a_n| \leq M$$

bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Limitga ega bo'lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar har qanday natural n son uchun

$$a_{n+1} > a_n$$

tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ o'suvchi;

$$a_{n+1} < a_n$$

bo'lsa $\{a_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi. Faqat o'suvchi yoki kamayuvchi ketma-ketlik monoton ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi (kamayuvchi) va yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u limitga ega.

6.2. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar

Limiti nolga teng bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor deyiladi. Chegaralanmagan ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmaydi, lekin uning limiti cheksiz bo'lishi mimkin:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Agar $\{a_n\}$ – cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $\{1/a_n\}$ - cheksiz katta miqdor bo'ladi va aksincha.

1. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ - yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$ demak yaqinlashuvchi.

2. $\{a_n\}=(-1)^n$, yoki -1, 1, -1, 1, ... limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatan, limit sifatida qanday sonni tasavvur qilmaylik 1 yoki – 1, $\varepsilon<0,5$ da, $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik qanoatlantirilmaydi. Bu ketma-ketlikning barcha toq raqamlari – 1, juftlari 1 ga teng.

6.3. Yaqinlashuvchi ketma – ketlikning xossalari

1) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limitga ega bo'ladi.

2) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.

3) Yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklarining yig'indisi (ayirmasi) yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning limiti $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar limitlarining yig'indisiga tengdir.

4) Yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklarning ko'paytmasi yana yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi, uning limiti $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ limitlarining ko'paytmasiga tengdir.

5) Ikkita $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ yaqinlashuvchi, ketma-ketliklarning bo'linmasi, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ bo'lganda yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning limiti $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar limitlarining nisbatiga tengdir.

6) Agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari biror n raqamdan boshlab, $x_n\geq b$ $(x_n\leq b)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda bu ketma- ketlikning a limiti ham $a\geq b$ $(a\leq b)$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

7) Cheksiz kichik miqdorning chegaralangan ketma-ketlikka yoki songa ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

8) Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi cheksiz kichik miqdordir.

3. Ketma-ketlikning limitini toping.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$$

Yechish. Kasrning surat va maxrajini n^2 ga bo'lib, bo'linma va yig'indining limiti qoidalaridan foydalanamiz.

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+1/n-3/n^2)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)-\lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)}=\frac{3+0+0}{4+0-0}=\frac{3}{4}.$$

4. Ketma-ketlikning limitini toping.

$$x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Yechish. Kasrning surat va maxraji chekli limitga ega bo'lmaydi, shuning uchun almashtirishni bajaramiz, surat va maxrajni n ga bo'lib:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1/\sqrt{n})}{1+1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/\sqrt{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}1/n}.$$

cheksiz kichik va chegaralangan ketma-ketliklarning limitidan foydalanib $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{0}{0+1} = 0$ ni hosil qilamiz.

5. Ketma-ketlikning n→∞ dagi limitini hisoblang.

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Yechish. Bu yerda yig'indining limiti haqidagi 4-xossadan foydalanib bo'lmaydi, chunki ketma-ketliklar yaqinlashuvchi emas. Shuning uchun x_n ni ifodasini uning qo'shmasiga ko'paytirib bo'lamiz.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/\sqrt{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+1/n}\right)+1} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

6. Quyidagi limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+8}{4n^2+5n-9}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$

7. Quyidagi limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-3}\right)$

6.4. Funksiyaning limiti

Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a| < \delta$ bo'lganda $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $|x| > N$ lar uchun $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

kabi belgilanadi.

6.5. Noaniqliklar

Umuman $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, noaniqliklar mavjud va ularni ochishni misollarda ko'rsatamiz.

Misol: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ limitni toping.

Yechish: agar x o'rniga 2 ni qo'ysak, $\infty-\infty$, ko'rinishidagi noaniqlik hosil bo'ladi. Bu noaniqlikni ochish uchun qavs ichidagi ifodani umumiy maxrajga keltiramiz. Natijada $\lim_{x\to 2}\left(-\frac{2-x}{x^2-4}\right)$, ya'ni $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniq hosil bo'ladi. Agar $x-2\neq 0$ deb kasr qisqartirilsa, berilgan limit quyidagiga teng bo'ladi:

$$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{4}$$

Misol: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-x^2+5}{3x^3+x^2-x}$ limitni toping.

Yechish: Bu holda $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi noaniqlikka ega bo'lamiz. Uni hisoblash uchun limit belgisi ostidagi kasrning surat va maxrajini x^3 ga bo'lamiz.

$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$ yuqoridagi keltirilgan limitlar haqidagi teoremalarga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-x^2+5}{3x^3+x^2-x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=3$$

6.6. Bir tomonlama limitlar

Agar $x\to a$ da $x>a$ bo'lsa, u holda $x\to a+0$ belgi, agar $x\to a$ da $x<a$ bo'lsa, u holda $x\to a-0$ belgi qo'llaniladi. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap va o'ng limitlari deb mos ravishda

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0}f(x)\ \text{va}\ f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

sonlarga aytiladi (agarda bu limitlar mavjud va chekli bo'lsa).

Limitni hisoblash qoidalari

agar C o'zgarmas bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}C=C.$$

agar $\lim_{x\to a}f(x)$ va $\lim_{x\to a}g(x)$ mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).$$

agar $\lim_{x\to a}f(x)$ va $\lim_{x\to a}g(x)$ mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

agar $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$ mavjud va $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

e) murakkab funksiya limiti:

agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ va $\lim\limits_{x\to c}g(x)=a$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to c}f(g(x))=b \text{ bo'ladi.}$$

Quyidagi ketma-ketliklarning limitini hisoblang.

8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^{100}}{(3n-1)^{98}(n+2)^2}$$

Yechish.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{100}n^{100}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{100}}{3^{98}n^{100}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}9\frac{\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{100}}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=9.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$

Yechish.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x^2}-2+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-2+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{7}{-2}=-3{,}5.$$

10.

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$$

Yechish. Belgilash kiritamiz. $\sqrt[6]{x}=t$ bunda $x\to 64\Rightarrow t\to 2$ demak $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=$

$$=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t^2+2t+4}{t+2}\right)=3.$$

11. - 22. Limitni hisoblang.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

12. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

14. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

16. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}$

17. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x^2-4}$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3-7x+6}$

20. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}$ **22.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

Ajoyib limitlar

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 - \textit{birinchi ajoyib limit;}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e - \textit{ikkinchi ajoyib limit.}$$

Bundan tashqari quyidagi umumiy holdagi formulalarni keltirib o'tamiz:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$. bunda $x\to a$ bo'lganda $f(x)\to\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$, bunda $x\to a$ bo'lganda $\varphi(x)\to 0$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$; $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x/m]{1+kx}=\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}=e^{km}$

23. Berilgan limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin Ax}{\sin Bx}$; *c*) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin^n\alpha}{\sin\alpha^m}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{x+3\cos x}$; *e*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; *f*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Yechish. *a*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}=7\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin Ax}{\sin Bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ax\sin Ax}{Ax}\cdot\dfrac{Bx}{\sin Bx}\cdot\dfrac{A}{Bx}=\dfrac{A}{B}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ax\sin Ax}{Ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Bx}{\sin Bx}=\dfrac{A}{B}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{A}{B}.$

c) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin^n\alpha}{\sin\alpha^m}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^n\cdot\alpha^n\cdot\left(\dfrac{\alpha^m}{\sin\alpha^m}\right)\cdot\dfrac{1}{\alpha^m}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha^n}{\alpha^m}\cdot 1=\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{n-m}=\begin{cases}0, \text{ agar } n>m,\\ 1, \text{ agar } n=m,\\ \infty, \text{ agar } n<m.\end{cases}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{x+3\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{3}{x}\cos x}=\dfrac{2-0}{1+0}=2.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{(x/2)}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}.$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}$ limitni hisoblang.

Yechish. Kasrning suratini maxrajiga bo'lib, butun qismini ajratib olamiz.

$$\frac{2x+1}{2x-3}=\frac{(2x-3)+4}{2x-3}=1+\frac{4}{2x-3}.$$

$x \to \infty$ da berilga funksiya asosi birga intiluvchi, ko'rsatgichi esa cheksizlikka intiluvchi darajani ifodalaydi, ya'ni 1^{∞} ko'rinishdagi noaniqlikka ega bo'lamiz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}}=\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}}$$

$x \to \infty$ da $\dfrac{4}{2x-3} \to 0$ bo'lgani sababli ikkinchi ajoyib limitga ko'ra:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}=8$ ekanini hisobga olib, yakuniy javob

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=e^{8}$ ekanini topamiz.

25. Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$

Yechish. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-0}{2+0}=1$ usul bilan yechadigan bo'lsak, bunda $[1^{\infty}]$ tipidagi noaniqlikka kelamiz.

$$\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1-4}{2x^2+1}=1+\frac{-4}{2x^2+1};\quad \alpha(x)=-\frac{4}{2x^2+1};\ x\to\infty \Rightarrow \alpha(x)\to 0$$

$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$ formuladan foydalanamiz:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{-4}{2x^2+1}\cdot\frac{2x^2+1}{-4}(-3x^2)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}}=e^{a}\ \textit{bunda}\ a=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{12}{2}=6$$

Demak $A=e^{6}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}=e^{-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Limitni hisoblang.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{3x}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-4}\right)^{3x}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+5}\right)^{-2x}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^2}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-2x+3}\right)^{5x^2}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^{10}-3}{7x^{10}+2}\right)^{-2x^{10}}$

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ $x\to x_0$ holda cheksiz kichik funksiyalar bo'lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

bo'lsa, u holda ular ekvivalent deyiladi va $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ ~ $\beta(x)$ kabi belgilanadi. Masalan, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. shu sababli $x\to 0$ da $\sin x \sim x$. Shunga o'xshash $x\to 0$ da quyidagi cheksiz kichik funksiyalar ekvivalentdir:

$\sin x \sim \mathrm{tg}x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}x \sim \ln(1+x) \sim e^x-1 \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $e^x \sim 1+x$, $a^x \sim 1+x\ln a$, $(1+x)^m \sim 1+mx$, $\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}\sim 1+\frac{x}{m}$, $\log_a^{(1+x)}=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\frac{x}{\ln a}$.

35. Limitlarni toping. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2}$.

Yechish. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x}{2x}\right)^2=\frac{9}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(1-0{,}5x^2\right)^{\mu}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1+0{,}5\mu x^2}{x^2}=0{,}5\mu$.

Ajoyib limitlar iqtisodiyotning statistika, bank kredit, korxona va tashkilotlarning hisoblash jarayonlarida samarali foydalaniladi. Ayniqsa, bank va kredit sohalarida murakkab foizlarni hisoblashda ikkinchi ajoyib limitdan, e soniga keltirish orqali hisoblash keng ko'lamda amalga oshiriladi. Bunga misol qilib quyidagilarni keltiramiz.

Uzluksiz foizni hisoblash masalasini ko'rib chiqamiz .

Bankka qo'yilgan boshlang'ich summa Q_0 bo'lsin. Bank yiliga jamg'armaning p% ini to'laydi. t yildan so'ng to'lanadigan Q_t jamg'armaning qiymati topilsin. Oddiy foizlardan foydalanilganda yillik jamg'armaning miqdori $\frac{P}{100}Q_0$ qiymatga o'sadi. $Q_1=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right), Q_2=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^2,\dots,Q_t=Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t$. Amaliyotda ko'pincha murakkab foizlardan foydalaniladi. Bunday holatda jamg'armaning yillik miqdori quyidagicha qiymatga o'sadi.

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right), Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2, \ldots, Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

Agar jamg'armaning foiz miqdorini yilda faqat bir marta emas, n marta hisoblansa, yillik $p\%$ o'sishda miqdorning $\frac{1}{n}$ qismi yilning $\frac{p}{n}\%$ ini, jamg'armaning t yildagi miqdori esa nt ni tashkil qiladi:

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{kt}$$

Faraz qilaylik, foizlar har yarim yilda qo'shib hisoblansa $k = 2$, har kvartalda $k = 4$, har oyga $k = 12$, har kuniga $k = 365$, har soatiga $k = 8760$ va hokazo. U holda jamg'arma miqdori t yilda

$$Q_t = \lim_{k\to\infty}\left(Q_0\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{kt}\right) = \lim_{k\to\infty} Q_0\left(\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right)^{\frac{pt}{100}} = Q_0\cdot e^{\frac{pt}{100}}$$

bu tenglik ko'rsatkichli (eksponensial) o'sish ($p > 0$ da) yoki kamayish ($p < 0$ da) qonunini ifodalaydi.

Izoh. Moliya-kredit amaliyotida foizni uzluksiz hisoblashdan kamdan – kam foydalanilsa ham, u murakkab moliyaviy vazifalarning tahlilida, xususan investitsion masalalarni tanlash va asoslashda foydali hisoblanadi.

36. Agar yiliga qo'shib hisoblashlar soni cheksiz o'zgarsa, u holda real stavka qanday o'zgaradi? (Boshqacha aytganda $k \to \infty$ da A_n nimaga intiladi?)

Yechish. $\lim A_n = \lim A_0\left(1+\frac{R}{k}\right)^n = = \lim A_0\left(\left\{1+\frac{R}{k}\right\}^{\frac{k}{R}}\right)^{\frac{Rn}{k}} = A_0 e^{(R/t)} = A_0 e^{Rt}$ bu yerda t - bank foizlari qo'shib hisoblangan yil miqdori. Shunday qilib, agar bank foizlari uzluksiz ravishda qo'shib hisoblansa, u holda hisobdagi summa $A = A_0\cdot e^{Rt}$, bu yerda A_0 boshlang'ich omonat miqdori, $e = 2{,}718\ldots$, R – yillik foiz stavkasi.

37. Inflyatsiya darajasi kuniga 1% ni tashkil qilsa, yarim yildan keyin boshlang'ich summa qanchaga kamayadi.

Yechish. Murakkab protsentlar formulasidan $Q = Q_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$.

bunda Q_0 – dastlabki summa miqdori, 182 – yarim yildagi kunlar soni. Bu formulani shaklini o'zgartirib, limitga o'tadi $Q = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{\frac{182}{100}} \approx \frac{Q_0}{e^{1.82}}$. Demak yarim yildan keyin dastlabki summa 6 marta kamayadi ($e^{1.82} \approx 6$).

38. Limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-6}{2x^3-7x^2+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x+1}{2x^4+3x^2+x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x+3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-5}{x^4+5x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+x}{4x^3+3x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+3x-4x^2}{2x^2-x+4}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-2x+1}{2x^4+x^2+5}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x+4x^2}{6+5x-3x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+4}{6x^3+x-5}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2-x}{x^2-x^3+3x^4}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-4x^2+5}{2x^3-3x^2+1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2+7}{3x^5+4x^3-2}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^3-3x^2+1}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^2+2}{x^4-3x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^3+3x-7}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2-x^4}{4+x^2+5x^4}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-7x+5}{2+x-4x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-4x^5+3}{x+3x^5-6x^7}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x-1}{3x^2+5x-2}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6-1}{4x^4-5x^5}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+3}{3-4x-10x^3}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-5}{4x^3-7}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^2+1}{1+3x^2-x^4}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x+1}{3x^3+2x^2-5}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{5x^2+3x-8}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x+2}{5x^3+4x^2-3}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+7}{1-2x-5x^5}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-2}{6-2x-3x^2}$

39. Limitni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-16}}{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x+4}}$

2. $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x-6}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{2-3x}-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{6x-5}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}$

5. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x+9}-\sqrt{3x+1}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$

8. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3x-2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{2x-7}}{\sqrt{1+2x}-3}$

10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{10+3x}}{\sqrt{2-x}-2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}$

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{5x+1}-4}$

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5+3x}}{4x^2+3x-1}$

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{x^2-8x+15}$

15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}{x^2-4x-5}$

16. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-\sqrt{12-x}}{x^2+3x-4}$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{9-2x}}{3x^2-2x-8}$

18. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-10}}{x^2-16}$

19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{x^2-2x-3}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{\sqrt{8+x}-\sqrt{4x+5}}$

21. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-10x+9}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x-2}}$

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x^2-7x-8}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{2x+7}-3}$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}$

25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-11}}{x^2+3x-40}$

26. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{2x+9}}{x^3+64}$

27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{x^2-9}$

28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{\sqrt{4-3x}-\sqrt{6-x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1-2x}}$

40. Hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{3x}{x-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x-1)(\ln(x+2)-\ln(x-1))$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-1))$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{x-1}}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln(x))$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x-5}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)(\ln(x+5)-\ln(x))$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{4x+3}$

14. $\lim\limits_{x\to-1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)(\ln(3x+4)-\ln(3x))$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{2x-7}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x^2-1}}$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-5x}{2-5x}\right)^{4x+5}$

20. $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{3x}{x+1}}$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x-5}\right)^{4x+3}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{x^2}{x-1}}$

24. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x-1}$

26. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}(3-5x)^{\frac{4x}{5x-2}}$

27. $\lim\limits_{x \to -\infty}(2x-1)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$

28. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3-2x}{5-2x}\right)^{3-2x}$

29. $\lim\limits_{x \to -1}(4x+5)^{\frac{3x}{x^2-1}}$

30. $\lim\limits_{x \to -\infty}(x-4)(\ln(3-2x)-\ln(5-2x))$

41. Limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$

3. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{2x^2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{4x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x tgx}$

6. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{tg2x-\sin 2x}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{tgx}{3\sin 3x}$

10. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{3x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 6x}{4x^2}$

13. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$

14. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos 5x}{3x^2}$

15. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{arctg2x}{tg3x}$

16. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x\sin x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{tg^2 x}\right)$

18. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$

19. $\lim\limits_{x \to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$

20. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\arcsin 5x}{x^2-x}$

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-tgx}$

22. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin 3x+\sin x}$

23. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$

24. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg3x}{\cos x-\cos x^3}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{1-\cos x}$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)}{\pi-2x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{1-\cos 2x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg4x}{arctg3x}$

42. 1986- yilning boshida orol aholisi soni 7500 kishini tashkil etar edi. Agar yiliga 2,5% dan ko'paysa, 1995-yil oxiriga kelib, orol aholisi soni qanchaga yetishi aniqlansin.

43. Yuk mashinasining boshlang'ich narxi 30000$. Yiliga amortizatsiya ajratmasi 15% bo'lsa. Yuk mashinasining narxi ikki yildan so'ng qancha bo'ladi? 5 yil, 8 yildan so'ng-chi?

44. 1987- yili orolda quyonlar soni 20000 tani tashkil etardi. Agar ular yiliga 30% dan ko'paysa, orolda qachon 60000 ta quyon bo'lishi aniqlansin.

45. Korxona 24 ming so'mga avtomobil sotib oldi. Yillik amortizatsiya avtomobil narxining 10% ini tashkil qiladi. t vaqtga bog'liq holda avtomobil narxini aniqlovchi tenglama tuzilsin. Avtomobilning a) 5 yildan; b) 6 yil 3 oydan keyingi narxi aniqlansin.

46. Gaz plitasi – 800 (ming) so'mga sotib olindi. Yillik amortizatsiya boshlang'ich narxning 15% ini tashkil qiladi:

a) t vaqtdan so'ng gaz plitasining narxi;

b) gaz plitasidan foydalanilgandan 6 yildan keyingi narxi;

c) gaz plitasining xizmat muddati aniqlansin.

47. Inflyatsiya darajasi kuniga 1 % ni tashkil qilsin, yarim yildan keyin boshlang'ich summa qanchaga kamayadi?

48. Mamlakat aholisining o'sishi yiliga p % ni tashkil qiladi. Necha yildan keyin davlat aholisi 2 barobar ko'payadi? 1) $p=5\%$, 2) $p=15\%$.

49. Inflyatsiya darajasi oyiga 6 %, kreditdan keladigan foyda yiliga 12 % ni tashkil qilishi uchun bank beradigan yillik stavka qanday foizda bo'lishi kerak?

50. Korxonaning ish haqini berish uchun xizmat qiladigan tijorat banki, unga tegishli bo'lgan summani kamida 9 oy ushlab turadi. Bu vaqt davomida bank bu pullarni qisqa muddatli kredit ko'rinishida 3 marta aylantirib oladi. Qisqa muddatli kreditlarni xususiy tadbirkorlarga 3 oy muddatga oyiga 3 % dan beradi. Bank bu amallarni bajarib qancha foyda oladi?

51. 50-masalaning shartiga ko'ra bankka quyidagi ikki usullardan qaysi biri foydaliroq:

1) korxonaning shaxsiy mulkidan yillik foiz stavkasi 20 % bo'lgani;

2) oyiga 3 % dan 3 oyda qo'yilgani.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Funksiya ta'rifi va misollar.
2. Funksiyaning berilish usullari.
3. Qanday funksiyalar elementar funksiyalar deyiladi?
4. Ketma-ketlik limitining ta'rifi.
5. Ajoyib limitlar:
   a) birinchi ajoyib limit;
   b) ikkinchi ajoyib limit.
6. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar nima?
7. Noaniqliklarni ochish.

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.

2. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz . -T., 2006.

3. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. - Т.: Ўзбекистон, 1999.

4. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994, 3-жилд, 1996.

5. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи. - М.: Экзамен, 2005.

6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: Дело, 2000.

7. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. - М., 2004.

8. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. -М., 2004.

9. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М.: Проспект, 2005.

10. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.

11. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - Н., 2008.

12. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М., 2008.

13. Ермаков В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. – Н., 2010.

7.1. Funksiya uzluksizligini hisoblash usullari

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar u quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

x_0 nuqtada aniqlangan (ya'ni $f(x_0)$mavjud);

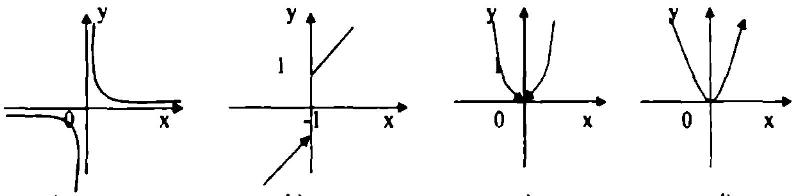
$x \to x_0+0$, $x \to x_0-0$ chekli limitlarga ega;

bu limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

1. Quyidagi funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring:

a) $y = \frac{1}{x}$; b) $y = \begin{cases} x+1, & agar\ x \geq 0, \\ x-1, & agar\ x < 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2, & agar\ x \neq 0, \\ 1, & agar\ x = 0 \end{cases}$; d) $y = x^2$.



a) b) c) d)

Yechish. a) Berilgan $y = \frac{1}{x}$ funksiya (*a* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, chunki uzluksizlikning birinchi sharti buzilgan – $f(0)$ mavjud emas.

b) $y = \begin{cases} x+1, & agar\ x \geq 0, \\ x-1, & agar\ x < 0 \end{cases}$ funksiya (*b* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, chunki uzluksizlikning birinchi sharti bajarilgan, $f(0)$ mavjud ($f(0) = 1$), lekin uchinchi shart buziladi (bu yerda funksiyaning bir tomonlama limitlari mavjud chapdan $\lim_{x \to 0-0} f(x) = -1$, o'ngdan $\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1$, lekin ular teng emas).

c) $y = \begin{cases} x^2, & agar\ x \neq 0, \\ 1, & agar\ x = 0 \end{cases}$ funksiya (*c* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzilishga ega uzluksizlikning ikkita sharti bajariladi, ya'ni $f(0)$ aniqlangan ($f(0) = 1$) va $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ chekli limit mavjud, lekin uchinchi asosiy shart buzilgan: $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

$y = x^2$ funksiya (*d* – rasmga qarang) $x = 0$ nuqtada uzluksiz, chunki uzluksizlikning uchala sharti bajariladi.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

7.2. Funksiyaning uzilishi va uning turlari

$f(x)$ funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya x nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, bu uzilishga ega deyiladi.

Uzilish turlari quyidagicha:

I – tur uzilish – funksiyaning chap va o'ng chekli limitlari mavjud, lekin ular teng emas (7.1. b) misol.

II – tur uzilish – bir tomonlama chap va o'ng limitlardan biri cheksiz yoki mavjud emas (7.1 a) misol).

I – tur uzilishga bartaraf qilinadigan uzilish deyiladi, bunda $x \to x_0$ da funksiyaning limiti mavjud, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas (7.1 c) misol).

2. $y=f(x)$ funksiyani $x=1$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring. Uzluksizlikka ega bo'lgan holda $x=1$ nuqtadagi xarakterini aniqlang.

$a)\ y(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x-1};\quad b)\ y(x)=\dfrac{x}{x-1};\quad c)\ y(x)=x-1;\quad d)\ y(x)=\begin{cases} x-1, & agar\ x\ge 1 \\ x+1, & agar\ x<1 \end{cases}$

Yechish. $a)$ $y(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$ funksiya $x=1$da aniqlanmagan. Demak bu nuqtada uzilishga ega.

Funksiya limitini hisoblaymiz: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=\lim\limits_{x\to 1}(1-1)^2=0$, ya'ni chekli limit mavjud, demak $x=1$ bartaraf qilinadigan 1-tur uzilish (7.2 – rasm).

Funksiyani $x=1$ nuqtada aniqlanishini to'ldirib, ya'ni $f(1)=0$ deb faraz qilib,

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}, & x\neq 1\ da \\ 0, & x=1\ da \end{cases}$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz.

$b)$ $y(x)=\dfrac{x}{x-1}$ funksiya $x=1$ nuqtada aniqlanmagan va $x=1$ nuqtada uzilishga ega chunki

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}=+\infty,\quad \text{va}\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}=-\infty \qquad (7.3\text{-rasm})$$

Bir tomonlama limitlar (bitta limit mavjud bo'lsa ham yetarli edi) cheksiz bo'lgani uchun $x=1$ 2-tartibli uzilish nuqtasi.

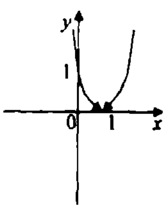
$c)$ $y(x)=x-1$ funksiya $x=1$ da aniqlangan, $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0,\ \lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)=0,\quad y(1)=0,$ ya'ni

$$\lim_{x\to 1+0}y(x)=\lim_{x\to 1+0}y(x)=y(1)=0$$

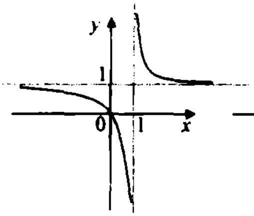
demak funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz. (7.4 – rasm)

$d)$ $y(x)=\begin{cases} x-1, & agar\ x\ge 1 \\ x+1, & agar\ x<1 \end{cases}$ funksiya $x=1$ da aniqlangan $y(1)=0$,

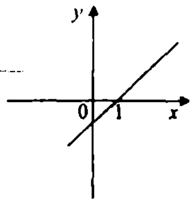
$\lim\limits_{x\to 1-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x) \neq \lim\limits_{x\to 1+0} y(x)$ ga ega bo'lamiz, shunday qilib, $x=1$ nuqtada funksiya bartaraf qilinadigan uzilishga ega (7.5 – rasm).



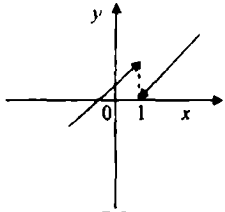
7.2-rasm



7.3-rasm



7.4-rasm



7.5-rasm

3. Funksiyani uzluksizlikka tekshiring, uzilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$x = 0$ da funksiya aniqlanmagan. Uzilish turini aniqlash uchun $x = 0$ da bir tomonlama limitlarni topamiz:

($x \to -0$ da ko'rsatkich darajasi $\frac{1}{x} \to -\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to 0$ uchun).

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

($x \to +0$ da ko'rsatkich darajasi $\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ uchun, $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \to 0$)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Chap va o'ng limitlar teng bo'lmagani uchun funksiya $x = 0$ nuqtada 1- tur uzilishga ega.

4. $y = \dfrac{x}{x-3}$ funksiyaning uzilish nuqtasini toping va uzilish turini aniqlang.

Yechish. $x = 3$ nuqta berilgan funksiyaning uzilish nuqtasi. Chunki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty.$$

Demak, ta'rifga ko'ra berilgan funksiya $x_0=3$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

5. Agar $f(x) = signx = \begin{cases} -1, & agar\ x<0; \\ 0, & agar\ x=0; \\ 1, & agar\ x>0. \end{cases}$ bo'lsa, $f(x)$ ning uzilish nuqtasini va uzilish turini aniqlang.

Yechish. Ko'rinib turibdiki, berilgan funksiyaning uzilish nuqtasi $x_0=0$ nuqta va $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = 1$, $f(x_0) = 0$ hamda $f(x) \neq f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ ekanligidan ta'rifga ko'ra berilgan funksiya $x=0$ nuqtada 1-tur uzilishiga ega.

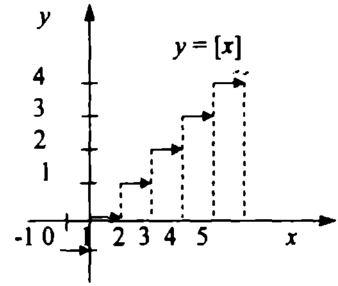
6. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ funksiyani uzilish nuqtasi va turlari bo‘yicha tekshiring.

Yechish. $x_0 = 0$ da $f(x_0)=e^{\frac{1}{x_0}}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0-0}(e^{\frac{1}{x}})=0$ *va* $\lim\limits_{x\to x_0+0}(e^{\frac{1}{x}})=+\infty$ demak $x_0 = 0$ nuqtada funksiya 2-tur uzilishga ega.

7.3. $[x]$, $\{x\}$, $\sin x$, $\chi(x)$ funksiyalar

$f(x)=[x]$ (o‘qilishi "ant'e x"), bu yerda $[x]$ – x sonining butun qismi, ya'ni x dan katta bo‘lmagan eng katta butun son (masalan, $[2.6] = 2$, $[-2.6] = -3$). $x=\frac{3}{2}$ nuqtada $f(x) = [x]$, funksiya uzluksiz, yoki $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=1$, $x = 1$ nuqtada esa funksiya aniqlangan $f(1) = 1$, lekin uzilishga ega, chunki $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ mavjud emas (aniqrog‘i bir-biriga teng bo‘lmagan chap va o‘ng chekli limitlar mavjud $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=1$).

$f(x) = [x]$ barcha haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangani bilan, elementar funksiya emas, chunki barcha butun sonlarda uzulishga ega (7.1 – rasm).



7.1- rasm.

7.4. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Agar funksiya qaralayotgan oraliqning hamma nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu oraliqda uzluksiz deyiladi. Elementar funksiyalarning barchasi o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

1. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi, ko‘paytmasi, bo‘linmasi (maxraj noldan farqli bo‘lganda) shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

2. Agar $y = f(u)$ funksiya $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada, uzluksiz bo‘lsa $u = \varphi(x)$ funksiya esa x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

3. Agar funksiya biror oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu oraliqda uzluksiz deyiladi. Barcha elementar funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

7.5. Bo'lsano Koshi teoremalari

Bo'lsano Koshining 1-teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ segmentda aniqlangan, uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday c $(a< c< b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi:

$$f(c) = 0.$$

Bo'lsano Koshining 2-teoremasi. Agar $f\ (x)$ funksiya $[a;\ b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uning chetki nuqtalarida $f(a) = A$, $f(b)=B$ qiymatlarga ega va $A \neq B$ bo'lsa, A va B sonlari orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki, bunda $f(c)=C$ bo'ladi.

Veyershtrasning 1-teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

Veyershtrasning 2 - teoremasi . Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda quyi chegaralariga erishadi.

6. $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2x^2}$ funksiyani uzluksizligini tekshiring.

Yechish. $|x| = \begin{cases} x, & agar\ x \geq 0\ bo'lsa, \\ -x & agar\ x < 0\ bo'lsa. \end{cases}$

Bundan ko'rinadiki,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x > 0\ bo'lsa, \\ -\dfrac{1}{x} & agar\ x < 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

$x = 0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bolib, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$ va $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = +\infty$ munosabat o'rinli. Demak, $x = 0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

7. Quyidagi funksiyani uzluksizligini tekshiring va grafigini chizing.

$$f(x) = \frac{1}{\sin x^2}$$

8. Berilgan funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo'ladi.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot ctgx,\ agar\ x \neq 0\ va\ |x| < \dfrac{\pi}{2} bo'lsa. \\ a\ , agar\ \ x = 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

Funksiyaning uzilish nuqtasini toping

9. $f(x) = 4^{\frac{2}{5-x}}$

10. $f(x) = 6^{\frac{1}{x+3}}$

11. $f(x) = 3^{\frac{2}{1-x}}$

12. $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & agar\ \ x \leq 1\ bo'lsa, \\ x^2 - 2, & agar\ \ -1 < x < 2\, bo'lsa, \\ x, & agar\ \ x \geq 2\ \ bo'lsa. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & agar\ x \leq 0\ bo'lsa, \\ (x+1)^2, & agar\ 0 < x \leq 2\ bo'lsa, \\ 4 - x, & agar\ x > 2\ \ bo'lsa. \end{cases}$

Berilgan funksiyalarni uzilish nuqtasini va turini aniqlang

14. $f(x)=\begin{cases} x-2, & agar\ x<0\ bo'lsa, \\ 2, & agar\ x=0\ bo'lsa, \\ x^2-2, & agar\ x>0\ bo'lsa. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} x-2, & agar\ x<0\ bo'lsa, \\ -2, & agar\ x=0\ bo'lsa, \\ -x-2, & agar\ x>0\ bo'lsa. \end{cases}$

16. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

17. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2}$

18. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

19. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$

20. $f(x)=\begin{cases} x-2, & agar\ x<2\ bo'lsa, \\ x+2, & agar\ x\geq 2\ bo'lsa. \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} x-3, & agar\ x<0\ bo'lsa, \\ x+1, & agar\ 0\leq x\leq 4\ bo'lsa, \\ 3+\sqrt{x}, & agar\ x>4\ bo'lsa. \end{cases}$

22 -28. Funksiyani uzluksizlikka tekshiring va grafigini chizing.

22. $y=\dfrac{3}{x-4}.$

23. $y=|x|.$

24. a) $y=-\dfrac{5}{x};$ b) $y=lgx.$

25. a) $y=x-|x|;$ b) $y=3-\dfrac{|x|}{x}.$

26. a) $y=3^{\frac{1}{x-3}};$ b) $y=1-3^{\frac{1}{x}}.$

27. a) $y=2^{\frac{1}{x-3}};$ b) $y=5-4^{\frac{1}{x^2}}.$

28. Funksiyaning uzilish nuqtalarini toping. Uning uzilish nuqtasi atrofidagi shaklini chizing.

1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$
2. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}$
3. $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$
4. $f(x)=8^{\frac{3}{4-x}}$
5. $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$
6. $f(x)=6^{\frac{1}{2-x}}$
7. $f(x)=5^{\frac{3}{x-8}}$
8. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$
9. $f(x)=4^{\frac{2}{x-6}}$
10. $f(x)=4^{\frac{2}{5-x}}$
11. $f(x)=9^{\frac{3}{4-x}}$
12. $f(x)=6^{\frac{1}{x+3}}$
13. $f(x)=7^{\frac{2}{3-x}}$
14. $f(x)=7^{\frac{2}{x+5}}$
15. $f(x)=6^{\frac{1}{x-4}}$
16. $f(x)=9^{\frac{1}{x+2}}$

17. $f(x)=5^{\frac{7}{2-x}}$ 18. $f(x)=6^{\frac{3}{x+1}}$

19. $f(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$ 20. $f(x)=8^{\frac{1}{x+4}}$

21. $f(x)=3^{\frac{3}{4-x}}$ 22. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}$

23. $f(x)=5^{\frac{3}{4-x}}$ 24. $f(x)=5^{\frac{4}{x+3}}$

25. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$ 26. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$

27. $f(x)=4^{\frac{3}{3-x}}$ 28. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}$

29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$ 30. $f(x)=6^{\frac{3}{x+2}}$

Berilgan funksiyani uzilish nuqtalarini toping. Ularning grafigini chizing

1. $f(x)=\begin{cases} 2 & agar\ x\ge 2 \\ 2^x & agar\ 0\le x<2 \\ x+1 & agar\ x<0 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ x\ge 1 \\ x^2 & agar\ 0\le x<1 \\ x^3 & agar\ x<0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \cos x & agar\ x\le 0 \\ x+1 & agar\ 0<x\le 2 \\ 2 & agar\ x>2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2x & agar\ x\ge 0 \\ -x^2 & agar -1\le x<0 \\ -x & agar\ x<-1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x-3 & agar\ x\ge 3 \\ x^3 & agar\ 0\le x<3 \\ x & agar\ x<0 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x^2 & agar\ 0<x\le 2 \\ x-1 & agar\ x\le 0 \\ x+2 & agar\ x>2 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} \sin x & agar\ x\ge 0 \\ x^2 & agar\ -1\le x<0 \\ x & agar\ x<-1 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 1-x & agar\ x\ge 1 \\ \log_2 x^2 & agar\ -1<x<1 \\ x+3 & agar\ x\le -1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} x & agar\ x\ge 0 \\ (x+3)^2 & agar -2<x<0 \\ x+3 & agar\ x\le -2 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x^2 & agar\ x\le 1 \\ \lg x & agar\ 1<x<10 \\ 11-x & agar\ x>10 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ x\ge 1 \\ x^2 & agar\ 0\le x\le 1 \\ -x & agar\ x<0 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & agar\ 0<x<1 \\ 1 & agar\ x\ge 1 \\ x+1 & agar\ x\le 0 \end{cases}$

13 $f(x)=\begin{cases} 3x & agar\ 0\le x<1 \\ 2 & agar\ x\ge 1 \\ x+1 & agar\ x\le 0 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} x+2 & agar\ x>2 \\ 2x & agar\ 0<x\le 2 \\ x+3 & agar\ x\le 0 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}\sin x & agar\ x\ge 0\\ x & agar\ -2\le x<0\\ 2 & agar\ x<-2\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}\cos x & agar\ x\le 0\\ x-1 & agar\ 0<x\le 1\\ x-1 & agar\ x>1\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}1 & agar\ x\ge 1\\ x^3+1 & agar\ -1\le x<1\\ x+3 & agar\ x<-1\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}-x & agar\ x\le 0\\ 2x^3 & agar\ 0<x\le 1\\ x+2 & agar\ x>1\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}x-1 & agar\ x\ge 2\\ (x-1)^2 & agar\ 0\le x<2\\ x & agar\ x<0\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}3 & agar\ x\ge 1\\ (x+1)^2 & agar\ -2\le x<1\\ x+3 & agar\ x<-2\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}x & agar\ x\ge 3\\ (x-2)^2+2 & agar\ 1\le x<3\\ -x & agar\ x<1\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}x-1 & agar\ x\le -1\\ x^3+1 & agar\ -1<x\le 1\\ x & agar\ x>1\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}\sin x & agar\ x\le 0\\ \sqrt{x} & agar\ 0<x\le 4\\ x-3 & agar\ x>4\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}-x & agar\ x\le 0\\ \sqrt[3]{x} & agar\ 0<x\le 8\\ 9-x & agar\ x>8\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2} & agar\ x\le 0\\ x+1 & agar\ 0<x\le 2\\ x-1 & agar\ x>2\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}1 & agar\ x\ge \dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\sin x}{\cos x} & agar\ -\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ -x & agar\ x<-\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}x+1 & agar\ x\le 0\\ \sqrt{x}+1 & agar\ 0<x\le 4\\ 5-x & agar\ x>4\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}9-x & agar\ x\ge 8\\ \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{2} & agar\ -1\le x<8\\ \dfrac{x}{2}+1 & agar\ x<-1\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}x & agar\ x\ge 2\\ x^2 & agar\ 0\le x<2\\ \sin x & agar\ x<0\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x & agar\ x\ge \dfrac{\pi}{2}\\ \cos x & agar\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x & agar\ x<0\end{cases}$

29. Funksiyaning uzilish nuqtasini toping. Uning uzilish nuqtasi atrofidagi shaklini chizing.

1. $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$

2. $f(x)=6^{\frac{1}{3-x}}$

3. $f(x) = 5^{\frac{2}{x+2}}$

4. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-6}}$

5. $f(x) = 2^{\frac{2}{x-4}}$

6. $f(x) = 7^{\frac{3}{x-4}}$

7. $f(x) = 8^{\frac{1}{4-x}}$

8. $f(x) = 9^{\frac{1}{x-2}}$

9. $f(x) = 6^{\frac{2}{3-x}}$

10. $f(x) = 5^{\frac{3}{x+3}}$

11. $f(x) = 3^{\frac{4}{5-x}}$

12. $f(x) = 4^{\frac{3}{5+x}}$

13. $f(x) = 7^{\frac{4}{5-x}}$

14. $f(x) = 9^{\frac{3}{5-x}}$

15. $f(x) = 8^{\frac{2}{x+3}}$

16. $f(x) = 3^{\frac{4}{x-8}}$

17. $f(x) = 5^{\frac{6}{5-x}}$

18. $f(x) = 4^{\frac{3}{8-x}}$

19. $f(x) = 7^{\frac{1}{4-x}}$

20. $f(x) = 6^{\frac{2}{2+x}}$

21. $f(x) = 8^{\frac{3}{x+4}}$

22. $f(x) = 9^{\frac{1}{x+1}}$

23. $f(x) = 5^{\frac{2}{1-x}}$

24. $f(x) = 6^{\frac{3}{x-4}}$

25. $f(x) = 3^{\frac{8}{x-4}}$

26. $f(x) = 4^{\frac{4}{4-x}}$

27. $f(x) = 7^{\frac{1}{4-x}}$

28. $f(x) = 9^{\frac{2}{x-3}}$

29. $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}$

30. $f(x) = 3^{\frac{3}{3-x}}$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Funksiya uzluksizligining ta'rifi.
2. Uzluksiz funksiyaning xossalari.
3. Elementar funksiyalarning uzluksizligi.
4. Funksiyaning uzilishi, uzilish turlari.
5. Bolsano Koshining teoremalari.
6. Veyershtras teoremasi.

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.

2. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи. - М.: Экзамен, 2005.

3. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz. – T., 2006.

4. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. - Т.: Ўзбекистон, 1999.

5. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. - М., 2004.

6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: Дело, 2000.

7. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. М.: Инфра – М., 2003.

8. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. - М., 2004.

9. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994. 3-жилд, 1996.

10. Минорский И.П. Сборник задач по высшей математике. - М., 2004.

11. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.

12. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - Н., 2008.

13. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М., 2008.

14. Ермаков В.И. Общий курс высшей математика для экономистов. - Н., 2010.

8-bob. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING DIFFERENSIAL HISOBI

8.1. Funksiya hosilasi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya biror X sohada aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ va $x_0 + \Delta x \in X$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\Delta x \to 0$ da $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

nisbatning limiti mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Hosilaning belgilanishi:

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}.$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (8.1)$$

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, hosilani topish jarayoni differensiallash deyiladi.

1. $y = x^2$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Avval x ga Δx orttirma beramiz va funksiya orttirmasi Δy ni topib (8.1) - formulaga qo'yamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

(8.1) formulaga ko'ra:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

2. $y = \dfrac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$

(8.1) formulaga ko'ra:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x^2}$$

3. $y = \sin x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$

(8.1) formulaga ko'ra:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Demak: $(\sin x)' = \cos x$

4. $y = \dfrac{2x + 3}{2x + 1}$ funksiyaning hosilasini hosilaning ta'rifidan foydalanib hisoblang.

Yechish. x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{2(x+\Delta x)+3}{2(x+\Delta x)+1} - \frac{2x+3}{2x+1} = \frac{(2(x+\Delta x)+3)(2x+1)-(2(x+\Delta x)+1)(2x+3)}{(2(x+\Delta x)+1)(2x+1)} =$$

$$= -\frac{4\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)(2x+1)};$$

(8.1) formulaga ko'ra:

$$y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{4\Delta x}{\Delta x(2x+2\Delta x+1)(2x+1)}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{4}{(2x+2\Delta x+1)(2x+1)}\right) = -\frac{4}{(2x+1)^2}.$$

5. $y=|x|$ funksiya hosilasini hisoblang.

Yechish. $x=0$ nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz, u holda funksiya Δy orttirma oladi:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & agar\ \Delta x<0\ bo'lsa, \\ \Delta x, & agar\ \Delta x>0\ bo'lsa. \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & agar\ \Delta x<0\ bo'lsa, \\ 1, & agar\ \Delta x>0\ bo'lsa. \end{cases}$$

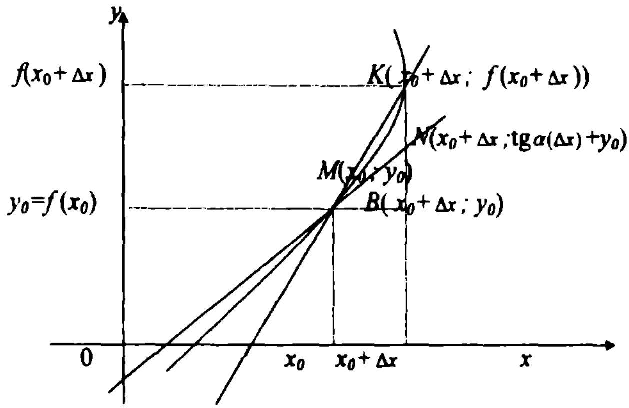
Ko'rinib turibdiki, $\Delta x=0$ nuqtada $y=|x|$ funksiya hosilaga ega emas, chunki $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limiti mavjud emas.

8.2. Hosilaning geometrik ma'nosi

Tekislikda berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0; y_0)$, (bu yerda $y_0=f(x_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi (1- rasm) chizmada avval MK to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra - orttirmani nolga qaratsak, grafikdagi K nuqta M nuqtaga yaqinlasha borib, MK to'g'ri chiziq MN - urinma holatini egallaydi. $\Delta x\to 0$ da MK to'g'ri chiziq OX – o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, MN - urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda MN - to'g'ri chiziqning tenglamasi $y-y_0=tg\varphi(x-x_0)$ ko'rinishda bo'lib, $x-x_0=\Delta x$ va $tg\varphi=k$ – MN to'g'ri chiziq OX – o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsiyenti ekanligini e'tiborga olsak, MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y=k\Delta x+y_0$ ko'rinishda bo'ladi. 1 - chizma MKB - uchburchak uchun $MB=\Delta x$, $KB=\Delta y$ va $tg\,\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} tg\alpha(\Delta x) = tg\varphi = k \qquad (8.2)$$

ya'ni $f'(x_0)=k$ tenglikni hosil qilamiz.



(1-rasm)

Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi uning grafigiga $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. MN - urinmaning $y=k\Delta x+y_0$ tenglamasida $\Delta x = x - x_0$, $y_0 = f(x_0)$ va $k=f'(x_0)$. U holda $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0). \qquad (8.3)$$

6. $y=x^2+3$ funksiya grafigiga $M(1;4)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini toping.

Yechish. (8.2)-formulaga ko'ra: $k = tg\varphi = f'(x_0) = 2x_0 = 2\cdot 1 = 2$

7. $y=x^2+3x+4$ funksiya grafigiga M (-1; 2) nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Yechish. (8.3) - formulaga ko'ra: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ bunda

$$f'(x_0) = f'(-1) = 2\cdot(-1) + 3 = 1, \quad f(x_0) = f(-1) = 2$$

Demak,

$$y = 1(x - (-1)) + 2$$

$$y = x + 3$$

8. $y = 2x^3 + 1$ funksiya grafigining $M(1;\ 3)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentini toping.

Yechish. (8.2) formulaga ko'ra:

$$k = tg\varphi = f'(x_0) = 6x_0^2,\ x_0 = 1.\ k = f'(1) = 6\cdot 1^2 = 6$$

Demak, $k = 6$.

9. $y = \sin x + \cos x$ funksiyaning $x_0 = \frac{\pi}{2}$ nuqtasidan o'tkazil;gan urinmaning tenglamasini tuzing.

Yechish. (8.3) formulaga ko'ra: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ bunda,

$$f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1,\ f'(x_0)=\cos x_0-\sin x_0=-1,\ y=1-1\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak, $y=\frac{\pi}{2}+1-x$.

10. $y=\ln x$ $(x>0)$ funksiyaning $x_0=1$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan qanday burchak hosil qiladi.

Yechish. **(8.2)** formulaga ko'ra:

$$tg\varphi=f'(x_0),\ f'(x_0)=\frac{1}{x_0},\ tg\varphi=f'(1)=1,\ \text{yoki}\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Demak, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosi

Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan obyektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U=U(t)$ funksiya t - vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t - vaqtga Δt - orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U=U(t_0+\Delta t)-U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rta}=\frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$Z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta t}=U'(t_0)$$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ hosilasi ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni

$$U'(t)=Z(t)$$

Hosilaning mexanik ma'nosi

Moddiy nuqtaning harakati $S=f(t)$ qoida bilan aniqlangan bo'lsin, bunda t vaqt, S bosib o'tilgan yo'l. Vaqtning t_0 va $t_0+\Delta t$ qiymatlarida $(\Delta t>0)$ $S=f(t_0)$ funksiya qiymatlari $f(t_0)$ va $f(t_0+\Delta t)$ ga teng, $f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ ayirma Δt vaqt oralig'ida o'tilgan ΔS yo'lni aniqlaydi:

$$\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

Demak, Δt vaqt ichida moddiy nuqta ΔS yo'lni o'tadi. Unda $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ nisbat moddiy nuqta harakatining o'rtacha tezligini bildiradi, $\Delta t\to 0$ da $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ning limiti moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini ifodalaydi.

$$\upsilon(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=f'(t_0) \qquad (8.4)$$

Shunday qilib, $S=f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi mexanik nuqtai nazardan $S=f(t)$ qoida bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini bildirar ekan, ya'ni $S'(t)=\upsilon(t)$. Moddiy nuqtaning oniy tezligidan olingan hosila esa, uning oniy tezlanishga teng bo'ladi, $\upsilon'(t)=a(t)$.

11. $S=2t^2+t$ (m) qonuniyat bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning $t=3$ (sek) dagi oniy tezligini toping.

Yechish. $\upsilon(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t+\Delta t)^2+(t+\Delta t)-2t^2-t}{\Delta t}=4t+1$

Demak, (3) = 4·3 + 1 = 13 m/sek, v = 13 m/sek.

12. $S=t^3-t^2-t+1$ (m) qonuniyat bo'yicha harakatlanayotgan moddiy nuqta qancha vaqtdan keyin to'xtaydi.

Yechish. $\upsilon(t)=3t^2-2t-1$ (m/sek) moddiy nuqta harakatlanmasligi uchun uning tezligi nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni. $3t^2-2t-1=0$ ($t>0$) bundan, $t=1$ ekanligini topamiz.

Demak, moddiy nuqta 1 sekunddan keyin to'xtar ekan.

8.3. Hosila olish qoidalari

1. Agar $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda istalgan o'zgarmas a soni uchun $\varphi(x)=a\,f(x)$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bolib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0)=af'(x_0) \qquad (8.5)$$

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi,

$$\varphi'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0) \qquad (8.6)$$

3. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bolib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0) \qquad (8.7)$$

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bolib, $g(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi formula bilan topiladi:

$$\varphi'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad (8.8)$$

Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali

1. $y=C,\ y'=0.$
2. $y=u+v+w,\ y'=u'+v'+w'.$
3. $y=Cu,\ y'=Cu'.$
4. $y=uv,\ y'=u'v + uv'.$
5. $y=u^n,\ y'=nu^{n-1}u'.$
6. $y=\frac{u}{v},\ y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$
7. $y=a^u,\ y'=a^u\ln a\cdot u'.$
8. $y=e^u,\ y'=e^u u'.$
9. $y=\ln u,\ y'=\frac{u'}{u}\ u>0$
10. $y=\log_a u,\ y'=\frac{u'}{u}\log_a e\ u>0$
11. $y=\sin u,\ y'=u'\cos u.$
12. $y=\cos u,\ y'=-u'\sin u.$

13. $y = tg\,u,\ y' = \dfrac{u'}{\cos^2 x}$. 14. $y = ctg\,u,\ y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

15. $y = \arcsin u,\ y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ 16. $y = \arcsin u,\ y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17. $y = arctg\,u,\ y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$. 18. $y = arcctg\,u,\ y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

19. $y = f(u),\ u = u(x),\ y' = f_u'(u)\cdot u_x'$ 20. $x = x(t),\ y = y(t),\ y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$.

13. $y = (3x+1)(\frac{x}{2}+3)$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. $f(x)=3x+1,\ g(x) = (\frac{x}{2}+3)$ (8.7)-formulaga ko'ra:

$$y' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(3x+1)'(\frac{x}{2}+3)+(\frac{x}{2}+3)'(3x+1)=3(\frac{x}{2}+3)+\frac{1}{2}(3x+1)==3x+9\frac{1}{2}$$

14. $y=\dfrac{8x+1}{2-3x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. $f(x)=8x+1,\ g(x)=2-3x$ (8.8) - formulaga ko'ra:

$$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}=\frac{(8x+1)'(2-3x)-(2-3x)'(8x+1)}{(2-3x)^2}=\frac{8(2-3x)+3(8x+1)}{(2-3x)^2}=\frac{19}{(2-3x)^2}$$

8.4. Teskari va murakkab funksiyalarning hosilasi

$y = f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ oraliqda berilgan va unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'lsin.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 ($x_0\in(a,b)$) nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib $f'(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya $y_0=f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega va

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (8.9)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

15. $y = arsinx$ $(-1\le x\le 1)$ funksiyani hosilasini aniqlang.

Yechish. $y=arcsinx$ funksiya $x=siny$ funksiyaga nisbatan teskari funksiyadir. (8.9) - formuladan $f'(y_0)=\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}$ formulani olamiz. Bunda $f(x)=arcsinx$, $\varphi(y)=\sin y$.

Demak,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

16. $y = \arccos x$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. $x = \cos y$ ni x bo'yicha differensiallab $1=-\sin y\cdot y_x'$ ni hosil qilamiz.

Bundan, $y_x'=-\dfrac{1}{\sin y}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

17. $y = arctgx$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

18. $y = arcctgx$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Murakkab funksiyaning hosilasi

$y = \varphi(x)$ funksiya X to'plamda, $u = f(y)$ funksiya esa Y ($Y = \{\varphi(x);\ x \in X\}$) to'plamda aniqlangan bo'lib, $u = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada $\varphi'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $u = f(y)$ funksiya esa y_0 ($y_0 = \varphi(x_0)$) nuqtada $f'(y_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $u = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega bo'ladi va quyidagi formula bilan hisoblanadi;

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_{x=x_0} = f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0) \qquad (8.10)$$

19-25. funksiyalarning hosilasini hisoblang.

19. $y = \cos^3 x$

Yechish. $u = \cos x$ deb belgilashni kiritsak, $y = u^3$ hosil bo'ladi. (8.10) – formulaga ko'ra:

$$y' = (u^3)' = 3u^2\cdot u',\quad u' = (\cos x)' = -\sin x,\ y' = -3\sin x\cdot\cos^2 x.$$

20. $y = (1+\sin^3 2x)^4$

Yechish.

$$y' = 4(1+\sin^3 2x)^3(1+\sin^3 2x)' = 4(1+\sin^3 2x)^3 3\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot 2 = 24\cos 2x\cdot\sin^2 x(1+\sin^3 2x)^3$$

21. $y = tg^2(e^{-x})$.

Yechish. $y' = 2tg(e^{-x})\cdot\dfrac{1}{\cos^2(e^{-x})}\cdot(-e^{-x}) = -2tg(e^{-x})\dfrac{e^{-x}}{\cos^2(e^{-x})}$.

22. $y = \dfrac{(1+x)^2\sqrt[3]{(1-x)^2}}{(x^2+4)^4 e^{-\cos x}}$.

Yechish. $\ln y = \ln(1+x)^2 + \ln\sqrt[3]{(1-x)^2} - \ln(x^2+4)^4 - \ln e^{-\cos x}$.

$$y' = 2\ln(1+x) + \frac{2}{3}\ln(1-x) - 4\ln(x^2+4) + \sin x,\quad \frac{1}{y}y' = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{3(1-x)} - \frac{8x}{x^2+4} + \cos x,$$

$$y' = \frac{(1+x)^2\sqrt[3]{(1-x)^2}}{(x^2+4)^4 e^{-\cos x}}\left[\frac{2}{1+x} - \frac{2}{3(1-x)} - \frac{8x}{x^2+4} + \cos x\right]$$

23. $y = x\,arctg^3 5x + \ln tgx$.

Yechish.

$$y' = arctg^3 5x + 3x\,arctg^2 5x\frac{5}{1+25x^2} + \frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = arctg^3 5x + \frac{15x\,arctg^2 5x}{1+25x^2} + \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

24. $y = arc\sec x$

Yechish.

$$x = \sec y = \frac{1}{\cos y},\quad (x)' = \left(\frac{1}{\cos y}\right)',\quad 1 = \frac{\sin y}{\cos^2 y}\cdot y',\quad y' = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

25. $y = x^3\cdot e^{x^2}\cdot\sin 2x$.

Yechish.

$$y' = 3x^2\cdot e^{x^2}\sin 2x + x^3\left(2x\cdot e^{x^2}\right)\cdot\sin 2x + x^3\cdot e^{x^2}2\cdot\cos 2x = x^2\cdot e^{x^2}\sin 2x\left(3+2x^2+2x\cdot ctg 2x\right)$$

Yashirin funksiya hosilasi

Ikkita x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish $F(x,y)=0$ tenglama ko'rinishida berilgan bo'lsin. $F(x,y)=0$ yashirin funksiyani oshkor ko'rinishga keltirmasdan hosilasini topish qoidasini ko'rsatamiz. y ni x ning funksiyasi deb $F(x,y)=0$ tenglamaning ikkala qismini differensiallash, so'ngra hosil qilingan tenglamani y' ni topish kerak. Buni quyidagi misolda ko'rsatamiz.

Misol: $x^4+y^4-3xy=0$ yashirin funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

***Yechish*:** y ni x ning funksiyasi deb belgilangan tenglamasining ikkala qismini differensiallaymiz $4x^3+4y^3y'-3y-3xy'=0$ bundan esa $y'=(4x^3-3y)/(3x-4y^3)$ ni topamiz.

26 –28. funksiyalarning hosilasini hisoblang.

26. $x\cdot e^y+y\cdot e^x=xy$.

Yechish: $\left(x\cdot e^y+y\cdot e^x\right)'=(xy)'$, $e^y+xe^yy'+y'\cdot e^x+y\cdot e^x=y+xy'$,

$y'\cdot\left(xe^y+e^x-x\right)=-e^y-y\cdot e^x+y$, bundan $y'=\dfrac{y-\left(e^y+ye^x\right)}{e^x+x(e^y-1)}$.

27. $\ln(x^2+y^2)=2arctg\dfrac{y}{x}$,

Yechish.

$$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=2\frac{1}{1+(y^2/x^2)}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}, \qquad x+yy'=xy'-y, \qquad y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

28. $y=x^x$

Yechish: $y=x^x$ logarifmlab, $\ln y=x\cdot\ln x$ ni olamiz. Uni x bo'yicha differensiallab,

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1, \qquad y'=x^x(\ln x+1).$$

hosil bo'ladi. Tenglamani avval logarifmlab, keyin differensiallash hosila olishni ancha soddalashtiradi.

8.5. Funksiya differensiali va uning taqribiy hisoblashlardagi tatbiqlari

Hosila ta'rifiga ko'ra, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitning ta'rifiga asosan esa $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\varepsilon(x)$ yoki $\Delta y=y'+\varepsilon(x)\Delta x$ ifodaga ega bo'lamiz. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(x)=0$ tenglikdan ko'rinib turibdiki, funksiya orttirmasi Δy ni ikki qismga ajratish mumkin. Birinchi qism erkli o'zgaruvchining orttirmasi Δx ga nisbatan chiziqli bo'lgan, ikkinchi qismi Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordan iborat. Birinchi qism $y'\Delta x$ funksiya orttirmasining asosiy qismi (bosh qismi) yoki differensiali deyiladi va

$$dy=y'\Delta x \qquad (8.11)$$

kabi belgilanadi. Erkli o'zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga teng, ya'ni $dx=\Delta x$. U holda (8.11) ifoda $dy=y'dx$ yoki $dy=f'(x)dy$ kabi yoziladi.

$$d(y)=y'dx, \quad dy=f'(x)dx \qquad (8.12)$$

29. $y=x^3+2x^2+2$ funksiyaning differensialini hisoblang.

Yechish. (8.11) formulaga ko'ra:

$$dy = y'dx = (x^3+2x^2+2)'dx = (3x^2+4x)dx.$$

30. $y = e^{2x} + cos2x$ funksiya differensialini toping.

Yechish. $dy = y'dx$ formulaga ko'ra:

$dy=(e^{2x} + \cos 2x)'dx = ((2x)'e^{2x} + (\cos 2x)')dx = (2e^{2x} - 2\sin 2x)dx = 2(e^{2x} - \sin 2x)dx.$

31. $y = \ln(e^{2x} + x + 1)$ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. $dy = d\ln(e^{2x}+x+1) = \left[\ln(e^{2x}+x+1)\right]'dx = \dfrac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x+1}\cdot dx$

demak, $dy = \dfrac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x+1}\cdot dx$

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a, b) intervalda berilgan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, $u(x) \pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, hamda $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $(v(x) \neq 0)$ funksiyalar ham shu intervalda differensiallanuvchi bo'ladi, ya'ni,

$$d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$$

$$d[u(x)\cdot v(x)] = v(x)\cdot du(x) + u(x)\cdot dv(x).$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)\cdot du(x) - u(x)\cdot dv(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \neq 0) \quad \text{bo'ladi.}$$

Funksiyaning differensialidan uning qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalaniladi. $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x$ munosabatdan taqribiy hisoblashda foydalaniladi.

32. $\sqrt[3]{28}$ miqdorni taqribiy hisoblang.

Yechish. Bu miqdorni $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyani $x = 28$ nuqtadagi qiymati deb qarash mumkin. Agar $x_0 = 27$ deb olsak, unda $\Delta x = x - x_0 = 1$ bo'lib, yuqorida ko'rib o'tilgan formulaga asosan

$\sqrt[3]{28} \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot 1 = 3 + \dfrac{1}{27} \approx 3{,}0037$. Demak $\sqrt[3]{28} \approx 3{,}0037$.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

Faraz qilaylik, y funksiyaning x argumentga bo'g'liqligi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = (t) \end{cases}$ tenglamalar bilan parametrik shaklda berilgan bo'lsin. Masalan:

1) $x = x_0 + l\cdot t,\ y = y_0 + m\cdot t$ – to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi.

2) $x = x_0 + R\cdot \cos t,\ y = y_0 + r\cdot \sin t$ – aylananing parametrik tenglamasi $(x - x_0)$ va $(y - y_0)$ larni kvadratga ko'tarib, qo'shish natijasida (haqiqatan ham $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ – markazi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasini hosil qilamiz).

3) Xuddi shuningdek, $x = a\cdot \cos t,\ y = b\cdot \sin t$ – ellipsning parametrik tenglamasi, $\dfrac{x}{a}$ va $\dfrac{y}{b}$ ni kvadratga ko'tarib qo'shib, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamani hosil qilamiz.

Parametr t ga Δt orttirma beramiz, mos ravishda Δx va Δy orttirmalar hosil bo'ladi. U holda y dan x bo'yicha hosila:

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'_t}{x'_t}\quad yoki\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

33. $x=e^{2t}\cos^2 t,\ y=e^{2t}\sin^2 t$; y'_x hosilani hisoblang.

Yechish. $x'_t=2e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}(-2\cos t\cdot\sin t)=2e^{2t}(\cos t-\sin t)\cos t,$

$y'_t=2e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}\cdot 2\cos t\cdot\sin t=2e^{2t}(\cos t+\sin t)\sin t,$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=tgt\cdot\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}=tgt\cdot\frac{1+tgt}{1-tgt}=tgt\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\quad \left(t\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right).$$

34. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$; $y'_x=?$

Yechish. $x'_t=a(1-\cos t),\ y'_t=a\sin t,\ y'_x=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=ctg\dfrac{t}{2}\ (t\neq 2\pi k)$.

35-37. y'_x hosilasini hisoblang.

35. $x=a\cos t,\ y=a\sin x$;

36. $x=t^2,\ y=\dfrac{t^3}{3}-t$;

37. $x=e^{2t},\ y=e^{3t}$.

8.6. Yuqori tartibli hosilalar

Birinchi tartibli hosiladan olingan hosila ikkinchi tartibli hosila deyiladi va y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ belgilarning biri bilan belgilanadi.

Ikkinchi tartibli hosilaning hosilasiga uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ (8.12) belgilarning biri bilan belgilanadi.

Umuman, $y=f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb, uning $(n-1)$ - tartibli hosilasining hosilasiga aytiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ (8.13) belgilarning biri bilan belgilanadi.

$y=f(x)$ funksiya differensiali dy ning differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deb ataladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^2y=d(dy)\quad \text{yoki}\quad d^2f(x)=d(df(x))\qquad (8.14)$$

Funksiyaning differensialini uning hosilasi orqali ifodalovchi $dy=y'dx$ formulaga ko'ra:

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=dxd(y')=dx(y')'dx=y''dx^2$$

Demak, funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining argument differensiali kvadrat ko'paytmasiga teng.

Umumiy holda funksiyaning n – tartibli differensiali uning $(n-1)$ – tartibli differensialining differensialidan iboratdir:

$$d^ny=d(d^{n-1}y),\ d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x))\qquad (8.15)$$

38. $y=e^x+x^2$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish. (8.13) – formulaga ko'ra $n=3$ da $y^{(3)}=(y^{(2)})'$

$y''=(y')'=((e^x+2x)')'=(e^x+2x)'=e^x+2$

$y^{(3)}=(e^x+2)'=e^x+0=e^x$

8.7. Differensial hisobining asosiy teoremalari

1. ***Ferma teoremasi.*** $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi;

c) kesmaning oxirlarida $f(a) = f(b)$ teng qiymatlar qabul qilsa, u holda, aqalli bitta shunday $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta mavjudki, unda $f'(c)=0$ bo'ladi.

2. ***Roll teoremasi.*** Agar $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda berilgan oraliqda aqalli bitta $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta mavjudki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$ bo'ladi.

3. ***Lagranj teoremasi.*** $y = f(x)$ *va* $y = g(x)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsin;

a) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

b) (a, b) oraliqda differensialanuvchi;

c) $g'(x) \neq 0, \quad x \in [a, b]$

u holda bu oraliqda aqalli bitta shunday $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta mavjudki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

4. ***Koshi teoremasi.*** Agar $f(x)$ funksiya x oraliqning ichki nuqtasi x_0 da o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsa, hamda shu x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya hosilasining x_0 nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi, ya'ni:

$$f'(x) = 0$$

8.8. Teylor formulasi

Teylor teoremasi: Agar $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada aniqlangan va uning biror atrofida $(n+1)$ – tartibgacha hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $x = \xi$ nuqta mavjudki unda Teylor formulasi o'rinli bo'ladi:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ξ nuqta x va a orasida yotadi, ya'ni $\xi = a + \theta(x-a)$ va $0 < \theta < 1$. Teylor formulasidagi oxirgi qo'shiluvchi Lagranj shaklidagi qoldiq had deyiladi. $a = 0$ da Teylor formulasi Makloren formulasi deyiladi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad 0 < \theta < 1$$

39 $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ funksiyani x-1 ning darajasi ko'rinishida ifodalang.

Yechish. Funksiya $a=1$ nuqtada aniqlangan va bu nuqtaning atrofida barcha hosilalari mavjud. Bu nuqtada funksiyaning qiymatini va beshinchi tartibgacha bo'lgan hosilasini hisoblaymiz.

$$f(1)=-1,\ f'(1)=\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)_{x=1}=-1,\ f''(1)=\left(\frac{-1\cdot 2}{(x-2)^3}\right)_{x=1}=-2,\ \ldots,\ f^{5}(1)=$$

$$\left(\frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(x-2)^6}\right)_{x=1}=-120$$

U holda Teylor formulasiga ko'ra x-1 ga nisbatan ko'phadni hosil qilamiz:

$$\frac{1}{x-2}=-1-(x-1)-\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{6}{3!}(x-1)^3-\frac{24}{4!}(x-1)^4-\frac{120}{5!}(x-1)^5+R_6=-1-(x-1)-$$

$$(x-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^4-(x-1)^5+R_6,\ bunda\ \ R_6=\left(\frac{6!}{6!(x-2)^6}\right)_{x=\xi}(x-1)^6=$$

$$=\frac{(x-1)^6}{(\xi-1)^6}\ va\ 1<\xi<x.$$

8.9. Lopital qoidasi

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a,\ b)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Agar: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ bo'lsa, u holda $x\to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $(\frac{0}{0})$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'ladi.

Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $x\to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'ladi.

Agar berilgan funksiyalar hosilaga ega bo'lsa, yuqoridagi noaniqliklarni ochish mumkin. Bunda Lopital qoidasidan foydalaniladi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiya $x=a$ nuqta atrofida mavjud va differensiallanuvchi bo'lib,

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=g(a)=0$, yoki ∞.

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)=0$, yoki ∞ va $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{8.17}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$ ni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}\lim\frac{0}{0}$ tipidagi noaniqlik bo'lib, Lopital qoidasiga ko'ra:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1\,\cdot$$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$ limitni hisoblang.

Yechish. Lopital qoidasini bir marta qo'llasak $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$ bo'lib, hosil bo'lgan limit ham $(\frac{0}{0})$ tipidagi noaniqlik bo'lganligi uchun Lopital qoyidasini ya'ni bir marta qo'llaymiz. Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=\frac{0}{2}=0$

8.10. Funksiya ekstremumlari

Agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x_0)>f(x)$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya uchun $x=x_0$ lokal maksimum nuqta deb ataladi.

Agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x_0)<f(x)$ bo'lsa, $x=x_0$ lokal minimum nuqtasi deb ataladi. Funksiyaning maksimum va minimumi uning ekstremal qiymatlari yoki ekstremumlari deyiladi.

Differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasidagi hosilasi nolga teng bo'ladi.

Funksiyaning *ekstremumlarini* topish.

$y'=f'(x)$ topiladi.

$f'(x)=0$ tenglama yechilib, statsionar nuqtalarning $x_1; x_2; \ldots, x_k$ absissalari topiladi.

$f''(x)=0$ tenglama yechimlari x_1, x_2 bilan $f'(x)$ funksiya ishoralari aniqlanadi va $f''(x_1)>0$ da $x=x_1$ minimum, $f''(x_2)<0$ da esa $x=x_2$ maksimum nuqta bo'ladi.

42. $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+1$ funksiyani hosila yordamida tekshiring.

Yechish. $f'(x)=x^3-4x^2+3x,\quad f''(x)=3x^2-8x+3$

$f'(x)=0 \Rightarrow x(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$

$f''(0)=3>0,\ f''(1)=-2<0,\ f''(3)=6>0$ demak $x_2=1$ maksimum nuqta.

$f''(x)=0 \Rightarrow 3x^2-8x+3=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3},\ x_2=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}.$

$\forall x\in\left(-\infty;\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ *uchun* $f''(x)>0$ $\quad\forall x\in\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3};\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ *uchun* $f''(x)<0$

$\forall x\in\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$ *uchun* $f''(x)>0$

Demak, funksiya grafigi $\left(-\infty;\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ va $\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$ oraliqlarda botiq,

$\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3};\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$

oraliqda esa qavariq bo'ladi.

8.11. Funksiyani hosila yordamida tekshirish

l to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning grafigiga asimptota deyiladi, agar $(x,f(x))$ nuqtadan bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa, grafikning nuqtasi koordinata boshidan cheksiz uzoqlashganda nolga intilsa, funksiya grafigining vertikal, gorizontal va og'ma asimptotalari bo'ladi.

Agar chap yoki o'ng $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$ limitlardan hech bo'lmaganda bittasi $\pm\infty$ ga teng bo'lsa $x=x_0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota deyiladi.

Agar uzilish nuqtasi yoki aniqlanish sohasining chegaraviy nuqtasi bo'lsa $x=x_0$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning vertikal asimptotasi bo'lishi mumkin.

Agar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ bo'lsa y=b to'g'ri chiziq gorizontal asimptota deyiladi.

Agar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0$ va $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$ bo‘lsa , u holda $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigiga og‘ma asimptota bo‘ladi.

Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2) funksiyani toq yoki juftligini tekshirish;
3) vertikal asimptotalarni topish;
4) funksiyani cheksizlikda tekshirish; gorizontal va og‘ma asimptotalarni topish;
5) funksiyaning ekstremumlari va monoton oraliqlarini topish;
6) funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari, bukilish nuqtalarini topish;
7) funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topish;

Funksiyani tekshirish grafikni chizish bilan bir vaqtda olib boriladi.

Funksiya hosila yordamida monotonlikka, ekstremumga va grafigining qavariq hamda botiqligi tekshiriladi.

$f'(x-h)$	$f'(x+h)$	Kritik nuqta haqida
+	-	Max
-	+	Min
+	+	Ekstremum yo‘q, funksiya o‘suvchi
-	-	Ekstremum yo‘q, funksiya kamayuvchi.

43. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ funksiyaning ektremumlarini toping.

Yechish.

$y' = 6x^2 - 18x + 12$

2) $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0$ $6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$

3) $a)$ $x = x_1 - 1$ nuqtaning atrofida y' ning ishorasi qanday o‘zgarishini tekshiramiz.

$h = -0{,}2$ bo‘lsin.

$$y' = f'(0{,}8) = 6(0{,}8 - 1)(0{,}8 - 2) > 0.$$
$$y' = f'(1{,}2) = 6(1{,}2 - 1)(1{,}2 - 2) < 0.$$

Hosilaning ishorasi (+) dan (-) ga o‘zgaryapti, demak $x = 1$ kritik nuqta maksimumdir.

$b)$ $x_2 = 2$da $f'(1{,}8) < 0$ va $f'(2{,}2) > 0$

Demak $x = 2$ min nuqta.

Quyidagi funksiyalarning hosilasini hisoblang.

44. $y = \frac{\sqrt{6x+1}}{x^3}$ **45.** $y = \sqrt[3]{1+\sin^2 x}$

46. $y = ctg^3 x - 3ctgx + 3x$ **47.** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

48. $y = \frac{(x-3)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-4)^{11}}}$ **49.** $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$

Quyidagi berilgan funksiyalarni ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblang.

50. $y = \sin^2 x$

51. $y = -\dfrac{3}{x^2 - 5}$

52. $y = tgx$

53. $y = ctgx$

54. $y = \sqrt{1 + x^2} \cdot arctgx.$

55. $y = arctgx$

Berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensalini hisoblang.

56. $y = arctgx$

57. $y = tgx$

58. $y = \sin 2x + \cos x$

59. $y = \ln x^2$

60. $y = e^{x^2 - 2x} + tg2x.$

Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang.

61. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(x + 1)}$

62. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1 - x)}$

63. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$

64. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\sin 3x}$

Funksiyalarni monotonlik oraliqlarini toping.

65. $y = x^3 + 2x - 3$

66. $y = x\left(1 + \sqrt{x}\right)$

67. $y = 2 - sinx, \quad 0 \le x \le 2\pi.$

Funksiyaning ekstremumlarini toping.

68. $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$

69. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

70. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

71. $y = x - cosx$

Funksiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini toping.

72. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$

73. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$

74. $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - \dfrac{9}{4}$

75. $y = \ln\dfrac{x}{x + 5} - 1$

76. $y = x\ln x$

77. $y = x - \ln x$

78. Berilgan funksiyalarning hosilasini hisoblang va absissasi x_0 nuqtadan o‘tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Variant	$f(x)$ funksiya va x_0 nuqta	Variant	$f(x)$ funksiya va x_0 nuqta
1.	$f(x) = x^3+3x^2-6x+4,\ x_0 = 1.$	16.	$f(x) = e^{2x-4} + 2\ln x,\ x_0 = 2.$
2.	$f(x) = 2x^2+5x+2,\ x_0 = -2.$	17.	$f(x) = x - \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$
3.	$f(x) = x^4+3x^2-5x-7,\ x_0 = -1.$	18.	$f(x) = x - \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$
4.	$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6,\ x_0 = 4.$	19.	$f(x) = x^2 + \ln(x - 1),\ x_0 = 2.$
5.	$f(x) = 2^{-x} + 2^{-2x},\ x_0 = 2.$	20.	$f(x) = x^2 + 3x + 2,\ x_0 = 0.$

6.	$f(x)=3^{-x}+3^{x},\ x_0=2.$	21.	$f(x)=\ln x,\ x_0=e.$
7.	$f(x)=\dfrac{x+3}{3-x},\ x_0=4.$	22.	$f(x)=\log_4^{(3x-4)},\ x_0=2.$
8.	$f(x)=x^2+\ln x,\ x_0=e.$	23.	$f(x)=\log_3^{(2x-1)},\ x_0=2.$
9.	$f(x)=\cos 3x+5x;\ x_0=\pi/3$	24.	$f(x)=\cos 3x,\ x_0=\dfrac{\pi}{6}.$
10.	$f(x)=\sqrt{x},\ x_0=2.$	25.	$f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-11},\ x_0=3.$
11.	$f(x)=\sin 2x-\ln(x+1),\ x_0=0.$	26.	$f(x)=-\log_5^{x^2+2x+6},\ x_0=-1.$
12.	$f(x)=4\sqrt{x},\ x_0=3.$	27.	$f(x)=9-x^2,\ x_0=2.$
13.	$f(x)=\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$	28.	$f(x)=4\ln x-3x,\ x_0=4.$
14.	$f(x)=e^{x}+x^2,\ x_0=1.$	29.	$f(x)=\sin x+\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$
15.	$f(x)=3^{x}+x^{-3},\ x_0=2.$	30.	$f(x)=\dfrac{5x-1}{3x-5},\ x_0=2.$

79. Quyida berilgan funksiyalar hosilalarini differensiyalash qoidalari va formulalardan foydalanib hisoblang.

Variant	Funksiya	Variant	Funksiya
1.	$y=x^2\sin 2x$	16.	$y=arctg\sqrt{1+e^{-x^2}}$
2.	$y=e^{4x}tg2x$	17.	$y=(\sin 2x)^{\cos 4x}$
3.	$y=\sqrt[3]{x^3+\sin^3 x}$	18.	$y=(x^2+1)^{ctg2x}$
4.	$y=\sqrt{x^2+1}\cdot ct^2 3x$	19.	$y=\dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$
5.	$y=3^{-\cos^3 3x}$	20.	$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$
6.	$y=e^{-\arcsin\sqrt{x}}$	21.	$y=x^2\sqrt{1-x^2}$
7.	$y=(3x^3-ctg^4x)^3$	22.	$y=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$
8.	$y=\ln^3\left(\sqrt{x}-2^{-x^2}\right)$	23.	$y=\sin^4 x+\cos^4 x$
9.	$y=\ln tg\sqrt{x}$	24.	$y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$
10.	$y=e^{-\sqrt{x^2-3x+3}}$	25.	$y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$
11.	$y=sh^2x^3$	26.	$y=tg^3x-3tgx+3x$
12.	$y=arctg\sqrt{1+x^2}$	27.	$y=\dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$

13.	$y=\left(2^{x^3}-tg^4 2x\right)^3$	28.	$y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
14.	$y=x^3 th^3 x$	29.	$y=\sin^4 x+3\cos 2x-\cos^4 x$
15.	$y=\lg^4\left(x^5-\sin^5 2x\right)$	30.	$y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

80. Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang.

Variant	Funksiya	Variant	Funksiya
1.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$	16.	$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$	17.	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 3x}$	18.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2-2}{x^3-4x^2+5}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$	19.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}}{\ln(1+x)}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln x$	20.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{\sin x}$	21.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^3}$
7.	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$	22.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	23.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x}$
9.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$	24.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x}{x}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot ctgx$	25.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ctg(x-1)}{\ln(1-x)}$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$	26.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}$
12.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$	27.	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(xe^{-x}\right)$
13.	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$	28.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$	29.	$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctgx)$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$	30.	$\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}\right)$

81. Berilgan funksiyalarni ekstremumlarini toping.

Variant	Funksiya	Variant	Funksiya
1.	$y=3\left(\frac{x^4}{2}-x^2\right)$	6.	$y=x^4+8x^3+16x^2$
2.	$y=x^3-9x^2+24x-15$	7.	$y=x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$
3.	$y=x^5-\frac{5}{3}x^3$	8.	$y=\frac{1}{10}\left(2x^3-6x^2-18x+15\right)$
4.	$y=2x^3+3x^2-12x-5$	9.	$y=1-x^2-\frac{x^4}{8}$
5.	$y=(x-3)^2(x-2)$	10.	$y=-4x+x^3$
11.	$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$	21.	$y=\frac{e^{x-1}}{x-1}$
12.	$y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$	22.	$y=(x-2)e^{3-x}$
13.	$y=\frac{2x^2}{4x^2-1}$	23.	$y=2^{x^3-3x^2}$
14.	$y=\frac{2x+1}{x^2}$	24.	$y=\frac{\ln x}{x}$
15.	$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$	25.	$y=3^{x^3}\cdot e^{-x}$
16.	$y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$	26.	$y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$
17.	$y=\frac{x^3+16}{x}$	27.	$y=(4-x)e^{x-3}$
18.	$y=\frac{4x}{(x+1)^2}$	28.	$y=x\sqrt{4-x^2}$
19.	$y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$	29.	$y=\ln\sqrt{2x^2+4x+3}$
20.	$y=\frac{4}{x^2+2x-3}$	30.	$y=x^2\cdot e^{1/x}$

Iqtisodiyotda differensial hisobning qo'llanilishi

1. *Chegaraviy kattaliklar.* Hosilaning iqtisodiyotda qo'llanishi iqtisodiy obyekt yoki jarayonlarning chegaraviy xarakteristikasini olish imkonini beradi. Chegaraviy kattaliklar iqtisodiy obyektlarning holatini emas, balki vaqt bo'yicha yoki boshqa tekshirilayotgan faktorga nisbatan o'zgarish tezligini xarakterlaydi.

2. *Ishlab chiqarish xarajatlari.* Agar ishlab chiqarishning xarajat funksiyasi y ni ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori x ning funksiyasi sifatida qaralsa, ya'ni $y=C(x)$ u holda, $y'=C'(x)$ ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatini ifodalaydi va taxminan bir birlik qo'shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan

o'zgaruvchan xarajatni o'sishini xarakterlaydi. O'rtacha xarajat bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajatdir. Ya'ni:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

3. *Iste'mol va jamg'arma funksiyasi.* Agar x milliy daromad, $C(x)$ iste'mol funksiyasi (daromadning sarflanadigan qismi), $S(x)$ - jamg'arma funksiyasi bo'lsa, u holda

$$x = C(x) + S(x)$$

bo'ladi. Uni x bo'yicha differensiallab:

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerda $\frac{dC}{dx}$ iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillik; $\frac{dS}{dx}$ jamg'armaga bo'lgan chegaraviy moyillik.

4.*Elastiklik.* Bir o'zgaruvchan kattalikni boshqasining o'zgarishiga ta'sirchanlik o'lchovidir. Funksiyaning elastikligi bitta o'zgaruvchining 1 % ga o'zgarishi natijasida boshqa o'zgaruvchi necha foizga o'zgarishini ko'rsatadi. Funksiyaning elastikligi quyidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x \quad \text{yoki} \quad E_x(y) = x \cdot T_y$$

bu yerda $T_y = (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$ – funksiyaning nisbiy o'zgarish tezligi (tempi, sur'ati).

Funksiyaning elastikligi narxga bog'liq bo'lgan talab va taklifning tahlilida qo'llaniladi. U talab va taklifni, narxning o'zgarishiga ta'sirini ko'rsatadi va narx 1 % ga o'zgarganda talab va taklif taxminan qanday foizga o'zgarishini ko'rsatadi. Agar $|E_x(y)| > 1$ bo'lsa, u holda talab elastik, agar $|E_x(y)| = 1$ bo'lsa, birlik elastik (neytral), agar $|E_x(y)| < 1$ bo'lsa, talab noelastik bo'ladi.

82. Firmaning mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajat funksiyasi quyidagicha:

$$y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250 \qquad (\textit{pul birlik})$$

Ishlab chiqarishning o'rta va chegaraviy xarajatini toping va uning $x = 10$ dagi qiymatini toping.

Yechish. Funksiyaning $y'(x)$ hosilasini va uning $x = 10$ da $y'(10)$ qiymatini topamiz. Ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatlari: $y'(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 5$, $y'(10) = 30 - 24 + 5 = 11$

O'rtacha xarajatlar: $\bar{y} = \frac{y(x)}{x} = \frac{0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250}{x} = 0{,}1x^2 - 1{,}2x + 5 + \frac{250}{x}$.

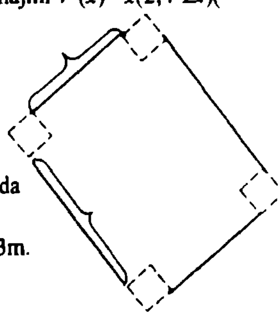
$\bar{y} = \frac{y(10)}{10} = 10 - 12 + 5 + 25 = 28$ bu berilgan ishlab chiqarish darajasida bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan o'rtacha xarajatdir. Funksiya orttirmasini taqribiy hisoblash formulasiga ko'ra $\Delta C \approx dC = C'(x)\Delta x$, $C'(10)$ kattalikni shunday ifodalash mukin: agar 10 ta mahsulot ishlab chiqarilgan bo'lsa, u holda o'n birinchi mahsulot ishlab chiqarish bo'yicha qo'shimcha xarajatlar taxminan $C'(10)$=9 ga teng.

83. Mamlakatning iste'mol funksiyasi $C(x)=10+0{,}47x+0{,}36x^{3/4}$ bu yerda x – jami milliy daromad (pul birligida) iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillikni; agar milliy daromad 15 milliard p/b. bo'lsa, jamg'armaga bo'lgan chegaraviy moyillikni toping.

Yechish. Iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillik: $C'(x)=0{,}47+0{,}27x^{-\frac{1}{4}}$; uning qiymati esa $C'(15)=0{,}47+0{,}27\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{15}}\approx 0{,}57$ Jamg'armaga bo'lgan chegaraviy moyillik: $S'(x)=1-C'(x)=0{,}43$.

84. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi $2{,}4\times1{,}5m^2$ kartondan qopqoqsiz quti yasash talab qilinadi. Kartonning to'rttala burchagidan tomoni qanday bo'lgan kvadrat kesib olinganda, yasalgan qutining hajmi maksimal bo'ladi.

Yechish. tomoni x m bo'lgan kvadrat qirqib olinsin. U holda kvadratning tomonlari uzunliklari 2,4-2x va 1,5-2x m dan bo'lib qoladi. Hosil qilingan to'g'ri burchakli parallelopiped (1,5-2x) uchun $h=x$, asosining tomonlari 2,4-2x va 1,5-2x m bo'ladi. Demak, hosil qilingan qutining hajmi $V(x)=x(2{,}4-2x)(1{,}5-2x)$ bo'lib bu funksiyaning maksimum qiymatini topamiz. (2,4-2x)



$V(x)=x(2{,}4-2x)(1{,}5-2x)=4x^3-7{,}8x^2+3{,}6x$

$V'(x)=12x^2-15{,}6x+3{,}6$ $V(x)$ maksimumini $V'(x)=0$ tenglamani yechib, $V(x_0)$ qiymatlarning eng kattasi olinadi. $12x^2-15{,}6x+3{,}6=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=0{,}3.$ $x_1=1$ bo'lganda $V(x)$ funksiyaning qiymati manfiy bo'ladi,(hajm manfiy son bo'lmaydi) demak, qirqib olingan kvadrat tomoni x=0,3m.

85. Agar erta pishar kartoshka terimini avgustning boshida boshlansa, u holda har bir sotihdan 200 kg dan hosil olish mumkin va har bir kilogrami 12 p/b. dan sotiladi. Terimni bir haftaga kechiktirish har sotihdan 50 kg dan hosildorlikni oshiradi, lekin narx har hafta 2 p/b. ga arzonlashadi. Agar terim muddati 5 hafta bo'lsa, kartoshkani sotishdan olinadigan foyda eng ko'p bo'lishi uchun hosilni qaysi haftada yig'ib olish kerak.

Yechish. Hosilni t – haftada yig'ib olganda foyda eng ko'p bo'lsin($1\le t\le 5$). U holda shu haftada kartoshkani bir kilogramining narxi 12-2(t-1) = 14-2t p/b. bo'ladi. Hosildorlik esa har gektaridan 200+50(t-1) = 150+50t kg dan bo'ladi. Bir gektar hosilni umumiy foyda tenglamasini tuzib olamiz: $\pi(t)=(200+50(t-1))(12-2(t-1))=100(3+t)(7-t)=100(21+4t-t^2)$. Demak, umumiy foyda eng ko'p bo'lishi uchun $\pi(t)=100(21+4t-t^2)$funksiya maksimum qiymatini topish kerak. Buning uchun esa $\pi'(t)=0$ tenglamani yechib, aniqlangan t sonini umumiy foyda tenglamsiga qo'ysak har bir gektar yerdan olinadigan *max* daromad kelib chiqadi. $\pi'(t)=0\Rightarrow 4-2t=0,\ t_0=2.$ Demak $\pi(2)=100(21+8-4)=2500$ mavsum davomida bir gektar yerdan olinshi mumkin bo'lgan eng ko'p daromad. Shunday qilib hosilni ikkinchi haftada yig'ib olish kerak ekan.

86. Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulot narxi p va unga bo'lgan talab q orasidagi bog'lanish $q = 18 - \sqrt{p}$ tenglik bilan ifodalangan. Talabning elastikligini toping. Narxning qanday qiymatlarida talab elastik, neytral va noelastik bo'ladi. Narx p = 100; p = 150 pul birligi bo'lganda korxona rahbarlariga bir birlik tovar narxi haqida qanday maslahatlar berish mumkin?

Yechish. Talabning elastikligi formulasiga ko'ra:

$$E_p(q) = \frac{p}{18-\sqrt{p}}\left(18-\sqrt{p}\right)' = -\frac{\sqrt{p}}{2\left(18-\sqrt{p}\right)}.$$

Talab neytral holati qachon bo'lishini $|E_p(q)| = 1$ tenglamani yechi narxning qiymati aniqlanadi. $|E_p(q)| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{p}}{2\left(18-\sqrt{p}\right)} = 1.$ $p = 144$. Keyin $p > 0$ va $q > 0$ ($p < 324$) ekanligini hisobga olib, agar $0 < p < 144$ bo'lsa talab noelastik; $144 < p < 324$ da esa talab elastik.

87. Konfet sotishdan kelgan daromad $R = 50x - 0.5x^2$, bu yerda x – sotilgan mahsulot hajmi (birligi minglarda). Agar: *a*) 10 ming birlik; *b*) 60 ming birlik mahsulot sotilgan bo'lsa, o'rta va chegaraviy daromadni toping.

88. Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori x ning xarajat funksiyaga bog'liqligi $y = 100x - 0.2x^3$ ko'rinishida berilgan. Mahsulot hajmi 10 birlik bo'lganda o'rtacha va chegaraviy xarajatni aniqlang.

89. Mahsulotning tannarxi y va ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi x orasidagi bo'glanish $y = 6\ln(1+3x)$ tenglama bilan ifodalangan. Ishlab chiqarilayotgan hajmi 10 birlik bo'lganda o'rtacha va chegaraviy tannarxni aniqlang.

90. Brigadaning mehnat unumdorligi $y = -2{,}5t^2 + 15t + 100$ tenglama bilan berilgan. Bu yerda $0 \le t \le 8$ – ish vaqti (soatlarda). Mehnat unumdorligining t = 2 va t = 7 da tezlik va temp o'zgarishini aniqlang.

91. Mamlakatning iste'mol funksiyasi $C(x) = 13 + 0{,}25x + 0{,}37^{\frac{4}{5}}$, bu yerda x – jami milliy daromad. *a*) iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillikni; *b*) agar milliy daromad 32 ga teng bo'lsa, jamg'armaga chegaraviy moyillikni toping.

92. Mamlakatning jamg'arma funksiyasi $S(x) = 25 - 0{,}53x - 0{,}41x^{\frac{2}{3}}$, bu yerda x jami milliy daromad. Topish kerak: *a*) iste'molga chegaraviy moyillik; *b*) agar milliy daromad 27 bo'lsa, jamg'armaga chegaraviy moyillik.

93. Korxonaning tayyor mahsuloti tannarxi y (mln. so'm) va mahsulot hajmi orasidagi bog'lanish $y = \sqrt{x+4} - 2$ tenglama bilan ifodalanadi. Korxona 12 ming dona mahsulot ishalab chiqargandagi narxning elastikligini toping. Korxona rahbarlariga ishlab chiqarilayotgan mahsulot miqdorini o'zgartirish haqida qanday maslahatlar berish mumkin.

94. Tarmoqning korxonalari uchun ishlab chiqarilayotgan partiyadagi detallar miqdori x (ming birlik) va ularni tayyorlashga ketgan xarajat y (ming so'm) $y = \frac{27}{x} + 6$ tenglama bilan ifodalanadi. Partiyada 10 ming donadan detal ishlab chiqarayotgan korxonalar uchun xarajat elastikligini toping.

95. Talab funksiyasining berilgan narxdagi elastikligini toping.

a) $q+10p=50,\ p=3$;

b) $5q+3p=70,\ p=70$;

c) $p^2+p+4q=26,\ p=2$ *va* $p=4$.

96. Quyidagi talab funksiyalar uchun, talab elastik bo'ladigan *p* ning qiymatlarini toping:

a) $2p+3q=12$; *b*) $q=50(15-\sqrt{p})$; *c*) $q=\sqrt[3]{3600-p^3}$

97. Tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalarining narx *x* ga bog'liqligi $q=\dfrac{20+x^2}{1+10x}$, $S=\dfrac{2{,}5-x+4x^2}{1+10x}$ tenglamalar bilan berilgan. Topish kerak:

a) muvozanat narxni;

b) talab va yaklifning muvozanat narxdagi elastikligi;

c) muvozanat narx 5% ga o'zgarganda daromadning o'zgarishini.

98. Tunika bo'lagidan silindr shaklidagi to'la sirti *S* bo'lgan qopqoqli chelak yasash talab qilinadi. Maksimal hajmdagi chelakning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

99. Bir tomoni devor bilan o'ralgan to'g'ti to'rtbuchakli yuzani o'rash talab qilinadi. Devorga parallel tomonni o'raydigan panjaraning har bir metrining narxi 60 p/b.; qolgan ikkita tomonini o'raydigan panjaraning har bir metri esa 90 p/b. turadi. 10 800 p/b. ga ega bo'la turib, qanday maksimal yuzani o'rab olish mumkin.

100. To'g'ri to'rt burchakli sohani panjara bilan o'rash talab qilinadi. Kichik tomonga parallel to'siq bilan ajratilgan. Tashqarini o'raydigan panjaraning metri 900p.b, ichkarini o'raydigan panjaraning metri 1600p.b maydonning yuzasi esa 153m^2 bo'lsa, o'rash narxini minimallashtiradigan maydon o'lchamlarini toping.

101. tovarga bo'lgan talab $P=-Q^2+20Q+2$, $(10<Q<20)$ uni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi $TC=4+15Q$ ko'rinishida bo'lsa, foyda maksimal bo'ladigan mahsulot miqdori va narxini aniqlang.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Hosilaning ta'rifi: geometrik ma'nosi, iqtisodiy ma'nosi, mexanik ma'nosi.
2. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri to'g'ri

a) agar funksiya biror nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiya differensiallanuvchi bo'ladi.

b) agar funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiya uzluksiz bo'ladi.

3. Elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing.
4. Murakkab, teskari, yashirin ko'rinishdagi, parametrik ko'rinishdagi funksiyalarning xosilalari.
5. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
6. O'rta qiymat haqidagi teoremalar:

a) ferma teoremasi.

b) roll teoremasi.

c) Lagranj teoremasi.

d) Koshi teoremasi.

e) Lopital teoremasi.

7. Hosilaning iqtisodiyotda qo'llanilishi.
8. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar ta'riflari.
9. Funksiyaning ekstremumi nima va u qanday topiladi.
10. Ekstremumning zaruriy shartlari.
11. Ekstremumning yetarli shartlari.
12. Funksiyaning qavariq va botiqliligi, bukulish nuqtalari qanday topiladi?
13. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?
14. Funksiya qanday sxema bilan tekshirilib, grafigi chiziladi?

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.
2. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи. - М.: Экзамен, 2005.
3. Красс М.С., Чупырнов Б.П. Основы высшей математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: Дело, 2000.
4. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. - М.: 2004.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. - М.: Инфра – М., 2003.
6. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz. – T., 2006.
7. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994, 3-жилд, 1996.
8. Общий курс высшей математики для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М., 2006.
9. Высшая математика для экономистов. /под редакцией Н.Ш. Крамера. – М.: ЮНИТИ, 2006.
10. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата. - М.: Дело, 2006.
11. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М.: Проспект, 2005.
12. Замков О.О., Толстоптенко А.Б., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС, 2004.
13. Коршанова Н., Плясунов В. Математика в экономике. - М.: Вита пресс, 2004.
14. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. -М., 2004.
15. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. –М., 2004.
16. Минорский И.П. Сборник задач по высшей математике. – М., 2004.
17. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. – Т.: Ўқитувчи, 1996.
18. Tojiyev Sh.I. Oily matematikadan masalalar yechish. – T.: O'zbekiston, 2002.

19. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.

20. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. Н., 2008.

21. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М., 2008.

22. Ермаков В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. – Н., 2010.

9-bob. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA

9.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning berilish usullari

Agar biror D to'plamning har bir (x, y) haqiqiy sonlar juftligi biror qoida bilan Z to'plamdagi yagona z haqiqiy songa mos qo'yilgan bo'lsa, u holda D to'plamda ikki o'zgaruvchining funksiyasi z aniqlangan deyiladi va quyidagi ko'rnishlarda belgilanadi:

$$z = f(x, y),\ z = Z(x, y),\ z = F(x, y), \text{ va h.k.}$$

Bu yerda x va y erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, z esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. D - to'plam bu funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. Z - to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi deyladi.

$z=f(x, y)$ funksiyaning argumentlarining tayin $x = x_0$ va $y = y_0$ qiymatlarida qabul qiladigan z_0 xususiy qiymatini topish quyidagicha yoziladi :

$$z_0=z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \text{ yoki } z_0=f(x_0, y_0).$$

Geometrik nuqtai nazardan $z=f(x, y)$ funksiyaning O_{xyz} to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasidagi tasviri (funksiyaning grafigi) biror sirtdan (nuqtalar to'plamidan) iborat.

1. $z = \sqrt{4+4x+2y-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish.

$$z = \sqrt{4+4x+2y-x^2-y^2} = \sqrt{9-(4-4x+x^2)-(1-2y+y^2)} = \sqrt{9-(x-2)^2-(y-1)^2}$$

Demak $9-(x-2)^2-(y-1)^2 \geq 0$, ya'ni $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 9$ shartda berilgan funksiya haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi markazi (2; 1) nuqtada, radiusi 3 ga teng bo'lgan doiradan, o'zgarish sohasi esa $[0, 3]$ sohadan iborat.

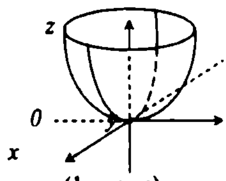
Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchining funksiyasi ham yuqoridagidek aniqlanadi n o'zgaruvchili funksiyasining aniqlanish sohasi n ta haqiqiy sonning $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistemasidan tuzilgan D to'plamdan iborat bo'ladi, n ta o'zgaruvchining funksiyasi quyidagicha belgilanadi.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping va grafigini chizing:

$a)$ $z = x^2 + y^2$; $\quad b)$ $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

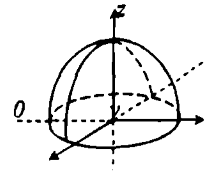
Yechish. $a)$ Bu funksiya x va y ning barcha qiymatlarida aniqlangan $-\infty < x < +\infty$; $-\infty < y < +\infty$. Uning grafigi aylanma paraboloid deb ataladigan ikkinchi tartibli sirtdan iborat. Aylanma paraboloid $y^2 = 2pz$ parabolani Oz o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladi. Bu esa $x^2 + y^2 = 2pz$



(1 – rasm)

funksiyaning grafigidan iborat bo‘ladi (1 - rasm).

b) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ Funksiyaning aniqlanish sohasi ildiz ostidagi ifodaning nomanfiy bo‘ladigan barcha qiymatlari ya'ni $x^2+y^2\le R^2$ dan iborat. Bu funksiyaning grafigi radiusi R bo‘lgan sferaning yuqori yarmi bo‘lgan ikkinchi tartibli sirtdir. Chunki funksiya o‘zining aniqlanish sohasida faqat nomanfiy qiymatlar qabul qiladi.



(2 - rasm).

Quyida berilgan funksiyalarni aniqlanish sohasini toping va garafigini chizing.

3. $z=x+y$

4. $z=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

5. $z=\sqrt{xy}$

6. $z=y\sqrt{x}$

7. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

8. $z=\arcsin(x+y)$

9. $z=\ln(x^2+y^2+z^2-1)$

10. $u=\sqrt{x+y+z}$

9.2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti

Agar ikki o‘zgaruvchining $z=f(x,y)=f(P)$ funksiyasi P_0-$P(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsa va $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki $d(P;P_0)<\delta$ (d – ikki nuqta orasidagi masofa) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x,y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x;y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A o‘zgarmas son $z=F(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi limiti deyiladi. A sonining $z=f(x,y)$ funksiyaning $P(x,y)\to P(x_0,y_0)$ dagi limiti bo‘lishi quyidagicha yoziladi

$$\lim_{P\to P_0} y=A \text{ yoki } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

Uch va undan ortiq o‘zgaruvchining limiti ta'rifi shunga o‘xshash kiritiladi.

Agar bir necha o‘zgaruvchi funksiyasining limiti nolga teng bo‘lsa, u holda u cheksiz kichik deb ataladi. Bir o‘zgaruvchining funksiyasi uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o‘zgaruvchining funksiyasi uchun ham o‘rinlidir.

11. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Yechish. x va y nuqtalar orasidagi masofa $p=\sqrt{x^2+y^2}$ ($p=\sqrt{x^2+y^2}$ deb belgilash kiritamiz). $x\to 0$, $y\to 0$ dan $\rho\to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\ln(1-p^2)}{p}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{(\ln(1-p^2))'}{p'}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\frac{1}{1-p^2}\cdot(-2p)}{1}=0$

Limitga ega bo'lgan ikki o'zgaruvchili funksiyalarning bir necha xossalarini keltirib o'tamiz:

1) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning yetarlicha kichik atrofda chegaralangan bo'ladi.

2) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda $f(x, y)\pm g(x, y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=A\pm B$. bo'ladi.

3) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda $f(x, y)\cdot g(x, y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=A\cdot B$ bo'ladi.

4) Agar $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$ limitlar mavjud bo'lib, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiya ham limtga ega va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{A}{B}$ bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limitini hisoblash bir o'zgaruvchili funksiya limitini hisoblashga nisbatan ancha murakkab. Buning sababi to'g'ri chiziqda faqat ikkita yo'nalish bor, argument limit nuqtaga faqat ikki tarafdan o'ng va chapdan intiladi. Tekislikda bunday yo'nalishlar cheksiz ko'p va funksiyaning limiti turli yo'nalishlar bo'yicha ustma-ust tushmasligi mumkin.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ limit mavjud emasligini isbotlang.

Yechish. (0, 0) nuqtaga $y = kx$ to'g'ri chiziq bo'yicha yaqinlashamiz. Agar $y = kx$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$: limit to'g'ri chiziqning burchak koeffisentiga bog'liq chiqdi. Lekin funksiyaning limiti (x, y) nuqtaning (0, 0) ga qaysi yo'nalishda yaqinlashishiga bog'liq bo'lmasligi kerak. Demak, qaralayotgan limit mavjud emas.

13. Limitlarni hisoblang

$a)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{y}$, $b)\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$, $c)\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $d)\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $e)\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^{-3xy})}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Yechish. $a)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{xy}{x}=\lim\limits_{y\to a} y=a$, $b)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{(x^2+y^2)}{e^{(x+y)}}=0,$

$c)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}e^{\frac{x}{x+y}}=\lim\limits_{y\to a}e^1=e,$ $d)\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\pi}{2}=1,$

$e)\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^{-3xy})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2.$

14. – 23. Limitlarni hisoblang

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy\sqrt{1+xy})$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^3}{x^3+y^3}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[xy\cdot\ln xy]$

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+2y)e^{\frac{1}{x}}$

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x-y}{x^3-y^2}$

20. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to +0}}\dfrac{x^y}{1+x^y}$

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{xy}tg\dfrac{xy}{1+xy}$

22. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\log_x(x+y)$

9.3. Funksiyaning uzluksizligi

$z = f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lib (x_0, y_0) nuqta shu M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \tag{9.1}$$

bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar ixtiyoriy $E > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d\{(x, y), (x_0, y_0)\} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x, y)\in M$ nuqtalar uchun $|f(x,y) - f(x_0, y_0| < E$ bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $f(x, y)$ funksiya M to'plamining har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu M to'plamda uzluksiz deyiladi.

Agar argument orttirmalari Δx va Δy nolga intilganda funksiyaning to'liq orttirmasi $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ ham nolga intilsa, ya'ni $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta f(x_0, y_0) = 0$ bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deb ataladi.

24. $f(x, y) = x\text{I} + y\text{I}$ funksiyaning uzluksizligini tekshiring.

Yechish. $(x_0; y_0)$ nuqtani hamda $(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ ni olib, funksiyaning to'liq orttirmasini hisoblaymiz :

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x_0;\ y_0+\Delta y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0+\Delta x_0)\text{I} + (y_0+\Delta y_0)\text{I} - x_0\text{I} - y_0\text{I} =$$
$$= 2\Delta x\cdot x + \Delta x\text{I} + 2\Delta y\cdot y + \Delta y\text{I} = \Delta x(2x + \Delta x) + \Delta y(2y + \Delta y).$$

bundan esa $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta f(x_0, y_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x(2x+\Delta x) + \Delta y(2y+\Delta y) = 0$ ekanligini topamiz.

Yuqoridagi ta'riflarga ko'ra $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz.

Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning ba'zi xossalari:

$f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar M to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0; y_0) \in M$ bo'lsin:

1) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiya ham shu $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

3) Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $g(x_0; y_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham shu $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

4) Agar $f(x, y)$ funksiya chegaralangan yopiq M to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu to'plamda chegaralangan bo'ladi.

25. Funksiyani $M_0(1; 1)$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring. $z = x^3 y + 10x^2\sqrt{y}$.

Yechish. Uzluksizlikni (9.1)ga ko'ra tekshiramiz: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}}\left(x^3 y + 10x^2\sqrt{y}\right) = 1^3 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1} = 11$. Demak, funksiya $M_0(1; 1)$ nuqtada uzluksiz.

26. Funksiyani (0; 0) nuqtada uzlusizlikka tekshiring. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

Yechish. (0; 0) nuqtaga $y = kx$ to'g'ri chiziqlar bo'yicha yaqinlashamiz. U holda $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k}$. Limitlarning qiymati turli k larda turlicha bo'ladi, demak ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti mavjud emas va (0; 0) nuqta funksiyaning uzilishish nuqtasi.

9.4. Xususiy hosilalar

$z = f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lsin. Bu M to'plamda $(x_0; y_0)$ va $(x_0+\Delta x; y_0)$ nuqtalarni olib, bu nuqtalardagi funksiya qiymatlari ayirmasini hisoblaymiz:

$$f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$$

Bu ayirma $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va $\Delta_x f(x_0; y_0)$ kabi belgilanadi: $\Delta_x f(x_0; y_0) = f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$.

Xuddi shunga o'xshash $\Delta_y f(x_0; y_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0)$ ayirma $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi y argument bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi.

Agar $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{9.2}$$

nisbatning limiti mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi x argument bo'yicha xususiy hosilasi deb ataladi va $\partial f(x_0; y_0)/(\partial x)$ yoki $f'_x(x_0; y_0)$ qisqacha qilib $(\partial f)/(\partial x)$ yoki f'_x kabi belgilanadi

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{9.3}$$

Xuddi shunga o'xshash $\Delta y \to 0$ da

$$\frac{\Delta_y f(x_0;y_0)}{\Delta y} \tag{9.4}$$

nisbatning limiti mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtasidagi y argument bo'yicha xususiy hosilasi deb ataladi va qisqacha qilib $(pf)/(py)$ yoki f_y kabi belgilanadi

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{9.5}$$

27. Funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang $f(x,y)=x^y$

Yechish. $(\partial f)/(\partial x)=(x^y)'_x = y\cdot x^{y-1}$, $(\partial f)/(\partial y)=(x^y)'_y = x^y\ln x$.

28. Funksiyalarning $\frac{\partial z}{\partial x}$ *va* $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarini toping. $z = x^2+3x\sqrt{y}-y+\frac{y^2}{x}$.

Yechish. $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosila hisoblanayotganda (y) ni o'zgarmas deb qaraladi.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2)'_x+(3x\sqrt{y})'_x-y'_x+\left(\frac{y^2}{x}\right)'_x=2x+3\sqrt{y}-0-\frac{y^2}{x^2}=2x+3\sqrt{y}-\frac{y^2}{x^2};.$$

Endi (x) o'zgaruvchini o'zgarmas kattalik deb qaraymiz:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2)'_y+(3x\sqrt{y})'_y-y'_y+\left(\frac{y^2}{x}\right)'_y=0+3x\frac{1}{2\sqrt{y}}-1+\frac{2y}{x}=3x\frac{1}{2\sqrt{y}}-1+\frac{2y}{x}.$$

29. $z = xy\cdot e^{x^2-y^2}$.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(xy)'_x e^{x^2-y^2}+\left(e^{x^2-y^2}\right)'_x(xy)=y\cdot e^{x^2-y^2}+2x\cdot e^{x^2-y^2}\cdot(xy)=y\left(e^{x^2-y^2}+2x^2e^{x^2-y^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(xy)'_y e^{x^2-y^2}+\left(e^{x^2-y^2}\right)'_y(xy)'=x\cdot e^{x^2-y^2}-2y\cdot e^{x^2-y^2}\cdot(xy)=x\left(e^{x^2-y^2}-2y^2e^{x^2-y^2}\right).$$

30. Funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblang.

a) $u=2x^2y+3x^3y^2+xyz^5$; *b*) $u=z^{xy}$; *c*) $u=x^y+y^x$.

Yechish. *a*) Avval x bo'yicha hosilani hisoblaymiz, bunda z va y ni o'zgarmas deb olamiz. $u_x=(2x^2y+3x^3y^2+xyz^5)'_x=(2x^2y)'_x+(3x^3y^2)'_x+(xyz^5)'_x$, $u_x=4xy+9x^2y^2+yz^5$. y bo'yicha xususiy hosilani topish uchun x va z ni o'zgarmas deb qaraymiz.

$$u_y=(2x^2y+3x^3y^2+xyz^5)'_y=(2x^2y)'_y+(3x^3y^2)'_y+(xyz^5)'_y=2x^2+6x^3y+xz^5.$$

z bo'yicha hosila ham shunday hisoblanib quyidagi tenglik aniqlanadi:

$$u_z=(2x^2y+3x^3y^2+xyz^5)'_z=(2x^2y)'_z+(3x^3y^2)'_z+(xyz^5)'_z=5xyz^4.$$

b) $u=z^{xy}$. $u_x=(z^{xy})'_x=z^{xy}\ln z(xy)'_x=yz^{xy}\ln z$, $u_y=(z^{xy})'_y=z^{xy}\ln z(xy)'_y=xz^{xy}\ln z$.

$$u_z=(z^{xy})'_z=xy\cdot z^{xy-1}.$$

c) $u=x^y+y^x$; $u=z^{xy}$. $u_x=(x^y+y^x)'_x=(x^y)'_x+(y^x)'_x=yx^{y-1}+y^x\ln y$;

$u_y=(x^y+y^x)'_y=(x^y)'_y+(y^x)'_y=x^y\ln x+xy^{x-1}$.

31. Funksiyalarning xususiy hosilalarini toping.

1. $z = 2x^3 - xy^2 + 3x^2y - 2y^3 + 3x - 4y + 1$

2. $u = yx^3 + xz^2 + y^2z$

3. $u = s^3 \cos 4t$

4. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$

5. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

6. $z = \dfrac{xy}{x + y}$

7. $u = e^{xyz}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

8. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{x}{y}}$

9. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

10. $z = xye^{x+2y}$

11. $z = \ln(x + \ln y)$

12. $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$

13. $u = e^{\frac{z}{xy}}\, tg\left(\dfrac{x}{y + z}\right)$

14. $z = \arcsin\sqrt{xy}$

15. $z = e^{1-y}(2x - 1)$

16. $z = \sin\left(x + \sqrt{y}\right)$

17. $z = xe^{y} + x^{y}$

18. $z = \ln\sqrt{x + y^2}$

19. $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$

20. $z = x^{\sqrt{y}}$

21. $z = arctg\left(\dfrac{y}{x} + 1\right)$

22. $z = xye^{xy}$

23. $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$

24. $z = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

25. $z = (5x + 3y)(12x - 7y)$

26. $z = \left(4x^2 - 3y\right)\left(2x + 9y^3\right)$

27. $z = 7x^3e^{5xy}$

28. $z = \ln|4x + 7y|$

29. $z = x^{0,1}y^{0,9}$

30. $z = \dfrac{(3x + 4y)(7x - 8y)}{5x - 2y}$

9.5. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali

$z = f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lsin. Bu M to'plamda $(x_0; y_0)$ va $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib, funksiyaning to'liq orttirmasini aniqlaymiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x_0; y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) \qquad (9.6)$$

Agar $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(x_0; y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (9.7)$$

ko'rinishda ifodalansa, u holda funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi, bunda A, B - o'zgarmaslar, α va β esa Δx va Δy ga bog'liq, hamda $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ da $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi (9.7) formulada $A = f'_x(x_0;\ y_0)$, $B = f'_y(x_0;\ y_0)$ $A = f_x(x_0;\ y_0)$, $B = f_y(x_0;\ y_0)$.

Agar $f(x_0;\ y_0)$ funksiya $(x_0;\ y_0)$ nuqtada $f_x(x_0;\ y_0)$, $f_y(x_0;\ y_0)$ xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu xususiy hosilalar $(x_0;\ y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya $(x_0;\ y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi. $Z = f(x;\ y)$ funksiya $(x_0;\ y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y \qquad (9.8)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu ifodadagi $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$ yig'indi $f(x;\ y)$ funksiyaning $(x_0;\ y_0)$ nuqtadagi differensiali deb ataladi va y $df(x_0;\ y_0)$ yoki dz kabi belgilanadi:

$$df(x_0;\ y_0) = dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y \qquad (9.9)$$

Agar $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy \qquad (9.10)$$

32. $z = x^2y - xy^2$ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y - xy^2\right)'_x = 2xy - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2y - xy^2\right)'_y = x^2 - 2xy$.

(9.10) formulaga ko'ra $dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$

33. Funksiyaning differensialini toping.

a) $z = e^{x^2+y^2}\cdot\sin\left(x^2y^2\right)$ *b*) $u = arctg(xyz)$

Yechish. *a*) Differensiallash qoidasidan va (9.10) formuladan foydalanib:

$$dz = [2xe^{x^2+y^2}\cdot\sin\left(x^2y^2\right) + 2xy^2\cdot e^{x^2+y^2}\cos\left(x^2y^2\right)]dx + [2y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot\sin\left(x^2y^2\right) + 2yx^2\cdot e^{x^2+y^2}\times$$
$$\times\cos\left(x^2y^2\right)]dy = e^{x^2+y^2}\{2x[\sin(x^2y^2) + y^2\cos(x^2y^2)]dx + 2y[\sin(x^2y^2) + x^2\cos(x^2y^2)]dy\};$$

b) $du = \frac{yzdx}{1+(xyz)^2} + \frac{xzdy}{1+(xyz)^2} + \frac{xydz}{1+(xyz)^2} = \frac{1}{1+(xyz)^2}(yz\cdot dx + xz\cdot dy + xy\cdot dz)$.

34. – 45. Quyidagi funksiyalarning differensiallarini toping.

34. $z = 2x^3 - xy + 3y^3$ **35.** $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

36. $z = \ln(3x + 2y)$ **37.** $z = 2^{xy}$

38. $z = x^y$ **39.** $z = \arcsin\frac{x-y}{2x+y}$

40. $z = xyarctg\frac{y}{x}$ **41.** $z = e^x e^{\frac{x}{y}}$

42. $z = e^{\cos^2(x^2-y^2)}$ 43. $u = e^{xyz}$

44. $u = tg^2 \dfrac{xy}{z}$ 45. $u = e^x(\cos y + z\sin x)$

9.6. Yuqori tartibli hosilalar

$z = f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan va u $(x_0; y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin.

$z = f(x, y)$ funksiyaning xususiy hosilalari f'_x, f'_y dan olingan $\dfrac{\partial f'_x}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f'_x}{\partial y}$ $\dfrac{\partial f'_y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f'_y}{\partial y}$ xususiy hosilalarga berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilasi deyiladi va

$$f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{yx},\ f''_{y^2} \text{ yoki } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

kabi belgilanadi.

Demak: $f''_{x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x(x, y))'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$; $f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = (f'_x(x, y))'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

$f''_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} = (f'_y(x, y))'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$; $f''_{y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y(x, y))'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Yuqorida ko'rsatib o'tilgan $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ va $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ xususiy hosilalar aralash hosilalar deb ataladi. Bu aralash hosilalar $(x; y)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, bir-biriga teng bo'ladi.

Xuddu shuningdek $z=f(x, y)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibli xususiy hosilalar aniqlanadi.

46. $f(x, y) = xi+yi$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari hisoblansin

Yechish.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3) = 3y^2$$

Demak,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) = 0.$$

47. Ikki o'zgaruvchili $z = \ln(1 + x + 2y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarning ko'rinishi:

$z'_x = \ln(1 + x + 2y)'_x = \dfrac{1}{1+x+2y}$; $z'_y = \ln(1 + x + 2y)'_y = \dfrac{2}{1+x+2y}$. Hosil qilingan funksiyalarni ikki o'zgaruvchining yangi funksiyasi sifatida qaraymiz.

$$z'_u=\left(\frac{1}{1+x+2y}\right)'_x=-\frac{1}{(1+x+2y)^2};\ z'_{xy}=z'_{yx}=\left(\frac{1}{1+x+2y}\right)'_y=\left(\frac{2}{1+x+2y}\right)'_x=-\frac{2}{(1+x+2y)^2};$$

$$z'_{yy}=\left(\frac{2}{1+x+2y}\right)'_y=\frac{4}{(1+x+2y)^2}.$$

48. Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblang $y=xy\cdot\ln\frac{x}{y}$

49. Agar $z=\sin x\cdot tgy$ bo'lsa, u holda $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ ekanligini isbotlang.

50 – 57. Berilgan funksiyalarni ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblang

50. $z=3x^2+2xy^2-4xy+x^2y-y^3$ **51.** $u=e^{xy}$

52. $u=\sin\left(\frac{xy}{2}\right)$ **53.** $z=\arcsin(x+y)$

54. $z=\ln tg\frac{x+y}{x-y}$ **55.** $z=x\sin xy+y\cos xy$

56. $z=x^2\ln(x+y)$ **57.** $z=x^2\sin\sqrt{y}$

9.7. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari

Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning $P=(x_0;\ y_0)$ nuqtadagi qiymati uning shu nuqtaning biror atrofiga tegishli ixtiyoriy $P(x,y)$ qiymatidan katta (kichik) bo'lsa $P_0(x_0;y_0)$ nuqta maksimum (minimum) nuqta deyiladi.

Lokal maksimum va minimum nuqtalar lokal ekstremum nuqtalar deyiladi. Bunda $z=f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishadi.

Teorema: Agar $z=f(x,y)$ differensiallanuvchi funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremumga erishsa, u holda uning bu nuqtadagi birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng bo'ladi:

$$\frac{\partial z(P_0)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial z(P_0)}{\partial y}=0.$$

Birinchi tartibli xususiy hosilalari 0 ga teng (yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar), kiritik nuqtalar deyiladi. Ularni ekstremumga tekshirish, ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumi mavjudligining yetarlilik shartlari yordamida tekshiriladi.

$P_0(x_0,y_0)$ nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin. $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalari $\frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x^2}=A$ $\frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x\cdot\partial y}=B$ $\frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial y^2}=C$ uchun $\Delta=\begin{vmatrix}A,B\\B,C\end{vmatrix}=AC-B^2$ determinant tekshiriladi. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0,y_0)$ statsionar nuqtada ekstremumining yetarlilik sharti quyidagicha ifodalanadi:

1) $\Delta>0$ - ekstremum mavjud bo'lib, bunda agar $A>0$ (yoki $A=0$ da $C>0$) bo'lsa $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada funksiya lokal minimumga, agar $A<0$ (yoki $A=0$ da $C<0$) bo'lsa lokal maksimumga ega bo'ladi.

2) $\Delta < 0$ - lokal ekstremum yo'q;

3) $\Delta = 0$ - qo'shimcha tekshirishlarni talab qiladi.

58. Berilgan $u = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ funksiyaning ekstremumlarini toping.

Yechish. Kritik nuqtani topish uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarini 0 ga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2} = 0.$$

Bu sistemani yechib $x^2 y = 50$, $xy^2 = 20$, $x = 5$; $y = 2$ ekanligini topamiz. Shunday qilib $M_0(5, 2)$ kritik nuqta.

Ikkinchi tartibli hosilalarni va ularni $M_0(5, 2)$ nuqtadagi qiymatlarini aniqlaymiz:

$$u''_{xx} = \frac{100}{x^3}, \ u''_{xx}(5, 2) = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}; \ u''_{xy} = 1, \ u''_{xy}(5, 2) = 1; \ u''_{yy} = \frac{40}{y^3}, \ u''_{yy}(5, 2) = \frac{40}{8} = 5$$

$A = \frac{4}{5} > 0$ va $\Delta = AC - B^2 = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1^2 = 3 > 0$ dan funksiya $M_0(5, 2)$ nuqtada minimumga ega. $u_{min} = u(5, 2) = 5 \cdot 2 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 30.$

9.8. Shartli ekstremumlar

$z = f(x, y)$ funksiyaning shartli ekstremumi deb bu funksiyaning x va y o'zgaruvchilarning bog'lash tenglamasi deb ataluvchi $\varphi(x, y) = 0$ tenglama bilan bog'langanlik shartida erishadigan ekstremumga aytiladi.

Nuqtalarni bog'lovchi tenglamalar sistemasi: $G=\{(x, y) | Y_i(x, y) (i = 1, 2, ... m)\}$ ni qanoatlantiradigan G sohada aniqlangan va differensialanuvchi $z = f(x, y)$ funksiyani qaraymiz. Bu sohada shunday $M_0(x_0; y_0)$ nuqtani topish kerakki $\forall$ M(x,y) $\in$ G uchun $f(M_0) \geq f(M)$ shart bajarilishi kerak. Bunday masalalar $z = f(x, y)$ funksiyanig shartli ekstremumini topish masalasi deyiladi.

Shartli ekstremumni topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsiyentlar usulini keltiramiz

$$L(x,y,\lambda_i) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Y_i(x,y)$$

Lagranj funksiyasi ekstremumini zaruruiy sharti quyidagi ko'rinishga ega:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Y_i}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Y_i}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = Y_i(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

i=1,2,…m

Bu m+2 no'malumli tenglamadan iborat sistemadan $x, y, \lambda_i (i = 1, 2, ... m)$ no'malumlarning topiladi. λ_i sonlar Lagranj koeffitsiyenlari deyiladi. **59.** $z = xy$

funksiyaning x va y lar $2x+y-3=0$ tenglama bilan bog'langanlik sharti ostidagi ekstremumini toping.

Eng kichik kvadratlar usuli

1. Masalaning qo'yilishi. x va y o'zgaruvchili n marta $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ tajriba o'tkaziladi. x va y lar orasida bog'lanish $y = ax + b$ ko'rinishda deb faraz qilinadi. Eng kichik kvadratlar usuliga asosan xatoliklar kvadratlarining yig'indisi

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \qquad (9.11)$$

eng kichik $y = ax + b$ bo'ladigan qilib $f(x)$ funksiyaning parametrlari a va b tanlab olinadi.

2. Agar $f(x)$ - chiziqli funksiya bo'lsa, ya'ni $y = ax + b$ bo'lsa, u holda

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

a va b parametrlarga ega. Uning ekstremumini topamiz.

Normal tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \qquad (9.12)$$

dan olamiz.

Qulaylik uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = S, \sum_{i=1}^{n} x_i = X, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = P, \sum_{i=1}^{n} y_i = Y$; u holda sistemaning ko'rinishi:

$$\begin{cases} Sk + Xb = P \\ Xk + nb = Y \end{cases} \qquad (9.13)$$

Ikkita x, y o'zgaruvchili (9.14) ikki tenglamalar sistemasini yechib,

$$k = \frac{nP - XY}{nS - X^2}, \quad b = \frac{SY - PX}{nS - X^2} \qquad (9.14)$$

ni hosil qilamiz. $y = kx + b$ tenglama koeffitsentlari (9.15) bo'yicha hisoblanadi va bu tenglik regressiya tenglamasi deyiladi.

3. Agar $f(x)$ kvadratik funksiya bo'lsa, u holda $y = ax^2 + bx + c$ bo'lib,

$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ bo'ladi. a, b, c parametrlar normal tenglamar sisitemasidan aniqlanadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a}=0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b}=0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial c}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)c=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b+nc=\sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (9.15)$$

60. Avtomobil poygasi haqida quyidagi ma'lumotlar bor: x - masofa(ming km.) va y – yonilg'i sarfi (l /ming km.),

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni chiziqli ekanligini bilgan holda, empirik formula $y = ax + b$ ni eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

Yechish. Zarur yigindilarni topib olamiz $\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Oradagi hisoblashlar quyidagi jadvalda ko'rsatilgan.

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12100
5	130	1,3	169	16900
$\sum$	**450**	**3,9**	**407**	**44500**

Normal tenglamalar sistemasi esa (9.13) formulaga ko'ra quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 44500a+450b=407 \\ 450a+5b=3{,}9 \end{cases}$$

Uning yechimi $a=0{,}014,\ b=-0{,}48$. Shunday qilib, chiziqli bog'lanishning tuzilishi
$y = 0{,}014x - 0{,}48$ ko'rinishda bo'ladi.

61. Ishlab chiqaruvchi 2007–2013-yillar davomida o'z mahsulotiga quyidagi miqdorda buyurtma qabul qiladi:

Yil	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Miqdor	22	20	21	23	19	25	23

Topish kerak: *a*) regressiya teglamalarini, *b*) 2014-yil uchun buytrma miqdori.

Yechish. Hisoblashlarni soddalalashtirish uchun:

Yil	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

Berilganlarga mos keluvchi hisoblashalar quyidagi jadvalda kiritilgan:

N	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	-3	22	9	-66
2	-2	20	4	-40
3	-1	21	1	-21
4	0	23	0	0
5	1	19	1	19
6	2	25	4	50
7	3	23	9	69
7	**0**	**153**	**28**	**11**

Shunday qilib, $n = 7$, $X = 0$, $Y = 153$, $P = 11$, $S = 28$. bundan esa $k=\dfrac{7\cdot 1-0\cdot 153}{7\cdot 28-0}=\dfrac{11}{28}\approx 0{,}393$, $b=\dfrac{28\cdot 153-11\cdot 0}{7\cdot 28-0}=\dfrac{153}{7}\approx 21{,}86$. Regressiya tenglamasining ko'rinishi:

$y=\dfrac{11}{28}x+\dfrac{153}{7}$. 2004 yil bu belgilashlarda $x = 4$ ga to'g'ri keladi. Uni regressiya tenglamasiga qo'yib, $y=\dfrac{11}{28}\cdot 4+\dfrac{153}{7}=23{,}43$ ni hosil qilamiz.

62. Jadvalda reklamaga sarf X (ming p/b.), mahsulot miqdori Y (ming dona) haqida ma'lumot berilgan.

X_i	1	2	3	4	5
Y_i	1,6	4	7,4	12	18

x va y o'zgaruvchilar orasida kvadrat bog'lanish $y=ax^2+bx+c$ mavjud bo'lsa, a, b, c parametrlar qiymatini eng kichik kvadratlar metodi bilan toping.

Yechish. Yechim uchun zarur bo'lgan yig'indilarni topamiz.

$$\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^3,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^4,\ \sum_{i=1}^{n}y_i,\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i.$$

Hisoblash natijalari jadvalda keltirilgan.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4	4	8	16	8	16
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12	16	64	256	48	196
5	5	18	25	125	625	90	450
$\sum$	**15**	**43**	**55**	**225**	**979**	**169,8**	**680,2**

(9.13) formulaga ko'ra normal tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 680{,}2 \\ 225a + 55b + 15c = 169{,}8 \\ 55a + 15b + 5c = 49 \end{cases}$$

bu tenglamalar sistemasining yechimi $a = 0{,}3;\ b = 0{,}48;\ c = 5{,}06$. Demak, izlanayotgan bog'lanishning ko'rinishi: $y = 0{,}3x^2 + 0{,}48x + 5{,}06$.

63 – 68. Berilgan nuqtalar uchun regressiya tenglamasini tuzing.

63. (1; 6), (2; 8), (3; 9), (4; 10).

64. (-2; -12), (0; -7), (2; -3), (4; 2).

65. (-2; 10), (-1; 9), (0; 8), (1; 7), (2; 6).

66. (2; 5), (3; 6), (4; 8), (5; 10), (6; 11).

67. (-4; 12), (-1; 6), (2; 0), (5; -6), (8; -13).

68. (-5;-6), (-3; -2), (-1; 3), (1; 7), (3; 12).

Quyida berilgan masalalarda x va y o'zgaruvchilar chiziqli bog'liq ekanligi ma'lum bo'lsa, eng kichik kvadratlar metodi bilan emperik formulani toping.

69. x – tovarning narxi (p/b.), y – sotilish miqdori (ming dona).

x_i	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
y_i	200	160	120	90	80

70. Korxonada elektr energiyasi iste'mol darajasi – x (mln. kVt.s); y – mahsulot birligining narxi.

x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y_i	20,0	18,8	18,2	18,1	18,0

71. x – dvigatelning quvvati, y – ekspulatatsiyaning o'rtacha muddati (oy);

x_i	30	40	50	60	70
y_i	18	20	21	24	25

Tajriba natijalariga ko'ra eng kichik kvadratlar metodi bilan $y = ax + b$ emperik bog'lanishni muqobil (alternativ) funksiya bilan solishtiring, ulardan qaysi biri tajriba ma'lumotlariga mos keladi:

72.

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

Muqobil (alternativ) bog'lanish $y = 2x + 0{,}1x^2$.

73.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

Muqobil (alternativ) bog'lanish $y = \sqrt{x}$.

74.

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	0,50	0,30	0,25	0,18	0,12

Muqobil (alternativ) bog'lanish $y = 2^{-x}$.

75. Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori x va xarajatlar y (ming p/b.) haqidagi tajriba natijalari ma'lum.

x_i	10	20	30	40	50
y_i	2,0	5,9	12,0	20,0	30,0

Xarajat funksiyasi $y = ax + b$ ko'rinishda izlanadi. Eng kichik kvadartlar metodi bilan a va b parametrlarni aniqlang.

76. Avtomobilni ekspulatatsiya qilish muddati va uni ta'mirlash xarajatlari orasidagi bog'lanishni tekshirish natijalari jadvalda keltirilgan.

x_i	100	120	140	160	180	200
y_i	100	114	130	146	163	180

Bu yerda: x – avtomobilni ekspulatatsiya qilish muddati (yillar), y – xarajatlar summasi. Topish kerak: *a*) regressiya tenglamasi; *b*) avtomobilni o'n yillik ekspulatatsiyasiga sarflanadigan xarajat summasi.

9.9. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotda qo'llanishi

Umumiy holda X tovarga bo'lgan talab ko'p o'zgaruvchi funksiya bo'ladi, ya'ni sotib olinayotgan tovarning miqdori Q_x uning narxi P_x, ikkilamchi xomashyo narxi – P_y, iste'molchining o'rtacha daromad darajasi Y, yil fasllari t va hokazolarga bog'liq.

$\frac{\partial Q_x}{\partial P_x}$ xususiy hosila Q_x talabning faqat P_x tovar narxi o'zgarganda o'zgarish tezligining o'lchov birligi bo'lib xizmat qiladi, bu holda qolgan barcha o'zgaruvchilar o'zgarmas deb faraz qilinadi. Xuddi shunga o'xshash xususiy hosila $\frac{\partial Q_x}{\partial Q_y}$ xomashyoning narxi P_y o'zgarganda X tovarga bo'lgan talab qanday tezlikda o'zgarishini ko'rsatadi.

Xususiy hosilalarning ishorasidan foydalanib, X va Y tovarlarning xarakterini topish mumkin, aynan:

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} > 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} > 0$ bo'lsa, X va Y tovarlar o'rin bosuvchi.

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} < 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} < 0$ bo'lsa, X va Y tovarlar o'rin to'ldiruvchi tovarlar hisoblanadi.

77. Avtomobillarga ehtiyot qismlari ishlab chiqaradigan firma o'z mahsulotini ichki va tashqi bozorga chiqarish imkoniyatiga ega. Tashqi bozorda talab quyidagi ifoda bilan berilgan:

$$P_1 + 8Q_1 = 421.$$

Ichki bozorda esa:

$$P_2 + 2{,}5Q_2 = 80.$$

Bu yerda: Q_1 va Q_2 mos ravishda bir hafta davomida tashqi va ichki bozorda sotib olinadigan miqdor; P_1 va P_2 tashqi va ichki bozordagi narxlar. Firmaning umumiy harajatlari

$$TC = 250 + 5Q;$$

bu erda $Q = Q_1 + Q_2$.

Agar

1) firma narxlarning o'zgartirish siyosatini o'tkazish imkoniyatiga ega bo'lsa,

2) ikkita bozordagi narxlar bir xil bo'lsa.

Maksimal foydaga ega bo'lish uchun har qaysi bozorda firmaning mahsulotiga qanday narx o'rnatilishi kerak. Har bir holda firmaning foydasini aniqlang.

Yechish.

Masalaning birinchi qismi firma o'zining iste'molchilarini ajratishi mumkin va har bir bozorda o'ziga eng ma'qul narxini qo'yishi mumkin deb faraz qilinadi. Tashqi bozordagi talab funksiyasi $P_1 + 8Q_1 = 421$, ichki bozorda esa $P_2 + 2{,}5Q_2 = 80$ firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig'indisiga teng: $R = R_1 + R_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (421 - 8Q_1)Q_1 + (80 - 2{,}5Q_2)Q_2 = = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2$

Firmaning umumiy xarajati:

$$TC = 250 + 5(Q_1 + Q_2)$$

demak, foyda funksiyasi

$$\pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2.$$

Biz Q ga bog'liq bo'lgan foyda funksiyasini hosil qildik. Endi firmaning foydasi maksimum bo'lganda Q_1 va Q_2 larning qiymatini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun Q_1 va Q_2 bo'yicha xususiy hosilalarni topib 0ga tenglaymiz.

$$\begin{cases} \partial\pi/\partial Q_1 = 421 - 16Q_1 - 5, \\ \partial\pi/\partial Q_2 = 80 - 5Q_2 - 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 416 - 16Q_1 = 0 \\ 75 - 5Q_2 = 0 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib $Q_1 = 26$, $Q_2 = 15$ ni topamiz.

Ikkinchi shartni tekshiramiz:

$$\partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16,\quad \partial^2\pi/\partial Q_2^2 = -5,\quad \partial^2\pi/\partial Q_1Q_2 = 0.$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)^2 = (-16)\cdot(-5) - 0 = 80 > 0$$

va $\partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16 < 0$

Demak, foyda funksiyasining maksimumga erishish sharti bajariladi. Shunday qilib, firma maksimum foydaga ega bo'lishi uchun tashqi bozorga 26 ta ichki bozorga 15 ta mahsulot chiqarishi kerak. Q_1 va Q_2 ning bu qiymatlarini talab funksiyasiga qo'yib P_1 va P_2 narxlarni topamiz

$$P_1 = 421 - 8Q_1 = 421 - 8\times 26 = 213,$$
$$P_2 = 80 - 2{,}5Q_2 = 80 - 2{,}5\times 15 = 42{,}5$$

Demak tovarning tashqi bozordagi narxi 213 pul birligi, ichki bozordagi narxi esa 42,5 pul birligi bo'lib, firmaning foydasi:

$$\pi = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2 - 5Q - 5Q_2 = 421\times 26 - 8\times 26^2 + 80\times 15 -$$
$$- 2{,}5\times 15^2 - 250 - 5\times 26 - 5\times 15 = 5720{,}5 \text{ pul birligi.}$$

Firmaning haftalik foydasi - narx o'zgarish siyosatini o'tkazish shartlarida π = 5720,5 pul birligini tashkil qiladi.

Iste'molchilar bozorini ajratish imkoniyati bo'lmagan holda ichki va tashqi narx bir xil bo'ladi: $P_1 = P_2 = P$. U holda tashqi va ichki bozorga chiqariladigan tovar miqdori teng bo'ladi:

$$Q_1 = \frac{421 - P_1}{8} = 52{,}625 - 0{,}125P; \qquad Q_2 = \frac{80 - P_2}{2{,}5} = 32 - 0{,}4P$$

Umumiy miqdori $Q = Q_1 + Q_2 = 84{,}625 - 0{,}525P$, bunda $P = \frac{84{,}625 - Q}{0{,}525}$ - yagona bozor uchun yangi talab funksiyasi.

Yagona bozordagi daromad:

$$TR = PQ = \frac{84{,}625 - Q}{0{,}525}Q = \frac{84{,}625}{0{,}525} - \frac{Q^2}{0{,}525},$$

Umumiy harajatlar

$$TC = 250 + 5Q;$$

Firmaning foyda funksiyasi:

$$\pi = \frac{84{,}625}{0525}Q - \frac{Q^2}{0{,}525} - 250 - 5Q,$$

Foyda maksimum bo'ladigan birinchi tartibli shartga asosan Q ning qiymatini topish zarur.

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{84{,}625}{0{,}525} - \frac{2Q}{0{,}525} - 5 = 0$$
$$Q = 41;$$

shartga asosan.

$$\partial^2\pi/\partial Q^2 < 0 \text{ maksimum sharti.}$$

Demak, Q =41 nuqtada foyda funksiyasi maksimumga erishadi.

$$\pi(41) = \frac{84{,}625}{0{,}525}\times 41 - \frac{412}{0{,}525} - 250 - 5\times 41 \approx 2951{,}9$$

Endi birlashgan bozorda tovarning narxini aniqlash kerak. Buning uchun birlashgan talab funksiyasidan foydalanamiz.

$$P(41) = \frac{84{,}625 - 41}{0{,}525} \approx 83{,}10.$$

E'tibor qilamizki, birinchi va ikkinchi hollarda bozorda chiqarilayotgan tovarning miqdori bir xil. Lekin birinchi holda firmaning tovarlariga bo'lgan narx har xil, natijada foyda olish imkoniyatiga ega bo'ladi.

$$\pi_1 = 5720{,}5, \quad \pi_2 = 2951{,}9.$$

78. Korxona ikki turdagi A va B tovarlar ishlab chiqaradi. Firmaning kunlik foydasi quyidagi ifoda bilan berilgan:

$$\pi(Q_A, Q_B) = -3Q_A^2 + 6Q_AQ_B - 4{,}5Q_B^2 - 90Q_A + 150Q_B - 700.$$

Bu yerda Q_A va Q_B - bir kunda ishlab chiqariladigan A va B tovarlarning miqdori. Foydani maksimallashtirish uchun korxona A va B tovarlardan nechtadan ishlab chiqarishi kerak.

79. A va B mahsulotlarni ishlab chiqaruvchi firmaning daromadi quyidagi ifoda bilan beriladi: $R = -2Q_A^2 - 8Q_AQ_B - 4.75Q_B^2 - 240Q_A + 400Q_B + 200$. Daromadni maksimallashtiradigan A va B tovarni ishlab chiqarish miqdorini aniqlang. Firmaning maksimal foydasini toping.

80. Ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradigan firmaning umumiy xarajatlari quyidagi tenglama bilan berilgan: $T(C) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 224x - 294y + 8140$.

Bu yerda x va y mos ravishda A va B tovarlarning miqdori. Topish kerak:

Firma xarajatini minimallashtiradigan A va B tovarlarning miqdori;

Minimal xarajatning kattaligi.

81. Kichik nonvoyxona ikki turdagi non pishiradi. Oddiy non 100 p/b., shirmoy non 300 p/b. Nonvoyxonaning to'la xarajatlari:

$$TC = 20x^2 - 30xy + 20y^2 - 3760x - 2270y + 186700.$$

Bu yerda: x – oddiy non miqdori, y – shirmoy non miqdori. Topish kerak:

1) Foyda maksimal bo'lishi uchun nonvoyxona har bir turdagi nondan nechtadan pishirishi kerak.

2) Nonvoyxonaning kunlik maksimal foydasini toping.

82. A va B turdagi tennis raketkalarini ishlab chiqaradi. Q_A va Q_B sondagi raketkalarni sotishdan kunlik daromad $TR = 70Q_A + 90Q_B$. Bu raketkalarni ishlab chiqarishga sarflanadigan kunlik xarajatlar

$$TC = 5Q_A^2 - 4Q_AQ_B + Q_B^2 + 20Q_A + 88Q_B + 30.$$

Foydani maksimallashtirish uchun firma A va B raketkalardan nechtadan ishlab chiqarish kerak. Firmaning kunlik foydasi qanday.

83. Ishlab chiqaruvchining ikkita fabrikasi bor. Birinchi fabrikadagi xarajatlari: $C_1 = 0{,}2Q_1^2 + 50Q_1 + 125$. Ikkinchi fabrikaning xarajatlari: $C_2 = 0{,}4Q_2^2 + 40Q_2 + 250$.

Bu yerda Q_1 va Q_2 mos ravishda birinchi va ikkinchi fabrikadagi ishlab chiqarish hajmi. Mahsulot esa $P = 20 - 0.2(Q_1 + Q_2)$ narx bilan sotiladi. Ishlab chiqaruvchi umumiy foydasini maksimallashtiruvchi har bir fabrikaning ishlab chiqarish hajmini toping. Mahsulot birligining narxi va maksimal foydani aniqlang.

84.– 89. Funksiyani shartli ekstremumlarini toping.

84. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ **85.** $z = xy^2 - xy + xy^3 (x>0; y>0)$

86. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ **87.** $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

88. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. **89.** $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

90 – 94 misollarda birinchi tartibli xususiy hosilalar topilsin.

90 *a*) $z = 5x^2 - 13xy + 6y^2$; *b*) $z = 4x^3 + 2x^2y^5 - 8y^3$;
c) $z = 7w^3 + 6wx + 4x^2 - 8xy - 3y^2$; *d*) $z = 2w^4 + 7wxy - 3x^2 + 4y^3$.

91. *a*) $z = (5x + 3y)(12x - 7y)$; *b*) $z = (4x^2 - 3y)(2x + 9y^3)$;
c) $z = (4w - 3x + 7y)(7w^2 + 11x^4 - 3y^5)$; *d*) $z = 13x/(9x - 4y)$.

92. a) $z = \dfrac{4w + 7x + 2y}{3w - 2x + 3y}$ b) $z = (5x - 7y)^3$;

c) $z = 4e^{5xy}$; d) $z = \ln|4x + 7y|$

93. a) $z = \dfrac{(8x + 7y)^4}{2x - 3y}$; b) $z = \dfrac{(3x+4y)(7x-8y)}{5x-2y}$;

c) $z = (12x-5y)^3(6x-7y)$; d) $z = (2x+11y)/(5x+4y)$;

94. a) $z = 7x^3e^{5xy}$; b) $z = 6xy/e^{5x-2}$;

95- 100 misollarda funksiyaning ekstrimumlarini aniqlang

95. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2{,}5y^2 - 5x - 6y + 1{,}5$

96. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2{,}5y^2 - 5x - 8y + 3{,}5$

97. $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 1{,}5y^2 + 0{,}5y + 5$

98. $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 1{,}5y^2 - 2x + 5y + 0{,}5$

99. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 0{,}25y^2 - 10x + 3y + 4$

100. $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 1{,}5y^2 + 75x - 12{,}5y + 9375.$

101. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping

a) $z = x^2y^3 + 5x$; b) $z = (3xy - 4y^2)(x - 4)$;

c) $z = 5x/y + 3y/x$; d) $z = (x + y)/(x - y)$;

e) $z = ln[(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)]$; f) $z = e^{x^2 - 2xy + y^2}$

102. Ekstremal nuqtalarni aniqlang.

a) $z = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 30$;

b) $z = 6x^3 + 6y^3 - 12xy$;

c) $z = 5x^3 + 3x^2 + 6xy - 2y^2 - 2.5$;

d) $z = -6x^2 + 8xy - 2y^2 + 5x + 3y + 17.$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti, uzluksizligi.
3. Ko'p o'zgaruvchi funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilasi.
4. Ko'p o'zgaruvchi funksiyaning to'la differensiali.
5. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilalari qanday hisoblanadi?
6. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari qanday hisoblanadi?

7. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlarining zaruriy va yetarli shartlari.

8. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

9. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumlari qanday topiladi?

10. Eng kichik kvadratlar usuli nimalardan iborat?

Adabiyotlar

12. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.

13. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz. – T., 2006.

14. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 , 3-жилд, 1996 .

15. Обший курс высшей математике для экономистов. /Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М., 2006.

16. Высшая математика для экономистов. /Под.ред. Н.Ш. Кремера. –М.: ЮНИТИ, 2006.

17. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата. - М.: Дело, 2006.

18. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М.: Проспект, 2005.

19. Солодовников А., Бабайсев А.А., Браилов А.В. Математика в экономике. - М.: Финансы и статистика, 2004.

20. Замков О.О., Толстоятенко А.Б., Черемних Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС. 2004.

21. Коршунова Н., Плясунов В. Математика в экономике. - М.: Вита пресс, 2004.

22. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. - М., 2004.

23. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. - М., 2004.

24. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. – М., 2005.

25. Минорский И.П. Сборник задач по высшей математике. – М., 2004.

26. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. -Т.: Ўкитувчи, 1996.

27. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.

28. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.

29. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - Н., 2008.

30. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М., 2008.

31. Ермаков В.И. Общий курс по высшей математике для экономистов. - Н.. 2010.

10-bob. INTEGRAL HISOB

10.1. Boshlang'ich funksiya va integral

Berilgan f(x) funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin. Agar $F'(x)=f(x)$ (bunda $x\in(a,b)$) tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi boshlang'ichi deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang'ich funktsiyasi bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

$f(x)$ funksiyaning $F(x)+c$ (bunda c- o'zgarmas son) boshlang'ich funksiyalar to'plami $f(x)$ funksiyaning noaniq integrali deyiladi va $\int f(x)dx = F(x)+C$ ko'rinishida ifodalanadi

10.2. Noaniq integral xossalari

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $\int f'(x)dx = f(x)+C$, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas son.
2. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, bu yerda A – o'zgarmas son.
3. $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
4. Agar $\int f(x)dx = F(x)+C$ va $x = y(t)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda $\int f(y(t))dy(t) = F(y(t))+C$.

Xususan, $\int f(at+b)dt = \frac{1}{a}F(at+b)+C,(a\neq 0)$.

10.3 Elementar funksiyalarning noaniq integrallari jadvali

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,(n\neq -1)$; $\int 1\cdot dx = x+C$;
2. $\int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,(a>0, a\neq 1)$; $\int e^x dx = e^x+C$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int tgx dx = -\ln|\cos x|+C$.
7. $\int ctgx dx = \ln|\sin x|+C$.
8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
10. $\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$.

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C_1, (a \neq 0)$; $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, (a \neq 0)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

10.4. Integrallashning asosiy usullari

Bevosita integrallash. Bunda integral ostidagi ifoda elementar almashtirishlar bilan jadvalga keltiriladi. So'ngra integral xossalaridan foydalanib, boshlang'ich funksiya topiladi.

1. Integralni hisoblang: $I_1 = \int \frac{42ax\sqrt{x} - 5bx^2 + 14x + 20}{x^2} dx$.

Yechish. Darajaning va noaniq integralning xossalaridan foydalanib:

$$I_1 = 42a\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5b\int dx + 14\int x^{-1}dx + 20\int x^{-2}dx = 84a\sqrt{x} - 5bx + 14\ln|x| - \frac{20}{x} + C.$$

2. Integralni hisoblang: $I_2 = \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$.

Yechish. Integral ostidagi ifodaning suratini $(1+x^2) = 1 + 2x + x^2 = (1+x^2) + 2x$ ko'rinishda yozib olamiz va maxrajga hadma-had bo'lamiz. $I_2 = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2}{1+x^2} dx = \ln|x| + 2 \cdot arctgx + C$.

3. Integralni hisoblang: $I_3 = \int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C$

Yechish. $\int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C = \frac{a^{mx} b^{nx}}{\ln(a^m b^n)} + C.$

4. Integralni hisoblang: $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Yechish.

$$I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -ctgx - tgx + C.$$

5. Integralni hisoblang: $I = \int \frac{x^4}{x^2+1} dx$.

Yechish.

$$I = \int \frac{x^4 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \int (x^2 - 1)dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$$

6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$.

Yechish. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx=2x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C.$

2.O'rniga qo'yish usuli. Ixtiyoriy o'zgaruvchi x ni boshqa ixtiyoriy x ga bog'liq differensiallanuvchi funksiya bilan almashtirish mumkin.

Integrallarni hisoblashda quyidagi qoidalarni hisobga olish foydalidir:

1) Agar $\int f(x)dx=F(x)+C$, u holda $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$. Masalan:

a) $\int\sin xdx=-\cos x+C$, bo'lgani uchun $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$;

b) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$, bo'lgani uchun $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

2) Agar integral ostidagi ifodani $f(x)\cdot f'(x)$ yoki $f'(x):f(x)$ ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $f'(x)dx=df(x)$ ekanligidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\int f(x)f'(x)dx=\int f(x)df(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+C;\qquad \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$$

3) $\int[f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x)]dx=\int(f\cdot\varphi)'dx=\int d(f\cdot\varphi)=f(x)\cdot\varphi(x)+C.$

4) $\int x^3f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int x^2f(x^2)dx^2=\frac{1}{2}\int t\cdot f(t)dt$, *bunda* $t=x^2$.

5) $\int\frac{f'(x)dx}{a^2+f^2(x)}=\int\frac{df(x)}{a^2+f^2(x)}=\frac{1}{a}arctg\frac{f(x)}{a}+C.$

6) $\int\frac{f'(x)dx}{a^2-f^2(x)}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right|+C.$

7) $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{a^2-f^2(x)}}=\int\frac{df(x)}{\sqrt{a^2-f^2(x)}}=\arcsin\frac{f(x)}{a}+C.$

8) $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}}=\int\frac{df(x)}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}}=\ln\left|f(x)-\sqrt{f^2(x)\pm a^2}\right|+C.$

7. Integralni hisoblang:

a) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ *b*) $\int\frac{a\sin x-b\sin x}{a\sin x+b\sin x}dx$ *c*) $\int\frac{\sin x}{\cos^7x}dx$

Yechish. *a*) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=\int(arctgx)'arctgx\,dx=\int arctgx\,d(arctgx)=\frac{1}{2}arctg^2x+C.$

b) $\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{(a\cos x+b\sin x)'}{a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}=\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$

c) $\int\frac{\sin x}{\cos^7x}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos^7x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos^7x}=\frac{1}{6\cos^6x}+C.$

8. Integralni hisoblang: $\int\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}+\frac{arctgx}{1+x}\right)dx.$

Yechish.

$$\int\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}+\frac{arctgx}{1+x}\right)dx=\int\left[\ln(1+x)(arctgx)'+arctgx(\ln(1+x))'\right]dx=\int\left[\ln(1+x)(arctgx)\right]'dx=$$
$$=\ln(1+x)\cdot arctgx+C.$$

9. Integralni hisoblang: $I=\int\cos 9x\cdot dx$.

Yechish. $dx=d\left(\frac{9x}{9}\right)=\frac{1}{9}d(9x)\Rightarrow I=\int\cos 9x\cdot dx=\frac{1}{9}\int\cos 9x\cdot d(9x)=\frac{1}{9}\sin 9x+C.$

10. Integralni hisoblang: $I=\int e^{-x^2}xdx$.

Yechish.

$$xdx=-\frac{1}{2}(-2x)dx=-\frac{1}{2}d\left(-x^2\right)\Rightarrow I=\int e^{-x^2}xdx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

11. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{10-x^2}}$.

Yechish. $d\left(10-x^2\right)=-2x\cdot dx$ ekanligidan

$$I=\int\frac{xdx}{\sqrt{10-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\left(10-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(10-x^2\right)=-\sqrt{10-x^2}+C.$$

12. Integralni hisoblang: $a)\ I=\int\frac{dx}{ax+b}$ $\qquad b)\ I=\int\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.

Yechish. $a)\ I=\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{a\cdot dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$

$b)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2=\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]^2=\left(x^2-\left(x^2-1\right)\right)^2=1$ ekanligidan

$$I=\int\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\int\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2dx=2\int x^2dx-2\int x\sqrt{x^2-1}\cdot dx-\int dx=\frac{2}{3}x^3-x-$$
$$-\int\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2-1\right)=\frac{2}{3}x^3-x-\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3. <u>O'zgaruvchilarni almashtirish usuli</u>. Agar noaniq integral jadval ko'rinishida bo'lmasa, u holda ba'zan o'rniga qo'yish usuliga murojaat etiladi. $\int f(x)dx$ ni topish kerak bo'lsa $x=\varphi(t)$ almashtirish bajariladi.

$\varphi(t)$ funksiya uzluksiz, uzluksiz hosilaga ega va teskari funksiyasi mavjud. $dx=\varphi'(t)dt$ bo'lgani uchun $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$. Qanday qilib qulay almashtirishni olish mumkin degan savolga umumiy javob berish mumkin emas. Qulay almashtirishni topish mashqlar bilan o'zlashtiriladi. Noaniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuliga qator misollar keltiramiz.

13. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Yechish. Ildiz ostidagi ifodalardan ozod bo'lish uchun $x=t^6$ belgilashni kiritamiz.

$dx=d\left(t^6\right)=\left(t^6\right)'dt=6t^5\cdot dt$ ekanligidan $I=\int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}=6\int\frac{t^3-1+1}{t-1}dt=6\int\frac{t^3-1}{t-1}+$

$$+\int\frac{dt}{t-1}=6\int\left(t^2+t+1\right)dt+6\ln|t-1|=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

14. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx.$

Yechish. Belgilashni quyidagicha qilamiz: $\sqrt{10+x^2}=t$, bundan $x^2=t^2-10$. Bu tenglikni ikkala tomonini integrallab $2xdx=2tdt$ yoki $xdx=tdt$ ga ega bo'lamiz. $\frac{dx}{x}=\frac{xdx}{x^2}=\frac{tdt}{t^2-10}$ va

$$I=\int t\frac{tdt}{t^2-10}=\int\frac{t^2-10+10}{t^2-10}dt=\int dt+10\int\frac{dt}{t^2-10}=t+\frac{10}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right|=$$

$$=\sqrt{10+x^2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2}+\sqrt{10}}\right|+C.$$

Ko'rsatma: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ko'rinishdagi funksiyalarni integrallashda quyidagi belgilashlar kiritiladi:

1) $\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya uchraganda $x=a\cdot\sin t$, belgilanib $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\cos t$ topiladi. $dx=a\cdot\cos t\cdot dt$, $t=\arcsin(x/a)$. Bunda $-a<x<a$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

2) $\sqrt{a^2+x^2}$ ko'rinishdagi funksiyalar uchraganda x = $atgt$ belgilanadi. Bundan $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2\left(1+tg^2t\right)}=\frac{a}{\cos t}$, $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$, $t=arctg\frac{x}{a}$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

3) $\sqrt{x^2-a^2}$ ko'rinishdagi funksiyalar uchraganda $x=\frac{a}{\cos t}$ kabi belgilanadi. Bundan $\sqrt{x^2-a^2}=atgt$, $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$, $t=\arccos\frac{a}{x}$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

15. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$.

Yechish. $x=a\sin t$ belgilashni kiritamiz. Bundan esa $dx=a\cos t\cdot dt$ $(0<t<\pi/2)$ va

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\int\frac{a\cos t\cdot dt}{\left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\right)^3}=\int\frac{a\cos t\cdot dt}{\sqrt{a^6\cos^6 t}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{tgt}{a^2}+C.$$

Yuqoridagi belgilashga ko'ra $\sin t=\frac{x}{a}$, $\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, $tgt=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

bo'lib, integralning oxirgi ko'rinishi $I=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

16. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx.$

Yechish. $x=2tgt$, bundan $dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}$ $(0<t<\pi/2)$ va $I=\int\frac{\sqrt{4+4tg^2t}}{16tg^4t}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t}=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{tg^4t\cdot\cos^3 x}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos t dt}{\sin^4 t}=\frac{1}{4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}=-\frac{1}{12}(\sin t)^{-3}=-\frac{1}{12\sin^3 t}+C.\quad tgt=\frac{x}{2}$$

ekanligidan $\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ va $I=-\frac{1}{12x^3}\sqrt{(4+x^2)^3}+C.$

17. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}\quad (x>3).$

Yechish. $x=\frac{3}{\cos t}$ belgilashni kiritamiz. Bundan $dx=\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt,\ (0<t<\pi/2)$ va

$$I=\int\frac{3\sin t}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{9}\int\cos t dt=\frac{1}{9}\sin t+C.\qquad \cos t=\frac{3}{x},\Rightarrow\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x},$$ demak $I=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$

18. Integralni hisoblang $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Yechish. Birinchi usul: $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{(1+e^x)'dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{d(1+e^x)}{\sqrt{1+e^x}}=2\sqrt{1+e^x}+C.$

Ikkinchi usul: Faraz qilaylik $1+e^x=t$. Bundan $e^x dx=dt$. Natijada,

$$\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{1+e^x}+C.$$

Integrallarni hisoblang.

19. $\int\frac{(1-3x)dx}{3+2x^2}$.

20. $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx$.

21. $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$.

22. $\int\frac{xdx}{x^2-5}$.

23. $\int\frac{xdx}{(x+1)^2}$

24. $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}$.

25. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

26. $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

28. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

29. $\int\frac{xdx}{2x^2+3}$.

30. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

31. $\int\frac{x^3dx}{1+x^8}$.

32. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

33. $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

34. $\int\frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$.

35. $\int e^{-(x^2+1)}xdx$.

36. $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

37. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

38. $\int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$.

39. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

40. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$.

41. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

42. $\int x\sin(1-x^2)dx$

43. $\int tgxdx$.

44. $\int ctgxdx$.

45. $\int \sin^3 6x\cos 6xdx$

46. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$

47. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$.

48. $\int \frac{ctg^{2/3}x}{\sin^2 x}dx$.

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$.

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

4. Bo‘laklab integrallash. Agar $u(x)$ va $v(x)$ – differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda ular ko‘paytmasining differensiali $d(uv)=udv+vdu$. Bu ifodaning ikkala tomonini integrallab $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$ *yoki* $\int udv=uv-\int vdu$ formulani olamiz.

Bo‘laklab integrallash usuli turli sinfdagi funksiyalar ko‘paytmalarini integrallashda foydalaniladi:

$\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$, $\int P_n(x)\sin ax\,dx$, $\int P_n(x)arctgx\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$,

$\int P_n(x)\arccos x\,dx$, $\int P_n(x)\ln x\,dx$.

Dastlabki uchta integralda u uchun $P_n(x)$ ko‘phad qabul qilinadi, oxirgi to‘rtta integralda uchun esa mos ravishda arctgx, arcsinx, arccosx, lnx lar qabul qilinadi. Ba’zi hollarda bo‘laklab integrallash formulasini bir necha marta qo‘llash zarur bo‘ladi.

52. Integralni hisoblang: $\int x\cdot e^{-5x}dx$.

Yechish. $u=x$ va $dv=e^{-5x}dx$ deb olamiz, u holda

$$\int xe^{-5x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x,\ du=dx \\ dv=e^{-5x}dx,\ v=\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x}\end{matrix}\right\}=-\frac{x}{5}e^{-5x}dx-\frac{1}{25}e^{-5x}+C.$$

v ni topishda integrallash doimiysini har doim nolga teng deb hisoblash mumkin.

53. $\int arctgx\,dx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=arctgx$ deb olamiz, u holda

$$\int arctgx\,dx=\left\{\begin{matrix} u=arctgx,\ du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx,\ v=\int dx=x\end{matrix}\right\}=x\cdot arctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$$

54 . $\int (x^2+1)\cos x\cdot dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu misolda bo'lakalab integrallash formulasini ikki marta qo'llashga to'g'ri keladi.

$$\int\left(x^2+1\right)\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x^2+1, & du=2xdx;\\ dv=\cos x\,dx, & v=\sin x\end{matrix}\right\}=\left(x^2+1\right)\sin x-2\int x\sin x\,dx=\left(x^2+1\right)\sin x-$$

$$\left\{\begin{matrix}a=x, & da=dx;\\ \sin x dx=db, & b=-\cos x\end{matrix}\right\}-2\left(-x\cos x+\int\cos x dx\right)=\left(x^2+1\right)\sin x+2x\cos x-2\int\cos x dx=$$

$$\left(x^2+1\right)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C=2x\cos x+\left(x^2-1\right)\sin x+C.$$

55. Noaniq integralni hisoblang: $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Yechish. Bu integralni ikki marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\left\{\begin{matrix}u=e^{\alpha x}, & du=\alpha\cdot e^{\alpha x}dx;\\ dv=\cos\beta x\cdot dx, & v=\frac{1}{\beta}\sin\beta x\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=$$

$$\left\{\begin{matrix}u=e^{\alpha x}, & du=\alpha\cdot e^{\alpha x}dx\\ dv=\sin\beta x\,dx, & v=-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x\,dx\right)=$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x\,dx.$$

Bundan $I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ deb ushbu tenglikka ega bo'lmaiz:

$I=\frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I$ bu tenglamani I ganisbatan yechib,

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)+C$ yechimni olamiz.

56. Integralni hisoblang: $I=\int x^n\ln x\,dx,\ n\neq -1$.

Yechish. $u=\ln x$, $dv=x^n dx$, bundan $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$;

$$I=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C.$$

57. Integralni hisoblang: $\int x\sin x dx$.

Yechish. Faraz qilaylik $u=x$, $\sin x\,dx=dv$. Bundan $du=dx$, $v=-\cos x$. Natijada, $\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$.

Integrallarni hisoblang:

58. $\int e^x\cos x dx$. **59.** $\int\ln x dx$. **60.** $\int x\ln(x-1)dx$.

61. $\int(5x+6)\cos 2x dx$. **62.** $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x dx$. **63.** $\int xe^{2x}dx$.

64. $\int e^x \sin x dx$ 65. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$. 66. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

67. $\int \sqrt{1-x^2} dx$. 68. $\int \arcsin x dx$. 69. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

70. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. 71. $\int (\ln x)^2 dx$. 72. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$.

73. $\int \frac{x}{e^x} dx$. 74. $\int x \cdot 2^{-x} dx$ 75. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

5. <u>Kvadrat uchhadni o'z ichiga olgan ba'zi funksiyalarni integrallash</u>.

Quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Bu integrallarni hisoblash uchun maxrajdagi uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(t^2 \pm m^2\right),$$

bu yerda $t = x+\frac{b}{2a}$, $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$.

76. Integralni hisoblang $I_1 = \int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Yechish. To'la kvadrat ko'rinishga keltirib olamiz:

$$4x^2+4x+5 = 4\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right] = 4\left(t^2+1\right) \textit{bunda } t = x+\frac{1}{2},\ dx = dt.$$

Demak $I_1 = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} arctgt + C = \frac{1}{4} arctg \frac{2x+1}{2} + C.$

77. Integralni toping: $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Yechish. $-2x^2+3x+2 = -2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{10}-\frac{9}{16}-1\right) = -2\left(t^2-\frac{25}{16}\right) = 2\left(m^2-t^2\right)$, $t = x-\frac{3}{4}$, $m = \frac{5}{4}$, $dt = dx$. Bundan $I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{t}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C.$

I_2 – integralni topish uchun suratda maxrajning hosilasini ajratib olamiz va yig'indining hosilasini topamiz:

$$x = \frac{2a}{2a}x = \frac{2ax+b-b}{2a} = \frac{2ax+b}{2a}-\frac{b}{2a} \text{ u holda } Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}.$$

Bundan

$$I_2=\int\frac{\left[\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\right]dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int\frac{\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I_1;$$

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}=\ln|ax^2+bx+c|\Rightarrow I_2=\frac{A}{2a}\cdot\ln|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I_1.$$

I_4 – integral ham xuddi shunday aniqlanadi.

78. Integralni hisoblang $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

Yechish. $(4x^2-4x+17)'=8x-4$. bundan $3x-1=3\cdot\frac{8x-4+4}{8}-1=\frac{3}{8}(8x-4)+\frac{1}{2}$ va

$$4x^2-4x+17=4\left(x^2-2\cdot\frac{x}{2}+\frac{17}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=4(t^2+4),\quad t=x-\frac{1}{2};\quad I=\frac{3}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17}+$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{8}\int\frac{d(4x^2-4x+17)}{4x^2-4x+17}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}=\frac{3}{8}\ln|4x^2-4x+17|+\frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4}+C.$$

Integrallarni hisoblang

79. $\int 6x^5dx$.

80. $\int(5x^3+7x-\frac{2}{x})dx$.

81. $\int\frac{x-4}{x^3}dx$.

82. $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$.

83. $\int(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x})dx$.

84. $\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}})dx$.

85 $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$.

86. $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

87. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$.

88. $\int\frac{5-2ctg^2x}{\cos^2x}dx$.

89. $\int\frac{dx}{x^2+8}$.

90. $\int\frac{dx}{x^2-5}$.

91. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

92. $\int\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$.

93. $\int tg^2xdx$.

94. $\int ctg^2xdx$.

10.5. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ifoda, bu yerda $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – mos ravishda m, n – darajali ko'phadlar, ratsional kasr (yoki funksiya) deyiladi. Agar $m < n$ bo'lsa ratsional kasr to'g'ri, $m \geq n$ bo'lganda esa noto'g'ri deyiladi.

Agar integral ostidagi kasr noto'g'ri bo'lsa, bo'lish usuli bilan bo'linuvchidan bo'linma va qoldiqni ajratib olish mumkin.

Masalan, $\frac{x^2+2}{x^2+x-1} = x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-1}$.

Har qanday ko'phadni chiziqli va kvadratik ko'paytuvchilarga ajratilsa mumkin. $Q_n(x) = (x-a)^a(x^2+px+q)^\beta \ldots$ bo'lsa, u holda quyidagi yoyilma o'rinli

$$\frac{P(x)}{(x-a)^a(x^2+px+q)^\beta\ldots} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_a}{(x-a)^a}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}+\ldots$$

95. Integralni hisoblang $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$

Yechish. Integral ostidagi funksiyani sodda kasrlari yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz.

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}$$

A va B o'zgarmaslarni x=A(2x+1)+B(x+1)=(2A+B)x+(A+B) ayniyatdan topamiz.

2A+B=1 , A+B=0 sistemani yechib , A=1 ; B=-1 ni topamiz.

$$\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx = \ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C = \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$$

96. Integralni hisoblang

$$\int\frac{(7x-5)dx}{x^3+x^2-6x}dx$$

Yechish. Kasrning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratib $x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

7x-5=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)= $x^2(A+B+C)+x(A+3B-2C)-6A$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglab A+B+C=0 , -6A=-5 , A+3B-2C=7 ni hosil qilamiz va A= $\frac{5}{6}, B=\frac{9}{10}, C=-\frac{26}{15}$

$$\int\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{9}{10}\frac{1}{x-2}-\frac{26}{15}\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-\frac{26}{15}\ln|x+3|+C.$$

Integrallarni hisoblang.

97. $\int \frac{x^3}{x+3} dx$.

98. $\int \frac{x^4}{x^2+4} dx$.

99. $\int \frac{x^5}{x^3-8} dx$.

100. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$.

101. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$.

102. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$

103. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$.

104. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx$

105. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx$.

106. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} dx$.

107. $\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x} dx$.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, m, n \in Z$ ko'rinishdagi integral quyidagicha hisoblanadi. Agar m va n – juft musbat sonlar bo'lsa darajani pasaytirish formulalaridan foydalaniladi.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Universal almashtirish

$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$ bu almashtirish natijasida $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 2arcctgt$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ u holda $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}$

108. Integralni hisoblang $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx$.

Yechish. $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Integrallarni hisoblang

109. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

110. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

111. $\int \cos^3 x dx$

112. $\int \sin^5 x dx$

113. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

114. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$

115. $\int \sin^4 x dx$ 116. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$ 117. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

118. $\int \cos^6 3x dx$ 119. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ 120. $\int \cos^7 x dx$

121. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ 122. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ 123. $\int \sin^3 x dx$

124. $\int \cos^5 x dx$ 125. $\int x \sin^2 x^2 dx$ 126. $\int e^x \cos^2 e^x dx$.

10.6. Aniq integral

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya [a,b] kesmada aniqlangan. [a,b] kesmani n ta bo'lakka bo'lamiz. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ oraliqda ixtiyoriy ξ_i nuqtani olamiz va $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ yig'indini tuzamiz, bu yerda $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ko'rinishidagi yig'indi integral yig'indi deyiladi, uning $max\ \Delta x_i \to 0$ dagi limiti (mavjud va chekli bo'lsa) $f(x)$ funksiyaning a dan b gacha oraliqdagi aniq integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Bu holda $f(x)$ funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi deyiladi. $F(x)$ funksiyaning [a,b] kesmada uzluksiz yoki bir necha uzilish nuqtalariga ega bo'lishi, uning integrallanuvchi bo'lishi uchun yetarlidir.

Agar $f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz, $\int f(x)dx = F(x)+c$ aniqmas integrali mavjud bo'lsa u holda $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ Nyuton-Leybnis formulasi o'rinli bo'ladi:

1) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ bu yerda c- o'zgarmas son.

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a<c<b$

Bir nechta misollar keltiramiz:

1) $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_a^b = -\frac{1}{b}+\frac{1}{a} = \frac{b-a}{ab} \quad (ab\neq 0)$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_1^0 = arctg\,1 - arctg\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

3) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

4) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x\Big|_0^{\pi/4} = 1$

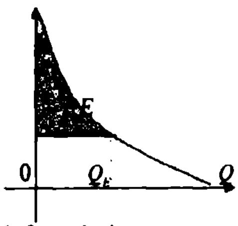
5) $\int_0^1 \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx = \int_0^1 \frac{1+e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}dx = x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{de^x}{1+e^{2x}} = 1 + 2arctge^x\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{2} + 2arctge$

Aniq integralning iqtisodiyotda qo'llanilishi

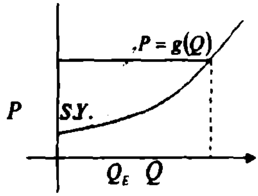
Ishlab chiqarishning va iste'molchining yutug'i.

Talab va taklif funksiyalarining kesishgan nuqtasi muvozanat nuqtasi deyiladi. Tovarni o'z narxidan ko'ra ancha arzon muvozanat narxida sotib olgan iste'molchi yutuqqa erishadi. Barcha iste'molchilar tomonidan tejalgan pullarning yig'indisi iste'mol yutug'i deyiladi.

Talab egri chizig'i $P=f(Q)$ va $P=P_E$ - tovarning muvozanat narxi bo'lsin. Iste'mol yutug'i yuqoridan talab egri chizig'i, quyidan $P=P_E$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini beradi (rasmdagi shtrixlangan yuza).



Iste'mol (xarid) yutug'ini hisoblash formulasi $I.Y. = \int_0^{Q_E}[f(Q)-P_E]dQ$. Xuddi shuningdek



ishlab chiqaruvchining tovarni mo'ljallaganidan yuqori muvozanat narxida sotishdan olgan qo'shimcha summasi ishlab chiqaruvchi (sotuv) yutug'i deyiladi va $S.Y.=\int_0^{Q_E}[P_E-g(Q)]dQ$

formula bilan hisoblanadi.

127. Tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalari berilgan:

$P_D=-q^2-5q+249$, $P_S=q^2+4q+6$, $0<q<13$. Bu yerda q – tovar miqdori, P – esa tovarning so'mdagi narxi.

Topish kerak:

a) Tovarning muvozanat narxi va miqdori; *b*) Xarid yutug'i; *c*) Sotuv yutug'i.

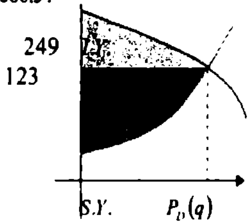
Yechish. *a*) Muvozanat narxi va miqdor talab va taklif teng bo'lgan nuqtadir, ya'ni: $P_D=P_S$

$$\begin{cases}P_D=-q^2-5q+249\\ P_S=q^2+4q+6\end{cases}\Rightarrow 2q^2+9q-243=0$$ kvadrat tenglamaning ildizlari $q_1=-13{,}5$; $q_2=9$.

$q=9$ ni tenglamalar sistemasiga qo'yib, tovarning muvozanat narxini hosil qilamiz $P=123$. Demak muvozanat nuqtasi $P(9;\ 123)$.

b) Iste'mol yutug'i

$$I.Y.=\int_0^9\left(-q^2-5q+249-123\right)dq=\left[-\frac{q^3}{3}-\frac{5q^2}{2}+126q\right]\Big/_0^9=688.5.$$



c) Ishlab chiqaruvchining yutug'i

$$S.Y.=\int_0^{Q_E}[P_E-g(Q)]dQ$$

formulaga ko'ra

$$S.Y.=\int_0^9[123-q^2-4q-6]dq=\left(117q-\frac{q^3}{3}-2q^2\right)\Big/_0^9=648.$$

128. Tovarni ishlab chiqaruvchi yakka hokimlikka ega. Talab funksiyasi $P=-q^2-25q+2000,\ 0<q<13$; xarajat funksiyasi $TC=0{,}1q^2+572q+250$. bu yerda P – tovarning narxi, q – bir kunda ishlab chiqariladigan tovar miqdori. Topish kerak:

a) foydani maksimallashtiradigan tovar narxi va miqdori;

b) foydani maksimallashtiradigan narxdagi iste'mol yutug'i.

Yechish. Yakka hokim ishlab chiqaruvchi o'z mahsulotiga foydani maksimallashtiradigan narx qo'yadi. Shuning uchun avval foyda funksiyasini tuzib uning ekstremumlarini aniqlaymiz. Daromad $TR=P\cdot q=-q^3-25q^2+2000q$, u holda foyda funksiyasi

$$\pi=TR-TC=-q^3-25q^2+2000q-0.1q2-572q-250=-q^3-25{,}1q^2+1428q-250.$$

$$\frac{d\pi}{dq}=-3q^2-50{,}2q+1428=0\Rightarrow q_1=-31{,}73\quad q_2=15.$$

Musbat yechim uchun ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshiramiz:

$\frac{\partial^2\pi}{dq^2}=(-6q-50{,}2)/_{q=15}=-140{,}2<0.$ demak bu nuqtada foyda funksiyasi maksimumga erishadi. $P(15)-15^2-25\cdot15+2000=1400$. Shunday qilib, har kuni 15 dona mahsulot ishlab chiqariladi va 1400 p/b. dan sotiladi.

b) Xarid yutug'i: $H.Y.=\int_0^{Q_E}[P_D(q)-P_E]dq=\int_0^{15}\left(-q^2-25q+2000-1400\right)dq=$

$$\left(-\frac{q^3}{3}-\frac{25q^2}{2}+600q\right)\Big/_0^{15}=5062{,}5 \text{ p/b}.$$

129. – 147-misollarda berilgan talab va taklif funksiyalari uchun
a) muvozanat narx *P* va mahsulot miqdor *q*;
b) xarid yutug'i;
c) ishlab chiqaruvchining yutug'ini toping.

129. $P_S=4+q,\ P_D=16-2q,\ 0<q<8.$

130. $P_S=5+0{,}5Q,\ P_D 21-1{,}5Q.$

131. $P_S=q^2+5q,\ P_D=-q^2-5q+1000,\ 0<q<29.$

132. $P_S=x^2+10x+2,\ P_D=-x^2+2x+332,\ 0<x<19.$

133. $P_S=q^2+4q+6,\ P_D=-q^2-5q+249,\ 0<q<13.$

134. $P_S=x^2+10x+20,\ P_D=-x^2-2x+580,\ 0<x<23.$

135. $P_S=x^2+7x+5,\ P_D=-x^2-9x+365,\ 0<x<15.$

136. $P_S=q^2+3q+5,\ P_D=-q^2-11q+5705,\ 0<q<70.$

137. $P_S=q^3+q^2+100,\ P_D=q^3-900q+9200,\ 0<q<17.$

138. $P_S=q^3+5q+212,\ P_D=q^3-10q^2+25q+1412.$

139. $P_S=\frac{q}{2}+4,\ P_D=\sqrt{236-21{,}5q},\ 0<q<10.$

140. $P_S=\frac{x}{3}+6,\ P_D=\sqrt{117-4x},\ 0<x<29.$

141. $P_S=\sqrt{5x+9},\ P_D=\sqrt{737-2x},\ 0<x<368.$

142. $P_S=\sqrt{10q+25},\ P_D=\sqrt{2425-10q},\ 0<x<242.$

143. $P_S=(q+8)/4,\ P_D=(583-12q)^{1/3},\ 0<x<48.$

144. $P_S=q+30,\ P_D=225/(0{,}2q+2).$

145. $P_S = \dfrac{20q + 1000}{q + 30}$, $P_D = \dfrac{1225}{(0{,}1q + 2)^2}$.

146. $P_S = \dfrac{20q + 2250}{q + 30}$, $P_D = \dfrac{3200}{(0{,}2q + 3)^2}$.

147. $P_S = e^{1+0{,}2q}$, $P_D = e^{4-0{,}1q}$.

148 – 152 misollarda yakka hokimning tovariga bo'lgan talab va xarajat funksiyasi berilgan. Quyidagilarni topish kerak:

a) foydani maksimallashtiradigan narxni;

b) iste'mol yutug'ini toping.

148. $TC = 0{,}5q^2 + 200$, $P = 140 - 3q$, $0 < q < 40$.

149. $TC = 2q^2 + 500$, $P = 300 - 4q$, $0 < q < 75$.

150. $TC = 0{,}2q^2 + 210$, $P = 78 - 1{,}1q$, $0 < q < 54$.

151. $TC = q^2 + 2q + 600$, $P = -q^2 - 3q + 382$, $0 < q < 18$.

152. $TC = q^2 + 4q + 700$, $P = -0{,}1q^2 - 2q + 214$, $0 < q < 40$.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Funksiyaning boshlang'ichi va noaniq integral deb nimaga aytiladi?
2. Noaniq integralning asosiy xossalari.
3. Funksiyani integrallashning asosiy usullarini sanab o'ting.
4. Noto'g'ri kasr qanday integrallanadi?
5. Bo'laklab integrallash formulasi.
6. Qanday funksiyalarni integrallashda noaniq koeffitsentlar usulidan foydalaniladi?
7. Sodda trigonometrik funksiyalarni integrallash usullari.
8. $[a; b]$ kesmada $f(x)$ funksiyani aniq integrallash deb nimaga aytiladi.
9. Aniq integralning geometrik ma'nosi.
10. Aniq integralning asosiy xossalari.
11. Nyuton Leybines formulasini keltirib chiqaring.
12. Aniq integralni hisoblashning asosiy usullari.

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya, 2007.

2. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А. К., Мансуров Х. Олий математика асослари. – Т.: Ўзбекистон, 1999.

3. Соатов Ё.У. Олий математика. - Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994, 3-жилд, 1996.

4. Обший курс высшей математики для экономистов. /Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М., 2006.

5. Высшая математика для экономистов. /Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2006.

6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалаврианта. - М.: Дело, 2006.

7. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М.: Проспект, 2005.

8. Солодовников А., Бабайцев А.А., Браилов А.В. Математика в экономике. - М.: Финансы статистика, 2004.

9. Замков О.О., Толстоптенко А.Б., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС, 2004.

10. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М., 2004.

11. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. – М., 2005.

12. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. – Т.: Ўкитувчи, 1996.

13. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.

14. Сборник задач по высшей математике для экономистов. /Под ред. В.И.Ермакова. - М.: Инфра – М., 2003.

15. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. - М., 2008.

16. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - Н., 2008.

17. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М., 2008.

18. Ермаков В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. –Н., 2010.

11 - bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

11.1. Differensial tenglama haqida tushuncha. Umumiy yechim, umumiy integral

n – Tartibli oddiy differensial tenglama deb,

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0 \qquad (11.1)$$

ko'rinishidagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $y=y(x)$ – noma'lum funksiya.

(11.1) tenglamani ayniyatga aylantiradigan har qanday $y=\varphi(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi deyiladi. Agar yechim $F(x, y)=0$ kabi yopiq ko'rinishda berilsa, u (11.1) tenglamaning integrali deyiladi.

Agar tenglamadagi funksiya bir argumentli bo'lsa, bunday tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Agar tenglamadagi funksiya, ko'p o'zgaruvchan bo'lsa uning xususiy hosilalari ham ishtirok etadi. Bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Biz faqat oddiy differensial tenglamalarni o'rganamiz va kelgusida qisqalik uchun differensial tenglama deb ataymiz.

Differensial tenglamaga kiruvchi hosila (differensial)larning eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi. Masalan: $y'=x+y$, $y'=x\cdot\cos x+y$ - birinchi tartibli differensial tenglamalar, $y''+y=x$ - esa ikkinchi tartibli differensial tenglama.

Differensial tenglamaning yechimi deb, tenglamani ayniyatga aylantiradigan differensiallanuvchi $y=y(x)$ funksiyaga aytiladi.

n – tartibli differensial tenglamaning n ta ixtiyoriy o'zgarmaslarga bog'liq bo'lgan yechimi, bu tenglamaning *umumiy yechimi* deyiladi. Bu o'zgaruvchilarning aniq son qiymatlarida olingan yechim differensial tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

(11.1) tenglama uchun Koshi masalasi boshlang'ich shartlar deb ataluvchi ushbu $y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir.

Differensial tenglamaning yechimini topish uni integrallash deyiladi.

Yechimning grafigi integral egri chizig'i deyiladi.

1. Berilgan $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ (1) funksiya

$$y''-3y'+2y=0 \quad (2)$$

tenglamaning yechimi ekanligini isbotlang.

Yechish. (1)–funksiyani ketma–ket differensiallab quyidagi $y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}$, $y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}$ tengliklarga kelamiz. Bu sistemani c_1e^x va c_2e^{2x} ga nisbatan yechib:

$c_1e^x=2y'-y''$, $c_2e^{2x}=\frac{1}{2}(y''-y')$. Bu ifodalarni (1) ga qo'yib (2) ni hosil qilamiz.

2. Berilgan $y^3-cx^3+3xy=0$ (3) funksiya $y^3-(xy^2+x^2)y'+2xy=0$ (4) tenglamaning yechimi bo'lishini tekshiring.

Yechish. (3) tenglamani x bo'yicha differensiallab $y^2y'-cx^2+y+xy'=0$ (5)

bundan $cx^2=y^2y'+y+xy'=y+(y^2+x)y'$ (6)

tenglikka kelamiz, cx^2ning ifodasini (3) ga qo'yib $y^3-(y^2y'+xy'+y)x-3xy=0$ (7) $y^3-y'(xy^2+x^2)+2xy=0$, tenglamani hosil qilamiz.

3. $y'=2xe^{x^2}$ tenglamaning $y(0)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Aniqmas integralning ta'rifiga ko'ra, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\int 2xe^{x^2}dx \quad (8)$$

Differensial ostidagi o'zgaruvchini almashtirib quyidagini olamiz:

$$y=\int 2xe^{x^2}dx^2=e^{x^2}+c \quad (9).$$

Boshlang'ich shartni hisobga olib, $1=1+C$, tenglikka kelamiz, bundan $c=0$. Shunday qilib izlanayotgan xususiy yechimning ko'rinishi: $y=xe^{x^2}$.

Topilgan funksiya differensial tenglamaning (0; 1) nuqtadan o'tuvchi integral egri chizig'ini ifodalaydi.

Quyidagi funksiyalar differensial tenglamaning integrali ekanliginini tekshiring.

4. $x^2-xy+y^2=c^2, (x-2y)y'=2x-y$.

5. $x\sqrt{1+y^2}=cy, xy'-y=y^3$.

6. $y^2-2=C\cdot e^{\frac{1}{x}}, 2x^2yy'+y^2=2$.

7. $y=C_1\ln x-\frac{x^2}{4}+C_2, x(y''+1)+y'=0$.

11.2. O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

Ushbu,

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \quad (11.2)$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $M(x)$, $N(y)$ – uzluksiz funksiyalar.

Tenglama hadma - had integrallash yo'li bilan yechiladi:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=c.$$

8. $y'=\frac{y}{x}$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama o'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglama, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Tenglikning ikkala tomonini integrallab, $\ln|y|=\ln|x|+\ln|c|$ umumiy integral va $y=cx$ – umumiy yechimni hosil qilamiz.

9. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$ differensial tenglamaning $y(0)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan xususiy yechimni toping.

Yechish. $(x^2-1)dy=-2xy^2dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y^2}=-\int\frac{2xdx}{x^2-1}\Rightarrow\frac{1}{y}=\ln|x^2-1|+C$.

Shunday qilib umumiy integral $y(\ln|x^2-1|+C)=1$ boshlang'ich shartni $y(0) = = 1$ ni qo'yib:

$1(0+C)=1 \Rightarrow C=1$. Bundan xususiy integral $y(\ln|x^2-1|+1)=1$ ni topamiz.

10. Tenglamani yeching: $yx^2dy - \ln x dx = 0$.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz: $ydy = \frac{\ln x}{x^2}dx$.

Bu tenglikni ikkala tomonini integrallab $\int ydy = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$ ni hosil qilamiz. Tenglikni o'ng tomonini bo'laklab integrallaymiz,

$u=\ln x, \quad dv=\frac{dx}{x^2} \Rightarrow du=\frac{1}{x}, \; v=-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{2}=-\frac{1}{x}\ln x+\int x^{-2}dx \;\; \frac{y^2}{2}=\frac{1}{x}(\ln x+1)+C.$

11. Tenglamani yeching: $y'+1=\sqrt{x+y+1}$.

Yechish. $z=x+y+1$ almashtirishdan foydalanamiz, bu yerda $z=z(x)$. U holda $z'=y'+1$ va berilgan tenglamaning ko'rinishi $z'=\sqrt{z}$, yoki $\frac{dz}{\sqrt{z}}=dx$ ya'ni z o'zgaruvchiga nisbatan o'zgaruvchili ajraladigan differensial tenglamaga keldi, uni yechib $\int z^{-\frac{1}{2}}dz=\int dx$, $2z^{\frac{1}{2}}=x+C$. Avvalgi o'zgaruvchilarga qaytib, $2\sqrt{x+y+1}=x+C$. yoki $y=0{,}25(x+C)^2-x-1$..

Differensial tenglamalarni yeching. Agar boshlang'ich shart berilgan bo'lsa xususiy yechimini toping:

12. Tenglamani yeching. $\sqrt{1-y^2}dx - ydy = 0$

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratib, $dx=\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}$ tenglikni hosil qilamiz, uni integrallab $x+c=-\sqrt{1-y^2}$ yoki $(x+c)^2+y^2=1$ yechimni topamiz.

13. Tenglamani yeching. $e^{-y}(1+y')=1$

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratib quyidagilarni hosil qilamiz.

$1+y'=e^y$, $y'=e^y-1$, $\frac{dx}{dy}=e^y-1$, $\frac{dy}{e^y-1}=dx$, $\frac{dy}{e^y(1-e^{-y})}=dx$ uni integrallaymiz

$x+C=\int\frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}dy=\int\frac{d(1-r^{-y})}{1-e^{-y}}=\ln|1-e^{-y}|$ bundan $x+C=\ln|1-e^{-y}|$ yoki $1-e^{-y}=e^{x+C}=C_1e^x$

bunda $C_1=e^C$ umumiy yechimni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$C_1e^x+e^{-y}=1$ *yoki* $e^x=\frac{1}{C_1}(1-e^{-y})=C_2(1-e^{-y})$ va $y=o$

Tenglamalarni yeching

14. $(3x-1)dy+y^2dx=0$

15. $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy=0$

16. $xy'+2y=2xyy'$

17. $e^{1-2x}(y^2-1)dy-dx=0$

18. $x^2(y'-1)=2y'$

19. $e^{x+y}dx+ydy=0$

20. $y' = (x+y)^2$

21. $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0$

22. $xydx+(x+1)dy = 0$

23. $y'\, ctgx + y = 2,\ y(0) = -1$

24. $\sqrt{y^2-1}dx = xydy$

25. $xy' + y = y^2,\ y(1) = 0{,}5$

26. $xyy' = 1 - x^2$

27. $y'y(1+e^x) = e^x,\ y(0) = 1$

28. $xy' - y = y^3$

29. $(xy^2+x)dx + (x^2y - y)dy = 0,\ y(0)=4$

30. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$

31. $z' = 10^{x+z}$

32. $y' = \cos(y-x)$

33. $y'ctgx + y = 2;\quad y(0) = -1$

34. $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\quad y(2) = 0$

35. $xy' + y = y^2;\quad y(1) = 0.5$

36. $(x+2y)y' = 1;\quad y(0) = -1$

37. $(1+x^2)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0;\quad y(1) = -1$

38. $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})y' - y = 0;\quad y(1) = 1$

39. $x^2(2yy'-1) = 1;\quad y(1) = 0$

11.3. Bir jinsli differensial tenglamalar

Agar $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$ ayniyat o'rinli bo'lsa, $f(x,y)$ m darajali bir jinsli funksiya deyiladi. Masalan: $x\cos\frac{y}{x}$; $x - y\cos\frac{y}{x}$; $\sqrt[3]{x^3+y^3}$; $\frac{x^2-y^2}{xy}$ funksiyalar bir jinsli funksiyalardir.

1) Agar $P(x,y)$ *va* $Q(x,y)$ bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo'lsa, u holda

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (*)$$

birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

(*) tenglama $y = ux$ almashtirish yordamida, bu yerda u yangi noma'lumli funksiya, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

40. Tenglamani yeching. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Yechish: Tenglama bir jinsli bo'lgani uchun $y=ux$ almashtirishni bajaramiz, natijada $y'=u+xu'$ ni hosil qilamiz. Tenglama $u+xu' = \frac{1+u}{1-u}$ yoki $xu' = \frac{1+u^2}{1-u}$ ko'rinishini oladi. O'zgaruvchilarni ajratib $\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}$ ni hosil qilamiz. Uni integrallab $arctgu - \frac{1}{2}ln(1+u^2) = ln|x| + C_1$ ni topamiz.

Oldingi o'zgaruvchilarga qaytib $arctg\frac{y}{x} = \frac{1}{2}ln(1+\frac{y^2}{x^2}) + ln|x| + C$ yoki

$arctg\frac{y}{x}= ln\sqrt{x^2+y^2}+C$ ni hosil qilamiz.

41. Tenglamani yeching. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

Yechish: $y=ux$ almashtirishni bajarib $u+xu'=1/u+u$ *yoki* $xu'=\frac{1}{u}$ ni hosil qilamiz. Bundan $udu=\frac{dx}{x}$ *yoki* $\frac{1}{2}u^2=ln|Cx|$. Dastlabki o'zgaruvchilarga qaytib $y^2=x^2ln(C^2x^2)$ yoki $y=\pm x\sqrt{\ln(c^2x^2)}$ hosil bo'ladi.

42. Tenglamani yeching. $xdy=(x+y)dx$.

Yechish. Bir jinsli tenglamada $y=ux$ almashtirishni bajaramiz. U holda $dy=udx+xdu$. Bu tenglikni tenglamaga qo'yib, $x(udx+xdu)=(x+ux)dx$; $xdu=dx$ ni olamiz. Hosil bo'lgan o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani yechamiz. $du=\frac{dx}{x}$; $u=\ln|x|+C$. Eski o'zgaruvchilarga qaytib, $y=x(\ln|x|+C)$ ni hosil qilamiz.

2) $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ ko'rinishdagi tenglama koordinatalar boshini $a_1x+b_1y+c_1=0$ va to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasiga ko'chirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Agar bu to'g'ri chiziqlar kesishsa, u holda $a_1x+b_1y=k(ax+by)$; natijada tenglamaning ko'rinishi $y'=F(ax+by)$ va $z=ax+by$ almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

3) Ba'zan tenglamalar $y=z^m$ almashtirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Bu yerda m oldindan ma'lum bo'lmagan son.

43. Tenglamani yeching. $y'=\frac{x+y}{x+1}+\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2$

Yechish: $\frac{y-1}{x+1}=\frac{x+y-(x+1)}{x+1}=\frac{x+y}{x+1}-1$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning o'ng tomoni $\frac{x+y}{x+1}$ ifodaning funksiyasi bo'ladi. $x+y=0$ va $x+1=0$ chiziqlar $(-1;1)$ nuqtada kesishgani uchun koordinata o'qlarini bu nuqtaga parallel ko'chirib, yangi o'zgaruvchilarga o'tamiz: $t=x+1$, $z=y-1$. Izlanayotgan funksiya $z=z(t)$.

$z'=\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}=y'$ bo'lgani uchun berilgan tenglama $z'=1+\frac{z}{t}+\left(\frac{z}{t}\right)^2$ ko'rinishga keladi. Hosil bo'lgan bir jinsli tenglamani yechish uchun $u=z/t$ almashtirishni bajaramiz, bu yerda $u=u(t)$. U holda $z=ut$, $z'=u't+u$ va tenglama $u't=1+u^2$, yoki $\frac{du}{1+u^2}=\frac{dt}{t}$ ko'rinishga keladi, ya'ni o'zgaruvchisi ajraladigan tenglama bo'ladi.

Tenglikni hadma-had integrallab,

$$arctg\, u=ln|t|+c,$$

yoki

$$u=tg(\ln|t|+c).$$

$u=\frac{z}{t}=\frac{y-1}{x+1}$ bo'lgani uchun

$y = 1 + (x+1)tg(\ln|x+1| + c)$ hosil bo'ladi.

44. Tenglamani yeching. $(x^2 - 2xy)dy - (xy - y^2)dx = 0$.

Yechish. $y = xu$ almashtirish kiritamiz. $dy = xdu + udx$. $\Rightarrow$

$(x^2 - 2x \cdot xu)dy + (1-2u)udx = (u - u^2)dx \Rightarrow x(1-2u)du = u^2 dx$.

O'zgaruvchilarni ajratamiz: $\frac{1-2u}{u^2}du = \frac{dx}{x}$. Ikkala tomonini integrallaymiz:

$\int \frac{1-2u}{u^2}du = \int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{1}{u^2}du + \int \frac{-2}{u}du = \int \frac{dx}{x}$; $\frac{u^{-1}}{-1} - 2\ln u = \ln x + \ln C$, $-\frac{1}{u} = \ln u^2 + \ln + \ln C$

$\ln(u^2 x C_1) = -\frac{1}{u}$; $u = \frac{y}{x}$. $\ln\left(\frac{y^2}{x^2} \cdot xC_1\right) = -\frac{x}{y}$; $\frac{y^2 C_1}{x} = e^{-\frac{x}{y}}$; demak yechim quyidagicha bo'ladi. $\frac{y^2 C_1}{x} e^{\frac{x}{y}} - 1 = 0$.

45. Tenglamalarni yeching.

1. $(x+y)dx + xdy = 0$
2. $xy^2 dy - (x^2 + y^2)dx = 0$
3. $xy^2 dy - (x^3 + y^3)dx = 0$
4. $x\cos\frac{y}{x}dy + \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx = 0$
5. $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$
6. $\left(xye^{\frac{1}{x}} + x^2\right)dy - y^2 C^{\frac{y}{x}}dx = 0$
7. $(xy - x^2)y' = y^2$
8. $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$
9. $xy' = y\ln\frac{x}{y}$
10. $y - xy' = x + yy'$
11. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$
12. $(4x^2 + xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$
13. $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$
14. $(y+2)\,dx = (2x + y - 4)\,dy$
15. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$
16. $y' = \frac{y+2}{x+1} + tg\frac{y-2x}{x+1}$

11.4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

46. Tenglamani yeching. $y' + 2y = 4x$

$y' + 2y = 0$ tenglamani yechimini topamiz. $\frac{dy}{y} = -2dx$, $\ln y = -2x + C_1$, $y = C(x)e^{-2x}$

uni berilgan tenglamaga qo'yamiz.

$$y' + 2y - 4x = C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} - 4x = 0$$

$C'(x) = 4xe^{2x}$, $C(x) = 4\int xe^{2x}dx = e^{2x}(2x-1) + C_0$ umumiy yechim esa $y = C(x)e^{-2x} = 2x - 1 + C_0 e^{-2x}$, C_0 – ixtiyoriy o'zgarmas son.

47. Differensial tenglamani yeching. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Yechish. Avval $y' - \frac{2}{x}y = 0$ ni yechamiz.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| \Rightarrow y = cx^2$.

Faraz qilaylik, $C = C(x)$, u holda $y = C(x)x^2$ uni berilgan tenglamaga qo'yib, $u(x)$ ni topamiz:

$C'x^2 - 2xC - \frac{2}{x}x^2C = 2x^3 \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C_1$ bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y = (x^2 + C_1)x^2$.

48-53-misollarda differensial tenglamalarni yeching, boshlang'ich sharti berilgan bo'lsa, xususiy yechimini toping.

48. $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$

49. $x^2 y' + xy + 1 = 0$

50. $y = x(y' - x\cos x)$

51. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$

52. $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0$

53. $xy' + y + e^x = 0, y(a) = b$.

Bernulli tenglamasi

$y' - p(x)y = y^n q(x)$ ko'rinishidagi differensial tenglamaga $(n \neq 0, n \neq 1)$. Bernulli tenglamasi deyiladi. Berilgan tenglamani $z = y^{1-n}$ almashtirish yordamida chiziqli differensial tenglama ko'rinishiga keltiriladi.

54. Differensial tenglamani yeching. $y' + \frac{2y}{x} = y^2 x$.

Yechish. Ravshanki $y = 0$ berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. $y = 0$ dan farqli yechimlarini topish uchun berilgan tenglamaning ikkala tomonini y^2 ga bo'lib yuborib,

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y} = x$$ tenglamaga kelamiz.

$-\frac{1}{h} = z$ almashtirishni bajarsak, $z' = \frac{y'}{y^2}$ bo'lib, tenglama quyidagi chiziqli tenglamaga keladi:

$$z' - \frac{2}{x}z = x$$ bu tenglamani yechib,

$$y = -\frac{1}{x^2 \ln|x| + cx^2}$$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, berilgan tenglamaning yechimlari

$$y = 0 \text{ va } y = -\frac{1}{x^2 \ln|x| + cx^2}$$ bo'lar ekan.

Differensial tenglamalarni yeching.

55. $y' + 2y = y^2 e^x$

56. $(1 + x^2)y' + 2xy = xy^2, y(0) = 0,5$

57. $y' = y^4 \cos x + ytgx$.

11.5. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (11.3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Agar differensial tenglama

$$F(x, y', y'') = 0 \qquad (11.4)$$

ko'rinishida bo'lsa, u holda tenglamaning tartibi darajani pasaytirish $z = y'$ almashtirish yordamida bittaga pasaytirish mumkin. Bu holda $z' = y''$ boladi.

Agar tenglamaning ko'rinishi

$$F(y, y', y'') = 0 \qquad (11.5)$$

bo'lsa, u holda $z = y'$ almashtirishdan foydalaniladi va $z = z(y)$ y ning funksiyasi sifatida qaraladi. Bunda $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}$

58. Tenglamani yeching: $y'' = y'ctgx$.

Yechish. Faraz qilaylik, $z = y'$. U holda $y'' = (y')' = z'$, berilgan tenglamaning ko'rinishi $z' = z \cdot ctgx, z \neq 0$ bo'lsin. $\frac{dz}{z} = ctgx \cdot dx$ yoki $\frac{dz}{z} = \frac{d\sin x}{\sin x}$ hadma–had integrallab, $\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln c_1$, bu yerda $c_1 > 0$, yoki $z = c_1 \sin x$.

$z = 0$ tenglamaning yechimi bo'lgani uchun, uning ixtiyoriy yechimi $z = c_1 \sin x$, c_1 ixtiyoriy son.

$z = \frac{dy}{dx}$ bo'lgani uchun $dy = c_1 \sin x\, dx$. Oxirgi tenglikni integrallab $y = -c_1 \cos x + c_2$ ni olamiz.

Tenglamalarni yeching.

59. $y'' = -\frac{x}{y}$ **60.** $xy'' + y' = 0$ **61.** $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.

11.6. O'zgarmas koeffitsiyentli ikki tartibli chiziqli differensial tenglamalar

O'zgarmas koeffitsiyentli ikki tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'' + py' + qy = r(x) \qquad (11.6)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda p va q – haqiqiy sonlar, $r(x)$ – biror funksiya. Agar $r(x)$ aynan nolga teng bo'lsa, berilgan tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli emas deyiladi.

Bir jinsli differensial tenglamaga

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (11.7)$$

Quyidagi xarakteristik tenglama mos qo'yiladi.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (11.8)$$

λ - o'zgaruvchi.

Quyidagi hollar yuz berishi mumkin:

1) Agar (11.8) xarakteristik tenglama haqiqiy λ_1, λ_2 ildizlarga ega bo'lsa, u holda (11.7) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (11.9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2) Agar (11.8) xarakteristik tenglama bitta λ ikki karrali yechimga ega bo'lsa, u holda (11.7) tenglamaning yechimi

$$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x} \qquad (11.10)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3) Agar (11.8) xarakteristik tenglama kompleks yechimga ega bo'lsa, $\lambda=\alpha\pm i\beta$, bu yerda $\alpha=-\frac{p}{2}, \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, u holda (11.7) tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c_1e^{\alpha x}\sin\beta x+c_2e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad (11.11)$$

ko'rinishda bo'ladi.

62. Differensial tenglamalarni yeching.

a) $2y''-y'-y=0$; b) $4y''+4y'+y=0$; c) $y''+2y'+5y=0$.

Yechish. a) Xarakteristik tenglama $2\lambda^2-\lambda-1=0$ turli ildizlarga ega $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-0.5$, shuning uchun differensial tenglamaning umumiy yechimi $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x/2}$.

b) Bu holda xarakteristik tenglama $4\lambda^2+4\lambda+1=0$ bitta ikki karrali $\lambda=-1/2$ yechimga ega bo'ladi, shuning uchun izlanayotgan umumiy yechim $y=c_1e^{-x/2}+c_2e^{-x/2}$.

c) $\lambda^2+2\lambda+5=0$ xarakteristik tenglama $\lambda=-1\pm 2i$ kompleks ildizlarga ega bo'ladi, shuning uchun $y=c_1e^{-x}\sin 2x+c_2e^{-x}\cos 2x$.

Bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning yechimini qaraymiz.

Birinchi usul. Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli.

Faraz qilaylik (11.6) differensial tenglamaga mos (11.7) bir jinsli tenglamasining yechimi

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (11.12)$$

bo'lsin. U holda (11.6) berilgan tenglamaning yechimi (11.12) ko'rinishda bo'ladi, bu yerda c_1 va c_2 – x o'zgaruvchining funksiyalari. Bu funksiyalar

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=r \end{cases} \qquad (11.13)$$

sistemani yechish natijasida topilishi mumkin.

69. Tenglamani yeching. $y''+y=\frac{1}{\cos x}$.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2+1=0$ ning yechimlari kompleks ($\lambda=\pm 2$), u holda bir jinsli $y''+y=0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x \qquad (11.14)$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini (11.14) ko'rinishida qidiramiz, c_1 va c_2 – x o'zgaruvchining funksiyalari, ularni (11.13) sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} C_1'\sin x + C_2'\cos x = 0 \\ C_1'\cos x - C_2'\sin x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases} \qquad (11.15)$$

(11.15) ni yechib $C_1' = 1, C_2' = -tgx$. U holda $C_1 = x + C_3$ va $C_2 = \int(-tgx)dx = \int\frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + C_4$.

Demak, umumiy yechim $y = (x + C_3)\sin x + (\ln|\cos x| + C_4)\cos x$.

Shunday qilib berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (x + C_3)\sin x + (\ln|\cos x| + C_4)\cos x,$$

bu yerda C_3, C_4 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

70. Tenglamani yeching. $y''-y'-2y=x\cdot e^x$

Yechish: $y''-y'-2y=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglama

$k^2-k-2=0$ ildizlari $k_1=-1$, $k_2=2$ Bu tenglamaning umumiy yechimi esa $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ endi $y''-y'-2y=x\cdot e^x$ xususiy yechimi y^* ni topamiz.

Tenglamaning o'ng tarafi birinchi darajali ko'p had bo'lgani va $\alpha=1$ xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lgani uchun xususiy yechimni $y^*=(Ax+B)e^x$ ko'rinishida qidiramiz. (eslatib o'tamizki, nolinchi darajali ko'p had o'zgarmas sondan iborat, birinchi darajadagisi $(Ax+B)$, ikkinchi darajadagisi esa Ax^2+Bx+C, va hokazo...)

A va B o'zgarmas sonlarni topish uchun birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz, va berilgan tenglamalarga qo'yamiz.

$(y^*)'=Ae^x+(Ax+B)e^x$, $(y^*)''=Ae^x+Ae^x+(Ax+B)e^x$;

$2Ae^x++(Ax+B)e^x-(Ae^x++(Ax+B)e^x)-2(Ax+B)e^x=xe^x$

X ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish

$2A+B-A-B-2B=0$, $A-A-2A=1$ yoki $A-2B=0$, $-2A=1$ $\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}A=-\frac{1}{4}$

Bundan xususiy yechim $y^*=(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})e^x$ umumiy yechim esa

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^x$$

Tenglamalarni yeching.

71. $y''-9y=0$ **72.** $y''-2y'+2y=0$

73. $y''-2y'+y=2e^x$ **74.** $y''+y'-6y=xe^{2x}$

75. $y''+y=\cos x$ **76.** $y''+y'=\sin^2 x$.

11.7. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

$y^{(n)}=f(x)$ differensial tenglama.

77. Tenglamani yeching $y^{(4)}(x)=\sin x$.

Yechish. Berilgan tenglamani 4 marta integrallaymiz: $\int y^4(x)dx=\int\sin x dx+C_1$,

$y'''(x)=-\cos x+C_1$, $\int(y'''(x))dx=\int(-\cos x+C_1)+C_2$,

$y''(x)=-\sin x+C_1x+C_2$, $y'(x)=\cos x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$, $y(x)=\sin x+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$

Tenglamalarni yeching.

78. $x'' = 1$.

79. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\ln 2}{2}, y'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

80. $y^{(20)} = \sin x$.

81. $y''' = \frac{6}{x^3}, y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1$.

$y'' = f(x, y')$ tenglama $y' = z(x), y'' = z'(x)$ almashtirish bilan birinchi tartibli tenglama keltiriladi.

$$y'' = f(y, y')$$

tenglama quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = p(y), \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} = \frac{dy}{dx} = p'p$$

almashtirish bilan $p(y)$ funksiyaga nisbatan birinchi tartibli tenglamaga keltiriladi. $p' = \frac{1}{p} f(y, p)$.

82. Koshi masalasini yeching.

$$y'' = p\frac{dp}{dy} \quad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$y'' + 2yy' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -4.$$

Yechish. $y' = p$, almashtirishdan keyin $p(y)$ ga nisbatan birinchi tartibli tenglamani olamiz: $\frac{dp}{dy} + 2yp = 0$, yoki $\frac{dp}{dy} = -2y$. Bundan $p$ni topamiz: $\frac{dp}{dy} = -2y. \int dp = -\int 2ydy + C_1$, $p = -y^2 + C_1$. Demak, $y' = -y^2 + C_1$. Bunga boshlang'ich qiymatlarni qo'yib -4=-4+C_1=>C_1=0. Demak, $y' = -y^2$, $\frac{dy}{-y^2} = dx$, $\frac{1}{y} = x$ $y = \frac{1}{x + C_2}$.

Boshlang'ich shartni qo'yib $2 = \frac{1}{0 + C_2} => C_2 = \frac{1}{2}$.

Shunday qilib xususiy yechim $y = \frac{2}{2x + 1}$.

Tenglamalarni yeching.

83. $yy'' + (y')^2 = 0$.

84. $y^3 y'' = 1, y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 1$.

Yuqori tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (11.16)$$

bu yerda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – o'zgarmas sonlar. (11.16) ning yechimi $p = e^{\lambda x}$ ko'rinishida qidiramiz va $(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n)e^{\lambda x} = 0$, yoki

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (11.17)$$

tenglama xarakteristik tenglama deyiladi.

Turli hollarni qaraymiz:

1) Agar xarakteristik tenglamaning yechimlari haqiqiy va turlicha bo'lsa, u holda,

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

(11.16) ning chiziqli bog'liqsiz yechimlari, umumiy yechim esa,

$$y_{um} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$$

ko'rinishda yoziladi.

2) Agar xarakteristik tenglama yechimlari orasida bir juft kompleks ildizlar bo'lsa:

$$\lambda_1 = h + i\omega\,,\ \lambda_2 = h - i\omega$$

bu yerda $i = \sqrt{-1}$, u holda ularga ikkita kompleks ildiz mos keladi.

$$\overline{y_1} = e^{\lambda_1 x} = e^{hx}(\cos\omega x + i\sin\omega x),$$

$$\overline{y_2} = e^{\lambda_2 x} = e^{hx}(\cos\omega x - i\sin\omega x).$$

Ulardan ikkita chiziqli bog'liqsiz haqiqiy yechimlar tuzish mumkin:

$$y_1 = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = e^{hx}\cos\omega x,$$

$$y_2 = \frac{b_1 - b_2}{2i} = e^{hx}\sin\omega x\,.$$

3) Agar xarakteristik tenglama yechimlari orasida k karrali $\lambda = a$ yechim bo'lsa, u holda $y_s = x^s e^{ax}$, $s = 0, 1, ..., k-1$ (11.16) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Differensial tenglamani yeching.

85. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ ni yechib $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ ni hosil qilamiz. U holda umumiy yechimning ko'rinishi $y_{um} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

86. $y''' - 4y'' - 6y' + -4y = 0$.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \pm i, \lambda_3 = 1 - i$. Umumiy yechimning ko'rinishi $y_{um} = C_1 e^{2x} + e^x(C_1\cos x + C_3 \sin x)$.

87. $y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Yechish. Xarakteristik tenglamani ko'paytuvchilarga ajratib $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$ $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$, xarakteristik tenglamaning yechimlari $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$. Demak, umumiy yechim $y_{um} = e^{-x}(C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x)$.

88. $y'' + y' - 2y = 0$

89. $y'' - 2y' + y = 0$

90. $y'' - 4y' + 13y = 0$

91. $y''' - 8y = 0$

92. $y'''' - y = 0$

93. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$

94. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

95. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

11.8. Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Faraz qilaylik, $y=y(t)$ biror ishlab chiqaruvchining t vaqt mobaynida realizatsiya qiladigan tovar miqdori. Tovarning narxi o'zgarmas bo'lsin. U holda $y=y(t)$ funksiya

$$y' = ky \qquad (11.18)$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu yerda k=mp$l$, m- investitsiya normasi, p - sotilish narxi, l- investitsiya kattaligi va mahsulot ishlab chiqarish tezligi orasidagi proporsionallik koeffisiyenti.

(11.18) tenglama o'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamadir.

Uning yechimi

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (11.19)$$

bu yerda $y_0 = y(t_0)$

(11.18) tenglama aholining o'sishi, dinamikasini ifodalaydi.

96. Agar $y' = ky$ tenglamadagi proporsionallik koeffisiyenti 0,1 ga teng bo'lsa, realizatsiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o'tgandan keyin ikki marta ko'payadi?

Realizatsiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqt 20 %ga kamayishi uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Yechish. (11.22) da t_0=0, k=0,1,y=2y$_0$ deb faraz qilsak $2y_0 = y_0 e^{0,1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ (vaqt birligi). Endi t_1 = 0,8t, k_1 = k/0,8 = 1,25k, ya'ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

Narxning o'zgarmasligi haqidagi faraz vaqtning qisqa oralig'i uchun o'rinli. Umumiy holda p narx miqdor y ga bog'liq kamayuvchi funksiyadir $p=p(y)$.

U holda $y' = ky$ tenglamaning ko'rinishi

$$y' = mlp(y)\cdot y \qquad (11.20)$$

o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib qolaveradi.

(11.20) ko'rinishidagi tenglama bilan aholi soninig o'sishi, epidemiya rivojlanishining dinamikasi, reklama tarqalish jarayoni va hokazolar ifodalanadi.

97. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda $y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$, $x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$.

Agar boshlang'ich momentida p=9 bo'lsa, muvozanat narxining narxga bog'liqligini toping.

Yechish. Talab va taklifning tengligidan $25 - 2p + 3\frac{dp}{dt} = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$, bundan $\frac{dp}{dt} = 10 - p$, ya'ni o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib, $p = 10 - Ce^{-t}$ tenglamani hosil qilamiz. $p(0) = 9$ shartdan, $c = 1$ kelib chiqadi, nihoyat $p = 10 - Ce^{-t}$ va $\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty}(10 - e^{-t}) = 10 = const$, bo'lib, narx turg'unlikka ega.

98. Tovar narxi $p(y) = (5+3e^{-y})\, y^{-1}$; m=0,6, l=0,4, $y(0)$=1 tenglama bilan berilgan $y=y(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining vaqtga bog'liqligini toping.

99. Tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyasining ko'rinishi: $y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt}$, $x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}$. Agar $p(0) = 10$ bo'lsa,

1) Muvozanat narxning vaqtga bog'liqligini toping.
2) Muvozanat narxi turg'unmi ?

100. Biror tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyasi $y = 30 - p - 4\frac{dp}{dt}$, $x = 20 + p + \frac{dp}{dt}$.

a) Muvozanat narxning vaqtga bog'lanishini toping.

b) Muvozanat narxi turg'unmi ?

Differensial tenglamalar nazariyasini iqtisodiyotning uzluksiz modellarida qo'llanishiga doir misollarni qaraymiz, bu yerda erkin o'zgaruvchi t – vaqt. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydali : ular iqtisodiy dinamikaning tekshirish predmetidir.

Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narxda sotiladi Q(t) – t –vaqtda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori desak, u holda bu vaqt davomida pQ(t) ga teng daromad olinadi. Faraz qilaylik, ko'rsatilgan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyaga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t)=mpQ(t) \qquad (1)$$

m – investitsiya normasi va $0 < m < 1$.

Agar bozorni yetarlicha ta'minlangan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, u holda ishlab chiqarishda foydalaniladi. Bu yana ishlab chiqarish tezligini (akselleratsiya) oshishiga olib keladi, ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = lI \qquad (2)$$

bu yerda $1/l$ – akselleratsiya normasi. (1) formulani (2) qo'yib

$$Q' = kQ, k = lmpQ \qquad (3)$$

ni olamiz. (3) differensial tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas.

Faraz qilaylik, boshlang'ich moment $t = t_0$ da mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 berilgan. U holda bu shartdan o'zgarmas C ni ifodalash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$ bunda $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Bundan (3) tenglamaning xususiy yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Biologik tajribalardan kelib chiqadiki, bakteriyalarning ko'payish protsessi (4) tenglama bilan ifodalanadi. Radioaktiv parchalanish protsessi ham (4) formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$ – kamayuvchi funksiya, ya'ni mahsulot hajmining ortishi bilan bozorda uning narxi kamayadi : $dp/dQ < 0$. Endi (1)-(3) formulalardan Q ga nisbatan chiziqli bo'lmagan o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama olamiz:

$$Q' = \alpha p(Q) \cdot Q \qquad (5)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi barcha ko'paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya'ni Q(t) funksiya o'suvchi.

Funksiya o'sish xarakteri uning ikkinchi hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan

$$Q'' = \alpha p(Q) \cdot Q .$$

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikni o'zgartirish mumkin: $E(p)=\frac{dQp}{dpQ}$,bundan

$Q''=aQ'p\left(1+\frac{dpQ}{pdQ}\right)$, yoki $\frac{dQ}{dp}<0$, bo'lgani uchun E < 0, nihoyat

$$Q''=aQ'p\left(1-\frac{1}{|E|}\right) \tag{6}$$

(6) tenglamadan elastik talabda $Q''>0$, ya'ni $|E|>1$ ekanligi kelib chiqadi va Q(t) funksiyaning grafigi pastga qavariq. Bu esa progressiv o'sishini bildiradi.

Noelastik talabda $|E|<1$ va bu holda $Q''<0-Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu sekin o'sishini (yetarlicha ta'minlangan) bildiradi.

Soddalik uchun $p(Q)$ bog'lanishni chiziqli funksiya ko'rinishda qabul qilamiz.

$P(Q)=a-bQ$, $a>0$, $b>0$. U holda (5) tenglamaning ko'rinishi:

$$Q'=a(a-bQ)Q \tag{7}$$

bundan

$$Q''=aQ'(a-2bQ) \tag{8}$$

(7) va (8) munosabatlardan : $Q'=0, Q=0$ da va Q = a/b da $Q''<0, Q>a/2b$ da; Q=Q(t) funksiya grafigini egilish nuqtasi Q = $a/2b$.

Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo'lgan iqtisodiyotning daromad va harakat qismlari sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik, Y(t), E(t), S(t), I(t) – mos ravishda milliy daromad, davlat chiqimlari, iste'mol va investitsiya. Bu kattaliklarning barchasi t vaqtning funksiyasi sifatida qaraladi. U holda quyidagi munosabatlar o'rinli :

$$Y(t)=S(t)+I(t)+E(t),$$
$$S(t)=a(t)Y(t)+b(t), \tag{9}$$

$I(t)$ $K(t)$ $Y'(t)$ bu yerda a(t) – iste'molga moyillik koeffitsiyenti (0 < a(t) < 1), b(t) – chekli iste'mol, K(t) – akseleratsiya normasi. (9) tenglamaga kiradigan barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma'nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig'indisi milliy daromadga teng bo'lishi kerak – bu balans birinchi tenglamada akslantirilgan. Xalq xo'jaligida umumiy iste'mol milliy daromadning bir qismi bo'lgan ichki iste'mol va chekli iste'moldan iborat mana shu tashkil etuvchilar ikkinchi tenglamada ko'rsatilgan. Nihoyat investitsiya kattaligi ixtiyoriy bo'lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan kattalik akseleratsiya normasini oxirgi milliy daromadga ko'paytmasi bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ funksiyalar berilgan – ular davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasi $Y(t)$ ni topish talab qilinadi.

Ikkinchi tenglamadan S(t) ni va uchinchi tenglamadan I(t) ni birinchi tenglamaga qo'yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglama olamiz :

$$Y'=\frac{1-a(t)}{k(t)}Y-\frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \tag{10}$$

Biz asosiy parametrlar a, b, k ni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o'zgarmas koeffitsiyentli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga kelib soddalashadi:

$$Y'_t = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k} \qquad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $y' = 0$ dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a} \qquad (12)$$

Ko'rish qiyin emaski, bu kattalik musbat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y = C\exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$ formula bilan beriladi. (11) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda :

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \qquad (13)$$

Agar vaqtning boshlang'ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo'lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimidan pastga keladi, ya'ni milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a,b,k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo'lsa, u holda $C > 0$ va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi, integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.

O'sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik, $Y = F(K,L)$ milliy daromad, bu yerda F – bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi: ($F(tK, tL) = F(K,L)$), K – sarflangan mablag' hajmi, L – mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi $k = K/L$ bo'lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi :

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(K,l) \qquad (14)$$

Bu bo'limda qaralayotgan masalaning maqsadi qurollanish fond dinamikasini vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma'lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba'zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz :

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o'sish o'rinli

$$L' = \alpha L \qquad (15)$$

2. Mablag' ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya'ni $I = K' + \beta K$, bu yerda β - amortizatsiya normasi.

Agar l – investitsiya (sarflangan mablag') normasi bo'lsa, u holda

$$I = lY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = lF(K,L) - \beta K \qquad (16)$$

k – fond qurollanish ta'rifidan kelib chiqadiki, $\ln k = \ln K - \ln L$.

Bu tenglikni t bo'yicha differensiallab,

$$k' = lf(x) - (\alpha + \beta)k \qquad (17)$$

tenglamani olamiz, bu yerda $f(x)$ funksiya (14) formula bo'yicha aniqlangan. Olingan (17) munosabat o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli chiziqli bo'lmagan differensial tenglama. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz: $k' = 0$ shartdan,

$$lf(k) - (\alpha + \beta)k = 0 \qquad (18)$$

ya'ni $k = const$ – o'zgarmas kattalik, chiziqli bo'lmagan (18) algebraik tenglamaning yechimi.

Ishlab chiqarish funksiyasi $F(K, L) = \sqrt{KL}$ uchun (17) tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

(14) dan $f(k) = \sqrt{k}$, u holda (17) tenglamaning ko'rinishi

$$\frac{df}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi: $l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$, bundan (17) tenglamaning nol bo'lmagan xususiy yechimi $k_{st} = l^2 / (\alpha + \beta)^2$.

(17) differensial tenglamani "o'zgaruvchilarni ajratish" usuli bilan yechamiz.

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right]} = dt$$

Bu tenglamani $\sqrt{k} = z$ almashtirishdan so'ng integrallab, umumiy yechimining oxirgi ko'rinishini olamiz.

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha + \beta} + C\exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right)\right]^2 \qquad (19)$$

Demak, o'zgarmaydigan parametrlarda l, α, β fond qurollanish funksiyasi o'z statsionar qiymatiga boshlang'ich shartlardan bog'liqsiz ravishda turg'un barqaror intiladi. Bu statsionar nuqta $k = k_{st}$ barqaror muvozanat nuqtasi bo'ladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Oldindan aytib beriladigan narxlar bilan bozor modeli. Prognoz qilinadigan narxlar bilan bozor modelini qaraymiz. Oddiy bozor modellarida talab va taklif odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog'liq bo'ladi. Lekin talab va taklif aniq hollarda narxning tashkil qilinishi va narxning o'zgarishi tempi bilan bog'liq bo'ladi. t vaqt bo'yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu xarakteristikalar mos ravishda $p(t)$ narx funksiyasini birinchi va ikkinchi hosilalarini tavsiflaydi.

Faraz qilaylik, talab funksiyasi D va taklif funksiyasi S, narx funksiyasi p va uning hosilalari bilan quyidagicha bog'lanishga ega bo'lsin.

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3 \end{aligned} \qquad (20)$$

(20) da qabul qilingan bog'lanishlar to'la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo'shiluvchilarda oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o'zgarishi bilan "qizdiriladi". Agar temp o'ssa $(p'>0)$, u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va aksincha. Narxning tez o'sishi xaridorni qo'rqitadi, shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi manfiy ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko'proq o'lchamda narxning o'zgarish tempi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun S(t) funksiyadagi p'' ning koeffitsiyenti D(t) dagiga nisbatan katta. Shuningdek narxning o'sishi taklifni oshiradi, shuning uchun p' ni o'z ichiga oluvchi qo'shiluvchi S(t) ning ifodasiga (+) ishora bilan kiradi.

Narxning vaqtga bog'lanishini o'rnatish talab qilinsin. Bozorning muvozanat holati D=S tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20) tenglamaning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini yechamiz:

$$p''+2p'+5p=15 \qquad (21)$$

(21) munosabat p(t) funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p''+2p'+5p=0 \qquad (22)$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iboratdir.

(22) uchun xarakteristik tenglama: $k^2+2k+5=0$. Uning ildizlari qo'shma kompleks sonlar: $k_{1,2} = -1\pm 2i$ va natijada (22) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula bilan beriladi: $\tilde{p}(t)=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$, bu yerda c_1 va c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (21) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $p=p_{st}$ – narxni belgilaydigan o'zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo'ysak, p_{st} ni qiymatini olamiz:

$p_{st}=3$. Shunday qilib, (21) tenglama umumiy yechimining ko'rinishi

$$P(t)=3+e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t) \qquad (23)$$

Ko'rish qiyin emaski, $t\to\infty$ da $p(t)\to p_{st}=3$, ya'ni barcha integral egri chiziqlar p=3 gorizontal asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha narxlar o'rnatilgan p_{st} narxga intilishini va uning atrofida tebranishini bildiriladi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o'tishi bilan o'sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki variantda keltiramiz:

1. Koshi masalasi. Faraz qilaylik, boshlang'ich momentda narx va uning o'zgarish tendensiyasi ma'lum : $t=0, p=4, p'=1$. Birinchi shartni (23) formulaga qo'yib $p(0)=C_1+3=4$, bundan $C_1=1$ ni olamiz, ya'ni: $p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+C_2\sin 2t)$

Buni differensiallaymiz :

$$p'(t)=e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t] \qquad (24)$$

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo'llaymiz: $p'(0)=2C_2-1=1$, bundan $C_2=1$.

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:
$P(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$; yoki ancha qulay ko'rinishda $p(t)=3+\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-\pi/4)$.

2. Aralash masala. Faraz qilaylik, vaqtning boshlang'ich momentida talab va taklif ma'lum: t = 0, p = 4, D = 16.

Birinchi boshlang'ich shart oldingidek bo'lgani uchun, bu yerda ham (24) yechimga ega bo'lamiz. U holda *p(t)* funksiyaning hosilalari quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t],$$
$$p''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t + (3C_2 - 5)\sin 2t].$$

Bundan $p'(0) = 2C_2 - 1$ va $p''(0) = -4C_2 - 3$.

Bu tengliklarni *D(t)* ning (20) ko'rinishini hisobga olgan holda masalaning ikkinchi *D*(0)=16 shartiga qo'yib, $C_2=-1$ ni olamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko'rinishi $p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$ yoki ancha qulay formada:

$$p(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t}\sin(2t - \pi/4) \qquad (25)$$

101. Usti ochiq rezervuardagi suvning dastlabki harorati 70⁰S edi, 10 minutdan so'ng suvning harorati 65⁰S bo'ldi, rezervuarni o'rab turgan muhitning harorati 15⁰S. 1) Boshlang'ich momentdan 30 minut keyin rezervuardagi suvning haroratini toping; 2) qaysi vaqtda rezervuardagi temperatura 20⁰S bo'lishini toping.

Yechilishi. 1. Suvning o'zgaruvchi haroratini T bilan belgilab, suvning sovish qonuni funksiyasini vaqtning funksiyasi sifatida belgilaymiz. Suvning sovish tezligi t va T larni bog'lovchi funksiyaning o'zgarish tezligidir, ya'ni u $\frac{dT}{dt}$ hosila bo'ladi.

$\frac{dT}{dt}$ tezlik rezervuardagi suv harorati bilan rezervuarni o'rab olgan muhit harorati orasidagi ayirmaga proporsional, ya'ni $R(T - 15^\circ)$, bunda R - proporsionallik koeffitsiyenti. U holda

$$\frac{dT}{dt} = R(T - 15^\circ).$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dt}{T - 15} Rdt.$$

2. (2) tenglamani integrallaymiz:

$$\int \frac{dT}{T - 15} = \int RdT, \ \ln(T - 15^\circ) = Rt + C$$

yoki

$$T - 15 = e^{Rt} + C = e^{Rt}e^{C} = e^{Rt}C_1, \text{ bundan } T = C_1e^{Rt} + 15 \qquad (3)$$

Sovush qonunini hosil qildik, bu yerda t - vaqt va T - suv harorati – chekli o'zgaruvchilar.

3. Berilgan boshlang'ich shartlar $t = 0, T = 70^\circ C$ da C o'zgarmas miqdorni topamiz.

Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$70^\circ = C_1e^{R\cdot 0} + 15^\circ \text{ yoki } 55^\circ = C_1e^0 = C_1 \cdot 1 = C_1, \ C_1 = 55^\circ \qquad (4)$$

(4) tenglikdagi C_1 ning qiymatini (3) tenglikka qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T = 55^\circ e^{Rt} + 15^\circ \qquad (5)$$

4. R o‘zgarmas miqdorni topamiz. Masalaning shartida $t=10$ minutdan so‘ng $T=65^0 C$ bo‘lishi berilgan. Bu qiymatlarni (5) tenglamaga qo‘yib, ushbuni hosil qilamiz:

$$65^0=55^0 e^{R\cdot 10}+15$$

yoki

$$50^0=55^0 e^{10R},$$

yoki

$$\frac{10}{11}=e^{10R}. \tag{6}$$

(6) tenglikni logarifmlab, yozamiz:

$$\lg 10-\lg 11=10R\ lq\, e,$$

bundan

$$R=\frac{1-\lg 11}{10\lg e}=\frac{1-1{,}0414}{10\cdot 0{,}4343}=-\frac{0{,}0414}{4{,}343}=-0{,}009532 \tag{7}$$

R ning qiymatini (5) tenglamaga qo‘yib t va T o‘zgaruvchilarni bog‘lovchi sovish qonunini hosil qilamiz:

$$T=55^0 e^{-0{,}009532t}+15^0. \tag{8}$$

5. Suvning boshlang‘ich momentdan 30 minut keyingi haroratini topamiz. (8) tenglamaga t = 30 minut qiymatni qo‘yamiz:

$$T=55^0 e^{-0{,}009532\cdot 30}+15^0,$$

bundan

$$T=55^0 e^{-0{,}286}+15^0.$$

Hisoblaymiz:

$x=55\cdot e^{-0{,}286}$, $\lg x=\lg x=\lg 55-0{,}286\lg e=1{,}7404-0{,}286\times 0{,}4343=1{,}7404-0{,}1242=1{,}6162$,

$x=41{,}32\approx 41$

U holda

$$T=41^0+15^0=56^0.$$

6. Qancha vaqtdan keyin rezervuardagi suvning harorati 20^0 S bo‘lishini topamiz. (8) tenglamaga $T=20^0$ qiymatni qo‘yamiz:

$$20^0=55^0 e^{-0{,}009532\,t}+15^0 \text{ yoki } 5^0=55^0 e^{-0{,}009532\,t},$$

bundan

$$e^{-0{,}009532t}=\frac{1}{11}\approx 0{,}0909 \text{ yoki } -0{,}009532t\lg e=\lg 0{,}0909=\bar{2}{,}9586,$$

$$t=-\frac{\bar{2}{,}9586}{0{,}009532\cdot 0{,}4343}=\frac{1{,}041}{0{,}009532\cdot 0{,}4343}=251\text{ min}=4 \text{ soat } 11 \text{ min}.$$

102. Radiyning yemirilish tezligi berilgan har bir vaqt momentida radiyning dastlabki miqdoriga proporsional ekanligi tajribada aniqlangan. Boshlang‘ich vaqt momentida $t=0$ R_0 gramm radiy bor edi. Radiy miqdorini istalgan t vaqt momenti uchun hisoblash formulasini tuzing.

Yechilishi: 1. Radiy yemirilish qonunining funksiyasini tuzamiz. Faraz qilaylik, proporsionallik koeffitsiyenti R ma’lum bo‘lsin ($R>0$). t vaqt momentida hali yemirilmagan radiy miqdorini R bilan belgilaymiz. R ni t ning funksiyasi sifatida topish talab qilinadi. Radiyning yemirilish tezligi t va R ni bog'lovchi funksiyaning o'zgarish tezligidir, bu esa $\frac{dR}{dt}$ hosiladir. Masalaning shartida

$$\frac{dR}{dt} = -kR \qquad (1)$$

berilgan.

Minus ishora R funksiyaning kamayuvchi ekanligini ko'rsatadi, demak, $\frac{dR}{R} < 0$, $kR > 0$, chunki $k > 0$ va $R > 0$.

(1) tenglikdan:

$$\frac{dR}{R} = -kdt \qquad (2)$$

2. (2) tenglamaning ikkala qismini integrallaymiz:

$$\int \frac{dR}{R} = -\int R\,dt,$$

bundan

$$\ln R = -kt + \ln C \qquad (3)$$

yoki

$$\ln R - \ln C = -kt,$$

bundan

$$\ln \frac{R}{C} = -kt. \qquad (4)$$

(4) tenglikni potensirlaymiz:

$$\frac{R}{C} = e^{-Rt} \text{ yoki } R = Ce^{-Rt} \qquad (5)$$

Radiy yemirilishining umumiy qonunini hosil qildik, bu yerda t - vaqt va R - shu vaqt momentida hali yemirilmagan radiy miqdori.

3. Berilgan boshlang'ich shartlar $t = 0$, $R = R_0$ da C o'zgarmas miqdor C ni topamiz. Bu qiymatlarni (5) tenglamaga qo'yib,

$$R_0 = Ce^{-R\cdot 0},\ C = R^0$$

ni hosil qilamiz.

U holda izlanayotgan funksiya

$$R = R_0 e^{-Rt}$$

bo'ladi.

103. Radiy o'zining dastlabki miqdoriga proporsional tezlik bilan yemiriladi. Hozirgi momentda bor bo'lgan miqdorining yarmisi qancha vaqtdan keyin yemiriladi. Radiy uchun proporsionallik koeffitsiyenti $R = 0{,}00044$ ekanligi aniqlangan (vaqt o'lchov birligi ____ yil).

104. Suyuqlikda aylanayotgan diskning burchak tezligi ishqalanish hisobiga sekinlashadi. Ishqalanish burchak tezlikka proporsional ekanligi aniqlangan. 1) agar disk $t = 0$ bo'lganda 12 rad/sek tezlik bilan aylangan bo'lib, $t = 10$ sekundda esa uning tezligi 8 rad/sek bo'lgan bo'lsa, disk $t = 120$ sek momentda qanday tezlik bilan aylanishini toping;
2) vaqtning qaysi momentida uni 1 rad/sek tezlik bilan aylinishini toping.

Yechilishi: 1. Diskning aylanish qonunini t vaqtning funksiyasi sifatida tuzamiz. ω-disk aylanishining burchak tezligi bo'lsin, u holda diskning aylanishi ishqalanish kuchlari ta'siri ostida sekinlashishi $\frac{d\omega}{dt}$ bo' ladi.

Masalaning shartiga ko'ra:

$$\frac{d\omega}{dt}=k\omega \tag{1}$$

bunda k-proporsionallik koeffitsiyenti. O'zgaruvchilarni bo'lamiz:

$$\frac{d\omega}{dt}=kdt \tag{2}$$

2. (2) tenglamaning ikkala qismini integrallaymiz:

$$\int\frac{d\omega}{\omega}=k\int dt,\quad \ln\omega=kt+C \tag{3}$$

bundan

$$\omega=e^{kt+C},\quad \omega=e^{kt}e^{C},$$

$$\omega=e^{kt}C_1 \text{ yoki } \omega=C_1e^{kt} \tag{4}$$

3. $t=10$ sek va $\omega=12$ rad/sek boshlang'ich shartlarda o'zgarmas miqdor C_1 ni topamiz. Bu qiymatlarni (4) tenglamaga qo'yib, C_1ni topamiz:

$$12=C_1e^{R\cdot 0},\quad 12=C_1.$$

4. Dastlab berilganlar $t=10$ sek, $\omega=8$ rad/sek ga muvofiq, R ning son qiymatini topamiz. Bu qiymatlarni (5) tenglamaga qo'yamiz:

$$8=12e^{R\cdot 10},$$

bundan

$$e^{10R}=\frac{2}{3},\quad 10R\lg e=\lg 2-\lg 3,$$

$$R=\frac{\lg 2-\lg 3}{10\lg e}=-\frac{\lg 3-\lg 2}{10\lg e}=-\frac{0{,}4771-0{,}3010}{10\cdot 0{,}4343}=-0{,}0405.$$

R ning qiymatini (5) tenglamaga qo'yamiz:

$$\omega=12e^{-0{,}0405t} \tag{6}$$

5. Diskning $t=120$ sek vaqt momentidagi aylanish tezligini topamiz. (6) tenglamaga $t=120$ sek qiymatni qo'yamiz:

$$\omega=12e^{-0{,}0405\cdot 120}=12e^{-4{,}9}=0{,}09 \text{ rad.sek.}$$

6. Disk 1 rad/sek tezlik bilan aylanadigan vaqt momentini topamiz. (6) tenglamaga $\omega=1$ qiymatni qo'yamiz va t ni topamiz:

$$1=12e^{-0{,}0405t}, \text{ bundan } e^{-0{,}0405t}=\frac{1}{12};$$

$$-0{,}0405t\lg e=\lg 1-\lg 12,\quad t=\frac{\lg 12}{0{,}0405\lg e}=61 \text{ sek.}$$

105. Suyuqlikda aylanayotgan diskka ta'sir qilayotgan sekinlashtiruvchi kuch burchak tezlikka proporsional. Agar disk $t=0$da 20 rad/sek tezlik bilan, $t=8$ da esa 16 rad/sek tezlik bilan aylansa, diskning 2 rad/sek tezlik bilan aylanadigan vaqt momentini toping.

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotda qo'llanilishi

Faraz qilaylik, $y=y(t)$ - ishlab chiqarilgan va vaqtning t onida sotilgan mahsulot miqdori. Bu tovar narxi (qaralayotgan vaqt oralig'ida o'zgarmas). U holda $y=y(t)$ funksiya

$$y'=Ry \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradi, bu yerda $R=mpl$, m – investitsiya normasi, p – sotilish narxi, l – investitsiya kattaligi va mahsulot ishlab chiqarish tezligi orasidagi proporsionallik koeffitsiyenti.

(1) tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama. Uning yechimi:

$$y=y_0e^{k(t-t_0)}$$

bu yerda $y_0=y(t_0)$ (2)

Shuningdek, (1) tenglama aholining ko'payishi, doimiy inflatsiya jarayonida narx – navoning o'sishini bildiradi.

106. Qancha vaqt oralig'ida realizatsiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich miqdor bilan solishtirilgan ikki baravar ko'payadi, (1) tenglamadagi proporsionallik koeffitsiyenti $R=0.1$. Realizatsiya qilingan mahsulot miqdori ikki marta oshishi uchun zarur bo'ladigan vaqt oralig'i 20 % ga qisqartirish uchun investitsiya normasini necha foiz orttirish kerak.

Yechish: Faraz qilaylik, (2) tenglamada $t_0=0$, $k=0,1$ $y=2y_0$ bo'lsa, u holda $2y_0=y_0 l^{0.1t}$ ga kelamiz, bundan $t=10\ln 2\approx 6.93$ (vaqt birligi) $t_1=0,8t$ deb faraz qilib $k_1=k/0.8\approx 1.25k$ ni, ya'ni investitsiya normasini 25 % orttirish kerakligini hosil qilamiz.

Tajribadan ma'lumki, narxning o'zgarmasligi haqidagi faraz (to'yinmagan bozor) faqat vaqtning qisqa oralig'iga tegishli.

Umumiy holda p narx realizatsiya qilingan mahsulot miqdori y ning $(p=p(y))$ kamayuvchi funksiyasi.

$$y'=mlp(y)\cdot y, \qquad (3)$$

yana o'zgaruvchisi ajraladigan tenglama bo'lib qoladi.

Shuningdek, (3) tenglama aholining ko'payishi, epidemiyaning tarqalishi, reklama tarqatilish jarayoni va h.k.larni ifodalaydi.

2. Tog'- ko'l posyolkasi aholisi sonining vaqt o'tishi bilan quyidagi tenglama bilan yoziladi:

$$y'=0,3y\left(2-10^{-4}y\right)$$

bu yerda $y=y(t)$, t - vaqt (yil). Vaqtning boshlang'ich onida posyolka aholisi 500 kishi. Uch yildan keyin aholi soni qancha bo'l adi.

Yechish: tenglamadagi o'zgaruvchilarni ajratib, quyidagi tenglamaga kelamiz.

$$\frac{dy}{0,3y\left(2-10^{-4}y\right)}=dt$$

va bu tenglikni hadma – had integrallab

$$\ln\left|\frac{y}{2-10^{-4}y}\right|=0,6t+C_1,$$

yoki $\dfrac{y}{2-10^{-4}y}=Ce^{0.t}$ (4)

ni hosil qilamiz.

C o'zgarmasning qiymati boshlang'ich shartdan topiladi: $y(0)=500$ bo'lgani uchun.

$C \approx 256.4$. (4) tenglikdan u funksiyaning ifodasi

$$y=\frac{512{,}8\ e^{0,6t}}{1-0{,}02564\ e^{0.6t}}$$

U holda $y(3)=512{,}8e^{1.8}/\left(1-0{,}02564\ e^{1.8}\right)\approx 2685$.

Eslatib o'tamiz, talabning elastikligi (narxga nisbatan)

$$E_p(y)=\frac{pdy}{ydp}.$$

Ba'zi hollarda elastiklik berilganda talab funksiyasi qiziqish uyg'otadi.

107. Agar $E_p=-2=const$ va $y(3)=\frac{1}{6}$ bo'lganda talab funksiyasini toping.

Yechish: elastiklik ta'rifidan

$$-2=\frac{p}{y}\frac{dy}{dp},$$

ya'ni izlanayotgan funksiya o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bilan beriladi.

Bu tenglamani yechib

$$p^{-2}=cy.$$

Boshlang'ich shart $y(3)=1/6$ ni hisobga olib, $c=2/3$ ni hosil qilamiz.

108. Talab va taklif (mos ravishda)

$$y=25-2p+3\frac{dp}{dt},$$

$$x=15-p+4\frac{dp}{dt}$$

Boshlang'ich vaqtda $p=9$ bo'lsa muvozanat narxning, vaqtga bog'liqligini toping.

Yechish. Talab va taklifning tengligidan

$$25-2p+3\frac{dp}{dt}=15-p+4\frac{dp}{dt}$$

bundan $\dfrac{dp}{dt}=10-p$.

ya'ni o'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamani yechib

$$p=10-c\,l^{-t}.$$

$p(0)=9$ shartdan, $c=s$ kelib chiqadi

$$p=10-l^{-t}$$

$\lim\limits_{t\to\infty}p=\lim\limits_{t\to\infty}\left(10-e^{-t}\right)=10=const$, narx turg'un.

109. Talab funksiyasi $p(y)=2-y$; $l=1$, $y(0)=0{,}5$ berilgan, sotilgan mahsulot hajmining ifodasini toping.

Yechish. Bu holda (3) tenglamaning ko'rilishi.

$y' = (2-y)\cdot y$ yoki $\frac{dy}{(2-y)y} = dt$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Hadma – had integrallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + c_1,\text{ bu erda } c = \pm e^{c_1}$$

$y(0)=0.5$ ekanligini hisobga olib, $c=-3$ ni topamiz. U uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$y = \frac{2}{1+3e^{-2t}}.$$

Bu funksiyaning grafigi

(bu holda talabning elastikligini $\sum_p(y) = \frac{y-2}{y}$ funksiya bilan, egri chiziqning bukilish nuqtasining holatini aniqlovchi $\sum_p(y) = -1$ shart, $y=1$ ni beradi).

Rasmda tasvirlangan egri chiziq logistik deyiladi. Bu kabi egri chiziqlar axborotning tarqalishi (reklama), epidemiya dinamikasi, chegaralangan muhitda bakteriyalarning ko'payish jarayonini ifodalaydi.

110. Biror tarmoq vaqtning t onida olgan daromadi $Y(t)$, $I(t)$ – investisiya va $C(t)$ – iste'mol kattaligining yig'indisidan iborat.

$$Y(t) = I(t) + C(t) \qquad (5)$$

Daromadning o'sish kattaligini investisiya kattaligiga proporsional, ya'ni

$$b\,Y'(t) = I(t) \qquad (6)$$

bu yerda b – daromad o'sishining kapital sig'im koeffitsiyenti.

Faraz qilaylik, $C(t)$ olinayotgan daromadning ajratilgan qismi: $C(t) = (1-m)Y(t)$, bu yerda m – investisiya normasi. U holda (5) va (6) dan

$$Y' = \frac{m}{b}Y \qquad (7)$$

bu esa (1) tenglamaga teng kuchli.

111. Iste'mol kattaligi $C=2t$, daromad o'sishining kapital sig'imi koeffitsiyenti $b=\frac{1}{2}$, $y(o)=2$, ma'lum bo'lsa daromad funksiyasi $Y=Y(t)$ ni toping.

Yechish. (5) va (6) munosabatlardan $Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t$ tenglamani hosil qilamiz, ya'ni daromad funksiyasi birinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamani qanoatlantiradi. Uni yYechish uchun yechimni $Y(t)=u(t)\cdot v(t)$ ko'rinishida qidiramiz. U holda $u(t)=2te^{-2t}+e^{-2t}+c$, $v=e^{2t}$ni hosil qilamiz. O'zgarmas c ning qiymatini boshlang'ich shartlardan topamiz. $y(0)=u(0)v(0)=2$, bo'lgani uchun $c=1$. Bundan $Y(t)=2t+e^{2t}+1$ ni hosil qilamiz.

112. To'yilmagan bozor sharoitida, agar vaqtning boshlang'ich onida ishlab chiqarish hajmi $y_0=y(0)=24$ (sh.b), investisiya normasi 0,6, sotilish narxi 0,15 (sh.b) va $l=0,4$ bo'lsa 6 oydan keyingi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

113. Tovarning narxi $p(y)=\left(5+3e^{-y}\right)y^{-1}$, $m=0.6$ $e=0.6$, $l=0,4$ $y(0)=1$.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Qanday tenglamalar differensial tenglamalar deyiladi?
2. Differensial tenglamaning yechimi deb nimaga aytiladi?
3. Differensial tenglamaning qanday yechimi umumiy, qanday yechimi xususiy deyiladi?
4. Qanday tenglama o'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglama deyiladi?
5. Qanday tenglama bir jinsli differensial tenglama deyiladi?
6. Qanday tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi?
7. O'zgarmasni variatsiyalash usuli nima?

Adabiyotlar

1. Shorahmetov Sh., Naimjanov B. Iqtisodchilar uchun matematika. - T.: Fan va texnologiya., 2007.
2. Солохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. -Т.: Ўзбекистон, 1994.
3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. – М.: Наука, 1978.
4. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи. -М.: Экзамен 2005.
5. Красс М.С., Чупринов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: Дело, 2000.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов» под редакций Ермакова В.И. -М.: Инфра – М, 2003.
7. Кремер Н. М. и другие. – Высшая математика для экономистов. - М., 2004.
8. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов – М., 2004.
9. Минорский И. П. Сборник задач по высшей математике – М., 2004.
10. Соатов Ё.У. Олий математика, Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994, 3-жилд, 1996.

12-bob. QATORLAR

12.1. Sonli qatorlar, asosiy tushunchalar

Sonli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (12.1)$$

ifodaga sonli qator deyiladi. Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi.

12.2. Yaqinlashuvchi sonli qatorlar va ularning xossalari

Qatorning chekli sondagi hadlari yig'indisini ko'ramiz:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2, \ldots, S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$S_1, S_2, \ldots, S_n \ldots$ – xususiy yig'indilar ketma-ketligi deyiladi.

Ta'rif; Agar xususiy yig'indilar ketma - ketligining chekli limiti mavjud bo'lsa, ya'ni

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$, S-chekli son.

tenglik o'rinli bo'lsa, qator yaqinlashuvchi, S esa uning yig'indisi deyiladi. Bu holda $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = S$ deb yozsa bo'ladi.

Aks holda, ya'ni xususiy yig'indilar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lmasa yoki limiti mavjud bo'lmasa qator uzoqlashuvchi deyiladi.

1. Qatorning umumiy hadini toping. $\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \ldots$

Yechish. Kasrlarning suratlariga e'tibor beradigan bo'lsak ular birinchi hadi 2 ga va ayirmasi ham 2 bo'lgan arifmetik progressiyani tashkil qiladi. Mahraji esa birinchi hadi 5 va ayirmasi 4 bo'lgan arifmetik progressiya tashkil qiladi. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, qatorning umumiy hadi $u_n = \frac{2n}{4n+1}$.

2. $\frac{3}{5} - \frac{8}{10} + \frac{15}{17} - \frac{24}{26} + \ldots$

Yechish. $\frac{3}{5} = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1}$, $\frac{8}{10} = \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1}$, $\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^{n-1}\left[(n+1)^2 - 1\right]}{(n+1)^2 + 1}$.

3. Geometrik progressiyaning hadlaridan tuzilgan geometrik qatorning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (12.2)$$

Yechish. Progressiya mahraji q ning qanday qiymatlarida (12.2) qator yaqinlashadi, qaysi qiymatlarida qator uzoqlashishini aniqlash kerak.

Bizga ma'lumki $q \neq 1$ da S_n – xusussiy yig'indisi $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ formula bo'yicha hisoblanadi. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) agar $|q|<1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = \frac{a}{1-q}$, ya'ni qator yaqinlashadi va uning yig'indisi $S = \frac{a}{1-q}$;

2) agar $|q|>1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, demak, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ va qator uzoqlashadi;

3) agar $q=1$ bo'lsa u holda berilgan qatorning ko'rinishi $a + a + ...a + ...$, uning n – xususiy yig'indisi $S_n = a + a + ... + a = na$ va $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$, ya'ni qator uzoqlashadi;

4) agar $q=-1$ bo'lsa, u holda berilgan qatorning ko'rinishi $a-a+a-a+...+(-1)^{n-1}a-...$ n juft bo'lganida $S_n=0$, n toq bo'lganida $S_n=a$, demak $\lim_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas $a\neq 0$ bo'lsa va qator uzoqlashadi. Shunday qilib, geometrik qator $|q|<1$ da $S = \frac{a}{1-q}$ yig'indiga yaqinlashadi va $|q|\geq 1$ da uzoqlashadi.

4. Qator yig'indisini toping. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$.

Yechish. Qatorning n-xususiy yig'indisi $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$,

$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, ... $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Bundan $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, ya'ni berilgan qatorning yig'indisi $S = 1$.

Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari, qatorning yaqinlashish belgilari

1. Qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki qo'shish uning yaqinlashishiga ta'sir qilmaydi.

2. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^b$ yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ yaqinlashadi va $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S^a + S^b$ bo'ladi.

3. Agar yaqinlashuvchi qator va o'zgarmas son c berilgan bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ yaqinlashadi va $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cS^a$ bo'ladi.

1. Sonli qator yaqinlashishining Koshi alomati.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi uchun, ixtiyoriy $E > 0$ da shunday N nomer topilsaki, barcha $m > n > N$ lar uchun $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < E$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

2. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti:

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashsa, u holda uning umumiy hadi nolga intiladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Qatorning yaqinlashishini tekshiring. $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Yechish. Qator yaqinlashishining zaruriy shartiga asosan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ekanligini hisobga olsak bu qatorning xususiy yig'indisi

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1};$$

ko'rinishda bo'ladi, u holda $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 2$, shuning uchun bu qator yaqinlashadi va uning yig'indisi 2 ga teng bo'ladi.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+10}$ qatorni yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{n}{n+10}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+10} = 1$ bo'lgani uchun qator uzoqlashadi.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ qatorlarni yaqinlashishini tekshiring

Yechish. $a_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = b_n + c_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qatorlar maxraji $q < 1$ bo'lgan geometrik progressiya tashkil qilgani uchun yaqinlashadi. Ularning yig'indisi mos ravishda

$S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{2}$, $S_c = 1$. Shuning uchun qator yaqinlashadi va yig'indisi 1,5 ga teng.

Quyidagi qatorning yig'indisini toping.

8. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

9. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{9}) + \ldots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \ldots$

10. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n + 8n + 3}$

(*Ko'rsatma*: Umumiy had a_n ni elementar kasrlarga ajrating.)

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Qatorlarning uzoqlashuvchi ekanligini isbotlang:

12. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

$(Ko'rsatma.\ S_n = \begin{cases} 1, & n - toq \\ 0, & n - juft \end{cases})$

13. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$

14. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ (*Ko'rsatma.* Koshi mezonidan foydalanamiz)

15. $|a_n+...+a_{2n}| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right| > \frac{1}{\sqrt{2n}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$.

16. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+...$.

17.- 22. Qatorlarning yigi`ndisini toping.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(3n-2)(3n+4)}$.

12.3. Musbat hadli qatorlar

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning barcha hadlari $a_n \geq 0$ bo'lsa, musbat hadli qator yoki qisqacha musbat qator deyiladi.

Musbat qatorlar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilari ketma – ketligi $\{S_n\}$ ning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Musbat qatorlarni taqqoslash alomati.

Ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat qatorlar berilgan bo'lsin.

1) Agar n ning biror $n_0 (n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n \geq n_0$ lar uchun $a_n \leq b_n$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning ham yaqinlashuvchi bo'lishi yoki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning ham uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

2) Agar $n \to \infty$ da $\frac{a_n}{b_n}$ nisbat ushbu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k, (0 \le k \le +\infty)$ limitga ega bo'lsa $k < \infty$ bo'lganida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishidan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi, $k > 0$ bo'lganda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

3) Agar barcha n lar uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishidan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning ham yaqinlashuvchiligi yoki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning ham uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

23. Ushbu $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots$ qator yaqinlashuvchimi?

Yechish: Bu qatorning yaqinlashuvchi ekanligi ma'lum bo'lgan ($S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ qator bilan taqqoslaymiz.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1!}=1, & \frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4} \\ \frac{1}{2!}=\frac{1}{2} & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2} & \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3} & \frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{2^n} \end{array}$$

Berilgan qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi qatorning mos hadidan katta emasligidan uning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

24. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ qator yaqinlashuvchimi?

Yechish: Bu misolni $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ bilan taqqoslab yechish mumkin.

Koshi alomati: Musbat hadli qatorlar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ mavjud bo'lsin.

agar $q < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi;
agar $q > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashadi;
gar $q = 1$ yaqinlashish haqidagi savol ochiq qoladi.

25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$ qatorning yaqinlashishini tekshiring.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishini tekshiring.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2+1}\right)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Yechish. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2+1}=0$. Qator yaqinlashadi.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$. Qator yaqinlashadi.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}<1$. Qator yaqinlashadi.

27. Qatorning yaqinlashuvchanligini isbot qiling va yig'indisini toping.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+11n+30}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$. 8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$.

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+32n+63}$. 10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.

11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$. 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+15n+4}$. 14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+24n+35}$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$. 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+15n+56}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$. 18) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+16n+15}$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$. 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$.

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+13n+42}$. 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$.

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9n+20}$.

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+21n+10}$.

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-12}$.

28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$.

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n}$.

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+5}$.

28. Qatorning yaqinlashishini tekshiring.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,arctg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{3/2}}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}+n-1}$.

8) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$.

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$.

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}\,arctg\frac{n+3}{n^2+5}$.

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}$.

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

16) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\,arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+3n}{5^n+n}$.

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$.

20) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \, arctg \frac{1}{n^3}$.

22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

23) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3+1}$.

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

26) $\sum_{n=2}^{\infty} arctg \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

27) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 tg^5 \frac{\sigma}{n}$.

28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt[3]{n+5}}$.

30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

29. Qatorning yaqinlashishini tekshiring.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^2-1)}{n!}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n\cdot (n+1)!}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot (2n+5)}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$.

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}$.

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$.

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$.

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$.

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg \frac{5}{n}}{n!}$.

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$.

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{5^n(n+1)!}$.

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$.

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$.

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)!}$.

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$.

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)!}$.

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$.

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

28) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,tg\,\frac{\pi}{3^n}$.

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$.

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\,\frac{1}{5^n}$.

30. Qatorning yaqinlashishini tekshiring.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+2}{2n+3}\right)^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n}\right)^{n^2}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right)^{3n}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$.

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$.

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$.

22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$.

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot e^{-n}$.

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n}$.

26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+4n+5}{4n^2-3n-1}\right)^{n^2}$.

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$.

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

Dalamber alomati. Musbat hadli $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ qator uchun keyingi hadning oldingi hadga nisbatining n cheksizga o'sgandagi limiti $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ mavjud bo'lsin. U holda 1) agar $l<1$ bo'lsa qator yaqinlashuvchi; 2) $l>1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi. 3) $l=1$ bo'lganda esa bu alomat qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini hal qila olmaydi.

Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

31. $a_n=\frac{1}{n!}$

Yechish: $a_n=\frac{1}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ qator yaqinlashadi.

32. $a_n = \frac{n}{2^n}$

Yechish: $a_n = \frac{n}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2 \cdot 2^n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$ qator yaqinlashadi.

33. $a_n = \frac{5^n}{n^3}$

Yechish: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5^n}{n^3} = (\infty|\infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \ln 5}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \ln^3 5}{2} = \infty$

yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilmaganligi sababli qator uzoqlashadi.

34. Dalamber alomati bo'yicha quyidagi misolni tekshiring.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Yechish: $a_n = \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ demak, $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$;

$\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, ya'ni $l=1$ ekan. Lekin bizga ma'lumki, bu garmonik qator uzoqlashuvchi.

35. Ushbu qatorga $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ *Dalamber* alomatini qo'llang.

Yechish: Bizda $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1$

Lekin, bu qator yuqorida ko'rsatganligimizga muvofiq yaqinlashuvchidir. Bulardan ko'rinadiki, $l=1$ bo'lgan holda qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligini boshqa usul bilan tekshirish kerak ekan.

36. $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)n}$

Yechish: Dalamber alomati qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanining aniqlashga imkon bermaydi. Uning yaqinlashuvchiligini boshqa usulda tekshiramiz.

$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lgani uchun $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ekanligini hisobga olib, qatorning xususiy yig'indisi

$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$ u holda, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2$

Shuning uchun bu qator yaqinlashadi va uning yig'indisi 2 ga teng.

37. $a_n = \frac{n^n}{n!}$

Yechish: $a_n = \frac{n^n}{n!}$;

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{n!(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ qator uzoqlashadi.

Koshining integral alomati

Musbat hadli $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ qatorda $u_n = f(n) = f(x)$ bo'lib $f(x) > 0$ kamayuvchi funksiya bo'lsa, hamda $\int_1^{\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ham albatta yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misol: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$ qator yaqinlashuvchimi?

Yechish: $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\frac{1}{10}>\cdots>\frac{1}{n^2+1}>\cdots$ hamda $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty} arctgx|_1^b$ $=\lim_{b\to\infty} arctgb-arctg1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ demak, qator yaqinlashuvchi ekan

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$.

Yechish. $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}=b_n$ ekanligi ravshan. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ qator maxraji $q=\frac{1}{2}<1$ bo'lgan geometrik progressiya hadlari yig'indisidan iborat va u yaqinlashuvchi. Taqqoslash alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

39. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

(Ko'rsatma. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ qator bilan taqqoslash alomatini qo'llang.)

40. $1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots, a\ge 2$.

33. $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$

Ko'rsatma. Taqqoslash uchun $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ garmonik qatordan foydalaniladi.

Dalamber yoki Koshi alomatidan foydalanib, qatorlarning yaqinlashishini tekshiring.

41. $\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}+\ldots$

Yechish. Dalamber alomatiga ko'ra $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{2}<1$. Demak, qator yaqinlashuvchi.

42. $3+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^2}{3^2}+\frac{3^4}{4^4}+\ldots+\frac{3^n}{n^n}+\ldots$

Yechish. Koshi alomatiga ko'ra $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0<1$. Demak, qator yaqinlashuvchi.

43. $\frac{100}{1!}+\frac{100^2}{2!}+\frac{100^3}{3!}+\ldots+\frac{100^n}{n!}+\ldots$

45. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(3n)^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n-3^n}}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\frac{1}{2})^{n^2}}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}, a\ne e, a>0$.

12.4. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Leybnis teoremasi

Agar ixtiyoriy n uchun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qatorning a_n va a_{n+1} hadlari turli ishoraga ega bo'lsa, bunday qatorga ishorasi almashinuvchi qator deyiladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$$

bu yerda $c_n > 0$.

Leybnis alomati: agar ishorasi almashinuvchi qatorda har bir had absolyut qiymati bo'yicha o'zidan oldingi haddan kichik va $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lsa qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

51. Quyidagi qatorlarni yaqinlashishini tekshiring.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+(-1)^n}{3^n}$.

Yechish. 1) $1 > \frac{1}{2} > ... > \frac{1}{n} > ...$ va $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ bo'lgani uchun $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashadi.

2) $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > ... > \frac{1}{\sqrt{n}} > ...$, va $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ bo'lgani uchun $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashadi.

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ - qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaganligi uchun uzoqlashadi.

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n(n-1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 0$, qator yaqinlashadi.

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,\frac{e^n}{n^n n^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{n^p} = \begin{cases} p > \frac{1}{2} \text{ da } 0; \textit{ qator yaqinlashadi.} \\ p \le \frac{1}{2} \text{ da } \infty; \textit{ qator uzoqlashadi.}\end{cases}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ cheksiz kamayuvchi ($q < 1$) geometrik progressiya yaqinlashadi va $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ Leybnis teoremasiga ko'ra yaqinlashadi, demak berilgan qator yaqinlashadi.

52. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}+...$

53. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}+...$

54. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-...+\frac{(-1)^n}{n\ln n}+...$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n!}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n(n+1)}$.

12.5. Ishorasi ixtiyoriy bo'lgan sonli qatorlar

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi, lekin $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

Absolyut yaqinlashuvchi va shartli yaqinlashuvchi qatorlar orasidagi farq quyidagicha: Absolyut yaqinlashuvchi qatorlar asosan, hadlari tez kamayuvchi bo'lgani uchun yaqinlashadi. Shartli yaqinlashuvchi qator esa musbat va manfiy hadlar uchun yaqinlashadi.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar bir-biridan keskin farq qiladi. Absolyut yaqinlashuvchi va shartli yaqinlashuvchi qatorning xossalari ham bir-biridan keskin farq qiladi. Absolyut yaqinlashuvchi qatorlar o'z xossalari bo'yicha chekli yig'indini eslatadi, bunday qatorlarni qo'shish, ko'paytirish va hadlarini o'rnini almashtirish mumkin. Shartli yaqinlashuvchi qatorlar bunday xossalarga ega emas.

Masalan, shartli yaqinlashuvchi $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...$ qatorni qaraymiz. Uning hadlarini o'rnini almashtirib, quyidagicha guruhlaymiz:

$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+...$ Qatorni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+...=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...)$, ya'ni qator hadlarini o'rnini almashtirishdan uning yig'indisi 2 marta kamaydi. Ko'rsatish mumkinki (Riman teoremasi) shartli yaqinlashuvchi qator hadlarini o'rnini almashtirish bilan oldindan berilgan ixtiyoriy yig'indini, hatto uzoqlashuvchi qatorni hosil qilish mumkin.

12.6. Funksional qatorlar

Hadlari x ning funksiyalaridan iborat bo'lgan

$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ qator funksional qator deyiladi.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x = \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \ldots$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots$

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ sonli qator yaqinlashsa, funksional qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi. Funksional qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha x lar to'plami uning yaqinlashish sohasi deyiladi.

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ yig'indi funksional qatorning n – qismiy yig'indisi deyiladi.

$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ funksiya funksional qatorning yig'indisi deb, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ayirma esa qator qoldiqli deyiladi.

59. Quyidagi qatorlarni yaqinlashish sohasini toping.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$

Yechish. 1) $u_n(x) = \sin \frac{x}{2^n}$; $u_{n+1}(x) = \sin \frac{x}{2^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin \frac{x}{2^{n+1}}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right| < 1$, chunki

$n \to \infty \Rightarrow \frac{x}{2^n} \to 0$ cheksiz kichik miqdor, u holda $\sin \frac{x}{2^{n+1}} \sim \frac{x}{2^{n+1}}$, $\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$. U holda

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2^{n+1}} : \frac{x}{2^n} \right| = \frac{1}{2} < 1$. Demak, qator butun sonlar o'qida $-\infty < x < \infty$ da yaqinlashadi.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$; $u_n(x) = e^{-n^2 x}$; $u_{n+1}(x) = e^{-(n+1)^2 x}$; $\lim_{n\to\infty} e^{-x(2n+1)} = \begin{cases} 0 \ agar \ x > 0, \\ \infty \ agar \ x < 0. \end{cases}$

$x = 0$ da $u_n(x) = 1 \neq 0$ qator uzoqlashadi.

Funksional qatorning tekis yaqinlashishi

Agar yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator uchun har qanday $\varepsilon > 0$ berilganda ham shunday $N(\varepsilon)$ topish mumkin bo'lsaki, $n \geq N$ bo'lganda $[a, b]$ kesmadagi istalgan x uchun $R_n(x) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, berilgan funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Veyershtras alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ qator uchun hadlari musbat sonli shunday $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qator mavjud bo'lib, $x \in [a, b]$ da $|u_n(x)| = c_n$ bo'lsa, u holda funsional qator bu $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

60. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$ qator barcha x lar uchun tekis yaqinlashishini isbotlang.

Yechish. $|u_n(x)| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ va $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun berilgan qator barcha x lar uchun tekis yaqinlashadi.

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari

1) Agar tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning hadlari $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda uning yig'indisi $S(x)$ ham bu kesmada uzluksiz bo'ladi;

2) Agar tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning hadlari $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, qator bu kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$, bu yerda $S(x)$ - qator yig'indisi;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ funksional qatorning hadlari $[a, b]$ kesmada aniqlangan va bu kesmada $u'_n(x)$ uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Agar bu kesmada berilgan qator yaqinlashuvchi va uning hadlari hosilalaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x)$ qator tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qatorning yig'indisi $S(x)$ ham $[a, b]$ kesmada hosilaga ega bo'ladi va $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Quyidagi qatorlarni yaqinlashish xarakterini aniqlang.

61. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n, \quad 0 \le x \le 1.$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < +\infty.$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad -1 \le x \le 1.$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + 2^n}, \quad -2 < x < +\infty.$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(x^n + x^{-n}\right), \quad \frac{1}{2} \le x \le 2.$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad -\infty < x < +\infty.$

12.7. Darajali qatorlar

$$c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

ko'rinishdagi qator darajali qator deyiladi, bu yerda $c_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ - o'zgarmaslar. Bu qator chiziqli almashtirish yordamida

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

qator ko'rinishiga keltiriladi.

Darajali qatorning xossalari

a) Agar $f(x)$ – darajali qatorning yig'indisi bo'lsa, u holda $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ning yaqinlashish oralig'i $(-R;\ R)$ ichidagi ixtiyoriy $[a,\ b]$ kesmada $f(x)$ funksiya uzluksiz, darajali qatorni esa bu kesmada hadma-had integrallash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \ldots + \int_a^b c_n x^n dx + \ldots \qquad (*)$$

b) yaqinlashish oralig'ida darajali qatorni hadma-had differensiallash mumkin:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots \qquad (**)$$

Bunda (*) va (**) qatorlarning yaqinlashish radiusi berilgan qatorlarniki kabi R bo'ladi.

Abel teoremasi. Agar darajali qator biror $x = x_0 \neq 0$ da yaqinlashsa, u holda u barcha $|x| < |x_0|$ qiymatlarida absolyut yaqinlashadi.

69. $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \ldots + (-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} + \ldots$ qatorning $x \in (-1;1)$ oraliqda yig'indisini toping.

Yechish. Qatorni ($[0,\ x]$ bu yerda $x \in (-1;1)$) oraliqda integrallash geometrik qatorga olib keladi. $-x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$ bu esa geometrik progressiyaning yig'indisini beradi. $b_1 = -x^2$, $q = -x^2 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-x^2}{1+x^2}$.

Berilgan qatorga qaytamiz, uning yig'indisini esa $S(x)$ ni differensiallab topamiz:

$$S'(x) = \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

70. Qatorning $x \in (-1;1)$ oraliqda yig'indisini toping: $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$

Yechish. Qator yaqinlashish oralig'ida hadma – had differensiallanib geometrik qator ko'rinishiga keltiriladi. $S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, uning yig'indisi $S = \frac{1}{1-x}$ $(b_1 = 1,\ q = x)$. Qatorning yig'indisini $[0;\ x]$ oraliqda (bunda $x \in (-1;1)$) integrallab topamiz:

$$S(x) = \int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|$$

71-74. Qatorlarni hadma – had differensiallab, yig'indisini toping.

71. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$ **72.** $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

73. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ **74.** $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$

75. Qatorning yaqinlashish sohasini toping.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!}$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n(n^2+1)}$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+6}\right)^n \cdot x^n$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}} x^n$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$.

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} x$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)^n} x^n$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! x^n}{n^n}$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3n}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{1}{3}}}$.

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$.

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)^n} x^n$.

22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}} x^n}{(n+1)!}$.

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n$.

26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$.

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$.

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Agar qator biror $x = x_0 \neq 0$ da uzoqlashsa u barcha $|x| > |x_0|$ da uzoqlashadi.

Shunday R son mavjudki, (u 0 ham ∞ ham bo'lishi mumkin).

a) $|x| < R, (R \neq 0)$ da qator absolyut yaqinlashadi.

b) $|x| > R, (R < \infty)$ da qator uzoqlashadi.

R soni darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-R, R)$ oraliq esa yaqinlashish oralig'i deyiladi.

Darajali qatorning yaqinlashish radiusi quyidagi formulalar bo'yicha topiladi.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}, \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Darajali qatorning yaqinlashish oralig'ini aniqlang va oraliqning chekkalarida uning yaqinlashishini tekshiring.

76. $1 + x + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \ldots + \frac{x^n}{n^p} + \ldots, \ p > 0.$

Yechish. $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^p}{n^p}\right| = 1$. Shunday qilib, qator $|x| < 1$ da yaqinlashadi va $|x| > 1$ da uzoqlashadi. Endi oraliqning chegaralarida qatorning yaqinlashishini tekshiramiz. Faraz qilaylik, $x = -1$, u holda qator $1 - 1 + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n^p} + \ldots$.

Ishorasi almashinuvchi qator $p > 1$ da absolyut va $0 < p < 1$ da shartli yaqinlashadi.

$x = 1$ da qatorning ko'rinishi: $2 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ va $p > 1$ da yaqinlashadi, $0 < p < 1$ da uzoqlashadi.

77. $1 + \frac{x}{3\cdot 2} + \frac{x^2}{3^2\cdot 3} + \frac{x^3}{3^3\cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{3^n(n+1)} + \ldots$

78. $1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \ldots + \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} + \ldots$

79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 1}}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$.

82. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2 x^n$.

83. $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2\cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}} + \ldots$

Ko'rsatma. $t = x + 1$ almashtirishni bajaring.

84. $(2x-5) - \frac{(2x-5)^2}{3} + \frac{(2x-5)^3}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2x-5)^n}{2n-1} + \ldots$

85. $1 - \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2\sqrt{3}} - \frac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}} + \ldots$

Yechish. Yaqinlashish radiusini topish formulasi barcha $c_i \neq 0$ bo'lganda o'rinli. Bu holda $c_{2k}= 0$, $k \geq 1$. Dalamber alomati bo'yicha qatorni har bir x uchun absolyut yaqinlashishga tekshiramiz:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2k+1}}{5^{k+1}\sqrt{k+2}}}{\dfrac{x^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}}}\right| = \frac{1}{5}x^2 .$$

Demak, qator $\frac{x^2}{5}<1$ da yaqinlashadi va $\frac{x^2}{5}>1$ da (qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi) qator uzoqlashadi. Shunday qilib berilgan darajali qator $x\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ da yaqinlashadi.

Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish sohasini toping:

86. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)^n}$.

87. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$

89. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^x$

90. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$

91. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^{n-1}$

92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$

93. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

12.8. Funksiyani darajali qatorga yoyish

Agar $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning atrofida $(n+1)$ tartibligicha hosilalarga ega bo'lsa, u holda quyidagi Teylor formulasi o'rinlidir.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

bu yerda $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, (0<\theta<1)$.

$R_n(x)$–Teylor formulasining Lagranj shaklidagi qoldiq hadi deyiladi.

$R_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, ko'phad $y=f(x)$ funksiyaning n darajali Teylor ko'phadi deyiladi.

$x = 0$ da Teylor formulasining xususiy holi – Maklaren formulasi hosil bo'ladi.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

bu yerda

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n,(0<\theta<1).$$

Elementar funksiyalarni Maklaren qatoriga yoyilmasi.

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...(-\infty<x<\infty)$;

2) $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...(-\infty<x<\infty)$;

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}...(-\infty<x<\infty)$;

4) $\ln x(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}...(-1<x\le 1)$

5) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...(-1<x<1)$

94. Elementar funksiyalarni qatorga yoyilmasidan foydalanib, quyidagi funksiyalarni darajali qatorga yoying. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Yechish: $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...)-$
$-(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-...)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+...$

95. $f(x)=e^{-x^2}$.

96. $f(x)=\frac{x^{10}}{1-x}$.

97. – 114. Funksiyalarni x ning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoying.

97. $y=e^{-2x}$

98. $y=\sin\frac{x}{2}$

99. $y=x^3\cos x$

100. $y=\ln(1+5x)$

101. $y=\ln(5+2x)$

102. $y=\sqrt{1+x^2}$

103. $y=\frac{1}{1+x^4}$

104. $y=\frac{3}{4-x}$

105. $y=x^2e^{-2x}$

106. $y=x\,arctgx$

107. $y=(1+x)\ln(1+x)$

108. $y=\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

109. $y=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$

110. $y=e^x\ln(1+x)$

111 $y=e^{-x}\sin x$

112. $y=x\,arctgx-\ln(1+x^2)$

113. $y=(arctgx)^2$ **114.** $y=\ln(6+x-x^2)$

115. Ba'zi funksiyalarning darajali qatorga yoyilmasi quyidagicha:

1) $tgx = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\dots$

2) $\sin(x+a)=\sin a + x\cos a - \frac{x^2}{2!}\sin a - \frac{x^3}{3!}\cos a+\dots$

3) $\cos(x+a)=\cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\sin a+\dots$

4) $\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x = 1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2}{45}x^6+\dots$

5) $(1\pm x)^{\frac{1}{2}} = 1\pm\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2\pm\frac{5}{16}x^3-\dots$

6) $(1\pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1\mp\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2\mp\frac{5}{16}x^3-\dots$

7) $e^{\cos x} = e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{31}{720}x^6+\dots\right)$

8) $e^{\sin x} = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\dots$

9) $e^{tgx} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}$

10) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7+\dots$

11) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\dots$

12) $\ln|\sin x| = \ln|x| - \frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\dots,\quad 0<|x|<\pi.$

13) $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\dots,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$

14) $\ln|tgx| = \ln|x|+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\dots,\quad 0<|x|<\frac{\pi}{2}.$

Mavzu yuzasidan savollar

1. Yaqinlashuvchi sonli qatorning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
2. Yaqinlashuvchi qatorlarning asosiy xossalarini sanab o'ting.
3. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti qanday?
4. Musbat hadli qator yaqinlashishining yetarlilik shartlari qanday?
5. Ishorasi almashinuvchi qatorlarning yaqinlashishi qanday tekshiriladi?

6. Qanday sonli qatorlar absalyut yaqinlashuvchi, qandaylari shartli yaqinlashuvchi deyiladi?

7. Funksional qator nima?

8. Funksional qatorning yaqinlashishi qanday tekshiriladi?

9. Qanday qator darajali qator deyiladi?

10. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi qanday topiladi?

11. Funksiya darajali qatorga yoyilishi uchun qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

12. Teylor va Makloren qatorlari qanday qatorlar?

Adabiyotlar

1. Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz. –T., 2006.
1. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. -Т.: Ўзбекистон 1999.
2. Соатов Ё.У. Олий математика. -Т.: Ўкитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994 ., 3-жилд, 1996.
3. Шипачев В.С. Курс высшей математики, -М.: Проспект, 2005.
4. Минорский И.П., Сборник задач по высшей математике – М., 2004.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов. /Под ред. Ермакова В.И. -М.: Инфра – М, 2003.
6. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов теория, примеры и задачи. -М.: Экзамен. 2005.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz. –T., 2006.

2. Хожиев Ж. Алгебра ва сонлар назарияси. -Т.: Ўзбекистон, 2001.

3. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. -Т.: Ўзбекистон, 1999.

4. Соатов Ё.У. Олий математика. -Т.: Ўқитувчи, 1-жилд, 2-жилд, 1994. 3-жилд, 1996.

5. Обший курс высшей математике для экономистов. /Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2006.

6. Высшая математика для экономистов. /Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2006.

7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалаврианта. - М.: Дело, 2006.

8. Шипачев В.С. Курс высшей математики. -М.: Проспект, 2005.

9. Солодовников А., Бабайыев А.А., Браилов А.В. Математика в экономике. - М.:Финансы и статистика, 2004.

10. Замков О.О., Толстояптенко А.Б., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС, 2004.

11. Коршунова Н., Плясунов В. Математика в экономике. - М.: Вита пресс, 2004.

12. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. -М., 2004.

13. Кремер Н.М. и другие. Высшая математика для экономистов. - М., 2004.

14. Shoraxmetov Sh., Naimjonov B. “Oliy matematika” fanidan ma’ruzalar matni. -T.: TDIU, 2005.

15. Каримов М. Олий математика. – Т.: TMI, 2005.

16. Адигамова Э.Б. ва бошкалар. “ Олий математика ” фанидан маъruзалар тўплами. – Т.: ТМИ, 2004. (II - кисм).

17. Каримов М., Абдукаримов Р. “Олий математика” фанидан маърузалар тўплами. –Т.: ТМИ, 2002.

18. Саипназаров Ш.А., Ортикова М.Т. Бошланғич молиявий математика асослари. – Т.: ТДИУ, 2002.

19. Куришева Е.С. Математика. – М., 2005.

20. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. – М., 2005.

21. Минорский И. П. Сборник задач по высшей математике. – М., 2004.

22. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1998.

23. Данко П.Е., Попов А.Т., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая Школа, 1998.

24. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. – Т.: Ўқитувчи, 1996.

25. Кремер Н.Ш. и др. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2004.

26. Макаров С.И., Мищенко М.В. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. -Н., 2008.

27. Кремер Н.Ш., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образованиию -М., 2008.

28. Ермаков В.И. Общий курс высшей математика для экономистов. –Н., 2010.

Shoraxmetov Shoturg'un, Asroqulova Dono Sunnatullayevna,
Qurbonov Jalol Jabborovich

Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to'plami

"Iqtisodiyot" - 2012.

Muharrir
Mirhidoyatova D.M.
Musahhih
Boboyeva N.S.

Bosishga ruxsat etildi 20.04.2012. Qog'oz bichimi 60x80 1/16.
Shartli bosma tabog'i 15,0 Адади 150 нусха. 48-сонли буюртма.
Бахоси келишилган нархда

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti bosmaxonasida bosildi 100003.
Toshkent sh. O'zbekiston shoh ko'chasi 49-uy.

22.172 **Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to'plami:** O'quv qo'llanma. / Sharaxmetov Sh., Asroqulova D.S., Qurbonov J.J.
- T.: Iqtisodiyot, 2012. -239 b.

1. Sharaxmetov Sh.
2. Asroqulova D.S.
3. Qurbonov J.J.

ISBN 978-9943-333- 93-3

UDK 517.9
BBK 22.172