

SH. SHARAXMETOV, O. KURBANOV



**IQTISODCHILAR UCHUN**



**MATEMATIKA**



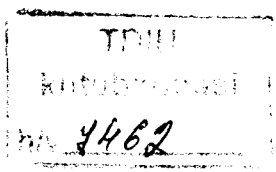
51(04)  
86-16

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS  
TA‘LIM VAZIRLIGI**

**SH. SHARAXMETOV, O.T. KURBANOV**

**IQTISODCHILAR UCHUN  
MATEMATIKA**

*O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi  
tomonidan oliy o‘quv yurtlarining 55231400 – Statistika yo‘nalishi  
talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan*



O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti  
Toshkent – 2017

**UO‘K: 51:33-057.875(075.8)**

**KBK: 22.1**

**Sh 26**

**Sharaxmetov Sh.**

**Iqtisodchilar uchun matematika:** Darslik / Sh. Sharaxmetov, O.T. Kurbanov; Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi. – T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017. – 384 b.

**UO‘K: 51:33–057.875(075.8)**

**KBK: 22.1**

Darslik iqtisodiyot yo‘nalishidagi talabalar uchun mo‘ljallangan. Unda matematikaning chiziqli algebra, analitik geometriya, differensial va integral hisob, differensial tenglamalar, qatorlar kabi bo‘limlari yoritilgan va tegishli masala, misollar (jumladan iqtisodiy mazmundagi masalalar) keltirilgan.

Darslik O‘zbekiston Respublikasi Davlat ta‘lim standartlari asosida yozilgan bo‘lib, unda matematikaning analitik geometriya, chiziqli algebra, matematik tahlil va oddiy differensial tenglamalar bo‘limlari yoritilgan.

Matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini va tadbirlari keltirilgan.

Ushbu darslik barcha iqtisodiy yo‘nalish talabalari uchun mo‘ljallangan.

**Taqrizchilar:**

**To‘xtasinov M. – O‘zMU «Differensial tenglamalar va matematik fizika» kafedrasi professori, f-m.f.d.,**

**Asraqulova D.S. – TDIU «Oliy matematika» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.**

ISBN 978-9943-07-554-2

## SO‘ZBOSHI

Jahon ta’lim tizimida matematika fanidan ma’lum bir soha (xususan ijtimoiy gumanitar, iqtisod sohalari) talabalari uchun maxsus darslik, o’quv qo’llanma yaratish yangilik emas. Bunday kitoblarning o’ziga xosligi quyidagilardan iborat:

– bir tomondan matematika – **MATEMATIKA**ligicha qolib, fundamental fan sifatida matematik tushunchalar, aksiomalar, teoremlarning uzviy bog’lanishda mantiqiy izchilligida qat’iy bayon qilinishi zarur. Talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlashlarning sintezi bo’lgan – matematik fikrlashni shakllantirishga xizmat qilishi kerak;

– ikkinchi tomondan muayyan sohaning talab va ehtiyojlaridan kelib chiqib, uning o’ziga xos jihatlarini aks ettirishi lozim. Talabalarning matematikani maqsadli o’rganishini ta’minlash bilan birga o’zlashtirishini osonlashtirishi kerak.

Masalaning bu ikki tomoni ma’lum mutanosiblikda shunday uyg’unlashuvi kerakki, natijada kurs ma’lum sohaning muayyan masalalarini yechishga retseptlar beruvchi darslik yoki talabalarda «*Matematika – faqat hisoblashlarni o’rganadigan fan*» degan tushunchani hosil qilmasligi kerak. Mana shu tamoyildan kelib chiqib, matematikaga «*tabiat haqidagi barcha bilimlarimizni sistemaga soluvchi, tabiat va jamiyatdagi jarayonlarning matematik modellarini o’rganuvchi fan*», deya ta’rif berilgan.

Ushbu darslik maxsus iqtisodchilar uchun yozilgan bo’lib, ko’p hollarda matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini berildi va iqtisodiy mazmundagi masala, misollar keltirildi.

Darslikda analitik geometriya va chiziqli algebra elementlari, chiziqli fazo elementlari, limitlar nazariyasi, bir va ko’p o’zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisobi, oddiy differensial tenglamalar va qatorlar nazariyasi bayon qilingan.

Darslikka mualliflarning Toshkent davlat iqtisodiyot universtetida «Iqtisodchilar uchun matematika» fanidan o'qigan ma'ruzalari asos qilib olindi. Darslikning ma'lum bo'limlarini yaratishda o'z yordamlarini, maslahat va fikr-mulohazalarini bergan «Oliy matematika» kafedrasining professor-o'qituvchilari S.S. Isamuhamedov, D.S. Asraqulova, A.R. G'ulomovlarga o'z minnat-dorchiligimizni bildiramiz.

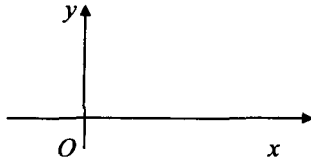
Mazkur kitob iqtisodchilar uchun maxsus yozilgan dastlabki o'zbek tilidagi darslik bo'lganligi uchun kamchiliklardan xoli bo'lmasa kerak. Kamchiliklarni bartaraf etish va kitobning sifatini yaxshilash borasidagi fikr va mulohazalarini bildirgan kitobxonlarga mualliflar oldindan o'z minnatdorchiligini bildiradilar.

# 1. Tekislikda analitik geometriya

## Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi

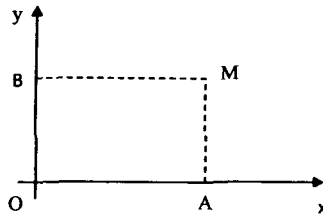
Agar tekislikda biror tartibda belgilangan o'zaro perpendikular o'qlar berilgan bo'lib, unda birlik masshtab aniqlangan bo'lsa, u holda tekislikda *dekart koordinatalar sistemasi* berilgan deyiladi.

O'qlarning kesishish nuqtasi koordinatalar boshi, o'qlarning o'zi esa *koordinatalar o'qi* deyiladi.



Bunda  $Ox$  – absissalar o'qi,  $Oy$  – ordinatalar o'qi deyiladi.

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy nuqta  $M$  berilgan bo'lsin.  $M$  nuqtadan  $Ox$  va  $Oy$  o'qlariga perpendikular to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu perpendikular to'g'ri chiziqlarning koordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda  $A$  va  $B$  orqali belgilaymiz:

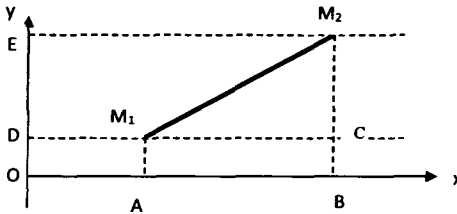


$OA=x$  va  $OB=y$  sonlar  $M$  nuqtaning bu sistemadagi koordinatalari deyiladi va  $M(x;y)$  kabi belgilanadi.

## Tekislikda analitik geometriyaning sodda masalalari.

### Ikki nuqta orasidagi nuqta

Tekislikda  $M_1(x_1; y_1)$  va  $M_2(x_2; y_2)$  nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan koordinatalar o'qiga perpendikularlar o'tkazamiz:



U holda  $|OB|=x_2$ ,  $|OA|=x_1$ ,  $|M_1C|=|AB|=x_2-x_1$ ,  $|M_2C|=|DE|=y_2-y_1$ .

Agar  $M_1(x_1; y_1)$  va  $M_2(x_2; y_2)$  nuqtalar orasidagi masofani  $d$  orqali belgilasak, u holda  $\Delta M_1M_2C$  dan  $|M_1M_2|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ .

$$|M_1M_2|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (1)$$

(1)-formuladagi  $M_1(x_1; y_1)$  va  $M_2(x_2; y_2)$  nuqtalar orasidagi masofa hisoblash formulasi deyiladi.

**Masalan.** Uchlari  $A(-7; 2)$ ;  $B(5; -3)$ ;  $C(8; 1)$  nuqtalarda bo'lgan  $ABC$  uchburchakning  $AB$  tomoni uzunligini toping.

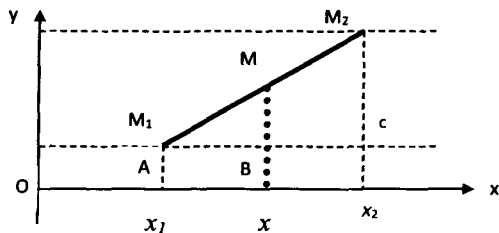
**Yechish:**  $|AB|=\sqrt{(-7-5)^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ .

### Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

$M_1(x_1; y_1)$  va  $M_2(x_2; y_2)$  nuqtalar berilgan bo'lsin.  $M_1M_2$  kesmani

$\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$  nisbatda bo'luvchi  $M(x; y)$  nuqtaning koordinatalarini

aniqlaymiz:



Ma'lumki,  $\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|AB|}{|BC|}$  yoki  $\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x}$ . Oxirgi munosabatni  $x$  ga nisbatan yechib,  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ . Xuddi shu kabi  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$  munosabat aniqlanadi.

$$\text{Demak, } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

(2)-formula  $M_1M_2$  kesmani  $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$  nisbatda bo'luvchi  $M(x;y)$  nuqtaning koordinatalarini aniqlash formulasidir.

$\lambda = 1$  bo'lsa,  $M$  nuqta  $M_1M_2$  kesmani teng ikkiga bo'ladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

**Masalan.** Uchlari  $A(-7;9)$  va  $B(-4;-3)$  nuqtalarda bo'lgan kesmani  $AC:CB=2$  nisbatda bo'luvchi  $C(x,y)$  nuqtaning koordinatalarini toping.

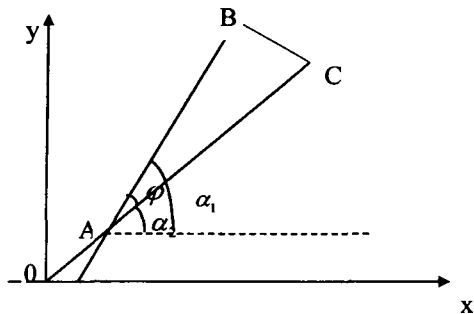
$$\text{Yechish: } \lambda = 2, \quad x = \frac{-7 + 2 \cdot (-4)}{1 + 2} = \frac{-15}{3} = -5, \quad y = \frac{9 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = 1.$$

Demak,  $C(-5;1)$ .

### Uchburchakning yuzini hisoblash

$A(x_1;y_1)$ ,  $B(x_2;y_2)$  va  $C(x_3;y_3)$  – nuqtalar ABC uchburchakning uchlari bo'lsin:





Ma'lumki,  $S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \varphi = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1}{2} AB \cdot AC (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)$ .

Lekin  $AB \sin \alpha_1 = y_2 - y_1$ ,  $AC \cos \alpha_2 = x_2 - x_1$ ,  $AC \sin \alpha_1 = y_3 - y_1$ . U holda  $\pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot [(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)]$ .

Agar  $A(x_1; y_1)$  uchburchak uchi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa, u holda  $\pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot [y_2 \cdot x_3 - y_3 \cdot x_2]$ . Bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta nuqta uchburchak tashkil etmaydi:  $S_{\Delta} = 0$ .

Demak,  $(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0$  uchta  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  va  $C(x_3; y_3)$  nuqtaning bir to'g'ri chiziqda yotishi shartini ifodalaydi.

**Masalan.** Uchlari  $A(-7; 2)$ ;  $B(5; -3)$ ;  $C(8; 1)$  nuqtalarda bo'lgan  $ABC$  uchburchakning yuzini toping.

**Yechish:**  $\pm S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot [(-3 - 2)(8 - (-7)) - (1 - 2)(5 - 2)]$ .  $S_{\Delta ABC} = 36$ .

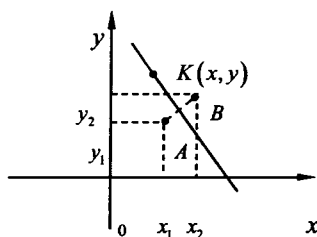
### To'g'ri chiziqning turli xil tenglamalari

**Ta'rif.**  $OXY$  dekart koordinatalari kiritilgan tekislikda yotgan egri chiziq tenglamasi deb, bu egri chiziqda yotuvchi nuqtalar koordinatalari  $x$  va  $y$  ni bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Umumiy holda egri chiziq tenglamasi  $F(x, y) = 0$  ko'rinishda, mumkin bo'lgan hollarda  $y = f(x)$  yoki  $x = \varphi(y)$  oshkor ko'rinishdagi

tengliklar orqali beriladi. Bu yerda  $F(x,y)$ ,  $f(x,y)$  va  $\varphi(y)$  funksiyalar egri chiziqni aniqlovchi qonun-qoidalarni ifoda etadilar.

Endi berilgan  $A(x_1,y_1)$  va  $B(x_2,y_2)$  nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rnini ifoda etuvchi tenglamani topaylik.



$K(x,y)$  nuqta  $A$  va  $B$  nuqtalardan bir xil masofada yotsin, u holda  $KA = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = KB$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0.$$

Bu yerda,  $2x_2 - 2x_1 = a$ ,  $2y_2 - 2y_1 = b$ ,  $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$  belgilashlarni kiritsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

bu tenglamada  $a, b, c$  lar o'zgarimas sonlardir. (1)-tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaning ayrim maxsus hollarini qaraymiz:

1) agar  $c=0$  bo'lsa,  $ax+by=0$  yoki  $y = -\frac{a}{b}x$ ,  $b \neq 0$ , ya'ni to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tadi;

2) agar  $b=0$ ,  $a \neq 0$  bo'lsa,  $x = -\frac{c}{a} = \text{const}$ , ya'ni to'g'ri chiziq  $OY$  o'qqa parallel bo'ladi;

3) agar  $a=0$ ,  $b \neq 0$  bo'lsa,  $y = -\frac{c}{b} = \text{const}$ , ya'ni to'g'ri chiziq  $OX$  o'qqa parallel bo'ladi;

4) agar  $b=0$  va  $c=0$  bo'lsa,  $x=0$ , ya'ni to'g'ri chiziq  $OY$  o'q bilan ustma-ust tushadi;

5) agar  $b \neq 0$ ,  $a=0$  va  $c=0$  bo'lsa,  $y=0$  to'g'ri chiziq  $OX$  o'qi bilan ustma-ust tushadi.

Agar (1)-tenglamada  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  va  $c \neq 0$  bo'lsa, quyidagini hosil qilamiz  $ax+by=-c \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ ,  $-\frac{c}{a} = m$ ,  $-\frac{c}{b} = n$  deb belgilasak

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini hosil qilamiz, bu yerda  $|m|$  va  $|n|$  berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlarining kesishidan hosil bo'lgan kesmalar uzunliklariga teng bo'ladi.

Agar (1)-tenglamada  $b \neq 0$  bo'lsa, uni quyidagi ko'rinishga olib kelish mumkin:  $ax+by+c=0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , bu yerda  $-\frac{a}{b} = k$ ,  $-\frac{c}{b} = d$  deb belgilash kiritib,  $y=kx+d$  ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. Tenglamadagi  $k$  koeffitsient to'g'ri chiziqning  $OX$  o'qi bilan musbat yo'nalish bo'yicha hosil qilgan  $\varphi$  burchakning tangensiga teng, ya'ni  $k = \operatorname{tg}\varphi$ .

Endi  $A(x_1, y_1)$  nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz, bunda burchak koeffitsienti  $k$  berilgan deb qaraladi. To'g'ri chiziq tenglamasini  $y=kx+d$  ko'rinishda izlaymiz, u holda  $y_1 = k \cdot x_1 + d$  tenglik o'rinli bo'ladi, ikkala tenglikni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \quad (2)$$

$A(x_1, y_1)$  va  $B(x_2, y_2)$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. (2)-tenglamaga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz:

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{yoki} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$k$  ning qiymatini (2)-tenglamaga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \text{ yoki } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

**Masalan 1.**  $M_1(2, 0)$  va  $M_2(3, 4)$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish:**  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$  formulaga ko'ra  $\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 0}{4 - 0} \Rightarrow$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y}{4}$$

**Masalan 2.**  $C(1; 1)$  nuqtadan o'tuvchi va koordinata burchagidan yuzasi 2 kv. birlik bo'lgan uchburchak ajratadigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish:** Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozib olamiz.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$   $a$  va  $b$  ni topish kerak. To'g'ri chiziq  $C(1; 1)$  nuqtadan o'tgani uchun uning koordinatalari bu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ yoki } a + b = ab.$$

Koordinata burchagidagi uchburchakning yuzi  $\pm S = \frac{1}{2}ab$  yoki  $ab = \pm 4$ . Shunday qilib, ikkita tenglamalar sistemasini yechish kerak:

$$1. \begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 4; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} a + b = -4, \\ ab = -4; \end{cases}$$

Bu sistemalarni yechib:

1)  $b = 4 - a$ ,  $a(4 - a) = 4$ ,  $a^2 - 4a + 4 = 0$ ;  $a_1 = 2$ ,  $b_1 = 2$ .

2)  $b = -4 - a$ ,  $a(4 + a) = 4$ ,  $a^2 + 4a - 4 = 0$ ;  $a_{2,3} = -2 \pm 2\sqrt{2}$ .  $a_2 = -2 + 2\sqrt{2}$ ,  $b_2 = -2 - 2\sqrt{2}$ ,  
 $a_3 = -2 - 2\sqrt{2}$ ,  $b_3 = -2 + 2\sqrt{2}$ .

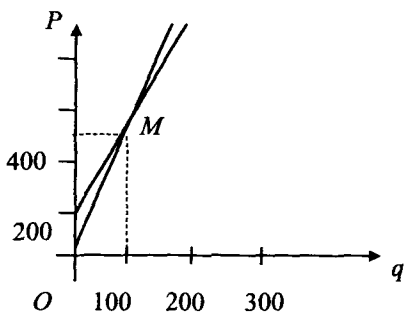
Demak, masala shartini qanoatlantiruvchi uchta to'g'ri chiziq mavjud:

$$1) \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1; \quad 2) \frac{x}{2\sqrt{2}-2} + \frac{y}{-2-2\sqrt{2}} = 1; \quad 3) \frac{x}{-2-2\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}-2} = 1.$$

**Masalan 3.** Ikki turdagi transport vositasi bilan yuk tashish xarajatlari  $P=100+4Q$  va  $P=200+3Q$  funksiyalar bilan ifodalangan. Bunda  $Q$  – yuz km lardagi masofa,  $P$  – pul birligidagi transport xarajatlari. Qaysi masofadan boshlab ikkinchi yuk tashish mashinasida birinchisiga qaraganada yuk tashish arzonga tushadi.

**Yechish:** 
$$\begin{cases} P=4Q+100 \\ P=3Q+200 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini yechib to'g'ri

chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz  $M(100; 500)$ . Rasmdan ko'rinib turibdiki  $Op$  o'q bo'yicha (xarajat narxi) qaralganda  $M$  nuqtadan yuqorida ikkinchi mashina uchun sarf-xarajat birinchi mashinanikiga qaraganada pastda joylashgan. Demak  $M(100; 500)$  dan boshlab uning yuqori qismida ikkinchi mashina xarajatlari kam bo'ladi.



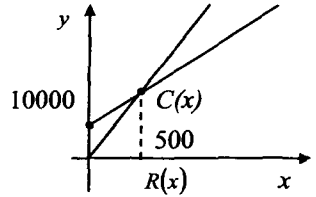
**Masalan 4.** Har oydagi o'zgarmas xarajatlar 10000 pul birligi (p.b.)ni, o'zgaruvchi xarajatlar 30 p.b.ni, bir yillik mahsulot uchun tushum 50 p.b.ni bilgan holda foyda funksiyasini tuzing va grafisini chizing.

**Yechish:**  $x$  birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun jami xarajatlar  $C(x)$  o'zgarmas  $F$  va o'zgaruvchi  $V$  xarajatlardan iboratdir.  $C(x)=F+V$ . Umumiy daromad yoki tushum:  $R(x)=p \cdot x$ . Bu yerda,  $p$  – bir yillik mahsulot narxi  $x$  – sotilgan mahsulot miqdori.

Sodda holda o'zgaruvchan xarajatlar  $x$  ishlab chiqarish mahsulot miqdoriga to'g'ri proporsional.

$$C=b+ax.$$

Bu yerda,  $b$  – o‘zgarmas xarajatlarni,  $a$  – proporsionallik koeffitsienti bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflangan o‘zgaruvchan xarajatlarni ifodalaydi.



Masala shartiga ko‘ra  $F=10000$ ,  $V=30 \cdot x$ ,  $C(x)=10000+30 \cdot x$ ,  $R(x)=50 \cdot x$

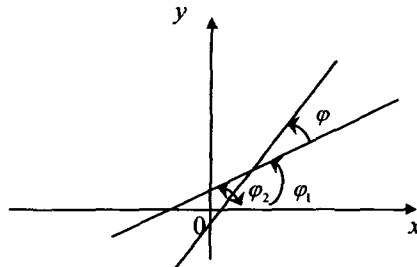
Shunday qilib, foyda:  $P(x)=R(x)-C(x)$   $P(x)=50x-30x-10000=20x-1000$   
 $x$  ning 500 dan kichik qiymatlarida, ya’ni mahsulot hajmi 50 sh.b. (shartli birlik) dan kam ishlab chiqarilsa, ishlab chiqarish zararli.

$x=500$  sh.b. hajmda foyda ham, zarar ham yo‘q.  $x$  ning 500 dan katta qiymatlarida ishlab chiqarish foydali.

### To‘g‘ri chiziqqa doir asosiy masalalar.

#### To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak

$y = k_1x + d_1$  va  $y = k_2x + d_2$  to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasi atrofida, birinchi to‘g‘ri chiziqni soat strelkasiga teskari yo‘nalishda aylantirish natijasida to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha hosil bo‘lgan burchak  $\varphi$ , ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deyiladi.



$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

Agar  $k_1 = k_2$  bo'lsa,  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ , ya'ni  $\varphi = 0$  ekanligidan, to'g'ri chiziqlarning parallel ekanligi kelib chiqadi va, aksincha, agar to'g'ri chiziqlar parallel, ya'ni  $\varphi_2 = \varphi_1$  bo'lsa,  $\operatorname{tg} \varphi = 0$  va, demak,  $k_2 = k_1$  ekanligi kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti,  $k_2 = k_1$  ekan.

Endi, agar to'g'ri chiziqlar uchun  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ , ya'ni  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  bo'lsa, u

$$\text{holda } \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \text{va} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = -1$$

ekan, demak, agar ikki to'g'ri chiziq o'zaro perpendikular bo'lsa  $k_2 \cdot k_1 = -1$  tenglik o'rinli bo'lar ekan. Aksincha, agar  $k_2 \cdot k_1 = -1$  bo'lsa, u

$$\text{holda } k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad \text{ya'ni} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right), \quad \text{demak,}$$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  bo'lar ekan, ya'ni to'g'ri chiziqlarning perpendikularlik sharti

$k_2 \cdot k_1 = -1$  tenglik orqali berilar ekan.

To'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

U holda bu to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  tenglik orqali

beriladi, ularning perpendikularlik sharti esa  $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$  tenglik bilan ifodalanadi.

Agar qaralayotgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasa,

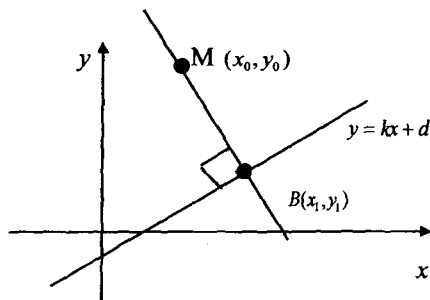
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

tenglamalar sistemasi yechimi shu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo'ladi.

## Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

Endi berilgan  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan  $ax+by+c=0$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topaylik. To'g'ri chiziq tenglamasini  $y=kx+d$  ko'rinishga keltiramiz,  $k=-\frac{a}{b}$ ,  $d=-\frac{c}{b}$ . Berilgan  $M$  nuqtadan o'tib  $y=kx+d$  to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:  $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$ . Quyidagi sistemani yechamiz,

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + d \\ y_1 - y_0 = -\frac{1}{k}(x_1 - x_0) \end{cases} \Rightarrow kx_1 + d - y_0 = -\frac{1}{k}(x_1 - x_0) \Rightarrow k^2 x_1 - ky_0 + kd = -x_1 + x_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} \Rightarrow y_1 = k \cdot \frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} + d = \frac{kx_0 + k^2 y_0 - k^2 d + k^2 d + d}{k^2 + 1} =$$
$$= \frac{kx_0 + k^2 y_0 + d}{k^2 + 1}$$



Sistema yechimi  $(x_1, y_1)$  bilan aniqlanuvchi  $B(x_1, y_1)$  nuqta va  $M(x_0, y_0)$  nuqtalar orasidagi masofani topamiz:



$$\begin{aligned}
 MB &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{kx_0 + k^2y_0 + d}{k^2 + 1}\right)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{(x_0 + ky_0 - kd - k^2x_0 - x_0)^2 + (kx_0 + k^2y_0 + d - k^2y_0 - y_0)^2}}{k^2 + 1} = \frac{\sqrt{(kx_0 + y_0 + d)^2 (k^2 + 1)}}{k^2 + 1} = \\
 &= \frac{|kx_0 - y_0 + d|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\left|-\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
 \end{aligned}$$

Demak,  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan  $ax+by+c=0$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani  $d$  deb belgilasak, ushbu

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

formulani hosil qilamiz.

**Masalan.**  $3x+y-6=0$  to'g'ri chiziq va  $A(-3; 1)$ ,  $B(3; 3)$  nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

**Yechish:**  $A(-3; 1)$  va  $B(3; 3)$  nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y = kx + b \text{ bo'lsin, u holda } \begin{cases} 1 = -3k + b \\ 3 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

Demak,  $y = -3x + 6$  va  $y = \frac{1}{3}x + 2$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni

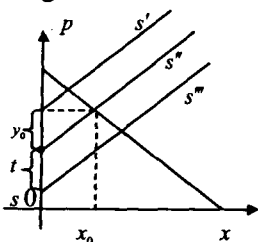
aniqlaymiz.  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - \frac{1}{3}}{1 - 1} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$  ekanligi kelib chiqadi.

### Talab va taklif qonuni

Iste'molchining bozordan sotib olmoqchi bo'lgan mahsulot miqdori shu mahsulotning narxiga bog'liq. Sotilgan mahsulot narxi va miqdori orasidagi bog'lanish talab funksiyasi yoki qonuni deyiladi.

Ishlab chiqaruvchi sotuvga chiqargan mahsulot miqdori ham shu mahsulotning narxiga bog'liq. Sotuvchi chiqarilgan mahsulot narxi va miqdori orasidagi munosabat taklif funksiyasi yoki qonuni deyiladi.

Eng sodda holda bu funksiyalar chiziqlidir.



- $D$  – talab qonuni;
- $S$  – taklif qonuni;
- $x$  – mahsulot miqdori;
- $p$  – mahsulot 1 birligining narxi.

Agar ikki xil:  $p_1, p_2$  narxlardagi ma'lum mahsulot uchun sotuv miqdori:  $x_1, x_2$  ma'lum bo'lsa, shu mahsulotga bo'lgan talabning chiziqli funksiyasini tuzish mumkin:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Talab va taklif funksiyalarining egri chiziqlari kesishgan  $(x_0; y_0)$  nuqta bozorning shu mahsulotga nisbatan muvozanat nuqtasi deyiladi.  $p_0$  – bozorning muvozanat narxi,  $x_0$  – bozorning muvozanat miqdori deyiladi.

Agar talab funksiyasi  $p(x)$  ma'lum bo'lsa, umumiy daromad  $R = xp(x)$ .

Ko'p hollarda hukumat aholi ma'lum mahsulotni imkonli narxlarda olishi uchun shu mahsulotga  $t$  soliq belgilaydi yoki shu mahsulotga  $S$  subsidiya (subsidiya – ...) e'lon qiladi.

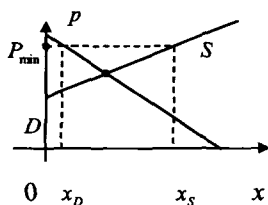
Chiziqli modellardan foydalanilganda, mahsulotning bozordagi  $P_T$  narxi shu mahsulotga bo'lgan talabni aniqlasa, taklifni esa ishlab chiqaruvchi qabul qilgan.  $P_S$  narx aniqlaydi. Bu narxlar o'zaro quyidagi munosabatda  $P_T = P_S + t, p_T = p_S - S$ .

Bu yerda,  $t$  va  $S$  – bir birlik mahsulotga belgilangan soliq va (subsidiya – ...).

Demak, soliq yoki (subsidiya – ....) kiritilishi  $D$  talabni o'zgartirmaydi, lekin taklif funksiyasi  $t$  birlik yuqoriga ( $S'$ ) yoki  $S$  birlik pastga ( $S''$ ) parallel siljiydi.

Ba'zan subsidiya o'rniga eng quyi narx miqdori kiritiladi. Bu holda hukumat  $x_s - x_D$  miqdordagi ortiqcha mahsulotni sotib oladi.

Ba'zi soliqlar, masalan QQS (qo'shimcha qiymat solig'i) narxga proporsional. Bu holda taklif funksiyasining  $Ox$  o'qi bilan kesishish nuqtasi o'zgarmasdan, uning  $Ox$  o'qqa og'ish burchagi o'zgaradi.



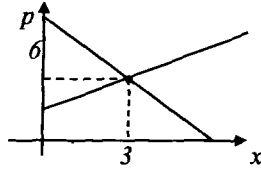
**Masalan.** Ma'lum mahsulotga bo'lgan talab va taklif qonunlari quyidagi munosabatlarda aniqlansa:  $p = -2x + 12$ ,  $p = x + 3$ .

- bozorning muvozanat nuqtasini aniqlang;
- 3 sh.b. soliq kiritilgandagi muvozanat nuqtasini aniqlang;
- mahsulot hajmi 2 marta oshishi uchun qanday subsidiya e'lon qilinishi kerak?
- 20% li proporsional soliq kiritilgandagi muvozanat nuqtani va hukumat daromadini aniqlang;
- hukumat mahsulot birligiga 7 sh.b.ga teng eng quyi narxni belgiladi. Ortiqcha mahsulotni sotib olish uchun qancha miqdordagi pul birligi kerak?

**Yechish:** a) bozorning  $M$  muvozanat nuqtasini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} p = -2x + 12 & x + 3 = -2x + 12 \\ p = x + 3 & 3x = 9, \quad x = 3, \quad p = 6 \end{cases}$$

Demak, bozorning muvozanat nuqtasi  $M(3; 6)$



b) agar  $t=3$  miqdoridagi soliq kiritilgan bo'lsa, u holda bozorning muvozanat nuqtasini topish uchun tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$D: p_T = -2x + 12. \quad S: p_S = x + 3. \quad P_T = p_S + 3.$$

Bozordagi  $p_T$  narx va ishlab chiqarishlarning  $p_S$  narxlar orasidagi munosabatdan foydalanib bozorning yangi muvozanat nuqtasi uchun

quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz: 
$$\begin{cases} p_T = -2x + 12 \\ p_S = x + 6 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, yangi muvozanat  $M'(2; 8)$  nuqtani topamiz. Demak, mahsulot birligi uni  $t=3$  miqdordagi soliq belgilansa, bozorning muvozanat narxi 2 birlik ortib, muvozanat hajmi 1 birlik kamayar ekan.

d) agar subsidiya taqdim etilgan bo'lsa, u holda bozorning muvozanat nuqtasini aniqlash uchun tenglamalar sistemasi

$$D: p_T = -2x + 12. \quad S: p_S = x + 3. \quad P_T = p_S - S.$$

Masala shartiga ko'ra yangi sotuv hajmi  $3+2=5$  birlikka teng. Sistemada  $x=5$  ni qo'yib:  $p_T = 2, p_S = 5. S = p_S - p_T = 5 - 2 = 3.$

e) agar soliq 20% ni tashkil qilsa, u holda bozor narxi 120% ni tashkil etib, bundan 100% ni mahsulot yetkazuvchilar, 20% ni davlat oladi. Demak, mahsulot yetkazuvchilar quyidagicha miqdorda olishadi:

$$p_S = \frac{100}{120}, \quad p_T = \frac{5}{6} p_T.$$

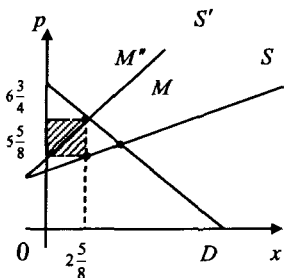
Talab funksiyasi o'zgarmasdan qoladi, taklif funksiyasi o'rniga

$p_S = \frac{5}{6} p_T$  munosabat olinadi:

$$\begin{cases} p_T = -2x + 12 \\ \frac{5}{6} p_T = x + 3 \end{cases}$$

Bu sistemani ochib,  $M^*$  yangi muvozanat nuqtani topamiz:

$$-2x + 12 = \frac{6}{5}x + \frac{18}{5}, \quad x = 2\frac{5}{8}, \quad p_T = 6\frac{3}{4}, \quad M^*\left(2\frac{5}{8}; 6\frac{3}{4}\right).$$



Ko‘rinib turibdiki, davlatning  $R$  daromadi shtrixlangan to‘rtburchakning yuziga teng miqdorga bo‘ladi.

f) agar mahsulot eng quyi narxda belgilangan bo‘lsa, talab va taklif tenglamalaridan talab va taklif hajmlarini aniqlash mumkin. Ularning orasidagi farq davlat tomonidan qoplanadi. Demak, masala shartiga ko‘ra  $p = 7$ , u holda

$$x_S = p - 3 = 7 - 3 = 4, \quad x_p = \frac{12 - p}{2} = \frac{12 - 7}{2} = 2.5.$$

Hukumatning xarajatlari esa  $(x_S - x_p) \cdot p = (4 - 2.5) \cdot 7 = 10.5$ .

## Koordinatalarni almashtirish.

### Qutb koordinatalari

Qutb koordinatalar sistemasi berilgan, agar tekislikda biror  $O$  nuqta – qutb boshi, shu nuqtadan o‘tuvchi  $OA$  to‘g‘ri chiziq – qutb o‘qi va masshtab birligi berilgan bo‘lsa. Qutb koordinatalar sistemasidagi  $M$  nuqtaning vaziyatini qutb boshidan shu nuqttagacha bo‘lgan masofa  $r = |OM|$  qutb radiusi va qutb radiusi bilan qutb o‘qi tashkil etgan burchak  $\varphi$  qutb burchagi bir qiymatni aniqlaydi. Qutb o‘qiga nisbatan soat strelkasiga teskari yo‘nalishdagi burchak musbat,

soat strelkasi bo'yicha burchak – *manfiy burchak* deyiladi. Qutb burchagi bir-biridan  $2\pi n$  ga farq qiluvchi cheksiz ko'p burchaklar qabul qiladi.  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  shartni qanoatlantiruvchi burchakka *bosh qutb burchagi* deyiladi.

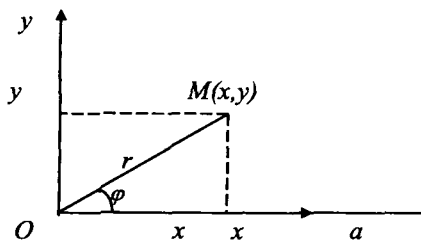
$M(r; \varphi)$  yozuvi  $r$  va  $\varphi$  qutb koordinatali  $M$  nuqtani anglatadi.

Oxy dekart sistemaning boshini  $O$  qutb sistemasining boshi bilan ustma-ust tushadigan va qutb o'qini absissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan qilib joylashtiramiz.

$M$  nuqta dekart sistemada  $x$  va  $y$  koordinatalarga, qutb sistemasida esa  $r$  va  $\varphi$  koordinatalarga ega bo'lsin. U holda  $M$  nuqtaning dekart va qutb sistemalaridagi koordinatalari quyidagicha munosabatda bo'ladi.

$x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  qutb sistemasidan dekart sistemaga o'tish formulasi,  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r < +\infty$  dekart

Sistema-dan qutb sistemasiga o'tish formulasi.

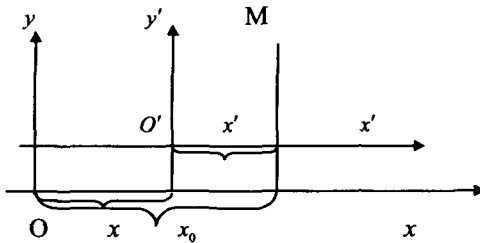


**Masalan.**  $A(-1; \sqrt{3})$  nuqtaning qutb koordinatalarini aniqlang.

**Yechish:**  $x = -1$ ,  $y = \sqrt{3}$ .  $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ .  $A(-1; \sqrt{3})$  nuqta koordinatalar sistemasining ikkinchi choragida yotgani uchun  
 $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\varphi = \frac{2\pi}{6} \cdot M\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$ .

## Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish

Ikkita dekart koordinatalar sistemasida bir xil ismli o'qlar parallel, bir xil yo'nalgan va o'qlarning har birida bir xil masshtab birligi aniqlangan bo'lsin. «Yangi» koordinatalar sistemasi «eski»sini parallel ko'chirishdan hosil qilingan bo'lib,  $(x_0; y_0)$  yangi koordinatalar sistemasining eski sistemaga nisbatan koordinatalari bo'lsin. U holda, quyidagi chizmaga ko'ra:

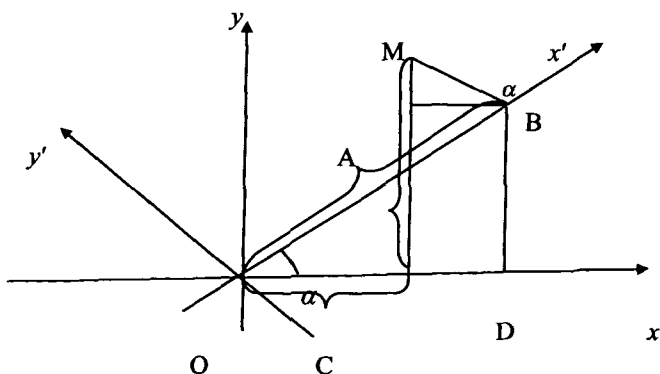


$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

(1)-tenglikdan koordinatalarni almashtirishning o'qlarni parallel ko'chirish formulasi hosil bo'ladi.

## Koordinata o'qlarini burish

Tekislikda umumiy koordinata boshi  $O$  nuqta bo'lgan  $Oxy$  (eski) koordinatalar sistemasi va bu sistemani  $\alpha$  burchakka burishdan hosil qilingan  $Ox'y'$  (yangi) koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy  $M$  nuqtaning eski koordinatalarini yangi koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqaramiz:



Bu holda, yuqoridagi chizmaga ko'ra  $OC=OD-AB$ ,  $CM=BD+MA$  bo'lganida o'qlarni burish formulalarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

### **Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning kanonik tenglamasini hosil qilish**

**Ta'rif.** Tekislikda berilgan  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan bir xil  $R$  masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni *aylana* deyiladi. Berilgan  $M(x_0, y_0)$  nuqta aylana markazi,  $R$  masofa esa aylana radiusi deb ataladi.

Markazi  $M(x_0, y_0)$  nuqtada va radiusi  $R$  ga teng bo'lgan aylana tenglamasini keltirib chiqaraylik.  $B(x, y)$  nuqta aylanada yotuvchi nuqta bo'lsin. U holda, ta'rifga ko'ra aylana tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$MB = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

(1)-tenglamada sodda almashtirishlarni bajarsak, aylana tenglamasini

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad (2)$$



ko‘rinishga olib kelish mumkin. (2)-ko‘rinishdagi tenglamadan (1)-ko‘rinishdagi tenglamaga o‘tishi uchun (2) da to‘liq kvadratlarni ajratish kerak bo‘ladi, u holda  $m^2 + n^2 - 4p > 0$  shart asosida

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{m^2 + n^2 - 4p}{4} = R^2$$

tenglamani hosil qilamiz.

**Masalan.** Quyidagi tenglama bilan berilgan aylana markazining koordinatalari va radiusini toping:  $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ .

**Yechish:** Hadlarni guruhlab, to‘la kvadrat ajratamiz:  
 $x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 11 = 0$  yoki  $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$ .  
 Bundan aylana markazi  $C(4; -3)$  va radiusi  $R = 6$  ekanligi kelib chiqadi.

**Masalan.**  $A(-4; 1)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(8; 1)$  nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

**Yechish:** (1)-formulaga ko‘ra va  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nuqtalar aylanada yotganligi uchun ularning koordinatalari bu (1)-tenglikni qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} (-4 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \\ (2 - x_0)^2 + (7 - y_0)^2 = R^2 \\ (8 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Birinchi tenglamadan ikkinchisini, keyin uchinchisini ayirib (mustaqil)  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 1$ , keyin esa bu sonlarni bironta tenglamaga qo‘yib  $R = 6$  ekanligini topamiz. Demak, aylananing umumiy tenglamasi  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 36$  bo‘ladi.

**Ta’rif.** *Ellips* deb tekislikda berilgan ikki nuqttagacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi deb avvaldan berilgan o‘zgarmas songa teng bo‘lgan barcha nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

Ta’rifdagi ikki nuqta ellipsning fokuslari deyilib, berilgan o‘zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo‘lishi kerak. Endi ta’rifdan foydalanib ellips tenglamasini hosil qilaylik. Soddalik uchun ellips fokuslari  $OX$  o‘qda, koordinata boshiga nisbatan simmetrik

joylashgan deb olamiz. Ya'ni  $F_1$  va  $F_2$  lar ellipsis fokuslari bo'lsa, ular  $F_1(-c,0)$  va  $F_2(c,0)$  ( $c > 0$ ) ko'rinishda deb olamiz.

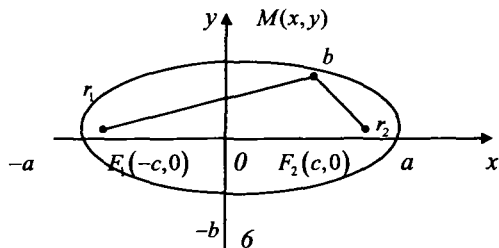
Agar ta'rifdagi o'zgarmas sonni  $2a(a > 0)$  deb olsak,  $2a > F_1F_2$ , ya'ni  $2a > 2c$  yoki  $a > c$  shart o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Agar  $M(x,y)$  nuqta ellipsda yotsa, u holda, ta'rifga ko'ra  $MF_1 + MF_2 = 2a$  tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Ya'ni

$$\begin{aligned} MF_1 + MF_2 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] &= (a^2 - cx)^2 \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \end{aligned}$$

$a > c$  bo'lgani uchun  $a^2 - c^2 = b^2$  deya olamiz, u holda ellipsning ushbu

$$\text{kanonik tenglamasini hosil qilamiz: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

(3)-tenglama bilan berilgan ellipsis koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.  $a$  va  $b$  musbat sonlar deb qaralib, ular ellipsning yarim o'qlari deyiladi. (3)-tenglamani keltirib chiqarishda  $a > b$  edi, shuning uchun uning fokuslari  $OX$  o'qida joylashgan bo'lib, fokuslar koordinata boshidan  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  masofada yotadi.  $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$  nisbat ellipsning eksentritsiteti deyiladi. Ellipsda yotgan  $M(x,y)$  nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb nomlanib, ular quyidagi tenglik orqali topiladi:  $r_1 = a - \varepsilon x$ ,  $r_2 = a + \varepsilon x$ .



Agar (3)-tenglamada  $a < b$  bo'lsa, ellips fokuslari  $OY$  o'qda joylashib,  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ,  $r_1 = b - \varepsilon y$ ,  $r_2 = b + \varepsilon y$  tengliklar o'rinli bo'ladi.

**Masalan 1.**  $9x^2 + 25y^2 = 225$  ellips berilgan. Uning yarim o'qlari, fokuslari koordinatalarini, eksentritsitetini, direktritsalari tenglamalarini toping.

**Yechish:**  $9x^2 + 25y^2 = 225$  ellips tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Bundan  $a=5$ ,  $b=3$  va o'qlari  $a > b$  bo'lganligidan  $c^2 = a^2 - b^2 = 16$ ,  $c = \pm 4$ . Fokuslari esa  $F_1 = (4; 0)$  va  $F_2 = (-4; 0)$ , eksentritsiteti  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5}$  va direktritsalari tenglamalari esa  $y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm \frac{25}{4}$  ko'rinishida bo'ladi.

**Masalan 2.** O'z harakati davomida  $x=9$  to'g'ri chiziqqa nisbatan  $A(1; 0)$  nuqtaga uch marta yaqinroq bo'lgan nuqtalarning traektoriyasini ifodalovchi chiziq tenglamasini aniqlang.

**Yechish:**  $|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ,  $|MM_1| = \sqrt{(9-x)^2}$   $M_1$  bilan  $M$  nuqtadan  $x=9$  to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asosi belgilangan. U holda  $3 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(9-x)^2}$ . Tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib,

$8x^2 + 9y^2 = 72$  yoki  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$  tenglamani hosil qilamiz, bu yerda  $a=3$ ;  $b=2\sqrt{2}$ .

**Ta'rif.** *Giperbola* deb berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ta'rifdagi ikki nuqta giperbolaning fokuslari deyilib, berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan kichik bo'lishi kerak. Giperbola tenglamasini uning fokuslari  $OX$  o'qida yotib, koordinata

boshiga nisbatan simmetrik joylashgan hol uchun hosil qilaylik. Giperbola fokuslari  $F_1, F_2$  nuqtalarda bo'lsa, biror  $c > 0$  son uchun ular  $F_1(-c, 0)$  va  $F_2(c, 0)$  koordinatalarga ega bo'ladi. Agar giperbola ta'rifidagi o'zgarmas sonni  $2a (a > 0)$  deb olsak, u holda  $2a < F_1F_2$ , ya'ni  $2a < 2c$ ,  $a < c$  bo'lishi kerak. Agar  $M(x, y)$  nuqta giperbolada yotsa, ta'rifga ko'ra  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ . Demak,

$$\begin{aligned} (MF_1 - MF_2)^2 &= 4a^2 \Rightarrow \left( \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2 \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 - \\ &- 2\sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow 2\sqrt{((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)} = \\ &= 2(x^2 + y^2) + 2(c^2 - 2a^2) \Rightarrow ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = ((x^2 + y^2) + (c^2 - 2a^2))^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 - c^2)^2 + ((x+c)^2 + (x-c)^2)y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(c^2 - 2a^2) + (c^2 - 2a^2)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-2c^2 - 2c^2 + 4a^2)x^2 + (2x^2 + 2c^2 - 2x^2 - 2c^2 + 4a^2)y^2 = (c^2 - 2a^2)^2 - c^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4(a^2 - c^2)x^2 + 4a^2y^2 = 4a^4 - 4a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = \\ &= 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \end{aligned}$$

$0 < a < c$  bo'lgani uchun  $c^2 - a^2 = b^2$  deya olamiz, natijada giperbolaning quyidagi kanonik ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

(4)-tenglama ko'rinishida berilgan giperbola koordinata o'qlari va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.  $a$  va  $b$  parametrlar musbat son bo'lib,  $a$  haqiqiy yarim o'q,  $b$  mavhum yarim o'q deb nomlanadi. Giperbola  $OX$  o'qni giperbola uchlarida deb ataluvchi  $A_1(-a, 0)$  va  $A_2(a, 0)$  nuqtalarda kesib o'tadi.  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  son fokuslardan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi.  $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$  nisbat giperbola eksentritsiteti deb nomlanadi.  $y = \frac{b}{a}x$  va  $y = -\frac{b}{a}x$  to'g'ri chiziqlar giperbola asimptotalari deyiladi. Giperbolada yotuvchi  $M(x, y)$

nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb atalib, quyidagicha topiladi:  $r_1 = |\varepsilon x - a|$ ,  $r_2 = |\varepsilon x + a|$ .

Agar (4)-tenglamada  $a=b$  bo'lsa, bunday giperbola teng tomonli giperbola deyiladi, uning tenglamasi  $x^2 - y^2 = a^2$ , asimptotalari esa  $y = \pm x$  ko'rinishda bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{va} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

o'zaro qo'shma giperbolalar deyiladi.

**Masalan 3.**  $16x^2 - 9y^2 = 144$  giperbola berilgan. Uning yarim o'qini, fokuslari koordinatalarini, eksentritsitetini, direktritsasi va asimptotalari tenglamasini toping.

**Yechish:** Berilgan giperbolaning kanonik ko'rinishdagi tenglamasini

yoziq olamiz:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$ ,  $b^2 = 16 \Rightarrow$  o'qlari  $a = 3$ ,  $b = 4$ .

$c^2 = a^2 + b^2 = 25$   $c = \pm 5$  va fokuslari  $F_1(5; 0)$  va  $F_2(-5; 0)$ ,

eksentritsiteti  $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$  bo'ladi.

Direktritsasi  $y = \pm \frac{b}{c}x = \pm \frac{4}{5}x$ , asimptotalari tenglamalari esa  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{3}x$

bo'ladi.

**Masalan 4.** Tenglamasi  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$  bo'lgan ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlari bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

**Yechish:** Masala shartiga ko'ra  $a_g = c_e$ ,  $c_g = a_e$ ,  $a_e = \sqrt{8}$ ,  $b_e = \sqrt{5}$

shuning uchun  $a_g = c_e = \sqrt{8-5} = \sqrt{3}$ ,  $b_g = \sqrt{c_e^2 - a_e^2} = \sqrt{5}$ .

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$  bo'ladi.

**Ta'rif.** Berilgan nuqta va berilgan to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni *parabola* deb aytiladi.

Ta'rifdagi nuqta parabola fokusi, to'g'ri chiziq uning direktritsasi deyiladi. Parabola tenglamasini uning fokusi  $OX$  o'qda, direktritsasi  $OY$  o'qqa parallel bo'lgan hol uchun hosil qilaylik. Parabola fokusi  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  nuqta, direktritsa tenglamasi esa  $x = -\frac{p}{2}$  bo'lsin ( $p > 0$ ). Agar  $M(x, y)$  nuqta parabolada yotsa, u holda ta'rifga ko'ra  $MF = \left|x + \frac{p}{2}\right|$  tenglik o'rinli bo'lishi kerak, ya'ni

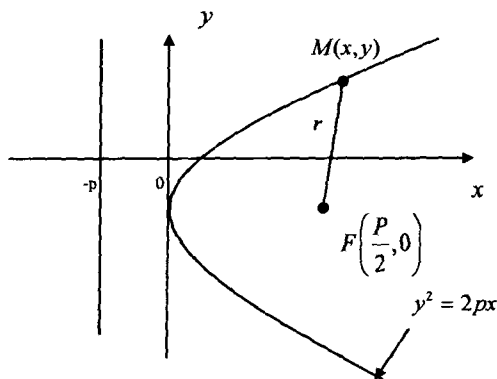
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 2px$$

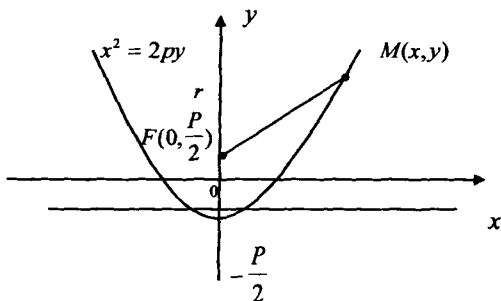
(5)-hosil bo'ladi. (5)-tenglama bilan ifodalanuvchi parabola  $OX$  o'qqa nisbatan simmetrik bo'lib,  $OX$  o'qni koordinata boshida kesib o'tadi, bu nuqta parabolaning uchi deb ataladi. Parabolaning  $M(x, y)$  nuqtasi uchun fokal radius-vektor  $r = x + \frac{p}{2}$  ko'rinishda bo'ladi. Ushbu  $x^2 = 2py$  (6)

tenglama bilan berilgan parabola fokusi  $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$  nuqtada, direktritsasi

$y = -\frac{p}{2}$  to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, parabolaning  $M(x, y)$  nuqtasi

uchun fokal radius-vektor  $r = y + \frac{p}{2}$  ko'rinishda bo'ladi.





**Masalan 5.** Uchi koordinata boshida bo'lgan parabola  $A(2; 4)$  nuqta orqali o'tadi va  $Ox$  o'qiga nisbatan simmetrik. Parabolaning tenglamasi, fokuslari va direktritsasini toping.

**Yechish:** Parabola  $O(0; 0)$  nuqtadan o'tgani  $Ox$  o'qiga simmetrik bo'lgani uchun uning tenglamasi  $y^2=2px$  ko'rinishda.  $A$  nuqtaning koordinatasini bu tenglamaga qo'yib  $4^2=2p \cdot 2$ , ya'ni  $p=4$  ekanligini topamiz. Demak, parabola tenglamasi  $y^2 = 8x$ , uning direktritsasi esa  $x=-2$ , fokusi  $F(2; 0)$ .

**Masalan 6.** Berilgan  $F(2; 0)$  nuqtadan va  $y=2$  to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rning tenglamasini tuzing.

**Yechish:**  $M(x, y)$  izlanayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda  $|MF|=MA$  yoki  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(y-2)^2}$ . Bu yerda,  $A(x, 2)$ ,  $M$  nuqtadan  $y=2$  to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikularning kesishish nuqtasi. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib  $x^2 - 4x + 4 + y^2 = y^2 - 4y + 4$  yoki  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$  parabola tenglamasini hosil qilamiz.

Agar  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar teskari proporsional, ya'ni  $y = \frac{m}{x}$  tenglik orqali bog'langan bo'lsa, sistemasi  $OXY$  koordinatalar bissektrisarini, yangi koordinatalar  $OX'Y'$  sistemasi sifatida qarasaq, bu tenglama  $(x')^2 - (y')^2 = m$  ko'rinishga keladi, bundan esa asimptotalari

$OX$  va  $OY$  o'qlardan iborat bo'lgan teng tomonli giperbola ekanligi kelib chiqadi. Agar  $m > 0$  bo'lsa giperbola I va III choraklarda, agar  $m < 0$  bo'lsa II va IV choraklarda joylashgan bo'ladi.

Endi kasr-chiziqli funksiyani qaraylik:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Bu yerda,  $c \neq 0$  va  $ad - bc \neq 0$  deb olinadi. Kasr-chiziqli funksiya grafigi asimptotalari  $x = -\frac{d}{c}$  va  $y = \frac{a}{b}$  bo'lgan teng tomonli giperbola bo'ladi.

### **Ikkinchi tartibli chiziqlar klassifikatsiyasi**

**Ta'rif.** Berilgan dekart koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziq *ikkinchi tartibli egri chiziq* deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

Aylana, ellips, giperbola va paraboladan boshqa ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziqlar mavjudmi? Koefitsientlarning qiymatiga bog'liq ikkinchi tartibli  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  tenglama umumiy holda aylanani, ellipsni, giperbolani, parabolani, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini, parallel to'g'ri chiziqlar juftini, ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar juftini, nuqtani aniqlashi va hech qanday chiziqni aniqlamasligi ham mumkin.

Nuqtaning bir koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini bilgan holda uning ikkinchi sistemadagi koordinatalarini aniqlash muhim hisoblanadi. Nuqtaning bir koordinatalar sistemasidagi



koordinatalarini uning ikkinchi sistemadagi koordinatalari orqali ifodalovchi formulalar koordinatalarni almashtirish formulari deyiladi.

Koeffitsientlarning berilgan qiymatlaridagi  $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$  tenglama qanday chiziqni aniqlashini bilish uchun koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish kabi almashtirishlardan foydalaniladi.

Tekislikda  $x$  va  $y$  «eski» koordinatalar sistemasiga nisbatan  $x'$  va  $y'$  «yangi» koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. «Eski» va «yangi» koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanishni topish muhimdir.

Koordinatalarni almashtirish mavzusidan ma'lumki

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

bog'lanish koordinatalar o'qlarini parallel ko'chirishni ifodalaydi.

Tekislikda umumiy koordinata boshi  $O$  nuqta bo'lgan  $Oxy$  (eski) koordinatalar sistemasi va bu sistemani  $\alpha$  burchakka burishdan hosil qilingan  $Ox'y'$  (yangi) koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy  $M$  nuqtaning eski koordinatalarini yangi koordinatalari orqali ifodalovchi

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

bog'lanish o'qlarni burish formulalarini anglatadi.

### **Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish**

Asosiy masala – koordinata o'qlarini almashtirish yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1)ni sodda ko'rinishga keltirib, qanday chiziqni ifodalashini aniqlashdir.

1. Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini soddalashtirishga harakat qilamiz.  $O(0;0)$  koordinatalar boshini

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (2)$$

formular yordamida  $O(x'; y')$  nuqtaga ko'chiramiz:

$$A(x' + x_0)^2 + 2B(x' + x_0)(y' + y_0) + C(y' + y_0)^2 + 2D(x' + x_0) + 2E(y' + y_0) + F = 0.$$

Qavslarni ochib va o'xshash hadlarni birlashtirib:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2x'(Ax_0 + By_0 + D) + 2y'(Bx_0 + Cy_0 + E) + F_1 = 0 \quad (3)$$

bunda  $F_1 = x_0(Ax_0 + By_0 + D) + y_0(Bx_0 + Cy_0 + E) + Dx_0 + Ey_0 + F$ .

$x_0$  va  $y_0$  koeffitsientlarni shunday tanlaymizki, quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad (4)$$

U holda (3)-tenglama quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0, \quad F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F. \quad (5)$$

Demak, koordinata o'qlarini parallel ko'chirishda (1)-umumiy tenglama joriy koordinatalarning birinchi darajalari qatnashgan hadlaridan ozod bo'ladi.

(4)-sistemani yechishda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1.  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$ . Bu holda sistema yagona

$$x_0 = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$$

yechilmga ega bo'lib,  $O(x_0; y_0)$  egri chiziqning markazi, egri chiziq esa markazga ega egri chiziq deyiladi. Aylana, ellips va giperbola markazga ega ikkinchi tartibli egri chiziqlardir.

Agar  $\Delta > 0$  bo'lsa, egri chiziq yoki aylanani, yoki ellipsni, yoki nuqtani (aynigan ellips), yoki mavhum ellipsni (bu holda tenglama hech qanday geometrik shaklni ifodalamaydi) ifodalaydi.

Agar  $\Delta < 0$  bo'lsa, egri chiziq yoki giperbolani, yoki aynigan giperbolani (kesishuvchi egri chiziqlar juftini) aniqlaydi.

Kanonik tenglamada koordinatalar ko'paytmasi qatnashmagani uchun, (5)-tenglamadagi bu hadni koordinata o'qlarini burish yordamida bartaraf etamiz:

$$\begin{cases} x' = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ y' = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha \end{cases}$$

$\alpha$  burchakka burish formulasini (5)-tenglamaga qo'yib:

$$A_1\bar{x}^2 + 2B_1\bar{x}\bar{y} + C_1\bar{y}^2 + F_1 = 0,$$

$$A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$

bunda  $B_1 = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$

$$C_1 = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha.$$

$\alpha$  burchakni shunday tanlaymizki, bunda  $B_1$  koeffitsient nolga aylansin, ya'ni  $(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$  (6)

yoki  $B\cos^2\alpha - (C - A)\sin\alpha\cos\alpha - B\sin^2\alpha = 0$  munosabat bajarilsin. Bu tenglamani yechib burish burchagi aniqlanadi.

Yangi koordinatalar sistemasida (1)-tenglama kanonik ko'rinishni oladi:

$$A_1\bar{x}^2 + C_1\bar{y}^2 + F_1 = 0 \quad (7)$$

O'qlarni har qanday burishda ikkinchi darajali noma'lumlar oldidagi  $A, B, C$  koeffitsientlar umumiy holda o'zgarsa ham,  $AC - B^2$  ifoda invariantdir (o'zgar olmaydi). (7)-tenglamada  $x'y'$  ifoda yo'qligi uchun, ya'ni  $B_1 = 0$  bo'lgani uchun  $A_1C_1 (= A_1C_1 - B_1^2) = AC - B^2$ ,  $A_1 + C_1 = A + C$  bo'lib,  $A_1$  va  $C_1$  koeffitsientlarni koordinatalarni almashtirmasdan topish imkonini beradi.

**Masalan.**  $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$  tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring va chizing.

**Yechish:** Tenglama koeffitsientlarini yozing:

$$A=5, B=4, C=5, D=-9, E=-9, F=9.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 25 - 16 = 9 > 0, \text{ u holda chiziq ellipsni ifodalaydi.}$$

Chiziq markazini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 5x_0 + 4y_0 - 9 = 0 \\ 4x_0 + 5y_0 - 9 = 0, \end{cases} \Delta = 9 > 0, \Delta_x = 9, \Delta_y = 9. x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.$$

Koordinatalar boshini  $O'(1;1)$  nuqtaga ko'chirqamiz:  $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$

Bu holda egri chiziq tenglamasi  $5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 - 9 = 0$  ko'rinishini oladi.

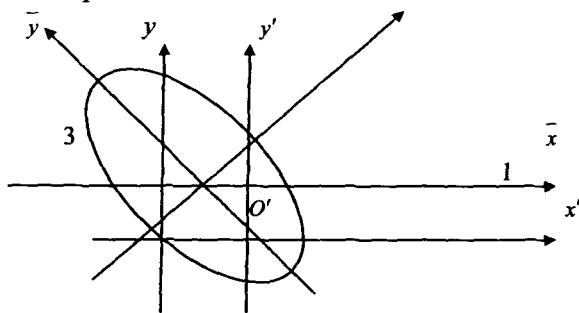
Koordinata o'qlarini  $\alpha$  burchakka buramiz. Burish burchagi  $\alpha$  ni (6)-formula bo'yicha  $4tg^2\alpha - 4 = 0, tg\alpha = \pm 1$  tenglamadan aniqlaymiz.

Yechim uchun  $tg\alpha = 1, \alpha = 45^\circ$  bo'lgan holni qaraylik. Bu holda

koordinatalar  $\bar{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \bar{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$  munosabat bilan bog'lanib,

tenglama  $9\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 9$  yoki  $\frac{\bar{x}^2}{1} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1$  ellipsning kanonik

tenglamasini hosil qiladi.



2.  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0$ . Bunda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

a) (4)-sistema yechimga ega emas, egri chiziq markazga ega emas. Bu holda egri chiziq tenglamasini soddalashtirishni koordinata o'qlarini burishdan boshlash qulay bo'ladi va doim parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi.

b) (4)-sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Bu holda egri chiziq aynigan parabola (parallel to'g'ri chiziqlar jufti yoki mavhum nuqta)ni ifodalaydi.

**Masalan.**  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$  tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring va grafigini chizing.

**Yechish:**  $A=9, B=-12, C=16, D=-10, E=55, F=-50$ .

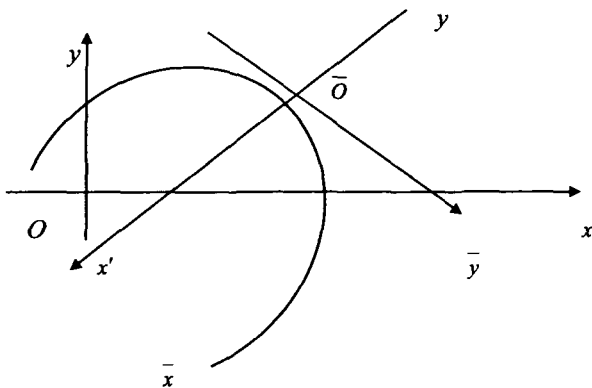
$\Delta = AC - B^2 = 144 - 144 = 0$  demak, bu chiziq parabolani ifodalaydi va shuning uchun soddalashtirishni koordinatalar o'qini burishdan boshlash qulay bo'ladi. (6)-formulani berilgan tenglamaga qo'llab va  $x'y'$  had oldidagi koeffitsientni nolga tenglab quyidagiga ega bo'lamiz:  $12tg^2\alpha + 7tg\alpha - 12 = 0$ .

Bu tenglamani yechib:  $tg\alpha_1 = 0,75$  ( $\sin\alpha_1 = 0,6; \cos\alpha_1 = 0,8$ );

$$tg\alpha_2 = -\frac{4}{3} \quad (\sin\alpha_2 = -0,8; \cos\alpha_2 = 0,6).$$

$x'^2, y'^2, x', y'$  noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni hisoblab, yangi sistemada berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y'^2 - 4y' - 2x' - 2 = 0 \quad (y' - 2)^2 - 2(x' + 3) = 0.$$



## 2. Oliy algebra elementlari

### Matritsalar va ular ustida amallar

**Ta'rif.** O'lchamlari  $m \times n$  bo'lgan matritsa deb, satrlar soni  $m$  ga, ustunlar soni  $n$  ga teng bo'lgan,  $m \cdot n$  ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari  $A, B, C$  va h.k.lar bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning  $i$  satri va  $j$  ustuni kesishmasida joylashgan elementi  $a_{ij}$  ko'rinishida yoziladi. Matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoki qisqacha  $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalarini ifodalashda  $\| \cdot \|$  yoki  $[ \cdot ]$  belgilardan ham foydalaniladi.

Birgina satrdan yoki birgina ustundan iborat matritsa vektor-satr yoki vektor-ustun deb nomlanadi, ya'ni

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \text{ vektor-satr, } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ vektor-ustun.}$$

Matritsa o'lchami  $(n \times n)$  bo'lsa, ya'ni satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deyiladi. Kvadrat matritsaning  $a_{ii}, i = \overline{1, n}$  ko'rinishdagi elementlari uning diagonal elementlari deb atalib, ular matritsaning diagonalini tashkil etadi deyiladi. Agar kvadrat matritsa uchun  $i \neq j$  bo'lganda  $a_{ij} = 0$

bo'lsa, bunday matritsa *diagonal matritsa* deyiladi. Agar diagonal matritsada barcha  $i = \overline{1, n}$  lar uchun  $a_{ii} = 1$  bo'lsa, bunday matritsa *birlik matritsa* deb ataladi va  $E$  bilan belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 1 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning barcha elementlari, ya'ni istalgan  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$  uchun  $a_{ij} = 0$  bo'lsa, u holda bunday matritsa 0 ko'rinishda ifodalanadi va *nol-matritsa* deyiladi.

Endi matritsalar ustida bajariladigan amallarni kiritamiz.

**Ta'rif.**  $A = (a_{ij})$  matritsaning  $\lambda$  songa ko'paytmasi deb shunday  $C$  matritsa tushuniladiki, bunda  $C$  matritsa elementlari  $c_{ij}$  ushbu  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$  tenglik orqali aniqlanadi.

Xususan istalgan  $A$  matritsa uchun  $0 \cdot A = 0$  bo'ladi.

**Ta'rif.** Bir xil  $m \times n$  o'lchamli  $A = (a_{ij})$  va  $B = (b_{ij})$  matritsalar uchun ularning yig'indisi deb shunday  $m \times n$  o'lchamli  $C = (c_{ij})$  matritsaga aytiladiki, istalgan  $i = \overline{1, n}$  va  $j = \overline{1, m}$  lar uchun  $c_{ij}$  element,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig'indisi  $A+B$  shaklda belgilanadi, ya'ni  $C=A+B$ .

$A$  matritsaning  $B$  matritsaga ko'paytmasini aniqlashda,  $A$  matritsaning ustunlar soni  $B$  matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi talab etiladi. Ya'ni  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times k}$  bo'lishi kerak.

**Ta'rif.**  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  va  $B = (b_{ij})_{n \times k}$  matritsalar ko'paytmasi deb, o'lchami  $m \times k$  bo'lgan shunday  $C = (c_{ij})_{m \times k}$  matritsaga aytiladiki, uning  $c_{ij}$  elementi

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko'paytmasi  $A \cdot B$  ko'rinishda ifodalanadi, ya'ni  $C = A \cdot B$ .

Yuqorida kiritilgan matritsalar ustidagi amallar uchun quyidagi xossalarni o'rinli bo'lib, bu xossalarning isboti, ularga mos xossalarning sonlar ustida o'rinli ekanligidan kelib chiqadi. Bu isbotlarni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

1. Matritsalar qo'shish amali uchun kommutativlik – o'rin almashtirish xossasi o'rinli, ya'ni

$$A + B = B + A;$$

2. Matritsalar qo'shish amali uchun assotsiativlik – guruhlash xossasi o'rinli, ya'ni

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

3. Matritsalar songa ko'paytirishda qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli, ya'ni

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B;$$

4. Matritsalar ko'paytirish amalida qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli, ya'ni  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  yoki  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ;

5. Matritsalar songa ko'paytirish va matritsalar matritsaga ko'paytirish orasida quyidagi xossa o'rinli, ya'ni

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B);$$

6. Matritsalar ko'paytirish amali uchun guruhlash xossasi o'rinlidir, ya'ni

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki,  $A \cdot B$  ko'paytma mavjud ekanligidan  $B \cdot A$  ning mavjud ekanligi kelib chiqmaydi, sababi  $A \cdot B$  ko'paytmani aniqlashda  $A$  matritsaning ustunlar soni  $B$  matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi kerak, bunda  $B$  matritsaning ustunlar soni  $A$  matritsaning satrlar soniga teng bo'lmasligi ham mumkin, shuning uchun  $B \cdot A$  ko'paytmani har doim aniqlab bo'lmas ekan.



Masalan:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

matritsalar uchun  $A \cdot B$  ni aniqlash mumkin, lekin  $B \cdot A$  ni aniqlab bo'lmaydi.

Yana shuni ta'kidlash kerakki,  $A \cdot B$  va  $B \cdot A$  ko'paytmalar mavjud bo'lgan taqdirda ham  $A \cdot B = B \cdot A$  tenglik o'rinli bo'lmayligi mumkin.

Masalan:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

matritsalar uchun  $A \cdot B$  ko'paytma matritsaning o'lchami  $3 \times 3$  bo'lsa,  $B \cdot A$  uchun esa  $2 \times 2$ . Demak, tabiiy ravishda  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Endi  $A$   $n$ -tartibli kvadrat matritsa bo'lsin. U holda  $A \cdot E = E \cdot A = A$  va  $O \cdot A = A \cdot O = O$  munosabatlar o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas.

Natural  $k$  son uchun quyidagi tenglik orqali

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-marta}}$$

$A$  matritsaning « $k$ -darajasi»ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda  $A^0 = E$  va  $A^1 = A$  deb qabul qilinadi.

Agar  $A$  matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa  $A$  matritsaning transponirlangani deb nomlanib,

$A'$  (yoki  $A^T$ ) shaklda belgilanadi. Masalan,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$  bo'lsa,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

$A$  matritsani  $A'$  ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

1.  $(A')' = A$
2.  $(\lambda A)' = \lambda \cdot A'$
1.  $(A+B)' = A'+B'$
4.  $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$

Bu xossalarning isbotini o'quvchiga havola qilamiz.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, agar  $A$  matritsaning o'lchami  $m \times n$  bo'lsa, u holda transponirlangan matritsaning o'lchami  $n \times m$  bo'ladi.

**Masalan 1.** Matritsalarining ko'paytmasini aniqlang:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Yechish:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 0 & 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ -1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 19 & 2 \\ 16 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

**Masalan 2.** Telefon apparatlarini ta'mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% ni o'rta darajada va 10% ni to'liq ta'mirdan chiqardi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra 70% past darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% ni past darajada, 60% ni o'rta darajada, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. O'rta darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% ni past darajada, 50% ni o'rta, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. To'liq ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% ni past darajada, 40% ni o'rta darajada ta'mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 yillardan keyingi har bir darajada ta'mirlangan telefonlar ulushini aniqlang.

**Yechish:**  $X_0 = (0,7 \quad 0,2 \quad 0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = X_0 \times A = (0,17 \quad 0,56 \quad 0,27)$$

$$X_2 = X_1 \times A = (0,291 \quad 0,490 \quad 0,219)$$

$$X_3 = X_2 \times A = (0,2585 \quad 0,5072 \quad 0,2343)$$

## Determinantlar

Matematika va uning tatbiqlarida, xususan iqtisoddagi tatbiqlarida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga to'g'ri keladi. Bunday sistemalarni yechishda, ular bilan bog'liq bo'lgan kvadrat matritsalarini xarakterlash uchun determinant deb nomlanuvchi son mos qo'yiladi. Bu son  $|A|$  yoki  $\det(A)$  shaklida ifoda etiladi. Kvadrat matritsa determinantini, uning tartibi  $N$  bo'yicha induksiya metodi orqali ta'riflaymiz.

**Ta'rif.** O'lchamlari  $m \times n$  bo'lgan matritsa deb, satrlar soni  $m$  ga, ustunlar soni  $n$  ga teng bo'lgan,  $m \cdot n$  ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari  $A, B, C$  va h.k.lar bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning  $i$ -satri va  $j$ -ustuni kesishmasida joylashgan elementi  $a_{ij}$  ko'rinishda yoziladi. Matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoki qisqacha  $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalarini ifodalashda  $\| \cdot \|$  yoki  $[ \cdot ]$  belgilardan ham foydalaniladi.

$n = 1$  bo'lsin:  $A = (a_{11})$ .  $A$  matritsaning determinanti deb  $|A| = a_{11}$  sonini olamiz.  $n - 1$  tartibli determinant aniqlangan bo'lsin deb faraz qilamiz.

**Ta'rif.**  $n$ -tartibli  $A=(a_{ij})$  matritsa  $a_{ij}$  elementining  $M_{ij}$  minori deb,  $A$  matritsaning  $i$ -satri va  $j$ -ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan  $(n-1)$  tartibli matritsa determinantiga aytiladi.

**Ta'rif.**  $n$ -tartibli  $A=(a_{ij})$  matritsa  $a_{ij}$  elementining algebraik to'ldiruvchisi  $A_{ij}$  deb quyidagi songa aytiladi:  $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$ .

Yig'indi  $\sum_{x=1}^n a_{ix} A_{ix}$   $i$ -satr bo'yicha yoyilma,  $\sum_{k=1}^n a_{ky} A_{ky}$  yig'indi esa  $j$ -ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

**Ta'rif.**  $\sum_{i=1}^n a_{iy} A_{iy}$  yig'indi  $i$ -satr bo'yicha yoyilma,  $\sum_{k=1}^n a_{ky} A_{ky}$  yig'indi esa  $j$ -ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

**Ta'rif.**  $n$ -tartibli kvadrat  $A=(a_{ij})$  matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} \quad (1)$$

Bu ta'rifdan foydalanib 2- va 3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:  $n=2$  bo'lsin:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

$A$  matritsaning determinanti deb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \text{ sonini olamiz.}$$

O'ng tomondagi qo'shiluvchilarning ishorasini ushbu sxema asosida aniqlash qulay:



**Masalan.** Determinantni hisoblang:  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

**Yechish:**  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2.$

$$n = 3 \text{ bo'lsin: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. A \text{ matritsaning determinanti deb}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

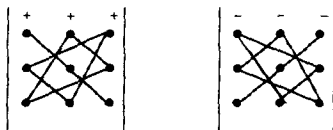
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

sonni olamiz.

O'ng tomondagi qo'shiluvchilarning ishorasini ushbu sxema asosida aniqlash qulay:



Uchinchi tartibli determinantni bu usulda hisoblash odatda *uchburchak usulida hisoblash* deyiladi.

Uchinchi tartibli determinantni Sarrius qoidasi (elementlarni parallel ko'chirish usuli)da ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \text{ustunlar bo'yicha ko'chirish.}$$

$$\begin{array}{l}
 + \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| - \\
 + \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \right| - \\
 + \left| \begin{array}{ccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 + a_{31} a_{32} a_{33} - \\
 + a_{21} a_{22} a_{23} - \\
 + \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|
 \end{array}$$

– satrlar bo‘yicha ko‘chirish.

**Masalan.** Determinantni hisoblang:  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .

**Yechish:**  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 8 - 8 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -17$ .

**Teorema (Laplas teoremasi).** Istalgan  $i$  va  $j$  lar uchun

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = |A| \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Determinantning barcha yoyilmalari uning determinantiga teng bo‘lar ekan.

**1-xossa.** Agar  $A$  matritsaning biron-bir satrdagi (ustundagi) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo‘ladi.

Haqiqatan ham, agar matritsaning  $i$ -satri elementlari  $a_{ik} = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$  bo‘lsa, (1-tenglikdan  $|A| = 0$  ekanligi kelib chiqadi. Agar matritsaning  $j$ -ustun elementlari  $a_{kj} = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$  bo‘lsa, Laplas teoremasidan, ya’ni (2)-tenglikdan  $|A| = 0$  ekanligi kelib chiqadi.

**2-xossa.** Agar  $A$  matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi  $\lambda$  soniga ko‘paytirilsa, determinant qiymati ham  $\lambda$  soniga ko‘payadi, ya’ni  $\lambda \cdot |A|$  ga teng bo‘ladi. Bu xossaning isboti (1)-tenglikdan to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi, chunki

$$\sum_{k=1}^n (\lambda \cdot a_{ik}) \cdot A_{ik} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \lambda \cdot |A|.$$

Xossaning ustun holidayi isboti, Laplas teoremasidan, ya'ni (2)-tenglikdan kelib chiqadi.

**3-xossa.**  $A$  matritsa va uning transponirlangani  $A'$  matritsalarining determinantlari teng bo'ladi, ya'ni  $|A| = |A'|$  tenglik o'rinlidir.

Bu xossaning isboti to'g'ridan to'g'ri Laplas teoremasidan, ya'ni (2)-tenglikdan kelib chiqadi. Chunki transponirlangan  $A'$  matritsa uchun (1)-tenglikni, ya'ni satr bo'yicha yoyilmasini qarajak, bu yoyilma  $A$  matritsa uchun ustun bo'yicha yoyilmadan iborat bo'ladi, u holda (2)-tenglikdan  $|A|$  ga tengligi kelib chiqadi. Demak  $|A'| = |A|$  ekan.

**4-xossa.** Agar  $A$  matritsaning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, hosil bo'lgan yangi  $A_1$  matritsaning determinanti  $A$  matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo'ladi, ya'ni  $|A_1| = -|A|$  tenglik o'rinli bo'ladi.

$A_1$  matritsa  $A$  matritsaning  $i$ - va  $i+1$  satrlari o'rnini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, agar  $A_1$  matritsaning  $i+1$  satri bo'yicha yoyilmasini qarajak, ya'ni

$$|A_1| = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+1+k} M_{ik} = - \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik} = -|A|$$

ekani kelib chiqadi. Demak, bu holda 4-xossa isbot bo'ldi.

Endi  $A_1$  matritsa  $A$  matritsadan  $i$  va  $j$ -satrlarining ( $i < j$ ) o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, u holda bu almashtirishni ketma-ket keluvchi satrlar o'rnini almashtirish orqali ifodalash mumkin bo'ladi. Aytaylik  $j = i + m$  ko'rinishda bo'lsin.

$i, i+1, i+2, \dots, i+m-1, i+m$  satrlar joylashuvidan  $i+m, i+1, i+2, \dots, i+m-1, i$  satrlar joylashuviga o'tish kerak, buni quyidagicha bajarish mumkin.

$i, i+1, i+2, \dots, i+m-1, i+m \rightarrow i+1, i, i+2, \dots, i+m-1, i+m \rightarrow \dots \rightarrow i+1, i+2, \dots, i+m-1, i+m, i$

bu o'tishlar soni  $m$  ga teng, so'ngra

$i+1, i+2, \dots, i+m, i+m-1, i \rightarrow \dots, i+m, i+1, i+2, \dots, i+m-2, i+m-1, i$  - bu o'tishlar soni  $m-1$  ga teng.

Demak, jami  $m+m-1=2m-1$  qadamli o'tishlar bor ekan va  $A$  matritsa determinanti o'z ishorasini toq marta o'zgartirar ekan, u holda  $|A_i| = -|A|$  bo'ladi.

**5-xossa.** Agar  $A$  matritsa bir xil ikki satr (ustun)ga ega bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng  $|A|=0$  bo'ladi.

Chunki, agar  $A$  matritsaning  $i$  va  $j$ -satrlari bir xil bo'lsa, u holda ularning o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa  $A_1$  uchun  $A_1 = A$  va  $|A_1| = -|A|$  bo'lishi kerak, ya'ni  $|A| = -|A|$ , bundan esa  $|A|=0$  ekanligi kelib chiqadi.

**6-xossa.** Agar  $A$  matritsada ikki satr (ustun)ning mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya'ni  $|A|=0$  bo'ladi.

Faraz qilaylik,  $A$  matritsaning  $i$ -satri mos elementlari  $j$ -satrning mos elementlariga proporsional bo'lsin, ya'ni

$$a_{ik} = \lambda a_{jk}, \quad k = \overline{1, n} \quad (3)$$

tengliklar o'rinli bo'lsin, ( $\lambda$  - proporsional koeffitsienti), u holda, agar  $A_1$  matritsani  $A$  matritsaning  $j$ -satri elementlarini uning  $i$ -satri elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa deb qarash, u holda (3)-tenglik va 2-xossaga ko'ra  $|A| = \lambda \cdot |A_1|$  ekanligi kelib chiqadi. 5-xossaga ko'ra  $|A_1|=0$  bo'ladi, demak  $|A|=0$  ekan.

**7-xossa.** Agar  $A$  matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$



Agar  $A$  – matritsaning  $j$ -satr elementlarini uning  $i$ -satr elementlari bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsani  $A_i$  desak, 5-xossaga ko‘ra  $|A_i| = 0$  bo‘ladi. Agar  $A_i$  matritsaning  $j$ -satri bo‘yicha yoyilmasini olsak, determinantning ta‘rifiga ko‘ra  $|A_i| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$  ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda, 7-xossa va Laplas teoremasiga ko‘ra quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (4)$$

**8-xossa.**  $A$  matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko‘paytirib, boshqasiga qo‘shishdan hosil bo‘lgan  $A_i$  matritsaning determinanti  $A$  matritsa determinantiga teng bo‘ladi, ya‘ni  $|A_i| = |A|$ .

Ushbu matritsalar berilgan bo‘lsin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} + \lambda a_{j1} & a_{12} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{1n} + \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

U holda (4)-tenglikdan,

$$|A_i| = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + \lambda a_{jk}) A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} + \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = |A|,$$

ya‘ni 8-xossaning isboti kelib chiqadi.

**9-xossa.**  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sonlarni  $n$ -tartibli  $A$  matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmasining yig‘indisi,  $A$  matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo‘ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bunda  $|B| = \sum_{k=1}^n b_k A_{ik}$  tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Quyidagi xossani isbotsiz keltiramiz.

**10-xossa.**  $n$ -tartibli kvadrat  $A$  va  $B$  matritsalar uchun  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$  tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni matritsalar ko‘paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Har qanday determinant ixtiyoriy satri (ustuni) elementlarining mos algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisidan iborat, ya’ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

**Masalan.** Berilgan determinantni to‘rtinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

**Yechish:** 1) To‘rtinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib yechamiz:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41} + a_{42}M_{42} - a_{43}M_{43} + a_{44}M_{44} = \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546 \end{aligned}$$

2) Uchunchi ustun elementlarini nolga aylantirish usuli bilan hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40 + 12) + 7(68 + 18) = 546 \end{aligned}$$

## Teskari matritsa

**Ta'rif.**  $A$  kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday  $A^{-1}$  matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$  tenglik o'rinli bo'lsin.

**Ta'rif.** Agar  $A$  matritsa uchun  $|A| \neq 0$  bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, aks holda, ya'ni  $|A| = 0$  bo'lsa, xos matritsa deyiladi.

**Teorema.**  $A$  kvadrat matritsaga teskari  $A^{-1}$  matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Zarurligi.** Agar  $A$  matritsa uchun unga teskari  $A^{-1}$  matritsa mavjud bo'lsa, u holda  $A \cdot A^{-1} = E$  tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan matritsalar ko'paytmasining determinanti har bir matritsa determinantlari ko'paytmasiga tengligi xossasiga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1, \quad (1)$$

demak,  $|A| \neq 0$  bo'lar ekan.

**Yetarliligi.**  $A$  matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'lsin, ya'ni  $|A| \neq 0$ . U holda, matritsalarini o'zaro ko'paytirish va matritsani songa ko'paytirish qoidasiga ko'ra,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{jk} & \dots & A_{nk} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi teskari matritsaning yagona ekanligini ko'rsatamiz. Agar  $B$  matritsa  $A$  matritsa uchun teskari matritsa bo'lsa,  $B = A^{-1}$  ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot A^{-1}) = (B \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}.$$

Demak,  $B = A^{-1}$  ekan. (1)-tenglikdan  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$  ekanligi kelib chiqadi.

**Masalan.** Berilgan matritsaga teskari matritsani

$$\text{toping: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Yechish: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33 \quad \text{va}$$

$$A_{11} = -16, A_{12} = 9, A_{13} = 31$$

$$A_{21} = 9, A_{22} = -3, A_{23} = -3$$

$$A_{31} = 11, A_{32} = 0, A_{33} = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Tekshirib ko'ramiz:**

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16+27+22 & -32-45+77 & -16+27-11 \\ 9-9+0 & 18+15+0 & 9-9+0 \\ 31-9-22 & 62+15-77 & 31-9+11 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

### Matritsa rangi

O'lchami  $m \times n$  bo'lgan  $A$  matritsa berilgan bo'lsin.  $k = \min\{m, n\}$  deb olsak,  $A$  matritsada satr yoki ustunlarni o'chirish natijasida tartibi  $k$  dan oshmaydigan bir nechta kvadrat matritsalarini hosil qilishimiz mumkin. Mana shu kvadrat matritsalarining determinantlari berilgan  $A$  matritsaning minorlari deb aytiladi.

**Ta'rif.**  $A$  matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib,  $r(A)$  orqali belgilanadi.

Bu ta'rifdan, agar  $A \neq 0$  va  $A$  matritsa o'lchami  $m \times n$  bo'lsa, u holda  $r(A) \leq \min\{m, n\}$  bo'lar ekan.

**Ta'rif.** Matritsa ustidagi elementar almashtirish deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1. Barcha elementlari noldan iborat satr (ustun)ni tashlab yuborish.
2. Satr (ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
5. Matritsani transponirlash.

**Teorema.** Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Bu teorema isboti yuqorida keltirilgan determinantlar xossalaridan kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, matritsa rangi uchun quyidagi xossalar o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

$$1. r(A+B) \leq r(A) + r(B) \qquad 2. r(A+B) \geq |r(A) - r(B)|$$

$$3. r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\} \qquad 4. r(A'A) = r(A)$$

5. Agar  $A$  va  $B$  lar kvadrat matritsalar bo'lib,  $|B| \neq 0$  bo'lsa, u holda  $r(AB) = r(A)$  bo'ladi.

$A = (a_{ij}) \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$  bo'lsin, uning satrlaridan quyidagi satr-vektorlarni hosil qilamiz.

$$I_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad I_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, I_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

Berilgan  $I_1, I_2, \dots, I_m$  satrlar chiziqli bog'liq deyiladi, agarda shunday  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  sonlar mavjud bo'lsa, ulardan birontasi noldan farqli bo'lib,  $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \dots + \lambda_m I_m = 0$  tenglik o'rinli bo'lsa, bu yerda  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  xos vektor, aks holda ular *chiziqli-erkli satrlar* deyiladi.

Demak, agar berilgan satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda biron-bir satr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Aytaylik  $\lambda_m \neq 0$  bo'lsa, u holda  $I_m - m$  satr qolganlarining chiziqli

kombinatsiyasi, ya'ni  $I_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} I_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} I_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} I_{m-1}$  bo'lar ekan. Agarda



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Demak, rang (A) = 3.}$$

**Masalan 2.** Berilgan matritsalarining rangini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 23 & 43 & 63 & 83 \\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 4 & 24 & 44 & 64 & 84 \\ 8 & 58 & 108 & 158 & 208 \\ 6 & 46 & 86 & 126 & 166 \end{pmatrix}.$$

**Yechish:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 23 & 43 & 63 & 83 \\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 4 & 24 & 44 & 64 & 84 \\ 8 & 58 & 108 & 158 & 208 \\ 6 & 46 & 86 & 126 & 166 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80 \\ 0 & -30 & -60 & -90 & -120 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak,  $\text{rang}(A) = 2$ .

### Chiziqli tenglamalar sistemasi.

#### Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi va uning yechimi

$n$  ta noma'lum va  $m$  ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$





$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Bu yerda,  $A$  koeffitsientlar (1) yoki sistema matritsasi,  $V$  ustun matritsa, ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda (1)-tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:  $AX = B$ .

(1)-tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni  $m = n$ , bo'lsin. Bu holda sistema matritsasi  $A$  kvadrat matritsa bo'ladi. Uning determinanti  $|A| = \Delta$  deb belgilanib, sistema determinanti deyiladi.  $\Delta_j$  bilan  $A$  matritsaning  $j$ -ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa determinantini belgilaymiz.

Agar  $\Delta \neq 0$  bo'lsa, ya'ni  $A$  xos bo'lmagan matritsa bo'lsa, u holda  $A^{-1}$  teskari matritsa mavjud bo'ladi, u holda (2)-tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \quad (3)$$

Bu yerda, matritsalarining ko'paytirish qoidasi va teskari matritsa hisoblash formulasiga ko'ra quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

**Masalan.** Tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

**Yechish:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad |A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Demak,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ .

(4)-tenglikdan  $x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ ,  $\Delta_j = \overline{1, n}$  ekanligi kelib chiqadi. Demak, quyidagi teorema o'rinli ekan. Bunda,  $A^{-1} - A$  matritsaning teskari matritsasi,  $B$  esa ozod hadlar matritsasi.

**Teorema (Kramer teoremasi).** Agar sistema determinanti  $\Delta \neq 0$  bo'lsa, u holda (1)-sistema yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n} \quad (5)$$

Teoremadagi (4)-tenglama Kramer formulasi deb nomlanadi. (1)-tenglamalar sistemasini (5)-tenglamalar orqali yechilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi.

**Masalan.** Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

**Yechish:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 + 30 + 12 - 12 - 15 = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 6 + 6 - 8 - 3 = -9,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 15 - 6 - 6 - 30 = -10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 20 + 8 - 6 - 5 = 13.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{1} = -9, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -10, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 13.$$

**Masalan.** Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

**Yechish:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 7 \\ -1 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -6 & -8 \\ 0 & 9 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -6 & -8 \\ 9 & 10 & 7 \\ -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 & -6 & -8 \\ 8 & 0 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -6 & -8 \\ 8 & 10 & 7 \\ -5 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -6 & 0 & -8 \\ 8 & 9 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \\ -5 & -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -6 & -8 \\ 8 & 9 & 7 \\ -5 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 10,$$



$$\begin{array}{l}
 x_{i1} \quad x_{i2} \quad x_{i3} \cdots x_{in} \\
 \text{a) } \left( \begin{array}{cccc|c}
 c_{11} & c_{12} & c_{11} & \cdots c_{1n} & d_1 \\
 0 & c_{22} & \cdots & \cdots c_{2n} & d_2 \\
 \hline
 0 & 0 & \cdots & \cdots c_{mn} & d_n
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l}
 c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \\
 m = n, \quad r(A) = r(\overline{A}) = n,
 \end{array}
 \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$\begin{array}{l}
 x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{in} \\
 \text{b) } \left( \begin{array}{cccc|c}
 c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
 \hline
 0 & 0 & \cdots & c_{mn} & d_n \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l}
 c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \\
 m > n, \quad r(A) = r(\overline{A}) = n
 \end{array}
 \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$\begin{array}{l}
 x_i \quad x_{i1} \cdots x_{i1} \cdots x_{in} \\
 \text{d) } \left( \begin{array}{cccc|c}
 c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1r} & \cdots c_{1n} & d_1 \\
 0 & c_{22} & \cdots c_{2r} & \cdots c_{2n} & d_2 \\
 \hline
 0 & 0 & \cdots c_{rr} & \cdots c_{rn} & d_r \\
 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & 0
 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l}
 c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \\
 r(A) = r(\overline{A}) = r, \quad r < n
 \end{array}
 \end{array}$$

bu holda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

$$\begin{array}{l}
 x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots x_{ir} \cdots x_{in} \\
 \text{e) } \left( \begin{array}{cccc|c}
 c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1r} & \cdots c_{1n} & d_1 \\
 0 & c_{22} & \cdots c_{2r} & \cdots c_{2n} & d_2 \\
 0 & 0 & \cdots c_{rr} & \cdots c_{rn} & d_r \\
 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & d_{r+1} \\
 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & d_m
 \end{array} \right) \\
 c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n}
 \end{array}$$

Bu yerda,  $d_{r+1}, \dots, d_m$  sonlardan birtasi noldan farqli, bu holda  $r(A) = r, r(\overline{A}) = r + 1$ , ya'ni  $r(A) \neq r(\overline{A})$  sistema yechimga ega emas.

Bu yerda,  $i_1, i_2, \dots, i_n$  lar  $1, 2, \dots, n$  ning qandaydir o'rin almashtirishlaridan iborat bo'ladi. Demak, quyidagi teorema o'rinli.

**Teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi).** Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya'ni  $r(A) = r(\bar{A})$  bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga ega bo'ladi.

Demak, biz quyidagi xulosalarni qilishimiz mumkin ekan:

1. Agar  $r(A) = r(\bar{A})$  bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.
2. Agar  $r(A) \neq r(\bar{A})$  bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.
3. Agar  $r(A) = r(\bar{A}) = n$  bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.
4. Agar  $r(A) = r(\bar{A}) < n$  bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

**Masalan.** Sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

**Yechish:** Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olamiz: birinchi qadamda  $a_{11} \neq 0$  bo'lishi zarur, lekin  $a_{11} = 1$  hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to'rtinchi satrlarning o'rnini almashtiramiz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array} \right)$$

+

**1-qadam.** Birinchi satr elementlarini  $-5, 3$  va  $-2$  ga ko'paytirib, ularni mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi satrlarga qo'shamiz, chunki maqsad  $a_{11}$  element ostida nollardan iborat «zina» hosil bo'lsin.

2-qadam.  $a_{11} = 2 \neq 0$ , lekin  $a_{22} = -1$  bo'lgani qulayroq. Shuning uchun ikkinchi va uchinchi satrlar o'zini almashtiramiz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array} \right)$$

3-qadam. Ikkinchi satr elementlarini 4 va 3 ga ko'paytirib mos ravishda uchinchi va to'rtinchi satr elementlariga qo'shamiz, natijada  $a_{22}$  element tagida ikkinchi ustunda «zina» hosil bo'ladi.

4-qadam. Hosil bo'lgan matritsada  $a_{33} = 26 \neq 0$ , uchinchi satr elementini  $-\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$  ga ko'paytirib, to'rtinchi satrga qo'shamiz.

Natijada,  $-\frac{13}{13} \times \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array} \right) \leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} \end{array} \right)$

Kengaytirilgan matritsa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan  $x_4 = 1$ , uchinchi dan  $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$ , ikkinchi dan  $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$  va birinchidan  $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ .

**Masalan.** Sistemani Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 = -2 \end{cases}$$

**Yechish:**

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -7 & 5 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 14 - 8x_4 - 3x_5 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = 7 - 4x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

Sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega.

### Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi (1)da ozod hadlar nolga teng bo'lsa, ya'ni  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$  bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \text{-----} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo'lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo'ladi, ya'ni  $r(A) = r(\bar{A})$  bo'ladi. Shuning uchun Kroneker-Kapelli teoremasiga ko'ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo'ladi. Masalan,  $(0, 0, \dots, 0) = 0$  sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo'ladi.

(6)-tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishi quyidagidan iborat:



$$AX = 0. \quad (7)$$

Yuqorida keltirilgan 1–4 xulosalarga ko‘ra, agar  $r(A) = n$  bo‘lsa (6)-sistema yagona, nol yechimga ega, agarda  $r(A) < n$  bo‘lsa, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Demak  $m = n$  bo‘lgan holda (6)-sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli bo‘lar ekan.

Agar (6)-sistemada  $m < n$  bo‘lsa, ya’ni tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik bo‘lsa, (6)-sistema albatta noldan farqli yechimlarga ega bo‘ladi (cheksiz ko‘p), chunki bu holda  $r(A) \leq m$  va demak,  $r(A) < n$  bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, agar  $X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  va  $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$  vektorlar (7)-sistema yechimi bo‘lsa, u holda istalgan  $\lambda_0$  va  $\lambda_1$  sonlar uchun,  $\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1$  vektor ham (7)-sistema yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham,

$$A(\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1) = \lambda_0 AX_0 + \lambda_1 AX_1 = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 = 0. \quad (8)$$

Bu tengliklar matritsalarini qo‘shish, songa ko‘paytirish va ko‘paytirish ta’riflaridan kelib chiqadi.

(8)-tenglikdan shuni xulosa qilish mumkinki, (7)-sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham (7)-sistemaning yechimi bo‘lar ekan.

**Ta’rif.** Agar (7)-sistemaning  $X_1, X_2, \dots, X_k$  chiziqli-erkli yechimlar sistemasi berilgan bo‘lib, bu sistemaning istalgan  $x$  yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, ya’ni shunday  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sonlar mavjud bo‘lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$$

bo‘lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi.

Ta’rifda  $X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , ko‘rinishda bo‘lgani uchun,  $k \leq n$  bo‘ladi.



$$X_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{n1}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$X_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{n2}, 0, 1, \dots, 0)$$

$$X_k = (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots, \lambda_{nk}, 0, 0, \dots, 1)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bir jinsli bo'lmagan  $n$  noma'lumli  $m$  ta chiziqli tenglamalar sistemasi  $AX = B$  ning umumiy yechimi, unga mos keluvchi  $AX = 0$  bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi va  $AX = B$  tenglamaning biron-bir xususiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

**Masalan 1.** Bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

**Yechish:** Sistemaning oxirgi tenglamasini birinchi o'ringa yozamiz, so'ngra uni zinapoya shakliga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & 8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matritsaning rangi  $r(A) = 2$ .  $x_1, x_2$  o'zgaruvchilarning bazis minori

$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$ ;  $x_1, x_2$  ni asosiy o'zgaruvchilar sifatida tanlab olamiz va ularni asosiy bo'lmagan  $x_3, x_4, x_5$  lar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Fundamental yechimlar sistemasi  $e_1, e_2, e_3$  ni hosil qilish uchun asosiy bo'lmagan o'zgaruvchi  $x_3, x_4, x_5$  larni birlik matritsa  $E_3$  satr elementlari

bilan almashiramiz.  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0$  da sistemaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \\ 8x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

bundan  $x_1 = \frac{19}{8}$ ,  $x_2 = \frac{7}{8}$ , ya'ni bazis yechimni hosil qilamiz:

$$e_1 = \left( \frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1, 0, 0 \right)$$

Shunga o'xshash yana ikkita bazis yechimni topamiz:

$$x_3 = 0; x_4 = 1; x_5 = 0 \text{ da } e_2 = \left( \frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0, 1, 0 \right);$$

$$x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 1 \text{ da } e_3 = \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0, 0, 1 \right).$$

Topilgan yechimlar (vektorlar)  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  fundamental sistemani tashkil qiladi.  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  yechimlarning komponentlarini mos ravishda 8, 8, 2 ga ko'paytirib butun komponentli yechimlar sistemasini hosil qilamiz:  $(19; 7; 8; 0; 0)$ ,  $(3; -25; 0; 8; 0)$ ,  $(-1; 1; 0; 0; 2)$ .

Agar  $n$  ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasida sistema asosiy matritsasining rangi noma'lum sonidan bittaga kam bo'lsa, ya'ni  $r(A) = n-1$ , u holda chiziqli tenglamalar sistemasining yechim sifatida  $n-1$  ta tenglamalar sistemi matritsasining birinchi, ikkinchi va h.k. ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan ishoralari almashinuvchi *minorlari* sistemasini qabul qilish mumkin. Agar bu *minorlar* noldan farqli bo'lsa, u holda bu chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlari shu sonlarga karrali bo'ladi.

**Masalan 2.** Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Yechish: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenglamalar sistemasi matritsaning rangi  $r(A) = 2$  ga teng va u noma'lumlar sonidan bittaga kam. Demak, tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi  $k=3-2=1$  ta bo'ladi. Sistemaning ixtiyoriy ikkita tenglamasini olamiz, masalan birinchi va ikkinchi

$$\text{tenglamalarini: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = 5k, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = -4k,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = -3k, \text{ bunda } k \text{ ixtiyoriy son.}$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi  $\{5k; -4k; 3k\}$  ko'rinishida bo'ladi, bunda  $k$  ixtiyoriy son.

### **Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)**

Balans modelining asosiy masalasi, makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko'p tarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maqsadga muvofiq tarzda samarali olib borishdan iborat bo'lib, bu masala quyidagicha qo'yiladi:  $n$  ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi? Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki,  $n$  ta tarmoqning har bir ishlab chiqargan mahsulotining bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste'mol qilish orqali bog'lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo'lib mashhur Amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936-yilda matematik model ko'rinishida ifodalagan. U 1929–1932-

yillarda Amerika iqtisodiy inqirozini tahlil qilishga urungan bu model matritsalar algebrasiga asoslagan.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik.  $x_i$  deb  $i$ -tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda,  $i=1,2,\dots,n$ .  $x_{ij}$  deb  $i$ -tarmoq mahsulotining  $j$ -tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz.  $y_i$  deb  $i$ -tarmoq mahsulotining noishlabchiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki,  $i$  tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi  $x_i$ ,  $n$  ta tarmoq ehtiyojlari va noishlabchiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

(8)-tenglama balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) belgilashni kiritsak,  $a_{ij}$  -  $j$ -tarmoqning

mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan  $i$ -tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi.  $a_{ij}$  bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi.  $a_{ij}$  koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa,  $a_{ij}$  koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida  $a_{ij}$  koeffitsientlarni o'zgarimas deb olib, ya'ni sarf-xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1)-tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{-----} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Bu yerda,  $A$  – texnologik matritsa,  $X$  – yalpi mahsulot vektori,  $Y$  – yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (9)-tenglikning quyidagi matritsa ko‘rinishini hosil qilamiz:

$$X = AX + Y. \quad (11)$$

Ko‘p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi  $A$  ga ko‘ra  $X$  yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo‘ladi, ya‘ni (11)-tenglamani noma‘lum vektor  $X$  ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko‘rinishga olib kelamiz  $(E - A)X = Y$ .

Agar  $\det(E - A) \neq 0$  bo‘lsa, u holda teskari  $(E - A)^{-1}$  matritsa mavjud bo‘lib, yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$X = (E - A)^{-1}Y \quad (12)$$

$S = (E - A)^{-1}$  matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma‘nosini tushunish uchun  $Y_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $i$  o‘rnida 1, qolgan joylarda 0 bo‘lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi (12)-tenglama yechimlari quyidagiga teng bo‘ladi:

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak,  $S = (s_{ij})$  matritsaning  $s_{ij}$  elementi  $i$ -tarmoqning  $j$ -tarmoq birlik yakuniy mahsuloti  $Y_j$  ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo‘lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma‘nosiga ko‘ra, (11)-tenglamada  $y_i \geq 0$ , ( $i = \overline{1, n}$ ),  $a_{ij} \geq 0$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) bo‘lib, tenglama yechimi

uchun  $x_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) bo'lishi kerak. Bu holatni biz  $Y \geq 0$ ,  $A \geq 0$  va  $X \geq 0$  deb belgilaymiz.

Agar istalgan  $Y \geq 0$  vektor uchun  $X \geq 0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11)-tenglamaning yechimi mavjud bo'lsa.  $A \geq 0$  matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

$A$  matritsaning samarali bo'lishi uchun, bir nechta kriteriyalar mavjud. Ulardan biri shundan iboratki, agar  $A$  matritsaning har bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan katta bo'lmay, hech bo'lmaganda biron-bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan kichik bo'lsa, u holda  $A$  samarali matritsa bo'ladi, ya'ni:  $\max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$ , bo'lib, shunday  $j_0$  mavjudki, uning uchun  $\sum_{i=1}^n a_{ij_0} < 1$  o'rinli bo'lsa,  $A$  samarali matritsa bo'ladi.

Masalan, quyidagi matritsada ifodalangan mahsulot samarador:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

**Masalan 1.** Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo'ljallangan xarajat koeffitsientlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

| Tarmoq           |                   | Iste'mol |                   | Chekli mahsulot |
|------------------|-------------------|----------|-------------------|-----------------|
|                  |                   | Sanoat   | Qishloq xo'jaligi |                 |
| Ishlab chiqarish | Sanoat            | 0,3      | 0,25              | 300             |
|                  | Qishloq xo'jaligi | 0,15     | 0,12              | 100             |

Quyidagilarni:



- a) tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning sof mahsulotini;
- b) agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

**Yechish:** a) to'g'ridan to'g'ri xarajatlar koeffitsientini  $A$  matritsa va chekli mahsulot vektori  $Y$  ni yozib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,15 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

bundan  $E - A = \begin{pmatrix} 1-0,3 & -0,25 \\ -0,15 & 1-0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,15 & 0,88 \end{pmatrix}$  matritsani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matritsasi

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5785} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,15 \\ 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix}$$

(3.8)-tenglama bo'yicha yalpi mahsulot vektori  $X$  ni aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 482 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori  $x_{ij}$  ni  $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$  formuladan topamiz. Masalan  $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,3 \cdot 482 = 144,6$ .

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning sof mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

| Tarmoq           |                   | Iste'mol |                   | Chekli mahsulot | Yalpi mahsulot |
|------------------|-------------------|----------|-------------------|-----------------|----------------|
|                  |                   | Sanoat   | Qishloq xo'jaligi |                 |                |
| Ichlab chiqarish | Sanoat            | 144,6    | 62,5              | 300             | 482            |
|                  | Qishloq xo'jaligi | 72,3     | 30                | 100             | 150            |
| Sof mahsulot     |                   | 265,1    | 157,5             |                 |                |
| Yalpi mahsulot   |                   | 482      | 250               |                 |                |

b) shartga ko'ra chekli mahsulot vektori

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1,1 \\ 100 \cdot 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

U holda (3.8)-formulaga asosan mahsulot vektori quyidagicha bo'ladi:

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532,8 \\ 287,1 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo'jaligini 287,1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

**Masalan 2.** Quyidagi jadvalda ma'lum bir davr uchun uch sanoat tarmoqlari balans ko'rsatkichlari berilgan.

| Soha                                     | Talab p.b.                               |            |               | Yakuniy talab p.b. | Jami p.b. |
|--|--|------------|---------------|--------------------|-----------|
|  | Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash | Energetika | Mashinasozlik |                    |           |
| Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash | 5  | 35         | 30            | 30                 | 100       |
| Energetika                               | 10                                       | 20         | 40            | 40                 | 100       |
| Mashinasozlik                            | 20                                       | 10         | 20            | 20                 | 50        |

Berilgan yakuniy talabni qanoatlantiruvchi har bir mahsulotning yalpi ishlab chiqarish hajmini aniqlang. Agar yakuniy talabni har bir tarmoq uchun mos ravishda 40, 60 va 30 p.b. oshirish kerak bo'lsa, har bir mahsulot hajmini mos ravishda necha foizga oshirish kerak.

**Yechish:**  $x_i - i$  mahsulot ishlab chiqarishning yalpi hajmi,  $y_i - i$  mahsulotga bo'lgan talab bo'lsin,  $i=1, 2, 3$ . U holda yalpi ishlab chiqarish va yakuniy talab vektorlari mos ravishda

$$X = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Tabiiyki, har bir tur bo'ycha yalpi mahsulot ishlab chiqarish hajmi ishlab chiqarishda foydalanilgan barcha mahsulotlar hajmi va shu mahsulotga bo'lgan yakuniy talab hajmlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni,

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + y_i, \quad i=1,2,3.$$

Bu yerda,  $a_{ij}$  – bevosita xarajatlar koeffitsienti. Bu tenglik matritsaviy ko'rinishda

$$X = A \cdot X + Y$$

bunda,  $A$  – bevosita xarajatlar koeffitsienti matritsasi,  $a_{ij} > 0$ ;  $X, Y$  – ustun matritsalar  $Y$  holda  $X - A \cdot X = Y$ ,  $(E - A)X = Y$ ,  $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$  qo'yilgan masalaning matritsaviy yechimi.

$x_{ij} - j$  – tarmoq uchun mo'ljallangan  $i$  – mahsulot hajmi.

$A$  matritsa koeffitsientlari  $a_{ij} > 0$  larni aniqlaymiz.  $j$  – tarmoq uchun mo'ljallangan  $i$  – mahsulot hajmini  $j$  – sektor umumiy ishlab chiqarish hajmiga bo'lib,  $j$  – turdagi bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun foydalanilgan  $i$  – mahsulot miqdorini hosil qilamiz, ya'ni  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$

$i=1, 2, 3$ .

$$\text{Masalan, } a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{5}{100} = 0.05, \quad a_{21} = \frac{x_{21}}{x_2} = \frac{10}{100} = 0.1.$$

$$\text{Demak, xarajatlar koeffitsienti matritsasi: } A = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.35 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$E - A = B$  orqali ifodalab,  $B$  ni hisoblaymiz:

$$B = E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.05 & 0.35 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.35 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 & -0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \text{ matritsani topamiz: } |B| = \begin{vmatrix} 0.95 & -0.35 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 & -0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.514 \neq 0.$$

$$B^{-1} = \frac{1}{0.514} \begin{bmatrix} 0.68 & 0.32 & 0.5 \\ 0.16 & 0.68 & 0.42 \\ 0.19 & 0.165 & 0.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.323 & 0.632 & 0.973 \\ 0.311 & 1.323 & 0.817 \\ 0.37 & 0.321 & 1.595 \end{bmatrix} X \text{ ni}$$

$$\text{aniqlaymiz: } X = B^{-1} \cdot Y = (E - A)^{-1} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1.323 & 0.632 & 0.973 \\ 0.311 & 1.323 & 0.817 \\ 0.37 & 0.321 & 1.595 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.047 \\ 78.599 \\ 55.837 \end{bmatrix}$$

Demak,  $x_1 = 84.047$ ,  $x_2 = 78.599$ ,  $x_3 = 55.837$ , ya'ni uglevodoroddan 84.047 sh.b., energetikadan 78.599 sh.b., mashinasozlikdan 55.837 sh.b. yalpi ishlab chiqarish kerak.

Yakuniy talab berilgan miqdorda oshirilsa, yakuniy mahsulot yangi vektori quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:  $\bar{Y} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}$

$U$  holda har bir mahsulot bo'yicha ishlab chiqarishning yangi hajmi

$$\bar{X} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{Y}, \text{ ya'ni } \bar{X} = \begin{bmatrix} 1.323 & 0.632 & 0.473 \\ 0.311 & 1.323 & 0.817 \\ 0.37 & 0.321 & 1.595 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 119.455 \\ 116.342 \\ 81.907 \end{bmatrix} \text{ bo'ladi}$$

yoki yangi ishlab chiqarish hajmi:  $\bar{x}_1 = 119.455$ ,  $\bar{x}_2 = 116.342$ ,  $\bar{x}_3 = 81.907$ .

Demak, yakuniy mahsulotni berilgan miqdorda oshirilishini ta'minlash uchun yalpi ishlab chiqarishni mos ravishda quyidagicha foizlarda oshirish kerak:

Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash  $\frac{\bar{x}_1}{x_1} \cdot 100\% - 100\% = 42.13\%$ , energetik hajmini 48.02% ga, mashinasozlik ishlab chiqarish hajmini 46.69% ga dastlabkisiga nisbatan oshirish kerak.

*Javob:* Yalpi mahsulot ishlab chiqarish hajmi:

Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash – 84.047 p.b.

Energetika – 78.599 p.b.

Mashinasozlik – 55.837 p.b.

Ishlab chiqarish hajmini mos ravishda 42.13, 48.02 va 46.69% ga oshirish kerak.

### Kompleks sonlar

**Ta'rif.** Agar  $x$  va  $y$  haqiqiy sonlar hamda  $i$  belgi uchun:

$$1) x+0 \cdot i=x, 0+i \cdot y=iy, I \cdot i=i, -I \cdot i=i,$$

2) faqat  $x=x_1, y=y_1$  bo'lgandagina  $x+yi \mid x_1+y_1i$  bo'ladi,

$$3) (x+yi) \pm (x_1+y_1i) = (x \pm x_1) + (y \pm y_1)i,$$

$$4) (x+yi) \cdot (x_1+y_1i) = (x \cdot x_1 - y \cdot y_1) + (x \cdot y_1 + x_1 \cdot y)i$$

$$5) \frac{x+yi}{a+bi} = \frac{ax+by}{a^2+b^2} + \frac{ay-bx}{a^2+b^2}i$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda  $x+yi$  ifodaga *kompleks son* deyiladi.

1- va 4-shartlardan:  $i^2=i \cdot i=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i$  va h.k.

$i=\sqrt{-1}$  belgini odatda mavhum birlik deyiladi.

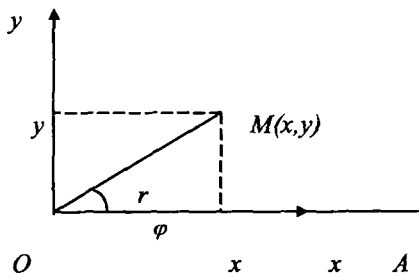
$x+yi$  kompleks sonda  $x$  kompleks sonning haqiqiy qismi,  $yi$  kompleks sonning mavhum qismi deyiladi.

$x+yi$  va  $x-yi$  o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi.

Kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish ko'phadlar ustidagi kabi bajariladi. Bo'lish va ildiz chiqarish amallari esa mos ravishda ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallariga teskari amallar kabi aniqlanadi.

### Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi

$x+yi$  kompleks son  $(x,y)$  haqiqiy sonlar jufti bilan aniqlanadi. Shuning uchun  $x+yi$  kompleks son tekislikdagi  $M(x,y)$  nuqta yoki uning  $r=\overline{OM}$  radius vektori bilan ifodalanadi:



Bu vektorning uzunligi  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  –kompleks sonning moduli, bu vektor bilan Ox o‘q orasidagi  $\varphi$  burchak *kompleks sonning argumenti* deyiladi.

$x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  bo‘lgani uchun  $x + y \cdot i = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  boladi va bu ifodaga *kompleks sonning trigonometrik ko‘rinishi* deyiladi.

Trigonometrik ko‘rinishdagi kompleks sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish  $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$  berilgan bo‘lsa, u holda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1), \quad z_2 = x_2 + y_2 \cdot i = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2), \dots, z_n = x_n + y_n \cdot i = r_n \cdot (\cos \varphi_n + i \cdot \sin \varphi_n)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)).$$

### Muavr formulalari

Agar  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  bolsa, u holda  $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$  munosabatni hosil qilamiz.

Bu formulaning  $r = 1$  bo‘lgandagi ko‘rinishiga *Muavr formulasi* deyiladi:  $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$ .

Xuddi shu kabi  $\left(\frac{1}{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)}\right)^n = r^{-n}(\cos n\varphi - i \cdot \sin n\varphi)$ .

Kompleks sondan ildiz chiqarish

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ bu yerda } k=0,1,2,\dots,$$

$n-1$ .  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$  Eylar formulasi deyiladi.

**Masalan.**  $z = -2 + 2i$ . a)  $z^4 = ?$  b)  $\sqrt[3]{z}$ .

**Yechish:** a)  $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ,  $\varphi = \pi + \arctg \frac{2}{-2} = \frac{3\pi}{4}$ .

$$z^4 = (2\sqrt{2})^4 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^4 = 64 \left( \cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 64 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 64(-1 + 0) = -64.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k=0,1,2.$$

$$k=0 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i.$$

$$k=1 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$k=2 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

### Algebraning asosiy teoremasi

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  - kompleks sonlar maydonidagi  $n$ -darajali ko'phad bo'lsin.

**Ta'rif.** Agar  $x$  ning  $\alpha$  son qiymatida  $f(x)$  ko'phad nolga aylansa, u holda  $\alpha$  soni  $f(x)$  ko'phadning ildizi deyiladi.

Demak,  $x = \alpha$  son  $f(x)$  ko'phadning ildizi bo'lsa  $f(\alpha) = 0$  bo'ladi.

**Teorema (Bezu teoremasi).**  $f(x)$  ko'phadni  $x - \alpha$  ga bo'lgandagi qoldig'i  $f(\alpha)$  ga teng.

**Teorema.**  $x = \alpha$  son  $f(x)$  ko'phadning ildizi bo'lishi uchun u  $x - \alpha$  ga  $(-)$  qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli.

**Teorema (Algebraning asosiy teoremasi).** Kompleks sonlar maydonida nolinchi darajadan yuqori darajali har bir  $f(x)$  ko'phadning eng kamida bitta kompleks ildizi bor.

**Teorema.** Kompleks sonlar maydonida  $n$ -darajali  $f(x)$  ko'phadning  $n$  ta ildizi bor.

**Ta'rif.**  $f(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$  ifoda ko'phadning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi deyiladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi  $f(x)$  ko'phad uchun  $x + yi$  kompleks son ildiz bo'lsa, u holda  $x - yi$  qo'shma kompleks son ham ildiz bo'ladi ( $y \neq 0$ ).

Haqiqiy sonlar maydonidagi  $f(x)$  ko'phadning kompleks ildizlari soni faqat juft bo'lishi mumkin.

Haqiqiy sonlar maydonidagi juft darajali  $f(x)$  ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat juft bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonida toq darajali  $f(x)$  ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat toq bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi har bir  $f(x)$  ko'phadni shu maydondagi birinchi va ikkinchi darajali ko'phadlar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

**Masalan.** Ko'paytuvchilarga ajrating:  $f(x) = x^4 + 1$ .  $z = -2 + 2i$ .

$$a) z^4 = ? \quad b) \sqrt[3]{z}.$$

**Yechish:**  $f(x) = x^4 + 1$  ko'phadning ildizlarini topamiz.

$$x^4 + 1 = 0, \quad x^4 = -1, \quad x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{2k+1}{4} + i \sin \frac{2k+1}{4}, \quad k=0,1,2,3.$$



$$k=0, \alpha_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, k=1, \alpha_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k=3, \alpha_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, k=4, \alpha_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f(x) = x^4 + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4).$$

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = x^2 - \sqrt{2}x + 1,$$

$$(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = x^2 + \sqrt{2}x + 1.$$

$$\text{Demak, } f(x) = x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

### Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga yoyish

Ratsional ifoda deb ko'phadlar nisbati ko'rinishida ifodalangan funksiyaga aytiladi, ya'ni  $P_n(x)$  va  $Q_m(x)$  ko'phadlar bo'lsa, ratsional ifoda ushbu  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  ko'rinishda bo'ladi. Agar  $P_n(x)$  ko'phad darajasi  $Q_m(x)$  ko'phad darajasidan katta bo'lsa, ya'ni  $n > m$  bo'lsa  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  ni quyidagi ko'rinishda ifoda etish mumkin:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

bu yerda,  $L_{n-m}(x)$  va  $R_k(x)$  mos ravishda  $n-m$  va  $k$  darajali ko'phad bo'lib,  $k \leq m$ , ya'ni  $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$  to'g'ri kasrdan iborat bo'ladi.

Istalgan  $Q_m(x)$  ko'phadni quyidagi ko'rinishda ifoda qilish mumkin:

$$Q_m(x) = a \cdot (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s} \quad (1)$$

Bu yerda,  $a, a_1, \dots, a_n, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$  lar haqiqiy sonlar,  $k_1, k_2, \dots, m_1, m_2, \dots, m_s$  lar esa natural sonlardan iborat bo'lib,  $p_i^2 - 4q_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  shart uchun o'rinli bo'ladi.

Agar  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  qisqarmaydigan to'g'ri kasr bo'lib,  $Q_m(x)$  uchun (1)-yoyilma o'rinli bo'lsa, bu kasrni quyidagicha ifoda etish mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}} \right) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}\bar{\delta} + \bar{N}_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2 + p_j\bar{\delta} + q_j)^{m_j}} \right) \right]$$

yoki

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{1}{a} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{k_i} \frac{A_{il}}{(x-a_i)^l} + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{m_j} \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + p_jx + q_j)^l} \right) \quad (2)$$

**Ta'rif.**

$$\frac{A}{(x-a)^l} \quad \text{va} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}, \quad p^2-4q < 0$$

ko'rinishdagi kasrlar *sodda kasrlar* deyiladi.

Demak,  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  qisqarmaydigan to'g'ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \frac{1}{a} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{k_i} \int \frac{A_{il}}{(x-a_i)^l} dx + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{m_j} \int \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + p_jx + q_j)^l} dx \right)$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  uchun (2)-tenglikdagi  $A_{il}$ ,  $B_{jl}$  va  $C_{jl}$  larning qiymatlarini

topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (2)-tenglikning o'ng ta'rafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj  $Q_m(x)$  ga teng bo'lib, uning suratida  $A_{il}$ ,  $B_{jl}$  va  $C_{jl}$  koeffitsientlar qatnashgan, darajasi  $Q_m(x)$  ning darajasidan oshmaydigan  $\tilde{P}_n(x)$  polinomi hosil qilamiz. Agar biz (2)-tenglikni ayniyat deb qarasaq tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya'ni  $Q_m(x)$

bo'lgani sababli,  $P_n \equiv \tilde{P}_n(x)$  ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda  $x$  larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida  $A_{j\mu}$ ,  $B_{j\mu}$  va  $C_{j\mu}$  noma'lum koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (2)-tenglikdagi  $A_{j\mu}$ ,  $B_{j\mu}$  va  $C_{j\mu}$  larning qiymatlarini topamiz.

**Masalan.**  $\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)}$  kasrni sodda kasrlarga yoying.

**Yechish:** Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz:

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Bu tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so'ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2 + x + 3 = A_1 \cdot (x-1)^2(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + A_3(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^3.$$

Demak,

$$3x^2 + x + 3 = (A_1 + B)x^4 + (-2A_1 + A_2 - 3B + C)x^3 + (2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C)x^2 + (-2A_1 - B + 3C)x + (A_1 - A_2 + A_3 - C)$$

Bu ayniyatdagi  $x$  larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ -2A_1 + A_2 - 3B + C = 0 \\ 2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C = 3 \\ -2A_1 + A_2 - B + 3C = 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 - C = 3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

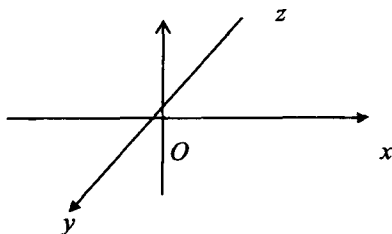
Natijada  $A_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = \frac{7}{2}$ ,  $B = \frac{1}{4}$ ,  $C = \frac{1}{4}$  ekanligini hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}$$

## 2. Fazoda analitik geometriya

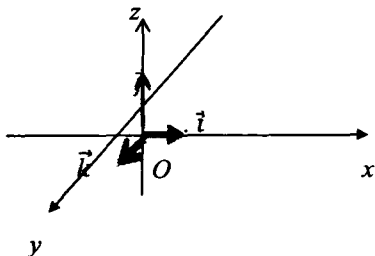
### Fazoda dekart koordinatalar sistemasi

Fazoning  $O$  nuqtasida kesishuvchi uchta  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  to'g'ri chiziqlar olamiz va bu to'g'ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekisliklar o'tkazamiz:

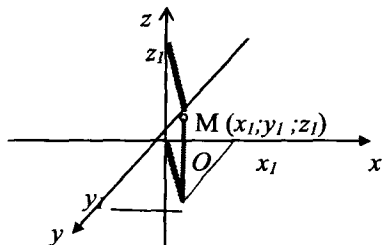


$Ox$  va  $Oy$  to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislikni  $Oxy$  tekislik deb, qolgan ikki tekislikni mos ravishda  $Oxz$  va  $Oyz$  deb belgilaymiz.  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  to'g'ri chiziqlar koordinata o'qlari (mos ravishda abssissa, ordinata, applikata), ularning kesishish nuqtalari koordinata boshi,  $Oxy$ ,  $Oxz$  va  $Oyz$  tekisliklar koordinata tekisliklari deyiladi.

Bu usul bilan hosil qilingan  $Oxyz$  sistema fazoda *dekart koordinatalar sistemasi* deyiladi. Odatda  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  koordinata o'qlarining birlik vektorlarini mos ravishda  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lar orqali belgilanadi.  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  birlik (ort, bazis) vektorlar deyiladi.



Fazoda dekart koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy nuqta  $M(x_1; y_1; z_1)$  berilgan bo'lsin.  $M$  nuqtani yasash uchun  $Ox$  o'qdagi  $x_1$  nuqtadan  $Oy$  o'qqa,  $Oy$  o'qdagi  $y_1$  nuqtadan  $Oy$  o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning kesishish  $M(x_1; y_1)$  nuqtasini aniqlaymiz. Bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtiramiz.  $Oz$  o'qdagi  $z_1$  nuqtadan shu hosil qilingan chiziqqa parallel to'g'ri chiziq va tekislikdagi  $M(x_1; y_1)$  nuqtadan  $Oz$  o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, ularning kesishish nuqtasini aniqlaymiz. Bu nuqta izlanayotgan  $M(x_1; y_1; z_1)$  nuqtani aniqlaydi:



## Vektorlar va vektorlar ustida amallar

**Ta'rif.** Yo'nalishga ega kesmaga *vektor* deb ataladi.

Agar vektorning boshi  $A$  nuqtada va oxiri  $B$  nuqtada bo'lsa, u  $\overline{AB}$  yoki  $\vec{a}$  kabi belgilanadi.

$\vec{a}$  vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va  $|\vec{a}|$  kabi belgilanadi.

Oxiri boshi bilan ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va  $0$  bilan belgilanadi.

Uzunligi birga teng vektorga *birlik vektor* deyiladi.

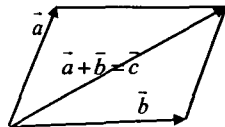
Bir to'g'ri chiziqda yoki paralell to'g'ri chiziqalarda yotuvchi vektorlar *kolleniar vektorlar* deyiladi.

Bir xil yoʻnalgan va bir xil uzunlikdagi vektorlar *teng vektorlar* deyiladi.

Bir tekislikda yoki paralell tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deyiladi.

$\vec{a}$  vektorning  $\lambda$  soniga koʻpaytmasi deb,  $\vec{a}$  ga kolleniar, ( $\lambda > 0$  da u bilan yoʻnalishdosh,  $\lambda < 0$  da esa yoʻnalishi qarama-qarshi) hamda moduli  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  ga teng boʻlgan  $\lambda \vec{a}$  vektorga aytiladi.

Ikkita  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning yigʻindisi deb uchburchak yoki parallelogramm qoidasi boʻyicha aniqlanadigan  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  vektorga aytiladi.



$\vec{a}(x, y, z)$  vektor  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  koʻrinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  birlik vektorlar (ortlar):  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ .

$|\vec{a}|$  vektorning uzunligi  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  formula bilan aniqlanadi.

$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  vektorning

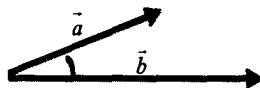
*yoʻnaltiruvchi kosinuslari* deb ataladi. Bu yerda  $\alpha, \beta, \gamma$  –  $\vec{a}$  vektorning  $Ox, Oy, Oz$  oʻqlari bilan hosil qilgan burchaklari va  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  va  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  vektorlar berilgan boʻlsin. U holda

$$\vec{a} + \vec{b}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \lambda \vec{a}(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

### Vektorlarning skalyar koʻpaytmasi

**Taʼrif.**  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning *skalyar koʻpaytmasi* deb bu vektorlarning uzunliklarini ular hosil qilgan burchak kosinusiga koʻpaytirishdan hosil boʻlgan songa aytiladi va  $(\vec{a}, \vec{b})$  yoki  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  koʻrinishida belgilanadi.



Demak,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  va  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi  $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$  formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar, kvadrati  $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$  yoki  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ .

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  va  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  vektorlar orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Agar  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda ular *ortogonal vektorlar* deyiladi.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  yoki  $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$  vektorlarning ortogonallik sharti.

Birlik ortogonal vektorlar *ortonormal vektorlar* deyiladi.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  va  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  vektorlar kolleniar bo'lsa, ya'ni  $\vec{a} = k\vec{b}$ , u

holda  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k$  vektorlarning kolleniarlik sharti.

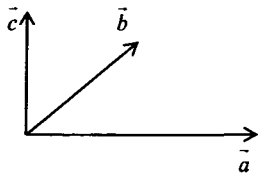
## Ikki vektorning vektor ko'paytmasi

**Ta'rif.**  $\vec{a}$  vektorning  $\vec{b}$  vektorlar vektor ko'paytmasi deb,  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $\vec{c}$  vektorga:

1.  $\vec{c}$  vektor  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning har biriga perpendikular;
2.  $\vec{c}$  vektor uchidan qaralganda  $\vec{a}$  vektordan  $\vec{b}$  vektorga eng qisqa burilishi soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  vektorlarning bunday joylashuvini o'ng uchlik deyiladi);



3.  $\vec{c}$  vektorning moduli  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogrammning  $S$  yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni  $|\vec{c}| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$  ( $\varphi$  —  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi burchak).



Vektor ko'paytmasining asosiy xossalari:

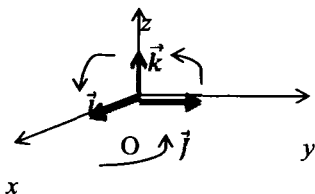
$$1. \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$2. (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$3. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

4. Agar  $\vec{a} = 0$ , yoki  $\vec{b} = 0$ , yoki  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  bo'lsa, u holda  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ . Xususan  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ .

Koordinata o'qlari ortlarining vektor ko'paytmasi:



$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{k} \times \vec{k} = 0;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Agar  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  bo'lsa, u holda  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Agar  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar kolleniar bo'lsa, u holda  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ .

$\vec{a}$  vektorning  $\vec{b}$  vektorlar vektor ko'paytmasining moduli bu vektorlarda qurilgan parallelogrammning yuzasini ifodalaydi:  $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$\vec{a}$  vektorning  $\vec{b}$  vektorlarda qurilgan uchburchakning yuzasini esa  $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$  formula yordamida hisoblanadi.

### Uch vektorning aralash ko'paytmasi

**Ta'rif.**  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  va  $\vec{c}$  vektorlarning  $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$  aralash ko'paytmasi deb,  $(\vec{a}\times\vec{b})$

vektor ko'paytmaning  $\vec{c}$  vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi.

Aralash ko'paytmaning xossalari:

$$1. (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

$$2. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

$$3. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{c}\vec{a}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

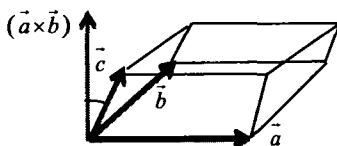
4. Agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  vektorlar komplanar bo'lsa, u holda  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$  bo'ladi.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\text{Agar } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad \text{bo'lsa, u holda} \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

$$\text{Agar } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$



Aralash ko'paytma ko'paytiriluvchi vektorlarda qurilgan parallelepiped hajmiga ishora aniqligida teng, ya'ni  $V = \pm (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ .  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  va  $\vec{c}$  vektorlarda qurilgan tetraedr hajmi esa  $V = \pm 1/6 (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ .

**Masalan 1.** a)  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$  va  $\vec{b} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$  vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzasini hisoblang.

**Yechish:**  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogrammning  $S$  yuzasi shu vektorlarning vektor ko'paytmasi moduliga teng:  $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . Vektor

$$\text{ko'paytmani topamiz: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Demak,  $S = \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{144 + 16 + 81} = \sqrt{241}$  kv birlik.

**Masalan 2.** Uchlari  $A(1, 2, 0)$ ;  $B(-1, 2, 1)$ ;  $C(0, -3, 2)$  va  $D(1, 0, 1)$  nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

**Yechish:** Piramidaning  $A$  uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz:  $\vec{AB} = \{-2; 0; 1\}$ ,  $\vec{AC} = \{-1; -5; 2\}$ ,  $\vec{AD} = \{0; -2; 1\}$ .

Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmining  $\frac{1}{6}$  qismiga teng bo'lganligi sababli  $V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$  kub birlik.

### Fazoda tekislik tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar

Fazodagi  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan o'tuvchi,  $\vec{n}(A, B, C)$  vektorga perpendikular bo'lgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Odatda  $\vec{n}(A, B, C)$  vektorga *tekislikning normal vektori* deyiladi. Buning uchun shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy  $B(x, y, z)$  nuqtani olsak,  $\vec{MB}$  va  $\vec{n}$  vektorlar perpendikular bo'ladi, ya'ni  $\vec{MB} \cdot \vec{n} = 0$  bo'ladi. Demak, quyidagilar o'rinli bo'lar ekan:

$$\vec{MB} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Agar qavslarni ochib, ifodani ixchamlasak quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

Bu yerda,  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ .  $\vec{n}(A, B, C)$  vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

(1)-tenglama tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. Endi (1)-tenglamaning ayrim maxsus ko'rinishlarini keltiramiz:

1. Agar  $D = 0$  bo'lsa, u holda  $Ax + By + Cz = 0$  tekislik koordinata boshidan o'tadi.
2. Agar  $A = 0$  bo'lsa,  $By + Cz + D = 0$  tekislik  $OX$  o'qqa parallel bo'ladi.
3. Agar  $A = 0, D = 0$  bo'lsa,  $By + Cz = 0$  tekislik  $OX$  o'qdan o'tadi.
4. Agar  $A = 0, B = 0$  bo'lsa,  $Cx + D = 0$  tekislik  $OXY$  tekislikka parallel bo'ladi.
5. Agar  $A = 0, B = 0, D = 0$  bo'lsa,  $Cz = 0$  (yoki  $z = 0$ ) tekislik  $OXY$  tekislik bilan ustma-ust tushadi.

(1)-tenglamada  $D \neq 0$  bo'lganda tekislikning kesmalardagi tenglamasini keltirib chiqarish mumkin:

$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

yoki  $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$  deb belgilashni kiritsak  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

tekislikning kesmalardagi tenglamasi hosil bo'ladi.

Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta  $M(x_1, y_1, z_1), M(x_2, y_2, z_2), M(x_3, y_3, z_3)$  nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

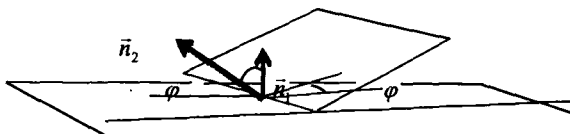
Ushbu

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklar berilgan bo'lsin.

Ikki tekislik orasidagi burchak deb tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchakka aytiladi.



$\vec{n}_1$  va  $\vec{n}_2$  vektorlar orasidagi  $\varphi$  burchak bu tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchaklardan biridir. Shuning uchun  $\varphi$  burchak quyidagi tenglikdan topiladi:

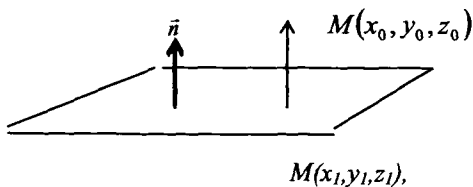
$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (2)$$

Tekisliklarning parallellik va perpendikularlik shartlari ularni aniqlaydigan  $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$  va  $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$  vektorlarning parallellik va perpendikularlik shartlari bilan bir xil bo'ladi, shuning uchun ular quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{tekisliklarning parallellik sharti,}$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 \quad \text{tekisliklarning perpendikularlik sharti.}$$

$M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan  $Ax + By + Cz + D = 0$  tekislikkacha bo'lgan masofa hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning asosini  $M(x_1, y_1, z_1)$  bilan belgilaymiz. Izlanayotgan masofani  $d$  bilan belgilaymiz.



$\vec{n}(A, B, C)$  tekislikning normal vektori va  $\overline{M_1 M}$  vektor o'zaro kolleniar vektorlardir.

Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{n} \cdot \overline{M_1 M} = |\vec{n}| \cdot |\overline{M_1 M}| \cos \varphi = d \cdot |\vec{n}| \quad \text{bo'lib, undan} \quad d = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{M_1 M}|}{|\vec{n}|} \quad \text{munosabatni}$$

hosil qilamiz.

$\vec{n} \cdot \overline{M_1 M} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$   
 $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqta berilgan tekislikda yotgani uchun  
 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$  bo'ladi, bundan esa  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$  kelib  
 chiqadi. Demak,

$\vec{n} \cdot \overline{M_1 M} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$  va  $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  ekanligidan quyidagi  
 formulani hosil qilamiz:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Bu formula  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan  $Ax + By + Cz + D = 0$  tekislikkacha  
 bo'lgan masofani hisoblash formulasidir.

**Masalan.**  $M_0(2; -3; 1)$  nuqta orqali o'tuvchi va  $x - 4y + 5z + 1 = 0$   
 tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

**Yechish:** Ma'lumki  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  nuqtadan o'tib,  $ax + by + cz + d = 0$   
 tekislikka parallel tekislik tenglamasi  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$   
 shaklda bo'ladi. Bizning masala uchun bu tenglama quyidagi ko'rinishni  
 oladi:  $(x - 2) - 4(y + 3) + 5(z - 1) = 0$  yoki  $x - 4y + 5z - 19 = 0$ .

### Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar

Umumiy holda ikki  $n$ -tekislikning kesishish nuqtalari to'plamini  
 fazodagi to'g'ri chiziq sifatida talqin qilish mumkin.

Agar  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$   
 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  tengliklardagi tekisliklar parallel

bo'lmasa, ular to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, bu to'g'ri chiziq  
 tenglamasi quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Bu sistema to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Agar tenglamadan  $x$  va  $y$  ni  $z$  orqali topsak, u holda to'g'ri chiziqning proeksiyalardagi tenglamasini hosil qilamiz:  $\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$ .

Endi  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan o'tib,  $\vec{p}(m, n, k)$  vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. Agar  $B(x, y, z)$  nuqta qidirilayotgan to'g'ri chiziqda yotsa, u holda  $\overline{MB}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  vektor  $\vec{p}$  vektorga parallel bo'lishi kerak, ya'ni quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

Bu tenglama fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi deb ataladi. Agar bu tenglamada  $\frac{z - z_0}{k} = t$  deb olsak, to'g'ri

$$x = mt + x_0,$$

chiziqning quyidagi parametrik tenglamasini hosil qilamiz:  $y = nt + y_0,$

$$z = kt + z_0.$$

Berilgan ikki  $M(x_1, y_1, z_1)$  va  $K(x_2, y_2, z_2)$  nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. Bu to'g'ri chiziq  $M(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan o'tganligi uchun

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k}.$$

Endi bu to'g'ri chiziqning  $K(x_2, y_2, z_2)$  nuqtadan ham o'tishini e'tiborga olsak,

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{k}.$$

Natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Bu tenglama berilgan ikki  $M(x_1, y_1, z_1)$  va  $K(x_2, y_2, z_2)$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Ikkita to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorlari  $S_1(m_1, n_1, p_1)$  va  $S_2(m_2, n_2, p_2)$  berilgan bo'lsin. U holda ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Fazoda ikkita to'g'ri chiziqning parallellik sharti:  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ .

Fazoda ikkita to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti:  $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ .

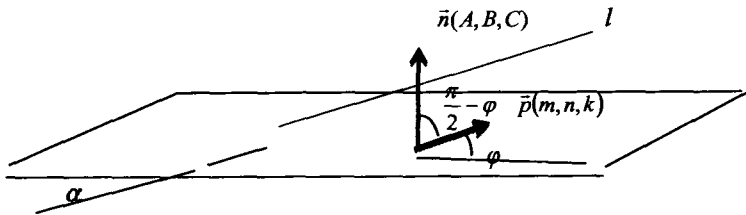
**Masalan.**  $M_1(2; -1; -1)$  va  $M_2(3; 3; -1)$  nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

**Yechish:**  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$  yoki

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z+1}{-1+1} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{0}$$

### Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq'larga doir asosiy masalalar

$l: \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{k}$  to'g'ri chiziq va  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$  tekislik orasidagi  $\varphi$  burchakni topaylik.





$\frac{\pi}{2} - \varphi$  burchak  $\vec{p}(m, n, k)$  va  $\vec{n}(A, B, C)$  vektorlar orasidagi burchakka teng

bo'ladi, u holda  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$  bo'lgani uchun,

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}.$$

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning parallel bo'lishi uchun  $\vec{p}$  va  $\vec{n}$  vektorlar perpendikular bo'lishi kerak, ya'ni  $Am + Bn + Ck = 0$ .

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikular bo'lishi uchun  $\vec{p}$  va  $\vec{n}$  vektorlar parallel bo'lishi kerak, ya'ni  $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{k}$ .

To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasini topish uchun, to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi va tekislikning umumiy tenglamasi orqali hosil bo'lgan sistemani yechish lozim, ya'ni

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = kt + c \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

**Masalan 1.**  $M_0(2; -2; 1)$  nuqtadan va  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{2}$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

**Yechish:**  $M(x; y; z)$  izlanayotgan tekislikda yotuvchi nuqta bo'lsin.  $M_1(1; 2; -3)$  to'g'ri chiziqdagi nuqta. U holda  $\vec{p}(2; -3; 2)$  berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori,  $\overrightarrow{M_1M}(x-1; y-2; z+3)$  va  $\overrightarrow{M_1M_0}(1; -4; 4)$  vektorlar komplanar va

$$\overrightarrow{(M_1M_0 \vec{p} M_1M)} = 0 \text{ bo'ladi. Demak } \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ x-1 & y-2 & z+3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bundan  $4x + 6y + 5z - 1 = 0$  izlanayotgan tekislik tenglamasi hosil bo'ladi.

**Masalan 2.**  $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 3x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$  to'g'ri chiziq bilan  $2x + y + z - 4 = 0$

tekislik orasidagi burchak topilsin.

**Yechish:** To'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:  $\frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-\frac{3}{2}}$ . Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi

vektori  $\vec{p}(1; 3; -\frac{3}{2})$ .

$2x + y + z - 4 = 0$  tekislikning normal vektori esa  $\vec{n}(2; 1; 1)$ . Demak, to'g'ri chiziqning berilgan tekislik bilan hosil qilgan burchagi

$$\sin \varphi = \frac{\left| 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 \right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

### 3. Chiziqli fazo

#### Chiziqli fazo tushunchasi

Chiziqli fazo tushunchasi matematikadagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, iqtisodda ham muhim ahamiyatga ega.

**Ta'rif.** Agar bo'sh bo'lmagan  $L$  to'plamning istalgan  $x, y, z$  elementlari va  $\lambda$  son uchun qo'shish  $x + y \in L$ , songa ko'paytirish  $\lambda x \in L$  aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa:

1.  $x + y = y + x$  (qo'shish amalinining kommutativligi);
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (qo'shishning assosiativligi);
3.  $L$  da shunday  $0$  (nol) element mavjudki, istalgan  $x \in L$  uchun  $x + 0 = x$ ;
4. Har bir  $x \in L$  uchun,  $L$  da shunday  $x$  elementi mavjudki, uning uchun  $x + (-x) = 0$ ;
5.  $\alpha$  va  $\beta$  sonlar va  $x \in L$  uchun  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;
6.  $1 \cdot x = x$ ;
7.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
8.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami  $R = (-\infty, +\infty)$  dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo *haqiqiy chiziqli fazo* deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami  $C$  dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo *kompleks chiziqli fazo* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar shunday  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sonlar topilib, ular uchun  $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi  $x$  vektor  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

**Ta'rif.** Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sonlar topilib, ular uchun

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1)-tenglik o'rinli ekanligidan  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  bo'lsa, ular *chiziqli-erkli vektorlar sistemasi* deyiladi.

Agar  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vektorlardan bir nechta chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar  $L$  chiziqli fazoda  $n$  tasi chiziqli-erkli va istalgan  $n+1$  tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli-erkli vektorlarning maksimal soni  $n$  ga teng bo'lsa, u holda  $L$  fazo *n o'lchovli chiziqli fazo* deyiladi.

**Ta'rif.**  $n$  o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan  $n$  ta chiziqli-erkli vektorlar sistemasi *chiziqli fazoning bazisi* deyiladi.

**Teorema.** Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.

**Isbot.**  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar  $L$  dagi bazis bo'lsin, agar  $x \in L$  ( $x \neq 0$ ) bo'lsa, u holda  $x, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi, ya'ni hammasi ham nol bo'lmagan shunday  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sonlar mavjudki, bunda  $\lambda_0 x + \lambda_1 \ell_1 + \dots + \lambda_n \ell_n = 0$  tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda,  $\lambda_0 \neq 0$  bo'lishi kerak, aks holda  $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_n \ell_n = 0$  bo'lib,  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  ekanligi kelib chiqadi. Demak,  $\lambda_0 \neq 0$  bo'lishi kerak, u holda

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \ell_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \ell_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \ell_n \quad (2)$$

tenglik hosil qilamiz, ya'ni  $x$  vektor  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekan. Endi  $x$  ni (2)-tenglik orqali yagona

usulda ifodalash mumkinligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik,  $x \in L, x \neq 0$  uchun ushbu

$$x = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_n \ell_n$$

$$x = \beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \dots + \beta_n \ell_n$$

tengliklar o'rinli bo'lsin, bu tengliklar ayirmasini olsak, u holda  $(\alpha_1 - \beta_1)\ell_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\ell_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\ell_n = 0$  tenglikni hosil qilamiz.

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  lar chiziqli-erkli bo'lgani uchun

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0,$$

ya'ni  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$  kelib chiqadi. Demak,  $x$  vektor (2)-tenglik orqali yagona ko'rinishda ifodalanar ekan. Teorema isbot bo'ldi.

**Teorema.** Agar  $L$  dagi  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar chiziqli-erkli bo'lib, istalgan  $x$  vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u holda bu vektorlar  $L$  da bazisni tashkil etadi.

**Isbot.**  $x \in L$  bo'lsin, u holda teorema shartiga ko'ra  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sonlar mavjudki, ular uchun  $x = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_n \ell_n$  bo'ladi. Bundan esa  $1 \cdot x - \lambda_1 \ell_1 - \lambda_2 \ell_2 - \dots - \lambda_n \ell_n = 0$  tenglik kelib chiqadi, ya'ni  $x, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar chiziqli bog'liq ekan, u holda ta'rifga ko'ra  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar bazisni tashkil etadi. Teorema isbot bo'ldi.

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar bazis bo'lib,  $x$  vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin, ya'ni  $x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$ , u holda  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sonlar  $x$  vektorning  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  bazis bo'yicha koordinatalari deb yuritiladi.  $n$  o'lchovli  $L$  chiziqli fazoda ikkita  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  va  $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$  bazislar berilgan bo'lsin, u holda  $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$  lar uchun

$$\ell_1^* = a_{11} \ell_1 + a_{12} \ell_2 + \dots + a_{1n} \ell_n$$

$$\ell_2^* = a_{21} \ell_1 + a_{22} \ell_2 + \dots + a_{2n} \ell_n$$

$$\ell_n^* = a_{n1} \ell_1 + a_{n2} \ell_2 + \dots + a_{nn} \ell_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{-----} \\ a_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  bazisdan  $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$  bazisga o'tish matritsasi deyiladi. Shuni ta'kidlaymizki, A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'ladi, shuning uchun unga teskari  $A^{-1}$  matritsa mavjud bo'lib, bu matritsa  $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$  bazisdan  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  bazisga o'tish matritsasi bo'ladi.

Endi berilgan vektorning turli bazislardagi koordinatalari orasidagi bog'lanishni qaraymiz,  $x \in L$  vektor uchun

$$X = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n = x_1^* \ell_1^* + x_2^* \ell_2^* + \dots + x_n^* \ell_n^*$$

bo'lsin, u holda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$X = A X^* \text{ ёки } X^* = (A^{-1})' X.$$

Bu yerda,  $A'$  - A matritsaning transponirlangan matritsasi.

$n$  o'lchovli-chiziqli fazoga misol keltiramiz. Elementlari tartiblangan  $n$  ta haqiqiy sonlar majmuasidan iborat bo'lgan

$$R^n = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in (-\infty, +\infty), i = \overline{1, n}\}$$

to'plamda  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  va  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$  lar uchun qo'shish:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  va  $\lambda$  songa ko'paytirish amalini:

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$  kiritsak, bu amallar chiziqli fazo ta'rifidagi 1-8-

xossalarni qanoatlantiradi. Demak,  $R^n$  kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etar ekan. Bundan tashqari

$$\ell_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\ell_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\text{-----}$$

$$\ell_n = (0, 0, \dots, 1)$$

birlik vektorlar sistemasi  $R^n$  da bazisni tashkil etadi, chunki  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  vektorni  $x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$  ko'rishda ifodalash mumkin.

**Masalan 1.** Quyida berilgan uchta vektorlar bazis hosil qilishini tekshiring:

$$\bar{a} = \{0, 3, 1\}, \bar{b} = \{1, -2, 0\}, \bar{c} = \{1, 0, 1\}.$$

$$\text{Yechish: } \bar{a} - \lambda_1 \bar{b} - \lambda_2 \bar{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3 + 2\lambda_1 - 0 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 1 - 0 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Bundan ko'rinadiki sistemaning yechimi yo'q. Demak  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  vektorlar chiziqli-erkli.

**Masalan 2.** Agar  $A_2 - A_1$  va  $A_3 - A_1$  vektorlar proporsional bo'lmasa, u holda  $A_1, A_2, A_3$  vektorlar chiziqli bog'liq emasligini ko'rsating.

**Yechish:**  $A_1(a_1, b_1, c_1) \quad A_2(a_2, b_2, c_2) \quad A_3(a_3, b_3, c_3)$  bo'lsin.

$$A_2 - A_1 = (a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1), \quad A_3 - A_1 = (a_3 - a_1; b_3 - b_1; c_3 - c_1).$$

$A_2 - A_1$  va  $A_3 - A_1$  vektorlar proporsional emasligidan

$$\begin{cases} a_3 - a_1 \neq \lambda(a_2 - a_1) \\ b_3 - b_1 \neq \lambda(b_2 - b_1) \\ c_3 - c_1 \neq \lambda(c_2 - c_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)a_1 - \lambda a_2 + a_3 \neq 0 \\ (\lambda - 1)b_1 - \lambda b_2 + b_3 \neq 0 \\ (\lambda - 1)c_1 - \lambda c_2 + c_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Demak } \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \neq \lambda_3 a_3 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \neq \lambda_3 b_3 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \neq \lambda_3 c_3 \end{cases}$$

bo'lib,  $A_1, A_2, A_3$  vektorlarning chiziqli bog'liq emasligi kelib chiqadi.

## Evklid fazolari

**Ta'rif.** Agar  $L$  chiziqli fazo berilgan bo'lib,  $\forall x, y \in L$  elementlar uchun shunday  $(x, y)$  son mos qo'yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:

1.  $(x, y) = (y, x), (x, y \in L)$ .
2.  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z), (x, y, z \in L)$ .
3.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), (\alpha \in R, x, y \in L)$ .
4.  $(x, x) \geq 0$  va faqat  $x = 0 (x \in L)$  bo'lganda  $(x, x) = 0$ .

U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo *Evklid fazosi* deyiladi.

Skalyar ko'paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin.  $x$  vektorning uzunligi (normasi)  $|x|$  deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1.  $|x| = 0$  faqat va faqat shu holdaki, agar  $x = 0$ , bo'lsa.
2. Istalgan  $\lambda$  son uchun  $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ .
3.  $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$  Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.
4.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  uchburchak tengsizligi.

Ikkita  $x$  va  $y$  vektorlar orasidagi burchak  $\theta$  quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \text{ bu yerda } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ deb qaraladi.}$$

Normaning 1- va 2-xossalari to'g'ridan to'g'ri skalyar ko'paytma ta'rifidan kelib chiqadi. 3- va 4-xossalari isbot qilaylik. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga va 1-, 2-xossalari ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz:

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + 2\alpha(x, y) + \alpha^2(y, y)$$



Bu yerda,  $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$  deb olsak, quyidagi hosil bo'ladi.

$$0 \leq (x, x) - 2 \cdot \frac{(x, y)^2}{(y, y)} + \frac{(x, y)^2 \cdot (y, y)}{(y, y)^2} = |x|^2 - \frac{(x, y)^2}{|y|^2} \Rightarrow (x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

Demak, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi isbot bo'ladi. Endi 4-xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

Agar  $x$  va  $y$  vektorlar ortogonal vektorlar orasidagi burchak  $\frac{\pi}{2}$  ga teng bo'lsa, ya'ni  $(x, y) = 0$  bo'lsa, u holda ular *ortogonal vektorlar* deyiladi.

Agarda  $n$  o'lchovli evklid fazosidagi  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  vektorlar uchun  $(\ell_i, \ell_j) = 0$ ,  $i \neq j$  bo'lib,  $|\ell_i| = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , bo'lsa, u holda ular bu fazoning *ortonormal bazisi* deyiladi.

**Teorema.** Har qanday  $n$  o'lchovli  $L$  Evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

**Isbot.**  $f_1, f_2, \dots, f_n$  vektorlar  $L$  Evklid fazosidagi bazis bo'lsin, shu bazis asosida biz ortonormal bazisni hosil qilamiz. 1-qadamda  $\ell_1 = \frac{f_1}{|f_1|}$

deb olamiz, tabiiy  $|\ell_1| = 1$  bo'ladi.

2-qadamda  $f_2^* = \lambda_1 \ell_1 + f_2$  vektor uchun  $\lambda_1$  ni shunday tanlaymizki,  $(f_2^*, \ell_1) = 0$  bo'lsin, ya'ni  $0 = (f_2^*, \ell_1) = \lambda_1 (f_1, \ell_1) + (f_2, \ell_1) = \lambda_1 + (f_2, \ell_1)$  demak,

$\lambda_1 = -(f_2, \ell_1)$  deb olsak  $(f_2^*, \ell_1) = 0$  bo'lar ekan, endi  $\ell_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|}$  deb olsak,

$|\ell_2| = 1$  va  $(\ell_1, \ell_2) = 0$  bo'ladi.

$k < n$  uchun  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$  ortonormal vektorlar hosil qilingan bo'lsin,  $k + 1$  qadamda  $f_{k+1}^* = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_k \ell_k + f_{k+1}$  vektor uchun

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sonlarni shunday tanlaymizki  $(\ell_i, f_{k+1}^*) = 0, i = \overline{1, k}$  tengliklar o'rinli bo'lsin, buning uchun  $\lambda_i = -(f_{k+1}^*, \ell_i), i = 1, 2, \dots, k$  deb olish

yetarlidir. Agar biz  $\ell_{k+1} = \frac{f_{k+1}^*}{|f_{k+1}^*|}$  deb olsak,  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}$  ortonormal

sistemani tashkil qiladi. Natijada  $n$  ta qadamdan so'ng  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  ortonormal sistema hosil bo'ladi. Istalgan ortonormal sistema chiziqli-erkli bo'ladi, chunki agar  $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_i \ell_i + \dots + \lambda_n \ell_n = 0$  bo'lsa, u holda istalgan  $i = 1, 2, \dots, n$  uchun

$$(\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \dots + \lambda_i \ell_i + \dots + \lambda_n \ell_n, \ell_i) = \lambda_i (\ell_i, \ell_i) = \lambda_i = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak,  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  chiziqli-erkli ekan,  $L$  fazo  $n$  o'lchovli bo'lgani uchun  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  ortonormal bazis ekanligi kelib chiqadi.

Evklid fazosiga misol tariqasida chiziqli  $n$  o'lchovli fazo  $R^n$  ni keltirish mumkin.  $R^n$  da  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  va  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb quydagini olamiz:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Kiritilgan skalyar ko'paytma ta'rifdagi barcha xossalarni qanoatlantiradi.  $R^n$  da kiritilgan skalyar ko'paytmaga mos ravishda  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  vektorning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Evklid fazoda  $\ell_1 = (1, 0, \dots, 0), \ell_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \ell_n = (0, 0, \dots, 1)$  vektorlar ortonormal bazisni tashkil etadi.

### Chiziqli operatorlar

**Ta'rif.** Agar  $L_1$  chiziqli fazoning har bir elementi  $x \in L_1$  uchun biron qoida, qonunga asosan  $L_2$  chiziqli fazoning aniq elementi mos

qo'yilgan bo'lsa,  $L_1$  ni  $L_2$  ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni  $A$  deb belgilab, akslantirishni  $A: L_1 \rightarrow L_2$  shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda  $x$  ning  $y$  ga mos kelishi  $Ax = y$  kabi yoziladi.

**Ta'rif.** Agar istalgan  $x \in L_1, y \in L_2$  va  $\lambda$  son uchun

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $A: L_1 \rightarrow L_2$  operator *chiziqli operator* deyiladi.

$A: L_1 \rightarrow L_2$  va  $B: L_2 \rightarrow L_3$  chiziqli operatorlar bo'lsa,  $A$  va  $B$  operatorlarning ko'paytmasi (yoki kompozitsiyasi) deb ushbu  $(AB)(x) = A(Bx)$  ko'rinishda aniqlangan operatorga aytiladi. Bu yerda,  $AB: L_1 \rightarrow L_3$  va  $C = AB$  chiziqli operatoridir.

Agar  $A: L \rightarrow L$  va  $B: L \rightarrow L$  chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun  $A + B, \lambda \cdot A$  va  $A \cdot B$  chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi.  $L$  chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini  $\mathfrak{L}(L)$  deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan  $\mathfrak{L}(L)$  to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

**Ta'rif.** Agar  $A \in \mathfrak{L}(L)$  operator uchun shunday  $\lambda$  son mavjud bo'lib,

$$Ax = \lambda x, x \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $x$  vektor  $A$  operatorning xos vektori deyiladi.

$A: R^n \rightarrow R^m$  chiziqli operator bo'lsin. Biz  $A$  operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun  $R^n$  da  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  va  $R^m$  da esa  $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_m^*$  bazislarni olaylik.  $x \in R^n, Ax = y \in R^m, A\ell_i \in R^m$  uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$$

$$Ax = y = y_1 \ell_1^* + y_2 \ell_2^* + \dots + y_m \ell_m^*$$

$$A\ell_i = a_{1j} \ell_1^* + a_{2j} \ell_2^* + \dots + a_{mj} \ell_m^*, j = 1, 2, \dots, n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j A \ell_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \ell_i^* = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \ell_i^*$$

$$Ax = y = \sum_{i=1}^m y_i \ell_i^*$$

Demak,  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarini kiritsak,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{-----} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX = Y$$

Bu yerda,  $A$  matritsa qaralayotgan  $A$  operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi.  $A \in \mathfrak{A}(R^n)$  bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{-----} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  vektor  $A$  chiziqli operatorning  $\lambda$  xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni  $Ax = \lambda x$  bo'lsin.

Agar  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil

bo'ladi  $AX = \lambda X$ .

Bu yerdan  $E$  birlik matritsa uchun, quyidagi  $(A - \lambda E)X = 0$  tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim  $x=0$  yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun  $|A - \lambda E| = 0$  bo'lishi, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determinant  $\lambda$  ga nisbatan  $n$ -tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni  $A$  operatorning yoki  $A$  matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1)-tenglama  $A$  operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

$A$  operator  $n$  ta chiziqli-erkli  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  xos vektorlarga ega bo'lib,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  xos sonlari bo'lsin, u holda  $A$  operatorning  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  bazisga mos keluvchi  $A$  matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ ya'ni } A \text{ matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.}$$

Aksincha, biron-bir bazisda  $A$  operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari  $A$  operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa diagonallaridaga sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar  $A$  operator  $n$  ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli-erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda  $A$  operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'ladi.

**Masalan 3.** Matritsaning xos sonlari va xos vektorini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Yechish:** Matritsaning xarakteristik tenglamasi  $\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$

bundan  $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Xos vektorni topish uchun:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 2 \text{ ga mos keluvchi xos vektor } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \text{ sistemaning yechimi}$$

bo'ladi, bu bitta tenglama,  $x_2 = b$  deb olsak,  $x_1 = (-2b, b) = b(-2, 1)$  bo'ladi.

$\lambda_2 = 5$  xos songa mos keluvchi xos vektor  $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$  erkli

o'zgaruvchini  $x_2 = c$  deb olsak.  $x_2 = (c, c) = c(1, 1)$ .  $b$  va  $c$  ixtiyoriy sonlar bo'lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil uzunlikdagi xos vektorlar mos kelishi mumkin. Masalan bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar

$$x_1 = (-2, 1), \quad x_2 = (1, 1).$$

**Masalan 4.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  matritsaning xos sonlari va xos

vektorlarini toping.

**Yechish:**  $A$  matritsaga mos xarakteristik tenglamani yozamiz:

$$|A - \lambda E| = 0, \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad (3-\lambda)^3 = 0. \quad \text{Demak, } \lambda = 3 - A$$

matritsaning uch karrali xarakteristik soni.

Xarakteristik vektorni topish uchun  $(A - \lambda E)X = 0$  matritsaviy tenglamaning noldan farqli yechimlarini topamiz.

$\lambda = 3$  deb yagona  $x + y = 0$  tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib,  $x = -y$ ,  $y = a$ ,  $z = b$  deb  $x = -a$ ,  $y = a$ ,  $z = b$ , ya'ni  $\bar{X} = (-a, a, b)$  ko'rinishdagi xos bo'lmagan vektorni hosil qilamiz. Uni ikkita chiziqli-erkli  $\vec{a}_1 = (-1; 1; 0)$  va  $\vec{a}_2 = (0; 0; 1)$  vektorlar orqali ifodalash mumkin.

### Kvadratik formalar

Turli amaliy masalalarni yechishda kvadratik formalar hosil bo'lib, ularni o'rganishga to'g'ri keladi.

**Ta'rif.**  $n$  ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan  $f$  funksiyaga aytiladi.

Bu yerda,  $a_{ij}$  lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib,  $a_{ij} = a_{ji}$  shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi,  $a_{ij} = a_{ji}$  shart bajarilgani uchun bunday matritsalar simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X) = X'AX. \quad (3)$$

Bu yerda,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  matritsa ustundan iboratdir.

$C = (c_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )  $n$ -tartibli xos bo'lmagan matritsa bo'lib,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  va  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  lar  $X = CY$  tenglik orqali bog'langan bo'lsin. U holda (3)-tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f = X'AX = (CY)'A(CY) = (Y'C')A(CY) = Y'(C'AC)Y = Y'A^*Y$$

Demak,  $X = CY$  xos bo'lmagan chiziqli almashtirishda  $f$  kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo'lar ekan

$$A^* = C'AC$$

Agar barcha  $i \neq j$  lar uchun  $a_{ij} = 0$  bo'lsa, ya'ni

$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$  ko'rinishda bo'lsa, demak kvadratik

formaning matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lsa u holda

$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Quyidagi teoremlar o'rinlidir:

**Teorema.** Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'nosida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinlidir:

**Teorema (Kvadratik forma uchun inersiya qonuni).** Kvadratik formaning barcha kanonik ko‘rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo‘ladi.

Kvadratik formaga mos keluvchi matritsaning rangi shu kvadratik formaning rangi deb atalib, kvadratik formaning kanonik ko‘rinishdagi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng bo‘lib, yuqoridagi teorema ko‘ra kvadratik formaning barcha xos bo‘lmagan chiziqli almashtirishlari uchun uning rangi o‘zgarmas bo‘ladi.

Agar barcha  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  uchun  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  ( $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ ) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi.

**Teorema.**  $F = X'AX$  kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lishi uchun  $A$  matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo‘lishi zarur va yetarlidir, ya’ni

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo‘lishi uchun esa  $(-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

**Masalan 1.** Berilgan kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi ortogonal almashtirishni aniqlang:  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

**Yechish:** Kvadratik formaga mos matritsa  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shu matritsaning xos son va vektorlarini topamiz:  $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0. \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$



Xos vektorlarni topamiz:

$$a) \lambda_1 = -2 \text{ uchun } (A+2E)X_I=0, \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Bundan esa  $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$  sistemani hosil qilamiz.

Bu sistemani yechib  $x_1=k, x_2=k, x_3=0$  ni hosil qilamiz.

b)  $\lambda_2=3$  uchun xuddi  $a$  punktdagi kabi mulohazalarda  $x_1=-k, x_2=k, x_3=k$  yechimlarni hosil qilamiz.

d)  $\lambda_3=6$  uchun ham xuddi  $a$  punktdagi kabi mulohazalarda  $x_1=k, x_2=-k, x_3=2k$  yechimlarni hosil qilamiz.

Agar  $A$  matritsali  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kvadratik forma biror  $X=B\bar{X}$  ortogonal almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga keltirilgan bo'lsa, u holda  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  koeffitsientlar  $B$  matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlari bo'ladi. B ortogonal matritsaning ustunlarini tashkil etuvchi  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$  ustun-vektorlar  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  xos sonlarga mos shu matritsaning xos vektorlarini tashkil etadi.

Bizning misolda  $X_I = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 2k \end{pmatrix}$   $A$  matritsaning

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$  xos sonlariga mos  $X_I, X_2, X_3$  xos vektorlari ortogonal bo'lishi kerak.  $t=1$  qiymatda bu vektorlarni normallab, ortogonalini tekshiramiz. Normal vektorlar uchun  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  shart

o'rinli ekanligini inobatga olib  $X_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorni  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ga

ko'paytirib  $X_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  normal vektorni hosil qilamiz.

Xuddi shu kabi  $X_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$X_1, X_2, X_3$  xos vektorlar o'zaro juft-juft ortogonal, ya'ni  $X_1^T * X_2 = X_1^T * X_3 = X_2^T * X_3 = 0$  bo'lgani uchun  $B$  quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

O'zgaruvchilarning  $X = B\bar{X}$  ortogonal almashtirilishida berilgan kvadratik forma quyidagi  $F = 3\bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_3^2$  kanonik ko'rinishga keladi, bunda

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}, & \bar{x}_2 &= \frac{x_1}{\sqrt{6}} - \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{2x_3}{\sqrt{6}}, & \bar{x}_3 &= \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}. \\ x_1 &= -\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{3}} + \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{6}} + \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2}}, & x_2 &= \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{3}} - \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{6}} + \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2}}, & x_3 &= \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{3}} + \frac{2\bar{x}_2}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

### Iqtisodda chiziqli modellar

Matritsaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1, S_2, \dots, S_n$   $n$  ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda  $x_1, x_2, \dots, x_n$  larga teng bo'lsin.  $a_{ij} - S_j$  mamlakatning  $S_i$  mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

tenglik o'rinni bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan  $S_i (i = \overline{1, n})$  mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi  $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$  tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'lishi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni  $P_i \geq x_i, i = \overline{1, n}$ .

Agar  $P_i > x_i$  deb faraz qilsak, u holda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Bu yerdan  $\sum_{i=1}^n P_i > \sum_{i=1}^n x_i$ , ya'ni  $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^n x_k > \sum_{k=1}^n x_k$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak,  $P_i \geq x_i$  tengsizlik o'rniga  $P_i = x_i$  tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtayi nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi

uchun  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  vektorni kiritsak u holda  $P_i = x_i$ , ya'ni  $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = x_i, \quad i = \overline{1, n}$

tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:  $AX=X$ , ya'ni qaralayotgan masala  $A$  matritsaning  $\lambda = 1$  xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

**Masalan 1.** To'rtta mamlakat savdosining strukturaviy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

budgetlar yig'indisi  $x_1+x_2+x_3+x_4=6270$  sh.p.b. (shartli pul birligi) bo'lsa, bu mamlakatlarning budgetini toping.

**Yechish:** Berilgan strukturaviy matritsa  $A$  ning xos soni  $\lambda = 1$  ga mos keluvchi xos vektor  $\bar{x}$  ni topish kerak  $(A-E)\bar{x}=0$ , ya'ni tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bu sistemaning rangi uchga teng bo'lgani uchun, noma'lumlardan bittasi erkli o'zgaruvchi va u orqali qolganlari ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib xos vektor  $x$  ning komponentlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budgetlar yig'indisiga qo'yib  $c$  kattalikni topamiz:  $c=1210$ , bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budgetining izlanayotgan kattaligini topamiz:  $x_1=1400$ ,  $x_2=1460$ ,  $x_3=2200$ ,  $x_4=1210$ .

**Masalan 2.**  $X_1, X_2, X_3$  davlat budgetiga ega uchta mamlakat savdosini qaraylik. Butun davlat budgeti har bir mamlakat uchun yoki mamlakat ichida tovar olish uchun yoki boshqa mamlakatdan import olish uchun sarflanadi deb hisoblaymiz. Aytaylik, birinchi mamlakat o'z budgetining yarimini mamlakat ichidagi tovarni ayirboshlashga, budgetning  $\frac{1}{4}$  qismini ikkinchi mamlakatdan va qolgan  $\frac{1}{4}$  qismini uchinchi mamlakatdan mahsulot olishga sarflasin. Ikkinchi mamlakat ichki tovar uchun ham, birinchi va uchinchi mamlakatdan mahsulot olish uchun ham budgetni teng miqdorda taqsimlasin. Uchinchi mamlakat budgetning  $\frac{1}{2}$  qismiga birinchi mamlakatdan, qolgan  $\frac{1}{2}$  qismiga ikkinchi

mamlakatdan tovar sotib olib, mamlakat ichida hech qanday mahsulot ayirboshlamasin. Shu xalqaro savdo modelining xos vektori  $X$  topilsin.

**Yechish:** Bu xalqaro savdoning strukturaviy matritsasini kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} I & II & III \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Bunda,  $a_{ij}$ - $j$  mamlakatning  $i$  mamlakatdan sotib olgan mahsulotining davlat budjetidagi qismi. Bu matritsa har bir ustuni elementlarining yig'indisi birga teng.

$i$  mamlakat bir yillik savdodan so'ng quyidagi tushumga ega bo'ladi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Masalan, birinchi mamlakat uchun tushum quyidagicha bo'ladi:

$$P_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Savdoning muvozanatli (сбалансированный) bo'lishi uchun har bir mamlakat uchun savdoning tanqissizligini talab qilish zarur: barcha  $i$  lar uchun  $P_i \geq X_i$

Savdoning tanqissizligi sharti  $P_i = X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  kabi ifodalanadi.

Matritsaviy ko'rinishda bu tenglik  $AX = X$  kabi ifodalanadi.

Bu yerda,  $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  yoki  $(A - E) \cdot X = 0$ .

Demak, qaralayotgan hol uchun  $X$  ni aniqlovchi tenglamalar sistemasi

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ ko'rinishiga ega.}$$

Bu sistemaning umumiy yechimi: 
$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

Shuning uchun xos vektor deb  $\bar{x} = x^T = (4; 3; 2)$  vektorni olish mumkin. Xususan, bu savdoda ishtirok etayotgan mamlakat savdosini muvozanatlash uchun faqat ularning davlat budjetlari  $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 2$  nisbatda bo'lgandagina erishish mumkinligini anglatadi.

**Masalan 3.** Quyidagi jadvalda shartli mahsulot uchun ikki oy davomida bo'lgan talabalar xarakteristikasi keltirilgan. Shu jadval asosida ma'lum oy uchun oldingi oyga nisbatan narx indeksi va inflyatsiya miqdorini aniqlang.

| Mahsulot turi     | Soni | Shu oy uchun bir birlik mahsulot narxi | Shu oy uchun xarajatlar miqdori | Oldingi oy uchun bir birlik mahsulot narxi | Oldingi oy uchun xarajatlar miqdori |
|-------------------|------|--|---------------------------------|--|-------------------------------------|
| Tuxum             | 3    | 4000                                   | 12000                           | 3500                                       | 10500                               |
| Non               | 10   | 2000                                   | 20000                           | 1800                                       | 18000                               |
| Kassetalar        | 2    | 4000                                   | 8000                            | 4500                                       | 9000                                |
| Umumiy xarajatlar | —    | —                                      | 40000                           | —  | 37500                               |

**Yechish:**  $\bar{q}(3; 10; 2)$  orqali iste'mol tovarlari soni vektorini,  $c(4000; 2000; 4000)$  shu oydagi narxlar vektorini,  $\bar{c}_{ol}(3500; 1800; 4500)$ —oldingi oy narxlar vektorini aniqlaymiz.

U holda narxlar indeksi quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$P = \frac{(\bar{c}, \bar{q})}{(\bar{c}_{ol}, \bar{q})} \cdot 100\% = \frac{40000}{37500} \cdot 100 = 106,7\%$$

$$\text{Inflyatsiya indeksi esa } i = P - 100\% = \frac{(\bar{c}, \bar{q})}{(\bar{c}_{ol}, \bar{q})} \cdot 100 - 100 = \frac{(\bar{c} - \bar{c}_{ol}, \bar{q})}{(\bar{c}_{ol}, \bar{q})} \cdot 100\%$$

formula yordamida hisoblanadi.  $i = 106,7\% - 100\% = 6,7\%$

**Javob:** Narxlar indeksi hisobi 106,7%, inflyatsiya indeksi ko'rsatkichi 6,7%.

## 5. To'plamlar. Ketma-ketliklar va funksiyalar limiti.

### To'plamlar va ular ustida amallar

To'plam ta'riflanmaydigan matematik tushuncha bo'lib, buyumlar va obyektlarni birgalikda qarash natijasida vujudga keladi.

To'plamni tashkil etuvchi obyektlar shu to'plamning elementlari deyiladi.

To'plamlar odatda lotin yoki grek alifbosining bosh harflari, ularning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi.

Agar  $A$  to'plam  $a, b, c, \dots$  elementlardan tuzilgan bo'lsa,  $u$   $A = \{a, b, c, \dots\}$  ko'rinishida belgilanadi.  $a \in A$  —  $a$  elementning  $A$  to'plamga tegishli ekanligini,  $f \notin A$  —  $f$  elementning  $A$  to'plamga tegishli emasligini anglatadi.

**Ta'rif.**  $A$  to'plamning har bir elementi  $B$  to'plamda mavjud bo'lsa va, aksincha,  $B$  to'plamning har bir elementi  $A$  to'plamda mavjud bo'lsa, u holda  $A$  va  $B$  to'plamlar *o'zaro teng (bir xil) to'plamlar* deyiladi va  $A=B$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.**  $B$  to'plamning har bir elementi  $A$  to'plamda mavjud bo'lsa,  $B$  to'plam  $A$  to'plamning *xos bo'lmagan qism to'plami* deyiladi va  $B \subseteq A$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.**  $B$  to'plamning barcha elementlari  $A$  to'plamda mavjud bo'lib,  $A$  to'plamda  $B$  to'plamga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa,  $B$  to'plam  $A$  to'plamning *qism toplami* deyiladi va  $B \subset A$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.** Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va  $\emptyset$  orqali belgilanadi.

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning kamida bittasiga tegishli barcha elementlardan tuzilgan to'plam  $A$  va  $B$  *to'plamlarning birlashmasi* deyiladi va  $A \cup B$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning umumiy elementlardan tuzilgan to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlarning kesishmasi deyiladi va  $A \cap B$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.**  $A$  to'plamdan  $B$  to'plamlarning ayirmasi deb,  $A$  to'plamga tegishli, lekin  $B$  to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi va  $A \setminus B$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.**  $A$  to'plamning  $B$  to'plamda hamda  $B$  to'plamning  $A$  to'plamda mavjud bo'lmagan elementlardan tuzilgan to'plamga  $A$  va  $B$  to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va  $A \Delta B$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.**  $B$  to'plam  $A$  to'plamlarning qism to'plami bo'lganda  $A \setminus B$  to'plam  $B$  to'plamni  $A$  to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va  $\bar{B}$  kabi belgilanadi.

**Ta'rif.** Har qanday to'plamning xos qism to'plami deb qaralgan to'plam universal to'plam deyiladi va  $U$  orqali belgilanadi.

### To'plam ustida amallarning xossalari

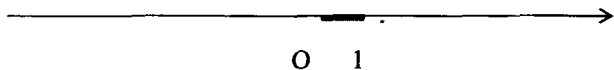
- |  |  |
|--|--|
| 1. $A \cap B = B \cap A$ ,                             | 2. $A \cup B = B \cup A$ ,   |
| 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ,           | 4. $A \cap A = A$ , $A \cup A = A$ ,   |
| 5. $A \cup (A \cap B) = A$ , $A \cap (A \cup B) = A$ , | 6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ , $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ , |
| 7. $A \cup U = U$ ,                                    | 8. $A \cap U = A$ ,  |
| 9. $\bar{\bar{A}} = A$ ,                               | 10. $\bar{\emptyset} = U$ , $\bar{U} = \emptyset$ .  |

**Ta'rif.** Elementlari  $n$  sonlardan iborat to'plam sonli to'plam deyiladi. Maktab matematika kursidan ma'lumki,  $N$  – natural sonlar to'plami,  $Z$  – butun sonlar to'plami,  $Q$  – ratsional sonlar to'plami,  $I$  – irratsional sonlar to'plami,  $R$  – haqiqiy sonlar to'plami,  $C$  – kompleks sonlar to'plami. Bu sonli to'plamlar uchun  $R = Q \cup I$  va  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ .

To'g'ri chiziqda biror  $O$  nuqtani aniqlaymiz va uni sanoq boshi deb o'ng va chap tomonlariga biror birlik masshtabdagi



kesmalarni qo‘yamiz. Bunday hosil qilingan sistemaga *son o‘qi* deyiladi.



Haqiqiy sonlar va sonlar o‘qidagi nuqtalar orasida bir qiymatli akslanish mavjud, ya’ni har bir haqiqiy songa son o‘qida ma’lum bir nuqta va har bir son o‘qidagi nuqtaga aniq bir haqiqiy son mos keladi.

$X$  to‘plamning  $a \leq x \leq b$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami  $[a; b]$  kesma yoki segment;  $a < x < b$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami  $(a; b)$  interval;  $a \leq x < b$  yoki  $a < x \leq b$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami esa mos ravishda  $[a; b)$  va  $(a; b]$  yarim interval deb ataladi.

### **Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o‘zgarish sohalari**

$X$  va  $Y$  haqiqiy sonlar to‘plamlari bo‘lsin.

**Ta’rif.** Agar  $X$  to‘plamdagi har bir  $x$  songa biror  $f$  qoida yoki qonunga ko‘ra  $Y$  to‘plamdagi bitta  $y$  son mos qo‘yilgan bo‘lsa,  $X$  to‘plamda funksiya berilgan deb ataladi va  $y = f(x)$  kabi belgilanadi.  $X$  to‘plam funksiyaning *aniqlanish sohasi*,  $Y$  esa *o‘zgarish sohasi* deyiladi.

Demak funksiya ikki to‘plam orasidagi moslikni ifodalaydi.

Funksiyaning berilish usullari turlicha bo‘lib, ular quyidagilardan iborat:

1. Agar  $y$  bog‘liqli o‘zgaruvchi bilan  $x$  erkli o‘zgaruvchi orasidagi bog‘lanish formula orqali ifodalansa, u holda funksiya analitik usulda, ya’ni  $y = f(x)$  tenglik ko‘rinishida berilgan deyiladi.

Masalan,  $f = \{(x, x^2) : x \in R\}$  funksiyani  $y = x^2$ , ya’ni  $f(x) = x^2$  formula orqali berish mumkin.

**Ta'rif.** Analitik usulda berilgan  $y = f(x)$  funksiyaning aniqlash sohasi deb,  $x$  argumentning shunday qiymatlar to'plami  $D(f)$  ga aytiladiki, bunda har bir  $x \in D(f)$  uchun  $y$  ning qiymati chekli va haqiqiy son bo'lishi lozim.

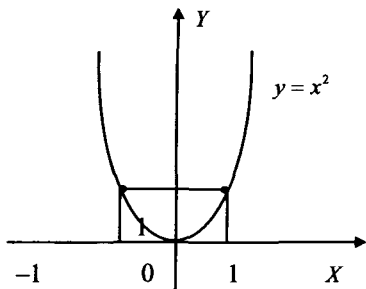
2. Funksiyaning jadval ko'rinishida berilishi.

Masalan,  $f = \{(0,1);(1,3);(2,-5)\}$  funksiya berilgan bo'lsa, uni quyidagi jadval shaklida berish mumkin.

|        |   |   |    |
|--------|---|---|----|
| $x$    | 0 | 1 | 2  |
| $f(x)$ | 1 | 3 | -5 |

3. Funksiyaning grafik usulda berilishi. Bu holda  $f = \{(x, f(x)): x \in D(f)\}$  to'plam tekislikdagi, dekart koordinatalar sistemasida  $(x, f(x))$  nuqtalarni belgilash natijasida hosil bo'lgan to'plam shaklida beriladi. Bu to'plam *funksiya grafigi* deyiladi.

Masalan,  $f(x) = x^2$  funksiyani grafik usulda bersak, u quyidagicha bo'ladi:



4. Funksiyani biror qonun yoki qoida yordamida bayon qilish bilan ifodalash. Masalan, *Dirixle funksiyasi* deb nomlanuvchi funksiya quyidagicha beriladi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

**Ta'rif.** Agar barcha  $x \in D(f)$  uchun  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $f$  funksiya juft (toq) funksiya deyiladi.

Masalan,  $f(x) = x^2$  juft funksiya,  $f(x) = x^3$  toq funksiya bo'ladi.

Funksiya toq ham, juft ham bo'lmagligi mumkin:

Masalan:  $f(x) = |x| + \sin x$ ,  $y = 1 + x$ .

**Ta'rif.** Agar  $\exists M > 0$  bo'lsada  $\forall x \in X$  uchun  $|f(x)| \leq M$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $f$  funksiya  $D(f) \supset X$  to'plamda *chegaralangan funksiya* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar shunday musbat  $T$  son mavjud bo'lsada,  $\forall x \in D(f)$  uchun  $x \pm T \in D(f)$  bo'lib,  $f(x \pm T) = f(x)$  tenglik o'rinli bo'lsa, bunday funksiyaga *davriy funksiya* deyiladi. Bunday  $T > 0$  sonlarning eng kichigi  $f(x)$  *funksiyaning davri* deyiladi.

Masalan,  $f(x) = \sin x$  funksiyasi chegaralangan, davri  $T = 2\pi$  bo'lgan davriy funksiyadir, chunki istalgan  $x$  uchun  $|\sin x| \leq 1$  ( $M = 1$ ) bo'lib,  $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$  tenglik o'rinlidir.

**Ta'rif.** Agar  $\forall x_1 \in X$ , va  $\forall x_2 \in X$  uchun,  $x_1 < x_2$  tengsizlikdan  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqsa,  $f$  funksiya  $D(f) \supset X$  to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Agar ta'rifda  $X = D(f)$  bo'lsa, funksiya o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Bunday funksiyalar *monoton o'suvchi (kamayuvchi) funksiyalar* ham deyiladi.

**Ta'rif.**  $y = f(x)$  va  $y = g(x)$  funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar deyiladi, agarda  $D(f) = E(g)$ ,  $E(f) = D(g)$  bo'lib, istalgan  $x \in D(f)$  uchun  $g(f(x)) = x$  va istalgan  $x \in D(g)$  uchun  $f(g(x)) = x$  tengliklar o'rinli bo'lsa. Masalan,  $y = a^x$  va  $y = \log_a x$  funksiyalar o'zaro teskari bo'ladi, chunki  $a^{\log_a x} = x$  va  $\log_a a^x = x$  tengliklar o'rinlidir.

O'zaro teskari funksiyalar grafiklari  $OXY$  tekisligida  $y = x$  to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetirik joylashgan bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar  $y = f(x)$  va  $u = g(x)$  funksiyalar uchun  $E(g) \cap D(f) \neq \emptyset$  bo'lsa, u holda  $y = f(g(x))$  funksiya *murakkab funksiya* deyiladi.

## Elementar funksiyalarning turlari

Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalar guruhiga tegishli funksiyalarga aytiladi.

**1. Darajali funksiya:**  $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, D(f) = (0, +\infty)$ . Agar  $|\alpha|$  toq bo'lsa funksiya *toq funksiya* bo'ladi, agar  $|\alpha|$  juft bo'lsa funksiya *juft funksiya* bo'ladi.

**2. Butun va kasr ratsional funksiyalar:**

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  funksiya ( $n \in \mathbb{N}$  va  $a_i = \text{const}, i = \overline{1, n}$ ) *butun ratsional funksiya* (polinom; ko'phad) deyiladi.

Ikkita butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m},$$

funksiya *kasr ratsional funksiya* deyiladi.

**Masalan.**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  butun ratsional funksiya,

$f(x) = \frac{k}{x}$  kasr ratsional funksiya misol,  $D(f) = (-\infty; +\infty) \cup (0, +\infty)$ ,

$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

**3. Ko'rsatkichli funksiya:**  $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

$$D(f) = (-\infty, +\infty), E(f) = (0, +\infty)$$

**4. Logarifmik funksiya:**  $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

$$D(f) = (0, +\infty), E(f) = (-\infty, +\infty)$$

**5. Trigonometrik funksiyalar:** a)  $f(x) = \sin x$ , davriy, davri  $2\pi$  ga

teng  $D(f) = (-\infty, +\infty), E(f) = [-1; 1]$  toq funksiya. b)  $f(x) = \cos x$ , davriy,

davri  $2\pi$  ga teng  $D(f) = (-\infty, +\infty), E(f) = [-1; 1]$  juft funksiya. c)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,

davriy, davri  $\pi$  ga teng,  $D(f) = \left\{ x: x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, E(f) = (-\infty, +\infty)$  toq

funksiya. d)  $f(x)=ctgx$  davriy, davri  $\pi$  ga teng  $D(f)=\{x: x \in R, x \neq k\pi, k \in Z\}$ ,  $E(f)=(-\infty, +\infty)$  toq funksiya.

### 6. Testkari trigonometrik funksiyalar:

a)  $f(x)=arcsin x$ ,  $D(f)=[-1, 1]$ ,  $E(f)=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  toq funksiya.

b)  $f(x)=arccos x$ ,  $D(f)=[-1; 1]$ ,  $E(f)=[0, \pi]$

d)  $f(x)=arctgx$ ,  $D(x)=(-\infty, +\infty)$ ,  $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  toq funksiya

e)  $f(x)=arcctgx$ ,  $D(f)=(-\infty, +\infty)$ ,  $E(f)=(0, \pi)$ .

**Ta'rif.** Elementar funksiyalardan chekli sondagi algebraik amallar va chekli sondagi murakkab funksiya hosil qilish yo'li bilan qurilgan funksiyalar *elementar funksiyalar* deyiladi.

### Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti

**Ta'rif.** Natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga *sonlar ketma-ketligi* deyiladi, ya'ni  $f: N \rightarrow R$ .

Agar  $x_n = f(n)$ ,  $n \in N$  deb belgilashni kiritsak, sonlar ketma-ketligini  $\{x_n\}_1^\infty$  yoki  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  ko'rinishda ifoda etish ham qabul qilingan. Bu yerda  $x_n$  ketma-ketlikning  $n$  hadi deyiladi.

Masalan,  $f(n) = \frac{1}{n}$  ketma-ketlikni  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$  yoki  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

ko'rinishlarda ifoda etish mumkin. Bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi *chegaralangan ketma-ketlik*dir. Chunki  $n \in N, m \in N$  uchun  $n < m$  bo'lsa  $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$  bo'lib, istalgan  $n \in N$  uchun  $\frac{1}{n} \leq 1$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar istalgan  $\varepsilon > 0$  son uchun,  $\varepsilon$  atrofda tashqarida  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ketma-ketlik *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi. Bu hol  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  shaklda ifodalanib,

$n$  cheksizlikka intilganda  $x_n$  ketma-ketlikning limiti  $0$  ga teng yoki  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik  $0$  ga yaqinlashadi deb aytiladi.

**Ta'rif.** Agar istalgan  $\varepsilon > 0$  cheksiz kichik son uchun shunday  $n_0(\varepsilon)$  natural son mavjud bo'lsa, istalgan  $n \geq n_0(\varepsilon)$  bo'lgan natural  $n$  son uchun  $|x_n| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  deyiladi.

**Masalan. 1.**  $x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  ketma-ketlikni qaraylik, agar  $\varepsilon > 0$  bo'lsa,  $n < \frac{1}{\varepsilon}$ , ya'ni  $\frac{1}{n} > \varepsilon$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar chekli bo'ladi, ya'ni  $(-\varepsilon, \varepsilon)$   $\varepsilon$  atrofda tashqarida  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning chekli hadi yotadi.

Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

2.  $|q| < 1$  bo'lsin, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar  $q = 0$  bo'lsa  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$  bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Agar  $0 < |q| < 1$  bo'lsa, u holda  $\varepsilon > 0$  son uchun quyidagini hosil qilamiz.  $|q^n| = |q|^n > \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|q| > \ln\varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$  (chunki,  $\ln|q| < 0$ ). Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural son chekli bo'ladi, ya'ni  $(-\varepsilon, \varepsilon)$   $\varepsilon$  atrofda tashqarida  $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning chekli hadi yotadi.

Demak  $q$  ( $|q| < 1$ ) son uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  bo'lar ekan.

3.  $x_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$  ketma-ketlikni qaraylik.  $\alpha > 0$  ekanligidan  $\varepsilon > 0$  son uchun  $n^\alpha < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$  va bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar chekli, ya'ni  $\frac{1}{n^\alpha} > \varepsilon$  tengsizlik chekli natural son uchun o'rinli bo'lishida istalgan  $\varepsilon > 0$  son uchun  $\varepsilon$  atrofda tashqarida  $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning chekli hadi yotar ekan.

Demak,  $\alpha > 0$  son uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ .

### Cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalari

1) agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$ ;

biror  $\varepsilon > 0$  son berilganda, shunday  $n_1(\varepsilon)$  va  $n_2(\varepsilon)$  natural sonlar mavjudki,  $n \geq n_1$  bo'lganda  $-\frac{\varepsilon}{2} < x_n < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $n \geq n_2(\varepsilon)$  bo'lganda  $-\frac{\varepsilon}{2} < y_n < \frac{\varepsilon}{2}$  tengsizliklar o'rinli bo'ladi, agar  $n \geq n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$  deb olsak, u holda  $-\frac{\varepsilon}{2} < x_n < \frac{\varepsilon}{2}$  va  $-\frac{\varepsilon}{2} < y_n < \frac{\varepsilon}{2}$  tengsizliklar bir paytda o'rinli bo'ladi, ya'ni  $n \geq n_0(\varepsilon)$  bo'lganda  $-\varepsilon < x_n + y_n < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$  bo'ladi.

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  bo'lganda, istalgan  $\alpha$  son uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = 0$ ; haqiqatan ham, agar  $\alpha = 0$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \cdot x_n = 0$  ekanligi ravshan. Agar  $\alpha \neq 0$  bo'lsa, u holda  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $n_0(\varepsilon)$  natural son mavjudki,  $n \geq n_0(\varepsilon)$  bo'lganda  $-\frac{\varepsilon}{|\alpha|} < x_n < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda  $n \geq n_0(\varepsilon)$  bo'lganda  $-\varepsilon < \alpha x_n < \varepsilon$  ekanligi kelib chiqadi. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = 0$ .

3) agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ ; chunki  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $n_1$  va  $n_2$  natural sonlar mavjudki, barcha  $n \geq n_1$  uchun  $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$  va barcha  $n \geq n_2$  uchun  $|y_n| < \sqrt{\varepsilon}$  bo'ladi, u holda barcha  $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  lar uchun  $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}$ , ya'ni  $|x_n y_n| < \varepsilon$ .

Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

4) agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  bo'lsa,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Chunki  $\varepsilon = 1$  son uchun shunday  $n_0$  natural son mavjudki, istalgan  $n \geq n_0$  uchun  $|x_n| < 1$  o'rinli bo'ladi. Agar biz  $K = \max_{1 \leq n < n_0} |x_n|$  deb olsak, istalgan

natural  $n$  son uchun  $|x_n| < K+1$  tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

5) agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , ya'ni  $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Haqiqatan ham  $K > 0$  son uchun, barcha natural  $n$  larda  $|y_n| < K$  bo'lsin.  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $n_0$  mavjudki, barcha  $n \geq n_0$  lar uchun  $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda barcha  $n \geq n_0$  uchun  $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$ .

Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

6) agar barcha  $n$  larda  $0 \leq x_n \leq y_n$  tengsizlik o'rinli bo'lib  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  bo'lganligi uchun,  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  atrofda tashqarida  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning ham chekli elementi yotadi, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

7) agar barcha  $n$  larda  $x_n \leq z_n \leq y_n$  tengsizlik o'rinli bo'lib,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  bo'ladi. Ma'lumki,  $x_n \leq z_n \leq y_n$  tengsizlikdan  $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$  tengsizlik kelib chiqadi. 1-xossaga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ , bundan 6-xossaga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x_n) = 0$ . U holda yana 1-xossaga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(z_n - x_n) + x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Ta'rif.**  $A \subset \mathbb{R}$  to'plam berilgan bo'lsin. Agar shunday  $K$  son mavjud bo'lsada, istalgan  $x \in A$  uchun  $x \leq K$  ( $K \leq x$ ) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $A$  to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam deyiladi. Bunda  $K$  son  $A$  to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi. Agar  $A$  yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, bunday to'plam chegaralangan deyiladi.



**Ta'rif.** Agar  $x < K$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $\forall x \in A$  son uchun  $x < a \leq K$  ( $x > a \geq K$ ) tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $a \in A$  element mavjud bo'lsa,  $K$  son  $A$  to'plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi deyiladi va  $\sup A = k$  ( $\inf A = K$ ) ko'rinishida yoziladi.

**Teorema.** Agar  $A$  to'plam yuqoridan va quyidan chegaralangan bo'lsa  $\sup A$  ( $\inf A$ ) chekli son bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib  $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$  ( $\inf\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ ) bo'lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  bo'ladi.

**Isbot.**  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  o'suvchi bo'lsin, ya'ni  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$  o'rinli bo'lib  $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$  bo'lsin, u holda  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $n_0$  nomer mavjudki,  $x_n \in (-\varepsilon, 0]$  bo'ladi, u holda istalgan  $n \geq n_0$  uchun  $\varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq 0$ , ya'ni  $n \geq n_0$  lar uchun  $x_n \in (-\varepsilon, 0]$  bo'lar ekan. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Ketma-ketlik kamayuvchi bo'lgan holda ham isbot shu tarzda bajariladi.

**Ta'rif.** Agar istalgan  $M > 0$  son uchun  $(-M; M)$  atrof ichida  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Bu hol  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  shaklda ifodalanib,  $n$  cheksizlikka intilganda  $x_n$  ketma-ketlik limiti cheksizlikka teng yoki cheksizlikka intiladi deb aytiladi. Bu ta'rifda  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari musbat bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  manfiy bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  deb ta'riflanadi.

Masalan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$ .

5-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan, o'zgacha ko'rinishdagi ta'rifga almashtirish ham mumkin.

Agarda istalgan  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $n_0$  nomer mavjud bo'lsada barcha  $n \geq n_0$  lar uchun  $|x_n| > \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ) deyiladi. Agar istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $n_0$  nomer

mavjud bo'lsada, barcha  $n \geq n_0$  lar uchun  $x_n > \varepsilon$  ( $x_n < -\varepsilon$ ) tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  deyiladi.

**Teorema.** Agar  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa,  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi. Aksincha  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa,  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Teoremada barcha  $n$  larda  $x_n \neq 0$  deb qaraladi.

*Isbot:*  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  bo'lsin, u holda istalgan katta  $E > 0$  son uchun shunday  $n_0$  mavjudki, har qanday  $n \geq n_0$  uchun  $|x_n| < \frac{1}{E}$  tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda  $n \geq n_0$  lar uchun  $\left|\frac{1}{x_n}\right| > E$  bo'ladi, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ .

Aksincha, agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$  bo'lsa, u holda istalgan cheksiz kichik  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $n_0$  mavjudki, har qanday  $n \geq n_0$  uchun  $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$  bo'ladi, u holda  $n \geq n_0$  lar uchun  $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$  tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**Ta'rif.** Agar  $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik limiti  $a$  songa teng (yoki  $a$  songa yaqinlashadi) deyiladi. Bu hol  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  deyiladi. Bunday ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

**Masalan.**  $x_n = \frac{1}{2^n}$  ketma-ketlikning nechanchi hadidan boshlab qiymatlari:

a) 0.001 dan; b) avvaldan berilgan  $\varepsilon > 0$  sonda kichik bo'ladi.

**Yechish:** a) ketma-ketlikning  $n$  hadi 0.001 dan kichik bo'lsin:  $x_n < 0.001$  yoki  $\frac{1}{2^n} < 0.001$ . Bu tengsizlikni noma'lum  $n$  natural songa

nisbatan yechib  $2^n > 1000$  yoki  $n \geq 10$  ni hosil qilamiz. Demak, ketma-ketlikning 10-hadidan boshlab qiymatlari 0.001 dan kichik bo'ladi.

b) xuddi  $a$  punktdagi mulohazalardan  $x_n < \varepsilon$  yoki

$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$  munosabatni, bundan esa  $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$  yoki  $n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$  ni va, demak,  $n > \left[ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right]$  nomerni hosil qilamiz.

**Ta'rif.** Agar istalgan  $M > 0$  son uchun  $(-M; M)$  atrof ichida  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

### Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning asosiy xossalari

**Ta'rif.** Agar  $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik limiti  $a$  songa teng (yoki  $a$  songa yaqinlashadi) deyiladi. Bu hol  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  deyiladi. Bunday ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning limiti quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  bo'lsin, u holda:

1. Istalgan  $\alpha$  va  $\beta$  sonlar uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$ , chunki cheksiz kichik ketma-ketlik xossalari ga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n - \alpha a - \beta b) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha(x_n - a) + \beta(y_n - b)] = 0.$$

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bo'lsin, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$  bo'lgani uchun  $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$  chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi, ya'ni shunday  $K > 0$  son mavjudki, barcha  $n$  lar uchun  $|x_n - a| < K$ , u holda

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < K + |a|, \quad n \in N.$$

Demak,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  chegaralangan ketma-ketlik ekan.

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} y_n x_n = a \cdot b.$$

Cheksiz kichik ketma-ketlik xossalariga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - ab) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n - a)y_n + a(y_n - b)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)y_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot (y_n - b) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0.$$

$$4. y_n \neq 0, n \in N \text{ va } b \neq 0 \text{ bo'lsa, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \text{ tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

Aniqlik uchun  $b > 0$  bo'lsin, u holda  $\varepsilon = \frac{b}{2}$  uchun shunday  $n_0$  mavjudki barcha  $n \geq n_0$  lar uchun  $|y_n - b| < \frac{b}{2}$ . U holda

$$-\frac{b}{2} < y_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow y_n > \frac{b}{2} > 0 \text{ va } 0 < \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}, \text{ ya'ni } \frac{1}{y_n} \text{ ketma-ketlik}$$

chegaralangan ekan. U holda ( $n \geq n_0$  deb qarash mumkin)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \cdot b - y_n a}{y_n \cdot b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - a)b - a(y_n - b)}{y_n \cdot b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ b \cdot (x_n - a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b} - a(y_n - b) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b} \right] = 0.$$

5. Biror nomerdan boshlab  $x_n \leq y_n$  bo'lsa, u holda  $a \leq b$ . Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni  $a > b$  bo'lsin, u holda  $\varepsilon > 0$  sonni shunday tanlab olish mumkinki,  $a - \varepsilon > b + \varepsilon$  (masalan,  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ ) tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda shunday  $n_0$  natural son mavjudki, barcha  $n \geq n_0$  lar uchun  $a - \varepsilon < x_n$  va  $y_n < b + \varepsilon$  tengsizliklar o'rinli bo'ladi, u holda biror  $n \geq n_0$  uchun  $x_n > y_n$  bo'ladi. Bu esa ziddiyatdir.

**Teorema.** Agar  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda  $\{x_n\}$  yaqinlashuvchi va  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$ ) bo'ladi.

*Isbot:* Teorema shartiga ko'ra  $\sup\{x_n\} = a$  chekli son bo'ladi, u holda  $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik o'suvchi bo'lib,  $\sup\{x_n - a\} = 0$  bo'ladi va 2-teoremaga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ . Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bo'ladi.

**Teorema.** Agar barcha natural  $n$  lar uchun  $x_n \leq z_n \leq y_n$  bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \text{ bo'lsa, u holda } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

*Isbot:*  $x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a$  tengsizlik barcha natural  $n$  lar uchun o‘rinli bo‘ladi, u holda 7-xossaga ko‘ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - a) = a$ . Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

**Teorema** (Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi haqidagi teorema).

Agar har bir natural  $n$  uchun  $[a_n, b_n]$  ( $a_n < b_n$ ) segment berilganda barcha  $n$  larda

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

munosabat o‘rinli va  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  bo‘lsa, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  limitlar mavjud bo‘lib  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$  va istalgan natural  $n$  uchun  $a_n \leq c \leq b_n$  tengsizlik o‘rinlidir.

*Isbot:* Teorema shartiga ko‘ra  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik o‘sovchi bo‘lib, yuqoridan (masalan,  $b_1$  bilan) chegaralangan,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik esa kamayuvchi bo‘lib, quyidan (masalan,  $a_1$  bilan) chegaralangan bo‘ladi, u holda  $\sup_n \{a_n\} = a$  va  $\inf_n \{b_n\} = b$  desak, 4-teoremaga asosan  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  bo‘ladi. Barcha  $n$  larda  $a_n \leq a \leq b \leq b_n$  bo‘lgani uchun  $0 \leq b - a \leq b_n - a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

va  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ . 5-teoremaga ko‘ra  $b - a = 0$ , ya’ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c, \quad a_n \leq c \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Teorema isbot bo‘ldi.**

4-teoremaning tatbig‘i sifatida quyidagi limitni ko‘rsatamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dastlab  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ketma-ketlikning o‘sovchi va yuqoridan chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun biz quyidagi tengsizlikdan va Nyuton binoidan foydalanamiz: agar  $x \geq -1$  bo‘lsa,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Istalgan  $a, b$  va natural  $n$  uchun

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left[\frac{(n+2) \cdot n}{(n+1)^2}\right]^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\left(1 - \frac{1}{(n+1)^3}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+2)}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{(n+2)(n^2 + 2 + 1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(n+1)^3} > \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3} = 1 \end{aligned}$$

Demak,  $1 < \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , ya'ni  $x_n < x_{n+1}$   $n \in N: \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  o'suvchi ketma-ketlik

ekan. Endi uning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Ushbu

$$\begin{aligned} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{[n-(k-1)] \cdot [n-(k-2)] \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n^k} = \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

tengsizlikka ko'ra

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

$k \geq 2$  bo'lganda,  $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} < \frac{1}{2^{k-1}}$  va bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3$$

Demak,  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ ,  $n \in N$ .

U holda 4-teoremaga ko'ra  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik limiti mavjud va chekli bo'ladi, uning qiymatini  $a$  orqali belgilaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$e$  soni irratsional son bo'lib, u matematika va uning tatbiqlarida katta ahamiyat kasb etadi.  $e$  sonining o'nli kasrga yoyilmasidagi dastlabki 10 ta raqam quyidagicha bo'ladi  $e = 2,7182818284\dots$

Quyidagi limitni istalgan  $a > 0$  uchun ko'rsataylik:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Dastavval,  $a > 1$  deb qaraylik, u holda  $a^{\frac{1}{n}} > 1$  bo'lib,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Tengsizlikda ( $x \geq -1$ )  $1+x = a^{\frac{1}{n}}$  deb olsak,

$$1+n \cdot \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq a \Rightarrow 0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bu yerda,  $n \rightarrow \infty$  da limitga o'tsak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Agar  $0 < a < 1$  bo'lsa, u holda  $\frac{1}{a} > 1$  bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Demak, istalgan  $a > 0$  uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Keyingi misol sifatida istalgan  $a > 0$  ( $a \neq 0$ ) son uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

ekanligini ko'rsatamiz. Dastavval,  $a > 1$  deb qaraylik, u holda  $\log_a x$

funksiya o'suvchi bo'lgani uchun, biz  $t_n = \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  ketma-ketlikni hosil

qilsak, bu ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, ya'ni  $t_1 > t_2 > \dots > t_n > t_{n+1} > \dots$ ,

istalgan  $n$  uchun  $t_n > 0$ , uning chekli limiti  $\alpha$  mavjud bo'lib, 4-teoremaga

ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \inf_n \{t_n\} = \alpha.$$

$\alpha = 0$  ekanligini ko'rsatamiz. Agar  $\alpha > 0$  deb faraz qilsak,  $a^\alpha - 1 > 0$  bo'lgani uchun,  $\frac{1}{n} < a^\alpha - 1$  deb olsak, u holda bunday  $n$  larda

$$t_n = \log_a \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \log_a a^\alpha = \alpha.$$

Bu esa  $\alpha = \inf \{t_n\}$  ekanligiga ziddir. Demak,  $\alpha = 0$  ekan, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 0.$$

Agar  $0 < a < 1$  bo'lsa,  $\frac{1}{a} > 1$  bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log_{\frac{1}{a}} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 0.$$

Xuddi shuningdek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 0$$

ekanligi ko'rsatiladi.

**Masalan.** Ketma-ketlikning limitini hisoblang:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3}$

**Yechish:** Kasrning surat va maxrajidan  $n^2$  ni qavsdan chiqarib, bo'linma va yig'indining limitlari qoidalaridan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left( 4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{3 + 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

### Bir o'zgaruvchili funksiya limiti

**Ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib ( $x_0$  nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) istalgan  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son mavjud bo'lsada,  $0 < |x - x_0| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  lar (ya'ni istalgan



$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ) uchun  $|f(x) - a| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $x$  argument  $x_0$  ga intilganda  $f(x)$  funksiyaning limiti  $a$  ga teng deyiladi, (bu hol  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  shaklda ifoda etiladi).

**Ta'rif.** Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  bo'lgan istalgan  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $x$  argument  $x_0$  ga intilganda  $f(x)$  funksiyaning limiti  $a$  ga teng deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflar teng kuchlidir. Agar 1-ta'rifda barcha  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  yoki  $(x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \vee x \in (x_0, x_0 + \varepsilon))$  lar uchun  $|f(x) - a| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lishi talab qilinsa, u holda  $a$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi chap (o'ng) limiti deyiladi va  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = a$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = a$ ) ko'rinishda ifoda etiladi. Chap va o'ng limitlar uchun quyidagi belgilashlar qo'llaniladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Yuqoridagi ta'rifda  $x_0$  nuqta va  $a$  sifatida  $+\infty$  yoki  $-\infty$  (cheksizliklarni olishimiz mumkin. Ta'riflarda mos o'zgartirishlar kiritib, quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \infty,$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$  kabi limitlarni ta'riflashimiz mumkin.

**Ta'rif.** Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  ( $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ) bo'lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) da  $f(x)$  funksiya *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  ( $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) bo'lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) da  $f(x)$  funksiya *cheksiz katta miqdor* deyiladi.

Funksiya limiti, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  va  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  bo'lsa, u holda istalgan  $\alpha$  va  $\beta$  sonlar uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = 0.$$

2. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron  $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$   $\varepsilon$  atrofida chegaralangan bo'ladi.

3. Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron  $\varepsilon$  atrofida chegaralangan bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = 0$  bo'ladi.

4. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  bo'lib,  $c < a < b$  bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqtaning (biron  $\varepsilon > 0$  son uchun)  $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$  atrofida  $c < f(x) < b$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty$ .

6. Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron atrofida chegaralangan  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$  bo'ladi.

7. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$  va, aksincha, agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$  bo'ladi.

8. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  bo'lsa, istalgan  $\alpha$  va  $\beta$  sonlar uchun  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \cdot a \pm \beta \cdot b$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$  bo'ladi.

9. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  va  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$  bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$  bo'ladi.

10. Agar  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = a$  va  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  bo'lsa, u holda  $f(g(x))$  murakkab funksiya uchun  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = a$ .

11. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  bo'lib,  $x_0$  nuqtaning biron atrofida (yoki  $x_0 = \infty$  bo'lgan holda,  $|x|$  yetarlicha katta bo'lgan barcha  $x$  larda)  $f(x) \leq g(x)$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $a \leq b$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

12. Agar  $x_0$  nuqtaning biron atrofida (yoki  $x_0 = \infty$  bo'lganda,  $|x|$  yetarlicha katta bo'lgan barcha  $x$  larda)  $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$  tengsizlik o'rinli bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$ .

13. Agar  $x_0$  nuqtaning biron atrofida (yoki  $x_0 = \infty$  bo'lganda,  $|x|$  yetralicha katta bo'lgan barcha  $x$  larda)  $f(x) = \text{const} = a$  bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

14. Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$ .

Aksincha, agar  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$  bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  bo'ladi.

### Aniqmaslikning turlari

Ketma-ketlik va funksiyalar limitlarini hisoblayotganda quyidagi ko'rinishdagi noaniqliklar yuzaga kelishi mumkin:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Bu yerdagi noaniqliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning xossasiga ko'ra  $\frac{1}{\infty} = 0$ ,  $\frac{1}{0} = \infty$  simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko'ra,

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}}{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}} = \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad 1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0},$$

$$0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{\infty \cdot 0}, \quad \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

noaniqliklar tengligini yoza olamiz, shuni ta'kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma'nosiga ega bo'lmay, balki bir ko'rinishdagi noaniqlikni ikkinchi xil ko'rinishdagi noaniqlikka olib kelish mumkinligini anglatadi. Shu holatni e'tiborga olib  $\frac{0}{0}$  va  $\infty - \infty$

ko'rinishidagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot x}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} 1 = a.$$

$$4. \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \chi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) - \text{limit mavjud emas.}$$

Bu misollar  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi noaniqliklardan iboratdir. Endi

$\infty - \infty$  ko'rinishdagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

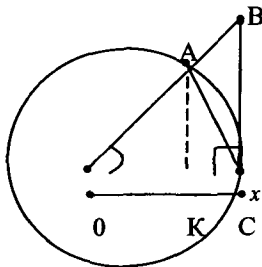
$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + a - x) = a$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \chi(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi(x) \text{ limit mavjud emas.}$$

Endi  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  limitni hisoblaylik. Avval

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  ekanligini ko'rsatamiz.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  deb olaylik. Radiusi 1 ga teng quyidagi aylanani qaraylik,  $x = \angle AOC$  burchakning radian o'lchovi bo'lsin,



u holda  $AC$  uzunligi  $x$  ga teng va  $\sin x = \frac{AK}{OA} = AK$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{BC}{OC} = BC$ .

Agar  $S_{OAC} - OAC$  sektor yuzasi bo'lsa, u holda

$$S_{\Delta OAC} < S_{OAC} < S_{\Delta OBC} \Rightarrow \frac{1}{2} OC \cdot AK < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} OC \cdot BC \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  bo'lganda,  $0 < \sin x < x$  ekanligidan  $\lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0$  tenglik

kelib chiqadi.  $\sin(-x) = -\sin x$  bo'lgani uchun  $\lim_{x \rightarrow -0} \sin x = 0$  bo'lar ekan.

Demak  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ , ya'ni  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  limit  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi noaniqlik ekan.

Endi  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  uchun quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} \sin x < x < \operatorname{tg} x &\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2 \sin \frac{2x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} < x \end{aligned}$$

ya'ni  $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$  tengsizlik kelib chiqar ekan.

$$\text{Demak, } \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0, \text{ ya'ni } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{Endi } \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} \text{ bo'lgani uchun } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Shunday qilib,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Endi  $1^\circ$  ko'rinishdagi noaniqlikka doir  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  limitni hisoblaylik. Dastavval  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  limitni qaraymiz. Agar  $x$  ushbu  $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$  tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda  $n \leq \frac{1}{x} \leq n+1$  va

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Bu tengsizlikda  $x \rightarrow +0$ , ya'ni  $n \rightarrow +\infty$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$  bo'lgani uchun, limitlar xossasiga asosan

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Endi  $\lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  limitni qaraymiz.  $-x = \frac{t}{1+t}$  almashtirishni bajarsak,  $x \rightarrow -0$  bo'lganda  $t \rightarrow +0$  bo'ladi, chunki  $t = -\frac{x}{1+x}$ , u holda

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1+t}{t}} = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1+t}{t}} = (1+t)^{\frac{1+t}{t}} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar biz  $x \rightarrow -0$  da, ya'ni  $t \rightarrow +0$  da limitga o'tsak

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t) = e$$

hosil bo'ladi. Demak,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

Shuni ta'kidlaymizki, ushbu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  limit birinchi ajoyib limit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Bundan tashqari quyidagi umumiy holdagi formulalarni keltirib o'tamiz:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ , bunda  $x \rightarrow a$  bo'lganda  $f(x) \rightarrow \infty$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$ , bunda  $x \rightarrow a$  bo'lganda  $\varphi(x) \rightarrow 0$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[m]{1+kx} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{m}} = e^{km}$

**Masalan 1.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin x + \sin 7x}$

$$\text{Yechish: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin x + \sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2 \sin \frac{11x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{11x}{2} \cdot \frac{2}{11}}{2 \sin \frac{11x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}} = \frac{5}{11}$$

**Masalan 2.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx+l}$

$$\text{Yechish: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx+l} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}(mx+l)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x} \cdot mx} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^l = e^{km} \cdot 1 = e^{km}$$

**Masalan 3.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2]{1+bx}$

**Yechish:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[ax]{1+bx} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+bx)^{\frac{1}{ax}} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1+bx)^{\frac{1}{bx}} \right]^{\frac{bx}{ax}} = e^{\frac{b}{a}}.$

**Masalan 4.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$

**Yechish:**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

**Masalan 5.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$

**Yechish:**  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right)^{\frac{e^x}{x}} \right]^{\frac{1}{e^x}} = e \cdot e^1 = e^2.$

**Masalan 6.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1}.$

**Yechish:** Kasrning suratini maxrajiga bo'lib, butun qismini ajratib olamiz:

$$\frac{2x+1}{2x-3} = \frac{(2x-3)+4}{2x-3} = 1 + \frac{4}{2x-3}.$$

$x \rightarrow \infty$  da berilgan funksiya asosi birga intiluvchi, ko'rsatgichi esa cheksizlikka intiluvchi darajani ifodalaydi, ya'ni  $1^\infty$  ko'rinishdagi. U holda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}} = \left( \left( 1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}}}$$

$x \rightarrow \infty$  da  $\frac{4}{2x-3} \rightarrow 0$  bo'lgani sababli va  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}} = 8$

ekanini hisobga olib, ikkinchi ajoyib limitga ko'ra:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} = e^8.$

**Masalan 7.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$

**Yechish:** Quyidagicha almashtirish bajaramiz:  $x - e = t$ , bundan  $x = t + e$  va  $x \rightarrow e$  da  $t \rightarrow 0$  ekanligini e'tiborga olib quyidagiga ega

bo'lamiz:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + e) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \ln \frac{e + t}{e} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{t}{e} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \ln \left( 1 + \frac{t}{e} \right)^{\frac{e}{t}} \right]^{\frac{1}{e}} = \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}.$$

### Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

Agar  $\alpha(x)$  va  $\beta(x)$   $x \rightarrow x_0$  holda cheksiz kichik funksiyalar bo'lib,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$  bo'lsa, u holda ular ekvivalent deyiladi va  $x \rightarrow x_0$  da  $\alpha(x) \sim \beta(x)$

kabi belgilanadi. Masalan,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , shu sababli  $x \rightarrow 0$  da  $\sin x \sim x$ .

Shunga o'xshash  $x \rightarrow 0$  da quyidagi cheksiz kichik funksiyalar ekvivalentdir:  $\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \arctg x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim$

$\frac{x^2}{2}$ ,  $e^x \sim 1+x$ ,  $a^x \sim 1+x \ln a$ ,  $(1+x)^m \sim 1+mx$ ,  $\sqrt[m]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{m}} \sim 1 + \frac{x}{m}$ ,

$$\log_a^{(1+x)} = \frac{\ln(1+x)}{\ln a} \sim \frac{x}{\ln a}.$$

**Masalan 1.** Limitni hisoblang:  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{x}{x-2}}$ .

**Yechish:**  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[ e^{\ln(3x-5)} \right]^{\frac{x}{x-2}}$ .  $x \rightarrow 0$  da  $\ln(1+x) \approx x$

munosabatdan foydalanamiz. U holda  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ e^{\ln(3x-5)} \right]^{\frac{x}{x-2}} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{(3x-5) \cdot x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{3x-6}{x-2} x} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{3x} = e^6.$$

**2. Limitni hisoblang:** 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^\mu x}{x^2}$ .

**Yechish:** 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x}{2x} \right)^2 = \frac{9}{4}$ .

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 0,5x^2)^\mu}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 0,5\mu x^2}{x^2} = 0,5\mu.$$



## Limitlar nazariyasining iqtisodiyotdagi ba'zi tatbiqlari

Ajoyib limitlardan iqtisodiyotning statistika, bank-kredit, korxonalar va tashkilotlarning hisoblash jarayonlarida samarali foydalaniladi. Ayniqsa bank va kredit sohalarida murakkab foizlarni hisoblashda ikkinchi ajoyib limitdan,  $e$  soniga keltirish orqali hisoblash keng ko'lamda amalga oshiriladi. Bunga misol qilib quyidagilarni keltiramiz.

Uzluksiz foizni hisoblash masalasini ko'rib chiqamiz.

Bankka qo'yilgan boshlang'ich summa  $Q_0$  bo'lsin. Bank yiliga jamg'armaning  $p\%$  ni to'laydi.  $t$  yildan so'ng to'lanadigan  $Q_t$  jamg'armaning qiymati topilsin. Oddiy foizlardan foydalanilganda yillik jamg'armaning miqdori  $\frac{P}{100}Q_0$  qiymatga o'sadi:

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right), Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^2, \dots, Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^t.$$

Amaliyotda ko'pincha murakkab foizlardan foydalaniladi. Bunday holatda jamg'armaning yillik miqdori quyidagicha qiymatga o'sadi:

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right), Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^2, \dots, Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^t.$$

Agar jamg'armaning foiz miqdorini yilda faqat bir marta emas,  $n$  marta hisoblansa, yillik  $p\%$  o'sishda miqdorning  $\frac{1}{n}$  qismi yilning  $\frac{p}{n}\%$  ni,

jamg'armaning  $t$  yildagi miqdori esa  $nt$  ni tashkil qiladi:  $Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100k}\right)^{nt}$ .

Faraz qilamiz, foizlar har yarim yilda qo'shib hisoblansa  $k=2$ , har kvartalda  $k=4$ , har oyga  $k=12$ , har kuniga  $k=365$ , har soatiga  $k=8760$  va hokazo. U holda jamg'armaning miqdori  $t$  yilda

$$Q_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( Q_0 \left(1 + \frac{P}{100k}\right)^{nt} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_0 \left( \left(1 + \frac{P}{100k}\right)^{\frac{100k}{P}} \right)^{\frac{Pt}{100}} = Q_0 \cdot e^{\frac{Pt}{100}},$$

bu tenglik ko'rsatkichli (ekspontensial) o'sish ( $p > 0$  da) yoki kamayish ( $p < 0$  da) qonunini ifodalaydi.

**Izoh:** Moliya-kredit amaliyotida foizni uzluksiz hisoblashdan kamdan-kam foydalanilsa ham, u murakkab moliyaviy vazifalarning tahlilida, xususan investitsion masalalarni tanlash va asoslashda foydali hisoblanadi.

**Masalan 1.** Agar yiliga qo‘shib hisoblashlar soni cheksiz o‘zgarsa, u holda real stavka qanday o‘zgaradi? (Boshqacha aytganda  $k \rightarrow \infty$  da  $A_n$  nimaga intiladi?)

**Yechish:** Ajoyib limit formulasidan foydalanib,

$$\lim A_n = \lim A_0 \left(1 + \frac{R}{k}\right)^n = \lim A_0 \left\{ \left(1 + \frac{R}{k}\right)^{\frac{k}{R}} \right\}^{\frac{Rn}{k}} = A_0 e^{(R\%) } = A_0 e^{R}.$$

Bu yerda,  $t$  bank foizlari qo‘shib hisoblangan yil miqdori. Shunday qilib, agar bank foizlari uzluksiz ravishda qo‘shib hisoblansa, u holda hisobdagi summa  $A = A_0 \cdot e^{R}$ , bu yerda  $A_0$  bohslang‘ich omonat miqdori,  $e = 2,718\dots$ ,  $R$  – yillik foiz stavkasi.

**Masalan 2.** Inflyatsiya darajasi kuniga 1% ni tashkil qilsa, yarim yildan keyin boshlang‘ich summa qanchaga kamayadi.

**Yechish:** Murakkab protsentlar formulasidan  $Q = Q_0 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{182}$ , bunda  $Q_0$  dastlabki summa miqdori, 182 yarim yildagi kunlar soni. Bu formula shaklini o‘zgartirib, limitga o‘tadi  $Q = Q_0 \left[ \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{-100} \right]^{\frac{182}{100}} \approx \frac{Q_0}{e^{1.82}}$ .

Demak, yarim yildan keyin dastlabki summa 6 marta kamayadi ( $e^{1.82} \approx 6$ ).

**Masalan 3.** 5000 sh.p.b. yillik 4% foiz stavkasida 3 yildan so‘ng qancha bo‘ladi?

**Yechish:**  $k_n = K(1 + n i)$ , bu yerda  $K$  qo‘yilgan pul miqdori,  $n$  oddiy foizlardagi yil,  $i$  foiz stavkasi.

Shartga ko‘ra  $K = 5000$ ,  $n = 3$ ,  $i = 0,04$ .

$$K_3 = 5000(1 + 3 \cdot 0,04) = 5000 \cdot 1,12 = 5600 \text{ p.b.}$$

**Masalan 4.** Agar ikki yil davomida yillik 6% oddiy foiz stavkasida 784000 sh.p.b miqdori jamg'arilgani ma'lum bo'lsa, dastlab qancha pul qo'yilgan?

**Yechish:**  $K_2 = 784000$ ,  $n = 2$ ,  $i = 0,06$ ,  $k = ?$   $K = \frac{784000}{1,12} = 700000$  p.b.

**Masalan 5.**  $K = 2000$  sh.p.b oddiy yillik 5% dan stavkasi bilan necha yildan so'ng 5000 sh.p.b. bo'ladi?

**Yechish:**  $K_n = 5000$ ,  $k = 2000$ ,  $i = 0,05$ .  $5000 = 2000(1 + n \cdot 0,05)$ .

$2,5 = 1 + n \cdot 0,05$ ,  $n \cdot 0,05 = 1,5$ ,  $n = 30$ .

### Funksiya uzluksizligi

**Ta'rif.**  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan  $f(x)$  funksiya uchun  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $f(x)$  unksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ,  $\left( \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) \right)$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan quyidagi teorema o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

**Teorema.** Agar  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-ta'rifni orttirmalar tilida ham aytish mumkin. Agar argumentning ikki  $x_0$  va  $x_0 + \Delta x$  qiymatlari qaralsa,  $\Delta x$  argument orttirmasi deyiladi. Bu orttirmaga mos keluvchi  $y = f(x)$  funksiya orttirmasi  $\Delta y$  quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Agar  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan foydalanib, uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremlarning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

**Teorema.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi:

$$\alpha f(x) \pm \beta g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Bu yerda,  $\alpha$  va  $\beta$  istalgan sonlar bo'lib, funksiyalar nisbati qaralayotganda  $g(x_0) \neq 0$  deb faraz qilinadi.

**Teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x=b$  nuqtada uzluksiz,  $g(x)$  funksiya esa  $x=x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lib,  $g(x_0)=b$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda murakkab  $f(g(x))$  funksiya  $x=x_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiya biron  $A$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya  $A$  to'plamda uzluksiz deyiladi.

Endi uzluksiz funksiyalarga misollar keltiramiz:

1. Butun va ratsional kasr funksiyalar, o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi. Haqiqatan ham,  $f(x)=x$  funksiya  $(-\infty, +\infty)$  oraliqda, ya'ni barcha  $x$  larda uzluksiz, u holda 1-teoremadan istalgan natural  $n$  va  $a$  sonlar uchun  $f(x)=a \cdot x^n$  funksiyaning  $(-\infty, +\infty)$  oraliqda uzluksizligi kelib chiqadi. Bundan  $x$  ga nisbatan ko'phad bo'lgan  $f(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

funksiya ham  $(-\infty, +\infty)$  da uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, yana 2-teoremani e'tiborga olib,  $n$  va  $m$  natural sonlar uchun quyidagi

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

kasr-ratsional funksiya maxrajining ildizi bo'lmagan  $x$  larda uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

2. Ko'rsatkichli funksiya, ya'ni  $f(x)=a^x$  funksiya  $(-\infty, +\infty)$  oraliqda uzluksiz.

Dastavval  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$  ekanligini ko'rsatamiz.  $a > 1$  bo'lsin, agar  $|x| < \frac{1}{n}$ ,

ya'ni  $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$  bo'lsa, u holda  $a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}}$  tengsizlik o'rinli bo'lib,  $x \neq 0$

uchun  $n = \left[ \frac{1}{|x|} \right]$  deb olsak, ( $[b] - b$  sonning butun qismi, ya'ni  $b$  son dan oshmaydigan butun sonlarning eng kattasi),  $x \rightarrow 0$  da  $n \rightarrow \infty$  bo'lgani

uchun, funksiya limitining 12-xossasiga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ . Bundan

$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$  ni hosil qilamiz. Agar  $0 < a < 1$  bo'lsa  $\frac{1}{a} > 1$  va

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{1} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.  $f(x) = a^x$  funksiyaning istalgan  $x = x_0$  nuqtada

uzluksizligini ko'rsatamiz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} \cdot a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0}$ .

### 3. Trigonometrik funksiyalar o'z aniqlanish sohaslarida uzluksiz.

Avval  $y = \sin x$  funksiyaning qaraylik:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= \lim_{x \rightarrow x_0} [(\sin x - \sin x_0) + \sin x_0] = \lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - \sin x_0) + \sin x_0 = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} + \sin x_0 \end{aligned}$$

$\cos x$  funksiya chegaralangan bo'lganligi uchun, funksiya limitining 3-xossasiga va  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$  ekanligidan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} + \sin x_0 = \sin x_0.$$

Demak,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ .

Xuddi shuningdek istalgan  $x = x_0$  nuqtada  $y = \cos x$  funksiyasi ham uzluksiz ekanligi isbot qilinadi. U holda 1-teoremaga ko'ra

$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) va  $y = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$ ,  $x \neq k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ) funksiyalar

aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

4.  $y = \log_a x$   $a > 0$ ,  $a \neq 1$  logarifmik funksiyaning  $(0, +\infty)$  oraliqda uzluksizligi. Avvalo  $a > 1$  deb, funksiya  $x = 1$  nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,  $x = 1 + t$  deb olsak, quyidagi

$\lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = \lim_{t \rightarrow 0} \log_a (1 + t)$  tenglikda  $t \neq 0$ ,  $n = \left[ \frac{1}{|t|} \right]$  bo'lsa,  $t \rightarrow 0$  da  $n \rightarrow \infty$

bo'lgani uchun va  $-\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}$  tengsizlikdan  $\log_a\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \log_a(1+t) \leq \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

tengsizlik kelib chiqadi. Ushbu  $\lim_{t \rightarrow \infty} \log_a\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

tenglikdan  $\lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t) = 0$ , ya'ni  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = \log_a 1 = 0$ .

Agar  $0 < a < 1$  bo'lsa,  $\frac{1}{a} > 1$  va  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\log_{\frac{1}{a}} x\right) = 0 = \log_{\frac{1}{a}} 1$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi istalgan  $x = x_0$  ( $x_0 > 0$ ) nuqtada  $y = \log_a x$  funksiyaning uzluksizligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar  $\frac{x}{x_0} = 1+t$  deb olsak,

$x \rightarrow x_0$  da  $t \rightarrow 0$  bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\log_a \frac{x}{x_0} + \log_a x_0\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a \frac{x}{x_0} + \log_a x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t) + \log_a x_0 = \log_a x_0.$$

5. Darajali  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \neq 0$  funksiyaning uzluksizligi.

$y = x^\alpha$  funksiyaning  $(0, +\infty)$  oraliqda uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

Murakkab funksiya uzluksizligiga doir 3-teoreмага ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{a \cdot \ln x} = e^{a \cdot \ln x_0} = x_0^a$$

6. Teskari trigonometrik funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz.

$y = \arcsin x$  funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz, qolgan funksiyalarni tekshirish shunga o'xshash bajariladi.  $y = \arcsin x$  funksiyaning aniqlanish

sohasi  $[-1, 1]$  oraliq bo'lib, o'zgarish sohasi  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  dan iborat,  $x_0 \in [-1, 1]$

bo'lsin. Biz funksiyaning  $x_0$  da o'ngdan uzluksizligini ko'rsatamiz, chapdan uzluksizligi shunga o'xshash tarzda aniqlanadi. Demak,  $x_0 < x$

bo'lib,  $x \rightarrow x_0 + 0$  bo'lsin, u holda  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  uchun  $\sin t < t < \operatorname{tg} t$  tengsizlik

o'rinli. Bundan va  $y = \arcsin x$  funksiya  $[-1, 1]$  da o'suvchi bo'lgani uchun  $x_0 < x$  da quyidagini hosil qilamiz:

$$\sin(\arcsin x - \arcsin x_0) < \arcsin x - \arcsin x_0 < \operatorname{tg}(\arcsin x - \arcsin x_0).$$

Bu yerda,  $\sin(\arcsin x) = x$ ,  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$  ekanligidan

$$x \cdot \sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2} \cdot x_0 < \arcsin x - \arcsin x_0 < \frac{x\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2} \cdot x_0}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x_0^2} + x \cdot x_0}$$
 tengsizlik kelib

chiqadi. Bu tengsizlikda  $x \rightarrow x_0 + 0$  bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} (x\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2} \cdot x_0) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} (\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x_0^2} + x \cdot x_0) = 1.$$

Limitning 12-xossasiga asosan  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} (\arcsin x - \arcsin x_0) = 0$ ,

bu esa  $y = \arcsin x$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

Yuqoridagi 1-6-misollardan foydalanib, elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz degan xulosani ayta olamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, quyidagi limitlarni hisoblashimiz mumkin:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \text{ limitni hisoblaylik.}$$

Bu limit  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi noaniqlikdir, agar  $a^x - 1 = t$  deb olsak,  $x \rightarrow 0$  da  $t \rightarrow 0$  bo'ladi va  $a^x = 1+t$ ,  $x = \log_a(1+t)$ .

$$\text{Demak, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \frac{\log_a a}{\log_a e} = \ln a.$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ , bu limit ham  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, agar  $(1+x)^\alpha - 1 = t$  deb olsak,  $x \rightarrow 0$  da  $t \rightarrow 0$  bo'ladi va  $(1+x)^\alpha = 1+t$ ,  $\alpha \cdot \ln(1+x) = \ln(1+t)$ .

Demak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t \cdot \alpha \ln(1+x)}{x \ln(1+t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} = \\ &= \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \alpha \cdot \ln e \cdot \frac{1}{\ln e} = \alpha \end{aligned}$$

Natijada,  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi noaniqliklarga tegishli bo'lgan quyidagi muhim limitlarni hosil qildik:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \text{ xususan } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

### Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Quyida keltiriladigan uzluksiz funksiyalarning xossalarini teorema shaklida bayon qilamiz.

**Teorema (Boltsano-Koshining birinchi teoremasi).** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, oraliq chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni  $f(a) \cdot f(b) < 0$  bo'lsa, u holda  $(a, b)$  oraliqda shunday  $c$  nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya nolga teng, ya'ni  $f(c) = 0$ .

*Isbot:*  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  funksiya qiymatini ko'raylik, agar  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$  bo'lsa,  $c = \frac{a+b}{2}$  deb olish mumkin, bu holda teorema isbot qilingan bo'ladi. Aks holda  $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$  bo'lsa,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = \frac{a+b}{2}$  deb olamiz,  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0$  bo'lsa,  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $b_1 = b$  deb olamiz. Keyingi qadamda, yuqoridagi mulohazani  $[a_1, b_1]$  oraliq uchun bajaramiz. Bu jarayon biron chekli qadamdan keyin, masalan  $n$  qadamdan keyin to'xtasa, u holda  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$  bo'lib,  $c = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$  bo'ladi va bu holda teorema isbot qilingan deyish mumkin, aks holda, ya'ni bu jarayon cheksiz davom etsa, u holda ichma-ich joylashgan  $[a_n, b_n]$  ketma-ketliklar hosil bo'lib, keyingi qadamda hosil bo'ladigan har bir oraliq uzunligi avvalgisining



yarmisiga teng bo'lgani uchun  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  ekan. U holda 6-teoremaga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$  bo'lib, barcha  $n$  larda  $a_n < c < b_n$ , ya'ni  $a < c < b$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi  $f(c) = 0$  ekanligini ko'rsatamiz. Funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \Rightarrow f^2(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n).$$

Endi  $[a_n, b_n]$  oraliqlarning qurilishiga ko'ra  $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$  edi, u holda

$$f^2(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) f(b_n) \leq 0.$$

Demak,  $f(c) = 0$ .

**Teorema (Boltsano-Koshining ikkinchi teoremasi).**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lib, oraliq chegarasida turli qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  bo'lib,  $A \neq B$  bo'lsa, u holda  $A$  va  $B$  sonlari orasida yotuvchi istalgan  $C$  son uchun  $(a, b)$  intervalda shunday  $c$  nuqta mavjudki, bu nuqta uchun  $f(c) = C$  tenglik o'rinli bo'ladi.

*Isbot:* Demak,  $C \neq A$ ,  $C \neq B$  bo'lib,  $C$  son  $A$  va  $B$  sonlar orasida yotgani uchun  $(A-C) \cdot (B-C) < 0$  bo'ladi. Agar  $g(x) = f(x) - C$  yangi funksiya kiritsak, bu funksiya  $[a, b]$  da uzluksiz bo'lib,  $g(a) \cdot g(b) = (f(a) - C) \cdot (f(b) - C) = (A - C)(B - C) < 0$  bo'lganidan  $g(x)$  funksiya uchun Boltsano-Koshining birinchi teorema shartlari bajariladi. Demak,  $(a, b)$  intervalda shunday  $c$  nuqta mavjudki, uning uchun  $g(c) = 0$ , ya'ni  $g(c) = f(c) - C = 0$ .

Demak,  $f(c) = C$ . Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan quyidagi xulosani olamiz. Agar  $f(x)$  funksiya uchun  $[a, b] \subset D(f)$  bo'lib, funksiya  $[a, b]$  da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$A = \min\{f(a), f(b)\} \quad \text{va} \quad B = \max\{f(a), f(b)\}$$

uchun  $[A, B] \subset E(f)$  bo'lar ekan.

Yuqorida keltirilgan teoremalarga taalluqli misollarni keltiramiz:

1.  $f(x) = x^2$  funksiya uchun  $[1, 2]$  oraliqda 4-teorema o'rinli emas, chunki  $f(1) \cdot f(2) = 4 > 0$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiya uchun  $[-1, 1]$  oraliqda 4-teorema o'rinli emas, sababi,  $f(x)$  funksiya  $x=0$  nuqtada aniqlanmagan.

$$3. f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun  $[-2, 2]$  oraliqda 4 va 5-teoremlar o'rinli emas, chunki  $f(x)$  funksiya bu oraliqda uzluksiz emas,  $x=0$  nuqta uzilish nuqta:  $f(-0) = -1$ ,  $f(+0) = 1$ , ya'ni  $f(-0) \neq f(+0)$ .

**Teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi).** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya bu oraliqda chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday  $m$  va  $M$  sonlari mavjud bo'ladiki, istalgan  $x \in [a, b]$  uchun  $m \leq f(x) \leq M$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

*Isbot.* Teoremani isbot qilish uchun, teskarisini faraz qilish usulini qo'llaymiz. Ya'ni  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda chegaralangan bo'lmasin.  $\frac{a+b}{2}$  nuqta bilan  $[a, b]$  oraliqni teng ikkiga bo'lamiz, hosil bo'lgan ikki oraliqdan birida  $f(x)$  funksiya chegaralangan bo'lmaydi, chunki aks holda, ya'ni ikkala oraliqda ham funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda ham chegaralangan bo'lar edi. Demak,  $\left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  yoki  $\left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$  oraliqda  $f(x)$  funksiya chegaralangan bo'lmaydi, agar ikkalasida ham chegaralangan bo'lmasa, ulardan chapdaxisini olamiz. Hosil bo'lgan kichik oraliqni qaytadan  $[a_1, b_1]$  deb belgilaymiz. Keyingi qadamda, yuqoridagi mulohazani  $[a_1, b_1]$  oraliq uchun bajarib,  $[a_2, b_2]$  oraliqni hosil qilamiz. Bu jarayon cheksiz marta davom etadi, chunki aks holda funksiya  $[a_n, b_n]$  ko'rinishdagi oraliqda bir paytda ham chegaralangan, ham chegaralanmagan bo'lib qoladi. Demak, har bir natural  $n$  uchun  $[a_n, b_n]$  oraliq hosil bo'lib, bu oraliqda  $f(x)$  funksiya chegaralangan bo'lmadi. Bu oraliqlar ichma-ich joylashgan bo'lib,

$b_n - a_n = \frac{a-b}{2^n}$  u holda 6-teoremaga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$  va  $c \in (a, b)$ .  $f(x)$

funksiya uzluksizligidan  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$  tenglikni hosil qilamiz.

Agar  $A$  va  $B$  sonlar  $A < f(c) < B$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi qilib olingan bo'lsa, funksiya limitining 4-xossasiga ko'ra shunday  $\varepsilon > 0$  son mavjud bo'ladiki, istalgan  $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  uchun  $A < f(x) < B$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda shunday natural  $n$  mavjudki, uning uchun  $c - \varepsilon < a_n < c < b_n < c + \varepsilon$  tengsizlik bajariladi.

Demak, istalgan  $x \in [a_n, b_n]$  uchun  $A < f(x) < B$  tengsizlik o'rinli bo'lar ekan. Ammo farazga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a_n, b_n]$  oraliqda chegaralangan emas edi. Bu qarama-qarshilik teoremani isbot qiladi.

**Teorema (Veyershtarssning ikkinchi teoremasi).** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda  $f(x)$  funksiya o'zining yuqori aniq  $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  va quyi aniq  $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$  chegaralariga erishadi, ya'ni  $[a, b]$  oraliqda shunday  $x_0$  va  $x_1$  nuqtalar mavjudki,  $f(x_0) = \sup\{f(x)\}$  va  $f(x_1) = \inf\{f(x)\}$ .

*Isbot:* Teoremani yuqori aniq chegara uchun isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik. Agar  $\sup\{f(x)\} = M$  desak, 6-teoremaga ko'ra  $M$  chekli son bo'ladi. Farazga ko'ra istalgan  $x \in [a, b]$  uchun  $f(x) < M$  tengsizlik o'rinli bo'lsin, u holda  $\forall x \in [a, \varepsilon]$  uchun  $M - f(x) > 0$ .

Bundan esa  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  funksiyaning  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz ekanligi

kelib chiqadi. Veyershtarssning birinchi teoremasiga ko'ra  $g(x)$  funksiya chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday  $\delta > 0$  son mavjudki, istalgan  $x \in [a, b]$  uchun  $g(x) < \delta$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, istalgan  $x \in [a, b]$  uchun  $\frac{1}{M - f(x)} < \delta$ , ya'ni  $\frac{1}{\delta} < M - f(x)$  yoki  $f(x) < M - \frac{1}{\delta}$ .

Bu holda  $\sup\{f(x)\} \leq M - \frac{1}{\delta}$  tengsizlik o'rinli bo'lib, bu esa  $\sup\{f(x)\} = M$  ekanligiga ziddir. Bu ziddiyat qilingan farazning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

*Izoh:*  $x_0$  va  $x_1$  nuqtalarda  $f(x_0) = \sup \{f(x)\}$  va  $f(x_1) = \inf \{f(x)\}$  tengliklarning o'rinli ekanligi  $f(x)$  uzluksiz funksiya uchun  $[a, b]$  oraliqda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud ekanligi va quyidagi tengliklar o'rinli ekanligini bildiradi:  $f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  va  $f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ .

## Funksiyaning uzilishi va uning turlari

$f(x)$  funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya  $x$  nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar  $f(x)$  funksiya berilgan  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lmasa, u holda  $f(x)$  funksiya berilgan  $x_0$  nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Uzilishning quyidagi turlari mavjud:

I tur uzilish – funksiyaning chap va o'ng chekli limitlari mavjud, lekin ular teng emas.

II tur uzilish – bir tomonlama chap va o'ng limitlardan biri cheksiz yoki mavjud emas.

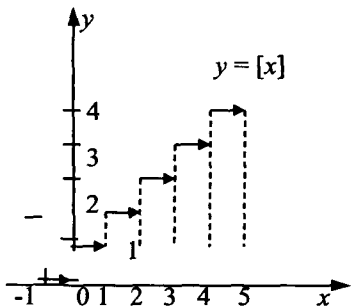
I tur uzilishga bartaraf qilinadigan uzilish deyiladi, bunda  $x \rightarrow x_0$  da funksiyaning limiti mavjud, lekin funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi qiymatiga teng emas.

$f(x) = [x]$  (o'qilishi «ant'e iks»), bu yerda  $[x]$  –  $x$  sonining butun qismi, ya'ni  $x$  dan katta bo'lmagan eng katta butun son. Masalan,  $[2.6] = 2$ ,  $[-2.6] = -3$ .

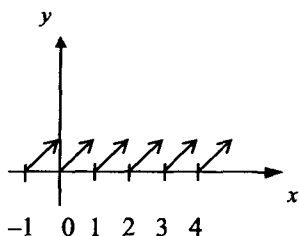
$x = \frac{3}{2}$  nuqtada  $f(x) = [x]$  funksiya uzluksiz, ya'ni  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ ,

$x=1$  nuqtada esa funksiya aniqlangan  $f(1)=1$ , lekin I tur uzilishga ega, chunki chap va o'ng chekli limitlar mavjud, lekin ular teng emas:  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$  va  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$ .

I.  $f(x) = [x]$  barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangani bilan, elementar funksiya emas, chunki barcha butun sonlarda uzulishga ega:

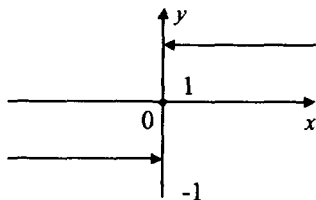


2.  $y = \{x\} = x - [x]$ ,  $-x$  sonining butun qismi.

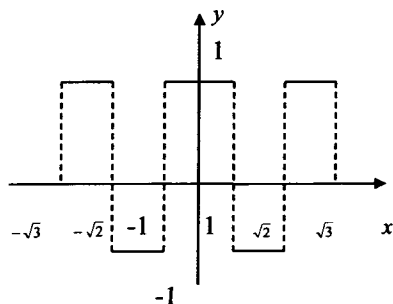


$$3. y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

(«Signum» lotincha soʻz boʻlib, ishora degan maʼnoni anglatadi.)



$$4. y = (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}$$



## 5. Dirixle funksiyasi

$$y = \begin{cases} 0, & \text{agar } x - \text{irratsional bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x - \text{ratsional bo'lsa} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasini chizma shaklda tasvirlab bo'lmaydi.

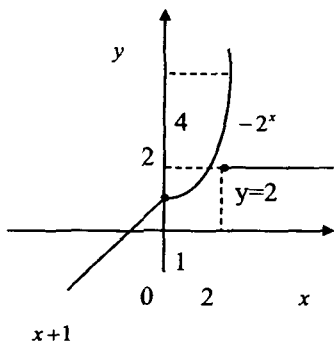
**Masalan 1.** Berilgan funksiyani uzilish nuqtalarini toping va grafigini chizing:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{agar } x \geq 2 \\ 2^x & \text{agar } 0 \leq x < 2 \\ x+1 & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

**Yechish:** Bu funksiya  $x=0$  va  $x=2$  nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin. Shuning uchun shu nuqtalardagi bir tomonli limitlarni hisoblaymiz.

$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x+1) = 1$ ,  $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2^x = 1$ . Demak,  $x=0$  nuqtada funksiya uzluksiz.

$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} 2^x = 4$ ,  $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} 2 = 2$ . Demak,  $x=2$  nuqtada funksiyai II tur uzilishga ega.



2. Uzluksiz foizlar formulasi. Yilning boshida ixtiyorimizda muddatida  $A_0$  sh.p.b. miqdorda summa mavjud bo'lsin. Qanday qilib yilning oxirigacha shu miqdordagi puldan maksimal foyda olish masalasi qiziqarlidir. Mavjud bo'lgan usullardan biri – bank xizmatidan foydalanishdir. Faraz qilaylik bank 100% yillik ustama bersin: bu bir yillik saqlashda jamg'arma 100% ga ortishini, boshqa qisqa muddatlarda esa jamg'arma shu muddatga mos proporsional (masalan, bir oyda jamg'arma  $\frac{100}{12}$  % ga) o'sishini anglatadi.

Demak, bir yildan so'ng jamg'arma  $A_0 + A_0 = 2A_0$  miqdorga, ya'ni ikki marta ko'payadi. Bundan ham yuqoriroq samaraga erishish uchun 0.5 yildan so'ng jamg'arma hisobini yopib va shu ondayoq qolgan yarim yil uchun uni yana qayta ochirilsa, bu holda yilning birinchi yarimi oxirida jamg'arma miqdori  $A_0 + \frac{1}{2}A_0 = A_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ , yilning oxirida esa  $A_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 A_0$  miqdorda bo'ladi. Agar hisob raqami yopish va ochish amalini yil davomida qancha marotaba ko'p bajarilsa, u holda shuncha marta ko'p samara olish mumkin: masalan, bu amalni har oyning oxirida bajarilsa, yilning oxirida jamg'arma  $A_0\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.613 A_0$ , agar hisob har kuni yopib-ochilsa, yilning oxirida jamg'arma  $A_0\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2.715 A_0$  bo'ladi.

Agar ochish-yopish amali uzluksiz bajarilsa (albatta natija nazariy hisoblanadi) u holda yilning oxirida jamg'arma

$A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = A_0 \cdot e \approx 2.718...A_0$  miqdorda bo'ladi. Shunday qilib, 100%

nominal miqdorda samarali miqdor 171...% ni tashkil etishi mumkin.

Xuddi shu mulohazalarni bankning nominal foiz miqdori  $p\%$  bo'lganda ham aynan takrorlash mumkin. Bunda (nazariy) jamg'armaning mumkin bo'lgan miqdori:

$$A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100}} = A_0 e^{\frac{p}{100}}$$

Umumiyroq holda  $A_0$  summa bankka  $p\%$  yillik stavkada bir yil emas, biror  $t$  yil uchun saqlansin. Vaqt  $[0, t]$  oralig'ini  $n$  ta bo'laklarga bo'lib, va  $n$  ni cheksizlikka intiltirib, mumkin bo'lgan nazariy summani olamiz:

$$A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100n}t\right)^n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}t}\right]^{\frac{p}{100}} = A_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

$A = A_0 e^{\frac{pt}{100}}$  uzluksiz foizlar formulasi deyiladi.

Masalan,  $p = 100\%$  yillik stavkada ikkinchi yilning ( $t=2$ ) oxirida  $A_0 e^2 \approx 7.414...A_0$ , ya'ni boshlang'ich jamg'arma etti martadan ko'proq ortadi.

## Uzluksizlikning iqtisodiyotda qo'llanilishi.

### Bozorning to'r (o'rgimchak ini) modeli

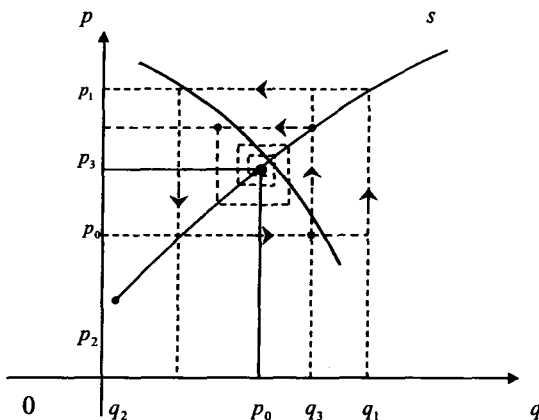
Funksiyaning uzluksiz xossalardan biri (ildiz haqidagi teorema) bozorning matematik modelida o'zining ajoyib tatbig'iga egadir. Ma'lumki, talab va taklif – bu bozorning asosiy munosabatlar kategoriyasidir. Ular juda ko'p faktorlarga bog'liq bo'lib, mahsulot narxi



– bu faktorlarning asosiysidir.  $p$  orqali mahsulot narxini,  $d$  orqali talab hajmini,  $s$  orqali taklif miqdorini belgilaymiz (ular ingliz so‘zlarining birinchi harflari: *price* – narx, *demand* – talab, *supply* – taklif). Yetarli kichik  $p$  larda  $d(p) - s(p) > 0$  (talab taklifdan ustun), katta  $p$  larda teskarisi  $d(p) - s(p) < 0$ .  $d(p)$  va  $s(p)$  funksiyalar deb hisoblab, ular uchun shunday  $p_0$  narx mavjudki, bunda  $d(p_0) = s(p_0)$  bo‘ladi, ya’ni talab taklifga teng degan xulosaga kelamiz.  $p_0$  narx muvozanat narx, shu narxdagi talab va taklif muvozanatli deyiladi. Bozorning asosiy masalalaridan biri – bu muvozanat narxni o‘rnatishdir. Muvozanat narxni topish uchun o‘rgimchak ini modeli deb ataluvchi sodda modelni ko‘rib chiqamiz. U ma’lum mahsulot uchun sotuv hajmi va narxining regular takrorlashuvchi siklik o‘zgarishi fenomenini tushuntirib beradi.

Faraz qilaylik, mahsulot ishlab chiqarish hajmi haqidagi qaror oldingi davrdagi mahsulot narxiga bog‘liq holda qabul qilinsin.

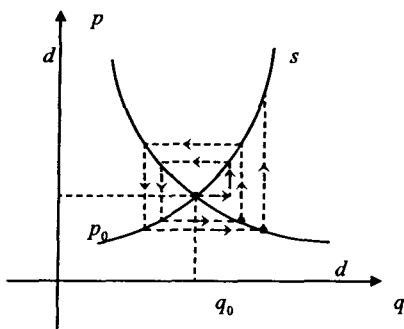
Quyidagi funksiyadagi holatni tahlil qilamiz:



Dastlabki nuqtada mahsulotning taklif hajmi  $q_1$  bo‘lib, u mahsulotning oldingi davrdagi  $p_1$  narxiga bog‘liq holda tanlangan. Bu narx muvozanat narxidan yuqoriligi sababli  $dd$  talab chizig‘i bo‘yicha unga bo‘lgan xarid hajmi  $q_2$ .

Bozor holati haqidagi ma'lumotdan foydalanib ishlab chiqaruvchi mahsulot narxini  $p_2$  miqdorgacha tushurishga majbur bo'ladi.  $p_2$  muvozanat narxdan past bo'lgani uchun mahsulotga bo'lgan talab  $q_3$  miqdorgacha ortadi.  $ss$  taklif chizig'i bo'yicha bu miqdorga  $p_3$  taklif narxi mos keladi va h.k. Bu holda spiral  $(q_0, p_0)$  bozorning muvozanat nuqtasiga yaqinlashadi.

Ba'zi hollarda bu spiral «yig'ilmasdan» «ochilishi» ham mumkin.



Tahlil etilgan «spiral»ning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchanligi  $d(p)$  va  $s(p)$  funksiyalarning qanday xossalriga bog'liqligini oldindan aytish, umuman qiyin masala hisoblanadi. Yaqinlashishga ta'sir etuvchi faqat bir omilni ko'rsatish bilan chegaralanamiz.

## 6. Funksiya hosilasi va differensial.

### Hosila tushunchasi

Biz  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada uzluksizligini

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

tenglik bajarilishi orqali ta'riflagan edik. Agar  $x - x_0 = \Delta x$  argument orttirmasi deb nomlanuvchi kattalikni kiritsak,  $x \rightarrow x_0$  da tabiiy  $\Delta x \rightarrow 0$ . (1)-limitda yangi o'zgaruvchiga  $x = x_0 + \Delta x$  o'tsak, uni quydagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \quad (2)$$

Agar funksiya orttirmasi deb nomlanuvchi  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$  miqdorni kiritsak, (2)-tenglamadan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak,  $y = f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lsa, argument orttirmasi  $\Delta x$  nolga intilganda, ya'ni  $\Delta x$  cheksiz kichik miqdor bo'lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ham nolga intilishi, ya'ni cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olsak,  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lgan  $y = f(x)$  funksiya uchun, ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3)$$

limit  $\frac{0}{0}$  ko'rinishidagi noaniqlik bo'lishligi kelib chiqar ekan. Avval ko'rganimizdek bunday noaniqliklar qaralayotgan funksiyaga bog'liq bo'lib, (3)-limit qiymati chekli, cheksiz yoki mavjud bo'lmasligi mumkin. Umuman aytganda (3)-ko'rinishdagi limitni  $x_0$  nuqta atrofida berilgan istalgan funksiya uchun qarashimiz mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki, agar (3)-limit qaralayotgan  $y = f(x)$  funksiya uchun chekli bo'lsa, u holda bu funksiya  $x = x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lishligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a$$

bo'lib,  $a$  chekli son bo'lsa, funksiya limiti ta'rifiga ko'ra  $\varepsilon > 0$  son uchun, shunday  $\delta > 0$  son mavjud bo'ladiki  $0 < |\Delta x| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $\Delta x$  lar uchun  $a - \varepsilon < \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < a + \varepsilon$ ,

ya'ni qaralayotgan  $\Delta x$  lar uchun,  $\Delta x > 0$  bo'lganda

$$(a - \varepsilon) \cdot \Delta x < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < (a + \varepsilon) \cdot \Delta x \quad (4)$$

yoki  $\Delta x < 0$  bo'lganda

$$(a + \varepsilon) \cdot \Delta x < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < (a - \varepsilon) \cdot \Delta x \quad (5)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (4)-tengsizlikdan  $f(x_0 + 0) = f(x_0)$  va (5)-tengsizlikdan  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$  ekanligini hosil qilamiz. Bundan,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

ya'ni  $y = f(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

**Ta'rif.** Agar ushbu limit qiymati  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  chekli bo'lsa, u holda  $y = f(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega deyiladi.

Limit qiymati  $y = f(x)$  funksiyaning  $x = x_0$  nuqtadagi hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanishi mumkin:

$$y'(x_0), f'(x_0), \frac{dy(x_0)}{dx}, \frac{df(x_0)}{dx}, y'_x(x_0).$$

Demak,  $f'(x_0)$  deb quyidagini

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

tushunar ekanmiz. Hosila ta'rifidan, agar  $y = f(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya  $x = x_0$  nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq noto'g'ri ekanligini, ushbu uzluksiz  $f(x) = |x|$  funksiyaning  $x = 0$  nuqtada hosilasi mavjud emasligi isbot qiladi. Haqiqatan ham, quyidagi tengliklar

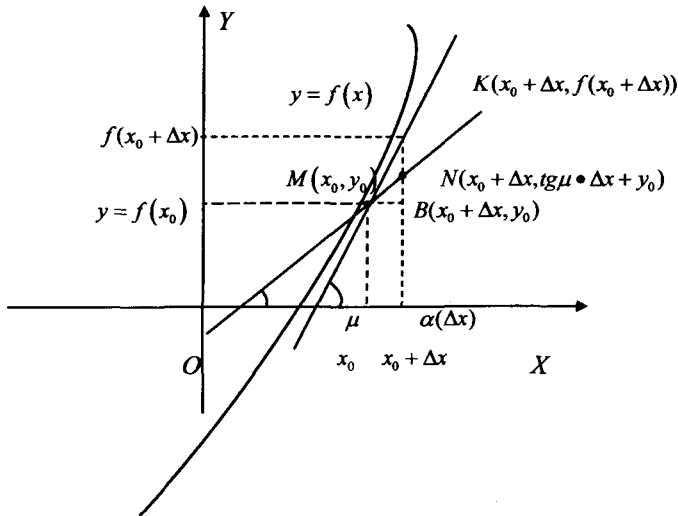
$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$  limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, ya'ni  $f(x) = |x|$  funksiya  $x = 0$  nuqtada hosilaga ega emas, ammo  $f(x) = |x|$  uzluksiz funksiya.

Endi, funksiya hosilasi qanday ma'no kasb etishini ko'rib chiqaylik.

*Hosilaning geometrik ma'nosi.* Tekislikda berilgan  $y = f(x)$  funksiya grafigining  $M(x_0, y_0)$ , (bu yerda  $y_0 = f(x_0)$ ) nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval  $MK$  kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra  $\Delta x$  orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi  $K$  nuqta,  $M$  nuqtaga yaqinlasha borib,



$MK$  to'g'ri chiziq  $MN$  urinma holatini egallaydi. U  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $MK$  to'g'ri chiziq  $OX$  o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan  $\alpha(\Delta x)$  burchagi,  $MN$  urinma hosil qilgan  $\varphi$  burchakka intiladi. Bu yerda,  $MN$  to'g'ri chiziq tenglamasi  $y - y_0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - x_0)$  ko'rinishda bo'lib,  $x - x_0 = \Delta x$

va  $\operatorname{tg} \varphi = k = MN$  to'g'ri chiziq  $OX$  o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e'tiborga olsak,  $MN$  to'g'ri chiziq tenglamasi  $y = k \cdot \Delta x + y_0$  ko'rinishda bo'ladi. 1- chizmada  $MKB$  uchburchak uchun  $MB = \Delta x$ ,  $KB = \Delta y$  va  $\operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

$$\text{Demak, } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \operatorname{tg} \varphi = k,$$

ya'ni  $f'(x_0) = k$  tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib,  $y = f(x)$  funksiyaning  $x = x_0$  nuqtadagi  $f'(x_0)$  hosilasi shu funksiya grafigining  $M(x_0, y_0)$  nuqtasiga o'tkazilgan  $MN$  urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan.  $MN$  urinmaning  $y = k \cdot \Delta x + y_0$  tenglamasida  $\Delta x = x - x_0$ ,  $y_0 = f(x_0)$  va  $k = f'(x_0)$ . U holda  $y = f(x)$  funksiya grafigining  $M(x_0, y_0)$  nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan:  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

2. *Hosilaning mexanik ma'nosi.*  $S = s(t)$  funksiya harakat qilayotgan jismning  $t$  vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini bildirsa, shu jismning  $t = t_0$  vaqtdagi oniy tezligi  $\mathcal{A}(t_0)$  ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun  $t$  vaqtga  $\Delta t$  orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida jism ma'lum bir masofa  $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$  ni bosib o'tadi, u holda jismning  $\Delta t$  vaqt davomidagi o'rtacha tezligini  $\mathcal{A}_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o'rtacha tezlik,  $t = t_0$  vaqtdagi oniy tezlik  $\mathcal{A}(t_0)$  ga qandaydir xatolik bilan teng bo'ladi. Biz  $|\Delta t|$  vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak,  $\mathcal{A}_{o'r}$  o'rtacha tezlik  $\mathcal{A}(t_0)$  oniy tezlikka shunchalik yaqin bo'lib, xatolik kam bo'ladi. Shuning uchun,

$$\mathcal{A}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{A}_{o'r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_0)$$

tenglik o'rinli deya olamiz. Natijada jismning  $S = s(t)$  harakat tenglamasida, yo'ldan  $t$  vaqt bo'yicha olingan hosila, shu jismning ayni  $t$  vaqtdagi tezligiga teng bo'lar ekan, ya'ni  $S'(t) = \mathcal{A}(t)$ .

3. *Hosilaning iqtisodiy ma'nosi.* Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan obyektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz.  $U = U(t)$  funksiya  $t$  vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning  $t=t_0$  vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun  $t$  vaqtga  $\Delta t$  orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi  $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$  mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorligi  $Z_{o'rtacha} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$  tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash  $t=t_0$  vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$Z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z_{o'rtacha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0).$$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi  $U(t)$  funksiyaning vaqt bo'yicha  $U'(t)$  hosilasi, ishlab chiqarishning  $Z(t)$  unumdorligini berar ekan, ya'ni

$$U'(t) = Z(t).$$

**Masalan 1.** Funksiya hosilasini hosilaning ta'rifi yordamida hisoblang:  $y=x^2$ .

**Yechish:** Funksiya orttirmasini hisoblayamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

$$\text{Hosilaning ta'rifiga ko'ra: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

**Masalan 2.** Funksiya hosilasini hosilaning ta'rifi yordamida hisoblang:  $y=\sin x$ .

**Yechish:** Avval funksiya orttirmasini hisoblayamiz:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Demak, ta'rifga ko'ra  $(\sin x)' = \cos x$ .

**Masalan 3.**  $y = |x-1|$  funksiya hosilasini hisoblang.

*Yechish:*  $x = 1$  nuqtada argumentga  $\Delta x$  orttirma beramiz, u holda funksiya  $\Delta y$  orttirma oladi:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{agar } \Delta x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \Delta x, & \text{agar } \Delta x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$  limitning mavjud emasligini ko'rsatadi,  $y = |x-1|$  funksiya

$x = 1$  nuqtada hosilaga ega emas, ammo  $y = |x-1|$  uzluksiz funksiya.

### Hosila hisoblashning asosiy qoidalari

1. Agar  $f(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda istalgan o'zgarmas  $a$  son uchun  $\varphi(x) = a \cdot f(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi  $\varphi'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$ , chunki funksiya limiti xossasiga ko'ra:

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a f(x_0 + \Delta x) - a f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot f'(x_0)$$

2. Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda  $\varphi(x) = f(x) \pm g(x)$  funksiya ham  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

Haqiqatan ham, limit xossalari va hosila ta'rifiga ko'ra:



$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \pm g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \pm \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \pm \\ &\pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0)\end{aligned}$$

3.  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda  $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$  funksiya ham  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:  $\varphi'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ ;

Funksiya limiti xossasiga va  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega funksiya shu nuqtada uzluksiz ekanligidan, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot [g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0 + \Delta x) + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

4. Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,  $g(x_0) \neq 0$  bo'lsa, u holda  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  funksiya ham  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi formula orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Funksiya limiti xossalari,  $g(x)$  funksiyaning  $x = x_0$  dagi uzluksizligi va  $g(x_0) \neq 0$  ekanligidan hamda  $g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida noldan farqli ekanligini e'tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \left[ \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \cdot g(x_0) - f(x_0)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right] = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

5. Agar  $u = g(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,  $y = f(u)$  funksiya esa  $u = u_0 = g(x_0)$  nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda  $y = f(g(x))$  murakkab funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi

formula orqali topiladi:  $y'_x(x_0) = f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$ .

Haqiqatan ham, murakkab funksiya limiti va hosilaga ega bo'lgan funksiya uzluksizligiga ko'ra

$$\begin{aligned} y'_x(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0) \end{aligned}$$

Bu yerda,  $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$  bo'lib,  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $g(x)$  funksiya  $x = x_0$  da uzluksiz bo'lganligidan  $\Delta u \rightarrow 0$  kelib chiqishi e'tiborga olingan.

6. Agar  $y = f(x)$  va  $x = g(y)$  funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'lib,  $x = x_0$  nuqtada  $f'(x_0) \neq 0$  va  $y_0 = f(x_0)$  nuqtada  $g'(y_0)$  hosilalar mavjud bo'lsa, u holda  $g'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}$ , ya'ni  $x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}$  tenglik o'rinli. Murakkab funksiya hosilasiga va  $x' = 1$  ekanligini e'tiborga olib,  $x = g(f(x))$  tenglikdan quyidagi kelib chiqadi:

$$1 = (x)' = (g(f(x_0)))'_x = g'_y(y_0) \cdot f'_x(x_0).$$

7. Agar funksiya  $f(kx+b)$  ko'rinishda bo'lsa  $(f(kx+b))' = kf'(kx+b)$  bo'ladi. Bu tenglik murakkab funksiya hosilasidan kelib chiqadi. Yuqoridagi qoidalar umumiy holda quyidagicha yozilishi mumkin:

1.  $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ ,  $a = const$ .

2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ .

3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

4.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ .

5.  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  funksiyalar uchun  $(f(u))'_x = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$ .

6.  $y = f(x)$  va  $x = g(y)$  o'zaro teskari funksiyalar uchun,  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

7.  $y = f(kx+b)$  funksiya uchun  $y' = kf'(kx+b)$ .

Endi asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaylik.

Masalan 1.  $y = x^\alpha$  darajali funksiya uchun  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  o'rinli bo'ladi.

Limitning xossalariga ko'ra

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[ \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right]}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Xususan,  $(x)' = 1$ .

2.  $y = a^x$  ( $a > 0$ ) ko'rsatkichli funksiya uchun  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

Ajoyib limit xossalariga ko'ra

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Xususan,  $(e^x)' = e^x$ . 1- va 2-amalning isbotida mos ravishda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a}{x} = a \text{ va } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ ekanligidan foydalanildi.}$$

3.  $y = \log_a x$  logarifmik funksiya ( $a > 0, a \neq 1$ ) uchun  $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$ .

Haqiqatdan ham,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Xususan,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

4.  $y = \sin x$  uchun  $(\sin x)' = \cos x$ . 1-ajoyib limit va  $\cos x$  funksiya uzluksizligiga ko'ra

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Bu yerdan funksiya hosilasi xossalaridan foydalanib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(\cos x)' = \left[ \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right]' = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5. Teskari trigonometrik funksiyalar.  $y = \arcsin x$  uchun  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  tenglik o'rinli bo'ladi.

$x = \sin y$  funksiya  $y = \arcsin x$  funksiyaga teskari bo'lgani uchun, teskari funksiya hosilasi formulasi ko'ra

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Xuddi shunga o'xshash,  $y = \arctg x$ ,  $y = \arccos x$  va  $y = \operatorname{arctg} x$  funksiyalar uchun  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  va

$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$  tengliklarni hosil qilish mumkin.

Yuqorida hosil bo'lgan formulalarni quyidagi jadval ko'rinishida ifoda qilamiz:

1.  $c' = 0$

2.  $x' = 1$

3.  $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

4.  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

7.  $(e^x)' = e^x$

10.  $(\sin x)' = \cos x$

11.  $(\cos x)' = -\sin x$

12.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16.  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$8. (\log_a^x) = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$17. (\operatorname{arccot} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$9. (\ln x) = \frac{1}{x}$$

### Parametrik ko‘rinishda berilgan funktsiyaning hosilasi

Faraz qilaylik,  $y$  funktsiyaning  $x$  argumentga bo‘g‘liqligi  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

tenglamalar bilan parametrik shaklda berilgan bo‘lsin.

**Masalan.** 1)  $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases}$  – tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.

2)  $\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \cos t \\ y = y_0 + r \cdot \sin t \end{cases}$  – aylananing parametrik tenglamasi.

3)  $x = a \cdot \cos t, y = b \cdot \sin t$  – ellipsning parametrik tenglamasi.

Parametr  $t$  ga  $\Delta t$  orttirma beramiz, mos ravishda  $\Delta x$  va  $\Delta y$  orttirmalar hosil bo‘ladi. U holda  $y$  funktsiyadan  $x$  bo‘yicha hosila:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ yoki } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

**Masalan.**  $x = e^{2t} \cos^2 t, y = e^{2t} \sin^2 t$ ;  $y'_x$  hosilani hisoblang.

**Yechish:**  $x'_t = 2e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} (-2 \cos t \cdot \sin t) = 2e^{2t} (\cos t - \sin t) \cos t$ ,

$$y'_t = 2e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cdot 2 \cos t \cdot \sin t = 2e^{2t} (\cos t + \sin t) \sin t,$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t \cdot \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} = \operatorname{tg} t \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} \left( t + \frac{\pi}{4} \right), \left( t \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \right).$$

### Yuqori tartibli hosilalar

Agar  $y = f(x)$  funktsiya uchun  $(a, b)$  oraliqning har bir nuqtasida hosila mavjud bo‘lsa, u holda  $(a, b)$  oraliqda yangi  $f'(x)$  funktsiyani hosil qilamiz. Bu  $f'(x)$  funktsiya  $x = x_0 \in (a, b)$  nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u

holda  $x = x_0$  nuqtada  $y = f(x)$  funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega deyilib, bu hosila  $y''(x_0), f''(x_0), \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}, \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, y''_{x_0}(x_0)$ . shaklda belgilanadi.

Demak, ikkinchi tartibli hosila quyidagi tenglik orqali topilar ekan:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Xuddi shuningdek,  $y = f(x)$  funksiya uchun uchinchi, to'rtinchi va  $n$ -tartibli hosilani aniqlash mumkin. Umumiy holda, agar  $y = f(x)$  funksiya uchun  $(a, b)$  oraliqning har bir nuqtasida  $(n-1)$  tartibli hosilaga ega bo'lib, mana shu hosil bo'lgan funksiyani  $f^{(n-1)}(x)$  deb belgilasak, o'z navbatida  $f^{(n-1)}(x)$  funksiya  $x = x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu hosila  $y = f(x)$  funksiyaning  $x = x_0$  nuqtadagi  $n$  tartibli hosilasi deyiladi.  $n$  tartibli hosilani quyidagi ko'rinishlarda ifoda etish mumkin:

$$y^{(n)}(x_0), f^{(n)}(x_0), \frac{d^n y(x_0)}{dx^n}, \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, y^{(n)}_{x_0}(x_0).$$

Demak, ta'rifga ko'ra  $n$  tartibli hosila

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

tenglik orqali aniqlanar ekan. Bu tenglikni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin:  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Bu yerda,  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

Yuqori tartibli hosila uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

1.  $(cf(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x) \quad c = const$
2.  $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$
3.  $(f(ax + b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$
4.  $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$

Bu tengliklarning barchasini matematik induksiya usuli bilan isbot qilish mumkin. (4)-tenglik *Leybnis formulasi* deb nomlanadi.

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini keltiramiz. Bu formulalar ham matematik induksiya usuli bilan isbot qilinadi.

1.  $(x^m)^{(n)} = m \cdot (m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$ ,  $m$  istalgan haqiqiy son. Agar  $m$  natural son bo'lsa,  $n > m$  uchun  $(x^m)^{(n)} = 0$  va  $n = m$  uchun  $(x^m)^{(m)} = m!$ .

2.  $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$ , xususan  $(e^x)^{(n)} = e^x$

3.  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

4.  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

**Masalan 1.** Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblang:

$$y = \sin^2 x.$$

**Yechish:**  $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ,  $y'' = 2 \cos 2x$ .

**Masalan 2.** Funksiyaning uchinchi tartibli hosilasini hisoblang:

$$y = (2x^3 + 1) \cdot \cos x.$$

**Yechish:** Leybnis formulasidan foydalanamiz:

$$f(x) = 2x^3 + 1, g(x) = \cos x. \quad f' = 6x^2, f'' = 12x, f''' = 12. \quad g' = -\sin x, g'' = -\cos x, g''' = \sin x.$$

$$U \text{ holda } y''' = [f(x) \cdot g(x)]''' = f''' \cdot g + 3f'' \cdot g' + 3f' \cdot g'' + f \cdot g''' = (2x^3 - 36x + 1) \sin x - 6(3x^2 - 2) \cos x.$$

**Masalan 3.** Funksiyaning  $n$ -tartibli hosilasini hisoblang:  $y = \sin x$ .

**Yechish:**  $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$ ,

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \dots, \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

## Funksiya differensiali

Matematika tatbiqida asosan taqribiy hisoblashlar qo'llaniladi. Taqribiy hisoblashlarning muhim manbayi funksiya differensial hisoblanadi. Biz mana shu tushuncha bilan tanishamiz.

$f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo'lib,  $x_0$  nuqtada uzluksiz, ya'ni  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  bo'lsin. Agar  $x - x_0 = \Delta x$  va  $f(x) - f(x_0) = \Delta y$  deb belgilashlar kiritsak,  $\Delta x$  argument orttirmasi,  $\Delta y$  esa

shu ortirmaga mos keluvchi funksiya ortirmasi bo'lib, yuqoridagi limit munosabatini quyidagicha yozish mumkin:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ .

**Ta'rif.** Agar  $\Delta x \rightarrow 0$  da, funksiya ortirmasi  $\Delta y$  ni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x). \quad (1)$$

Bu yerda,  $A$  o'zgarmas son,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ , u holda  $y=f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi va funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi differensial  $A \cdot \Delta x$  ga teng deb ataladi. Bu differensial  $A \cdot \Delta x = df(x_0)$  shaklda belgilanadi.

*Izoh:*  $\alpha(\Delta x)$  funksiya uchun  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$  tenglik  $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$  kabi ifoda etiladi va  $\alpha(\Delta x)$  funksiya  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $\Delta x$  ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi. Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $1 - \cos x = o(x)$   $x^2 = o(x)$  bo'ladi, chunki  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$  yoki  $x \rightarrow 0$  da  $1 - \cos x = o(x)$  bo'ladi, sababi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{2} = 0$$

tenglik o'rinlidir. Xuddi shunga o'xshash  $x \rightarrow 1$  da  $\lg^2(x-1) = o(x-1)$ ,  $1 - \cos(x-1) = o(x-1)$  va h.k.

Agar (1)-tenglikni  $\Delta x$  ga bo'lib  $\Delta x \rightarrow 0$  da limitga o'tsak quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

Bu tenglikdan,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada hosilasi mavjud bo'lib,  $f'(x_0) = A$  ekanligi kelib chiqar ekan. Demak,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada funksiya hosilasi ham mavjud bo'lar ekan. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.



**Teorema.**  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida berilgan  $f(x)$  funksiya shu nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqtada  $f(x)$  funksiyaning  $df(x_0)$  differensial mavjud bo'lib, bu differensial uchun

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \text{ tenglik o'rinli.}$$

*Isbot:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

tenglikda  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$  belgilashni kiritsak,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ .

U holda  $\alpha(\Delta x) \cdot \theta(\Delta x)$  bo'lgani uchun

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Demak,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada differensiallanuvchi va

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (2)$$

tenglik o'rinli.

Xulosa qilib shuni aytish mumkin ekanki,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun, funksiyaning  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli, bu nuqtadagi differensial uchun (2)-tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib,  $x_0$  nuqtada differensiallanuvchi funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) = df(x_0) + o(\Delta x) \quad (3)$$

Taqribiy hisoblashlarni funksiya orttirmasini uning differensial bilan almashtirish orqali bajarish mumkin, ya'ni (3)-tenglikda  $o(\Delta x)$  ni tashlab yuborsak quyidagi taqribiy  $\Delta y \approx df(x_0)$  tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerda, yo'l qo'yilgan xatolik  $o(\Delta x)$  ko'rinishda bo'lib,  $|\Delta x|$  kichik bo'lgani sari bu xatolik  $|\Delta x|$  ga nisbatan tezroq kichiklashib boradi.

Agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

Endi misollar qaraymiz.  $f(x) = x$  funksiya  $(-\infty, +\infty)$  da differensiallanuvchi bo'lib, (2)-tenglikga ko'ra  $dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$  o'rinli

bo'lad, ya'ni erkli o'zgaruvchi uchun uning differensial va orttirmasi teng bo'lar ekan.

Bu tenglikdan funksiya differensial uchun

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \text{ yoki } dy = y' dx \quad (4)$$

tenglik yoza olamiz.

Demak,  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ,  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

(4)-tenglikka tayanib asosiy elementar funksiyalarning differensial va differensiallash qoidalarini kelitiramiz:

1.  $d(c) = 0 \quad c = const$

2.  $d(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$

3.  $d(a^x) = a^x \ln a dx$ ,  $d(e^x) = e^x dx$

4.  $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$ ,  $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$

5.  $d(\sin x) = \cos x dx$

6.  $d(\cos x) = -\sin x dx$

7.  $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

8.  $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$

9.  $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

10.  $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

11.  $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx$

12.  $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$

### Differensiallash qoidalari

1.  $d(cf(x)) = c \cdot df(x)$ ,  $c = const$

2.  $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$

3.  $d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$

4.  $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

### Yuqori tartibli differensiallar

$df(x) = f'(x)dx$  tenglikda  $dx$  erkli o'zgaruvchining orttirmasini o'zgarimas deb qarash,  $df(x)$  funksiya differensial  $x$  ning funksiyasi

ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun  $df(x)$  funksiya differensialini topish masalasini ko'rishimiz mumkin. Bu differensial  $f(x)$  funksiyaning ikkinchi tartibli differensial deb atalib,  $d^2 f(x)$  shaklda belgilanadi, ya'ni

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$d^3 f(x) = f'''(x)dx^3$$

$$d^4 f(x) = f^{IV}(x)dx^4$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{yoki} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Ko'paytmaning yuqori tartibli differensial uchun Leybnis formulasini e'tiborga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$d^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x).$$

Bu yerda,  $d^0 f(x) = f(x)$ ,  $d^0 g(x) = g(x)$  deb olingan.

**Masalan 1.** Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensialini hisoblang:

$$y = \arctg x$$

$$\text{Yechish: } dy = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad d^2 y = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx^2.$$

**Masalan 2.** Agar  $y = \arctg x$  bo'lsa,  $d^3 y$  ni hisoblang.

$$\text{Yechish: } dy = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d^2 y = -\frac{2x dx^2}{(1+x^2)^2},$$

$$d^3 y = -\frac{2}{(1+x^2)^3} \left[ (1+x^2)^2 - 2x(1+x^2)2x \right] dx^3 = 2 \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3} dx^3.$$

## 7. Funksiyani to'liq tekshirish

### Differensial hisobning asosiy teoremlari

Yuqorida kiritilgan funksiya hosilasi va differensialining tatbiqlari quyidagi teoremlarga asoslangandir.

**Ferma teoremasi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron-bir  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) atrofida berilgan bo'lib,  $x_0$  nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishib,  $f'(x_0)$  hosilasi mavjud bo'lsa, u holda bu hosila nolga teng, ya'ni  $f'(x_0) = 0$ .

*Isbot:* Istalgan  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  uchun  $f(x) \leq f(x_0)$ , ya'ni  $f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \{f(x)\}$  bo'lsin, u holda  $f'(x_0)$  mavjudligidan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

bo'ladi, chunki  $f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) \leq 0$  va  $\Delta x > 0$ . Xuddi shunga o'xshash

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

bo'ladi, chunki  $f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) \leq 0$  va  $\Delta x > 0$ . U holda, bu tengsizliklardan  $f'(x_0) = 0$  ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

**Roll teoremasi.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz va  $(a, b)$  intervalda hosilaga ega bo'lib, oraliq chegaralarida bir xil qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni  $f(a) = f(b)$  bo'lsa, u holda  $(a, b)$  intervalda shunday  $c$  nuqta topiladiki, uning uchun  $f'(c) = 0$  tenglik o'rinli bo'ladi.

*Isbot.* Veyershtasning (2)-teoremasiga ko'ra  $[a, b]$  oraliqda shunday  $x_1$  va  $x_2$  nuqtalar mavjud bo'ladiki, ular uchun  $f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  va  $f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar  $\{x_1; x_2\} = \{a, b\}$  bo'lsa, u holda  $f(x_1) = f(x_2)$  va istalgan  $x \in [a, b]$  uchun  $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \text{const}$  ekanligi kelib chiqadi. Demak,  $f'(x) = 0$  ekan, bu esa teoremaning  $\{x_1; x_2\} = \{a, b\}$  hol uchun isbot bo'lganini bildiradi.

Agar  $\{x_1, x_2\} \neq \{a, b\}$  bo'lsa, u holda  $x_1 \in (a, b)$  yoki  $x_2 \in (a, b)$ . Bundan Ferma teoremasiga ko'ra  $f'(x_1) = 0$  yoki  $f'(x_2) = 0$  ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Taqribiy hisoblash uchun qo'llaniladigan ko'pgina formulalarni hosil qilishda quyidagi Lagranj teoremasidan foydalaniladi.

**Lagranj teoremasi.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz va  $(a, b)$  intervalda hosilaga ega bo'lsin, u holda  $(a, b)$  intervalda shunday  $c$  nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{Isbot: } \varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

funksiyani kiritamiz.  $\varphi(x)$  funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari o'rinli va

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta mavjudki  $\varphi'(c) = 0$ , ya'ni

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bu tenglikdan esa  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

**Koshi teoremasi.**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz va  $(a, b)$  intervalda hosilaga ega bo'lib,  $g(x) \neq 0$  bo'lsin, u holda  $(a, b)$  intervalda shunday  $c$  nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

*Isbot:*  $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$  funksiyani kiritamiz.

$\varphi(x)$  funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari o'rinli va

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta mavjudki  $\varphi'(c) = 0$ , ya'ni

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Bu tenglikdan esa

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

$g(x) = x$  bo'lsa, Lagranj teoremasi hosil bo'ladi.

**Masalan 1.**  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  funksiya uchun Roll teoremasi shartlarini tekshiring.

**Yechish:** Funksiya  $[1; 3]$  oraliqda differensiallanuvchi va  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $x=3$  nuqtalarda nolga aylanadi. Demak,  $[1; 2]$  va  $[2; 3]$  oraliqlarning har birida berilgan funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi.  $(1; 3)$  ittervalda kamida bitta shunday  $c$  nuqta topiladiki, bu nuqtada  $f'(c) = 0$  bo'ladi. Berilgan funksiya hosilasini nolga tenglab  $3x^2 - 12x + 11 = 0$  tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib:  $c_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$  va  $c_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$  ildizlarni hosil qilamiz.

Bunda  $1 < c_1 < 2$  va  $2 < c_2 < 3$ .

**Masalan 2.**  $y = x^2 - 4x + 3$  funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ham ildizi bor ekanligi tekshirilsin.

**Yechish:** Funksiya  $[1; 3]$  oraliqda differensiallanuvchi bo'lib  $x=1$  va  $x=3$  nuqtalarda nolga aylanadi:  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ . Demak,  $[1; 3]$  oraliqda berilgan funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi.  $(1; 3)$  ittervalda kamida bitta shunday  $c$  nuqta topiladiki, bu nuqtada  $f'(c) = 0$  bo'ladi. Berilgan funksiya hosilasini nolga tenglab:  $y' = 2x - 4$ ,  $2x - 4 = 0$ ,  $c = 2$  va  $2 \in [1; 3]$ .

## Taylor va Makloren formulalari

Endi biz taqribiy hisoblashlarda ko'p qo'llaniladigan formulani keltiramiz.

**5-teorema.** Agar  $\tau(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida berilganda  $x_0$  nuqtada  $n$  tartibgacha  $\tau^{(k)}(x)$ ,  $k=1,2,\dots,n$  hosilalari mavjud bo'lib,

$$\tau(x_0) = \tau'(x_0) = \tau''(x_0) = \dots = \tau^{(n-1)}(x_0) = \tau^{(n)}(x_0) = 0$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda  $\tau(x)$  funksiya uchun  $\tau(x) = 0((x-x_0)^n)$  munosabat o'rinli bo'ladi.

*Isbot:* Matematik induksiya usuli yordamida isbot qilamiz:  $n=1$  bo'lsin, u holda  $\tau(x_0) = \tau'(x_0) = 0$ . Bundan  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x) - \tau(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x) - \tau(x_0)}{x - x_0} = \tau'(x_0) = 0$  tenglik kelib chiqadi, ya'ni  $\tau(x) = 0((x-x_0))$  ekan.

Endi  $n-1$  da  $\tau(x_0) = \tau'(x_0) = \dots = \tau^{(n-1)}(x_0) = 0$  tengliklardan  $\tau(x) = 0((x-x_0)^{n-1})$  munosabat o'rinli ekanligi kelib chiqsin deb faraz qilaylik va  $n$  da  $\tau(x_0) = \tau'(x_0) = \dots = \tau^{(n-1)}(x_0) = \tau^{(n)}(x_0) = 0$  tengliklar o'rinli bo'lsin. Agar  $\tau_1(x) = \tau'(x)$  belgilashni kiritsak,  $\tau_1(x_0) = \tau_1'(x_0) = \tau_1^{(n-1)}(x_0) = 0$  ekanligi kelib chiqadi.

Demak,  $\tau(x) = 0((x-x_0)^n)$ . Teorema isbot bo'ldi.

$f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning biron-bir atrofida berilgan va bu atrofda uning  $(n-1)$  tartibli hosilasi mavjud va  $x_0$  nuqtada  $f(x)$  funksiyaning  $n$  tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Bu shartlarda  $x_0$  ning qaralayotgan atrofida quyidagi  $p(x)$  ko'phadni aniqlay olamiz:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Agar  $\tau_n(x) = f(x) - p(x)$  funksiyaning tekshirsak,  $\tau_n(x_0) = \tau_n'(x_0) = \dots = \tau_n^{(n)}(x_0) = 0$  tengliklar kelib chiqadi. Yuqoridagi teoremaga ko'ra  $\tau(x) = 0((x-x_0)^n)$  munosabat o'rinlidir. Bundan Teylor formulasi deb nomlanuvchi formulani hosil qilamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \tau_n(x). \quad (1)$$

Bu yerda,  $\tau_n(x)$  formulaning qoldiq hadi deyiladi.

Isbot qilinganiga ko'ra  $\tau_n(x) = 0((x-x_0)^n)$ , ya'ni  $x$  o'zgaruvchi  $x_0$  dan yetarlicha kam farq qilsa,  $\tau_n(x)$  ham 0 dan  $(x-x_0)^n$  tartibda farqlanadi, ya'ni  $n$  qanchalik katta bo'lsa ( $|x-x_0| < 1$  deb olish mumkin),  $\tau_n(x)$  ifoda 0 dan shunchalik kam farq qiladi. Demak, hisoblashlarda ushbu

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

taqribiy formuladan foydalanishimiz mumkin ekan.

(1)-formulada  $x-x_0 = \Delta x$  deb belgilasak, Teylor formulasing quyidagi ko'rinishlarini hosil qilamiz:

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n + \theta(\Delta x^n)$$

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) = \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + \theta(\Delta x^n).$$

Agar (1)-formulada  $x=0$  deb olinsa, Makloren formulasi deb nomlanuvchi ushbu formulani hosil qilamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \theta(x^n).$$

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqoridagi formulalarga yoyilmasini topaylik:

1)  $f(x) = e^x$  bo'lsa,  $f^{(n)}(x) = e^x$  va  $f^{(0)}(0) = 1$  bo'lgani uchun

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x^n).$$

2)  $f(x) = \sin x$  bo'lsa,  $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$  va  $f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

ekanligidan,  $n = 2k$  bo'lsa,  $f^{(2k)}(0) = 0$  va  $n = 2k-1$  bo'lsa,  $f^{(2k-1)}(0) = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}$  shuning uchun

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \theta(x^{2k}).$$



3)  $f(x) = \cos x$  bo'lsa,  $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$  va  $f^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$   $n = 2k$  bo'lganda,  $f^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$  va  $n = 2k - 1$  bo'lganda,  $f^{(2k-1)}(0) = 0$  shuning uchun

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}).$$

Hosil qilingan yoyilmalar  $e^x$ ,  $\sin x$  va  $\cos x$  funksiyalar qiymatini topish  $x$  ga nisbatan ko'phad bo'lgan qiymatini topishga olib kelishini ko'rsatadi.

### Lopital qoidasi

Limitlarni hisoblashda uchraydigan  $\frac{0}{0}$  va  $\frac{\infty}{\infty}$  ko'rinishdagi noaniqliklarni ochishda, quyidagi Lopital qoidasi deb nomlanadigan qoidani asoslab beruvchi teoremani keltiramiz.

**Teorema.** Agar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  limit  $\frac{0}{0}$  yoki  $\frac{\infty}{\infty}$  ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

*Isbot:* Isbotni  $\frac{0}{0}$  ko'rinishdagi noaniqlik uchun keltiramiz. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

bo'lsin, u holda  $f(a) = g(a) = 0$  deb olib, Lagranj teoremasiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi_1)(x-a)}{g'(\xi_2)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bu yerdagi oxirgi tenglik  $|\xi_1 - a| < |x - a|$  va  $|\xi_2 - a| < |x - a|$  tengsizlikdan kelib chiqadi.

Misollar: 1.  $\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

## Funksiya grafigining asimptotasi

Funksiya grafigini chizishda grafik asimptotasi deb nomlanuvchi to'g'ri chiziqlarning yordami kattadir.

**Ta'rif.** Agar funksiya grafigining  $M = (x, f(x))$  nuqtasidan berilgan to'g'ri chiziqqa bo'lgan  $d(M)$  masofa uchun  $\lim_{|M| \rightarrow +\infty} d(M) = 0$  tenglik o'rinli bo'lsa, shu to'g'ri chiziq  $y = f(x)$  funksiya grafigining asimptotasi deyiladi. Bu yerda,  $|M| = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$   $M$  nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa.

Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0} |M| = +\infty$  bo'lsa u holda asimptota vertikal asimptota deyiladi. Vertikal asimptota  $x = x_0$  to'g'ri chiziq bilan ifodalanadi.

Agar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |M| = +\infty$  yoki  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |M| = +\infty$  bo'lsa, asimptota og'ma asimptota deyiladi. Og'ma asimptota  $y = kx + b$  ko'rinishda bo'ladi.

Agar og'ma asimptota uchun  $x = 0$  bo'lsa, ya'ni asimptota  $y = b$  ko'rinishda bo'lsa, bunday asimptota gorizontaal asimptota deyiladi.

$x = x_0$  vertikal asimptota,  $y = f(x)$  funksiyani cheksizlikka aylantiruvchi  $x_0$  nuqta bilan ifodalangani uchun,  $x_0$  ni  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$  yoki  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$  tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqta deb qarash kerak.

$y = kx + b$  og'ma asimptotani topish uchun ushbu tenglikdan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

foydalanish mumkin. Bu yerdan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$ , ya'ni  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  ekanligi kelib chiqadi. U holda  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$ .

**Masalan.** Funksiya asimptotalarini toping:  $y=x+2\arctg x$ .

**Yechish:** Funksiya vertikal va gorizontal asimptotalarga ega emas.

Og'ma asimptotalarni aniqlaymiz:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\arctg x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2\arctg x}{x} \right) = 1, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2\arctg x - x] = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Demak,  $y=x+\pi$  chiziq funkisiya grafigining o'ng og'ma asimptotasi ekan.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2\arctg x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{2\arctg x}{x} \right) = 1, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 2\arctg x - x] = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

Demak,  $y=x-\pi$  chiziq funkisiya grafigining chap og'ma asimptotasi ekan.

### Funksiyani hosila yordamida tekshirish va uning grafigini yasash

Endi funkisiyani tekshirishda hosilaning qo'llanilishini ko'rib chiqamiz.

**6-teorema.**  $f(x)$  funkisiya  $(a,b)$  intervalda o'zgaras bo'lishi uchun, uning hosilasi shu intervalda nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

*Isbot: Zarurligi.* Agar  $x \in (a,b)$  uchun  $f(x) = c = \text{const}$  bo'lsa,  $f'(x) = (c)' = 0$  bo'lishi kelib chiqadi.

*Yetarliligi.* Ixtiyoriy  $x \in (a,b)$  uchun  $f'(x) = 0$  bo'lsin, u holda  $a < x_0 < b$  va  $a < x < b$  uchun  $[x_0, x]$  oraliqda  $f(x)$  funkisiyaga Lagranj teoremasini qo'llasak

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \quad (x_0 < c < x)$$

tenglik o'rinli bo'lib,  $f'(c) = 0$  dan  $f(x) = f(x_0)$  ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni  $f(x)$  funkisiya  $(a,b)$  intervalda o'zgaras ekanligini hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

*Natija:* Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar uchun  $(a,b)$  intervalda  $f'(x)=g'(x)$  tenglik o'rinli bo'lsa, shu intervalda  $f(x)=g(x)+c$ ,  $c=const$  tenglik o'rinlidir.

Haqiqatan ham,  $\varphi(x)=f(x)-g(x)$  funksiya uchun  $(a,b)$  intervalda  $\varphi'(x)=0$  ekanligi kelib chiqadi. U holda 1-teoremaga ko'ra  $\varphi(x)=c=const, x \in (a,b)$  natijada

$$f(x)=g(x)+c, x \in (a,b).$$

**7-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda hosilaga ega bo'lib, barcha  $x \in (a,b)$  uchun  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

*Isbot:*  $a < x_1 < x_2 < b$  bo'lsin, u holda  $[x_1, x_2]$  oraliqda Lagranj teoremasiga ko'ra, shunday  $c \in (x_1, x_2)$  mavjudki, uning uchun

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0.$$

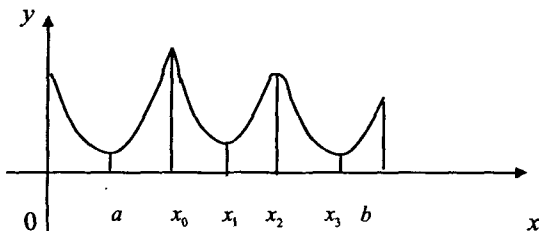
Bundan  $x_2 - x_1 > 0$  bo'lgani uchun  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , ya'ni  $f(x_1) < f(x_2)$ . Demak,  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda o'suvchi ekan.  $f'(x) < 0$  bo'lganda  $f(x)$  funksiyaning kamayuvchi ekanligi shunga o'xshash tarzda isbot qilinadi.

*Izoh:* Agar  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, shu intervalda  $f'(x)$  hosila mavjud bo'lsa, hosila uchun  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) tengsizlik o'rinli bo'ladi, deyish mumkin, ya'ni o'suvchi (kamayuvchi) funksiyaning ayrim nuqtalaridagi hosilasi nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan  $y = x^3$  funksiya  $(-\infty, +\infty)$  oraliqda o'suvchi bo'lib, uning hosilasi  $y' = 3x^2, x = 0$  da  $y'(0) = 0$  bo'ladi.

## Funksiya ekstremumi

Funksiya grafigini chizishda uning maksimum va minimum nuqtalari muhim o'rin egallaydi.

**3-ta'rif.** Agar  $x_0$  nuqtaning shunday atrofi  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) mavjud bo'lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  uchun  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi. Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari, funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstremumlari deb yuritiladi.



Funksiya berilgan  $[a, b]$  oraliqda bir necha lokal ekstremumlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, rasmda  $x_0, x_1, x_2, x_3$  nuqtalarda funksiya lokal ekstremumlarga erishadi.  $[a, b]$  oraliqdagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning global ekstremumlari deyiladi. Funksiya global ekstremumga oraliq chegaralarida erishishi mumkin. Masalan, rasmdagi funksiya uchun  $f(b) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  ekanligini ko'rish mumkin.

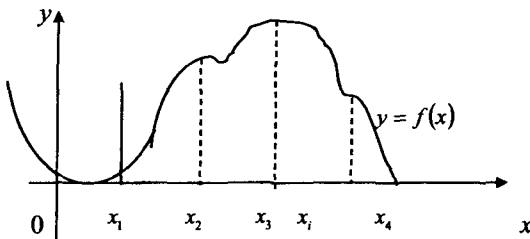
Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada lokal ekstremumga erishib, bu nuqtada  $f'(x_0)$  hosila mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra  $f'(x_0) = 0$ . Lekin,  $f'(x_0) = 0$  ekanligidan,  $x_0$  nuqtada funksiya ekstremumga erishadi deya olmaymiz. Masalan  $y = x^3$  funksiya  $(-\infty, +\infty)$  da o'suvchi bo'lgani uchun uning ekstremum nuqtalari mavjud emas, lekin  $y' = 3x^2$  hosila  $x = 0$  da nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga  $y = \sqrt[3]{x^2}$  funksiya  $x = 0$  nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, bu nuqtada funksiya lokal minimumga erishgani bilan,  $x = 0$  nuqtada funksiya hosilasi mavjud emasligini avval ko'rgan edik.

Yuqorida aytilganlarga asosanib, lokal ekstremumning quyidagi zaruriy shartini keltirishimiz mumkin.

$f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishishi uchun, shu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'lishi yoki funksiya hosilasi mavjud bo'lmashligi zarur.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar, ya'ni  $f'(x)=0$  tenglama yechimlari va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar, funksiyaning kritik (yoki statsionar) nuqtalari deyiladi.

Demak, funksiyaning ekstremum nuqtalarini uning kritik nuqtalari orasidan izlashimiz kerak.



Chizmadagi  $y = f(x)$  funksiya uchun  $x_1, x_2, x_3, x_4$  nuqtalar kritik nuqtalar bo'lib, ( $f'(x_1)$  mavjud emas,  $f'(x_2) = \infty$ ,  $f'(x_3) = 0$ ,  $f'(x_4) = 0$ ) faqat,  $x_1$  va  $x_3$  nuqtalari ekstremum nuqtalari bo'ladi.

### Funksiya ekstremumining birinchi yetarli sharti

**8-teorema.** Agar  $x_0$  kritik nuqta atrofida  $x$  nuqta chapdan o'ngga qarab o'zgarganda,  $f(x)$  funksiya hosilasi o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, bu  $x_0$  nuqta lokal maksimum nuqta (lokal minimum) bo'ladi.

*Isbot:* Agar  $(x_0 - \delta, x_0)$  ( $\delta > 0$ ) intervalda  $f'(x) > 0$  bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'suvchi bo'lganligidan istalgan  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  uchun  $f(x) \leq f(x_0)$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar  $(x_0, x_0 + \delta)$  intervalda  $f'(x) < 0$  bo'lsa, bu

oraliqda  $f(x)$  funksiya kamayuvchi bo'lib, barcha  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  lar uchun  $f(x) \leq f(x_0)$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, istalgan  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  uchun  $f(x) \leq f(x_0)$ , ya'ni  $x_0$  nuqtada  $f(x)$  funksiya lokal maksimumga erishar ekan. Demak, hosila  $x_0$  kritik nuqta atrofida ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa  $x_0$  nuqta, uning maksimum nuqtasi bo'lar ekan.

Shunga o'xshash,  $x_0$  atrofida hosila ishorasi manfiydan musbatga o'zgarigan holda  $x_0$  nuqta lokal minimum ekanligini isbotlash mumkin.

$y = f(x)$  funksiyani ekstremumga tekshirishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1.  $y' = f'(x)$  hosilani topish.
2.  $f'(x) = 0$  tenglama yechimlarini topish va  $f'(x)$  mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, ya'ni barcha kritik nuqtalarni topish.
3.  $f'(x) > 0$  va  $f'(x) < 0$  tengsizliklarni yechib,  $f'(x)$  hosilaning kritik nuqta atrofidagi ishoralarini aniqlash lozim.

Agar kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosila turli ishoralarga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada ekstremumga erishadi, aks holda bu kritik nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi. Kritik nuqta atrofida funksiya hosilasi ishorasi chapda «+» va o'ngda «-» bo'lsa bu nuqta lokal maksimum, chapda «-» va o'ngda «+» bo'lsa, bu nuqta lokal minimum nuqta bo'ladi.

5. Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish.

### **Funksiya ekstremumining ikkinchi yetarli sharti**

**9-teorema.** Agar  $x_0$  nuqta atrofida  $f(x)$  funksiya hosilaga ega  $f'(x_0) = 0$  hamda  $x_0$  nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib,  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ) bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqtada  $f(x)$  funksiya lokal minimumga (lokal maksimumga) erishadi.

*Isbot:*  $f'(x_0) = 0$  va  $f''(x_0) > 0$  bo'lsin, u holda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = f''(x_0) > 0.$$

Bundan  $f'(x_0) = 0$  va  $\Delta x < 0$  ekanligidan,  $f'(x_0 + \Delta x) < 0$  kelib chiqadi, ya'ni  $x_0$  nuqtadan chapda hosila manfiy ekan. Shunga o'xshash

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = f''(x_0) > 0$$

va  $\Delta x > 0$  bo'lgani uchun  $f'(x_0 + \Delta x) > 0$  kelib chiqadi, ya'ni  $x_0$  nuqtadan o'ngda hosila musbat ekan. Demak, hosila  $x_0$  nuqta atrofida chapdan o'ngga o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirar ekan, u holda  $x_0$  nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.

$f''(x_0) < 0$  bo'lgan hol shunga o'xshash isbot qilinadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoreмага ko'ra,  $x_0$  kritik nuqta uchun  $f''(x_0) \neq 0$  bo'lsada ekstremum mavjudligi ta'minlanadi. Lekin  $f''(x_0) = 0$  ekanligidan ekstremum mavjud emas deya olmaymiz. Masalan,  $y = x^4$  funksiya uchun,  $x = 0$  nuqta ekstremum nuqta bo'lib,  $y' = 12x^2$  ikkinchi tartibli hosila esa nolga teng.

Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda  $f(x)$  funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga, ya'ni global ekstremumiga erishadi. Global ekstremumga  $f(x)$  funksiya oraliqning chegaraviy nuqtalarida erishishi mumkinligini e'tiborga olib, ularni topish uchun quyidagi algoritmni keltiramiz:

1.  $f'(x)$  hosilani topish.
2.  $f(x)$  funksiyaning kritik nuqtalarini topish.
3.  $f(a)$ ,  $f(b)$  qiymatlarni aniqlash va barcha kritik nuqtalarda  $f(x)$  funksiya qiymatlarini topib, bu qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigini topish.

### **Funksiya qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqtalari**

Funksiya grafigini chizishda, grafikning qaysi oraliqlarda qavariqligi va botiqligini bilish muhimdir.

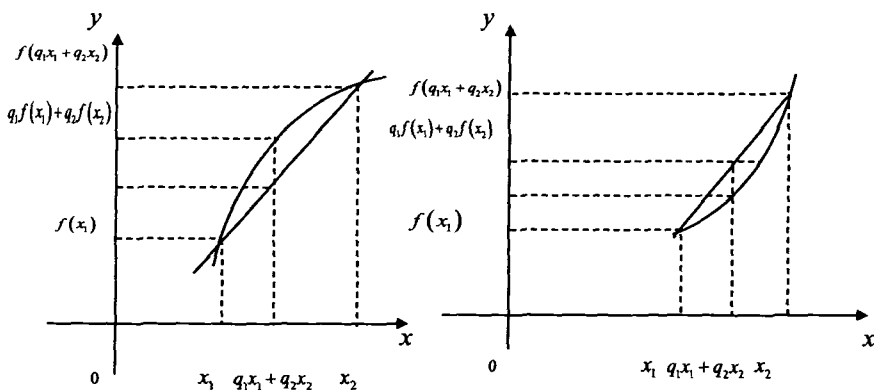


**Ta'rif.** Agar  $(a, b)$  intervaldan olingan istalgan  $x_1$  va  $x_2$  lar va  $q_1 + q_2 = 1$  munosabatni qanoatlantiruvchi istalgan  $q_1 \geq 0$  va  $q_2 \geq 0$  sonlar uchun

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

$$(f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda qavariq (botiq) deyiladi. Bu ta'rifning geometrik ma'nosi shundan iboratki, agar funksiya  $(a, b)$  oraliqda qavariq (botiq) bo'lsa,  $(a, b)$  oraliqdan olingan istalgan  $x_1$  va  $x_2$  lar uchun grafikning  $(x_1; f(x_1))$  va  $(x_2; f(x_2))$  nuqtalarini tutashtiruvchi kesma funksiya grafigidan ordinatalar o'qining yo'nalishiga nisbatan quyida (yuqorida) yotadi.



**10-teorema.**  $(a, b)$  intervalda hosilaga ega bo'lgan  $f(x)$  funksiya, bu oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun, uning  $f'(x)$  hosilasi  $(a, b)$  intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarlidir.

*Isbot: Zarurligi.*  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda qavariq bo'lsin, ya'ni istalgan  $x_1, x_2 \in (a, b)$  va  $q_1 + q_2 = 1$  tenglikni qanoatlantiruvchi musbat  $q_1$  va  $q_2$  sonlar uchun

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda  $x_1 < x < x_2$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

deb olsak,  $q_1 x_1 + q_2 x_2 = x$  bo'lgani uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Bundan,

$$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \text{ yoki } (x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$$

va nihoyat  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$  tengsizlikni hosil qilamiz. Bu

tengsizlikda avval  $x \rightarrow x_1$  da, so'ngra  $x \rightarrow x_2$  da limitlarni topsak, ushbu tengsizliklar kelib chiqadi:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Bu yerda,  $x_1 < \xi_1 < x$  va  $x < \xi_2 < x_2$  bo'lgani uchun  $\xi_1 < \xi_2$  va  $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$ .

*Yetarlilik.*  $\xi_1 < \xi_1$  uchun  $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$  bo'lsa ( $x_1 < \xi_1 < x$ ,  $x < \xi_2 < x_2$ )

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikdan

$$(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$$

$$\text{yoki } (x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

va nihoyat  $f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

tengsizlik kelib chiqadi. Bunda  $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = q_1$  va  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = q_2$  belgilashlarga

asosan,  $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 = 1$  va  $x = q_1 x_1 + q_2 x_2$  munosabatlar o'rinli ekanligidan

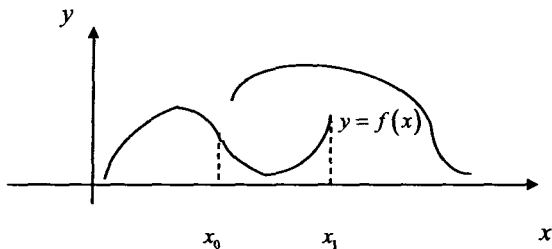
$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak,  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda qavariq ekan. Botiq funksiya xossasi ham shu tarzda isbotlanadi. Teorema isbot bo'ldi.

**11-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiyaning  $(a,b)$  intervalda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, bu intervalda  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ ) bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

*Isbot:*  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ ) bo'lsa, u holda  $f'(x)$  hosila  $(a,b)$  intervalda kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa 1-teoremaga asosan,  $f(x)$  funksiyaning  $(a,b)$  da qavariq (botiq) bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

**Ta'rif.** Agar  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning botiqlik va qavariqlik intervallarini ajratib turuvchi chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqta atrofida berilgan  $f(x)$  funksiya uchun bu nuqta egilish nuqtasi deyiladi.



Chizmada  $x_0$  va  $x_1$  nuqtalar egilish nuqtalari bo'ladi.

Egilish nuqtasi ta'rifidan ular  $f'(x)$  funksiya hosilasining ekstremum nuqtalari bo'lishi kelib chiqadi. Bularni e'tiborga olsak, quyidagi teoremlar o'rinli ekanligi ravshan bo'ladi.

**12-teorema (Egilish nuqtasining zaruriy sharti).** Ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan  $f(x)$  funksiya uchun  $x_0$  nuqta egilish nuqtasi bo'lsa, u holda  $f''(x_0) = 0$ .

**13-teorema (Egilish nuqtasining yetarli sharti).** Agar ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan  $f(x)$  funksiya uchun  $f''(x)$  hosila  $x_0$  nuqta

atrofida o'z ishorasini o'zgartirsa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.

Berilgan  $f(x)$  funksiyaning qavariqligi, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1.  $f'(x)$  hosilani topish.
2.  $f'(x)=0$  tenglamani yechish va  $f'(x)$  hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni topish, ya'ni  $f'(x)$  hosilaning kritik nuqtalarini topish.
3.  $f'(x)$  ning kritik nuqtalari atrofida  $f'(x)$  hosilaning ishoralarini aniqlash.

Buning uchun  $f''(x)>0$  va  $f''(x)<0$  tengsizliklarni yechish lozim.

4. Egilish nuqtalarida funksiya qiymatini hisoblash.

Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishni quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshirsa bo'ladi.

1.  $y=f(x)$  funksiyaning aniqlanish sohasini, imkon bo'lsa o'zgarish sohasini ham topish.

2. Funksiyani juftlik, toqlik va davriylikka tekshirish.

3.  $f(x)=0$  tenglama,  $f(x)>0$  va  $f(x)<0$  tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiya nollarini, musbatlik va manfiylik intervallarini topish.

4. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish.

5. Funksiyaning vertikal va og'ma asimptotalarini topish.

6.  $f'(x)$  hosilani topish, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash,  $f'(x)=0$  tenglama va  $f'(x)>0$ ,  $f'(x)<0$  tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning kritik nuqtalarini, o'sish va kamayish oraliqlarini topish. Funksiya ekstremumlarini topish.

7.  $f''(x)$  hosilani topib,  $f''(x)$  mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash,  $f''(x)=0$  tenglama va  $f''(x)>0$ ,  $f''(x)<0$  tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini topish.

8. Funksiya grafigiga aniqliklar kirituvchi ayrim nuqtalarni topish.

Olingan natijalar jadval ko‘rinishida ifodalanib, shu jadval asosida funksiya grafigining sxematik grafigi chiziladi.

**Masalan 1.** Funktsiyalarni o‘shish va kamayish oraliqlarini toping:

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}.$$

**Yechish:** Funksiya birinchi tartibli hosilasining nollarini aniqlaymiz.

$y' = x^2 - 2x = x(x-2)$   $x_1 = 0$  va  $x_2 = 2$  nuqtalarda hosila nolga aylanadi. Butun sonlar o‘qi bu nuqtalar bilan uch bo‘lakka ajraladi:  $(-\infty; 0)$ ;  $(0; 2)$  va  $(2; +\infty)$ .  $(-\infty; 0)$  va  $(2; +\infty)$  oraliqlarda hosila doimiy musbat, demak funksiya o‘svuchi,  $(0; 2)$  oraliqlarda esa hosila doimiy manfiy. Demak, funksiya kamayuvchidir:

**Masalan 2.** Funktsiyalarni ekstremumga tekshiring:  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ .

**Yechish:** Funksiya birinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:  $y' = 6x^2 - 18x + 12$

Birinchi tartibli hosilani nolga tenglab statsionar nuqtalarni topamiz:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0, \quad 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0, \quad x_1 = 1, \\ x_2 = 2.$$

Har bir statsionar nuqtada birinchi tartibli hosila ishorasi o‘zgarishini tekshiramiz: a)  $x_1 = 1$  nuqtaning atrofida

$$y' = f'(0,8) = 6(0,8 - 1)(0,8 - 2) > 0.$$

$$y' = f'(1,2) = 6(1,2 - 1)(1,2 - 2) < 0.$$

Hosilaning ishorasi (+) dan (-) ga o‘zgarayapti. Demak,  $x=1$  nuqta maksimumdir.

b)  $x_2=2$  nuqtaning atrofida esa  $f'(1,8) < 0$  va  $f'(2,2) > 0$ . Demak  $x=2$  min nuqta.

**Masalan 3.** Funktsiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini toping:  
 $y = x \ln x$ .

**Yechish:** Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisob-laymiz:  
 $y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x}$ . Ikkinch tartibli hosila ishorasi o‘zgarish oraliqlarni

aniqlaymiz.  $x > 0$  funksiya aniqlanish sohasida  $y' > 0$  va funksiya o'zining aniqlanish sohasida doim botiq.

**Masalan 4.** Funksiyani to'la tekshiring va grafagini chizing:  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ .

**Yechish:** a) funksiyaning aniqlanish sohasi:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

b) funksiyaning uzilish nuqtasi  $x=0$ , bunda  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$ .  $x=0$  vertikal asimptota;

d) og'ma asimptotani aniqlaymiz:  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1$ ;

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$ . Demak,  $y=x$  og'ma asimptota;

e) funksiyaning  $Ox$  o'qi bilan kesishish nuqtalari:  $\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0$ ,  $x = -\sqrt[3]{4}$ ;

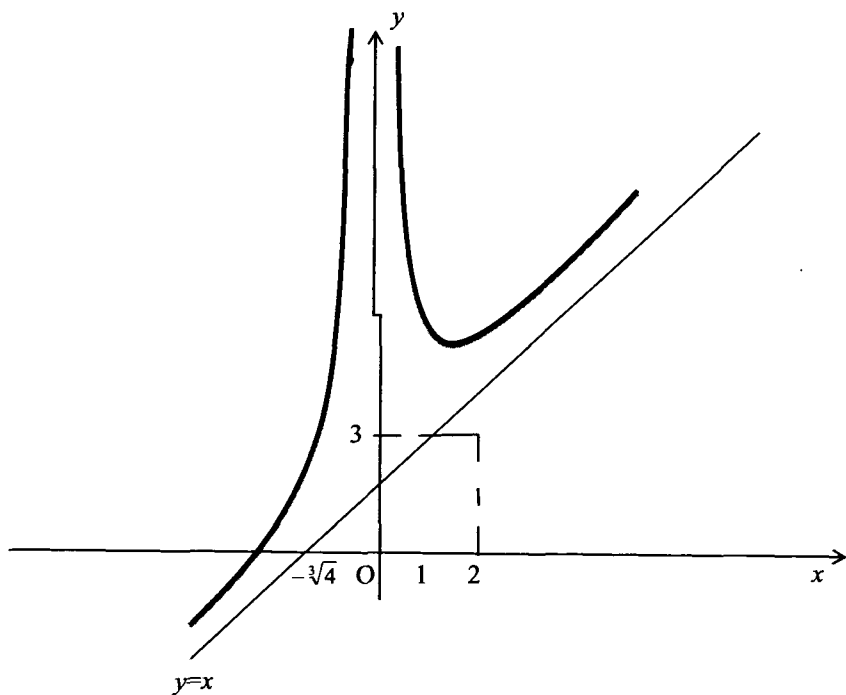
f) funksiyaning ekstremumlari o'sish va kamayish oraliqlarini topamiz:

$y' = 1 - \frac{8}{x^3}$ ,  $x=2$  da  $y'=0$ ,  $x=0$  da  $y' = -\infty$ ,  $y'' = \frac{24}{x^4}$ ,  $y''(2) > 0$ .

Demak,  $y_{\min} = y(2) = 3$ .  $x < 0$  da  $y' > 0$  va funksiya bu oraliqda o'sadi;

g) funksiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtasini aniqlaymiz:  $y'' \neq 0$ ;  $y''(0) = \infty$ .  $y'' > 0$  bo'lgani uchun bu funksiya doim botiq.

|       |                |                    |          |   |               |
|-------|----------------|--------------------|----------|---|---------------|
| $x$   | $(-\infty; 0)$ | 0                  | $(0; 2)$ | 2 | $(2; \infty)$ |
| $y'$  | +              |                    | -        |   | -             |
| $y''$ | +              |                    | +        |   | +             |
| $y$   |                | vertikal asimptota |          | 3 |               |



## Hosilaning iqtisodiyotga tatbiqlari.

### Mikroiqtisodiyotda chegaraviy (marjinal) xarajatlar

Mikroiqtisodiyotdagi ikkita oxirgi ko'rsatkichga doir misollar keltiramiz.

Ulardan birinchisi ishlab chiqarilgan mahsulotning tannarxi  $C$  bilan uning hajmi  $Q$  orasidagi bog'lanish  $A(Q) = Q : C$  aloqadorlik. Shunday qilib,  $MC$  chegaraviy xarajat  $\Delta C$  tannarxning mahsulot miqdorining o'sishi  $\Delta Q$  ga nisbati bilan xarakterlanadi:

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}. \quad (1)$$

$\Delta C$  ning  $\Delta Q$  bilan uzluksiz bog‘liqligini faraz qilib, tabiiy ravishda (1)-tenglikdagi munosabatni uning limiti bilan almashtirish mumkin:

$$MC = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = C'(Q). \quad (2)$$

Odatda ilovalarda matematik apparatdan foydalanib chegaraviy xarajat deb (2)-tenglik bilan aniqlanuvchi qiymat tushuniladi.

**Masalan 1.** Ishlab chiqarish xarajatining ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi bilan bog‘liqligi quyidagi formula bilan ifodalangan bo‘lsin:

$$C = 40Q - 0.03Q^2 \text{ p.b. } (Q - \text{mahsulot hajmi, } C - \text{pul birligi})$$

$Q=15$  hajm birligida o‘rtacha va chegaraviy xarajatni aniqlaymiz.

**Yechish:** a) Mahsulot birligida sarflanadigan o‘rtacha xarajat funksiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:  $\tilde{C} = \frac{C}{Q}$  yoki bizning misolda  $\tilde{C} = 40 - 0.03Q^2$ ,

bundan  $\tilde{C}(15) = 40 - 0.03 \cdot 225 = 33.25$  pul birligi.

b) Chegaraviy xarajat uchun (1a) ga ko‘ra  $Q=15$  da  $C'(15) = 19.75$  p.b. ni olamiz.

Boshqacha aytganda, birlik mahsulot ishlab chiqarishga o‘rtacha sarf 33.25 pul birligini tashkil qilsa, qo‘shimcha mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan qo‘shimcha xarajat 19.75 pul birligini tashkil qiladi va o‘rtacha xarajatdan oshmaydi.

**Ishlab chiqarish xarajatlari.** Agar ishlab chiqarishning xarajat funksiyasi  $y$  ni ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori  $x$  ning funksiyasi sifatida qaralsa, ya‘ni  $y = C(x)$  u holda,  $y' = C'(x)$  ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatini ifodalaydi va taxminan bir birlik qo‘shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan o‘zgaruvchan xarajatning o‘sishini xarakterlaydi. O‘rtacha xarajat bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajattir. Ya‘ni:  $y = \frac{C(x)}{x}$ .



## Chegaraviy daromadlar

$R = R(q) - q$  mahsulot hajmiga bog'liq daromad funksiyasi bo'lsin. U holda

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R'(q)$$

$R'(q)$  limit chegaraviy daromad deyiladi. Iqtisodda u marjinal daromadlar deyiladi va  $MR$  kabi belgilanadi. Demak,

$$MR = R'(q).$$

**Masalan 2.** Mahsulotni ishlab chiqarish hajmi funksiyasi  $t$  vaqtga bog'liq holda

$$u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$$

ma'lum bo'lsin, bunda  $t$  vaqt soatlarda  $1 \leq t \leq 8$ . Ish kuni boshlangandan 1 soat o'tgandagi va ish kuni tugashiga 1 soat qolgandagi mehnat unumdorligi va uning o'zgarish tezligini aniqlang.

**Yechish:** Ma'lumki, mehnat unumdorligi  $z(t) = u'(t)$ . U holda

$$z(t) = -2.5t^2 + 15t + 100.$$

Ish kuni boshlangandan 1 soat o'tgandagi unumdorlik

$$z(1) = -2.5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112.5$$

ya'ni, ish boshlangandan 1 soatdan keyingi mehnat unumdorligi har soatiga

112.5 sh.b. mahsulot.

Ish kuni tugashiga 1 soat qolgandagi mehnat unumdorligi

$$z(7) = -2.5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82.5$$

Mehnat unumdorligining o'zgarish tezligi  $z'(t)$ ,  $z'(t) = -5 \cdot t + 15$

Demak,  $z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$ ,  $z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$ . Bu ish kuni boshlangandan keyin 1 soat o'tganda mehnat unumdorligining tezligi soatiga 10 sh.b.ga ortishini, ish kuni tugashiga 1 soat qolganda unumdorlik har soatiga 20 sh.b.ga kamayishini anglatadi.

**Masalan 3.**  $x$  ishchi kuchi xarajatlariga bog'liq bir kunlik mahsulot ishlab chiqarish funksiyasi  $Q(x) = 100x + 3x^2$  berilgan bo'lsin. Rejadagi ishni tashkillashtirish uchun 70 ishchi soat zarur.

1) mehnat xarajatlarini bir birlikka orttirganda mahsulot ishlab chiqarish birligini o'zgarishini;

2) mehnat xarajatlarini bir kunda bir birlikka orttirgandagi ishlab chiqarish funksiyasining aniq qiymatini aniqlang.

**Yechish:** Chegaraviy chiqimlarni aniqlaymiz:  $\Delta Q = Q'(x) = 100 + 6x$ ,  
 $Q'(70) = 100 + 6 \cdot 70 = 520$ , ya'ni bir kunda ishlab chiqarish mahsulot soni taxminan 520 kun birlikka ortadi.

2) Mahsulot ishlab chiqarish hajmi o'sishining aniq qiymatini topamiz:

$$\Delta Q = Q(71) - Q(70) = 100 \cdot 71 + 3 \cdot 71^2 - (100 \cdot 70 + 3 \cdot 70^2) = 100 + 3(71^2 - 70^2) = 523 \text{ kun.}$$

### Iste'mol va jamg'arma funksiyasi

Agar  $x$  milliy daromad,  $C(x)$  iste'mol funksiyasi (daromadning sarflanadigan qismi),  $S(x)$  jamg'arma funksiyasi bo'lsa, u holda

$$x = C(x) + S(x)$$

bo'ladi. Uni  $x$  bo'yicha differensiallab:  $\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$  tenglamani hosil

qilamiz. Bu yerda,  $\frac{dC}{dx}$  – iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillik;  $\frac{dS}{dx}$  –

jamg'armaga bo'lgan chegaraviy moyillik.

**Masalan 4.** Firmaning mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajat funksiyasi quyidagicha:  $y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250$  p.b. (pul birligi)

Ishlab chiqarishning o'rta va chegaraviy xarajatini va uning  $x=10$  dagi qiymatini toping.

**Yechish:** Funksiyaning  $y'(x)$  hosilasini va uning  $x=10$  da  $y'(10)$  qiymatini topamiz. Ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatlari:

$$y'(x) = 0,3x^2 - 2,4x + 5, \quad y'(10) = 30 - 24 + 5 = 11$$

$$\text{O'rtacha xarajatlar: } y = \frac{y(x)}{x} = \frac{0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250}{x} = 0,1x^2 - 1,2x + 5 + \frac{250}{x}.$$

$$y = \frac{y(10)}{10} = 10 - 12 + 5 + 25 = 28 \text{ bu berilgan ishlab chiqarish darajasida bir birlik}$$

mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan o'rtacha xarajaddir. Funksiya

orttirmasini taqribiy hisoblash formulasiga ko'ra  $\Delta C \approx dC = C'(x)\Delta x$ ,  $C'(10)$  kattalikni shunday ifodalash mumkin: agar 10 ta mahsulot ishlab chiqarilgan bo'lsa, u holda o'n birinchi mahsulot ishlab chiqarish bo'yicha qo'shimcha xarajatlar taxminan  $C'(10)=9$  ga teng.

**Masalan 5.** Mamlakatning iste'mol funksiyasi  $C(x)=10+0,47x+0,36x^{3/4}$ .

Bu yerda, a)  $x$  jami milliy daromadning (pul birligida) iste'molga bo'lgan chegaraviy moyilligini;

b) agar milliy daromad 15 milliard p.b. bo'lsa, jamg'armaga bo'lgan chegaraviy moyillikni toping.

**Yechish:** a) iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillik:

$$C'(x)=0,47+0,27x^{-1/4}; \text{ uning qiymati esa } C'(15)=0,47+0,27 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{15}} \approx 0,57;$$

b) jamg'armaga bo'lgan chegaraviy moyillik:  $S'(x)=1-C'(x)=0,43$ .

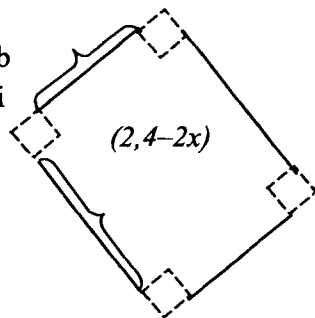
**Masalan 6.** To'g'ri to'rtburchak shaklidagi  $2,4 \times 1,5 m^2$  kartondan qopqoqsiz quti yasash talab qilinadi. Kartonning to'rttala burchagidan tomoni qanday bo'lgan kvadrat kesib olinganda, yasalgan qutining hajmi maksimal bo'ladi.

**Yechish:** tomoni  $x$  m bo'lgan kvadrat qirqib olinsin. U holda kvadratning tomonlari uzunliklari  $2,4-2x$  va  $1,5-2x$  m dan bo'lib qoladi. Hosil qilingan to'g'ri burchakli paralelopiped  $(1,5-2x)$  uchun  $h=x$ , asosining tomonlari  $2,4-2x$  va  $1,5-2x$  m bo'ladi. Demak, hosil qilingan qutining hajmi  $V(x)=x(2,4-2x)(1,5-2x)$  bo'lib bu funksiyaning maksimum qiymatini topamiz.

$$(2,4-2x) V(x)=x(2,4-2x)(1,5-2x) = 4x^3 - 7,8x^2 + 3,6x$$

$V'(x)=12x^2 - 15,6x + 3,6$   $V(x)$  maksimumini  $V'(x)=0$  tenglamani yechib,  $V(x_0)$  qiymatlarning eng kattasi olinadi.

$12x^2 - 15,6x + 3,6 = 0 \Rightarrow x_1=1, x_2=0,3$ .  $x_1=1$  bo'lganda  $V(x)$  funksiyaning qiymati manfiy bo'ladi (hajm manfiy son bo'lmaydi).



Demak, qirqib olingan kvadrat tomoni  $x=0,3$  m.

**Masalan 7.** Agar ertapishar kartoshka terimi avgustning boshida boshlansa, u holda har bir sotixdan 200 kg dan hosil olish mumkin va har bir kg i 12 p.b. da sotiladi. Terimni bir haftaga kechiktirish har sotixdan 50 kg dan hosildorlikni oshiradi, lekin narx har hafta 2 p.b. ga arzonlashadi. Agar terim muddati 5 hafta bo'lsa, kartoshkani sotishdan olinadigan foyda eng ko'p bo'lishi uchun hosilni qaysi haftada yig'ib olish kerak.

**Yechish:** Hosilni  $t$  haftada yig'ib olganda foyda eng ko'p bo'lsin ( $1 \leq t \leq 5$ ). U holda shu haftada kartoshkani bir kg ning narxi  $12-2(t-1)=14-2t$  p.b. bo'ladi. Hosildorlik esa har gektaridan  $200+50(t-1) = 150+50t$  kg dan bo'ladi. Bir gektar hosilning umumiy foyda tenglamasini tuzib olamiz:

$$\pi(t) = (200 + 50(t-1))(12 - 2(t-1)) = 100(3+t)(7-t) = 100(21 + 4t - t^2).$$

Demak, umumiy foyda eng ko'p bo'lishi uchun  $\pi(t) = 100(21 + 4t - t^2)$  funksiya maksimum qiymatini topish kerak. Buning uchun esa  $\pi'(t) = 0$  tenglamani yechib, aniqlangan  $t$  sonini umumiy foyda tenglamasiga qo'ysak har bir gektar yerdan olinadigan max daromad kelib chiqadi.  $\pi'(t) = 0 \rightarrow 4 - 2t = 0, t_0 = 2$ . Demak,  $\pi(2) = 100(21 + 8 - 4) = 2500$  mavsum davomida bir gektar yerdan olinishi mumkin bo'lgan eng ko'p daromad. Shunday qilib hosilni ikkinchi haftada yig'ib olish kerak ekan.

### Elastiklik tushunchasi

Narx-navo siyosatining analizida talabning elastiklik tushunchasi qo'llaniladi.

Faraz qilaylik,  $D=f(P)$  talab, talab funksiyasi,  $P$  tovarning narxi bo'lsin. U holda ehtiyoj (talab)ning elastikligi deganda tovarning narxi bir foizga o'zgarayotganda ehtiyojning o'zgarish foizi

$$E = \frac{\frac{\Delta D}{D} \cdot 100\%}{\frac{\Delta P}{P} \cdot 100\%} \text{ tushuniladi:} \quad (3)$$

Oldingi holdagiday,  $\Delta D$   $\Delta P$  bilan uzluksiz bog'liq deb,  $\Delta P \rightarrow 0$  da limitga o'tish qulay:

$$E(D) = P \frac{D'(P)}{D(P)} \quad (4)$$

Shunga o'xshash tushunchani taklif  $S(P)$  funksiyasi uchun ham kiritish mumkin. Eslatib o'tamiz,  $D(P)$  funksiya kamayadi,  $S(P)$  funksiya esa  $P$  narx o'sishi bilan o'sadi.

Elastiklikning ba'zi xossalarini ko'rsatamiz. (4)-formuladan elastiklik formulasini quyidagicha ifodalash mumkinligi ko'rinib turibdi:

$$E(D) = P(\ln D(P))'. \quad (5)$$

(10)-tenglikdan  $E(D)$  ning logarifmik funksiya xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\begin{aligned} E(D_1, D_2) &= E(D_1) + E(D_2), \\ E\left(\frac{D_1}{D_2}\right) &= E(D_1) - E(D_2). \end{aligned}$$

$D(P)$  kamayuvchi funksiya bo'lgani uchun  $D'(P) < 0$ , u holda (4)-formulaga asosan  $E(D) < 0$ . Aksincha, talab funksiyasi o'suvchi ekanligidan, unga mos keluvchi  $E(S)$  elastiklik funksiyasi uchun  $E'(S) > 0$ .

$|E(D)|$  ning kattaligiga qarab ehtiyojning uch turi farqlanadi:

a) agar  $|E(D)| > 1$ , ( $E(D) < -1$ ) bo'lsa, u holda talab elastik deb hisoblanadi;

b) agar  $|E(D)| = 1$ , ( $E(D) = -1$ ) bo'lsa, u holda talab birlik elastik deb hisoblanadi;

d) agar  $|E(D)| < 1$ , ( $E(D) > -1$ ) bo'lsa, u holda noelastik bo'lmagan deb hisoblanadi.

**Masalan 8.** Talab funksiyasi quyidagicha bo'lsin  $D(P) = D_0 \exp(-kP^2)$ ,  $D_0$  va  $k$  – ma'lum parametrlar.  $P$  narxning qanday qiymatlarida talab elastik bo'lishini toping.

**Yechish:** (4)-formulaga asosan  $E(D)$  ifodani tuzamiz:

$$E(D) = \frac{-2kP^2 D_0 \exp(-kP^2)}{D_0 \exp(-kP^2)}; \quad E(D) = -2kP^2 \quad (6)$$

Talab elastik bo'lishi uchun  $2kP^2 > 1$  tengsizlik bajarilishi zarur, bundan  $P > \frac{1}{\sqrt{2k}}$  ni hosil qilamiz.

**Masalan 9.** Talab elastikligi har xil bo'lgan variantlarda tovarning narxi o'sishi bilan daromad o'zgarishini toping.

**Yechish:** I daromad tovarning narxi  $P$  bilan  $D$  talab miqdorining ko'paytmasiga teng:  $I(P) = D(P)P$ . Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$I'(P) = D(P) + D'(P)P.$$

Endi (9)-formulani hisobga olib, talab elastiklikning barcha variantlarini tahlil qilamiz.

1)  $E(D) < -1$  bo'lsa, u holda bu tengsizlikni (4) ga qo'yib, (5) ning o'ng tomoni manfiyligini olamiz, shunday qilib, elastik talabda  $P$  narxning o'sishi daromadning kamayishiga olib keladi. Aksincha, tovar narxining kamayishi daromadning oshishiga olib keladi.

2)  $E(D) = -1$  bo'lsa (4) dan (6) ning o'ng tomoni nolga tengligi kelib chiqadi. Neytral talabda tovar narxining o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi.

3)  $E(D) > -1$  bo'lsa,  $I'(P) > 0$  elastik bo'lmagan talabda  $P$  tovar narxining oshishi daromadning o'sishiga olib keladi.

**Masalan 10.** Faraz qilaylik, mahsulot tannarxi  $C$  va uni ishlab chiqarish hajmi  $Q$  orasidagi bog'lanish quyidagi formula bilan ifodalansin:  $C = 50 - 0,4Q$ ,  $Q = 30$  p.b.

Mahsulot ishlab chiqarishdagi tannarx elastikligini aniqlang.

**Yechish:** (9)-formulaga asosan  $E(Q) = -\frac{0,4Q}{50 - 0,4Q}$ .

Bundan  $Q = 30$  da izlanayotgan elastiklik taxminan  $0,32$  ni tashkil qiladi, ya'ni berilgan hajmda mahsulot ishlab chiqarishni  $1\%$  ga oshirish tannarxning taxminan  $0,32\%$  ga kamayishiga olib keladi.

Qo'shimcha qiymatni maksimallashtirish (iloji boricha orttirish).

Faraz qilaylik,  $Q$  sotilgan tovar miqdori,  $R(Q)$  kirim, daromad funksiyasi,  $C(Q)$  tovar ishlab chiqarishdagi chiqim funksiyasi. Haqiqatan bu funksiyalarning ko'rinishi birinchi navbatda ishlab

chiqarish usuli, infrastrukturasi va h.k.larni tashkil qilishga bog'liq. Ishlab chiqarilgan tovarni sotishdan olingan qo'shimcha qiymat quyidagi formula bilan beriladi:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) \quad (7)$$

Mikroiqtisodiyotda quyidagi tasdiq ma'lum: qo'shimcha qiymat maksimal bo'lishi uchun oxirgi (предельный) kiritim va oxirgi chiqim teng bo'lishi kerak. Oxirgi kiritim va chiqim ko'rsatkichlari (9) ga o'xshash tarzda ifodalanadi. Shunday qilib, bu prinsipni quyidagicha yozish mumkin:  $R'(Q) = C'(Q)$ .

Haqiqatan ekstremumning zaruriy shartidan (7)-funksiya uchun  $\Pi'(Q) = 0$  asosiy prinsip kelib chiqadi.

**Masalan 11.** Daromad va xarajat quyidagi formulalar bilan aniqlanganda:

$$R(Q) = 100Q - Q^2, \quad C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000,$$

qo'shimcha qiymatning maksimumini toping.

**Yechish:** (7) ga asosan, qo'shimcha qiymat  $\Pi(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000$ . Qo'shimcha qiymat funksiyasining hosilasini nolga tenglab, quyidagi tenglamani olamiz  $Q^2 - 24Q + 23 = 0$ . Bu tenglamaning ildizlari  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = 23$ . Tekshirish shuni ko'rsatadiki, qo'shimcha qiymat o'z maksimumiga  $Q = 23$  da erishadi va  $\Pi_{\max} = 1290$ .

**Masalan 12.** Korxonada ishlab chiqarayotgan mahsulot narxi  $p$  va unga bo'lgan talab  $q$  orasidagi bog'lanish  $q = 18 - \sqrt{p}$  tenglik bilan ifodalangan. Talabning elastikligini toping. Narxning qanday qiymatlarida talab elastik, neytral va noelastik bo'ladi. Narx  $p = 100$ ;  $p = 150$  pul birligi bo'lganda korxonada rahbarlariga bir birlik tovar narxi haqida qanday maslahatlar berish mumkin?

**Yechish:** Talabning elastikligi formulasiga ko'ra:

$$E_p(q) = \frac{p}{18 - \sqrt{p}} (18 - \sqrt{p})' = -\frac{\sqrt{p}}{2(18 - \sqrt{p})}$$

Talabning neytral holati qachon bo'lishini  $|E_p(q)|=1$  tenglamani yechib narxning qiymati aniqlanadi.  $|E_p(q)|=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{p}}{2(18-\sqrt{p})}=1$ ,  $p=144$ . Keyin  $p>0$  va  $q>0$  ( $p<324$ ) ekanligini hisobga olib, agar  $0<p<144$  bo'lsa talab noelastik;  $144<p<324$  da esa talab elastik.

Mahsulot ishlab chiqarishning chegirmalari  $x$  mahsulot miqdorining funksiyasidir:  $k=(x)$  ishlab chiqarish chegirmalari funksiyasi bo'lsin.

Mahsulot ishlab chiqarish miqdori  $\Delta x$  ga o'zgarganda ishlab chiqarish chegirmalari  $k(x+\Delta x)$ ga ortadi, ya'ni chegirmalar  $\Delta k = k(x+\Delta x) - k(x)$ ga o'zgaradi.

Chegirmalarning o'rta qiymati  $\frac{\Delta k}{\Delta x}$  nisbatga teng bo'lib, u mahsulot miqdorining bir birlik ortandagi chegirmalari orttirmasidir.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta k}{\Delta x} = k'(x)$  limit ishlab chiqarishning chegaraviy chegirmalaridir.

Shuningdek,  $U(x)$  orqali  $x$  dona mahsulot sotgandagi tushum funksiyasi aniqlansa, u holda  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$  limitni *chegaraviy tushum* deyiladi.

**Masalan 13.**  $x$  hajmdagi mahsulot ishlab chiqarishdagi  $k$  chiqim funksiyasi  $k=100x - \frac{x^3}{3}$  bo'lsa, a) 5 birlik b) 10 birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi chegaraviy chiqimlarni aniqlang.

**Yechish:**  $k' = 100 - \frac{x^2}{10}$ .

Bundan  $k'(5) = 100 - \frac{5^2}{10} = 97.5$ ,  $k'(10) = 100 - \frac{10^2}{10} = 90$ .

Bu 5 birlik mahsulot ishlab chiqarish hajmida keyingi (oltinchi) birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun chegaraviy chiqim 97.5; 10 hajm birligidagi ishlab chiqarishda esa u 90 ekanligini anglatadi.

**Masalan. 14.** Narxning talabga bog'liqligi  $p=10-2 \cdot x$ , bunda  $x$  talab,  $p$  narx.  $x=2$  bo'lgandagi tushumning o'zgarishini aniqlang.



**Yechish:** Mahsulot sotuvidan keladigan tushum  $u = x \cdot p = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2$ . Bundan  $u' = 10 - 4x$ ,  $u'(2) = 10 - 4 \cdot 2 = 2$ . Bu, agar talab 2 miqdordan 3 taga ortsa, tushum taxminan 2 birlikka ortishini anglatadi.

### Funksiya elastikligi

Funksiya hosilasi yordamida funksiya argumenti orttirmasiga mos funksiya orttirmasini hisoblash mumkin. Ko'pgina masalalarda erkli o'zgaruvchining foizlaridan o'zgarishiga mos funksiyaning foizlardagi o'zgarishini (nisbiy orttirmasini) hisoblash qulaylik tug'diradi. Bular funksiya elastikligi (ba'zan nisbiy hosila) tushunchasini kiritilishiga sabab bo'ladi.

$y = f(x)$  funksiya berilgan bo'lsin.  $\Delta x$  argument orttirmasi, erkli o'zgaruvchining nisbiy orttirmasi esa  $\frac{\Delta x}{x}$ .

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  funksiya orttirmasi,  $\frac{\Delta y}{y}$  funksiyaning nisbiy orttirmasidir.

Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbiylikni qaraymiz. Bu munosabat funksiya nisbiy orttirmasi argument nisbiy orttirmasidan kattaligini bildiradi.

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Agar  $y = f(x)$  funksiya differensiallashuvi bo'lsa, u holda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Bu limit funksiya nisbiy orttirmasi erkli o'zgaruvchi nisbiy orttirmasining  $\Delta x \rightarrow 0$  dagi munosabati bo'lib,  $x$  erkli o'zgaruvchiga nisbatan  $y = f(x)$  funksiyaning elastikligi deyiladi. Odatda  $f(x)$  funksiya elastikligi  $E_x(y)$  kabi belgilanadi, ya'ni

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

X o'zgaruvchiga nisbatan elastiklik bu erkli o'zgaruvchining 1% ga o'zgargandagi funksiyaning taqribiy foizlardagi o'zgarishidir (o'sishi va kamayishi).

**Masalan 15.**  $y=3x-6$  funksiya elastikligini  $x=10$  dagi qiymatini aniqlang.

$$\text{Yechish: } E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{3x}{3(x-2)} = \frac{x}{x-2},$$

$$E_{x=10} = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

Bu, agar  $x$  1% ga o'ssa, u holda  $y$  1,25% ga o'sishini bildiradi.

**Masalan 16.**  $y=1+2x-x^2$  funksiya elastikligini  $x=1$  dagi qiymatni toping.

$$\text{Yechish: } E_x(y) = \frac{x}{1+2x-x^2} \cdot (2-2x) = \frac{2x-2x^2}{1+2x-x^2}.$$

$$x=1 \text{ da } \frac{2-2}{1+2-1} = 0$$

Bu, erkli o'zgaruvchi  $x$  1% ga ortsa, u holda funksiya qiymati o'zgarmasligini bildiradi.

### Talabning narxga nisbatan elastikligi

Ma'lum mahsulotga bo'lgan talab va uning narxi orasidagi funksional bog'lanishi (boshqa mahsulotlar narxi, iste'molchilar daromadi va iste'mol strukturasi o'zgarmas bo'lgan shartda) talabga mos narx o'rnatilishi imkonini beradi. Lekin ko'p iqtisodiy masalalarda talabning qiymatini aniqlash emas, balki narxning o'zgarishiga bog'liq talabning o'zgarishini, boshqacha aytganda, narxga nisbatan talabning elastikligini aniqlash muhimroqdir.

Faraz qilaylik,  $q$  talab  $p$  narxga bog'liq bo'lsin:

$$q = f(p)$$

Bu yerda,  $\Delta p$  - narxning orttirmasi;  $\Delta q$  - talablarning orttirmasi.

Narxning nisbiy o'zgarishi  $\frac{\Delta p}{p}$ , talabning nisbiy orttirmasi  $\frac{\Delta q}{q}$ .

$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p}$  nisbat mahsulot narxi 1% ga orttirilgandagi talabning nisbiy o'zgarishini ifodalaydi.

**Ta'rif.** Narxga nisbatan talab elastikligi deb,

$$E_p(q) = E_T = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{q} \lim \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

limitga (agar u mavjud va chekli bo'lsa) aytiladi.

Demak,  $E_T = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$  talabning narxga nisbatan elastikligi, mahsulot narxi 1% ga ortgandagi shu mahsulotga bo'lgan talabning o'zgarishini aniqlaydi.

Ko'pincha, talab funksiyasi kamayuvchi bo'lib, mahsulotning narxi o'sishi bilan unga bo'lgan talab kamayadi. Demak, bu holda

$$\frac{dq}{dp} < 0.$$

Manfiylikdan qutilish uchun talab elastikligini o'rganishda

$$E_T = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

Agar  $E_T > 1$  bo'lsa, ya'ni agar narxning 1% ga ortishi talabning 1% dan ortiq kamayishiga mos kelsa, bu holda talab elastik deyiladi. Agar  $E_T = 1$  bo'lsa, ya'ni agar mahsulot narxining 1% ga ortishi talabning 1% ga kamayishini keltirib chiqarsa, talab *neytral* deyiladi.

Agar  $0 < E_T < 1$  bo'lsa, ya'ni narxning 1% ga ortishi taklifning 1% dan kam o'zgarishini keltirib chiqarsa, unda talab *elastik* deyiladi.

**Masalan 17.** Talabning  $p$  narxga bog'liqligi  $q = 10 - p$  bo'lsa,  $p = 2$  dagi elastiklikni aniqlang.

**Yechish:**  $E = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{10-p} (-1) = -\frac{p}{10-p}$ .  $p = 2$  da  $E = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ ,  $|E| = \frac{1}{4}$ .

Bu narx 2 bo'lganda uni 1% ga ortishi talabning  $\frac{1}{4}$ % ga kamayishini anglatadi.

**Masalan 18.** Agar talab funksiyasi  $q = \frac{c}{p}$  ( $c = \text{const}$ ) bo'lsa, talabning elastikligini aniqlang.

**Yechish:** Talabning elastikligini hisoblaymiz:

$$E_r = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = -\frac{p}{c/p} \left(\frac{c}{p}\right)' = -\frac{p^2}{c} \left(-\frac{c}{p^2}\right) = 1$$

Demak, talab mahsulot narxiga teskari proporsional bo'lsa, u holda har qanday narxda talabning elastikligi 1 ga teng neytraldir.

### Talabning daromadga nisbatan elastikligi

Ma'lum mahsulot talabiga bog'liq barcha faktorlar o'zgarmasdan iste'molchilarning daromadlari o'zgaruvchan bo'lsa, u holda mahsulotga bo'lgan  $q$  talab  $r$  daromad funksiyasidir:  $q = f(r)$

Bu yerda,  $\Delta r$  - daromad o'zgarishi;  $\Delta q$  - mos talab o'zgarishi bo'lsin.

$$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r}$$

nisbat daromadlar 1% ga ortganda mahsulotga bo'lgan talabning o'zgarishini ifodalaydi.

$$E_r(q) = E_d = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r} \right) = \frac{r}{q} \cdot \frac{dq}{dr}$$

ifoda daromadga nisbatan talabning elastikligi deyiladi.

Daromadga nisbatan talabning elastikligi bu iste'molchilar daromadlar ishlab chiqarishning o'zgarishiga bog'liq talabning reaksiyasi o'lchovidir.

**Masalan 19.** Shved iqtisodchisi German Vold Shvetsiyada Birinchi Jahon urushidan keyingi davrda ba'zi iste'mol mahsulotlarini ishlashga bo'lgan talabning elastikligini o'rgangan. Uning natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

|                  |                                      |                         |   |                           |
|------------------|--------------------------------------|-------------------------|---|---------------------------|
| Iste'mol mollari | Daromadga nisbatan talab elastikligi |                         | Butun Shvetsiya aholisi bo'lgan talab elastikligi |                           |
|                  | Ishchi va xizmatchilar gruppasi      | Butun Shvetsiya aholisi | Mahsulot narxiga nisbatan                         | Mahsulot narxiga nisbatan |

|                    |       | bo'yicha |       |       |
|--------------------|-------|----------|-------|-------|
| Sut va qatiq       | 0.25  | 0.00     | -0.30 | -     |
| Sut                | 0.20  | 0.00     | -0.20 | -     |
| Yog' va margarin   | 0.25  | 0.60     | -0.70 | -     |
| Yog'               | 0.40  | 0.55     | -0.90 | +0.35 |
| Sir                | 0.35  | 0.50     | -0.20 | -     |
| Tuxum              | 0.50  | 0.70     | -     | -     |
| Go'sht             | 0.25  | 0.30     | -0.30 | -     |
| Cho'chqasiz go'sht | 0.30  | 0.30     | -0.50 | +0.30 |
| Cho'chqa           | 0.10  | 0.30     | -0.45 | +0.15 |
| Un                 | -0.50 | -0.55    | -0.15 | +0.15 |
| Qand               | 0.25  | 0.30     | -0.35 | +0.55 |

Masalan, un uchun ishchi va xizmatchilarning daromadiga nisbatan talab elastikligi  $-0.50$  bo'lsa, butun aholi daromadi bo'yicha esa  $-0.55$ . Bu daromadlarning o'sishi bilan unga bo'lgan talab kamayganini, bunda ishsizlar orasida bu ko'rsatkich yuqori sur'atlarda ekanligini anglatadi. Agar daromad oshsa, u holda uning iste'moli boshqa oziq-ovqat mahsulotlari bilan almashtirishdan kamayishini anglatadi.

Muhim muammolardan biri, masalan, maoshlarning ortishi bilan talabning o'zgarishidir. Bu holda daromadga nisbatan talab elastikligi haqidagi bilimlar muhim hisoblanadi.

### **Talab va taklifning elastikligi**

**Ta'rif.** Vaqt birligida sotuvga taklif etilgan mahsulot miqdori taklif deyiladi. Ma'lum davr uchun mahsulot taklifi o'suvchi funksiyadir. Tashqi teng shartlarda ma'lum narxdagi taklif bu narxdan past narxdagi taklifdan doim katta bo'ladi. Lekin narxning kamayishidan

ham taklifning o‘sishi holatlari ham kuzatiladi. Masalan, bug‘doy doniga bo‘lgan narxning pasayishi dehqondan ma‘lum daromadni olishi uchun taklifni orttirishini undaydi.

$S=S(p)$  narxga bog‘liq taklif funksiyasi bo‘lsin.  $\Delta p$  narx orttirmasi  $\Delta s$  mos taklif orttirmasi bo‘lsin.  $\frac{\Delta p}{p}$  - narxning nisbiy orttirmasi,  $\frac{\Delta S}{S}$  - taklifning nisbiy orttirmasi.

**Ta‘rif.**  $E(S)=E_p = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{S} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{p} = \frac{p}{S} \cdot S'$  limit narxga nisbatan taklif elastikligi deyiladi. Demak, narxga nisbatan taklif elastikligi narx 1% ga o‘zgargandagi taklif o‘zgarishi foizini bildiradi.

### To‘la va o‘rtacha xarajatlar elastikligi

Tashkilotda  $x$  birlik mahsulot ishlab chiqarilsin.  $k(x)$  shu miqdordagi ishlab chiqarish uchun to‘liq xarajatlar funksiyasi bo‘lsin. U holda to‘la xarajatlar elastikligi

$$E_x(k) = E_k = \frac{x}{k} \cdot \frac{dk}{dx} = \frac{x}{k} \cdot k' = k' : \frac{k}{x}$$

$MC = k'$  - ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatlari. Demak, to‘la xarajatlar elastikligi bu chegaraviy xarajatlarning o‘rtacha xarajatlarga nisbatidir.  $\pi = \frac{k}{x}$  o‘rtacha xarajatlar elastikligi.

$$E_x(\pi) = E_\pi = \frac{x}{\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} = \frac{x}{k} \cdot \frac{x \cdot \frac{dk}{dx} - k}{x^2} = \frac{x^2}{k} \cdot \frac{x \cdot \frac{dk}{dx} - k}{x^2} = \frac{x}{k} \cdot \frac{dk}{dx} - 1 = E_k - 1$$

Demak, o‘rtacha xarajatlarning elastikligi to‘la xarajatlar elastikligida bir  $E_k = 1$  bo‘lsa, o‘rtacha xarajatlar elastikligi nol. Agar  $E_x = 0$  bo‘lsa, u holda o‘rtacha xarajatlar doimiy.

$$\text{Bundan } x \cdot \frac{dk}{dx} - k = 0 \Rightarrow \frac{dk}{dx} = \frac{k}{x}$$

Demak, agar to‘la xarajatlar elastikligi birga teng bo‘lsa, u holda to‘la chegaraviy xarajatlar o‘rta to‘la xarajatlarga teng bo‘ladi.

**Masalan 20.** Taklif elastikligining mavjud variantlarida narxning o‘shidan sotuvchi daromadi o‘zgarishini aniqlang.

**Yechish:**  $q = q(p)$  – narxga bog‘liq taklif funksiyasi bo‘lsin. U holda  $V$  daromad funksiyasi  $V = q \cdot p = q(p) \cdot p$ .

Narxga nisbatan daromad elastikligi

$$E_p(V) = E_p(qp) = E_p(q) + E_p(p) = E_p(q) + 1$$

bunda  $E_p(q)$  – narxga nisbatan taklif elastikligi manfiydir. U holda  $E_p(V) = 1 - |E_p(q)|$ . Quyidagi hollar bo‘lishi mumkin.

1.  $|E_p(q)| > 1$  bo‘lsa (taklif elastik), u holda  $E_p(V) < 0$ . Bu daromadning o‘zgarishi narxning o‘zgarishi yo‘nalishiga qarama-qarshi, ya’ni elastik taklifda narxning oshishi daromadning kamayishini, narxlarning pasayishi daromadning o‘shishini anglatadi.

2.  $|E_p(q)| = 1$  bo‘lsa, (taklif neytral), u holda  $E_p(V) = 0$ . Bu narx o‘zgarishining daromadga ta’siri yo‘qligini bildiradi.

3.  $|E_p(q)| < 1$  bo‘lsa, (taklif noelastik), u holda  $E_p(V) > 0$ . Bu narxning o‘zgarishi daromadning ham narx yo‘nalishida o‘zgarishini anglatadi, ya’ni narxlarning oshirilishi daromadning ham oshishini bildiradi. Bu hol sotuvchilar uchun qulay holdir.

**Masalan 21.** Agar daromad 1000 sh.b.dan 1037 sh.b.gacha kun birlikda oshib, daromadga nisbatan taklif elastikligi  $E_r(q) = 4.08$  bo‘lsa, mahsulotga bo‘lgan talab qanday o‘zgaradi?

**Yechish:**  $E_r(q) = 4.08$  miqdor  $r$  daromad 1% ortganda taklif 4.08% ga ortishini anglatadi.

Masala shartiga ko‘ra esa daromad  $\frac{1037-1000}{1000} \cdot 100\% = 3.7\%$  da ortadi.

Demak, bu holda taklif  $3.7 \cdot 4.08 = 15.08\%$  ga ortadi.

## Mehnat unumdorligi

$u = u(t)$  orqali  $t$  vaqt davomida ishlab chiqarish funksiyasini belgilaymiz. U holda  $\Delta t = t_1 - t_0$  vaqt davomidagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi

$$\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$$

O'rtacha mehnat unumdorligi – bu ishlab chiqarilgan mahsulot hajmining unga sarflangan vaqtga nisbatidir, ya'ni  $z_{o'r} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$

$t_0$  vaqtdagi mehnat unumdorligi deb  $\Delta t \rightarrow 0$  dagi  $z_{o'r}$  intiladigan qiymat tushuniladi, ya'ni  $z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$

Demak,  $z(t) = u'(t)$ .

## Ishlab chiqarish samaradorligining kamayish qonuni

Bu qonun shuni tasdiqlaydiki, ishlab chiqarishning asosiy faktorlaridan birini, masalan asosiy xarajatlar  $K$  ni oshirish bilan  $K$  ning qaysidir qiymatidan boshlab ishlab chiqarish funksiyasi qiymati kamayib boradi. Boshqacha qilib aytganda, ishlab chiqarilgan mahsulotning  $V$  hajmi  $K$  ning funksiyasi sifatida pastga qavariqlik yuqoriga qavariqlik bilan almashadigan grafik bilan ifodalanadi.

**Masalan 22.** Faraz qilaylik,  $V$  ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi funksiyasi quyidagi formula bilan berilgan bo'lsin:

$$V(k) = V_{lim} (1 + e^{-bk+c}). \quad (8)$$

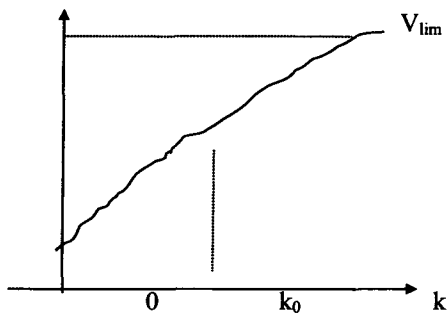
Bu yerda,  $b$  va  $c$  ma'lum musbat sonlar (ular avvalambor ishlab chiqarishni tashkil qilish strukturasi bilan aniqlanadi),  $V_{lim}$  ishlab chiqarilayotgan mahsulotning imkoni boricha maksimal hajmi. (8)-funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblash qiyin emas.

$$V'(K) = V_{lim} b^2 e^{-bk+c} \frac{e^{-bk+c} - 1}{(1 + e^{-bk+c})^2}$$

$V'(K) = 0$  shartdan kritik (shubhali) nuqta topiladi:  $K_{cr} = c/b$  (9)



va bu funksiyaning grafigi chizmada tasvirlangan.



$K_{cr}$  egilish nuqtasida (9)-funksiya grafigining pastga qavariqligi yuqoriga qavariqlik bilan o'zgaradi. Bu nuqtagacha asosiy xarajatlarning o'sishi mahsulot hajmining jadal o'sishiga olib keladi: mahsulot hajmining o'sish sur'ati (birinchi hosilaga o'xshash) o'sadi, ya'ni  $V'(K) > 0$ . Agar  $K > K_{cr}$  bo'lsa, ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmining o'sish sur'ati kamayadi, ya'ni  $V'(K) < 0$  va asosiy xarajatlarning samaradorligi kamayadi.

Shunday qilib, kapital qurilishiga sarflangan mablag' strategiyasida juda muhim omil xarajatning kritik hajmini topishdir. Kapital qurilishiga sarflangan mablag' foydaliligini oshirish uchun  $b, c, V_{lim}$  ko'rsatkichlar miqdorini «yaxshilash» kerak bo'ladi.

## 8. Aniqmas integral

### Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

**Ta'rif.** Agar barcha  $x \in (a, b)$  lar uchun  $F'(x) = f(x)$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $F(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda  $f(x)$  funksiyaga boshlang'ich funksiya deyiladi.

**Masalan 1.**  $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$  funksiya  $(-\infty, +\infty)$  oraliqda  $f(x) = x$  funksiya

uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki  $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$  tenglik barcha  $x \in (-\infty, +\infty)$  lar uchun o'rinlidir.

Berilgan  $f(x)$  funksiya bir nechta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi mumkin. Masalan,  $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$  funksiya  $f(x) = x$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Umumiy holda, agar  $F(x)$  funksiya  $f(x)$  uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan o'zgarimas  $c = \text{const}$  uchun  $F(x) + c$  funksiya ham  $f(x)$  ga boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki  $(F'(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ .

Aksincha, berilgan  $f(x)$  funksiyaning istalgan ikkita boshlang'ich funksiyasi o'zgarimas songa farq qilishini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham  $F_1(x)$  va  $F_2(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  da  $f(x)$  ga boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad x \in (a, b)$$

U holda Lagranj teoremasi natijasiga ko'ra  $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ . Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, agar  $F(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  intervaldagi istalgan boshlang'ich funksiyasi  $F(x) + C$ , ( $C = \text{const}$ ) ko'rinishida bo'lar ekan.

**Ta'rif.**  $f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari  $\int f(x) dx$  ko'rinishida belgilanib, bu ifoda  $f(x)$  funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda  $f(x)$  integral osti funksiyasi,  $f(x) dx$  integral ostidagi ifoda deb ataladi.

Demak, agar  $F(x)$  funksiya  $f(x)$  ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in R\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik qisqacha

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

kabi ifoda etiladi. Masalan,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini, ya'ni uning aniqmas integralini topish, funksiyani integrallash deb ataladi.

### ***Aniqmas integral xossalari va uni hisoblash usullari***

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Chunki, agar  $F(x)$  funksiya  $f(x)$  ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

2. Aniqmas integralning differensial integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi, ya'ni  $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ .

Haqiqatan ham,  $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

3. Biron-bir funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiyadan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

Agar biz  $F(x)$  ni biron-bir  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb qarashak, ya'ni  $F'(x) = f(x)$  bo'lsa, u holda  $dF(x) = f(x)dx$  va  $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$ .

4. Agar  $a$  o'zgarmas son bo'lsa, u holda  $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$  tenglik o'rinli bo'ladi.

Hosila xossasiga ko'ra  $(a\int f(x)dx)' = a(\int f(x)dx)' = a \cdot f(x)$ .

Demak,  $a \int f(x) dx$  funksiya  $a \cdot f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, ya'ni

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

5. Funktsiyalar yig'indisining integrali, qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni  $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

Hosila xossasiga ko'ra,  $(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx)' = (\int f(x) dx)' \pm (\int g(x) dx)' = f(x) \pm g(x)$ .

tenglik o'rinli bo'lar ekan.

6. Agar  $\int g(t) dt = G(t) + C$  o'rinli bo'lsa, u holda  $t = \varphi(x)$  uchun

$$\int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C$$

Haqiqatan ham,  $G'(t) = g(t)$  bo'lgani uchun va  $G(x) = G(\varphi(x))$  murakkab funksiya hosilasiga asosan  $(G(\varphi(x)))'_x = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \varphi'(x)$ , demak,  $G(\varphi(x))$  funksiya  $g(\varphi(x)) \varphi'(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekan.

Bu xossadan foydalanib, aniqmas integralni yangi o'zgaruvchi kiritib yoki o'rniga qo'yish usuli bilan hisoblash mumkin. Agar  $\int f(x) dx$  integralda, integral ostidagi ifodani quyidagicha ifodalash mumkin bo'lib,

$$f(x) dx = g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = g(\varphi(x)) d\varphi(x) \text{ va } \int g(t) dt = G(t) + C$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(x) dx = \int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C$$

**Masalan 2.** Aniqmas integralni hisoblang:  $\int \sin^4 x \cos x dx$ .

**Yechish:** Bu yerda,  $t = \sin x$  deb olsak,

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \int t^4 dt$$

tenglikni hosil qilamiz va  $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C$  tenglikka ko'ra,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

7. Agar  $\int f(t) dt = F(t) + c$  bo'lsa, u holda  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$ .

Agar  $t=ax+b$  deb olsak

$$f(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a} f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(t)dt = \frac{1}{a} F(t) + c = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$$

## Elementar funksiyalar aniqmas integrallari jadvali

Aniqmas integral ta'rifiga ko'ra, elementar funksiyalar hosilasi jadvaliga asoslanib va tenglikning o'ng tarafidan hosila olish orqali quyidagi elementar funksiyalarning aniqmas integrallar jadvalini tuza olamiz.

1.  $\int 0 dx = C$

2.  $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$

3.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$

4.  $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

5.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + c$

6.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + c$

7.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \int e^x dx = e^x + c$

8.  $\int \sin x dx = -\cos x + c$

9.  $\int \cos x dx = \sin x + c$

10.  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + c$

11.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + c$

## Integralashning asosiy usullari

### Bevosita integrallash

Bunda integral ostidagi ifoda elementar almashtirishlar bilan jadvalga keltiriladi. So'ngra integral xossalaridan foydalanib, boshlang'ich funksiya topiladi.

**Masalan 3.** Integralni hisoblang:  $I_1 = \int \frac{42ax\sqrt{x} - 5bx^2 + 14x + 20}{x^2} dx.$

**Yechish:** Darajaning va aniqmas integralning xossalaridan foydalanib:

$$I_1 = 42a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 5b \int dx + 14 \int x^{-1} dx + 20 \int x^{-2} dx = 84a\sqrt{x} - 5bx + 14 \ln|x| - \frac{20}{x} + C.$$

**Masalan 4.** Integralni hisoblang:  $I_3 = \int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C$

**Yechish:**  $\int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C = \frac{a^{mx} b^{nx}}{\ln(a^m b^n)} + C.$

**Masalan 5.** Integralni hisoblang:  $I = \int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$

**Yechish:**

$$I = \int \frac{x^4+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \int (x^2-1) dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + C.$$

**Masalan 6.**  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx.$

**Yechish:**  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx = \int \left( x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

## O‘rniga qo‘yish usuli

Erkli o‘zgaruvchi  $x$  ni boshqa ixtiyoriy  $x$  ga bog‘liq differensiallanuvchi funksiya bilan almashtirish mumkin. Integrallarni hisoblashda quyidagi qoidalarni hisobga olish foydalidir:

1. Agar  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , u holda  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ . Masalan:

a)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ , bo‘lgani uchun  $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ ;

b)  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ , bo‘lgani uchun  $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ .

2. Agar integral ostidagi ifodani  $f(x) \cdot f'(x)$  yoki  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda  $\int f'(x) dx = df(x)$  ekanligidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\int f(x) f'(x) dx = \int f(x) df(x) = \frac{1}{2} f^2(x) + C; \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

3.  $\int [f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)] dx = \int (f \cdot \varphi)' dx = \int d(f \cdot \varphi) = f(x) \cdot \varphi(x) + C.$

$$4. \int x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int x^2 f(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \int t \cdot f(t) dt, \text{ bunda } t = x^2.$$

$$5. \int \frac{f'(x) dx}{a^2 + f^2(x)} = \int \frac{df(x)}{a^2 + f^2(x)} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a} + C.$$

$$6. \int \frac{f'(x) dx}{a^2 - f^2(x)} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + f(x)}{a - f(x)} \right| + C.$$

$$7. \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{a^2 - f^2(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{a^2 - f^2(x)}} = \operatorname{arcsin} \frac{f(x)}{a} + C.$$

$$8. \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f^2(x) \pm a^2}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f^2(x) \pm a^2}} = \ln \left| f(x) - \sqrt{f^2(x) \pm a^2} \right| + C.$$

**Masalan 7.** Integralni hisoblang: a)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ ; b)  $\int \frac{a \sin x - b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ ;

c)  $\int \frac{\sin x}{\cos^7 x} dx$ .

**Yechish:**

$$a) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)' \operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C;$$

$$b) \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \int \frac{(a \cos x + b \sin x)'}{a \sin x + b \cos x} dx = \int \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \sin x + b \cos x} = \ln |a \sin x + b \cos x| + C;$$

$$c) \int \frac{\sin x}{\cos^7 x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos^7 x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos^7 x} = \frac{1}{6 \cos^6 x} + C.$$

**Masalan 8.** Integralni hisoblang:  $\int \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \right) dx$ .

**Yechish:**

$$\int \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \right) dx = \int \left[ \ln(1+x) (\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x (\ln(1+x))' \right] dx = \int [\ln(1+x) (\operatorname{arctg} x)]' dx = \ln(1+x) \cdot \operatorname{arctg} x + C.$$

**Masalan 9.** Integralni hisoblang: a)  $I = \int \frac{dx}{ax+b}$ ;

$$b) I = \int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}.$$

**Yechish:** a)  $I = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{a \cdot dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$

$$b) (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 = \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) \right]^2 = (x^2 - (x^2 - 1))^2 = 1$$

ekanligidan

$$I = \int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \int (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 dx = 2 \int x^2 dx - 2 \int x\sqrt{x^2 - 1} \cdot dx - \int dx = \frac{2}{3}x^3 - x - \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 1) = \frac{2}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

### O'zgaruvchilarni almashtirish usuli

Agar aniqmas integral jadval ko'rinishida bo'lmasa u holda ba'zan o'miga qo'yish usuliga murojaat qilinadi.  $\int f(x)dx$  ni topish kerak bo'lsa  $x = \varphi(t)$  almashtirish bajariladi.

$\varphi(t)$  funksiya uzluksiz, uzluksiz hosilaga ega va teskari funksiyasi mavjud.  $dx = \varphi'(t)dt$  bo'lgani uchun  $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ . Qanday qilib muvaffaqiyatli almashtirishni olish mumkin degan savolga umumiy javob berish mumkin emas. Foydali almashtirishni topish mashqlar bilan o'zlashtiriladi. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuliga qator misollar keltiramiz.

**Masalan 10.** Integralni hisoblang:  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-3}\sqrt{x}}$ .

**Yechish:** Ildiz ostidagi ifodalardan ozod bo'lish uchun  $x = t^6$  belgilashni kiritamiz.  $dx = d(t^6) = (t^6)' dt = 6t^5 \cdot dt$  ekanligidan

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t-1} = 6 \int \frac{t^3 - 1 + 1}{t-1} dt = 6 \int \frac{t^3 - 1}{t-1} +$$

$$+ \int \frac{dt}{t-1} = 6 \int (t^2 + t + 1) dt + 6 \ln|t-1| = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln|t-1| = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.$$

**Masalan 11.** Integralni hisoblang:  $I = \int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x} dx$ .

**Yechish:** Quyidagicha belgilamiz:  $\sqrt{10+x^2} = t$ , bundan  $x^2 = t^2 - 10$ . Bu tenglikni ikkala tomonini integrallab  $2x dx = 2t dt$  yoki  $x dx = t dt$  ga ega bo'lamiz.

$$\frac{dx}{x} = \frac{x dx}{x^2} = \frac{t dt}{t^2 - 10} \text{ va}$$



$$I = \int t \frac{tdt}{t^2-10} = \int \frac{t^2-10+10}{t^2-10} dt = \int dt + 10 \int \frac{dt}{t^2-10} = t + \frac{10}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}} \right|$$

$$= \sqrt{10+x^2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{10+x^2} + \sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2} - \sqrt{10}} \right| + C.$$

**Ko'rsatma:**  $\sqrt{a^2-x^2}$ ,  $\sqrt{a^2+x^2}$ ,  $\sqrt{x^2-a^2}$  ko'rinishdagi funksiyalarni integrallashda quyidagi belgilashlar kiritiladi:

1.  $\sqrt{a^2-x^2}$  funksiya uchraganda  $x = a \cdot \sin t$ , belgilanib  $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos t$  topiladi.  $dx = a \cdot \cos t \cdot dt$ ,  $t = \arcsin(x/a)$  Bunda  $-a < x < a$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ .

2.  $\sqrt{a^2+x^2}$  ko'rinishdagi funksiyalar uchraganda  $x = atgt$  belgilanadi. Bundan  $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2t)} = \frac{a}{\cos t}$ ,  $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ ,  $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ .

3.  $\sqrt{x^2-a^2}$  ko'rinishdagi funksiyalar uchraganda  $x = \frac{a}{\cos t}$  kabi belgilanadi.

Bundan  $\sqrt{x^2-a^2} = atgt$ ,  $dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$ ,  $t = \arccos \frac{a}{x}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ .

**Masalan 12.** Integralni hisoblang:  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ .

**Yechish:**  $x = a \sin t$  belgilashni kiritamiz. Bundan esa  $dx = a \cos t \cdot dt$  ( $0 < t < \pi/2$ ) va

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a \cos t \cdot dt}{\left(\sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t}\right)^3} = \int \frac{a \cos t \cdot dt}{\sqrt{a^6 \cos^6 t}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{tgt}{a^2} + C.$$

Yuqoridagi belgilashga ko'ra  $\sin t = \frac{x}{a}$ ,  $\cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ ,  $tgt = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ,

bo'lib, integralning oxirgi ko'rinishi  $I = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2-x^2}} + C$ .

**Masalan 13.** Integralni hisoblang:  $I = \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4} dx$ .

**Yechish:**  $x = 2tgt$ , bundan  $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$  ( $0 < t < \pi/2$ ) va

$$I = \int \frac{\sqrt{4+4tg^2t}}{16tg^4t} \cdot \frac{2dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{tg^4t \cdot \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{\cos t dt}{\sin^4 t} = \frac{1}{4} \int \frac{d(\sin t)}{\sin^4 t} = -\frac{1}{12} (\sin t)^{-3} = -\frac{1}{12 \sin^3 t} + C, \quad tgt = \frac{x}{2}$$

ekanligidan  $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$  va  $I = -\frac{1}{12x^3} \sqrt{(4+x^2)^3} + C$ .

**Masalan 14.** Integralni hisoblang:  $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$  ( $x > 3$ ).

**Yechish:**  $x = \frac{3}{\cos t}$  belgilashni kiritamiz. Bundan

$$dx = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt, \quad (0 < t < \pi/2) \text{ va}$$

$$I = \int \frac{3 \sin t}{9 \cdot \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C. \quad \cos t = \frac{3}{x} \Rightarrow \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}, \text{ demak } I = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C.$$

### Bo'laklab integrallash

Agar  $u(x)$  va  $v(x)$  – differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,  $u$  holda ular ko'paytmasining differensial  $d(uv) = u dv + v du$ . Bu ifodaning ikkala tomonini ibtegrallab  $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$  yoki  $\int u dv = uv - \int v du$  formulani olamiz.

Bo'laklab integrallash usuli har xil sinfdagi funksiyalar ko'paytmalarini integrallashda foydalaniladi:

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \quad \int P_n(x) \cos ax dx, \quad \int P_n(x) \sin ax dx, \quad \int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx, \quad \int P_n(x) \arcsin x dx,$$

$$\int P_n(x) \arccos x dx, \quad \int P_n(x) \ln x dx.$$

Daslabki uchta integral  $u$  uchun  $P_n(x)$  ko'phad qabul qilinadi, oxirgi to'rtta integral uchun esa mos ravishda  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\ln x$  lar qabul qilinadi. Ba'zi hollarda bo'laklab integrallash formulasini bir necha marta qo'llash zarur bo'ladi.

**Masalan 15.** Integralni hisoblang:  $\int x \cdot e^{-5x} dx$ .

**Yechish.**  $u = x$  va  $dv = e^{-5x} dx$  deb olamiz,  $u$  holda

$$\int x e^{-5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{-5x} dx, \quad v = \int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} \end{array} \right| = -\frac{x}{5} e^{-5x} dx - \frac{1}{25} e^{-5x} + C.$$

$v$  ni topishda integrallash doimiysini har doim nolga teng deb hisoblash mumkin.

**Masalan 16.**  $\int \arctg x dx$  integralni hisoblang.

**Yechish:**  $u = \arctg x$  deb olamiz,  $u$  holda

$$\int \arctg x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \cdot \arctg x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

**Masalan 17.**  $\int (x^2+1)\cos x \cdot dx$  integralni hisoblang.

**Yechish:** Bu misolda bo'laklab integrallash formulasini ikki marta qo'llashga to'g'ri keladi.

$$\begin{aligned} \int (x^2+1)\cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2+1, du = 2x dx; \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = (x^2+1)\sin x - 2 \int x \sin x dx = (x^2+1)\sin x - \\ &- \left| \begin{array}{l} a = x, da = dx; \\ \sin x dx = db, b = -\cos x \end{array} \right| = -2(-x \cos x + \int \cos x dx) = (x^2+1)\sin x + 2x \cos x - \\ &- 2 \int \cos x dx = (x^2+1)\sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = 2x \cos x + (x^2-1)\sin x + C. \end{aligned}$$

**Masalan 18.** Aniqmas integralni hisoblang:  $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ .

**Yechish:** Bu integralni ikki marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{\alpha x} du = \alpha \cdot e^{\alpha x} dx; \\ dv = \cos \beta x \cdot dx, v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right| = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^{\alpha x}, du = \alpha \cdot e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin \beta x dx, v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right| = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left( -\frac{1}{\beta} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} + \int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx \right) = \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx. \end{aligned}$$

Bundan  $I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$  deb ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I \text{ bu tenglamani } I \text{ ga nisbatan yechib,}$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + C \text{ yechimni olamiz.}$$

**Masalan 19.** Integralni hisoblang:  $I = \int x^n \ln x dx$ ,  $n \neq -1$ .

**Yechish:**  $u = \ln x$ ,  $dv = x^n dx$ , bundan  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ;

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

### Ko'p uchraydigan integrallar

Aniqmas integrallarni hisoblash qoidalari va usullarini qo'llab, ayrim aniqmas integrallarni topaylik.

$$1. \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + \tilde{n}, \quad (x-a=t).$$

$$2. \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + c = -\frac{1}{(m-1)(x-a)} + c, \\ m \neq 1.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0 \quad \left(\frac{x}{a}=t\right).$$

$$4. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left(\frac{x}{a}=t\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + c.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \\ = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left( \begin{aligned} &\sqrt{x^2+a} = t - x \Rightarrow x^2 + a = t - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - a}{2t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2+a} = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{t^2 + a}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C. \end{aligned} \right)$$

$$7. \int \frac{dx}{(x+a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left[ \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right] dx = \frac{1}{a-b} [\ln|x+b| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$$

8.  $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ ,  $m$  natural son. Agar  $m=1$  bolsa, u holda

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \text{ tenglik avval isbot qilingan edi.}$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz  $\mathfrak{I}_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$

Bu integralda bo'laklab integrallashni qo'llaymiz:

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^m}, \quad du = -\frac{2mx \, dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}, \quad dv = dx, \quad v = x$$

u holda

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_m &= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + \int \frac{2m x^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} - 2a^2 m \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}} \end{aligned}$$

Bu yerdan

$$\mathfrak{I}_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\mathfrak{I}_m - 2a^2 m \mathfrak{I}_{m+1} \text{ va } \mathfrak{I}_{m+1} = \frac{x}{2a^2 m (x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2 m} \mathfrak{I}_m. \quad (1)$$

Bu formula  $(m+1)$  integralni  $m$  integral orqali ifoda etayapti. Bunday formulalar matematikada *rekurrent formulalar* deb ataladi. Rekkurent formulani ketma-ket qo'llash natijasida  $\mathfrak{I}_{m+1}$  integralni hisoblash  $\mathfrak{I}_1$  integralni hisoblashga olib kelinadi.  $\mathfrak{I}_1$  integral esa avval hisoblangan

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Masalan, (1) formulada  $m=1$  desak,

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{2-1}{2a^2} \cdot \mathfrak{I}_1 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Agar (1) da  $m=2$  deb  $\mathfrak{I}_3$  yordamida  $\mathfrak{I}_3$  ni topa olamiz:

$$\mathfrak{I}_3 = \frac{1}{a^2 \cdot 2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2a^2 \cdot 2} \cdot \mathfrak{I}_2 = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

9)  $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m}$  ko‘rinishdagi integralni  $p^2 - 4q < 0$  uchun

hisoblaylik. Ushbu tenglikda  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$ .

$4q - p^2 > 0$  bo‘lgani uchun,  $\frac{4q - p^2}{4} = a^2$  deb belgilash mumkin. Yuqoridagi

integralda  $x + \frac{p}{2} = t$  desak  $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right]^m} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ .

Demak, qaralayotgan integral (9)-ko‘rinishga ega.

10)  $\int \frac{xdx}{(x^2 + px + q)^m}$  ko‘rinishdagi integralni  $p^2 - 4q < 0$  bo‘lgan hol uchun hisoblaylik.  $x + \frac{p}{2} = t$  va  $\frac{4q - p^2}{4} = a^2$  belgilashlarni kiritib quyidagini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x^2 + px + q)^m} &= \int \frac{\left(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right)d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}\right]^m} = \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^m} - \frac{p}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} + \frac{p}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{p}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} \end{aligned}$$

Qaralayotgan integral yana (10)-ko‘rinishga kelar ekan.

### Kvadrat uchhadni o‘z ichiga olgan ba’zi funksiyalarni integrallash

Quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Bu integrallarni hisoblash uchun maxrajdagi uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz.

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a(t^2 \pm m^2).$$

Bu yerda,  $t = x + \frac{b}{2a}$ ,  $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$ .

**Masalan 1.** Integralni hisoblang:  $I_1 = \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$ .

**Yechish:** To'la kvadrat ko'rinishga keltirib olamiz:

$$4x^2 + 4x + 5 = 4 \left( x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 4 \left[ \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right] = 4(t^2 + 1) \text{ bunda}$$

$$t = x + \frac{1}{2}, dx = dt.$$

Demak,  $I_1 = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \arctgt + C = \frac{1}{4} \arctg \frac{2x+1}{2} + C$ .

**Masalan 2.** Integralni toping:  $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ .

**Yechish:**

$$-2x^2 + 3x + 2 = -2 \left( x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{10} - \frac{9}{16} - 1 \right) = -2 \left( t^2 - \frac{25}{16} \right) = 2(m^2 - t^2), \quad t = x - \frac{3}{4}, \quad m = \frac{5}{4}, \quad dt = dx.$$

Bundan  $I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{m^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{t}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C$ .

**Masalan 3.** Integralni hisoblang:  $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17} dx$ .

**Yechish:**  $(4x^2 - 4x + 17)' = 8x - 4$ , bundan  $3x - 1 = 3 \cdot \frac{8x - 4 + 4}{8} - 1 = \frac{3}{8}(8x - 4) + \frac{1}{2}$

va

$$4x^2 - 4x + 17 = 4 \left( x^2 - 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{17}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 4(t^2 + 4), \quad t = x - \frac{1}{2}; \quad I = \frac{3}{8} \int \frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{8} \int \frac{d(4x^2-4x+17)}{4x^2-4x+17} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} = \frac{3}{8} \ln|4x^2-4x+17| + \frac{1}{16} \arctg \frac{2x-1}{4} + C.$$

**Masalan 4.** Integralni hisoblang:  $\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1} dx$ .

**Yechish:** Integralni hisoblash uchun quyidagicha almashtirish bajaramiz:  $x^2=t$ , u holda  $2xdx=dt$  yoki  $xdx=\frac{1}{2}dt$ . Demak,

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x^2+3)x}{x^4+x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2t+3)dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt + \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^4+x^2+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

**Masalan 5.** Integralni hisoblang:  $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ .

**Yechish:** Bu misolda  $n=3$ . Rekurent formulani bir marta qo'llagandan so'ng  $I_3 = \frac{1}{2(3-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{3-1}} + \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} \cdot I_{3-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \cdot I_2$ .

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$  integralga yana bir marta rekurent formulani qo'llaymiz:

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} I_{2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Demak,  $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C$ .

**Masalan 6.** Integralni hisoblang:  $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+1)^2} dx$ .

**Yechish:**

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+1)^2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) + (2-3)}{(x^2+2x+10)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx - \int \frac{dx}{[(x+1)^2+9]}.$$

Birinci integralda  $x^2+2x+10=z$ , bunda  $(2x+2)dx=dz$ , ikkinchi integralda esa  $x+1=t$  almashtirish bajaramiz, bunda  $dx=dt$ . U holda

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+1)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{3}{2} \int z^{-2} dz - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = -\frac{3}{2} z^{-1} - \\ &- \left[ \frac{1}{2(2-1) \cdot 9} \cdot \frac{t}{(t^2+9)^{2-1}} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 2 - 3}{9 \cdot 2 \cdot 2 - 2} \int \frac{dt}{t^2+9} \right] = -\frac{3}{2z} - \frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2+9} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$



## Ratsional ifodalarni integrallash

Ratsional ifoda deb ko'phadlar nisbati ko'rinishida ifodalangan funksiyaga aytiladi, ya'ni  $P_n(x)$  va  $Q_m(x)$  ko'phadlar bo'lsa, ratsional ifoda ushbu  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  ko'rinishda bo'ladi. Agar  $P_n(x)$  ko'phad darajasi  $Q_m(x)$  ko'phad darajasidan katta bo'lsa, ya'ni  $n > m$  bo'lsa  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  ni quyidagi ko'rinishda ifoda etish mumkin:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$$

Bu yerda,  $L_{n-m}(x)$  va  $R_k(x)$  mos ravishda  $n-m$  va  $k$  darajali ko'phad bo'lib,  $k \leq m$ , ya'ni  $\frac{P_k(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasrdan iborat bo'ladi.

Ushbu

$$P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

ko'phad ko'rinishdagi funksiyaning aniqmas integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int P_n(x) dx &= \int (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n) dx = \\ &= \frac{b_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{b_1}{n} x^n + \dots + \frac{b_{n-1}}{2} x^2 + b_n x + C. \end{aligned}$$

Demak,  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  ning aniqmas integralini hisoblash uchun, bu ratsional ifodani ko'phad va to'g'ri kasrning yig'indisi deb qarashimiz mumkin. Bundan tashqari, to'g'ri kasrni qisqarmaydigan kasr deb hisoblaymiz.

Istalgan  $Q_m(x)$  ko'phadni quyidagi ko'rinishda ifoda qilish mumkin:

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= a \cdot (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-a_n)^{k_n} \cdot \\ &\cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s} \end{aligned} \quad (1)$$

Bu yerda,  $a, a_1, \dots, a_n, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$  lar haqiqiy sonlar,  $k_1, k_2, \dots, k_n, m_1, m_2, \dots, m_s$  lar esa natural sonlardan iborat bo'lib,  $p_i^2 - 4q_i < 0, i = 1, 2, \dots, s$  shart uchun o'rinli bo'ladi.

Agar  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  qisqarmaydigan to'g'ri kasr bo'lib,  $Q_m(x)$  uchun (1)-

yoyilma o'rinli bo'lsa, bu kasrni quyidagicha ifoda etish mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}\tilde{\delta} + \tilde{N}_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2 + p_j\tilde{\delta} + q_j)^{m_j}} \right) \right]$$

yoki 
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{1}{a} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^k \frac{A_{il}}{(x-a_i)^l} + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{m_j} \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + p_jx + q_j)^l} \right) \quad (2)$$

Bu tenglikda qatnashayotgan

$$\frac{A}{(x-a)^l} \text{ va } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}, \quad p^2-4q < 0$$

ko'rinishdagi kasrlar soddakasrlar deb nomlanadi. Biz bunday kasrlarning aniqmas integralini hisoblashni o'rgangan edik.

Demak,  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  qisqarmaydigan to'g'ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \frac{1}{a} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{k_i} \int \frac{A_{il}}{(x-a_i)^l} dx + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{m_j} \int \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + p_jx + q_j)^l} dx \right)$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  uchun (2)-tenglikdagi  $A_{il}$ ,  $B_{jl}$  va  $C_{jl}$  larning qiymatlarini

topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (2)-tenglikning o'ng tarafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj  $Q_m(x)$  ga teng bo'lib, uning suratida  $A_{il}$ ,  $B_{jl}$  va  $C_{jl}$  koeffitsientlar qatnashgan, darajasi  $Q_m(x)$  ning darajasidan oshmaydigan  $\tilde{P}_n(x)$  polinomni hosil qilamiz. Agar biz (2)-tenglikni ayniyat deb qarasaq tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya'ni  $Q_m(x)$  bo'lgani sababli,  $P_n \equiv \tilde{P}_n(x)$  ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda  $x$  larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida  $A_{il}$ ,  $B_{jl}$  va  $C_{jl}$  noma'lum koeffitsientlar uchun chiziqli

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (3)-ayniyatdagi  $A_{it}$ ,  $B_{jt}$  va  $C_{jt}$  larning qiymatlarini topamiz.

**Masalan 1.** Misol tariqasida ushbu aniqmas integralni hisoblaylik:

$$\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz:

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Bu tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so'ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2 + x + 3 = A_1 \cdot (x-1)^2(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + A_3(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^3.$$

Demak,

$$3x^2 + x + 3 = (A_1 + B)x^4 + (-2A_1 + A_2 - 3B + C)x^3 + (2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C)x^2 + (-2A_1 - B + 3C)x + (A_1 - A_2 + A_3 - C)$$

Bu ayniyatdagi  $x$  larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 & + B & = 0 \\ -2A_1 + A_2 & - 3B + C & = 0 \\ 2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C & = 3 \\ -2A_1 + A_2 & - B + 3C & = 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 & - C & = 3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \\
 & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Natijada,  $A_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = \frac{7}{2}$ ,  $B = \frac{1}{4}$ ,  $C = \frac{1}{4}$  ekanligini hosil qilamiz,

ya'ni 
$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}$$

Nihoyat, quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz..

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \\
 &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(-2)(x-1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\
 &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{4} \arctg x + C = \\
 &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctg x + C = \\
 &= \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \arctg x + C
 \end{aligned}$$

**Masalan 2.** Integrallarni hisoblang:  $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$ .

**Yechish:**  $x^2+1$  ifoda kasr ostidagi funksiya maxrajining ikki karrali ildizi bo'lgani uchun, bu funksiyani quyidagi sodda kasrlar yig'indisi ko'rimishida ifodalash mumkin:  $\frac{x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$ .

Bundan  $x^3+2x = Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$ . Noma'lum  $A, B, C$  va  $D$  koeffitsientlarni topish uchun  $x$  noma'lumning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglab,

$$x^3 | C = 1$$

$$x^2 | D = 0$$

$$x | A + C = -2, A = -3$$

$$x^0 | B + D = 0, B = 0$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak,

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} dx = -3 \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{x^2+1} = -\frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

### Ayrim irratsional ifodalarni integrallash

Irratsional ifodalarda o'zgaruvchi qandaydir darajadagi ildiz ostida qatnashishini eslatib o'tamiz.

Agar  $R(u, v)$  ifoda  $u$  va  $v$  lardan to'rt arifmetik amallar va songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan funksiya bo'lsa,  $u$  holda bu ifoda  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deyiladi. Masalan, quyidagi ifoda

$$R(u, v) = u^2 + 3v^2 - \frac{2u - 5v + u \cdot v}{4 - u^3 + v^5}$$

$u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'ladi. Ikki o'zgaruvchili

$R(u, v)$  ratsional funksiya uchun ushbu  $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$  aniqmas

integralni,  $a, b, c$  va  $d$  lar haqiqiy sonlar bo'lib,  $ad-c \neq 0$  va  $m$  natural son

bo'lgan holda qanday hisoblash mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+d},$$

yangi o'zgaruvchi kiritsak,

$$x = \varphi(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \quad \text{va} \quad dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad-bc) \cdot m \cdot t^{m-1}}{(a-ct^m)^2} dt$$

$$\text{Bundan } \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt$$

tenglikni hosil qilamiz.  $\varphi(t)$  va  $\varphi'(t)$  funksiyalar  $t$  ning ratsional funksiyalari bo'lgani uchun  $R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t)$

funksiya ham  $t$  ning ratsional funksiyasi bo'ladi. U holda  $\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt$

integralni hisoblab, so'ngra  $t$  o'zgaruvchi o'rniga  $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  ni qo'yib dastlabki integralni topamiz.

**Masalan 3.** Quyidagi integralni hisoblaylik:

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \int \frac{dx}{x \left[ (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^4 \right]}$$

Bu yerda,  $\sqrt[6]{x} = t$  deb, yangi o'zgaruvchi kiritamiz.

Demak,  $x = t^6$  va  $dx = 6t^5 dt$  bo'lgani uchun,

$$\int \frac{dx}{x \left[ (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^4 \right]} = \int \frac{6 \cdot t^5 dt}{t^6 (t^3 + t^4)} = 6 \int \frac{dt}{t^5 (t+1)}$$

Noma'lum koefitsientlar usuliga ko'ra

$$\frac{1}{t^5(t+1)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \frac{A_4}{t^4} + \frac{A_5}{t^5} + \frac{A_6}{t+1}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 t^4(t+1) + A_2 t^3(t+1) + A_3 t^2(t+1) + A_4 t \cdot (t+1) + A_5(t+1) + A_6 \cdot t^5 = \\ &= (A_1 + A_6) t^5 + (A_1 + A_2) t^4 + (A_2 + A_3) t^3 + (A_3 + A_4) t^2 + (A_4 + A_5) t + A_5 \end{aligned}$$

Bu yerda,  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  va  $A_6$  koefitsientlar uchun quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_6 = 0 \\ A_1 + A_2 = 0 \\ A_2 + A_3 = 0 \\ A_3 + A_4 = 0 \\ A_4 + A_5 = 0 \\ A_5 = 1 \end{array} \right\}, \text{yani } A_5 = 1, A_4 = -1, A_3 = 1, A_2 = -1, A_1 = 1, A_6 = -1$$

Demak,

$$\begin{aligned} 10 \int \frac{dt}{t^5(t+1)} &= 10 \left( \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^5} - \int \frac{dt}{t+1} \right) = \\ &= 10 \left[ \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} \right] + C \end{aligned}$$

u holda,  $t = \sqrt[10]{x}$  ekanligini e'tiborga olsak

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} = \ln \left( \frac{x^{10}}{(1 + \sqrt[10]{x^2})^0} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} \right) + C.$$

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda *Eyler almashtirishlari* deb nomlanuvchi almashtirishlar qo'llaniladi.

Bular quyidagilardan iborat:

1-hol. Agar  $a > 0$  bo'lsa,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$ .

2-hol. Agar  $c > 0$  bo'lsa,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ .

3-hol. Agar  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$  bo'lsa,

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t \cdot (x-x_1).$$

**Masalan 4.** Integralni hisoblang:  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$

**Yechish:** 1-holga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1},$$

$$dx = \frac{2t(2t+1) - 2 \cdot (t^2 - 1)}{(2t+1)^2} dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t+1)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Bunda, } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{2(t^2 + t + 1)}{t \cdot (2t + t)^2} dt = \frac{3}{2(2t + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t + 1|} + C = \\ &= \frac{3}{2(2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + x + 1})^4}{|2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}|} + C \end{aligned}$$

**Masalan 5.** Integrallarni hisoblang:  $\int \frac{3x + 2}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} dx$ .

**Yechish:**

$$\int \frac{3x + 2}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} dx = \int \frac{3(x + 1) - 1}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}} - \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$

Birinchi integralda to'la kvadrat ajratamiz, ikkinchi integralda esa

$x + 1 = \frac{1}{t}$  almashtirishni bajaramiz, bunda  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ . U holda

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 2}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} dx &= 3 \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right| + \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t} - 1\right) + 3}} = \\ &= 3 \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right| + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} = 3 \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right| + \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right| + \\ &+ C = 3 \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right| + \ln \left| \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}{x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Binomial integral deb nomlanuvchi integralni, ya'ni ushbu  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  integralni hisoblaylik. Bu yerda  $m, n$  va  $p$  ratsional sonlar bo'lib, quyidagi hollarda bu integralni hisoblash ratsional ifodani integrallashga olib keladi.

1-hol. Agar  $p$  butun bo'lib,  $N$  son  $m$  va  $n$  larning umumiy maxraji bo'lsa  $t = \sqrt[n]{x}$  almashtirish qo'llaniladi.

2-hol. Agar  $m$  butun son bo'lib,  $N$  son  $p$  ning maxraji bo'lsa,  $t = \sqrt[n]{a + bx^n}$  almashtirish qo'llaniladi.

3-hol. Agar  $m + p$  butun son bo'lib,  $N - p$  ning maxraji bo'lsa,  $t = \sqrt[N]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$  almashtirish qo'llaniladi.



**Masalan 6.** Ushbu  $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx$  integral uchun

$m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{3}$ ,  $p = -2$  ekanligi kelib chiqadi. Demak, bu integralni hisoblash 1-holga tushar ekan.  $\frac{1}{2}$  va  $\frac{1}{3}$  larning umumiy maxraji  $N=6$  shuning uchun  $t = \sqrt[6]{x}$  almashtirishni bajaramiz, ya'ni  $x=t^6$ ,  $dx=6t^5 dt$  tengliklarga ko'ra

$$\int x^{\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx = \int t^3 (1+t^2)^{-2} 6 \cdot t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt$$

Ammo,  $(t^2 + 1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$  bo'lgani uchun,  $t^8$  ko'phadni  $t^4 + 2t^2 + 1$  ko'phadga bo'lib,  $\frac{t^8}{(1+t^2)^2}$  ratsional kasrning, to'g'ri kasr qismini ajratib olamiz:

$$\frac{t^8}{(t^2+1)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2 + 3}{(t^2+1)^2}.$$

Lekin  $\frac{4t^2 + 3}{(t^2+1)^2} = \frac{4(t^2+1) - 1}{(t^2+1)^2} = \frac{4}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2}$  bo'lgani uchun, (10)-integralga asosan, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt &= 6 \left[ \int (t^4 - 2t^2 + 3) dt - 4 \int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right] = \\ &= 6 \left[ \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t - 4 \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right] + C = \\ &= \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t - 21 \operatorname{arctg} t + \frac{3t}{t^2+1} + C \end{aligned}$$

Dastlabki integral uchun quyidagi hosil bo'ladi:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x+1}} + C.$$

### Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$R(u, v)$  ifoda  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'lsin.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$  integralni hisoblaylik. Bunday integralda  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  universal almashtirishni bajarib  $R(\sin x, \cos x) dx$  ifodani  $t$  o'zgaruvchining ratsional ifodasiga olib kelish mumkin. Haqiqatan ham

$$\sin x = \frac{2t \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = 2 \frac{1}{1 + t^2} dt$$

bo'lgani uchun

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{1}{1 + t^2} dt$$

Bu yerda,  $R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + t^2}$  ifoda  $t$  ning ratsional funksiyasi bo'lgani

uchun, ushbu integralni hisoblab,  $t$  ning o'rniga  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  ni qo'yib, dastlabki integralni topamiz.

Agar  $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$  bo'lsa, integralda  $\cos x = t$ , agar  $R(\sin x - \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$  bo'lsa,  $t = \sin x$  almashtirishni bajarish mumkin.

Agar  $R(-\sin x - \cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$  bo'lsa,  $\operatorname{tg} x = t$  almashtirishni bajarish orqali integralni ratsional funksiyani integrallashga olib kelsa bo'ladi.

**Masalan 7.**  $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$  integralni hisoblang.

**Yechish:** Buning uchun  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  almashtirishdan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{2}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} = \\ &= \int \frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Endi  $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$  integralni hisoblaylik. Bu yerda,  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$  bo'lgani uchun  $t = \operatorname{tg} x$  almashtirishni bajaramiz. Natijada,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} &= \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x \cdot (\operatorname{tg}^3 x + 1)} = \int \frac{\operatorname{tg} x \cdot d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x + 1} = \\ \int \frac{t \, dt}{t^3 + 1} &= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin + \cos x)^2}{1 - \sin x \cdot \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \cdot \sin x} + C \end{aligned}$$

**Masalan 8.**  $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$  integralda  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  tenglik o'rinli bo'lgani uchun  $t = \cos x$  almashtirishni bajaramiz. Natijada,

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(2 + \cos x) \cdot \sin x} &= \int \frac{\sin x \, dx}{(2 + \cos x) \cdot \sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} = \int \frac{dt}{(2+t)(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(1 - \cos x)(2 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^3} + C \end{aligned}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, har doim ham berilgan integralni analitik usulda hisoblab bo'lmaydi.

$$\text{Masalan, } \int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

integrallar mavjud bo'lishligiga qaramasdan, ularni analitik usulda integrallab bo'lmaydi. Buning sababi hosilasi berilgan integral ostidagi funksiyaga teng bo'lgan elementar funksiya mavjud emasligidir.

**Masalan 9.** Integralni hisoblang:  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ .

**Yechish:**  $t = \operatorname{tg} x$  almashtirish bajaramiz, bunda  $x = \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ .

Bu holda

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \\ &= \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

**Masalan. 10** Integralni hisoblang:  $\int \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} dx$ .

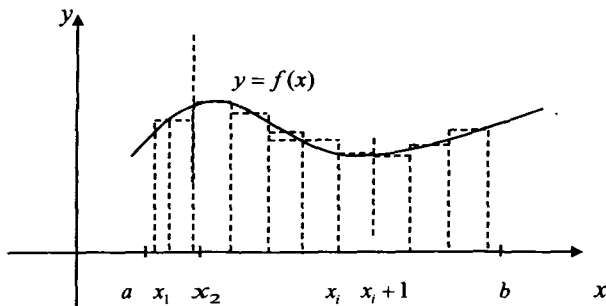
**Yechish:**

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} dx &= \frac{1}{2} \int (\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2}) \cdot \cos \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} \int \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \int (\cos \frac{7x}{4} + \cos \frac{5x}{4}) dx + \frac{1}{4} \int (\cos \frac{3x}{4} + \cos \frac{x}{4}) dx = \\ &\frac{1}{7} \sin \frac{7x}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{5x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{4} + \sin \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

## 9. Aniq integral tushunchasi

### Egri chiziqli trapetsiya yuzi

Quyidagi egri chiziqli trapetsiya deb nomlanuvchi figuraning yuzasini topish masalasini ko'raylik.



Bu figura yuqoridan manfiy bo'lmagan  $y=f(x)$  funksiya grafigi bilan, quyidan  $OX$  o'q, yon tomonlardan  $x=a$  va  $x=b$  to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan. Buning uchun  $[a, b]$  oraliqni  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$  nuqtalar bilan,  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$ , kichik oraliqlarga bo'lamiz. Har bir oraliqdan biron-bir  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  nuqta olib,  $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$ , belgilash kiritib, quyidagi yig'indini tuzib olamiz:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (3)$$

Bu yig'ndida  $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  qo'shiluvchini biz qaralayotgan figuraning  $[x_i, x_{i+1}]$  oraliqqa mos keluvchi bo'lagining yuzasini, balandligi  $f(\xi_i)$  va asosi  $\Delta x_i$  ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarajak, u holda yuqoridagi yig'indini biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin.  $S$  ni egri chiziqli trapetsiya yuzasi deb olsak,

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Agar biz bu taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo'lsak,  $[x_i, x_{i+1}]$  kesmalar uzunliklarini, ya'ni  $\Delta x_i$  larni yetarlicha kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun oraliqni bo'luvchi nuqtalar soni  $n$  ni shunday oshira borishimiz kerakki,  $n \rightarrow \infty$  da  $\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  bo'lsin.

Demak, agar biz (3) yig'indida  $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  deb qarasak, limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini hosil qilargan ekanmiz, ya'ni

$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

### Aniq integral

**Ta'rif.**  $[a, b]$  oraliqda berilgan  $y = f(x)$  uchun, shu oraliqni kichik bo'lakchalarga bo'luvchi  $a = x_0 < x_1, \dots, < x_n = b$  va  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  nuqtalar uchun (3)-yig'indi *integral yig'indi* deb ataladi.

**Ta'rif.**  $[a, b]$  oraliqda berilgan  $y = f(x)$  funksiya uchun  $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  da (3)-integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, bu limit bo'linish nuqtalari  $x_0, x_1, \dots, x_n$  va oraliqlardan olinayotgan  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  nuqtalarga bog'liq bo'lmasa,  $y = f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda integrallanuvchi va limitning qiymati uning aniq integrali deb ataladi.

$$\text{Demak, ta'rifga ko'ra } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Bu yerda,  $f(t)$  integral ostidagi funksiya,  $f(x) dx$  integral ostidagi ifoda,  $a$  integralning quyi chegarasi,  $b$  integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int_a^b f(x) dx$  integral qiymatini topish  $f(t)$  funksiyani  $[a, b]$  oraliqda integrallash deb ataladi. Shuni ta'kidlash kerakki,  $f(t)$  funksiyaning  $[a, b]$  oraliqdagi aniq integrali son bo'lsa, shu funksiyaning aniqmas integrali funksiyalar to'plamidan iborat bo'ladi. Demak, aniq va aniqmas integrallar turli tushunchalar ekan.

Agar biz aniq integralda uning chegaralarining tartibini o'zgartirsak, u holda  $[a, b]$  va  $[b, a]$  uchun tuzilgan integral yig'indilar

ishorasi bilan farq qiladi, chunki  $[a, b]$  uchun  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  bo'lsa,  $[b, a]$  uchun  $-\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$  ayirma hosil bo'ladi. Shuning uchun,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Yuqorida aytilganidek, aniq integralning geometrik ma'nosini manfiy bo'lmagan  $y = f(x)$  funksiya hosil qilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb tushunish mumkin ekan.

**Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini** anglash uchun,  $y = f(t)$  funksiya biron-bir ishlab chiqarishda mehnat unumdorligining vaqt davomida o'zgarishini aniqlasin deb qaraymiz. U holda  $[0, T]$  vaqt oralig'ida mahsulot miqdori hajmi  $u$  ni hisoblash uchun  $[0, T]$  oraliqni  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < T$  nuqtalar bilan kichik bo'lakchalarga bo'lib,  $[t_i, t_{i+1}]$  kichik oraliqda mehnat unumdorligini taqriban o'zgarimas  $f(\xi_i)$  ga ( $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ) teng deb  $[t_i, t_{i+1}]$  oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi  $\Delta u_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta t_i$  ( $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ) ekanligini hisobga olib, butun  $[0, T]$  oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori  $u$  uchun quyidagi taqribiy tenglikni

$$\text{hosil qilamiz: } u = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta u_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta t_i$$

Bu tenglikda aniqlikni oshirish uchun  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$  da limitga o'tishimiz lozim. U holda,  $u = \int_0^T f(t) dt$ .

Bu tenglik  $[0, T]$  vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining hajmi  $u$ ,  $f(t)$  mehnat unumdorligi funksiyasi  $f(t)$  ning aniq integrali orqali ifoda etilar ekan. Bu integral son jihatidan  $f(t)$  funksiya va  $[0, T]$  oraliqlar hosil qilgan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo'ladi.

$$y = f(x) \text{ funksiya uchun } \int_a^b f(x) dx \text{ integral qaysi shartlarda mavjud}$$

bo'lishligini qaraymiz.

**1-teorema (Aniq integral mavjudligining yetarli sharti).** Agar  $y = f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

*Isbot:*  $\bar{S}_i - \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\} \leq \underline{S}_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$  belgilashlarni kiritaylik. U holda

$$\bar{S}' = \max_{x \in [x', x'']} \{f(x)\} \leq \bar{S}_i, \quad \underline{S}' = \min_{x \in [x', x'']} \{f(x)\} \geq \underline{S}_i. \quad (4)$$

Bu yerda,  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  oraliqdan olingan istalgan nuqtadir. Agar  $[x', x''] \subset [x_i, x_{i+1}]$  bo'lganda  $\bar{S}'' = \max_{x \in [x', x'']} \{f(x)\} \leq \bar{S}_i$ ,  $\underline{S}'' = \min_{x \in [x', x'']} \{f(x)\} \geq \underline{S}_i$

ekanligini e'tiborga olsak,  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  da  $[a, b]$  oraliqni bo'lakchalarga bo'lishda, keyingi qadamdagi kichik bo'lakchalar avvalgi qadamdagi bo'lakchalarning ichida yotadi deb hisoblashimiz mumkin. U holda (5)-tengsizlikda  $\sum_{i=0}^{n-1} \underline{S}_i \Delta x_i$  o'suvchi ketma-ketlik  $\sum_{i=0}^{n-1} \bar{S}_i \Delta x_i$  kamayuvchi ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi. Agar  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{S}_i - \underline{S}_i) = 0$  ekanligini e'tiborga olsak

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \underline{S}_i \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{S}_i \Delta x_i = I.$$

U holda (5)-tengsizlikka ko'ra  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = I$ .

$$\text{Demak, } \int_a^b f(x) dx \text{ mavjud va } \int_a^b f(x) dx = I.$$

Quyidagi teorema aniq integral mavjudligining zaruriy shartini ifoda etadi.

**2-teorema.** Agar  $y = f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.

*Isbot:*  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da chegaralangan bo'lmasin, masalan, yuqoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak,  $[a, b]$  ni bo'laklarga ajratishda  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  uchun  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  larni shunday tanlab olish mumkin bo'ladiki, oldindan berilgan har qanday  $\kappa > 0$  son uchun



$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i > K$$

tengsizlikni o'rinli qilib olish mumkin, ya'ni,  $\sup_{\substack{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \\ i=0,1,\dots,n-1}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right) = +\infty$ .

Demak,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda integrallanuvchi emas. Bu esa bizning farazimiz noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi, ya'ni  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda chegaralangan bo'lar ekan.

### Aniq integral xossalari

1. Istalgan o'zgarmas  $k$  son uchun  $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .
2. Funktsiyalar yig'indisining integrali qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .
3. Istalgan  $a, b$  va  $c$  ( $a < c < b$ ) sonlar uchun  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .
4. Agar  $a < b$  bo'lib,  $[a, b]$  oraliqda  $f(x) \leq g(x)$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

Xususan,  $[a, b]$  oraliqda  $m \leq f(x) \leq M$  tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$  tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bu xossalari isboti to'g'ridan to'g'ri aniq integral ta'rifidan kelib chiqadi.

**3-teorema (O'rta qiymat haqidagi teorema).** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  ( $a < b$ ) oraliqda integrallanuvchi bo'lib, bu oraliqda  $m \leq f(x) \leq M$  tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda shunday  $\mu$  son mavjudki, uning uchun  $m \leq \mu \leq M$  tengsizlik o'rinli bo'lib,  $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b-a)$

*Isbot:* 4-xossaga ko'ra  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\text{Agar } \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

belgilashni kiritsak,  $m \leq \mu \leq M$  o'rinli bo'lib,  $\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$  tenglik kelib chiqadi.

$f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda integrallanuvchi bo'lsin, u holda istalgan  $x \in [a, b]$  uchun,  $f(x)$  funksiya  $[a, x]$  oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun  $[a, b]$  oraliqda berilgan quyidagi funksiyani aniqlay olamiz:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Bu  $\Phi(x)$  funksiya yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral deyiladi. Ushbu  $\Phi(x)$  funksiya xossalari bilan tanishib chiqamiz.

**4-teorema.**  $[a, b]$  oraliqda integrallanuvchi  $f(x)$  funksiya uchun  $\Phi(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'ladi.

*Isbot:*  $f(x)$  chegaralangan funksiya bo'lgani uchun,  $[a, b]$  oraliqda  $m \leq f(x) \leq M$  tengsizlik o'rinli bo'lsin deb olishimiz mumkin, u holda  $\Delta x > 0$  uchun

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(x) dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx - \\ &- \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx \end{aligned}$$

Tenglikdan va quyidagi  $m \cdot \Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx \leq M \cdot \Delta x$  tengsizlikdan,  $m \cdot \Delta x \leq \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \leq M \cdot \Delta x$  tengsizliklarni hosil qilamiz.

Demak,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)) = 0$  ya'ni  $f(x)$  funksiya  $x$  nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

**5-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda  $\Phi(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda  $f(x)$  funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, ya'ni  $(a, b)$  intervalda  $\Phi'(x) = f(x)$  tenglik o'rinli bo'ladi.

*Isbot:*  $f(x)$  funksiya uzluksiz bo'lgani uchun  $\min_{t \in [x, x+\Delta x]} \{f(t)\} = m(x)$  va  $\max_{t \in [x, x+\Delta x]} \{f(t)\} = M(x)$  desak,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(x) = f(x)$

Bundan  $m(x)\Delta x \leq \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \leq M(x)\Delta x$ , ya'ni  $m(x) \leq \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}$

tengsizlikdan ushbu  $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x)$  tenglik kelib chiqadi.

Bu teoremadan  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lgan har qanday funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lishligi kelib chiqar ekan.

### Nyuton-Leybnis formulasi

**6-teorema (Nyuton-Leybnis formulasi).**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lib,  $F(x)$  uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

bu tenglik Nyuton-Lebnis formulasi deyilib, ko'pincha  $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$  kabi belgilash qo'llaniladi.

*Isbot:*  $F(x)$  funksiya  $f(x)$  ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. U

holda  $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx$  funksiya, ham  $f(x)$  uchun  $(a, b)$  oraliqda

boshlang'ich funksiya bo'lgani uchun shunday  $C$  o'zgarmas son mavjud bo'ladi, bunda  $F(x) = \Phi(x) + C$  tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) + C - \Phi(a) - C = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Endi aniq integralni hisoblash usullari bilan tanishamiz.

**7-teorema (Yangi o'zgaruvchi kiritib integrallash).** Agar  $\varphi(t)$  funksiya  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo'lib,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$

bo'lsa,  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lgan  $f(x)$  funksiya uchun

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$
 tenglik o'rinlidir.

*Isbot:*  $F(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ya'ni  $\int f(x) dx = F(x) + C$  bo'lsa, u holda aniqmas integral xossalariga ko'ra  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$ .

Bundan esa  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  va

$$\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$
 tenglikdan teorema isboti kelib chiqadi.

**8-teorema (Bo'laklab integrallash usuli).**  $u = u(x)$  va  $v = v(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

*Isbot:* Ushbu  $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$

tenglikka ko'ra aniq integral xossalariga asoslanib,

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b uv' dx + \int_a^b vu' dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, bu yerdan  $\int_a^b uvd + \int_a^b vdu = uv \Big|_a^b$

ya'ni  $\int_a^b uvd = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu$  tenglik kelib chiqadi.

**Masalan 1.** Integralni integral ta'rifi yordamida hisoblang:  $\int_0^1 x^2 dx$ .

**Yechish:** Bu integralda  $a=0, b=1, f(x)=x^2$ .  $[0;1]$  kesmani  $n$  ta teng qismlarga bo‘lamiz, u holda har bir oraliq uzunligi  $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$  va har bir oraliqdan  $\xi_k = x_k$  nuqtalarni tanlaymiz.

Bu holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1,$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Masalan 2.** Integralni integral ta’rifi yordamida hisoblang:  $\int_0^a e^x dx$ .

**Yechish:** Bu integralda  $f(x)=e^x$ .  $[0;a]$  kesmani  $n$  ta teng qismlarga bo‘lamiz, u holda har bir oraliq uzunligi  $\Delta x_k = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$  va har bir oraliqdan  $\xi_k = x_k$  nuqtalarni tanlaymiz. Bu holda integral yig‘indi

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(k \frac{a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} = \sum_{k=1}^n e^{k \frac{a}{n}} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} (e^{\frac{a}{n}} + e^{2 \frac{a}{n}} + \dots + e^{\frac{a}{n} \cdot n}) = \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \left(1 + e^{\frac{a}{n}} + e^{2 \frac{a}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n} a}\right).$$

Qavsdagi ifoda maxraji  $q = e^{\frac{a}{n}}$  va birinchi hadi 1 bo‘lgan geometrik progressiyadir. Geometrik progressiya hadlari yig‘indisi formulasidan foydalanib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$S_n = \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \left( 1 + e^{\frac{a}{n}} + e^{2\frac{a}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}a} \right) = \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1} \quad \text{va} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1} = \left. \begin{array}{l} \frac{a}{n} = t \text{ deb} \\ \text{bunda} \\ n \rightarrow \infty \text{ da} \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (e^a - 1) \frac{te'}{e^t - 1} = (e^a - 1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te'}{e^t - 1} = (e^a - 1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(te')'}{(e^t - 1)'} = (e^a - 1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)e'}{e^t} =$$

$$(e^a - 1) \lim_{t \rightarrow 0} (t+1) = e^a - 1.$$

Demak,  $\int_0^a e^x dx = e^a - 1$ .

**Masalan 3.** Integralni hisoblang:  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ .

**Yechish:**  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x \Big|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ .

**Masalan 4.** Integralni hisoblang:  $\int_0^1 xe^{-x} dx$ .

**Yechish:** Integralni hisoblash uchun bo'laklab integrallash

usulidan foydalanamiz, bunda  $\left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-x} dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right\} \cdot \text{U holda}$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

**Masalan 5.** Integralni hisoblang:  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

**Yechish:** Integralni hisoblash uchun o'zgaruvchini

almashtiramiz:  $\ln x = t$ ,  $\frac{dx}{x} = dt$ , bunda  $x=1$  bo'lsa,  $t=0$ ; agar  $x=e$  bo'lsa,  $t=1$  bo'ladi. U holda

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

**Masalan 6.** Integralni hisoblang:  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

**Yechish:** Integral ostidagi funksiya toq:

$$f(x) = \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}, f(-x) = \frac{(-x)^2 \arcsin(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{x^2 (-\arcsin x)}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x)$$

va soha simmetrik bo'lgani uchun bu integralning qiymati nolga teng, ya'ni

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0.$$

### Xos bo'lmagan integrallar

$[a, b]$  oraliqda  $y = f(x)$  funksiya uchun kiritilgan aniq integral tushunchasida  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda chegaralangan bo'lishi zarur edi.

*Cheksiz oraliq uchun aniq integral tushunchasi.*  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  cheksiz oraliqda berilgan bo'lib, istalgan  $a \leq t$  uchun  $f(x)$  funksiya  $[a, t]$  oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda istalgan  $a \leq t$  uchun  $\Phi(t) = \int_a^t f(x) dx$  funksiya aniqlangan bo'ladi.

**Ta'rif.**  $f(x)$  funksiyaning  $[a, +\infty)$  oraliqdagi xos bo'lmagan integrali

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  deb ushbu  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t)$  limitga aytiladi, ya'ni

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Xuddi shuningdek,  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  ko'rinishdagi xos bo'lmagan integralni ta'riflash mumkin.  $(-\infty, +\infty)$  cheksiz oraliqdagi xos bo'lmagan integral esa quyidagicha aniqlanadi:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

Agar bu integrallardan bironyasi uzoqlashuvchi bo'lsa  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  xos bo'lmagan integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, 
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

Endi  $[a, b]$  oraliqda chegaralanmagan funksiya uchun xos bo'lmagan integral tushunchasini kiritamiz.  $y = f(x)$  funksiya  $[a, b)$  yarim ochiq oraliqda uzluksiz bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$  bo'lsin.

**Ta'rif.**  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$  limit qiymati  $y = f(x)$  funksiyaning  $[a, b)$

yarim ochiq oraliqdagi xos bo'lmagan integrali deyiladi. Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Limit qiymati  $\int_a^b f(x)dx$  shaklda belgilanadi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu  $(a, b]$  yarim ochiq oraliqda uzluksiz va  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  bo'lgan  $y = f(x)$  funksiya uchun ham xos bo'lmagan integral ta'riflanadi.  $(a, b)$  intervalda uzluksiz,  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  va  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$



bo'lgan funksiya uchun  $\int_a^b f(x)dx$  xos bo'lmagan integral quyidagi

$$\text{tenglik orqali ifodalanadi: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Bu yerda,  $c$  son  $a < c < b$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi bironta son.

$$\text{Masalan 7. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{agar } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha > 1 \end{cases}$$

Demak,  $\alpha < 1$  da integral uzoqlashuvchi,  $\alpha > 1$  bo'lsa yaqinlashuvchidir.  $\alpha = 1$  da  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

bo'lgani uchun, yuqoridagi integral  $\alpha \leq 1$  da uzoqlashuvchi.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{\delta^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{agar } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{agar } \alpha < 1 \end{cases}$$

Demak,  $\alpha > 1$  bo'lganda xos bo'lmagan integral uzoqlashuvchi va  $\alpha < 1$  da yaqinlashuvchi.  $\alpha = 1$  da  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} (-\ln \delta) = +\infty$

bo'lgani uchun, yuqoridagi integral  $\alpha \geq 1$  da uzoqlashuvchidir.

$$\text{Masalan 8. Integralni hisoblang: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Yechish:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \text{arctg}x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \text{arctg}b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \text{arctg}a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Demak, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi.

$$\text{Masalan 9. Integralni hisoblang: } \int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

**Yechish:** Integral ostidagi  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiya  $x=0$  nuqtada aniqlanmagan, shuning uchun

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$

Demak, xos bo‘lmagan integral uzoqlashuvchi.

**Masalan 10.** Integralni hisoblang:  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ .

*Yechish:*  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b xe^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2}.$

Demak, xos bo‘lmagan integral yaqinlashuvchi.

**Masalan 11.** Integralni hisoblang:  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

*Yechish:* Integral ostidagi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  funksiya  $x=0$  nuqtada

aniqlanmagan, shuning uchun  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2.$

Demak, xos bo‘lmagan integral yaqinlashuvchi.

**Masalan 12.** Integralni hisoblang:  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Yechish:* Integral ostidagi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  funksiya  $x=\pm 1$

nuqtalarda uzilishga ega. Shuning uchun,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-1+a}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{1-a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \arcsin x \Big|_{-1+a}^0 + \lim_{a \rightarrow 0^+} \arcsin x \Big|_0^{1-a} =$$

$$= -\lim_{a \rightarrow 0^+} \arcsin(-1+a) + \lim_{a \rightarrow 0^+} \arcsin(1-a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Demak, xos bo‘lmagan integral yaqinlashuvchi.

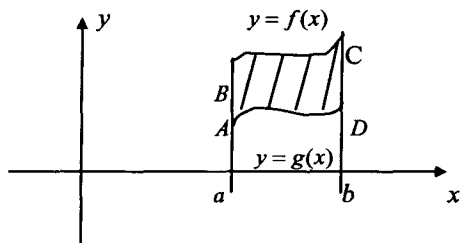
## Aniq integralning tatbiqlari

### 1. Yassi shakl yuzini hisoblash

$[a, b]$  oraliqda  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar uzluksiz bo‘lib,  $g(x) \leq f(x)$  tengsizlik o‘rinli bo‘lsin.  $X=a$  va  $x=b$  to‘g‘ri chiziqlar hamda  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiya grafiklari bilan chegaralangan S yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o‘rinlidir:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Ushbu formulani isbot qilaylik. Umumiylikka zarar keltirmasdan  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  deb olishimiz mumkin. U holda quyidagi chizmadan

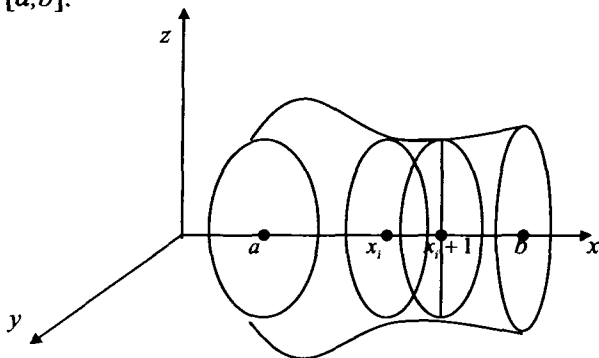


$$S = \int_{ABCD} = \int_{aBCb} - \int_{aADb} = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

## 2. Aylanish jismining hajmini hisoblash

$[a, b]$  oraliqda  $f(x)$  funksiya uzluksiz bo'lib,  $f(x) \geq 0$  tengsizlik o'rinli bo'lsin. Biz  $y=f(x)$  funksiya grafigini  $OX$  o'q atrofida aylantirishdan hamda  $OXYZ$  fazodagi  $x=a$  va  $x=b$  tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning  $V$  hajmini topish masalasini qaraymiz  $[a, b]$ .



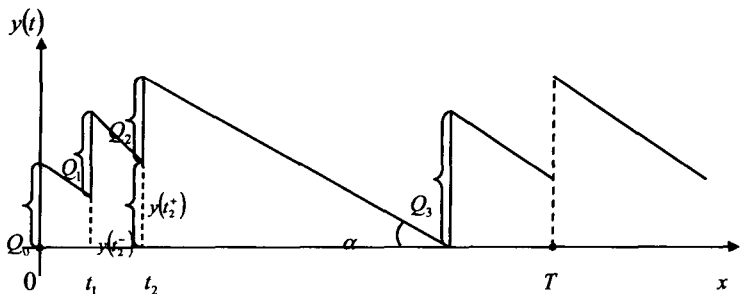
Bu masalani hal qilish uchun  $[a, b]$  oraliqni  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  nuqtalar bilan bo'laklarga ajratamiz. So'ngra  $[x_i, x_{i+1}]$  oraliqdan biron-bir  $\xi_i$  nuqtani olib,  $[x_i, x_{i+1}]$  oraliqqa mos keluvchi aylanma jism hajmining radiusi  $f(\xi_i)$  ga va balandligi  $\Delta x_i$  ga teng bo'lgan silindr hajmi bilan almashtiramiz. Ma'lumki,  $\Delta x_i \rightarrow 0$  da bu almashtirishdagi xatolik kamayib boradi.  $[x_i, x_{i+1}]$  ga mos keluvchi silindr hajmi  $\pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$  ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz: 
$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$$

Natijada ushbu 
$$V = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, aylanma jism hajmi uchun quyidagi formula o'rinlidir: 
$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

### **Aniq integralni iqtisodiyotda qo'llanilishi. Zaxiralarni boshqarishda Vilson modeli**

$y(t) - t (t \geq 0)$  vaqtdagi ma'lum mahsulotning ombordagi zaxirasi bo'lsin.  $t \geq 0$  vaqtda  $y(t) \geq 0$  bo'lsin, ya'ni omborda mahsulot tanqisligiga yo'l qo'yilmasin. Mahsulotdan  $\mu$  intensivlik bilan teng taqsimotda foydalanilsin, ya'ni  $\Delta t$  vaqtda ombordan zaxiraning  $\mu \Delta t$  qismi olinsin. Boshqa tomondan, vaqtning  $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots$  holatlarida omborga  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  miqdorda mahsulot keltirilsin. Ombordagi  $y(t)$  mahsulot zaxirasining o'zgarishini quyidagi bo'lakli-silliqlik chiziqlar bilan tasvirlash mumkin, bunda og'ma kesmalar parallel va  $\mu = tg \alpha$ .



$y(t_2^-)$  – orqali  $t_2$  navbatdagi vaqt uchun ombordagi shu vaqtgacha bo‘lgan mahsulot zaxirasini,  $y(t_2^+)$  – orqali  $t_2$  vaqtda omborga  $Q_2$  miqdordagi mahsulot keltirilgandan so‘nggi mahsulot zaxirasini belgilaylik. Demak,  $y(t_2^+) = y(t_2^-) + Q_2$ .

$s$  birlik vaqt davomida bir birlik mahsulotni saqlash uchun xarajatlar,  $g$  bir partiya mahsulot hajmini yetkazish uchun xarajatlar bo‘lsin.

U holda  $T$  vaqtdagi o‘rtacha xarajatlar

$f_T(y(t), 0 \leq t \leq T) = \frac{1}{T} (s \int_0^T y(t) dt + gn(T))$  munosabat bilan aniqlanadi, bunda

$n(T) - [0; T]$  vaqt oralig‘idagi mahsulot yetkazishlar soni.

Zaxirani boshqarish tizimini optimallashtirish uchun  $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots$  mahsulot yetkazish vaqtlarini va  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  mahsulot miqdorlarini shunday tanlash zarurki, bunda  $f_T(y)$  funksiya fiksirlangan  $T$  qiymatda minimumga erishsin. Bunda  $T$  davrni *rejalashtirish gorizonti* deyiladi.

**Ta’rif.** Agar barcha yetkazilayotgan mahsulot miqdorlari teng, ya’ni  $Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q$  va barcha vaqt oraliqlari teng, ya’ni  $\Delta t_i = \frac{Q}{\mu}, i \in N$  bo‘lsa, u holda  $Q$  mahsulot miqdorini yetkazishga mos rejaga *Vilson rejasi* deyiladi.

**Teorema.** Har qanday  $T$  vaqt uchun  $f_T(y)$  funksiya minimumga erishadigan optimal reja mavjud va u Vilson rejasidir.

$Q - [0; T]$  vaqt oralig'ida  $n(T)$  mahsulot yetkazishlar soniga mos mahsulot yetkazish hajmi bo'lsin, ya'ni  $\mu T = Qn(T)$ . U holda

$$f_T(y(t), 0 \leq t \leq T) = \frac{1}{T} \left( \frac{s\mu}{2} \cdot \frac{T^2}{n(T)} + gn(T) \right) = \frac{sQ}{2} + \frac{g\mu}{Q}.$$

Bu funksiya  $Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}$  qiymatda o'zining minimumga erishadi.

Bunda, agar  $\frac{\mu T}{Q}$  butun son bo'lsa,  $Q_0$  mahsulot yetkazishning optimal o'lchovini ifodalaydi va demak unga mos reja Vilson rejasidir.

### Mahsulot hajmi

$a$  dan  $b$  vaqtgacha  $f(t)$  mahsulot unumdorligida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi  $q = \int_a^b f(t) dt$  formula yordamida hisoblanadi.

Agar mehnat xarajatlari vaqtga chiziqli bog'liq, kapital xarajatlari o'zgarmas bo'lsa, u holda Kobb-Duglas funksiyasi  $f(t) = (\alpha + \beta)e^{rt}$  ko'rinishda bo'ladi. Bu holda  $T$  vaqtdagi ishlab chiqarilgan  $q$  mahsulot hajmi  $q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{rt} dt$  formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar  $f(t)$  vaqt birligidagi elektr energiya xarajatlari funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda  $(a, b)$  vaqtdagi elektr energiya xarajatlarini dastlabki formula bo'yicha hisoblash mumkin.

**Masalan 1.** Ishchining mehnat unumdorlik funksiyasi  $f(t) = -0.3125t^2 + 2.5t$ , bunda  $t$  vaqt, soatlarda,  $0 \leq t \leq 7$ . 15 kishidan iborat guruh bir oyda (21 kun) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini toping.

**Yechish:** Bir ishchining 1 ish kunida ishlab chiqarish mahsulot miqdorini hisoblaymiz:

$$q_1 = \int_0^7 f(t) dt = \int_0^7 (-0.3125t^2 + 2.5t) dt = \left( -\frac{5}{48}t^3 + \frac{5}{4}t^2 \right) \Big|_0^7 = 25.52 \text{ (sh.b.)}$$

15 kishilik guruhning bir oy (21 kun)da ishlab chiqarish mahsulot miqdori  $q = q_1 \cdot 21 \cdot 15 = 25.52 \cdot 21 \cdot 15 = 8038.8$  (shartli birlik)

## Diskontlash

$p$  foizli stavka bilan ma'lum  $t$  vaqtdan so'ng olingan summa oxirgi qiymati bo'yicha dastlabki qo'yilgan jamg'armani aniqlash diskontlash deyiladi.

Diskontlash masalasi kapital kiritishdagi iqtisodiy effektivlikni aniqlashda keng qo'llaniladi.

$f(t)$   $t$  vaqt bo'yicha o'zgaruvchi foydani aniqlovchi funksiya bo'lib, nisbiy foiz normasi  $i = \frac{p}{100}$  va foizlar uzluksiz qo'shib hisoblansin. Bu

holda  $T$  vaqt davomidagi diskontlash  $K$  foyda  $K = \int_a^T f(t)e^{-it} dt$  formula bo'yicha hisoblanadi.

## O'rta qiymat

Funksiya o'rta qiymatidan korxonada mulkning soliqlarini hisoblash uchun foydalaniladi. Bu soliq qiymati quyidagi tenglik yordamida hisoblanadi:

$$N = k \cdot f(c) = \frac{k}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

bunda  $k$  – korxonada turiga bog'liq koeffitsient,  $f(c)$  bir yillik mulkning o'rta qiymati,  $[a, b]$  yilga teng vaqt oralig'i. Aniq integralni bir yilni 12 o'gga bo'lib trapetsiya formulasi bilan tarqibiy hisoblash mumkin:

$$N = \frac{k}{12} \left( \frac{f(0) + f(12)}{2} + f(1) + f(2) + \dots + f(11) \right).$$

Bunda,

$f(0)$  – 1 yanvardagi mulk qiymati,

$f(1)$  – 1 fevraldagi mulk qiymati,

...

$f(11)$  – 1 dekabrda mulk qiymati,

$f(12)$  – keyingi yilning 1 yanvaridagi mulk qiymati.

Iqtisodda ko'pincha o'rta qiymatlarni bilish muhim ahamiyatga ega. Bu kabi masalalar o'rta qiymat haqidagi teorema yordamida hal etiladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \text{ bunda } C \in [a; b].$$

Bundan  $f(x)$  funksiyaning  $[a; b]$  oraliqdagi  $f(c)$  o'rtta qiymati  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  formula yordamida hisoblanishi kelib chiqadi.

**Masalan 2.** Agar mahsulot hajmi 2 dan 4 shartli birlikkacha o'zgarganda xarajatlar funksiyasi  $C(x) = 3x^2 + 4x + 2$  bo'yicha mahsulot ishlab chiqarish va xarajat uchun o'rtta qiymatni toping, bunda  $x$  – mahsulot hajmi, shartli birlikda.

Xarajatlar o'rtta qiymatni qabul qilgandagi mahsulot ishlab chiqarish hajmini ko'rsating.

**Yechish:** O'rtta qiymat formulasidan foydalanamiz:  $a=2$ ,  $b=4$ ,  $f(x)=C(x)$ .

$$C_{o'r} = \frac{1}{4-2} \int_2^4 (3x^2 + 4x + 2)dx = \frac{1}{2} (x^3 + 2x^2 + 2x) \Big|_2^4 = 42$$

Demak, o'rtacha xarajatlar 42 kun birlik.

O'rtacha xarajatlarga mos ishlab chiqarish hajmini topish uchun  $C(x)=42$  tenglamani yechib  $x \geq 0$  yechimini olamiz:  $3x^2 + 4x + 2 = 42$ ,  $3x^2 + 4x - 40 = 0$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -\frac{13}{3}$ .

Demak,  $x=3$  shartli birlik mahsulot ishlab chiqarishga o'rtacha xarajatlar mos keladi.

**Masalan 3.** Chegaraviy daromad funksiyasi  $R'(x) = 20 - 0.04x$  ga ko'ra daromad va talab funksiyalarini toping.

**Yechish:** Daromad funksiyasi:  $R(x) = \int (20 - 0.04x)dx = 20x - 0.02x^2 + C$ .  
 $R(0) = 0$  shartidan  $C = 0$  kelib chiqadi.

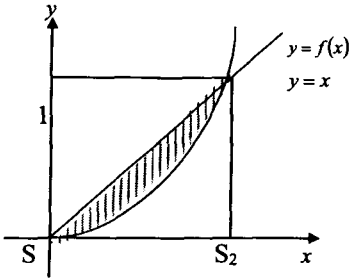
Demak,  $R(x) = 20x - 0.02x^2$ . Agar har bir ishlab chiqarilgan mahsulot  $p$  pul birligida sotilsa, daromad  $R = x \cdot p$  formula bo'yicha hisoblanadi. Demak,  $p(x)$  talab funksiyasini topish uchun daromadni  $x$  mahsulot miqdoriga nisbatini olamiz:

$$p(x) = \frac{R}{x}, \quad p = 20 - 0.02x.$$



## Daromadning notekis taqsimoti koeffitsienti

$y=f(x)$  funksiyasini qaraymiz, bunda  $y$  bu umumiy daromadning kam ta'minlangan aholi oladigan ulushi. Masalan,  $y(0,8)=0,6$  tenglik umumiy daromadning 60% ni 80% kam ta'minlangan aholi oladi. Tabiiyki,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $y \leq x$ .  $y(0)=0$ , ya'ni nol daromadli aholi yo'q va  $y(1)=1$ , ya'ni butun daromad butun aholidan undiriladi.



Rasmda  $y=f(x)$  funksiya grafigi keltirilgan. U Lorenz egri chizig'i deyiladi. Agar daromad taqsimoti mukammal bo'lsa, u holda umumiy daromadning 10% ni 10% aholi olgan 20% ni 20% aholi olgan va h.k. bo'lardi. Bu holda daromad taqsimoti  $y=x$  egri chiziq bo'lardi.

Haqiqiy daromad taqsimotining ideal taqsimotdan og'ishi  $y=x$  va  $y=f(x)$  Lorenz chizig'i bilan chegaralangan soha yuzi  $L$  ning  $y=x$ ,  $x=0$  va  $x=1$  chiziqlar bilan chegaralangan soha yuziga nisbati bilan o'lchanadi va u odatda daromadning notekis taqsimoti (Jini) koeffitsienti deyiladi.  $0 \leq L \leq 1$  ekanligi ravshan.  $L=0$  qiymat daromad taqsimoti mukamalligini bildiradi.

**Masalan 4.** Lorenz chizig'i  $y=1-\sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) ekanligini bilgan holda *Jini koeffitsientini* hisoblang. (Bu yerda,  $x$  - aholi ulushi,  $y$  - shu aholining daromadi ulushi.)

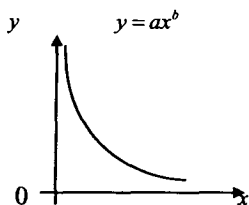
**Yechish:**  $k = \frac{S_1}{S_A} = 1 - \frac{S_2}{S_A}$ ,  $S_A = \frac{1}{2}$  ekanligidan  $k = 1 - 2S_2$ . Demak,

$$k = 1 - 2 \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx = 1 - 2 \cdot (x_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx) = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - 1. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

## Hisob chizig'i

Ko'pincha qo'shimcha miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha vaqt kerakligini bilish muhim hisoblanadi. Shu kabi hisoblarda hisob chizig'i deb ataluvchi chiziqdan foydalaniladi.

$T=F(x)$  birinchi  $x$  birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan vaqt, odatda, soat o'lchovida bo'lsin. U holda  $f(x)=F'(x)$ ,  $(x+1)$  dagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun zarur vaqtni anglatadi. Odatda  $f(x)=ax^b$  ko'rinishidagi funksiya qo'llaniladi, bunda  $a > 0$ ,  $-1 \leq b < 0$ .

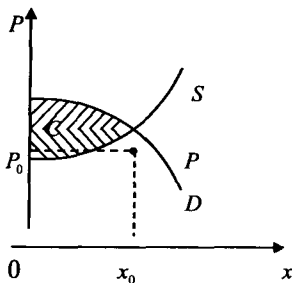


$y=ax^b$  hisob chizig'i.  $y=f(x)$  kamayuvchi funksiyadir, chunki biror amalni bajarish uchun zarur vaqt takrorlashlar soni ortishi bilan kamayadi.  $(n_1+1)$  dan  $n_2$  ta birlik mahsulot ishlab chiqish uchun zarur  $\Delta T$  vaqt

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x) dx \text{ formula yordamida hisoblanadi.}$$

### Iste'molchi va yetishtiruvchining yutug'i

$P=f(x)$  ma'lum mahsulotga bo'lgan talab  $D$  egri chizig'i va  $p=g(x)$  taklif  $S$  egri chizig'i bo'lsin;  $(x_0; p_0)$  bozorning muvozanat nuqtasi bo'lsin.



Ba'zi iste'molchilar bu mahsulotni  $P > P_0$  narxda xarid qilishlari mumkin.  $P_0$  muvozanat narxga nisbatan iste'molchining yutug'ini topamiz. Buning uchun  $[0; x_0]$  oraliqni  $n$  ta qismlarga bo'lamiz:

$0 = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_n = x_0$ . Har bir oraliqdan  $\bar{x}_i \leftarrow [\bar{x}_{i-1}; \bar{x}_i]$  nuqta olamiz.  $i = \overline{1, n}$ .  $i$ -oraliqdagi iste'molchi yutug'i.

$(P(x_i^*) - P_0) \cdot \Delta x_i$ , bunda  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  bo'ladi. Barcha yutuqlarni yig'ib

$$\sum_{i=1}^n (P(x_i^*) - P_0) \Delta x_i \text{ iste'molchining yutug'ini aniqlaymiz.}$$

Agar talab funksiyasi uzluksiz bo'lsa, va  $n \rightarrow \infty$ , shu bilan birga  $\max(\Delta x_i) \rightarrow 0$ , u holda bu interval yig'indi limit qiymatga ega bo'lib, u  $\int_0^{x_0} (f(x) - P_0) dx$  ga teng.

Demak, iste'molchining yutug'i  $C = \int_0^{x_0} f(x) dx - P_0 \cdot x_0$ . Xuddi shu kabi yetkazuvchining yutug'i  $P = P_0 \cdot x_0 - \int_0^{x_0} g(x) dx$  keltirib chiqariladi.

Iste'molchining yutug'i  $D$  taklif funksiyasi va  $P = P_0$  t/ch bilan chegaralangan soha yuziga, yetkazuvchi yutug'i  $P = P_0$  t/ch va  $S$  taklif egri chizig'i orasidagi yuzaga teng.

**Masalan 5.**  $P = 116 - x^2$  talab va  $p = \frac{5}{3}x + 20$  taklif funksiyasiga ko'ra iste'molchi va yetkazuvchi yutug'ini bozor muvozanat nuqtasiga nisbatan aniqlang.

**Yechish:** Bozorning muvozanat nuqtasini aniqlaymiz:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20, \quad 3x^2 + 5x - 2 = 8, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = -\frac{32}{3}.$$

$$x_0 = 9, \quad P_0 = 35, \quad P_0 \cdot x_0 = 35 \cdot 9 = 315$$

$$\text{Iste'molchi yutug'i: } C = \int_0^9 (116 - x^2) dx - 315 = \left( 116x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^9 - 315 = 486$$

Yetkazuvchi yutug'i esa:

$$P = 315 - \int_0^9 \left( \frac{5}{3}x + 20 \right) dx = 315 - \left( \frac{5}{6}x^2 + 20x \right) \Big|_0^9 = 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 + 180 = 67,5$$

### Kapital o'zgarishi

Agar  $I(t)$  investitsiya o'zgarishi funksiyasi,  $A(t)$  korxonaga kapitali bo'lsa, u holda  $I(t) = \frac{dA}{dt}$ .

Investitsiya o'zgarishini bilgan holda korxonaga kapitali o'zgarishini aniqlash mumkin:  $\Delta A = \int_a^b I(t) dt$ .

## 10. Qatorlar

### Musbat hadli sonli qatorlar

**Ta'rif.** Sonli  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots \quad (1)$$

ifodaga *sonli qator* deyiladi.

Bu yerda,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  qator hadlari,  $a_n$  esa qatorning umumiy hadi deyiladi. Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan sanoqli sondagi qo'shiluvchilar yig'indisi bilan aniqlanar ekan.

(1)-ifoda qatorning dastlabki chekli sondagi hadlaridan tuzilgan

$$\text{Ushbu } S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

yig'indilarga, shu qatorning *xususiy yig'indilari* deyiladi.

Agar qator hadlari sanoqli ekanligini e'tiborga olsak  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  xususiy yig'indilar ham o'z navbatida sonli ketma-ketlikni tashkil etishini ko'ramiz.

**Ta'rif.** Agar xususiy yig'indilarning  $\{S_n\}$  ketma-ketligi  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  chekli limitga ega bo'lsa, u holda ushbu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator, limit  $S$  esa qator yig'indisi deyiladi va  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  (2)

ko'rinishda yoziladi.

**Ta'rif.** Agar  $\{S_n\}$  ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) *uzoqlashuvchi qator* deyiladi.

**Masalan 1.** Quyidagi qator tekshirilsin:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Avval xususiy yig'indilarni ko'raylik:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Bundan  $S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \leftrightarrow S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 < \infty$  hosil qilamiz.

Demak  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi  $S=1$  ekan.

**Masalan 2.** Bizga avvaldan tanish bo'lgan, cheksiz geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan qatorni ko'raylik:

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}, (b \neq 0) \quad (3)$$

Uning dastlabki  $n$  ta hadlari yig'indisi  $S_n = \frac{b + bq^n}{1 - q} = \frac{b}{1 - q} + \frac{b}{1 - q} q^n$  formula bilan aniqlanadi.

(3)-qator yig'indisi uchun oldingi tasdiqlar bevosita  $q$  ga bog'liqdir.

1) agar  $|q| < 1$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  bo'lgani sababli  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q}$  chekli limitga ega bo'lamiz. Ya'ni  $|q| < 1$  bo'lganda (3)-ifoda yaqinlashuvchi qator bo'lib, uning yig'indisi  $S = \frac{b}{1 - q}$  formula bilan hisoblanadi.

2) agar  $|q| > 1$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$  ekanligi ravshan. Shu sababli,  $q < -1$  da  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  mavjud bo'lmaydi,  $q > 1$  da  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  bo'lib, (3)-ifoda uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

3) agar  $q = 1$  desak,  $S_n = b + b + \dots + b = b \cdot n$  ko'rinishni oladi. Bu holda ham  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  bo'lgani sababli (3)-ifoda uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

4) agar  $q = -1$  deb olinsa (3)-ifoda qator

$$b - b + b - b + \dots + (-1)^{n-1} b + \dots$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday qator uchun  $S_n = S_{2m} = 0, S_n = S_{2m+1} = b, (m = 1, 2, 3, \dots)$ . Bu esa  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  mavjud emasligini bildiradi. Shuning uchun  $q = -1$  bo'lgan holda ham (3)-ifoda uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

Qatorlar nazariyasini bayon qilishni yaqinlashuvchi qatorlarning ba'zi sodda xossalari keltirishdan boshlaymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

qator berilgan bo'lsin. Uning hadlaridan tuzilgan  $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$  ko'rinishdagi qatorga (1)-qatorning  $m$  qoldig'i deyiladi. U ham o'z navbatida qatordir.

**1-teorema.** Agar (1)-qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va, aksincha, qator qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

*Isbot:* Agar (1)-qator uchun  $S_{m+k}$  xususiy yig'indi olsak

$$S_{m+k} = \sum_{n=1}^{m+k} a_n = \sum_{n=1}^m a_n + \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n = S_m + S_k^*, S_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$$

munosabat hosil bo'ladi va  $S_k^*$  ni  $m$  qoldiq qatorning  $k$  xususiy yig'indisi deb qaraymiz.

Teorema shartiga ko'ra (1)-qator yaqinlashuvchiligidan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^* = \lim_{k \rightarrow \infty} [S_{m+k} - S_m] = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{m+k} - S_m = S - S_m.$$

Bundan  $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$  qoldiq qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Qoldiq qator yaqinlashuvchi bo'lsin (bu yig'indi  $R_m$  bo'lsin).

Bu holda  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{m+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [S_m + S_k^*] = S_m + \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^* = S_m + R_m < \infty$ .

Demak, (1)-qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremlarni isbotsiz keltirishni lozim topdik.

**2-teorema.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi  $S$

bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n$  qator ham yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi,  $k \cdot S$  ga teng bo'ladi.

Bu teoremani quyidagicha talqin etish mumkin.

Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'lsa  $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bo'ladi, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini cheksiz yig'indi belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

**3-teorema.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo'lib,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  tenglik o'rinli bo'ladi.

Qatorlar soni chekli bo'lganda ham teoremaning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

**4-teorema.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'lsa, had tartib raqami cheksiz o'sib borganda qator umumiy hadi  $a_n$  nolga intiladi, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Isbot:*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi bo'lgani uchun,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ .

Agar  $S_n - S_{n-1} = a_n$  tenglikni e'tiborga olsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n - S_{n-1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

*Natija:* Agar (1)-qator uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  shart bajarilmasa, u holda (1)-qator uzoqlashuvchidir.

**Masalan 3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$  uzoqlashuvchi qatordir, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1 \neq 0$$

Ta'kidlab o'tamizki  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  bo'lishi qator yaqinlashishining faqat zaruriy sharti bo'la oladi. Ya'ni  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Lekin  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  bo'lganda, har doim ham  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'lavermaydi.

Masalan,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4} + \dots$  gormonik qator uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$  shart bajarilsada, bu gormonik qator uzoqlashuvchi qatordir. (Biz bu tasdiqning isbotini keyinroq keltiramiz).

Agar asosiy maqsadimiz yaqinlashuvchi qatorlarni va ularning yig'indisini aniqlash deb hisoblasak, bundan buyon  $n \rightarrow \infty$  da umumiy hadi nolga intiladigan  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  qatorlar bilan ish ko'rishligimiz ayon bo'lib chiqadi.

Agar qator yaqinlashishi va uzoqlashishi haqidagi ta'riflarga e'tibor bersak, bunday masalaga  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ni tekshirish orqali javob olishimiz mumkin. Biroq har qanday qator uchun ham  $S_n$  xususiy yig'indini tekshirish oson bajarilmaydi. Hatto,  $S_n$  ning ifodasini soddalashtirib olganda ham ushbu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  limitni hisoblash ma'lum qiyinchiliklarga olib keladi.

Bunday qiyinchiliklardan qutilish maqsadida, qatorlar nazariyasi ishlab chiqilgan.

### Musbat hadli qatorlar

**Ta'rif.** Agar barcha  $n=1,2,3,\dots$  lar uchun  $a_n > 0$  bo'lsa,  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  musbat hadli qator deyiladi.

Bizga ikkita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin.

**5-teorema.** Agar barcha  $n=1,2,3,\dots$  lar uchun  $a_n \leq b_n$ , bo'lib  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  yaqinlashsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

*Isbot:* Qatorlarning xususiy yig'indilarini mos ravishda



$$S_{a_n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_{b_n} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

deb belgilaylik. Teorema shartiga ko'ra  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  yaqinlashuvchi, ya'ni

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{b_n} = S_b < \infty$ . Lekin,  $S_{a_n} \leq S_{b_n} \leq S_b$  tengsizlik o'rinalidir. Bundan  $\{S_{a_n}\}$  monoton o'suvchi ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki, har qanday chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik chekli limitga ega. Shu sababli,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{a_n} = S_a < \infty$ .

Demak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot qilindi.

**Masalan 4.** Quyidagi:  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$  qator yaqinlashuvchi qatordir. Haqiqatan agar:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qatorni olsak, bu qatorlar uchun  $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$ ; ( $n=1,2,3,\dots$ )

Ya'ni ikkinchi qator ikkinchi hadidan boshlab, birinchi hadi  $\frac{1}{2^2}$  va maxraji  $q = \frac{1}{2}$  bo'lgan, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indisidan iborat. Shu sababli, bu qator yaqinlashuvchi

qator bo'lib, yig'indisi  $1 + \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \frac{1}{2}$  ga tengdir.

**6-teorema.** Agar barcha  $n=1,2,3,\dots$  lar uchun  $a_n \leq b_n$  bo'lib,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uzoqlashuvchi bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ham uzoqlashuvchi qatordir.

**Masalan 5.**  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$  qator tekshirilsin.

**Yechish:**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  gormonik qatorni olaylik. Barcha  $n=1,2,3,\dots$ lar uchun  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  hamda gormonik qator uzoqlashuvchi

qatoridir. Shuning uchun 6-teoremaga asosan, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

Qator yaqinlashishi yoki uzoqlashishini boshqa qatorlarga taqqoslamasdan, balki uning hadlaridan tuzilgan ba'zi ko'rinishdagi ifodalarning  $n \rightarrow \infty$  dagi limiti qiymatiga qarab, aniqlovchi alomatlar ishlab chiqilgan. Shulardan ba'zilarini keltirib o'tamiz.

**Dalamber alomati.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  musbat hadli qator bo'lib  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$  limit mavjud bo'lsin.

- 1) agar  $b < 1$  bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;
- 2) agar  $b > 1$  bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

*Isbot:* Teorema shartiga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ .

Ya'ni, har qanday yetarlicha kichik musbat  $\varepsilon$  son olinmasin, shunday  $n_0$  topiladiki, undan kichik bo'lmagan  $n$  lar uchun

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - b \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni  $b - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < b + \varepsilon$ ,  $n \in N$ ,  $n \geq n_0$

1)  $b < 1$  bo'lsin. Biz  $\varepsilon$  sonni shunday tanlab olamizki, bunda  $b + \varepsilon < 1$  shart bajariladi. Agar  $b + \varepsilon = q$  desak,  $0 < q < 1$  bo'ladi. O'z navbatida  $n \geq n_0$  lar uchun  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ , ya'ni  $a_{n+1} < a_n q$  tengsizlikka ega bo'lamiz.

Oxirgi tengsizlikni  $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$  lar uchun yozsak, quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &< a_{n_0} q \\ a_{n_0+2} &< a_{n_0+1} q < a_{n_0} q^2 \\ a_{n_0+3} &< a_{n_0+2} q < a_{n_0} q^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Qaralayotgan qatorning, ushbu  $a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \dots$

$n$  - qoldig'ini qarasaq, uning hadlari  $C_n = a_{n_0} q^n$  - geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan ushbu  $a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 + a_{n_0} q^3 + \dots$

qatorning mos hadlaridan kichikdir.  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  qator,  $0 < q < 1$  bo'lgani sababli yaqinlashuvchi qatordir. U holda solishtirish teoremasiga ko'ra  $n_0$  qoldiq qator va undan esa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

1) Endi  $b > 1$  bo'lsin. Biz  $\varepsilon > 0$  shunday tanlab olamizki  $b - \varepsilon > 1$  bo'ladi. U holda  $n \geq n_0$  lar uchun  $a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \dots$ .

Bu munosabatlar qaralayotgan musbat qator hadlari o'sib borishligini hamda  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ekanligini ko'rsatadi. Bu esa qator yaqinlashining zaruriy sharti bajarilmayotganligini bildiradi. Demak,  $b > 1$  bo'lganda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uzoqlashuvchi qator ekan.

*Eslatma.* Agar  $b = 1$  bo'lib qolsa, qatorlarning ba'zilari yaqinlashuvchi bo'lsa, ba'zilari uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak, Dalamber alomatini  $b = 1$  da qo'llab bo'lmaydi.

Bunday hollarda qatorni boshqa alomatlar yordamida tekshirish zarur.

**Masalan 6.** Ushbu  $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$  qatorni yaqinlashuvchi qator sifatida tekshiring.

*Yechish:* Qatorning umumiy hadi  $a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{n!}{(2n-1)!!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{(2n-1)!(2n+1)} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

**Koshi alomati.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) qator uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$  bo'lsin.

U holda:  $q < 1$  bo'lganda qator yaqinlashuvchi,  $q > 1$  bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu yerda ham  $q = 1$  bo'lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.

**Masalan 7.**  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \dots$  qator tekshirilsin.

*Yechish:* Qatorning umumiy hadi  $a_n = \frac{1}{\ln^n(n+1)}$  ko'rinishga ega.

$$\text{Bundan, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

**Masalan 8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(4n-1)}{(n+2)} \right)^n$  qator tekshirilsin.

**Yechish.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+2} = 4 > 1$ , ya'ni berilgan qator uzoqlashuvchi.

**Koshining integral alomati.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sonli qator berilgan bo'lsa, uning umumiy hadini natural sonlar to'plamida aniqlangan  $a_n = f(n)$  funksiya deb qarash mumkin, ya'ni  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ .

Keyinchalik  $f(x)$  funksiyani  $[1; \infty)$  oraliqda qaraymiz.

**7-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x \geq 1$  bo'lganda musbat uzluksiz funksiya bo'lib,  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'ladi va ushbu xos bo'lmagan integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

**Masalan 9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  qatorning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

**Yechish:** Qator umumiy hadi  $a_n = f(n) = \frac{1}{n^2}$  ko'rinishda.

Qatorga mos keluvchi xos bo'lmagan integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \int_1^N \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{N} + 1 \right] = 1 < +\infty.$$

Demak,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  yaqinlashuvchi qatordir.

**Masalan 10.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  gormonik qator uzoqlashuvchi qatordir.

**Ibot:** Qator umumiy hadi  $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$

Bunga ko'ra:  $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln x \int_1^N \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} [\ln N + 0] = \infty$ .

Shunday qilib,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  gormonik qator uzoqlashuvchi qator ekan.

**Masalan 11.** Qator yig'indisini toping:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

**Yechish:** Qatorning  $n$  xususiy yig'indisi

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Bundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , ya'ni berilgan qatorning yig'indisi  $S=1$ .

**Masalan 12.** Qatorning yaqinlashishini tekshiring:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ .

**Yechish:**  $a_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = b_n + c_n$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  qatorlar

maxraji  $q < 1$  bo'lgan geometrik progressiya tashkil qilgani uchun yaqinlashadi. Ularning yig'indisi mos ravishda

$S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{2}$ ,  $S_c = 1$ . Shuning uchun qator yaqinlashadi va yig'indisi 1,5 ga

teng.

**Masalan 13.** Qatorning yaqinlashishini tekshiring:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$ .

**Yechish:** Qator umumiy hadini sodda kasrga yoyamiz:

$$a_n = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{4\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

U holda  $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}$

Qator yig'indisi esa  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right] = \frac{1}{3}$ .

**Masalan 14.** Qatorning yaqinlashishini tekshiring:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$

**Yechish:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ ,  $\ln n < n$ ,  $-\ln n > -n$ .  $n^2 - \ln n > n^2 - n$ .

$$a_n = \frac{1}{n^2 - \ln n} < \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = b_n. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Demak, berilgan qator ham yaqinlashuvchi.

**Masalan 15.** Qatorning yaqinlashishini tekshiring:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^n.$$

**Yechish:**  $a_n = \left( \frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^n.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n \cdot \ln \frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \frac{6}{12}}{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\ln 2} = 0 < 1.$$

Qator yaqinlashuvchi.

### Ishorasi almashuvchi qatorlar

Agar  $\{a_n\}$  ketma-ketlik elementlari musbat bo'lsa

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \tag{4}$$

ko'rinishidagi qator ishorasi *almashuvchan qator* deyiladi.

**8-teorema (Leybnis teoremasi).** Agar (4)-qator ishorasi almashuvchan qatorda  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$  bo'lib, uning umumiy hadi nolga intilsa ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ), u holda (4)-qator yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

*Isbot:*  $S_n$  bilan (4)-qator xususiy yig'indisini belgilaymiz. Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  chekli ekanligini ko'rsata olsak teorema isboti kelib chiqadi.

Avval:  $S_{2m}$  xususiy yig'indini olib, uni

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

ko'rinishda yozib olamiz. Teorema shartidan  $a_{k-1} - a_k > 0$  va  $S_{2m} > 0$  hamda  $S_{2m}$  ketma-ketlik o'suvchiligini aniqlaymiz.

Shu bilan birga  $S_{2m}$  yig'indi uchun

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \text{ Demak, } S_{2m} < a_1.$$

Shunday qilib,  $\{S_{2m}\}$  yuqoridan chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik ekan. Bunday  $S_{2m}$  ketma-ketlik  $m \rightarrow \infty$  da chekli  $S$  limit ega bo'ladi, ya'ni  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ .

Ushbu  $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$  tenglikdan va teoremaning  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$  shartidan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S \text{ tenglik kelib chiqadi.}$$

Shunday qilib,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$ . Demak, (4) yaqinlashuvchi qatordir.

**Masalan 1.**  $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots$  qator yaqinlashuvchi qatordir.

Chunki, 1)  $\frac{1}{3} > \frac{2}{9} > \frac{1}{9} > \frac{4}{81} > \dots$  2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$ .

Demak, Leybnis teoremasi shartlari bajariladi.

### Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

Bizga hadlari ixtiyoriy sonlardan tashkil topgan, ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (5)$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlari modullaridan iborat bo'lgan, ushbu

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (6)$$

qatorni qaraymiz.

**9-teorema.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

*Isboti:* Yordamchi qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \dots \quad (7)$$

Modul xossasiga ko'ra  $0 < a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, n = 1, 2, 3, \dots$  bo'lib,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  qator yaqinlashuvchiligiga asosan,  $\sum_{n=1}^{\infty} (2|a_n|)$  qator ham yaqinlashuvchi qator bo'ladi. O'z navbatida taqqoslash teoremasiga ko'ra (7)-qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

tenglikdan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.

Shunday holatlar bo'ladiki  $\sum a_n$  yaqinlashuvchi, ammo  $\sum |a_n|$  uzoqlashuvchidir. Bunday hollarni tartibga keltiruvchi ayrim tushunchalarni kiritamiz.

**Ta'rif.** Agar berilgan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator hamda uning hadlari modullaridan tuzilgan  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  qator ham yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\sum a_n$  *absolyut yaqinlashuvchi qator* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yaqinlashuvchi qator bo'lib,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  uzoqlashuvchi bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qator *shartli yaqinlashuvchi qator* deyiladi.

**Masalan 2.**  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  qator tekshirilsin.

**Yechish:** Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo'lib, Leybnis teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin uning hadlari modullardan tuzilgan:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  qator gormonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma'lum. Shu sababli,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  shartli yaqinlashuvchi qator ekan.



**Masalan 3.** Qatorning yaqinlashishini tekshiring:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

**Yechish:** Ma'lumki, bu qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashadi.

Qator hadlarining o'rnini almashtirib, quyidagicha guruhlaymiz:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

yoki  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right),$

ya'ni qator hadlari o'rnini almashtirishdan uning yig'indisi 2 marta kamaydi. Ko'rsatish mumkinki (Riman teoremasi) shartli yaqinlashuvchi qator hadlari o'rnini almashtirish bilan oldindan berilgan ixtiyoriy yig'indini, hatto uzoqlashuvchi qatorni hosil qilish mumkin.

### Darajali qatorlar

**Ta'rif.** Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  ko'rinishdagi qatorlarga *funksional qator* deyiladi.

**Misollar:** 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x = \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \dots,$

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots$

**Ta'rif.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$  (8)

ko'rinishdagi funksional qatorga *darajali qator* deyiladi.

Bu yerda,  $a_n$  darajali qator *koeffitsientlari* deyiladi.

**Misollar:** 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots$

Funksional qator uchun asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash, bu holat sonli qatornikidan farqlidir. Darajali qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi asosan  $x$  o'zgaruvchining qanday qiymat qabul qilishiga bevosita bog'liq bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar (8) qator  $x = x_1$  bo'lganda yaqinlashsa, u holda (8)-darajali qator  $x = x_1$  nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

**Ta'rif.**  $x$  o'zgaruvchining  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  darajali qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu *darajali qatorning yaqinlashish sohasi* deyiladi va  $D(\Sigma)$  bilan belgilanadi.

**Masalan 1.** 
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

darajali qator  $x$  o'zgaruvchining  $(-1, 1)$  oraliqdan olingan har bir qiymatida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, bu qator uchun  $D(\Sigma) = (-1, 1)$ . Ta'kidlash lozimki, ixtiyoriy darajali qatorning yaqinlashish sohasi bo'sh emas, chunki har qanday darajali qator hech bo'lmaganda  $x=0$  da chekli yig'indiga ega.

**10-teorema (Abel teoremasi).** Agar (1)-darajali qator biror  $x=x_0$  da yaqinlashsa, u holda bu qator  $|x| < |x_0|$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  larda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

*Isboti:* Bu yerda,  $x_0 \neq 0$  deb qarash kerak, chunki  $x_0 = 0$  bo'lsa,  $|x| < 0$  shartni qanoatlantiruvchi to'plam bo'sh to'plamdir.

Teorema shartiga ko'ra,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$  sonli qator yaqinlashuvchi. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy shartiga asosan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ . U holda shunday  $c > 0$  sonni topa olamizki, barcha  $n=1, 2, 3, \dots$  uchun  $|a_n x_0^n| < c$  bo'ladi.

Endi  $|x| < |x_0|$  shartli qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x$  ni olib,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < c \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

tengsizlikni e'tiborga olsak, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisi bo'lgan  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  qator yaqinlashuvchiligidan, solishtirish teoremasiga asosan (8)-qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (8)-darajali qator  $|x| < |x_0|$  shartni bajaruvchi barcha  $x$  larda absolyut yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Quyidagi natija ham o'rinlidir. Agar biror  $x=x_0$  qiymatda (8)-darajali qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda  $|x| > |x_0|$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  larda (8)-qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu tasdiqlar darajali qatorning yaqinlashish va uzoqlashish nuqtalari to'plamlarini aniqlashga yordam beradi.

Xususan: (8)-qator  $x=x_0$  da yaqinlashuvchi bo'lsa,  $y(-|x_0|; |x_0|)$  intervalda yaqinlashuvchi, shuningdek  $x=x_0$  da uzoqlashuvchi bo'lsa, (8)-qator  $(-\infty; -|x_0|)$  va  $(|x_0|; \infty)$  intervallarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

**11-teorema.** Agar (8)-darajali qator  $x$  ning ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda yagona shunday  $M > 0$  son topiladiki, (8)-darajali qator  $x$  ning  $|x| < M$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi,  $x$  ning  $|x| > M$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema yordamida topilgan  $M$  soniga (8)-darajali qatorning *yaqinlashish radiusi*,  $(-M, M)$  interval esa uning *yaqinlashish intervali* deyiladi.

Quyidagilarni eslatib o'tamiz.

Qatorning berilishiga qarab  $M$  chekli son yoki  $R=\infty$  bo'lishi mumkin. Ya'ni shunday darajali qatorlar borki, ular  $(-\infty, \infty)$  da yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Agar  $M$  chekli son bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  yoki  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$  formula bilan aniqlanadi. Umuman darajali

qatorning yaqinlashish radiusi  $R$  bilan belgilanadi ( $\mu = R$ ).

Agar  $R$  chekli son bo'lsa, Abel teoremasidan (8)-darajali qatorning  $D(\Sigma) = (-R; R)$  sohada yaqinlashishi kelib chiqsada,  $x = -R$  va  $x = R$  da qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ochiq qoladi. Bu masala har bir darajali qator uchun alohida-alohida ko'rib chiqiladi.

**Masalan 2.**  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$  qatorning yaqinlashish radiusi aniqlansin.

**Yechish:** Berilgan qatorda  $a_n = 1, n = 1, 2, 3, \dots$   $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ .

**Masalan 3.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$  qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

**Yechish:** Bu yerda,  $a_n = \frac{1}{n!}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$  ekanligidan

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

**Masalan 4.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$  qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

**Yechish:** Berilganiga ko'ra  $a_n = \frac{1}{n+2}$  u holda  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 1$ .

Agar  $x=1$  desak qator  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

ko'rinishni oladi. Bu qator uzoqlashuvchi qatordir.

Endi  $x=-1$  deb olsak,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

ko'rinishdagi ishorasi almashuvchan qatorga ega bo'lamiz. Leybnis teoremasi shartlari bajarilganligi uchun bu qator yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib qaralayotgan darajali qator  $(-1, 1)$  da absolyut yaqinlashuvchi,  $[-1; 1)$  da yaqinlashuvchi,  $|x| > 1, x \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$  da uzoqlashuvchidir.

## Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash

Darajali qatorlar muhim amaliy xususiyatlarga ega. Shu sababli, ularning ba'zi xossalarini o'rganamiz. Ushbuni anglash qiyin emas, chunki darajali qator o'zining  $(-R; R)$  yaqinlashish sohasida  $x$  o'zgaruvining  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  funksiyasini aniqlaydi.

Bu  $f(x)$  funksiya  $(-R; R)$  yaqinlashish sohasida uzluksiz bo'lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga  $f'(x)$  hosila yuqoridagi qator hadlarining hosilalari yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}.$$

Xuddi shuningdek,  $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$ ,  $f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$

va hokazo. Bu xossa, odatda «darajali qatorni hadma-had differensiallash» xossasi deb yuritiladi.

Shu kabi «Darajali qator yig'indisining integrali, qator hadlari integrallarining yig'indisiga tengdir» mazmundagi xossa ham o'rinlidir.

Ya'ni  $(-R; R)$  oraliqdan olingan har qanday  $x$  uchun

$$\int f(x) dx = C + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \dots$$

### Taylor va Makloren qatorlari

Yuqorida  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  darajali qator, o'zining yaqinlashish sohasi  $(-R; R)$  da uzluksiz  $f(x)$  funksiyani ifodalab, shu oraliqda  $f(x)$  funksiya istalgan tartibli hosilaga ega bo'lishi keltirilgan edi.

Endi biror oraliqda istalgan tartibli hosilaga ega bo'lgan  $y=f(x)$  funksiyani darajali qatorga yoyish masalasini o'rganaylik.

«Taylor formulasi» deb ataluvchi, ushbu formula

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (9)$$

o'rinlidir. Bu yerda,  $R_n(x)$  qoldiq had.

**Ta'rif.** Agar  $y=f(x)$  funksiya  $x=x_0$  nuqtaning biror atrofida istalgan tartibli hosilaga ega bo'lsa:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (10)$$

ko'rinishdagi qator  $f(x)$  funksiyaning *Taylor qatori* deyiladi.

Agar e'tibor bersak, bu qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan darajali qator ekanligini ko'ramiz. Uning koeffitsientlari  $f(x)$  funksiya va uning hosilalarining  $x=x_0$  nuqtadagi qiymatlar orqali ifodalangan.

O'rni kelganda (10) ga  $y=f(x)$  funksiyaning  $x=x_0$  nuqta atrofidagi *Taylor qatoriga yoyilmasi* deb ham ataladi.

Agar (10) da  $x_0=0$  deb olinsa, ushbu qator

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

*Makloren qatori* deb ataladi. Bu kabi qatorlardan funksiyalarning qiymatlarini hisoblashda keng foydalaniladi.

Agar funksiya uchun formal holda Taylor yoki Makloren qatori yozilgan bo'lsa, bu qator berilgan funksiyaning ifodalashini isbot qilish uchun qoldiq hadining nolga intilishini isbotlash yoki bu qatorning qaralayotgan funksiyaga yaqinlashishini boshqa biror usul bilan ko'rsatish kerak bo'ladi.

Ba'zi elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalarini keltiramiz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Bu qatorlarning har biri uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  bo'lgani sababli,  $x$  ning har qanday qiymatida, ya'ni  $x \in (-\infty; \infty)$  da yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$  funksiyalarni ifodalaydi.

Funksiya yoyilmasini ifodalovchi Teylor yoki Makloren qatorining yaqinlashish sohasi funksiyaning aniqlashish sohasidan farqli (uning ma'lum qismi) bo'lishi mumkin.

**Masalan 5.**  $f(x) = \ln(1+x)$  funksiya uchun  $D(f) = (-1; +\infty)$  bo'lsa,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$  qator faqat  $(-1; 1)$  oraliqda o'rinlidir.

**Masalan 6.** Qatorning yaqinlashish sohasini toping:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$ .

**Yechish:**  $u_n(x) = \sin \frac{x}{2^n}$ ;  $u_{n+1}(x) = \sin \frac{x}{2^{n+1}}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \frac{x}{2^{n+1}}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right| < 1$ , chunki

$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x}{2^n} \rightarrow 0$  cheksiz kichik miqdor, u holda  $\sin \frac{x}{2^{n+1}} \sim \frac{x}{2^{n+1}}$ ,  $\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ .

U holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2^{n+1}} : \frac{x}{2^n} \right| = \frac{1}{2} < 1$ . Demak, qator butun sonlar o'qida, ya'ni  $-\infty < x < \infty$  oraliqda yaqinlashadi.

**Masalan 7.**  $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \dots + (-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} + \dots$  qatorning  $x \in (-1; 1)$  oraliqda yig'indisini toping.

**Yechish:** Qatorni ( $[0, x]$  bu yerda  $x \in (-1; 1)$ ) oraliqda integrallash geometrik qatorga olib keladi:  $-x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$ . Bu esa geometrik progressiyaning yig'indisini beradi:

$$b_1 = -x^2, \quad q = -x^2 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Berilgan qatorga qaytamiz, uning yig'indisini esa  $S(x)$  ni differensiallab

$$\text{topamiz: } S'(x) = \left( -\frac{x^2}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

**Masalan 8.** Qatorning  $x \in (-1; 1)$  oraliqda yig'indisini toping:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

**Yechish:** Qator yaqinlashish oraliq'ida hadma-had differensiallanib geometrik qator ko'rinishiga keltiriladi.

$S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ , uning yig'indisi  $S = \frac{1}{1-x}$  ( $b_1 = 1, q = x$ ). Qatorning

yig'indisini  $[0; x]$  oraliqda (bunda  $x \in (-1; 1)$ ) integrallab topamiz:

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|$$

**Masalan 9.** Qatorni hadma-had differensiallab, yig'indisini toping:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Yechish:**  $S(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, S' = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$

$$S'' = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = S. \text{ Demak, } S''(x) - S(x) = 0. \quad k^2 - 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 1$$

$$S(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x. \quad S(0) = 1, \quad S'(0) = 0$$

Shartlardan  $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{1}{2}. \text{ Demak, } S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

**Masalan 10.** Elementar funksiyalarni qatorga yoyilmasidan foydalanib, quyidagi funksiyalarni darajali qatorga yoying:

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

**Yechish:**  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots) - (-(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots)) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$

**Masalan 11.** Funksiyani darajali qatorga yoying:  $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$

**Yechish:**  $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}. \quad \int y(x) dx = \int \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \frac{\ln^2(1+x)}{2} + C.$

$$\int y(x) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \right) \cdot (1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^{n-1} + n)$$

$$y(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \dots$$

**Masalan 12.** Funksiyani darajali qatorga yoying:  $y = e^{-x} \sin x.$

**Yechish:**  $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

$$y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x) \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$



$$y'' = -2e^{-x} \cos x \qquad y''(0) = -2$$

$$y''' = 2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x \qquad y'''(0) = 2$$

$$y^{(4)} = -2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) \qquad y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)} = -4e^{-x} \sin x$$

$$y^{(6)} = 4e^{-x} \sin x - 4e^{-x} \cos x = 4e^{-x}(\sin x - \cos x) \qquad y^{(6)}(0) = -4$$

$$y^{(7)} = -4e^{-x}(\sin x - \cos x) + 4e^{-x}(\cos x + \sin x) \qquad y^{(7)}(0) = 8$$

$$e^{-x} \sin x = x - \frac{x}{1!} + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 + \frac{8}{6!}x^6 + \dots$$

**Masalan 13.** Funksiyani darajali qatorga yoying:  $y = \ln(6+x-x^2)$ .

**Yechish:**

$$y = \ln(6+x-x^2) = \ln(3-x)(2+x) = \ln(3-x) + \ln(2+x) = \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{3^n \cdot n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n \cdot n} = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) \cdot x^n$$

Ba'zi funksiyalarning darajali qatorga yoyilmasi quyidagicha:

$$1. \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{7}{315}x^7 + \dots$$

$$2. \sin(x+a) = \sin a + x \cos a - \frac{x^2}{2!} \sin a - \frac{x^3}{3!} \cos a + \dots$$

$$3. \cos(x+a) = \cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \dots$$

$$4. \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2}{45}x^6 + \dots$$

$$5. (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \pm \frac{5}{16}x^3 - \dots$$

$$6. (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 - \dots$$

$$7. e^{\cos x} = e \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720}x^6 + \dots \right)$$

$$8. e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$$

$$9. e^{\lg x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8}$$

$$10. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \dots$$

$$11. \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln(\sqrt{1 + x^2} - x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

$$12. \ln|\sin x| = \ln|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots, \quad 0 < |x| < \pi.$$

$$13. \ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$14. \ln|\lg x| = \ln|x| + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \dots, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

### Qatorlar nazariyasining iqtisodiyotdagi ba'zi tatbiqlari

$M(k, l)$  –  $k \times l$  o'lchamli haqiqiy elementli matritsa to'plami bo'lsin.

$\{A_n\} \in M(k, l)$  matritsalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin,  $n \in N$ .

**Masalan 1.**  $2 \times 2$  o'lchovli matritsalar ketma-ketligi.  $A_n = \{a_{ij}^{(n)}\}$ ,

$\{a_{ij}^{(n)}\} = \frac{1}{(ij)^n}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  bo'lsa, uni quyidagicha tushunamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/16 \end{Bmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{Bmatrix} 1 & (1/2)^n \\ (1/2)^n & (1/4)^n \end{Bmatrix}, \dots$$

**Ta'rif.**  $A = \{a_{ij}\}$  matritsa  $\{A_n\}$  matritsalar ketma-ketligining limiti deyiladi, agar har qanday  $i$  va  $j$  juftlar uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij}^{(n)} = A$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  tenglik o'rinli bo'lsa.

**Masalan 2.**  $2 \times 2$  o'lchovli  $A_n = \left\{ \frac{1}{(ij)^n} \right\}$ ,  $n \in N$  ketma-ketlik limiti topilsin.

**Yechish:** Ma'lumki,  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^r \\ (1/2)^r & (1/4)^r \end{pmatrix}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^r \\ (1/2)^r & (1/4)^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

**Ta'rif.**  $\{A_n \in M(k, l)\}$ ,  $n \in N$  matrisalar ketma-ketligi uchun

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \quad (1)$$

yig'indi matritsalar qatori deyiladi.

$$S_1 = A_1, \quad S_2 = A_1 + A_2, \dots, \quad S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \dots \quad (2)$$

xususi yig'indisi ketma-ketligi.

**Ta'rif.** Agar  $\{S_n\}$  xususi yig'indilar ketma-ketligi yaqinlashsa, (1)-qator ham yaqinlashadi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (3)$$

limit (1)-qatorning yig'indisi deyiladi.

**Masalan 3.**  $2 \times 2$  o'lchovli  $A_n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & (1/3)^n \\ (1/4)^n & (1/5)^n \end{pmatrix}$  uchun  $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$

qatorning yig'indisini hisoblang.

**Yechish:**  $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ,  $S_n$  matritsa elementlari maxraji birdan kichik geometrik progressiyalardir. Shuning uchun bu qator

yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

$A$   $k$  o'lchovli kvadrat matritsa bo'lsin.

$E + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$  (4)-qator ham muhim hisoblanadi. (4)-qatorning yaqinlashishi  $A$  Leontev matritsasining (produktivligi) mahsuldorligiga ekvivalentdir.

**Ta'rif.**  $k$  o'lchovli  $A$  kvadrat matritsa va  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  darajali qator berilgan bo'lsin.

$$a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_nA^n \quad (5)$$

qatorga *darajali matritsaviy qator* deyiladi.

(5)-qatorning yaqinlashishi oddiy darajali qatorning yaqinlashishiga keltiriladi.  $\lambda$  son  $A$  matritsaning xos qiymati deyiladi,

agar shunday  $x \neq 0$  vektor topilsada ular uchun  $Ax = \lambda x$  munosabat o‘rinli bo‘lsa.

(5)-qator bilan birga

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda^n \quad (6)$$

qatorni ko‘rib chiqamiz.

**Ta’rif.** Agar  $A$  matritsaning har qanday  $\lambda$  xos qiymati uchun (6)-qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (5)-matritsaviy darajali qator ham yaqinlashuvchi deyiladi.

Agarda  $A$  matritsaning Frobenius soni birdan kichik bo‘lsa, u holda A.Leontev matritsasi mahsuldor bo‘ladi. Haqiqatan ham,  $A$  nomanfiy matritsa unumdor deyiladi, agarda  $E + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n + \dots$  darajali matritsaviy qator yaqinlashuvchi bo‘lsa. Yuqoridagi mulohazalardan ma’lumki, bu matritsaviy qator yaqinlashishi uchun  $A$  matritsaning har qanday  $\lambda$  xos soni uchun  $1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n + \dots$  sonli qator yaqinlashsa. Bu qator  $|\lambda| < 1$  shartda yaqinlashadi.  $A$  nomanfiy matritsa bo‘lgani uchun uning modul bo‘yicha maksimal qiymati  $\lambda_A$  haqiqiy va nomanfiydir. Shuning uchun matritsaviy qatorning yaqinlashishi  $\lambda_A < 1$  shartga ekvivalentdir.

## 11. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

### Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi

Ko'p o'zgaruvchili funksiya ta'rifi, uning aniqlanish va o'zgarish sohasi tushunchalarini kiritgan edik.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga doir misollar keltiramiz.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'rinishda ifoda etamiz.

$$1. Z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi  $D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$  to'plamdan iborat. Bu to'plam markazi 0 (0, 0) (koordinata boshi) nuqtada, radiusi  $R$  ( $R > 0$ ) bo'lgan doiradir.

$$2. Z = \frac{1}{x_1 \cdot x_2}.$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi  $D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$  to'plamdan iborat. Bu to'plam  $X_1OX_2$  tekislikdan  $OX_1$  va  $OX_2$  koordinata o'qlarini chiqarib tashlashdan hosil bo'ladi.

3.  $Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$  funksiya chiziqli funksiya deyiladi, bu yerda  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o'zgarmas sonlar.

4.  $Z = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ ,  $a_{ij}$  o'zgarmas son va  $a_{ij} = a_{ji}$ . Bu funksiya kvadratik funksiya deyiladi.

5. Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko'p o'zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagi funksiyaning keltirish mumkin:  $Z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i)$ , bu yerda  $a_i > 0$  va  $x_i > c_i \geq 0$ . Funksiyaning aniqlanish sohasi  $D(Z) = \{x : x_i > c_i, i = 1, n\}$  to'plamdan iborat. Bu funksiya o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

6. Ko'p o'zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyasiga misol tariqasida quyidagi funksiyalarni keltirish mumkin:

a)  $Z = b_0 x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ . Bu funksiya *Kobba-Duglas funksiyasi* deyiladi. Bu yerda,  $x_1$  mehnat xarajatlari,  $x_2$  ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o'zgaruvchilardir.

$b_0, b_1$  va  $b_2$  ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

b)  $Z = a_0 (a_1 x_1^{-\beta} + a_2 x_2^{-\beta})^{\frac{1}{\beta}}$ . Bu funksiya almashtirishning o'zgarma egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

**Ta'rif.**  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiya grafigi deb quyidagi

$$\Gamma(f) = \{(Z, x_1, x_2, \dots, x_n) : Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)\}$$

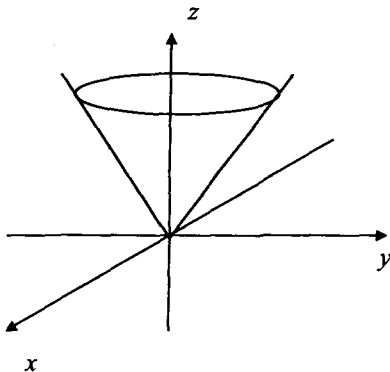
to'plamga aytiladi. Bu yerda,  $D(f)$  funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lib,  $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$  munosabat o'rinlidir.

**Ta'rif.**  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiyaning o'zgarmaqlik chizig'i yoki o'zgarmaqlik sirti deb ushbu

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}$$

to'plamga aytiladi. Bu yerda,  $c = const$ .

Masalan,  $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ikki o'zgaruvchili funksiya grafigi,  $R^3$  uch o'lchovli fazoda uchi koordinata boshida bo'lgan cheksiz konusdan iborat bo'ladi.



$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$  funksiyaning o'zgaraslik chiziqlari, markazi koordinata boshida bo'lgan,  $XOY$  tekislikda joylashgan aylanalardan iborat bo'ladi. Chunki  $c > 0, x^2 + y^2 = c^2$  tenglik aylana tenglamasini aniqlaydi.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  va  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$  bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa  $d(x, y)$  deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o'tamiz:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

**Ta'rif.** Markazi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nuqtada, radiusi  $R > 0$  ga teng ochiq shar  $S(x, R)$  deb, quyidagi to'plamga aytiladi:

$$S(x, R) = \{y : d(x, y) < R\}$$

*Izoh:*  $\varepsilon > 0$  son uchun  $S(x, \varepsilon) - x$  nuqtaning, « $\varepsilon$ -atrofi» ham deyiladi.

$\bar{S}(x, R) = \{y : d(x, y) \leq R\}$  to'plam esa yopiq shar deyiladi.

**Ta'rif.** Agar  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ d(x, x_0) \rightarrow 0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $a$  son  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyaning,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nuqta  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  ga intilgandagi limiti deyiladi. Agar tenglik o'rinli bo'lsa. Bu hol quyidagicha yoziladi:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

### Misollar:

1.  $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  funksiyaning aniqlanish sohasi  $D(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , ya'ni  $XOY$  tekislikda markazi koordinata boshi  $(0, 0)$  nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan doiradan iboratdir.

2.  $Z = x \cdot y$  funksiyaning o'zgaraslik chiziqlari  $XOY$  tekisligida  $xy = c$ , ya'ni  $y = \frac{c}{x}$  tenglama orqali aniqlangan giperboladan iborat bo'ladi.

$$3. \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} - 1} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{(x_1^2 + x_2^2) \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 1 \right)}{x_1^2 + x_2^2 + 1 - 1} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 1 \right) = 2.$$

**Ta'rif.** Agar  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiya  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Masalan 4.**  $Z = \frac{1}{x^2 + y^2}$  funksiya  $x^2 + y^2 \neq 0$  munosabatni qanoatlantiruvchi nuqtalarda, ya'ni koordinata boshidan farqli barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi. Bu funksiya  $(0,0)$  nuqtada uzluksiz bo'lmaydi. Ammo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{agar } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{agar } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

funksiya XOY tekislikning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladi. Uzluksizlikni  $(0,0)$  nuqtada tekshirish yetarlidir.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} = 0 = f(0,0)$$

### Xususiy hosilalar

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiyaning barcha  $x_i$  argumentlariga  $\Delta x_i$  orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi  $\Delta z$  orttirmani

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to'liq orttirmasi deyiladi. Agar  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  funksiyaning faqat  $i$  argumenti bo'lgan  $x_i$  o'zgaruvchiga  $\Delta x_i$  orttirma berib, qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarimas deb qarasaq, u holda funksiya hosil qilgan orttirma  $\Delta_{x_i} z$  quyidagicha aniqlanib,

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

bu orttirma funksiyaning *xususiy orttirmasi* deyiladi.

**Masalan 5.**  $z = xy$  funksiyaning to'liq va xususiy orttirmalarini topaylik:



$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

**Ta'rif.**  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiyaning  $x_i$  o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb,  $x_i$  o'zgaruvchidan boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarimas deb qaraganda hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili, ya'ni  $x_i$  o'zgaruvchili funksiyaning,  $x_i$  o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilaga aytilib,  $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$  yoki  $f'_x$  shaklda belgilanadi, ya'ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x_i}$$

**Masalan 6.**  $z = x \cdot y$  funksiya uchun uning xususiy hosilalari xossalari quyidagicha bo'ladi  $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$

$z = \arctg \frac{x}{y}$  funksiya uchun esa

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{y}{y^2 + x^2}.$$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$  xususiy hosila, o'z navbatida, yana ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgani uchun, uning yana xususiy hosilalarini topish mumkin. Bu xususiy hosilalar *ikkinchi tartibli xususiy hosilalar* deyiladi. Xuddi shunga o'xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) - \text{ikkinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2 \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} \right) - \text{uchinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}, \quad n - \text{tartibli xususiy hosila.}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

Umuman, aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo‘q, ya’ni masalan, quyidagi tenglik o‘rinlidir  $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$ ,

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak.

### Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensial

Avval aytganimizdek, matematik uslublarning tatbiqlari taqribiy hisoblashlar bilan uzviy bog‘langan bo‘lib, bir o‘zgaruvchili funksiya uchun taqribiy hisoblashlar funksiya differensial asosida olib borilishini aytib o‘tgan edik. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun differensial tushunchasini kiritish mumkin.

**Ta’rif.**  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensial deb,  $dZ$  shaklda belgilanib quyidagicha aniqlangan ifodaga aytiladi:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Bu yerda,  $dx_i = \Delta x_i$  tenglikni e’tiborga olsak,  $dZ$  differensial uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz:  $dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} dx_n$

**Ta’rif.** Agarda  $x$  nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to‘liq orttirmasi  $\Delta Z$  ni quyidagicha ifodalash mumkin bo‘lsa,

$$\Delta Z = dZ + o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right),$$

u holda  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko‘p o‘zgaruvchili funksiya  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun uning berilgan nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarining mavjudligidan, shu nuqtada funksiyaning differensiallanuvchi ekanligi

kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko'p o'zgaruvchili funksiyani differensiallanuvchi bo'lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

**1-teorema.** Agar  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiya  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nuqtaning biron-bir atrofida barcha birinchi tartibli  $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ , xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar  $x$  nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shuni ta'kidlash lozimki, xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritish mumkin.

Yo'nalish bo'yicha hosila va gradient.

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  va  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  nuqtalar uchun boshi  $A$  nuqtada, oxiri  $B$  nuqtada bo'lgan  $\overline{AB}$  vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$$

Vektor, odatda bitta kichik lotin harfi bilan belgilanadi, masalan,  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Bizga ma'lumki  $\vec{a}$  vektorning uzunligi uchun  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ .

$\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi esa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$  tenglik orqali aniqlanadi. Bundan tashqari,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi

$\varphi (0 \leq \varphi < \pi)$  burchak ushbu  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

tenglik orqali topiladi.  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektorga parallel va  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglik orqali beriladi:

$$x = t \cdot \vec{a} + x_0$$

Bu yerda,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $t$  haqiqiy son. Ya'ni bu to'g'ri chiziqda yotuvchi  $x$  nuqtaning koordinatalari  $x_i = t \cdot a_i + x_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ko'rinishida bo'ladi.

Agar  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  birlik vektor, ya'ni  $|\vec{a}| = 1$  bo'lsa, u holda  $i$  koordinatasi 1 ga teng bo'lib, qolgan koordinatalari nolga teng bo'lgan  $\vec{e}_i$  birlik vektor uchun quyidagilarni hosil qilamiz  $\vec{a} \cdot \vec{e}_i = a_i = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_i| \cdot \cos \alpha_i = \cos \alpha_i$

Bu yerda,  $\alpha_i$  burchak  $\vec{a}$  va  $\vec{e}_i$  vektorlar orasidagi burchakni bildiradi.

Demak,  $|\vec{a}| = 1$  bo'lgani uchun  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1$ .

Ushbu  $\cos \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ , qiymatlar  $\vec{a}$  vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Demak, birlik  $\vec{a}$  vektorni  $\vec{a} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n)$  ko'rinishda ifoda etish mumkin.

$\vec{a}$  birlik vektor bo'lsin, u holda  $\Delta t$  son uchun quyidagi orttirma  $\Delta_a z = f(x + \Delta t \cdot \vec{a}) - f(x) = f(x_1 + \Delta t \cos \alpha_1, x_2 + \Delta t \cos \alpha_2, \dots, x_n + \Delta t \cos \alpha_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyaning  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nuqtadagi  $\vec{a}$  vektor yo'nalishi bo'yicha orttirmasi deyiladi.

**Ta'rif.**  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiyaning  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nuqtadagi  $\vec{a}$  vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasi  $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$  deb,

quyidagicha aniqlangan miqdorga aytiladi:  $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta t \cdot \vec{a}) - f(x)}{\Delta t}$ .

$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$  hosila  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiyaning  $\vec{a}$  vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarish (o'sish yoki kamayish) tezligini bildiradi.

Xususan, agar  $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$   $i$  koordinatasi 1 ga, boshqa koordinatalari nolga teng bo'lgan birlik vektor bo'lsa, u holda  $\frac{\partial z}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}$

tezlik o'rinli bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan, quyidagi tezlikni ko'rsatish mumkin

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \cos \alpha_n$$

**Ta'rif.**  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyaning gradienti deb ushbu

$$\nabla z = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \text{ vektorga aytiladi.}$$

Ta'rifga ko'ra, funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasini quyidagi skalyar ko'paytma ko'rinishida ifoda eta olamiz:  $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = \nabla z \cdot \bar{a}$

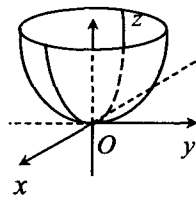
Bu skalyar ko'paytmada  $\bar{a}$  vektor  $\nabla z$  gradient yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, yo'nalish bo'yicha hosila o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak, funksiya gradienti  $\nabla z$  vektor, funksiya o'sishining eng katta bo'lgan yo'nalishini aniqlar ekan.

**Masalan 7.** Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping va grafigini chizing:

a)  $z = x^2 + y^2$ ; b)  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

**Yechish:** a) bu funksiya  $x$  va  $y$  ning barcha qiymatlarida aniqlangan  $-\infty < x < +\infty$ ;  $-\infty < y < +\infty$ .

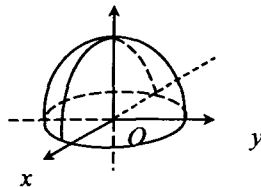
Uning grafigi aylanma paraboloid deb ataladigan ikkinchi tartibli sirt dan iborat. Aylanma paraboloid  $y^2 = 2pz$  parabolani  $Oz$  o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladi. Bu esa  $x^2 + y^2 = 2pz$  funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi.



b)  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  funksiyaning aniqlanish sohasi

ildiz ostidagi ifodaning nomanfiy bo'ladigan barcha qiymatlari, ya'ni  $x^2 + y^2 \leq R^2$  dan iborat.

Bu funksiyaning grafigi radiusi  $R$  bo'lgan sferaning yuqori yarmi bo'lgan ikkinchi tartibli sirt dir. Chunki funksiya o'zining aniqlanish sohasida faqat nomanfiy qiymatlar qabul qiladi.



**Masalan 8.** Limitlarni hisoblang:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

**Yechish:**  $x$  va  $y$  nuqtalar orasidagi masofa  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  deb belgilash kiritamiz.  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  dan  $\rho \rightarrow 0$  ekanligi kelib chiqadi.

$$\text{Demak, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\ln(1-\rho^2))'}{\rho'} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-\rho^2} \cdot (-2\rho)}{1} = 0$$

**Masalan 9.** Limitlarni hisoblang:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

**Yechish:**  $(0, 0)$  nuqtaga  $y = kx$  to'g'ri chiziq bo'yicha yaqinlashamiz. Agar  $y=kx$  bo'lsa, u holda  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{2k}{1+k^2}$ , ya'ni limit to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientiga bog'liq chiqdi. Lekin funksiyaning limiti  $(x, y)$  nuqtaning  $(0, 0)$  ga qaysi yo'nalishda yaqinlashishiga bog'liq bo'lmasligi kerak. Demak, qaralayotgan limit mavjud emas.

**Masalan 10.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$  funksiyaning uzluksizligini tekshiring.

**Yechish:**  $(x_0; y_0)$  nuqtada funksiyaning to'liq orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x_0; y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 + (y_0 + \Delta y_0)^2 - x_0^2 - y_0^2 = 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 + 2\Delta y \cdot y + \Delta y^2 = \Delta x(2x + \Delta x) + \Delta y(2y + \Delta y).$$

bundan esa  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta x(2x + \Delta x) + \Delta y(2y + \Delta y)) = 0$  ekanligini topamiz.

Demak, yuqoridagi ta'riflarga ko'ra  $f(x, y)$  funksiya  $(x_0, y_0)$  nuqtada uzluksiz.

**Masalan 11.** Funksiyani  $(0; 0)$  nuqtada uzluksizlikka tekshiring:

$$z = \frac{x+y}{x-y}.$$

**Yechish:**  $(0; 0)$  nuqtaga  $y=kx$  to'g'ri chiziqlar bo'yicha yaqinlashamiz.

U holda  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k}$ . Limitlarning qiymati turli  $k$  larda turlicha

bo'ladi. Demak, ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti mavjud emas va  $(0; 0)$  nuqta funksiyaning uzulish nuqtasi.

**Masalan 12.** Funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang:  $f(x, y) = x^y$ .

**Yechish:**  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  xususiy hosila hisoblanayotganda  $y$  ni o'zgarmas deb qaraladi:  $\frac{\partial f}{\partial x} = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$ . Endi  $x$  o'zgaruvchini o'zgarmas kattalik deb qarab,  $\frac{\partial f(x)}{\partial y}$  xususiy hosilani hisoblaymiz:  
 $\frac{\partial f}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$ .

**Masalan 13.** Funksiyaning differensialini hisoblang:  $z = x^2y - xy^2$ .

**Yechish:**  $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y - xy^2)'_x = 2xy - y^2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y - xy^2)'_y = x^2 - 2xy$ .

$$dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$$

### Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari

**Ta'rif.** Agar  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiya  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, shu atrofdan olingan istalgan  $x$  uchun  $f(x) \leq f(x_0)$ , ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqta  $Z$  funksiya uchun lokal maksimum (lokal minimum) nuqta deyiladi.

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyadagi kabi ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari haqidagi teoremlarni isbot qilish mumkin.

**2-teorema (Ekstremumning zaruriy sharti).** Agar  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lib, shu nuqtada funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, u holda  $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

ya'ni  $x_0$  nuqtada funksiya gradienti nol vektorga teng bo'ladi:  
 $\nabla f(x_0) = (0, 0, \dots, 0)$

Bu teoremadan, agar  $x_0$  nuqta differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,  $x_0$  nuqtadagi istalgan yo'nalish bo'yicha funksiyaning hosilasi nolga tengligi kelib chiqadi, chunki

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \nabla f \cdot \bar{a} = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \cos \alpha_i = 0.$$

Endi ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumning yetarli shartini keltiramiz.

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiyaning  $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  nuqtaning biron-bir atrofida barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda istalgan  $1 \leq i, j \leq n$  uchun

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Agar  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}(x)$  belgilashni kiritsak, ushbu kvadratik matritsa

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$  bo'lgani uchun simmetrik matritsa bo'ladi. Avval ko'rganimizdek har bir simmetrik kvadratik matritsa kvadratik forma hosil qiladi.  $A(x)$  matritsaga mos keluvchi kvadratik formani  $L(x)$  bilan belgilaymiz.

**Ta'rif.** Agar  $z=f(x)$  funksiya uchun  $\nabla f(x_0)=0$  bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning *statsionar yoki kritik nuqtasi* deyiladi.

**3-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya uchun  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  statsionar nuqtaning biron-bir atrofida ikkinchi tartibli hosilalari mavjud va uzluksiz bo'lib, shu  $x_0$  nuqtada  $L(x_0)$  kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Xususan, agar biz  $z=f(x,y)$  ikki o'zgaruvchili funksiya uchun shu teoremani qo'llasak quyidagini hosil qilamiz.

$(x_0, y_0)$  nuqta  $z = f(x,y)$  funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

bo'lib, nuqtaning biron-bir atrofida  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_{12}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}$



ikkinchi tartibli hosilalar mavjud bo'lsin. U holda,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

simmetrik kvadratik matritsaga mos keluvchi  $L(x, y)$  kvadratik formaning  $(x_0, y_0)$  nuqtada musbat aniqlangan bo'lishi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0, y_0) & a_{12}(x_0, y_0) \\ a_{21}(x_0, y_0) & a_{22}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

bo'lishi lozim. Demak, statsionar  $(x_0, y_0)$  nuqta  $z = f(x, y)$  funksiya uchun lokal minimum nuqta bo'lishi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) > 0, \quad a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) > 0$$

shartlarning bajarilishi yetarli bo'lar ekan.  $(x_0, y_0)$  nuqta lokal minimum nuqta bo'lishligi uchun esa

$$a_{11}(x_0, y_0) < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0, y_0) & a_{12}(x_0, y_0) \\ a_{21}(x_0, y_0) & a_{22}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

ya'ni  $a_{11}(x_0, y_0) < 0, \quad a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) > 0$

shartlarning bajarilishi yetarli.

$z = f(x, y)$  funksiyaning  $(x_0, y_0)$  statsionar nuqtasi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) < 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $(x_0, y_0)$  nuqta ekstremum nuqta emasligi kelib chiqadi.

**Masalan 1.**  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  funksiyaning ekstremumga tekshiraylik. Buning uchun dastavval uning xususiy hosilalarini, keyin statsionar nuqtalarini, so'ngra ikkinchi tartibli hosilalar yordamida ekstremum nuqtalarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \Rightarrow (0, 0) \text{ va } (1, 1)$$

nuqtalar statsionar nuqtalar ekan.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

bo'lgani uchun  $(0, 0)$  ekstremum nuqta bo'lmaydi, chunki

$$\begin{vmatrix} a_{11}(0,0) & a_{12}(0,0) \\ a_{21}(0,0) & a_{22}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

Lekin  $(1, 1)$  nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi, chunki

$$a_{11}(1, 1) = 6 > 0 \quad \text{va} \quad \begin{vmatrix} a_{11}(1,1) & a_{12}(1, 1) \\ a_{21}(1,1) & a_{22}(1, 1) \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

$$\min z(x; y) = z(1; 1) = -1.$$

## Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Dastavval  $R^n$  fazodagi ayrim tushunchalar bilan tanishib chiqaylik.

**Ta'rif.** Agar  $B \subset R^n$  to'plam berilgan bo'lsa, shunday  $R > 0$  son mavjud bo'lsada, bu son uchun  $B \subset S(0, R)$  munosabat o'rinli bo'lsa, ya'ni markazi koordinata boshida va radiusi  $R$  ga teng bo'lgan shar  $B$  to'plamni o'z ichiga olsa, u holda  $B \subset R^n$  to'plam *chegaralangan to'plam* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar shunday  $\varepsilon > 0$  son berilgan bo'lsa, bunda  $S(x, \varepsilon) \subset B$  munosabat o'rinli bo'lsa, u holda  $B \subset R^n$  to'plam uchun  $x$  nuqta *ichki nuqta* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar istalgan  $\varepsilon > 0$  son uchun  $S(x, \varepsilon)$  sharda  $B$  to'plamga tegishli va  $B$  ga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud bo'lsa, ya'ni  $S(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$  va  $S(x, \varepsilon) \cap (R^n \setminus B) \neq \emptyset$  bo'lsa, u holda  $B \subset R^n$  to'plam uchun  $x$  nuqta *chegaraviy nuqta* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar  $B \subset R^n$  to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari ham shu to'plamga tegishli bo'lsa, u holda bu to'plam *yopiq to'plam* deyiladi.

Bir o'zgaruvchili funksiya uchun isbot qilingan Veyershtress teoremasini ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham isbot qilish mumkin.

**4-teorema (Veyershtress teoremasi).** Agar  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ko'p o'zgaruvchili funksiya chegaralangan yopiq  $B$  to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya  $B$  to'plamda chegaralangan bo'lib, shu to'plamda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga (global ekstremumlarga) erishadi, ya'ni shunday  $K > 0$  musbat son,  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in B$  va  $y_0 = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in B$  nuqtalar mavjudki, ular uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:  $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in B$  va

$$f(x_0) = \sup_{x \in B} \{f(x)\}, \quad f(y_0) = \inf_{x \in B} \{f(x)\}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya global ekstremum qiymatlarga  $B$  to'plamning chegaraviy nuqtalarida erishishi mumkin.

**Masalan 2.**  $z = e^{-x^2-y^2} \cdot (2x^2 + 3y^2)$  funksiyaning  $x^2 + y^2 \leq 4$  tengsizlik bilan berilgan  $\bar{s}(0, 2)$  yopiq shardagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topaylik.

Dastavval  $s(0, 2)$  ochiq shardagi statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} [-2x(2x^2 + 3y^2) + 4x] = 2x \cdot e^{-x^2-y^2} [2 - (2x^2 + 3y^2)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} [-2y(2x^2 + 3y^2) + 6y] = 2y \cdot e^{-x^2-y^2} [3 - (2x^2 + 3y^2)]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y \cdot (1 - y^2) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x \cdot (1 - x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Demak,  $(0, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$  va  $(\pm 1, 0)$  nuqtalar qaralayotgan funksiyaning statsionar nuqtalari bo'ladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni keltiramiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)} (8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4) = a_{11}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)} (8x^3y + 12xy^3 - 20xy) = a_{12}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)} (12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2 - 4x^2 + 6) = a_{22}(x, y)$$

Bundan  $(0,0)$  nuqtada  $a_{11}(0,0)=4$ ,  $a_{12}(0,0)=0$ ,  $a_{22}(0,0)=6$  bo'lib  $a_{11}>0$  va  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 24 > 0$  bo'lgani uchun  $(0,0)$  nuqta lokal minimum nuqtasi bo'ladi va  $z(0,0)=0$ .

$(0,\pm 1)$  nuqtada  $a_{11}(0,\pm 1)=-2e^{-1}$ ,  $a_{12}(0,\pm 1)=0$ ,  $a_{22}(0,\pm 1)=-10 \cdot e^{-1}$  bo'lib,  $a_{11} < 0$  va  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 20 \cdot e^{-2} > 0$  bo'lgani uchun,  $(0,\pm 1)$  nuqta lokal maksimum nuqtasi bo'ladi va  $z(0,\pm 1)=3 \cdot e^{-1}$ .

$(\pm 1,0)$  nuqtada  $a_{11}(\pm 1,0)=-8e^{-1}$ ,  $a_{12}(\pm 1,0)=0$ ,  $a_{22}(\pm 1,0)=2e^{-1}$  bo'lib,  $a_{11} < 0$  va  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -16e^{-2} < 0$  bo'lgani uchun,  $(\pm 1,0)$  nuqta ekstremum nuqta emas.

Endi berilgan funksiyani  $\bar{s}(0,2)$  sharning chegaraviy nuqtalarida, ya'ni  $x^2 + y^2 = 4$  tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda tekshiramiz.  $x^2 + y^2 = 4$  bo'lsin, u holda  $Z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2) = e^{-4}[2(x^2 + y^2) + y^2] = e^{-4}(8 + y^2)$ . Bundan  $x^2 + y^2 = 4$  bo'lganda quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$8 \cdot e^{-4} \leq z = e^{-4}(8 + y^2) \leq e^{-4} \cdot 12,$$

ya'ni  $z(\pm 2,0) = \frac{8}{e^4}$  va  $z(0,\pm 2) = \frac{12}{e^4}$  sonlar funksiyaning  $\bar{s}(0,2)$  shar chegarasidagi eng kichik va eng katta qiymatlarini beradi.

Berilgan funksiyaning  $\bar{s}(0,2)$  yopiq shardagi global ekstremumlari, ya'ni uning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun funksiyaning  $s(0,2)$  ochiq shardagi va chegaradagi maksimumlari ichidan eng kattasini olsak va, shuningdek  $s(0,2)$  ochiq shardagi va chegaradagi minimumlar ichidan eng kichigini olsak, mos ravishda global maksimum va global minimumlarni hosil qilamiz. Qaralayotgan holda funksiya  $(0,\pm 1)$  nuqtada  $z(0,\pm 1) = \frac{3}{e}$  lokal maksimumga erishadi.

Chegaradagi maksimum qiymat esa  $z(0,\pm 2) = \frac{12}{e^4}$  ga teng.  $\frac{12}{e^4} < \frac{3}{e}$  bo'lgani uchun, funksiya  $\bar{s}(0,2)$  shardagi eng katta qiymatga  $(0,\pm 1)$  nuqtada erishdi va  $Z_{\max} = \frac{3}{e}$ .

$s(0,2)$  ochiq sharda funksiya  $(0,0)$  nuqtada minimumga erishadi va  $z(0,0)=0$ . Chegaraviy nuqtalardagi minimum  $z(\pm 2,0)=\frac{8}{e^4}>0$  bo'lgani uchun funksiya  $\bar{s}(0,2)$  sharda eng kichik qiymatga  $(0,0)$  nuqtada erishadi va  $Z_{\min}=0$ .

**Masalan 3.**  $z=2x^2+y^2+4x-2$  funksiyaning  $x^2+y^2\leq 9$  doiradagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

**Yechish:** Avval funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. Buning uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarini nolga

$$\text{tenglashtiramiz: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 4 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib:  $M_1(-1;0)$  yagona kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Bu nuqta qaralayotgan sohaga tegishli. Funksiyaning kritik nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:  $z(-1;0)=-4$ .

Endi funksiyaning  $x^2+y^2=9$  shardagi qiymatlarini o'rganamiz.  $y^2=9-x^2$  ifodani berilgan funksiya qo'yib  $z=x^2+4x+7$  ni hosil qilamiz. Shu bir o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumga tekshiramiz. Kritik nuqtalarini topamiz:  $z'=2x+4=0, x=-2$ . Funksiyaning kritik nuqtadagi va sohaning chetlaridagi ( $-3\leq x\leq 3$ ) qiymatlarini hisoblaymiz:  $z(-3)=4, z(-2)=3, z(3)=28$ .

Demak,  $z=2x^2+y^2+4x-2$  funksiyaning  $x^2+y^2\leq 9$  doiradagi eng kichik qiymati  $-4$  va eng katta qiymati  $28$  ga teng ekan.

### Shartli ekstremumlar

Ko'p hollarda berilgan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma'lum shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi qo'yiladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun shartli ekstremumlar deb nomlanuvchi tushuncha umumiy holda quyidagicha bayon etiladi.

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$   $n + m$  o'zgaruvchili funksiyaning ushbu, bog'lovchi tenglamalar deb nomlanuvchi,

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar ichidan topilgan ekstremumlari uning *shartli ekstremumlari* deyiladi.

**Ta'rif.** Agar  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$  ko'p o'zgaruvchili funksiya  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$  nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  nuqtalar uchun  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqtada shartli maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi.

Berilgan  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$  funksiyaning bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsientlar usulini keltiramiz. Buning uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz:  $F(x) = f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_m \phi_m(x)$ .

Bu yerda  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  noma'lum ko'paytuvchilar deb nomlanuvchi sonlardan iborat. Kiritilgan  $F(x)$  funksiyaning shartsiz ekstremumi (ya'ni avval kiritilgan ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi ma'nosida), biz qarayotgan  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiyaning shartli ekstremumi bo'ladi. Biz qidirayotgan  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$  nuqtani va  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  sonlarni topish uchun

$$\begin{cases} \phi_i(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, n + m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish yetarli bo'ladi, chunki noma'lumlarning umumiy soni va sistemadagi tenglamalar soni  $n + 2m$  ga teng.

**Masalan 3.**  $z = xy$  funksiyaning  $x^2 + y^2 = 2$  tenglikni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini toping.

**Yechish:** Buning uchun yordamchi:  $F(x, y) = xy + \lambda \cdot (x^2 + y^2)$

funksiyani kiritib, bu funksiyaning shartsiz ekstremumini topamiz.  $\lambda$  noma'lum ko'paytuvchi va ekstremum nuqtasi uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x-y)(1-2\lambda) = 0 \\ (x+y)(1+2\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \lambda = \frac{1}{2}, x = -y \\ x = y, \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, (1, -1), (-1, 1) \\ (1, 1), (-1, -1), \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Demak,  $\lambda = \frac{1}{2}$  bo'lganda  $F(x, y) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

$(1, -1)$  va  $(-1, 1)$  statsionar nuqtalarda funksiyani tekshiramiz.

$(1, -1)$   $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1$  va  $d^2 F = (dx + dy)^2 \geq 0$  bo'lgani uchun,  $F(x, y)$

funksiya  $(1, -1)$  va  $(-1, 1)$  nuqtalarda minimumga erishadi. U holda  $z = xy$  funksiya esa shu nuqtalarda shartli minimumga erishadi va  $z_{\min} = -1$ .

Agar  $\lambda = -\frac{1}{2}$  bo'lsa,  $F(x, y) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  va  $F(x, y)$  funksiya  $(1, 1)$  va  $(-1, -1)$  statsionar nuqtalarda maksimumga erishadi, u holda  $z = xy$  funksiya esa bu nuqtalarda shartli maksimumga erishadi va  $z_{\max} = 1$ .

### Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Iqtisodiyotda kelib chiqadigan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish masalasini qaraymiz.

*Tovarning har xil turlarini ishlab chiqarishdan daromad olish.*

Faraz qilaylik  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ishlab chiqarilayotgan  $m$  turdagi turli xil tovarning miqdori, ularning birlik miqdordagi narxi mos ravishda  $P_1, P_2, \dots, P_m$  bo'lsin. Bu tovarlarni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi berilgan bo'lsin:

$$C = C(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

U holda qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Pi = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_mx_m - C(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1)$$

Tabiiyki, qo'shimcha qiymat maksimumini izlash, (1)-ko'p o'zgaruvchili funksiyaning  $x_i \geq 0$  da (boshqa cheklanishlar qo'yilmaganda) lokal ekstremumini izlash kabitdir:  $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, m.$

Bu shart  $x_i$  o'zgaruvchilarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

(3.12)-tenglamalar sistemasi iqtisodiyotning ma'lum qoidasini amalga oshiradi: tovarning oxirgi qiymati (narxi) bu tovarni ishlab chiqarishga sarflangan xarajatlarga teng.

Shuni ta'kidlash kerakki, (2)-tenglamalar sistemasini yechish jarayoni xarajat funksiyasining ko'rinishiga bog'liq va ancha murakkab bo'lishi mumkin.

**Masalan 4.** Faraz qilaylik korxonada ikki xil tovar ishlab chiqariladi, ularning hajmi  $x$  va  $y$  bo'lsin  $p_1 = 8$  va  $p_2 = 10$  mos ravishda bu tovarlarning birlik miqdordagi narxi,  $C$  xarajat funksiyasi,  $C = x^2 + xy + y^2$  ko'rinishda bo'lsin.

U holda (1) ga asosan  $x_1 = x, x_2 = y$  da foyda ikki o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:  $\Pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$

Lokal ekstremum sharti chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10. \end{cases}$$

Buning yechimi (2,4) nuqtadan iborat. Modomiki  $a_{11} = -2 < 0,$   
 $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0,$  u holda topilgan nuqta qo'shimcha qiymat funksiyasining lokal maksimumini aniqlaydi va  $\Pi_{\max} = 28.$

*Resurslarni eng yaxshi natija beradigan qilib taqsimlash.*

Faraz qilaylik  $X$  va  $Y$  resurslarning xarajat funksiyasi  $u = p_1x + p_2y$  ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda  $p_1$  va  $p_2$  mos ravishda bu faktorlarning

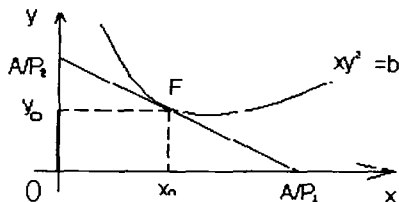


bahosi. Ishlab chiqarish funksiyasi  $u = a_0xy^2$  bo'lganda resurslarni optimal taqsimlash masalasini qaraylik,  $a_0$ —?

Resurslarni optimal taqsimlashni aniqlaydigan  $F(x_0, y_0)$  nuqtada xarajat va chiqarish funksiyalari urinadi.

Bu chiziqlar mos ravishda  $a_0xy^2 = c$ ,  $p_1x + p_2y = A$  yoki  $y = (b/x)^{1/2}$ ,  $y = -(p_1/p_2)x + A/p_2$  tenglamalar bilan aniqlanadi, bu yerda  $C > 0$  va  $A > 0$  o'zgarmas sonlar,  $b = c/a_0$ . Bu chiziqlarning urinish sharti quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\left[ \left( \frac{b}{x} \right)^{1/2} \right]' \Big|_{x_0} = -p_1/p_2$$



Bu tenglamadan  $x_0 = b^{1/3} (p_2/2 p_1)^{1/3}$  qiymat topiladi. U holda chiqarish funksiyasidagi  $y_0 = \left( \frac{b}{x_0} \right)^{1/2} = b^{1/3} \left( 2 p_1/p_2 \right)^{1/6}$  qiymat topiladi. Demak, resurslarning optimal taqsimlanishi  $x_0/y_0$ ,  $p_1:2p_2$  munosabat orqali aniqlanar ekan.

### **Mahsulot ishlab chiqarishning qo'shimcha qiymatini maksimallashtirish**

Qo'shimcha qiymat funksiyasi odatda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(K, L) = pF(K, L) - WL - kK. \quad (3)$$

Bu yerda,  $F(K, L)$  ishlab chiqarish funksiyasi,  $p$  mahsulot bahosi.  $W$  va  $k$  mos ravishda mehnatga va kapital xarajatlarga faktor narxlar,  $L$  va  $K$  mos ravishda mehnat resurslari va kapitalning xarajatlari.

Qo'shimcha qiymat maksimumini aniqlashga doir ikkita misol qaraymiz.

1. Agar  $(K_0, L_0)$  nuqtada qo'shimcha qiymat funksiyasi (3)-maksimal qiymatni qabul qilsa  $(K_0, L_0)$  nuqta optimal reja deyiladi. Optimal reja F da ishlab chiqarish funksiyasi F ni o'rniga qo'yib oxirgi normasini toping.

Lokal ekstremum nuqtasida qo'shimcha qiymat funksiyasi  $\Pi(K, L)$  ning birinchi hosilalari nolga teng, ya'ni

$$\begin{aligned} pF'_K(K_0, L_0) - k &= 0, \\ pF'_L(K_0, L_0) - W &= 0. \end{aligned}$$

Ma'lumki, almashtirishning oxirgi normasi  $\mu = -\frac{F'_1}{F'_k}$  formula bo'yicha hisoblanadi, bundan optimal reja uchun  $\mu = -\frac{W}{k}$  kelib chiqadi.

2. Agar  $F(K, L) = 2(KL)^{1/3}$  bo'lsa, qo'shimcha qiymat funksiyasi (3)ning maksimumi va optimal rejani toping.

Qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\Pi(K, L) = 2p(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Lokal ekstremum shartlari optimal rejaning  $K_0$  va  $L_0$  koordinatalariga nisbatan, ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} p K_0^{1/3} L_0^{2/3} = k \\ \frac{2}{3} p K_0^{2/3} L_0^{-1/3} = W \end{cases}$$

Bundan optimal rejaning koordinatalarini topamiz:

$$K_0 = \left( \frac{2p/3}{(R^2/W)} \right)^{3/2}, \quad L_0 = \left( \frac{2p/3}{(RW^2)} \right)^{3/2}$$

Bu qiymatlarni qo'shimcha qiymat funksiyasiga qo'ysak  $\Pi$  funksiya maksimumini hosil qilamiz:

$$\Pi_{\max} = \left( \frac{2p/3}{(RW)} \right)^{3/2}$$

## Eng kichik kvadratlar usuli

Eng kichik kvadratlar usuli approksimatsiya yoki funksiyani ayrim nuqtalarda ma'lum qiymatlari bo'yicha taxminan tiklash masalasiga tegishlidir. Tajribada ko'pincha formulalarni eng yaxshi yo'l bilan empirik tanlash masalasi kelib chiqadi. Masala quyidagicha ifodalanadi:  $y$  noma'lum kattalikning  $n$  ta nuqtalarda kuzatishlari berilgan:

$$M_1, M_2, \dots, M_n \quad (4)$$

va mos qiymatlar olingan

$$U_1, U_2, \dots, U_n. \quad (5)$$

Shunday  $U=f(M)$  funksiyani tanlab olish kerakki, u o'lchanadigan kattalik  $Y$  ning o'lchash nuqtalari  $\{M_i\}$  va natijalari  $\{U_i\}$  orasidagi bog'liqlikni imkoni boricha aniq ifoda etsin.

Shunday qilib, empirik formulalarni topish masalasi ikki bosqichdan iborat:

1)  $f(M)$  bog'lanishning umumiy ko'rinishini topish yoki  $f$  funksiyaning o'zgarma parametrlari (koeffitsientlari) aniqlik darajasini ko'rsatish;

2) noma'lum koeffitsientlar (4) kuzatish nuqtalarida shunday tanlab olinadiki,  $f(M)$  funksiya berilgan (5) qiymatlarga iloji boricha aniq javob bersin.

Faraz qilaylik 1-bosqichda empirik formula o'z ichiga ma'lum baza funksiyalar majmuyini hosil qilsin.

$$y_1(M), y_2(M), \dots, y_m(M), \quad (6)$$

ya'ni empirik formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(M) = a_1 y_1(M) + a_2 y_2(M) + \dots + a_m y_m(M) \quad (7)$$

Bu yerda,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  (8)

empirik funksiyaning noma'lum parametrlari.

2-bosqich noma'lum parametrlar (8)ni aniqlashdan iborat. Ularni shunday tanlab olish kerakki, (7) funksiyaning qiymatlari (4) nuqtalarda (5) o'lchangan qiymatlardan iloji boricha kam farq qilsin.

Eng kichik kvadratlar usuli  $\delta_i = U_i - f(M)$  xatoliklarning kvadratlari yig'indisini minimallashtirishdan iborat. Demak, (7) funksiya uchun, ushbu

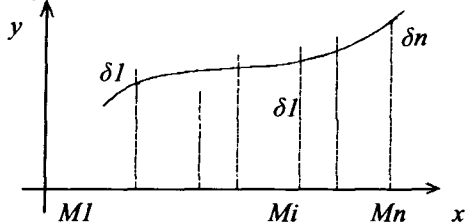
$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (U_i - f(M_i))^2 = \sum_{i=1}^n \left( U_i - \sum_{k=1}^m a_k y_k(M_i) \right) \quad (9)$$

funksiya barcha  $m$  argumenti bo'yicha xususiy hosilalarni topish kerak va ularni  $0$  ga tenglash lozim. Bundan  $m$  ta noma'lum  $a_1, a_2, \dots, a_m$  parametrlarga nisbatan  $m$  ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + \dots + A_{jm}a_m = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Bu tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadlari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^n y_j(M_i) y_k(M_i), \quad B_j = \sum_{i=1}^n U_i y_j(M_i), \quad j, k = 1, 2, \dots, m$$



$S(a_1, \dots, a_n)$  (9)-funksiya musbat, pastga qavariq va chegaralangan bo'lgani uchun (10)-tenglamalar sistemasining yechimi,  $S$  funksiyaning lokal maksimumi nuqtasining koordinatalaridan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy statistikada ma'lumotlarini qayta tekshirishda empirik formulaga yaqinlashish masalasini hal etishda  $U = f(M)$  funksiyani bir o'zgaruvchining chiziqli funksiyasi ko'rinishida izlash keng tarqalgan. Bu holda (4) o'lchash nuqtalarining majmuyi  $x_1 \dots x_n$  qiymatlaridan iborat bo'lib, (6)-funksiyalar majmuyi esa ikkita funksiya  $y_1(x) = x$  va  $y_2(x) = x$  dan iborat.

Empirik formula (7) ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:  $y = ax + b$ .

No‘malum parametrlar  $a$  va  $b$  uchun ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A_{11} a + A_{12} b = B_1 \\ A_{21} a + A_{22} b = B_2 \end{cases}$$

Bu yerda, koeffitsient va ozod hadlar quyidagi tengliklar bilan topiladi:

$$A_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad A_{22} = n$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n U_i x_i, \quad B_2 = \sum_{i=1}^n U_i.$$

**Masalan 4.** Avtomobil poygasi haqida quyidagi ma‘lumotlar bor.  
 $x$  masofa (ming km) va  $y$  yonilg‘i sarfi (l /ming km).

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 50  | 70  | 90  | 110 | 130 |
| $y_i$ | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 1,1 | 1,3 |

$x$  va  $y$  o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni chiziqli ekanligini bilgan holda

$y = ax + b$  empirik formulani eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

**Yechish:** Zarur yigindilarni hisoblaymiz:  $\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i.$

Oradagi hisoblashlar quyidagi jadvalda ko‘rsatilgan:

| $i$      | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|----------|-------|-------|-----------|---------|
| 1        | 50    | 0,2   | 10        | 2500    |
| 2        | 70    | 0,5   | 35        | 4900    |
| 3        | 90    | 0,8   | 72        | 8100    |
| 4        | 110   | 1,1   | 121       | 12100   |
| 5        | 130   | 1,3   | 169       | 16900   |
| $\Sigma$ | 450   | 3,9   | 407       | 44500   |

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407 \\ 450a + 5b = 3,9 \end{cases}$$

Uning yechimi  $a=0,014$ ,  $b=-0,48$ . Shunday qilib, chiziqli bog'lanishning tuzilishi

$$y = 0,014x - 0,48 \text{ ko'rinishda bo'ladi.}$$

### Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotda qo'llanishi

Umumiy holda  $X$  tovarga bo'lgan talab ko'p o'zgaruvchi funksiya bo'ladi, ya'ni sotib olinayotgan tovarning miqdori  $Q_x$  uning narxi  $P_x$ , ikkilamchi xom-ashyo narxi  $P_y$ , iste'molchining o'rtacha daromad darajasi  $Y$ , yil fasllari  $t$  va hokazolarga bog'liq.

$\frac{\partial Q_x}{\partial P_x}$  xususiy hosila  $Q_x$  talabning faqat  $P_x$  tovar narxi

o'zgarganda o'zgarish tezligining o'lchov birligi bo'lib xizmat qiladi, bu holda qolgan barcha o'zgaruvchilar o'zgarimas deb faraz qilinadi. Xuddi shunga o'xshash xususiy hosila  $\frac{\partial Q_y}{\partial Q_y}$  xomashyoning narxi  $P_y$  o'zgarganda

$X$  tovarga bo'lgan talab qanday tezlikda o'zgarishini ko'rsatadi.

Xususiy hosilalarning ishorasidan foydalanib  $X$  va  $Y$  tovarlarning xarakterini topish mumkin, aynan:

agar  $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} > 0$  va  $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} > 0$  bo'lsa,  $X$  va  $Y$  tovarlar o'rin bosuvchi,

agar  $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} < 0$  va  $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} < 0$  bo'lsa,  $X$  va  $Y$  tovarlar o'rin to'ldiruvchi tovarlar hisoblanadi.

**Masalan 5.** Avtomobillarga ehtiyot qismlari ishlab chiqaradigan firma o'z mahsulotlarini ichki va tashqi bozorga chiqarish imkoniyatiga ega.

Tashqi bozorda talab quyidagi ifoda bilan berilgan:  $P_1 + 8Q_1 = 421$

Ichki bozorda esa:  $P_2 + 2,5Q_2 = 80$

Bu yerda,  $Q_1$  va  $Q_2$  mos ravishda bir hafta davomida tashqi va ichki bozorda sotib olinadigan miqdor;  $P_1$  va  $P_2$  tashqi va ichki

bozordagi narxlar. Firmaning umumiy harajatlari  $TC = 250 + 5Q$ . Bu yerda  $Q = Q_1 + Q_2$ .

Agar:1) firma narxlarini o'zgartirish siyosatini o'tkazish imkoniyatiga ega bo'lsa:

2) ikkita bozordagi narxlar bir xil bo'lsa.

Maksimal foydaga ega bo'lish uchun har qaysi bozorda firmaning mahsulotiga qanday narx o'rnatilishi kerak. Har bir holda firmaning foydasini aniqlang.

**Yechish:** Masalaning birinchi qismi firma o'zining iste'molchilarini ajratishi mumkin va har bir bozorda o'ziga eng ma'qul narxni qo'yishi mumkin deb faraz qilinadi. Tashqi bozordagi talab funksiyasi  $P_1 + 8Q_1 = 421$  ichki bozorda esa  $P_2 + 2,5Q_2 = 80$  firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig'indisiga teng:

$$R = R_1 + R_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (421 - 8Q_1)Q_1 + (80 - 2,5Q_2)Q_2 = \\ = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2$$

Firmaning umumiy xarajati:  $TC = 250 + 5(Q_1 + Q_2)$

demak, foyda funksiyasi

$$\pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2.$$

Biz  $Q$  ga bog'liq bo'lgan foyda funksiyasini hosil qildik. Endi firmaning foydasi maksimum bo'lganda  $Q_1$  va  $Q_2$  larning qiymatini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun  $Q_1$  va  $Q_2$  bo'yicha xususiy hosilalarni topib nolga tenglaymiz:

$$\begin{cases} \partial\pi/\partial Q_1 = 421 - 16Q_1 - 5, & \begin{cases} 416 - 16Q_1 = 0 \\ 75 - 5Q_2 = 0 \end{cases} \\ \partial\pi/\partial Q_2 = 80 - 5Q_2 - 5; \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib  $Q_1 = 26$ ,  $Q_2 = 15$  ni topamiz.

Ikkinchi shartni tekshiramiz:

$$\partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16, \quad \partial^2\pi/\partial Q_2^2 = -5, \quad \partial^2\pi/\partial Q_1\partial Q_2 = 0.$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2} \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2} - \left( \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1\partial Q_2} \right)^2 = (-16) \cdot (-5) - 0 = 80 > 0 \quad \text{va} \quad \partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16 < 0$$

Demak, foyda funksiyaning maksimumga erishish sharti bajariladi. Shunday qilib firma maksimum foydaga ega bo'lishi uchun tashqi

bozorga 26 ta ichki bozorga 15 ta mahsulot chiqarishi kerak.  $Q_1$  va  $Q_2$  ning bu qiymatlarini talab funksiyaga qo'yib  $P_1$  va  $P_2$  narxlarni topamiz:

$$P_1 = 421 - 8Q_1 = 421 - 8 \times 26 = 213,$$

$$P_2 = 80 - 2,5Q_2 = 80 - 2,5 \times 15 = 42,5$$

Demak, tovarning tashqi bozordagi narxi 213 pul birligi, ichki bozordagi narxi esa 42,5 pul birligi bo'lib, firmaning foydasi:

$$\pi = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2 - 5Q_1 - 5Q_2 = 421 \times 26 - 8 \times 26^2 + 80 \times 15 - 2,5 \times 15^2 - 250 - 5 \times 26 - 5 \times 15 = 5720,5 \text{ p.b.}$$

Firmaning haftalik foydasi – narx o'zgarish siyosatini o'tkazish shartlarida  $\pi=5720,5$  pul birligini tashkil qiladi.

Iste'molchilar bozorini ajratish imkoniyati bo'lmagan holda ichki va tashqi narx bir xil bo'ladi:  $P_1=P_2=P$ . U holda tashqi va ichki bozorga chiqariladigan tovar miqdori teng bo'ladi:

$$Q_1 = \frac{421 - P_1}{8} = 52,625 - 0,125P; \quad Q_2 = \frac{80 - P_2}{2,5} = 32 - 0,4P$$

$$\text{Umumiy miqdori } Q=Q_1+Q_2=84,625-0,525P, \text{ bunda } P = \frac{84,625 - Q}{0,525}$$

yagona bozor uchun yangi talab funksiyasi.

$$\text{Yagona bozordagi daromad: } TR = PQ = \frac{84,625 - Q}{0,525} Q = \frac{84,625}{0,525} Q - \frac{Q^2}{0,525},$$

$$\text{Umumiy harajatlar } TC = 250 + 5Q;$$

$$\text{Firmaning foyda funksiyasi: } \pi = \frac{84,625}{0,525} Q - \frac{Q^2}{0,525} - 250 - 5Q,$$

Foyda maksimum bo'ladigan birinchi tartibli shartga asosan  $Q$  ning qiymatini topish zarur:  $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q} = \frac{84,625}{0,525} - \frac{2Q}{0,525} - 5 = 0. \quad Q = 41.$

$\partial^2 \pi / \partial Q^2 < 0$  funksiya maksimumining sharti.

Demak,  $Q=41$  nuqtada foyda funksiyasi maksimumga erishadi.

$$\pi(41) = \frac{84,625}{0,525} \times 41 - \frac{41^2}{0,525} - 250 - 5 \times 41 \approx 2951,9.$$

Endi birlashgan bozorda tovarning narxini aniqlash kerak. Buning uchun birlashgan talab funksiyasidan foydalanamiz:



$$P(41) = \frac{84,625 - 41}{0,525} \approx 83,10.$$

E'tibor qiling, birinchi va ikkinchi hollarga bozorga chiqarilayotgan tovarning miqdori bir xil. Lekin birinchi holda firmaning tovarlariga bo'lgan narx har xil, natijada foyda olish imkoniyati bo'ladi.

$$\pi_1 = 5720,5, \quad \pi_2 = 2951,9.$$

Ishlab chiqarishning  $x$  va  $y$  faktoriga bog'liq  $z=f(x, y)$  ishlab chiqarish funksiyasi berilgan bo'lsin.

Ishlab chiqarishning chegaraviy unumdorlik faktorlari:

$$\omega_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \omega_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Bunda  $\omega_x - x$  faktorining chegaraviy unumdorligi,

$\omega_y - y$  faktorining chegaraviy unumdorligi.

Ishlab chiqarish ikki faktorining chegaraviy aralashish me'yori:

$$\eta_{xy} = -\frac{\omega_y}{\omega_x} = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\eta_{yx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y} = -\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

Bunda  $\eta_{xy}$  - ishlab chiqarish  $x$  faktorining ishlab chiqarish  $y$  faktoriga chegaraviy aralashish me'yori.

$\eta_{yx}$  - ishlab chiqarish  $y$  faktorining  $x$  faktoriga chegaraviy aralashish me'yori.

Mahsulot ishlab chiqarishning ma'lum faktori bo'yicha elastiklikning xususiy qiymatlari:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{z}{x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z} \quad \text{va} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} : \frac{z}{y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}$$

Bunda  $\varepsilon_x$  - ishlab chiqarish hajmining  $x$  faktor bo'yicha elastikligi,

$\varepsilon_y$  - ishlab chiqarish hajmining  $y$  faktor bo'yicha elastikligi.

Elastiklik koeffitsienti ishlab chiqarishning bir faktori 1% ga o'zgaranda va ikkinchi faktor o'zgarimas bo'lganda ishlab chiqarish hajmi qancha foizga o'zgarishini anglatadi.

**Masalan 6.**  $z = 4x^3 - xy^2 - 5y$  ishlab chiqarish funksiyasi bo'lib, bunda  $x$  mehnat kuchiga xarajatlar,  $y$  mehnatiga (investitsiya) xarajatlar.

$x=1$  va  $y=2$  da funksiya xususiy elastikligini hisoblang.

**Yechish:**  $\frac{\partial z}{\partial x} = (4x^3 - xy^2 + 5y)'_x = 12x^2 - y^2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^3 - xy^2 + 5y)'_y = -2xy + 5$ .

$$E_x = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{4x^3 - xy^2 + 5y} \cdot (12x^2 - y^2), \quad E_y = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{4x^3 - xy^2 + 5y} \cdot (5 - 2xy).$$

$$E_x(1; 2) = \frac{1}{4 - 4 + 10} (12 - 4) = \frac{8}{10} = 0.8, \quad E_y(1; 2) = \frac{2}{4 - 4 + 10} (5 - 4) = \frac{2}{10} = 0.2.$$

Demak, mehnat kuchiga xarajatlar 1% ga ortsa, ishlab chiqarish hajmi 0.8% ga, mehnatga (investitsiya) xarajatlar 1% ga ortsa, ishlab chiqarish hajmi 0.2% ga ortadi.

**Masalan 7.**  $Y = F(K; L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$  Kobba-Duglas ishlab chiqarish funksiyasining asosiy parametr va xarakteristikalarini aniqlang, bunda  $Y$  – ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi;  $L$  – mehnat xarajatlari;  $K$  – ishlab chiqarish fondlari hajmi;  $A, \alpha, \beta$  – ishlab chiqarish funksiyasi ko'rsatkichlarini ifodalovchi o'zgarimas sonlar, bunda  $A > 0$ ,  $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ .

**Yechish:** Birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\omega_L = Y'_L = A \cdot \beta \cdot K^\alpha \cdot L^{\beta-1} - \text{chegaraviy mehnat unumdorligi};$$

$\omega_K = Y'_K = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\beta$  – chegaraviy mehnat investitsiya unumdorligi iqtisodda  $\omega_K$  chegaraviy jamg'arma unumdorligi deyiladi.

Kobba-Duglas funksiyasining elastikligini hisoblaymiz:

$$E_K(F) = \frac{K}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{K}{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta} \cdot A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\beta = \alpha,$$

$$E_L(F) = \frac{L}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{L}{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta} \cdot A \cdot \beta \cdot K^\alpha \cdot L^{\beta-1} = \beta.$$

Demak,  $\alpha$  – jamg'armalar (fondlar) bo'yicha mahsulot ishlab chiqarish elastikligi,  $\beta$  – mahsulot ishlab chiqarishning mehnat bo'yicha elastikligi  $K$  – ishlab chiqarish fondlarining nisbiy 1% ga o'zgarishi mahsulot ishlab chiqarishning nisbiy miqdorini taxminan  $\alpha\%$  ga

o'zgarishini kamaytirib chiqaradi, agarda  $K$  ning  $1\%$  ga o'zgarishi yetarlicha kichik bo'lsa.

Agar  $L$  mehnat xarajatlarini  $1\%$  ga orttirilsa, u holda mahsulot ishlab chiqarish miqdori taxminan  $\beta\%$  ga o'zgaradi.

Ikki faktorning aralash me'yorini aniqlaymiz:

$$\eta_{KL} = -\frac{\omega_L}{\omega_K} = -\frac{A\beta K^\alpha L^{\beta-1}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^\beta} = -\frac{\beta K}{\alpha L}$$

asosiy kapitalning mehnat bilan chegaraviy aralashish normasi.

$$\eta_{LK} = -\frac{\omega_K}{\omega_L} = -\frac{\alpha L}{\beta K}$$

mehnatning asosiy kapital bilan aralashish chegaraviy me'yorini.

### To'la differensial

$Y = Y(K; L)$  – Kobbii-Duglas ishlab chiqarish funksiyasini qaraymiz.

Bunda,  $Y$  – ishlab chiqarish mahsulotlari narxi;  $L$  – mehnat xarajatlari;  $K$  – ishlab chiqarish fondlari hajmi.

$K$  ishlab chiqarish fondlari hajmi va  $L$  mehnat resurslari xarajatlarini fiksirlaymiz. U holda mahsulot ishlab chiqarish narxi  $Y = Y(K; L)$  ishlab chiqarish funksiyasining to'la differensial:

$$dY = Y'_K dK + Y'_L dL.$$

Ammo,  $Y'_K$  – chegaraviy mehnat unumdorligi;  $Y'_L$  – chegaraviy fond unumdorligi. U holda,  $Y'_K \Delta K - \Delta K$  qo'shimcha fondlar yordamida ishlab chiqarilgan mahsulot narxi;  $Y'_L \Delta L - \Delta L$  mehnat xarajatlari orqali ishlab chiqarilgan qo'shimcha mahsulot narxi. Kichik  $\Delta L$  mehnat xarajatlari va  $\Delta K$  fondlar hajmi o'zgarishida mahsulot ishlab chiqarish o'zgarishi  $\Delta Y \approx dY$ ,  $\Delta Y = Y'_K \cdot \Delta K + Y'_L \cdot \Delta L$ .

Demak, mehnat resurslariga xarajatning oz miqdorda o'zgarishi va ishlab chiqarish fondlarining ham oz miqdorda o'zgarishdan ishlab chiqarish mahsulot narxining o'zgarishi taxminan avvalgi fondlar hajmida qo'shimcha mehnat xarajatlari yordamida ishlab chiqarish mahsulot va oldingi mehnat resurslari miqdorida qo'shimcha fondlar

yordamida ishlab chiqarish qo‘shimcha mahsulot narxlari yig‘indisiga teng.

$Y$  ishlab chiqarish doimiy (o‘zgarmas) bo‘lsin. U holda  $dY = 0$  yoki  $Y'_K dK + Y'_L dL = 0$ .

Demak,  $-\frac{dL}{dK} = \frac{Y'_K}{Y'_L} = \frac{\omega_K}{\omega_L} = \eta_{LK}$  munosabat asosiy kapitalning mehnat bilan chegaraviy almashtirish me‘yoridir (normasidir). Doimiy ishlab chiqarishda va yetarli kichik  $\Delta K$  va  $\Delta L$  da  $\eta_{LK} = \frac{dL}{dK} = -\frac{\Delta L}{\Delta K}$ .

Demak, chegaraviy almashtirish normasi asosiy kapital xarajatlari bir birlikka kamaysa (doimiy ishlab chiqarishda) mehnat xarajatlari necha birlikka ortishini anglatadi.

**Masalan 7.** Tashkilot har oyda 30 mln p.b. mahsulot ishlab chiqardi. Uning asosiy fondlari 100 mln p.b., mehnat resurslari esa 1500 b. Tashkilot iqtisodchilari mahsulot hajmini 1 mln kun.birlikka ortishi uchun 4 mln p.b. miqdorida uskuna sotib olish kerakligini hisoblashdi. Ishlab chiqarish funksiyasini  $\alpha + \beta = 1$  shartda Kobba-Duglas ko‘rinishida tuzing.

**Yechish:** Ishlab chiqarish funksiyasini  $Y = A \cdot K^\alpha L^\beta$  ko‘rinishida qo‘llaymiz, bunda  $Y$  – ishlab chiqarish mahsulot hajmi,  $L$  – mehnat sarflari,  $K$  – asosiy fondlar hajmi;  $A, \alpha, \beta$  – ishlab chiqarish funksiyasi ko‘rsatkichlari.  $\alpha + \beta = 1$  bo‘lganligidan  $Y = A \cdot K^\alpha L^{1-\alpha}$ .  $A$  va  $\alpha$  parametrlarni aniqlaymiz. Masala shartiga ko‘ra  $Y_0 = 30$ ,  $K_0 = 100$ ,  $L_0 = 1500$ ,  $\Delta Y = 1$ ,  $\Delta K = 4$ .

$\Delta Y \approx dY = Y'_K \cdot \Delta K + Y'_L \cdot \Delta L$  munosabatdan foydalanamiz.

Mehnat xarajatlari o‘zgarmaganligi uchun  $\Delta L = 0$  bo‘ldi. U holda  $\Delta Y = Y'_K \cdot \Delta K = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} \cdot \Delta K$  va  $Y_0 = A \cdot K_0^\alpha \cdot L_0^{1-\alpha}$  munosabatlarga masala shartidagi berilganlarni qo‘yib:

$$\begin{cases} A \cdot \alpha \cdot 100^{\alpha-1} \cdot 1500^{1-\alpha} \cdot 4 = 1 \\ A \cdot \alpha \cdot 100^\alpha \cdot 1500^{1-\alpha} = 30 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib:  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $A = \frac{30}{100^{5/6} 1500^{1/6}} = 15.7$ .

Demak, ishlab chiqarish funksiyasi:  $Y = 15.7 \cdot K^{5/6} L^{1/6}$ .

Ikki tur mahsulotlar ishlab chiqish hajmi  $x$  va  $y$  bo'lib, olinadigan foyda miqdori mos ravishda  $p_1$  va  $p_2$  bo'lsin. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun xarajatlar  $C=c(x,y)$  differensillanuvchi funksiya yordamida berilgan bo'lsin. U holda ishlab chiqarishdan olinadigan foyda  $\Pi = \Pi(x, y) = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y - C(x, y)$

Foydani maksimallashtirish tabiiyki  $\Pi = \Pi(x, y)$  ikki o'zgaruvchili funksiyaning  $x \geq 0, y \geq 0$  shartdagi lokal ekstremumini topishga keltiriladi.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

sistemani yechib statsionar nuqtani topamiz.

Demak,  $p_1 = \frac{\partial c}{\partial x}, p_2 = \frac{\partial c}{\partial y}$ , bunda  $\frac{\partial c}{\partial x} - 1$  tur  $x$  birlik mahsulot

ishlab chiqarish uchun chegaraviy xarajatlar,  $\frac{\partial c}{\partial y} - 2$  tur  $y$  birlik mahsulot

ishlab chiqarish uchun chegaraviy xarajatlar.

$p_1 = \frac{\partial c}{\partial x}, p_2 = \frac{\partial c}{\partial y}$  munosabatning iqtisodiy ma'nosi: mahsulotning

chegaraviy qiymati (narxi) shu mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan xarajatlarning chegaraviy qiymatiga teng.

Ishlab chiqarish funksiyasi  $X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$ ,  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  funksiyasi bo'lsin, bunda  $A$  - neytral (texnologik koeffitsient) texnik rivojlanish koeffitsienti,  $\alpha_1$  - mehnat bo'yicha elastiklik,  $\alpha_2$  - jamg'armalar elastikligi.

Agar  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 1 - \alpha$  bo'lsa

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$$

Kobbi-Duglas funksiyasi hosil bo'ladi.

**Masalan 8.** Yalpi ishlab chiqarish funksiyasi (mlrd p.b.) asosiy ishlab chiqarish jamg'armalari (mlrd p.b.) va mehnatga ishtirok

etayotgan aholi (mln kishi) soniga bog'liq holda  $X = 0.931 \cdot K^{0.539} \cdot L^{0.594}$  funksiyasini ifodalasin.

Resurslar sarfining o'sishi bilan ishlab chiqarish ham o'sadi, ya'ni

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 A \cdot K^{\alpha_1-1} \cdot L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K} > 0, \text{ chunki } \alpha_1 > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2-1} = \frac{\alpha_2 X}{L} > 0, \text{ chunki } \alpha_2 > 0.$$

Resurslar sarfining ortishi bilan uning chegaraviy tushumi kamayadi, ya'ni

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 K} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) \cdot K^{\alpha_1-2} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) \frac{X}{K^2} < 0, \text{ chunki } \alpha_1 < 1$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 L} = \alpha_2(\alpha_2 - 1) \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2-2} = (\alpha_2 - 1) \frac{X}{L^2} < 0, \text{ chunki } \alpha_2 < 1.$$

Resurslarning birining ortishi bilan ishlab chiqarish ham ortadi. Demak,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $0 < \alpha_2 < 1$  da berilgan funksiya neoklassik.

$\alpha_1 = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K}$  - asosiy jamg'armalar bo'yicha ishlab chiqarish elastikligi,

$\alpha_2 = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L}$  - mehnat resurslari bo'yicha ishlab chiqarish elastikligi.

Bu munosabatlar har bir faktor 1% ga ortsa ishlab chiqarish necha foizga o'sishini anglatadi.

Xususan,  $X = 0.931 \cdot K^{0.539} \cdot L^{0.594}$  ishlab chiqarish funksiyasida asosiy fondlarning 1% ga ko'payishi yalpi mahsulot ishlab chiqarishni 0.539% ga ortishini, mehnatga band ishchilarning hajmi 1% ga ko'payishi esa yalpi ishlab chiqarishni 0.594% ga ortishini bildiradi.

Agar  $\alpha_1 < \alpha_2$  da jamg'arma himoyalovchi (ekstensiv) o'sish o'rinlidir.

Ishlab chiqarish o'sish sur'atini aniqlaylik:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left( \frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{\alpha_2}$$

Har ikki qismni  $\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$  darajaga oshirib

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}$$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 > 1$  da ishlab chiqarish faktorning o'rtacha o'sishidan yuqori,  $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$  da pastroq bo'ladi. Demak,  $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$  da ishlab chiqarish funksiyasi o'suvchi iqtisodni ifodalaydi.

*KOL* tekisligida satr chiziq-lari yoki izokvantalar deb  $F(K, L) = X_0$ ,  $X_0 = const$  tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ishlab chiqarish funksiyasi uchun

$$A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} = X_0 \quad \text{yoki} \quad K^\alpha = \frac{X_0}{A} \cdot L^{-\alpha},$$

ya'ni sath chiziq-lar asimptotalari koordinata o'qlari bo'lgan giperboladir.

Aniq bir izokvantdagi turli  $K$  va  $L$  uchun ishlab chiqarish hajmi doimiy va aniq  $X_0$  dir, bu ega resurslarning o'zaro almashinuvchanligini anglatadi.

$F(K, L) = X_0$  izokvanta uchun  $dF = 0$ , ya'ni  $\frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0$ .

Bunda  $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$ , shuning uchun  $dK \cdot dL < 0$ , ya'ni  $dK$  va  $dL$  turli ishorali: agar  $dL < 0$  bo'lsa, ya'ni ishlab chiqarish hajmi kamaysa, u holda  $dK > 0$ , ya'ni  $|dL|$  kam ishlab chiqarish hajmi  $dK$  jang'arma fondi bilan qoplanadi.

**Ta'rif.**  $S_K$  mehnatni jang'armalar bilan chegaraviy almashinish me'yori deb

$$S_K = \frac{dK}{|dL|} = -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

munosabatga,  $S_L$  fondlarning mehnat bilan chegaraviy almashinish me'yori deb

$$S_L = -\frac{\partial L}{\partial K} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

munosabatga aytiladi, bunda  $S_K \cdot S_L = 1$ ,  $S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k$ ,  $k = \frac{K}{L}$

ya'ni, mehnatni fondlar bilan almashinishi jamg'arma ta'minotiga proporsional.

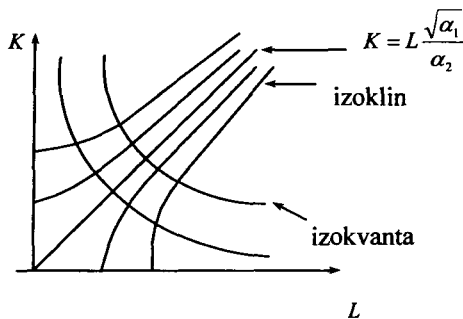
Ishlab chiqarish funksiyasining eng yuqori o'sish chizig'iga izoklinlar deyiladi. Izoklinlar izokvantalarga perpendikular

$\frac{dK}{(dF/\partial K)} = \frac{\partial K}{(\partial F/\partial L)}$  - izoklinlar tenglamasi.

Ishlab chiqarish funksiyasi uchun  $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}$ , shuning uchun izoklinlar  $\frac{1}{\alpha_1} K dK = \frac{1}{\alpha_2} L dL$  differensial tenglama bilan beriladi. Uni

yechib,  $K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a}$ , bunda  $a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$ . Bunda,  $(L_0, K_0)$  izoklin o'tuvchi nuqta.

$a = 0$  da  $K = L \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ .



O'sishning ekstensiv (resurslar sarfining o'sishi, ya'ni ishlab chiqarish masshtablarining o'sishidan) va intensiv (resurslardan foydalanib effektivligini orttirishdan) faktorlari muhimdir.



Ishlab chiqarish funksiyasidan foydalanib, ishlab chiqarishning masshtabi va effektivligini aniqlaymiz.

Ishlab chiqarish funksiyasini nisbiy ko'rsatkichlarda

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2},$$

$X_0$  – mahsulot hajmi,  $K_0$  – fondlar sarfi,  $L_0$  – mehnat sarfi.

$$X = \frac{X_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = A \cdot K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}, \quad A = \frac{X_0}{K_0^{\alpha_1} \cdot L_0^{\alpha_2}}$$

$A$  koeffitsient resurslarni ishlab chiqarish hajmi bilan o'Ichaydi.

Agar ishlab chiqarish va resurslarni nisbiy birlikdagi o'Ichamlarini  $\bar{X}$ ,  $\bar{K}$ ,  $\bar{L}$  orqali belgilasak, u holda ishlab chiqarish funksiyasi

$$\bar{X} = \bar{K}^{\alpha_1} \bar{L}^{\alpha_2}$$

ko'rinishda bo'ladi. Shu ko'rinishdagi ishlab chiqarish funksiyasi uchun effektivlikni aniqlaymiz. Effektivlik bu natijaning xarajatlarga nisbatidir. Bizning holda 2 xil xarajatlar: o'tgan mehnatlar uchun  $\bar{K}$  fond ko'rinishidagi va  $\bar{L}$  hozirgi mehnat xarajatlari. Shuning uchun effektivlikning 2 xil ko'rsatkichi mavjud:

$\frac{\bar{X}}{\bar{K}}$  – fond unumdorligi,  $\frac{\bar{X}}{\bar{L}}$  – mehnat unumdorligi.

$$E = \left(\frac{\bar{X}}{\bar{K}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{L}}\right)^{1-\alpha} \text{ – iqtisodiy effektivlikning umumlashgan}$$

koeffitsientidir.

Iqtisodiy effektivlik ko'rsatkichi yordamida ishlab chiqarish funksiyasi tashqi ko'rinishdan Kobb-Duglas funksiyasi ko'rinishini oladi:  $\bar{X} = E \cdot \bar{K}^{\alpha} \cdot \bar{L}^{1-\alpha}$ .

$$\text{Bunda } E = E(K, L)$$

$$\text{Ishlab chiqarish masshtabi } M = \bar{K}^{\alpha} \cdot \bar{L}^{1-\alpha}.$$

Demak, ishlab chiqarish  $\bar{X} = E \cdot M$  – iqtisodiy effektivlik va ishlab chiqarish hajmlari ko'paytmasidir.

**Masalan 9.** 1960–1995-yil ko'rsatkichlari bo'yicha AQSH ichki yalpi ishlab chiqarish funksiyasi  $X = 2.248 K^{0.404} \cdot L^{0.803}$  ning ishlab chiqarish masshtabi va effektivligini aniqlang.

**Yechish:** 1987-yilgi narxlar bo'yicha mlrd dollarda AQSHning yalpi ichiki ishlab chiqarish hajmi 1960-yildan 1995-yilgacha 2.82 marta ortgan, ya'ni  $\bar{X}=2.82$ , asosiy ishlab chiqarish fondlari shu davrda 2.88 marta, ya'ni  $\bar{K}=2.88$ , mehnatga bandlik 1.93 marta, ya'ni  $\bar{L}=1.93$  ortgan.

Fondlar va mehnat bo'yicha nisbiy elastiklikni topamiz:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0.404}{0.404 + 0.803} = 0.3347, \quad 1 - \alpha = 0.6653$$

Endi resurslarning xususiy effektivligini aniqlaymiz:

$$E_K = \frac{\bar{X}}{\bar{K}} = \frac{2.82}{2.88} = 0.98,$$

$$E_L = \frac{\bar{X}}{\bar{L}} = \frac{2.82}{1.93} = 1.46.$$

So'ngra effektivlikning umumlashgan koeffitsientini aniqlaymiz:

$$E = E_K^\alpha \cdot E_L^{1-\alpha} = 0.98^{0.3347} \cdot 1.46^{0.6653} = 1.278$$

Ishlab chiqarish masshtabini resurslar o'sish sur'atining o'rtta geometrigi kabi aniqlaymiz:

$$M = \bar{K}^\alpha \cdot \bar{L}^{1-\alpha} = 2.88^{0.3347} \cdot 1.93^{0.6653} = 2.207$$

Demak, 1960-yildan 1995-yilgacha YAIM o'sishining 2.82 martagacha ortishi ishlab chiqarish masshtabining 2.207 marta ortishi va ishlab chiqarish effektivligining 1.278 marta ortishi hisobidan amalga oshirilgan ( $1.273 \cdot 2.207 = 2.82$ ).

## 12. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

### Differensial tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar

Differensial tenglamalar matematikada alohida o'rin egallab, tabiiy jarayonlarni tekshirish, jamiyatdagi ayrim qonuniyatlarni o'rganish differensial tenglamalarni o'z ichiga olgan matematik modellarga keladi.

**Ta'rif.** Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchilar, noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama *oddiy differensial tenglama*, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa *xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda  $n$ -tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Jumladan, 1-tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1^*)$$

kabidir.

Agar (1\*) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Bu holda tenglama hosilaga nisbatan yechilgan, deyiladi.

$$\text{Misollar: } y' = 7x^3, \quad (y')^3 y^2 + 5x = 0, \quad y' = x^4 \cos y.$$

**Ta'rif.** Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb  $(a, b)$  oraliqda  $(1^*)$  (xususan (1))-tenglamani ayniyatga aylantiruvchi  $y = \varphi(x)$  funksiyaga aytiladi.

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Bu masala (1)-tenglama uchun Koshi teoremasi orqali ifodalanadi.

**Teorema (Koshi teoremasi).** Agar  $f(x, y)$  funksiya va uning xususiy hosilasi  $f'_y(x, y)$   $OXY$  tekislikning biror  $D$  sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy  $(x_0, y_0) \in D$  nuqtaning biror atofida (1)-tenglamaning  $x = x_0$  da  $y = y_0$  shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

(1)-tenglamaning  $y|_{x=x_0} = y_0$  boshlang'ich shartini (Koshi shartini) qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deb ataladi. Buning geometrik ma'nosi integral egri chiziqlar oilasidan  $D$  sohaning berilgan  $(x_0, y_0)$  nuqtasidan o'tuvchi bittasini tanlab olinadi.

**Ta'rif.** (1)-tenglamaning umumiy yechimi deb,  $c$  o'zgarmaning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi  $y = \varphi(x, c)$  funksiyalar majmuyiga aytiladi.

**Ta'rif.**  $\{\varphi(x, c)\}$  (1)-tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. (1)-tenglamaning  $D$  sohasidagi xususiy yechimi deb,  $c = c_0$  o'zgarmaning qiymatda olingan  $y = \varphi(x, c_0)$  funksiyaga aytiladi.

Keyingi o'rinlarda «*differensial tenglama*» iborasini «*tenglama*» deb bayon qilamiz.

## O'zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan tenglamalar

**Ta'rif.**  $f_2(y)dy=f_1(x)dx$  ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$  uzluksiz funksiyalar.

Bu ko'rinishdagi tenglamalarni bevosita integrallash yordamida umumiy yechimlari hosil qilinadi:  $\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C$ .

**Masalan.** Tenglamani yeching:  $x dx + y dy = 0$ .

**Yechish:** Bu o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir, chunki  $dx$  oldidagi funksiya faqat  $x$  ga,  $dy$  koeffitsienti esa faqat  $y$  ning funksiyasidir. Bevosita integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\int x dx + \int y dy = C_1 \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 = C^2$$

Demak, makazi koordinatalar boshida bo'lgan aylanalar oilasi berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini hosil qilar ekan.

**Ta'rif.** Ushbu

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi.

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz:  $y'$  hosilani uning ekvivalent formasi  $dy/dx$  ga almashtirib,

tenglikning ikkala tomonini  $\frac{dx}{f_2(y)}$  ga ko'paytiriladi ( $f_2(y) \neq 0$ ):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C$$

Bu yerda,  $C$  – o'zgaruvchisiz kattalik.

**Masalan:**  $y' = \frac{x(\sqrt{y^2+1})}{y}$  tenglamaning (0,1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

**Yechish:** O'zgaruvchilarni ajratamiz:  $xydy/\sqrt{y^2+1} = xdx$ .

Bundan,  $\int xydy/\sqrt{y^2+1} = \int xdx + C$ ,

Demak,  $\sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{2} + c$ ,  $y^2+1 = (\frac{x^2}{2} + c)^2$ ,  $y = \sqrt{(\frac{x^2}{2} + c)^2 - 1}$ .

(0,1) nuqtadan o'tuvchi yechim izlanayotgani uchun  $C = \pm\sqrt{2}$  topiladi.

Demak,  $y = \sqrt{(x^2/2 + \sqrt{2})^2 - 1}$

Ba'zi differensial tenglamalarni o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida o'zgaruvchilarni ajraladigan differensial tenglamaga keltirish mumkin.

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

ko'rinishdagi tenglamalar  $z = ax + by$  almashtirish yordamida o'zgaruvchilarni ajraladigan differensial tenglamaga keltiriladi. Yangi  $x$  va  $z$  o'zgaruvchilarda

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + b f(z) \quad \text{yoki} \quad \frac{dz}{a + b f(z)} = dx$$

o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\int \frac{dz}{a + b f(z)} = x + C.$$

**Masalan:** Tenglamani yeching:  $\frac{dy}{dx} = 2x + y$

**Yechish:**  $z = 2x + y$  almashtirish yordamida

$\frac{dz}{dx} - 2 = z$  o'zgaruvchilari ajralgan tenglamani hosil qilamiz.

O'zgaruvchilarni ajratib va integrallab umumiy yechimni hosil

qilamiz:  $\frac{dz}{z+2} = dx$ ,  $\ln|z+2| = x + \ln C, C > 0.$   $z = Ce^x - 2,$   
 $2x + y = Ce^x - 2, y = Ce^x - 2x - 2.$

### Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

**Ta'rif.** Agar  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$  ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda  $f(x, y)$   $m$  darajali bir jinsli funktsiya deyiladi.

**Masalan:**  $x \cos \frac{y}{x}; x - y \cos \frac{y}{x}; \sqrt[3]{x^3 + y^3}; \frac{x^2 - y^2}{xy}$  funktsiyalar bir jinsli funktsiyalardir.

**I.** Agar  $P(x, y)$  va  $Q(x, y)$  bir xil o'lchovli bir jinsli funktsiyalar bo'lsa, u holda  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli differensial tenglamalar  $y = ux$  alamshtirish yordamida, bu yerda  $u$  yangi noma'lumli funktsiya, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

**Yechish:** Tenglama bir jinsli bo'lgani uchun  $y = ux$  almashtirishni bajaramiz, natijada  $y' = u + u'x$  ni hosil qilamiz. Tenglama  $u + u'x = \frac{1+u}{1-u}$

yoki  $u'x = \frac{1+u^2}{1-u}$  ko'rinishini oladi. O'zgaruvchilarni ajratib

$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}$  ni hosil qilamiz. Uni integrallab

$\arctg u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x| + C$  ni topamiz.

Oldingi o'zgaruvchilarga qaytib  $\arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \ln|x| + C$  yoki

$\arctg \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$   $\arctg \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$  ni hosil qilamiz.

II. Ushbu  $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$  ko'rinishdagi tenglamalar bir jinsli

tenglamaga keltiriladi. Agar  $c_1=c=0$  bo'lsa, u holda  $\frac{dy}{dx} = \frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}$  bir

jinsli tenglama hosil bo'ladi.

Agar  $c \neq 0$ ,  $c_1 \neq 0$  bo'lsa, u holda koordinatalar boshini  $ax+by+c=0$  va  $a_1x+b_1y+c_1=0$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi  $(x_0, y_0)$  ga ko'chirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi.  $x=X+x_0$ ,  $y=Y+y_0$ . U holda  $\frac{dy}{dx} = \frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$  - bir jinsli tenglamani hosil qilamiz.

Agar to'g'ri chiziqlar parallel, ya'ni  $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$  bo'lsa, tenglama

$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$  ko'rinishga keladi. Bu holda  $z=ax+by$  deb

$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$  va o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ .

**Yechish:**  $x_0 = 1, y_0 = 2$   $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

sistemaning yechimi bo'lgani uchun  $x=X+1, y=Y+2$ .

U holda  $\frac{dX}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$ .

$z = \frac{Y}{X}$  almashtirish o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiradi.

$$z + X \frac{dz}{dX} = \frac{1-z}{1+z}, \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} = \frac{dX}{X}, -\frac{1}{2} \ln|1-2z-z^2| = \ln|X| - \frac{1}{2} \ln C$$

$$(1-2z-z^2)X^2 = C, X^2 - 2XY - Y^2 = C, x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C.$$



$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$  ko'rinishdagi tenglamalar ham koordinatalar boshini  $ax + by + c = 0$  va  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasiga ko'chirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Agar bu to'g'ri chiziqlar kesishmasa, u holda  $a_1x + b_1y = k(ax + by)$  deb tenglama  $y' = F(ax + by)$  ko'rinishga keltiriladi va  $z = ax + by$  almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

**III.** Ba'zan tenglamalar  $y = z^m$  almashtirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Bu yerda  $m$  oldindan ma'lum bo'lmagan son.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $y' = \frac{x+y}{x+1} + \left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2$

**Yechish:**  $\frac{y-1}{x+1} = \frac{x+y-(x+1)}{x+1} = \frac{x+y}{x+1} - 1$  bo'lgani uchun berilgan

tenglamaning o'ng tomoni  $\frac{x+y}{x+1}$  ifodaning funksiyasi bo'ladi.  $x+y=0$

va  $x+1=0$  chiziqlar  $(-1; 1)$  nuqtada kesishgani uchun koordinata o'qlarini bu nuqtaga parallel ko'chirib, yangi o'zgaruvchilarga o'tamiz:  $t = x+1$ ,  $z = y-1$ . Izlanayotgan funksiya

$z = z(t)$ ,  $z' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = y'$  bo'lgani uchun berilgan tenglama

$z' = 1 + \frac{z}{t} + \left(\frac{z}{t}\right)^2$  ko'rinishga keladi. Hosil bo'lgan bir jinsli tenglamani

yechish uchun  $u = z/t$  almashtirishni bajaramiz, bu yerda  $u = u(t)$ . U

holda  $z = ut$ ,  $z' = u't + u$  va tenglama  $u't = 1 + u^2$  yoki  $\frac{du}{1+u^2} = \frac{dt}{t}$

ko'rinishga keladi, ya'ni o'zgaruvchisi ajraladigan tenglama bo'ladi.

Tenglikni hadma-had integrallab  $\arctg u = \ln|u| + c$  yoki  $u = \tg(\ln|t| + c)$

$u = \frac{z}{t} = \frac{y-1}{x+1}$  bo'lgani uchun  $y = 1 + (x+1)\tg(\ln|x+1| + c)$  hosil bo'ladi.

## Birinchi tartibli chiziqli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

**Ta'rif.** Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb  $y' + p(x)y = q(x)$  (3) ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda  $p(x), q(x)$  uzluksiz funksiyalar. Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, (3)ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y' + p(x)y = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun  $y \neq 0$  deb faraz qilib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\ y &= c e^{-\int p(x)dx} \end{aligned} \quad (4)$$

$C$  ixtiyoriy o'zgarmas son.

Endi (4) da  $C$  ni  $x$  ning funksiyasi, deb qaraymiz, ya'ni

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (5)$$

(«o'zgarmasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

(5)-tenglamani (3)ga qo'yib soddalashtirsak,

$$c'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$c(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c_1, \quad (6)$$

hosil bo'ladi, bu yerda  $c_1$  ixtiyoriy o'zgarmas son.

(6) ni (5)ga qo'ysak, (3)-tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx. \quad (7)$$

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

**Yechish:** Avval  $y' - \frac{2}{x}y = 0$  bir jinsli tenglamani yechamiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| \Rightarrow y = Cx^2.$$

Faraz qilaylik  $C=C(x)$  u holda  $y=C(x)x^2$  berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Uni berilgan tenglamaga qo'yib,  $C(x)$  ni topamiz:

$$C'(x)x^2 - 2xC(x) - \frac{2}{x}x^2C(x) = 2x^3 \Rightarrow C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C_1. \quad \text{Bundan}$$

berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz:  $y=(x^2+C_1)x^2$ .

### Bernulli tenglamasi

Ba'zi bir chiziqli bo'lmagan tenglamalar ayrim almashtirishlar yo'li bilan chiziqli tenglamaga keltiriladi. Bunday tenglamalar qatoriga Bernulli tenglamasini kiritish mumkin:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = \text{const}. \quad (8)$$

Agar  $n=0$  bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan,  $n=1$  da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da  $n \neq 0$ ,  $n \neq 1$  deb faraz qilinadi.

Yangi  $z(x) = z(y(x))$  funksiya kiritamiz  $z = y^{1-n}$  u holda  $z' = (1-n)y^{-n}y'$

(8)-tenglamaning ikkala tomonini  $y^n$  ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q. \quad (11)$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini  $(1-n)$  ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda  $z(x)$  ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz:

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q. \quad (12)$$

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $y' + xy = xy^3$

**Yechish:** Bu tenglama Bernulli tenglamasidir  $n=3$ .  $z = y^{-2}$  almashtirishni bajaramiz. U holda  $z' = -2y^{-3}y'$ .

(12) da asosan  $z' + (-2)xz = -2x$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz:  $z(x) = Cx^2 + I$

Natijada ushbu  $y = \pm(Cx^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$  yechimni olamiz.

## Rikatti tenglamasi

**Ta'rif.**  $\frac{dy}{dx} + a(x)y + b(x)y^2 = C(x)$  ko'rinishdagi tenglamaga *Rikatti tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglama umumiy holda kvadraturada integrallanmaydi. Lekin, agar bu tenglamaning biror  $y = y_1(x)$  xususiy yechimi ma'lum bo'lsa,  $y = y_1 + z$  almashtirish Rikatti tenglamasini  $z$  o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $\frac{dy}{dx} - axy + ay^2 = 1$ .

**Yechish:** Bu Rikatti tenglamasidir.  $y = x$  bu tenglamaning xususiy yechimidir. Suning uchun  $y = x + z$  almashtirish bu Rikatti tenglamasini  $z$  o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi:

$$\frac{dz}{dx} + axz + az^2 = 0.$$

## To'la differensial tenglamalar

**Ta'rif.** Agar  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  (1)

tenglamada  $M(x, y)$  va  $N(x, y)$  uzluksiz differensiallanuvchi

funksiyalar uchun  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  (2)

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (1)-tenglamaga *to'la differensial differensial tenglama* deyiladi, bu yerda  $\frac{\partial M}{\partial y}$  va  $\frac{\partial N}{\partial x}$  uzluksiz funksiyalar.

(2)-shartning bajarilishi (1)-tenglamaning o'ng tomoni biror  $u(x, y)$  funksiyaning to'la differensialli ekanligini anglatadi. U holda (1)-tenglama  $du(x, y) = 0$  yoki  $u(x, y) = C$  umumiy integralga ega bo'ladi.

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \text{ ekanligidan } M = \frac{\partial u}{\partial x}, N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$  munosabatni  $x$  bo'yicha integrallab

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y) \quad \text{munosabatni hosil qilamiz.} \quad \int M(x, y) dx$$

integralni hisoblashda  $y$  ni o'zgarimas deb qaraladi.  $\varphi(y)$  funksiyani aniqlash uchun topilgan  $u(x, y)$  funksiyani  $y$  bo'yicha

differensiallab va  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$  ekanligidan

$\frac{\partial}{\partial y} (\int M(x, y) dx) + \varphi'(y) = N(x, y)$  tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib, noma'lum  $\varphi(y)$  funksiyani aniqlaymiz.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ .

**Yechish:**  $M = \frac{2x}{y^3}$ ,  $N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ .  $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$ .  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

$$u(x, y) = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y), \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(x). \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}.$$

Demak,  $-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(x) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$  yoki  $\varphi'(x) = \frac{1}{y^2}$ .

Bundan  $\varphi(x) = -\frac{1}{y} + C$  va  $u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C$ .

### Integrallovchi ko'paytuvchi

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)\text{-tenglamadagi } M(x, y) \text{ va } N(x, y)$$

uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  (2)-

munosabat o'rinli bo'lmashligi mumkin. U holda (1)-tenglamaning chap qismi biror funksiyaning to'la differensial bo'lmaydi. Bunday hollarda shunday  $\mu = \mu(x, y)$  funksiya topish mumkinki, tenglamaning barcha hadlarini shu funksiyaga ko'paytirilganda tenglamaning chap qismi biror funksiyaning to'la differensial

bo'ladi. Bu usul bilan topilgan tenglamaning umumiy yechimi berilgan tenglamaning umumiy yechimi bilan bir xil bo'ladi. Odatda,  $\mu = \mu(x, y)$  funksiyaga (1)-tenglamaning *integrallovchi ko'paytuvchisi* deyiladi.

$\mu = \mu(x, y)$  funksiya (1)-tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi bo'lsin. Unda  $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$  tenglamada  $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$  shart o'rinli bo'ladi.

Ya'ni  $\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$  yoki  $M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$  yoki  $M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ . Oxirgi tenglamani umumiy holda yechish qiyin masala. Ba'zan, xususiy hollarda bu masalani sodda yechish mumkin.

$$\text{Agar } \mu = \mu(y) \text{ bo'lsa } \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \text{ yoki } \mu(y) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy \right\}.$$

Bu yerda,  $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$  ifoda faqat  $y$  ning funksiyasidan iborat bo'lishi kerak.

$$\text{Agar } \mu = \mu(x) \text{ bo'lsa } \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \text{ yoki } \mu(x) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx \right\}.$$

Bu yerda,  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$  ifoda faqat  $x$  ning funksiyasidan iborat bo'lishi kerak.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$ .

**Yechish:** Bu yerda,  $M = xy^2 + y$ ,  $N = -x$ .  $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$ .  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ .

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{xy^2 + y} = -\frac{2}{y} = \mu(y). \mu(y) = \exp\left(-\int \frac{2}{y} dy\right) = \frac{1}{y^2}. \quad \text{Berilgan}$$

tenglamaning har ikki qismini  $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$  ga ko'paytirib:

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0. \text{ Bu to'la differensial tenglamadir}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right). \text{ Bu tenglamani yechib } \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0 \text{ umumiy yechimni}$$

hosil qilamiz.

### Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglamalar.

#### Klero tenglamasi

**Ta'rif.**  $y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$  (1)

ko'rinishdagi tenglamaga *Klero tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglama yordamchi parametr kiritish bilan sodda integrallanadi:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad y = xp + \psi(p) \quad (1)$$

Oxirgi tenglamani  $x$  bo'yicha differensiallab:

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx} \text{ yoki } \left[x + \psi'(p)\right] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Har bir ko'paytuvchini nolga tenglab: 
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \\ x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasidan:

$$p = C \text{ va } y = Cx + \psi(C) \quad (2)$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasidan  $p$  ni  $x$  ning funksiyasi sifatida topib, uni (1')-tenglamaga qo'yib:

$$y = xp(x) + \psi(p(x)) \quad (1'')$$

Klero tenglamasining yechimini hosil qilamiz. (1'') maxsus yechimdir.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching.  $xy' - y + \sqrt{1+(y')^2} = 0$ .

**Yechish:**  $y' = p$  deb  $y = xp + \sqrt{1+p^2}$ . Bu tenglamani differensiallab

$$y' = p + xp' + \frac{pp'}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Bundan  $\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)p' = 0$ ,  $x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$  yoki  $p = C$ .

Demak,  $y = xC + \sqrt{1+C^2}$  va  $\begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y = px + \sqrt{1+p^2} \end{cases}$ .

### Lagranj tenglamasi

**Ta'rif.**  $y = x\varphi(y') + \psi(y')$  (1)

ko'rinishdagi tenglamaga *Lagranj tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglama ham yordamchi parametr kiritish bilan sodda integrallanadi:

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Bunda

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \quad (2)$$

(2)-tenglamani  $x$  bo'yicha differensiallab:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \quad \text{yoki} \quad p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \quad (3)$$

(3)-tenglama  $p$  ning  $p - \varphi(p) = 0$  shartni qanoatlantiruvchi har bir

$p = p_0 = \text{const}$  qiymatlarida ayniyatga aylanadi. Bunda  $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$



(3)-tenglamadan  $\frac{dx}{dp} - x \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$ . Bu  $x=x(p)$  ga nisbatan chiziqli differensial tenglamadir.

**Masalan:** Differensial tenglamani yeching:  $y = x(y')^2 + (y')^2$ .

**Yechish:**  $y' = p$  deb  $y = xp^2 + p^2$ . Bu tenglamani differensiallab

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}.$$

Bundan,  $\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p} x = \frac{2}{1-p}$ . Demak, differensial tenglamani hosil

qilamiz. Uni integrallab,  $x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}$ .  $\begin{cases} y = xp^2 + p^2 \\ x = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2} \end{cases}$  sistemadan  $p$

ni yo'qotib,  $y = (C + \sqrt{x+1})^2$  - tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.  $y=0$  tenglamaning maxsus yechimidir.

### 13. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.

#### Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

**Ta'rif.**  $n$ -tartibli oddiy differensial tenglama deb  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$  ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda  $x$  erkli o'zgaruvchi,  $y$  izlanayotgan funksiya,  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  birinchi, ikkinchi va h.k.  $n$ -tartibli hosilalar.

$n$ -tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:  $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$   $n$ -tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

**Teorema.** Agar  $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  tenglamada  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  funksiya va uning  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  argumentlari bo'yicha xususiy hosilalari  $x=x_0, y=y_0, y'=y'_0, \dots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$  qiymatlarni o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, tenglamaning  $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$  shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$  boshlang'ich shartlar deyiladi.

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

**Ta'rif.** Tenglamaning umumiy yechimi deb shunday  $y=\phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$  funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular  $c_1, c_2, \dots, c_n$  o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatida tenglamani qanoatlantirib, boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

**Ta'rif.** Tenglamaning xususiy yechimi deb  $c_1, c_2, \dots, c_n$  o'zgaruvchilarning tayin  $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$  qiymatlaridagi  $y=\phi(x, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$  funksiyasiga aytiladi.

## Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar.

### Bevosita integrallash

I.  $y^{(n)} = f(x)$  ko'rinishidagi tenglamalarni bevosita  $n$  marta  $x$  bo'yicha integrallash yordamida umumiy integrali topiladi.

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1, y^{(n-2)} = \int \left( \int f(x) dx \right) dx + c_1(x-x_0) + c_2, \dots,$$

$$y = \int \dots \int f(x) dx \dots dx + \frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_n.$$

**Masalan:** Diferensial tenglamani yeching:  $y^{(4)} = \sin x$ .

**Yechish:** Berilgan tenglamani bevosita to'rt marta ketma-ket integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\int y^4(x) dx = \int \sin x dx + C_1,$$

$$y'''(x) = -\cos x + C_1, \int (y'''(x)) dx = \int (-\cos x + C_1) dx + C_2,$$

$$y''(x) = -\sin x + C_1 x + C_2, y'(x) = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y(x) = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

II.  $y' = f(x, y)$  ko'rinishidagi tenglamalarni  $y' = p(x)$  deb, tartibini bittaga pasaytirish mumkin:  $p' = f(x, p)$ . Bu tenglamani integrallab  $p = p(x, c_1)$  umumiy yechimni topamiz.  $y' = p(x)$  munosabatdan esa  $y = \int p(x, c_1) dx + c_2$  umumiy integralni hosil qilamiz.

**Masalan:** Diferensial tenglamani yeching:  $y'' = y' \operatorname{ctgx}$ .

**Yechish:** Faraz qilaylik,  $p = y'$ . U holda  $y'' = (y')' = p'$ , berilgan tenglamani ko'rinishi  $p' = p \operatorname{ctgx}$ ,  $p \neq 0$  bo'lsin.  $\frac{dz}{z} = \operatorname{ctgx} \cdot dx$  yoki  $\frac{dp}{p} = \frac{d \sin x}{\sin x}$  hadma-had integrallab,  $\ln|p| = \ln|\sin x| + \ln c_1$ , bu yerda  $c_1 > 0$  yoki  $p = c_1 \sin x$ .

$p = 0$  tenglamaning yechimi bo'lgani uchun, uning ixtiyoriy yechimi  $p = c_1 \sin x$ ,  $c_1$  ixtiyoriy son.

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ bo'lgani uchun } dy = c_1 \sin x \, dx.$$

Oxirgi tenglikni integrallab  $y = -c_1 \cos x + c_2$  umumiy yechimni hosil qilamiz.

**III.**  $y' = f(y, y')$  ko'rinishidagi tenglamalarni  $y' = p(y)$  deb, tartibini bittaga pasaytirish mumkin. Lekin, bunda  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} p$ . U holda  $p \frac{dp}{dy} = f(x, p)$  tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab,  $p = p(y, c_1)$  umumiy yechimni topamiz.  $y' = p(y)$  munosabatdan esa umumiy integralni hosil qilamiz.

**Masalan:** Ko'shi masalasini yeching:  $y'' + 2yy' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -4$ .

**Yechish:**  $y' = p$  almashtirishdan keyin, bunda  $p' = \frac{dp}{dx}$  va  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ,  $p(y)$  ga nisbatan birinchi tartibli tenglamani olamiz:  $\frac{dp}{dy} + 2yp = 0$  yoki

$$\frac{dp}{dy} = -2y. \text{ Bundan } p \text{ ni topamiz: } \frac{dp}{dy} = -2y, \int dp = -\int 2y dy + C_1, p = -y^2 + C_1.$$

Demak,  $y' = -y^2 + C_1$ . Bunga boshlang'ich qiymatlarni qo'yib  $-4 = -4 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$ . Demak,  $y' = -y^2$ ,  $\frac{dy}{-y^2} = dx$ ,  $\frac{1}{y} = x$   $y = \frac{1}{x + C_2}$ . Boshlang'ich

$$\text{shartni qo'yib } 2 = \frac{1}{0 + C_2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Shunday qilib xususiy yechim } y = \frac{2}{2x + 1}.$$

### Chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar yechimining xossalari

**Ta'rif.** Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb,

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda,  $x$  – erkli o'zgaruvchi,  $y$  – izlanayotgan funksiya,  $y', y''$  – birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar.

$$\text{Masalan, } y'' + yy' - xy^2 - \cos x = 0$$

$$y^2 y'' + xy' + x^2 \cos y = 0$$

kabi tenglamalarni keltirish mumkin.

Ikkinchi tartiblihosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:  $y'' = f(x, y, y')$  (2)

Ikkinchi tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

**2-teorema (Koshi teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x, y, y')$  va uning xususiy hosilalari  $f'_y$  va  $f''_y$  ( $x, y, y'$ ) o'zgaruvchilar fazosining  $D$  sohasida uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy ichki  $M_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$  nuqta uchun (2)-tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona:

$$x = x_0, y_{(x_0)} = y_0, y'_{(x_0)} = y'_0 \quad (3)$$

Geometrik nuqtayi nazardan bu teorema  $OXY$  koordinata tekisligining  $(x_0, y_0)$  nuqtasi orqali o'tuvchi va burchak koeffitsientda  $y'_0$  bo'lgan yagona integral chiziq mavjudligini anglatadi.

(3)-shart boshlang'ich shart deyiladi, (2)-tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

$D$  sohada (2)-tenglamaning umumiy yechimi deb shunday  $y = \varphi(x, c_1, c_2)$  funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular  $c_1, c_2$  o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatida (2)-tenglamani qanoatlantirib (3)-boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

(2)-tenglamaning xususiy yechimi deb  $c_1, c_2$  o'zgaruvchilarning tayin  $c_1^0, c_2^0$  qiymatlaridagi  $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$  funksiyasiga aytiladi.

**Ta'rif.** Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda,  $y$  – izlanayotgan funksiya,  $p(x), q(x), f(x)$  – biror  $(a, b)$  intervalda aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.

Agar  $f(x) \neq 0$  bo'lsa, u holda ikkinchi taribli, *chiziqli, bir jinsli tenglama* deyiladi. Agar  $f(x) = 0$  bo'lsa, u *bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama* deyiladi.

Berilgan tenglamada  $p(x)$  va  $q(x)$  funksiyalar o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. Bunday tenglamalar o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar deyiladi.

$$\text{Demak, } y'' + py' + qy = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu yerda  $p$  va  $q$  ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

$$\text{Ushbu chiziqli, bir jinsli } y'' + py' + qy = 0$$

tenglamani qaraymiz,  $p$  va  $q$  haqiqiy sonlar.

**Ta'rif.** Agar  $y'' + py' + qy = 0$  tenglama  $y_1(x), y_2(x)$  yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi:  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  faqat  $c_1 = c_2 = 0$  bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, u holda ular *chiziqli-erkli*, aks holda *chiziqli bog'liq* deyiladi.

**Teorema.** Agar  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$   $y'' + py' + qy = 0$  tenglamaning chiziqli-erkli yechimlari bo'lsa, u holda  $y(x) = y_1(x) \pm y_2(x)$  ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$   $y'' + py' + qy = 0$  tenglamaning chiziqli-erkli yechimlari bo'lsa, u holda  $y(x) = \tilde{a}_1 y_1(x)$  va  $y(x) = c_2 y_2(x)$  lar ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $y'' + py' + qy = 0$   $y_1(x)$  va  $y_2(x)$  tenglamaning chiziqli-erkli yechimlari bo'lsa, u holda  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

$n$ -tartibli chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi:  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ .

Bu yerda,  $f(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x) \in (a, b)$  da berilgan uzluksiz funksiyalar.

$$L[x] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

deb belgilasak, qisqacha ushbu tenglamani hosil qilamiz:  $L[y] = f(x)$ .

Unga mos bir jinsli tenglama esa  $L[y] = 0$  ko'rinishda bo'ladi.

**Teorema.**  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$  tenglama  $(a, b)$  kesmada  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

**Teorema.** Agar  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar  $L[y] = 0$  tenglamaning yechimlari bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  ham shu tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

### Vronskiy determinant

**Ta'rif.**  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$  funksiyalar uchun  $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$  Vronskiy determinanti yoki berilgan funksiyalarning Vronskiyani deyiladi.

**Teorema.** Agar  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$   $[a; b]$  kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu funksiyalarning Vronskiy determinanti nolga teng.

**Teorema.** Agar  $y'' + py' + qy = 0$  tenglamaning  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$  yechimlaridan tuzilgan  $W(y_1, y_2)$  Vronskiy determinanti tenglamaning koeffitsientlari uzluksiz bo'lgan  $[a; b]$  kesmadagi biror  $x = x_0$  qiymatida nolga teng bo'lmasa, u holda u bu kesmaga  $x$  ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydi.

**Teorema.** Agar  $y'' + py' + qy = 0$  tenglamaning  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$  yechimlari  $[a; b]$  kesmada chiziqli-erkli bo'lsa, u holda bu yechimlardan tuzilgan  $W(y_1, y_2)$  Vronskiy determinanti berilgan kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

**Ta'rif.**  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$  tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi deb, uning  $n$  ta  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  chiziqli-erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.

**Ta'rif.** Agar  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  funksiyalar  $(m-1)$  tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda ushbu  $m$ -tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vronskiy determinanti (Vronskian) deyiladi va  $w(x)$  yoki  $w[y_1, \dots, y_m]$  kabi belgilanadi.

**Teorema.**  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$  tenglamaning  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  yechimlari chiziqli-erkli bo'lishi uchun ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Natija:** Agar  $(a, b)$  ning bitta  $x_0$  nuqtasida  $w(x_0) \neq 0$  bo'lsa, ular  $(a, b)$  da chiziqli-erkli sistemani tashkil etadi.

### O'zgarmas ko'effitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar

**Ta'rif.**  $L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0$

ko'rinishdagi tenglamalarga o'zgarmas ko'effitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda  $p_i = i = 0, 1, \dots, n-1$  o'zgarmas sonlar.

Bu tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya'ni  $n$  ta chiziqli-erkli  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  yechimlarni topish kerak. U holda uning umumiy yechimi  $y = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$  ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda,  $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

### Xarakteristik tenglama. Fundamental yechimlar sistemasi

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

tenglamaning xususiy yechimlarini  $y = e^{kx}$ ,  $k = const$  ko'rinishda izlaymiz.

U holda  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2e^{kx}$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)} = k^ne^{kx}$

Bularni tenglamaga qo'yib  $L_n[e^{kx}] = e^{kx}[k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0] = 0$

Bu yerdan  $e^{kx} \neq 0$  bo'lgani uchun  $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$ .



Demak, agar  $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$  algebraik tenglamaning yechimi bo'lsa,  $y = e^{kx}$  funksiya  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$  tenglamaning xususi yechimi bo'ladi.

**Ta'rif.**  $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$  algebraik tenglama  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$  tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Xarakteristik tenglamaning ildizlari uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

**1-hol.**  $k_1, k_2, \dots, k_n$  turli haqiqiy ildizlar bo'lsin. U holda  $n$  ta  $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}$

funksiyalar bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'lib,  $(-\infty, +\infty)$  da chiziqli-erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi  $y = \sum_{i=1}^n c_i e^{k_i x}$  funksiyadir.

Agar birorta  $k_j$  kompleks son ( $k_j = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ ) bo'lsa, qolgan sonlar orasida unga qo'shma bo'lgan  $k_s = \alpha - i\beta, s \neq j$  son mavjuddir. Kompleks  $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$  funksiya bir jinsli tenglamaning yechimi bo'lgani uchun  $\frac{1}{2}[e^{(\alpha-i\beta)x} + e^{(\alpha+i\beta)x}] = e^{\alpha x} \cos \beta x$  va  $\frac{1}{2}[e^{(\alpha-i\beta)x} - e^{(\alpha+i\beta)x}] = e^{\alpha x} \sin \beta x$  funksiya ham bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi (bu yerda, Eyler formulasi  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$  dan foydalaniladi).

Bu holda  $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, e^{k_nx}$  yechimlar sistemasi ham chiziqli-erkli ekanligini ko'rsatish mumkin.

**Masalan 1.** Tenglamani yeching:  $y'' - 5y' + 4y = 0$ .

**Yechish:** Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:  $k^2 - 5k + 4 = 0$ .

Ildizlari haqiqiy va turlicha  $k_1 = 1, k_2 = 4$ . Demak, bu tenglamaning umumiy yechimi  $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$ .

**Masalan 2.** Differensial tenglamani yeching:  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ .

**Yechish:** Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \text{ ya'ni, } (k-2)(k^2-1) = 0 \text{ bo'ladi.}$$

Bu algebraik tenglamaning ildizlari  $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = -1$ . Bu ildizlarga mos keluvchi yechimlar:  $c_1 e^{2x}, c_2 e^x, c_3 e^{-x}$

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi  $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$  ko'rinishida bo'ladi.

**2-hol.**  $k_1$  xarakteristik tenglamaning  $m$  karrali ildizi bo'lsin.

Bu holda  $e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, e^{m-1} e^{k_1 x}$  funksiyalar bir jinsli tenglamaning ixtiyoriy  $(a, b)$  da chiziqli-erkli yechimlari bo'ladi.

U holda bir jinsli tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi quyidagicha bo'ladi:  $e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, \tilde{0}^{m-1} e^{k_1 x}, e^{k_{m+1} x}, e^{k_{m+2} x}, \dots, e^{k_n x}$

**Masalan 1.** Diferensial tenglamani yeching:  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

**Yechish:** Xarakteristik tenglama  $k^2 - 6k + 9 = 0$  yoki  $(k-3)^2 = 0$ , ya'ni karrali yechimga ega:  $k_1 = k_2 = k = 3$ . Bu bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{3x} (c_1 + c_2 x)$$

**Masalan 2.** Diferensial tenglamani yeching.

$$y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

**Yechish:** Xarakteristik tenglamani ko'paytuvchilarga ajratib

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0, \quad (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$$

xarakteristik tenglamaning yechimlari  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i, \lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$ .

Demak, umumiy yechim  $y_{um} = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x)$ .

**3-hol.** Agar  $k_1 - m$  karrali kopleks ildiz bo'lsa ( $k_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ ), u holda unga qo'shma bo'lgan  $m$  karrali  $\bar{k}_1 = \alpha - i\beta$  ildiz mavjuddir. Qo'shma  $\bar{k}_1$  ildizga quyidagi yechimlar mos keladi:  $e^{\bar{k}_1 x}, x e^{\bar{k}_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\bar{k}_1 x}$ .

Bularni mos ravishda qo'shib, ayirib, 2 ga bo'lib, quyidagi 2 ta haqiqiy funksiyalar sistemalarini olamiz:

$$e^{\alpha} \cos \beta x, x e^{\alpha} \cos \beta x, \dots, x^{n-1} e^{\alpha} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha} \sin \beta x, x e^{\alpha} \sin \beta x, \dots, x^{n-1} e^{\alpha} \sin \beta x$$

Sistemadagi kompleks funksiyalarni bu funksiyalar bilan almashtirilsa, yana chiziqli-erkli sistema hosil bo'ladi.

**Masalan 1.**  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**Yechish:** Ushbu tenglamani xarakteristik tenglamasi  $k^2 - 2k + 2 = 0$  bo'lib, yechimlari:  $k_1 = 1 + i, k_2 = 1 - i$ , bu yerda  $i = \sqrt{-1}$  mavhum birlik. Umumiy yechimning ko'rinishi esa  $y = e^x (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ .

**Masalan 2.** Diferensial tenglamani yeching:  $y''' - 8y = 0$ .

**Yechish:** Ushbu tenglama:  $k^3 - 8 = 0$  ildizlarini topamiz:

$$(k - 2)(k^2 - 2k + 4) = 0 \quad k_1 = 2, \quad k_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Demak, umumiy yechim  $y = C_1 e^{2x} + (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x) e^x$ .

### O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar. Tanlash usuli

O'zgarmas koeffitsientli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimini topish quyidagi fundamental teorema asoslanadi.

**Teorema.** Bir jinsli bo'lmagan  $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$

$n$ -tartibli, chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, uning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. Tenglamaning xususiy yechimini tanlash usulida topishda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

**1-hol.** Umumiy holda, xarakteristik tenglama  $S$  karrali nol ildizni o'z ichiga olsa va bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni  $n$ -darajali  $P_n(x)$  ko'phad bo'lsa, tenglamaning xususiy yechimi  $Q_n(x)x^r$

ko‘rinishda qidiriladi. Bu yerda,  $Q_n(x)$   $n$ -darajali o‘zgarma koeffitsientli ko‘phad.

**Masalan.** Differensial tenglamani yeching:  $y'' - 5y' + 4y = 8$ .

**Yechish:** Unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

O‘ng tomonning ko‘rinishidan kelib chiqib, ushbu bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning xususiy yechimini  $\tilde{y} = c$  ko‘rinishda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo‘ysak,  $c = 2$  bo‘ladi.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + 2$ .

**2-hol.** Umumiy holda, bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning o‘ng tomoni  $P_n(x)e^{\alpha x}$  ko‘rinishda bo‘lsa, uning xususiy yechimi  $\tilde{y}(x) = x^s Q_n(x)e^{\alpha x}$  ko‘rinishida qidiriladi,  $\alpha$  karakteristik tenglamaning ildizi,  $s$  uning karraligi.

**Masalan.** Diferensial tenglamani yeching:  $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ .

**Yechish:**  $y'' + y' - 6y = 0$  tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$k^2 + k - 6 = 0, \quad k_1 = -3, \quad k_2 = 2. \quad y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

$k_2 = 2$  karakteristik tenglama ildizi bo‘lgani uchun xususiy yechimni

$$y_* = (Ax + B) \cdot xe^{2x}$$

ko‘rinishida izlaymiz. Hosilalarni hisoblab tenglamaga qo‘yamiz:

$$y_*' = (2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx) e^{2x},$$

$$y_*'' = (2A + 2B + 4Ax + 4Ax + 2Ax + 4Ax^2 + 4Bx) e^{2x}.$$

$$2A + 4B + 8Ax + 4Bx + 4Ax^2 + 2Ax + B + 2Bx + 2Ax^2 - 6Ax^2 - 6Bx = x$$

$$2A + 5B + 8Ax = x.$$

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 5B = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \\ B &= -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

Demak, xususiy yechim  $y_* = \left( \frac{x^2}{8} - \frac{x}{20} \right) \cdot e^{2x} = \frac{5x^2 - 2x}{40} e^{2x}$ .

U holda umumiy yechim  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{5x^2 - 2x}{40} e^{2x}$  ko‘rinishida bo‘ladi.

**3-hol.** Tenglamaning o‘ng tomoni  $P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$  ko‘lib,  $\alpha + i\beta$  karakteristik tenglamaning  $s$  karrali ildizi bo‘lsa, uning xususiy yechimi  $\bar{y} = x^r [U_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]$  ko‘rinishida qidiriladi. Bu yerda,  $U_n(x)$  va  $V_m(x) - P_n(x)$  va  $Q_m(x)$  ko‘phadlarning umumiy ko‘rinishi.

**Masalan.** Diferensial tenglamani yeching:  $y'' + y = \sin x$ .

**Yechish:**  $y'' + y = 0$  tenglama umumiy yechimini topamiz:

$$k^2 + 1 = 0, \quad k_1 = i, \quad k_2 = -i.$$

$\pm i$  karakteristik tenglamaning ildizi bo‘lgani uchun xususiy yechimni

$$y_* = x(A \cos x + B \sin x)$$

ko‘rinishida izlaymiz. Xususiy yechim hosilalarini hisoblab, tenglamaga qo‘yib va mos hadlarni tenglashtirib, noma'lum koeffitsientlarni topamiz.

$$y_*' = (A + Bx) \cos x + (B + Ax) \sin x, \quad y_*'' = (2B - Ax) \cos x - (2A + Bx) \sin x.$$

$$(2B - Ax) \cos x - (2A + Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x,$$

$$2B \cos x - 2A \sin x = \sin x.$$

$$\begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Demak, xususiy yechim  $y_* = -\frac{x}{2} \cos x$

U holda umumiy yechim  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$  ko‘rinishida bo‘ladi.

## O'zgarma koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglama sistemalari

Odatda, differensial tenglamalar sistemalari qaralayotganda, funksiya argumentlari  $t$  orqali, noma'lum funksiyalar esa  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  orqali belgilanadi.

**Ta'rif.** Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga *differensial tenglamalar sistemasi* deyiladi. (1)-tenglamaning

$$x_{i0} = x_i(t_0), x_{20} = x_2(t_0), \dots, x_{n0} = x_n(t_0) \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *boshlang'ich shartli masala* yoki *Koshi masalasi* deyiladi. (2)-shartlar *boshlang'ich shartlar* yoki *Koshi shartlari* deyiladi.

**Teorema.** (yechimning mavjudligi va yagonaligi). Agar  $f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) funksiyalar va barcha  $\frac{\partial f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_j}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ ) xususiy hosilalar

boshlang'ich qiymatlarning atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda (1)-tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi shu atrofda mavjud va yagonadir.

**Ta'rif.** Agar differensial tenglamalar sistemasi barcha noma'lum funksiyalar va ularning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda bunday differensial tenglamalar sistemasi *chiziqli-differensial tenglamalar sistemasi* deyiladi.

**Ta'rif.** Ushbu

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{array} \right. \quad (3)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasiga o'zgarmas ko'effitsientli, chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu yerda,  $a_{ij} - \text{const}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ ) sistemaning ko'effitsientlari deyiladi.

Quyidagi belgilashlarni qabul qilsak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

u holada (3)-sistemani

$$\frac{dX}{dt} = AX + F \quad (4)$$

matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin.

**Ta'rif.** Agar (4)-sistemada  $F=0$  hosil bo'lgan

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (5)$$

sistema (4)-sistemaga mos *bir jinsli sistema* deyiladi.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{array} \right. \quad (6)$$

Kursimizda chiziqli-differensial, bir jinsli, o'zgarmas ko'effitsientli differensial tenglamalar sistemalarini o'rganamiz.

Bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamalar sistemasini bitta yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamaga keltirib integrallash usuli qulay hisoblanadi.

Soddaligi uchun bu usulni ikki noma'lum funksiyali, bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglama uchun o'rganamiz.

Bu sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{cases} \quad (7)$$

Sistemaning birinchi tenglamasini  $t$  bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{x_1(t)}{dt}. \quad (8)$$

(8)-sistemada  $\frac{dx_1(t)}{dt}$  va  $\frac{x_2(t)}{dt}$  hosilalarni (7)-sistemadagi ifodalarni qo'yib:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1(t) + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2(t)$$

yoki 
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) \end{cases}$$

sistemada  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \neq 0$  bo'lsa, u holda bu sistemani

$x_1(t)$  va  $x_2(t)$  noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin. Bunda

$x_1(t)$  va  $x_2(t)$  noma'lum funksiyalarga  $\frac{dx_1}{dt}$  va  $\frac{d^2x_1}{dt^2}$  hosilalar orqali

chiziqli ifodalanadi.



$$x_1(t) = a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (9)$$

$$x_2(t) = c \frac{dx_1}{dt} + d \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (10)$$

(9)  $x_1(t)$  funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli, bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamadir. Uni yechib  $x_1(t)$  funksiyani hosil qilamiz. Topilgan  $x_1(t)$  funksiyani ikkinchi tenglamaga qo'yib  $x_2(t)$  funksiyani hosil qilamiz.

**Masalan.** Tenglamalar sistemasini yeching: 
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

**Yechish:** Sistemaning birinchi tenglamasini  $t$  bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 3 \frac{dx_1}{dt} + 2 \frac{dx_2}{dt} = 3(3x_1 + 2x_2) + 2(4x_1 + 5x_2) = 17x_1 + 16x_2 .$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 17x_1 + 16x_2 \end{cases}$$

sistemani  $x_1(t)$  va  $x_2(t)$  noma'lumlarga nisbatan yechib:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - 8 \frac{dx_1}{dt} &= -7x_1 \\ 3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - 17 \frac{dx_1}{dt} &= 14x_2 . \end{aligned}$$

Birinchi tenglamani yechib

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - 8 \frac{dx_1}{dt} + 7x_1 = 0.$$

$$k^2 - 8k + 7 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 7.$$

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{7t}.$$

Topilgan  $x_1(t)$  yechimni ikkinchi munosabatga qo'yib  $x_2(t)$  noma'lum funksiyani hosil qilamiz:

$$x_2(t) = -C_1 e^t + 2C_2 e^{7t}.$$

Bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini bevosita ham topish mumkin.

Buning uchun

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (6)$$

tenglamalar sistemasi yechimlarini  $x_1 = \alpha_1 e^{kt}$ ,  $x_2 = \alpha_2 e^{kt}$ , ...,  $x_n = \alpha_n e^{kt}$  ko'rinishida izlaymiz. (Bu yerda,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  o'zgarmas sonlar). Ularni (3)-sistemaga qo'yib,  $e^{kt}$  ga bo'lib va barcha hadlarni tenglikning bir tomoniga yig'ib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi kerak:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

(12)-tenglama (6)-sistemaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

**1-hol.** Agar (12)-xarakteristik tenglamaning  $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) ildizlari haqiqiy va turli bo'lsa, ularni ketma-ket (11)-sistemaga qo'yib, ularga mos  $\alpha_i^j$  ( $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n$ ) qiymatlar topiladi va ularni

izlanayotgan yechim ko‘rinishiga qo‘yib, sistemaning  $n$  ta xususiy yechimlari hosil qilinadi.

$$x_1^{(j)} = \alpha_1^{(j)} e^{k_1 t}, x_2^{(j)} = \alpha_2^{(j)} e^{k_2 t}, \dots, x_n^{(j)} = \alpha_n^{(j)} e^{k_n t} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

Bu yerda, quyi indeks noma'lum funksiya nomeri, yuqori indeks yechim nomerini anglatadi. Odatda bu yechimlarga sistemaning *fundamental yechimlar sistemasi* deyiladi.

Bu yechimlarni matritsaviy ko‘rinishda

$$X_1 = A^{(1)} e^{k_1 t}, X_2 = A^{(2)} e^{k_2 t}, \dots, X^{(N)} = A^{(N)} e^{k_n t}.$$

Bu yerda,

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \dots \\ \alpha_i^{(n)} \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

**Masalan.** Sistemani yeching: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

**Yechish:** Berilgan sistemaga mos xarakteristik tenglama quyidagicha bo‘ladi  $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0$  yoki  $k^2 - 4k - 5 = 0$ .

Bu tenglama ildizlari  $k_1 = -1, k_2 = 5$ . Ularga mos yechimlar esa

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}, y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t} \\ x_2 = \alpha_1^{(2)} e^{5t}, y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t} \end{cases}$$

$x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}, y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t}$  yechimlarni berilgan sistemaga qo‘yib

$$\begin{cases} -\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} \\ -\alpha_2^{(1)} = 4\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \alpha_2^{(1)} = -\alpha_1^{(1)}.$$

Demak,  $x_1 = C_1 e^{-t}, y_1 = -C_1 e^{-t}, C_1 = \alpha_1^{(1)}$ .

$x_2 = \alpha_1^{(2)} e^{5t}, y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$  yechimlarni berilgan sistemaga qo‘yib  $\alpha_2^{(2)} = 2\alpha_1^{(2)}$  ekanligini hosil qilamiz.

Demak,  $x_1 = C_2 e^{5t}$ ,  $y_1 = 2C_2 e^{5t}$ ,  $C_1 = \alpha_1^{(2)}$ .

Sistema chiziqli bo'lgani uchun sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y &= -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \end{aligned}$$

ko'rinishida bo'ladi.

**2-hol.** Agar xarakteristik tenglama  $\gamma$  karrali  $k$  ildizga ega bolsa, u holda sistema yechimlari quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$X(t) = (A_0^{(s)} + A_1^{(s)}t + \dots + A_{\gamma-1}^{(s)}t^{\gamma-1}) e^{k t}, \quad (14)$$

Bu yerda,

$$A_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ \dots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij}^{(s)} = \text{const.}$$

**Masalan.** Sistemani yeching: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

**Yechish:** Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Bu tenglama ildizlari  $k_1 = k_2 = 2$ .

Demak, yechimni

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{2t} \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{2t} \end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz.

Yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,$$

bundan esa  $\beta_2 = -\beta_1$ ,  $\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1$ .

Bu yerda,  $\alpha_1$  va  $\beta_1$  ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lgani uchun ularni mos ravishda  $C_1$  va  $C_2$  orqali belgilab, quyidagi umumiy yechimga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_1 t) e^{2t} \\ y = -(C_2 + C_2 t + C_2 t^2) e^{2t}. \end{cases}$$

**3-hol.** Agar xarakteristik tenglama  $k_j = p + iq$  ildizga ega bo'lsa, u holda unga mos

$$X_j = A^{(j)} e^{k_j t}$$

yechimni ikkita haqiqiy yechimga: shu ildizga mos kompleks funksiyaning haqiqiy va mavhum qismidagi funksiyalariga almashtirish mumkin.

**Masalan.** Sistemani yeching: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

**Yechish:** Sistemaga mos xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \text{ yoki } k^2 + 9 = 0.$$

Bu tenglama ildizlari  $k_{1,2} = \pm 3i$ .

Demak, yechimni 
$$\begin{cases} x = \alpha_1 e^{3it} \\ y = \alpha_2 e^{3it} \end{cases}$$

ko'rinishidan izlaymiz. Bularni sistemaga qo'yib  $(1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0$ .

Bu tenglamani, masalan,  $\alpha_1 = 5$ ,  $\alpha_2 = 1-3i$  yechimlar qanoatlantiradi.

Demak, 
$$\begin{cases} x = 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i \sin 3t) \\ y = (1-3i)e^{3it} = (1-3i)(\cos 3t + i \sin 3t). \end{cases}$$

Bu yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlari berilgan sistemaning yechimlari bo'ladi, ularning chiziqli kombinatsiyalari esa umumiy yechim bo'ladi:

$$\begin{cases} x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2 (\cos 3t - 3 \sin 3t). \end{cases}$$

## Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Differensial tenglamalar nazariyasini iqtisodiy jarayonlarning modellarida qo'llanishiga doir misollarni qaraymiz, bu yerda erkli o'zgaruvchi bo'lib  $t$  vaqt ishtirok etadi. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydalidir, ular iqtisodiy dinamikani tahlil etishning asosini tashkil etadi.

### Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli

*Birinchi tartibli differensial tenglamalar.*

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot  $p$  narx bilan sotiladi,  $Q(t)$  funksiya  $t$  vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda vaqt davomida  $pQ(t)$  ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t). \quad (1)$$

Bu yerda,  $m$  investitsiya normasi, o'zgarmas son va  $0 < m < 1$ .

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi. Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = lI(t). \quad (2)$$

Bu yerda,  $l/l$  akselator(o'sish) normasi. (1)-formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ, k = lmp \quad (3)$$

differensial tenglamani olamiz. (3)-tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi  $Q = Ce^{kt}$ , bunda  $C$  ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich  $t=t_0$  momentda mahsulot ishlab chiqarish hajmi  $Q_0$  ma'lum bo'lsin. U holda bu shartdan  $C$  o'zgarmasni aniqlash mumkin:

$Q_0 = Ce^{k_0}$ , bundan  $C = Q_0 e^{-k_0}$ . Natijada (3)-tenglama uchun Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Aholining o'sishi dinamikasi, bakteriyalarning ko'payish jarayoni, radioaktiv parchalanish jarayonlari ham (4)-formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

**Masalan 1.** Agar  $Q' = kQ$  tenglamadagi proporsionallik koeffitsienti 0,1 ga teng bo'lsa, realizatsiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o'tgandan keyin ikki marta ko'payadi?

Realizatsiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

**Yechish:** (4) da  $t_0 = 0$ ,  $k = 0,1$ ,  $Q = 2Q_0$  deb faraz qilsak  $2Q_0 = Q_0 e^{0,1t}$  tenglikka kelamiz, bundan  $t = 10 \ln 2 \approx 6,93$  (vaqt birligi).

Endi realizatsiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini hisoblaymiz.  $t_1 = 0,8t$ ,  $k_1 = \frac{k}{0,8} = 1,25k$ , ya'ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

**Masalan 2.** Talab va taklif funksiyalari mos ravishda

$$y = 25 - 2p + 3 \frac{dp}{dt}, \quad x = 15 - p + 4 \frac{dp}{dt}.$$

Agar boshlang'ich momentida  $p = 9$  bo'lsa, muvozanat narxinig vaqtga bog'liqligini toping.

**Yechish:** Talab va taklifning tengligidan  $25 - 2p + 3 \frac{dp}{dt} = 15 - p + 4 \frac{dp}{dt}$ , bundan  $\frac{dp}{dt} = 10 - p$ , ya'ni o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib,  $p = 10 - Ce^{-t}$  tenglamani hosil qilamiz.  $p(0) = 9$  shartdan,

$c=1$  kelib chiqadi, nihoyat  $p=10-Ce^{-t}$  va  $\lim_{t \rightarrow \infty} p = \lim_{t \rightarrow \infty} (10 - e^{-t}) = 10 = const$

bo'lib, narx turg'unlikka ega.

**Masalan 3.**  $k$  – doimiy elastiklikka ega funksiya topilsin.

**Yechish:** Elastik ta'rif va masala shartidan quyidagiga egamiz:

$$\frac{p}{Q} Q' = k, \text{ ya'ni } \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = k. \quad p \neq 0 \text{ shartda } \frac{dp}{p} = k \cdot \frac{dQ}{Q}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab,  $\ln|Q| = k \ln|p| + \ln c$ , bundan esa  $Q = C \cdot p^k$  yechimni hosil qilamiz.

**Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi (Logistik o'sish)**

Faraz qilaylik,  $p = p(Q)$  kamayuvchi funksiya bo'lsin, ya'ni ishlab chiqarish o'sishi bilan bozor to'yinadi va narx pasaya boradi:  $dp/dQ < 0$ . U holda tabiiy o'sish modeli

$$Q' = \alpha p(Q)Q, \quad \alpha = lm \quad (5)$$

ko'rinishida bo'ladi. Bu yerda  $\alpha = lm$ , (5) avtonom differensial tenglamadir.

Tenglamaning o'ng tomonidagi barcha ko'paytuvchilar musbatligidan  $Q' > 0$ , ya'ni  $Q(t)$  funksiya o'suvchi.

Funksiyaning o'sish xarakteri (qavariq yoki botiqligi) uning ikkinchi tartibli hosilasi bilan aniqlanadi. (5)-tenglamadan ushbu  $Q'' = \alpha \left[ Q'p(Q) + Q \frac{dp}{dQ} Q' \right] = \alpha Q' \left( p + \frac{dp}{dQ} Q \right)$  tenglik kelib chiqadi.

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikning ko'rinishini o'zgartirish mumkin:

$E(p) = \frac{Q dp}{p dQ}$ , tenglikka ko'ra  $Q'' = \alpha Q' p \left( 1 + \frac{Q dp}{p dQ} \right)$  yoki  $\frac{dQ}{dp} < 0$  bo'lgani uchun  $E < 0$ , nihoyat

$$Q'' = \alpha Q' p (1 - |E|) \quad (6)$$

tenglik hosil bo'ladi.

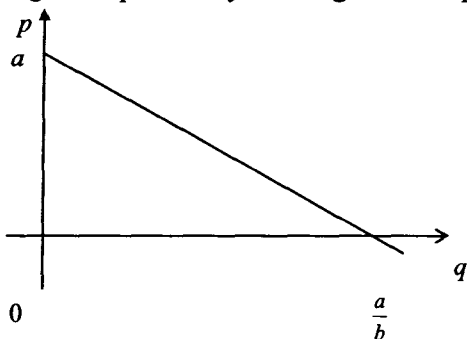
(6)-tenglamadan elastik talabda, ya'ni  $|E| > 1$ ,  $Q'' > 0$  ekanligi kelib chiqadi va  $Q(t)$  funksiyaning grafigi pastga qavariq ekanligi



ma'lum bo'ladi. Bu esa mahsulot hajmining progressiv o'sishini bildiradi.

Noelastik talabda  $|E| < 1$  va bu holda  $Q' < 0$  bo'lgani uchun  $Q(t)$  funksiya yuqoriga qavariq, bu esa mahsulot hajmining sekin o'sishini (ya'ni yetarlicha ta'minlanganlikni) bildiradi.

Soddalik uchun,  $P(Q) = a - bQ$   $a > 0, b > 0$  talab funksiyasi ishlab chiqarish funksiyasining chiziqli funksiyasi bo'lgan holni qaraylik.



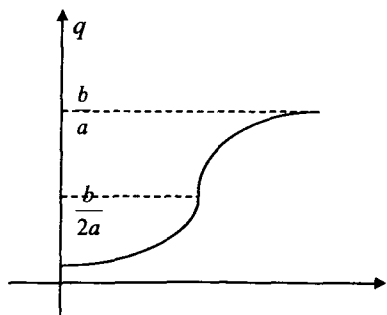
U holda (5)-tenglama ushbu

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar  $Q = 0$  yoki  $Q = \frac{a}{b}$  bo'lsa, u holda  $Q' = 0$  bo'ladi.

Demak,  $Q' = \alpha Q'(a - 2bQ)$ . (8)

Shuningdek,  $Q < \frac{a}{2b}$  bo'lganda  $Q' > 0$  va  $Q > \frac{a}{2b}$  bo'lganda esa  $Q' < 0$  bo'ladi.



t

$Q = Q(t)$  funksiya grafigining egilish nuqtasi  $t = Q = a/2b$ .

Bu holda  $Q(t)$  yechimni aniq topish mumkin. (7)-tenglamada

o'zgaruvchilarni ajratib  $\frac{dQ}{Q(a-bQ)} = \alpha dt$  yoki  $\frac{1}{a} \left( \frac{1}{Q} + \frac{b}{a-bQ} \right) dQ = \alpha dt$ .

Bu munosabatni integrallab  $\ln|Q| - \ln|a-bQ| = \alpha at + \ln C$

yoki  $\frac{Q}{a-bQ} = Ce^{\alpha at}$ .

Bundan  $Q(t) = \frac{aCe^{\alpha at}}{1 + bCe^{\alpha at}}$ .

Chizmada kelitirilgan bu funksiyaning grafigi ((7)-differensial tenglamaning integral egri chiziqlaridan biri) *logistik egri chiziq* deyiladi.

Bunday egri chiziqlar boshqa dinamik jarayonlarni ham xarakterlaydi. Masalan, ma'lumot (reklama) tarqalishi, organik muhitda bakteriyalarning ko'payishi, biologik organizmlarning chegaralangan muhitida epidemiyalar tarqalish dinamikasi jarayoni modellarini ifodalaydi.

### Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo'lgan iqtisodiyotning daromad va harakatlarni bog'lovchi sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik,  $Y(t), E(t), S(t), I(t)$  mos ravishda milliy daromad, davlat xarajatlari, iste'mol va investitsiya funksiyasi bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$\begin{aligned} Y(t) &= S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) &= a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) &= k(t)Y'(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Bu yerda,  $a(t)$  – iste'molga moyillik koeffitsienti ( $0 < a(t) < 1$ ),  $b(t)$  – chekli iste'mol,  $k(t)$  – akseleratsiya normasi. (9)\*tenglamalarda ishtirok etuvchi barcha funksiyalar musbat.

(9)-tenglamalarning ma'nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig'indisi milliy daromadga teng bo'lishi zarur. Bu tenglik birinchi tenglamada ifodalangan. Xalq xo'jaligidagi umumiy iste'moli, milliy daromadning bir qismi bo'lgan *ichki iste'mol va chegaraviy iste'moldan* iborat bo'ladi. Mana shu jarayon ikkinchi tenglamada aks ettirilgan. Nihoyat investitsiya hajmi ixtiyoriy bo'lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan iqtisodiy ko'rsatkich bo'lib, akselator normasining oxirgi milliy daromadga ko'paytmasi bilan aniqlanadi, bu jarayon uchinchi tenglik bilan ifodalangan.

Faraz qilaylik,  $a(t), b(t), k(t)$  va  $E(t)$  funksiyalar berilgan. Bu funksiyalar davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasini aniqlash, ya'ni  $t$  vaqtning funksiyasi bo'lgan  $Y$  ni topish masalasi asosiy iqtisodiy masalalardan biridir.

Ikkinchi tenglamadan  $S(t)$  ni va uchinchi tenglamadan  $I(t)$  ni birinchi tenglamaga qo'yamiz.  $Y(t)$  funksiyaga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \quad (10)$$

Biz asosiy  $a, b, k$  parametrlarni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10)-tenglama o'zgarmas koeffitsientli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga aylanadi:

$$Y'_t = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \quad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11)-tenglamaning xususiy yechimi  $\tilde{y}$  sifatida  $Y' = 0$  dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$\tilde{y} = \frac{b+E}{1-a}. \quad (12)$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi  $Y_0^{(a)} C \exp\left(\frac{1-a}{k} t\right)$  formula bilan beriladi.

Demak, (11)-tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + C e^{\frac{1-a}{k} t} \quad (13)$$

(11)-tenglamaning integral egri chiziqlari chizmada ko'rsatilgan.

Agar vaqtning boshlang'ich momentida  $Y_0 < Y_p$  bo'lsa, u holda  $C = Y_0 - Y_p < 0$  va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimidan pastga ketadi, ya'ni milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari  $a, b, k$  va  $E$  da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar  $Y_0 > Y_p$  bo'lsa, u holda  $C > 0$  va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi, integral egri chiziqlar  $Y = Y_0$  muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.

### O'sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik,  $Y = F(K, L)$  milliy daromad, bu yerda  $F$  bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi:  $(F(tK, tL) = tF(K, L))$   $K$  - sarflangan kapital hajmi,  $L$  - mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi  $k = K/L$  bo'lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{1}{L} \cdot F(K, L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1) \quad (14)$$

bunda  $k = \frac{K}{L}$  - fond ta'minlanganlik koeffitsienti. Ma'lumki,  $f'(k) > 0$ ,  $f''(k) < 0$ .

Bu bo'limda qaralayotgan masalaning maqsadi fond ta'minlanganlik dinamikasini yoki uni vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma'lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba'zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz:

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o'sish o'rinli, ya'ni

$$L' = \alpha L. \quad (15)$$

2. Mablag' ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya'ni

$$I = K' + \beta K$$

Bu yerda,  $\beta$  – amortizatsiya me'yori.

Agar  $I$  investitsiya (sarflangan mablag') me'yori bo'lsa, u holda

$$I = IY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = IY - \beta K \quad (16)$$

$k$  – ta'minlanganlik fond ta'rifidan kelib chiqadi,  $\ell n k = \ell n K - \ell n L$ .

Bu tenglikni  $t$  bo'yicha differensiallab,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

$L'$  va  $K'$  ning qiymatlarini qo'yib,

$$\frac{k'}{k} = \frac{\ell Y - \beta K}{K} - \alpha \text{ ya'ni } k' = \frac{\ell Y}{K} k - (\beta + \alpha) k \quad k' = \frac{\ell Y K}{KL} - (\beta + \alpha) k$$

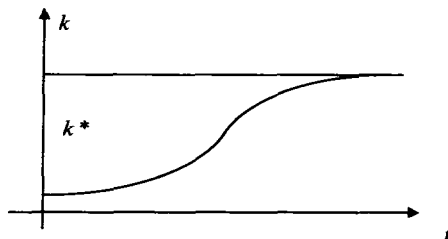
$f = \frac{Y}{L}$  munosabatni hisobga olgan holda,

$$k' = f(x) - (\alpha + \beta) k \quad (17)$$

tenglamani olamiz. Bu yerda,  $f(x)$  funksiya (14)-formula bo'yicha aniqlangan.

Bu tenglama o'sishning neklassik tenglamasi deyiladi.

Bu tenglamaning integral chizig'i logistik chiziqqa o'xshash



Bunda  $k = k^*$  (\*) tenglamaning statsionar yechimi.

O'zgaruvchan narx  $p$  va qanoatlantirilmagan talab  $d(p)-S(p)$  orasidagi bog'lanishning modelini ifodalovchi  $p' = k(d(p)-S(p))$

Samuelson tenglamasini yechamiz. Bu yerda  $d(p)$  va  $S(p)$  mos ravishda  $p$  narxdagi mahsulotga bo'lgan talab va taklif,  $k > 0$ .

Talab va taklif chiziqli bo'lgan holni qaraylik:  $d(p) = a - bp$ ,

$$s(p) = m + np.$$

$$a > 0, b > 0, m > 0, n > 0.$$

U holda Samuelson tenglamasi  $p' = k(n-b)p + k(a+m)$  chiziqli differensial tenglamani yechamiz. Oldin bir jinsli tenglamani yechamiz:

$$\frac{dp}{dt} = k(n-b)y, \quad \frac{dp}{p} = k(n-b)dt,$$

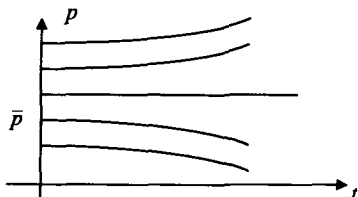
$$\ln|p| = k(n-b)t + \ln C, \quad p(t) = Ce^{k(n-b)t}.$$

Xususiy yechim sifatida  $p(t) = \bar{p}$ ,  $\bar{p} - const$  yechimni olamiz. Bu yerda,  $\bar{p}$   $d(p) = S(p)$  tenglamani yechimi:  $\bar{p} = \frac{a-m}{b+n}$  - muvozanat narx.

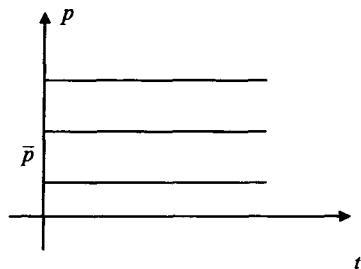
Demak, umumiy yechim  $p(t) = \frac{a-m}{b+n} + Ce^{k(n-b)t}$ .

Bu yechimda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

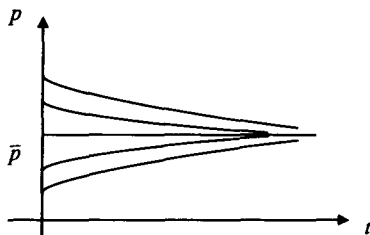
a)  $n > b$  bo'lganda vaqt o'tishi bilan integral egri chiziqlari  $\bar{p}$  muvozanat holatidan uzoqlashib boradi.



c)  $n=b$  munosabatda  $p(t) = const$



d)  $n < b$  bo'lsa, vaqt o'tishi bilan integral chiziqlar muvozanat  $\bar{p}$  holatiga asimptotik yaqinlashadi.



Olingan (17)-munosabat o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli, chiziqli bo'lmagan differensial tenglamani ifodalaydi. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz:  $k' = 0$  shartdan,

$$f(k) - (\alpha + \beta)k = 0, \quad (18)$$

ya'ni  $k = \text{const}$  - o'zgarmas kattalik, chiziqli bo'lmagan (18)-algebraik tenglamaning yechimidir.

**Masalan.** Ishlab chiqarish funksiyasi  $F(K, L) = \sqrt{KL}$  uchun (17)-tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

**Yechish:** (14)-munosabatdan  $f(k) = \sqrt{k}$ , u holda (17)-tenglama ushbu ko'rinishda bo'ladi:  $\frac{dk}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k$ .

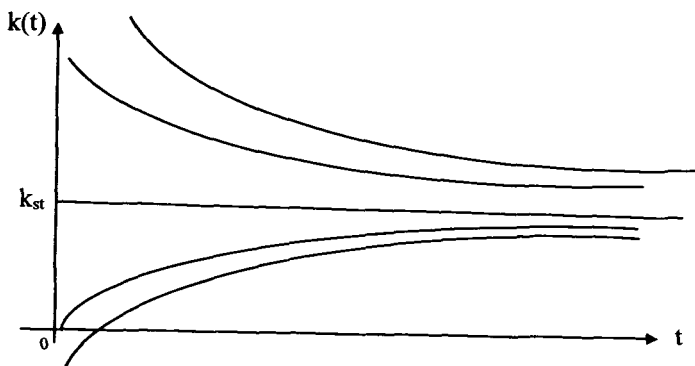
Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:  $l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$ , bundan (17)-tenglamaning nol bo'lmagan xususiy yechimi  $k_{st} = \frac{l^2}{(\alpha + \beta)^2}$  - dan iborat bo'ladi.

(17)-differensial tenglamaga mos tenglamani «o'zgaruvchilarni ajratish» usuli bilan yechamiz:  $\frac{dk}{\sqrt{k}[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}]} = dt$

Bu tenglamada  $\sqrt{k} = z$  almashtirishdan so'ng integrallab, umumiy yechimning ko'rinishini hosil qilamiz.

$$k(t) = \left[ \frac{1}{\alpha + \beta} + C \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right) \right]^2 \quad (19)$$

Integral egri chiziqlar oilasi yuqoridan va pastdan statsionar yechimga yaqinlashadi, ya'ni  $t \rightarrow \infty$  va  $k \rightarrow k_{st}$ .



Demak, o'zgarmaydigan parametrlar  $l$ ,  $\alpha$  va  $\beta$  da qurollanish fondi funksiyasi o'z statsionar qiymatiga boshlang'ich shartlarga bog'liqsiz ravishda turg'un barqaror intiladi. Bu statsionar nuqta  $k = k_{st}$ , barqaror muvozanat nuqtasi deb yuritiladi.

**Masalan.**  $p$  narxning har qanday qiymatida doimiy  $-\frac{1}{3}$  bo'lgan talab funksiyasini toping.



**Yechish:** Elastiklik ta'rifiga ko'ra,  $E = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$

$E = -\frac{1}{3}$ , u holda  $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = -\frac{1}{3}$  o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani yechamiz.

$$3 \frac{dQ}{Q} = -\frac{dp}{p} \text{ integrallab } 3 \ln|Q| = -\ln|p| + \ln C \text{ yoki } Q^3 p = C.$$

### **Oldindan bashorat qilinadigan narxlar asosida bozor modelini tuzish**

Oldindan bashorat qilinadigan narxlar asosida bozor modelini tuzishni qaraylik. Oddiy bozor modellarida talab va taklif, odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog'liq bo'ladi. Lekin talab va taklif real hollarda, narxning tashkil qilinishi va narxning o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladi.  $t$  vaqt bo'yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu ko'rsatkichlar mos ravishda  $p(t)$  narx funksiyasining birinchi va ikkinchi hosilalari bilan ifodalanadi.

Faraz qilaylik,  $D$  – talab funksiyasi va  $S$  – taklif funksiyasi  $P$  – narx funksiyasi va uning hosilalari bilan quyidagi bog'lanishga ega bo'lsin:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3. \end{aligned} \tag{20}$$

(20) da qabul qilingan bog'lanishlar to'la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo'shiluvchilarida oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o'zgarishi bilan «qizdiriladi». Agar temp (narx o'sishi) davom etsa, o'ssa ( $p'' > 0$ ), u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va, aksincha. Narxning tez o'sishi xaridorni qo'rqitadi,

shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi minus ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko'proq doirada narxning o'zgarishi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun  $S(t)$  funksiyadagi  $p''$  ning koeffitsienti  $D(t)$  dagiga nisbatan katta. Shuningdek, narxning o'sishi taklifni oshiradi, shuning uchun  $p'$  ni o'z ichiga oluvchi qo'shiluvchi  $S(t)$  ning ifodasiga musbat ishora bilan kiradi.

Narxning vaqt bilan bog'lanishini aniqlash talab etiladi. Bozorning muvozanat holati  $D=S$  tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20)-tenglamalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini olamiz:

$$p'' + 2p' + 5p = 15 \quad (21)$$

(21)-munosabat  $p(t)$  funksiyaga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p'' + 2p' + 5p = 0 \quad (22)$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

(22) uchun xarakteristik tenglama:  $k^2 + 2k + 5 = 0$ . Uning ildizlari qo'shma kompleks sonlar:  $k_{1,2} = -1 \pm 2i$  va natijada (22)-tenglamaning  $\tilde{p}(t)$  umumiy yechimi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\tilde{p}(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t).$$

Bu yerda,  $C_1$  va  $C_2$  – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (21)-tenglamaning xususiy yechimi sifatida  $p = p_{st}$  narxni belgilaydigan o'zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo'ysak,  $p_{st}$  ning qiymatini topamiz:  $p_{st} = 3$ .

Shunday qilib, (21)-tenglamaning umumiy yechimi

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \quad (23)$$

tenglik bilan ifodalanadi. Demak,  $t \rightarrow \infty$  da  $p(t) \rightarrow p_{st} = 3$ , ya'ni barcha integral egri chiziqlar  $p = 3$  gorizontol asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha belgilangan narxlar  $p_{st}$  narxga intilishini va uning

atrofida tebranishini bildiradi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o'tishi bilan o'sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki xil misolda keltiramiz.

**1. Koshi masalasi.** Faraz qilaylik, boshlang'ich holatdagi narx va uning o'zgarish jarayoni ma'lum:  $t=0$ ;  $p=4$ ,  $p'=1$ . Bu berilganlarni (23)-formulaga qo'ysak  $p(0)=C_1+3=4$ , bundan  $C_1=1$ , ya'ni

$$p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+C_2 \sin 2t) \quad (24)$$

Buni differensiallaymiz:  $p'(t)=e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t]$ .

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo'llaymiz:

$$p'(0)=2C_2-1=1, \text{ bundan } C_2=1.$$

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$$

yoki

$$p(t)=3+\sqrt{2}e^{-t} \cos(2t-\pi/4).$$

**2. Aralash masala.** Faraz qilaylik, vaqtning boshlang'ich momentida talab va taklif ma'lum:  $t=0$ ,  $p=4$ ,  $D=16$ .

Birinchi boshlang'ich shart oldingidek bo'lgani uchun bu yerda ham yechim (24)-tenglik bilan ifodalanadi. U holda,

$$p'(t)=e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t],$$

$$p''(t)=-e^{-t}[(4C_2+3)\cos 2t-(3C_2-5)\sin 2t].$$

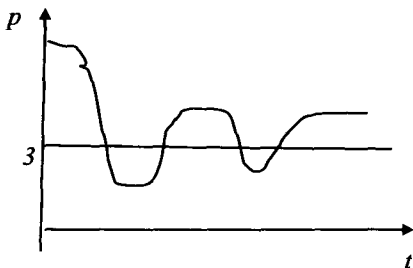
Bu yerdan  $p'(0)=2c_2-1$  va  $p''(0)=-4c_2-3$ .

Bu tengliklarni  $D(t)$  ning (20)-tenglamaning ko'rinishini hisobga olgan holda, masalaning ikkinchi  $D(0)=16$  shartidan foydalanib,  $C_2=-1$

ni topamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko'rinishi  $p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t-\sin 2t)$  yoki

$$p(t)=3-\sqrt{2}e^{-t} \sin(2t-\pi/4) \quad (25)$$

1 va 2-masalalarga mos keluvchi integral egri chiziqlar chizmada tasvirlangan.



### Ta'minot tenglamasi

$$\frac{dQ}{dt} = pQ(m - Q)$$

Ushbu tenglamaga ta'minot yoki logistik tenglama deyiladi, bunda  $p$  va  $m$  o'zgarmaslar.

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani yechamiz:

$$\frac{dQ}{Q(m - Q)} = p dt$$

$$\frac{dQ}{Q^2 - mQ} = -p dt$$

$$\int \frac{dQ}{\left(Q - \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = -p dt$$

Tenglikning har ikki qismini integrallab

$$\frac{1}{m} \ln \left| \frac{Q - m}{Q} \right| = -pt + \ln C_1$$

$$\frac{Q - m}{Q} = C_2 e^{-mpt}, \text{ bunda } C_2 = C_1^m.$$

Bundan  $Q = \frac{m}{1 - C_2 e^{-mpt}}$ ,  $mp = k$ ,  $-C_2 = C$  deb ta'minot (logistik)

funksiyasini hosil qilamiz:  $Q = \frac{m}{1 + C e^{-kt}}$ .

Ta'minot tenglamasi aholining chegaraviy o'sishini modellashtirishda qo'llaniladi.

$Q=m$  qiymatda, bevosita tenglamadan,  $\frac{dQ}{dt} = 0$  va  $Q < m$  qiymatlarda  $\frac{dQ}{dt} > 0$ ,  $Q > m$  qiymatlarda  $\frac{dQ}{dt} < 0$ . Demak,  $Q = m$  maksimal qiymat.

**Masalan.** Idishdagi bakteriyalarning o'sishi  $k = mp = 0.2$  koeffitsientli logistik tenglamani qanoatlantirishi ma'lum. Vaqtning boshlang'ich holatida bakteriyalar mumkin bo'lgan maksimal  $m$  miqdorning 1% ni tashkil etsin. Qancha vaqtdan so'ng bakteriyalar 80% ni tashkil etadi?

**Yechish:**  $\frac{dQ}{dt} = pQ(m-Q)$ ,  $p = \frac{0.2}{m}$ ,  $\frac{dQ}{dt} = \frac{0.2Q}{m}(m-Q)$ .

$$\frac{mdQ}{Q(m-Q)} = 0.2dt.$$

$Q < m$  shartni hisobga olgan holda oxirgi munosabatni integrallaymiz:

$$\ln \frac{m-Q}{Q} = -0.2t - C.$$

$Q(0) = 0.01m$  boshlang'ich shartdan foydalanib  $C$  o'zgarmasni aniqlaymiz:

$$\ln \frac{0.99}{0.01} = -C, \quad C = -\ln 99.$$

U holda yechim  $\ln \frac{m-Q}{99Q} = -0.2t$ ,  $\frac{m-Q}{99Q} = e^{-0.2t}$ ,  $Q = \frac{m}{1+99e^{-0.2t}}$ .

$Q(t) = 0.8m$  shartni qanoatlantiruvchi  $t_0$  qiymatni topamiz:

$$0.8 = \frac{1}{1+99e^{-0.2t_0}}, \quad e^{-0.2t_0} = \frac{1}{396},$$

$$-0.2t_0 = -\ln 396, \quad t_0 = 5 \cdot \ln 396, \quad t_0 \approx 29.91.$$

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. – London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y. – 535 p.
2. Knut Sydsæter and Peter Hammond, Essential Mathematics for Economic Analysis. – London EC1N 8TS. Pearson Education Limited. 2012. – 745 p.
3. Sh.O. Alimov, R.R. Ashurov. Matematik tahlil. – T.: Kamalak, 2012.
4. T.A. Azlarov, H. Mansurov. Matematik analiz. – T.: 2006.
5. J. Xojiyev. Algebra va sonlar nazariyasi. – T.: O‘zbekiston, 2001.
6. P.H. Nazarov, B.T. Toшпулатов, A.D. Dusumbetov. Алгебра ва сонлар назарияси, 1-қисм. – T.: Ўқитувчи, 1993.
7. T.J. Jo‘rayev, A.S. Sagdullayev, R.X. Xudoyberganov, A.K. Vorisov, X. Mansurov. Oliy matematika asoslari. – T.: O‘zbekiston, 1999.
8. Y.U. Soatov. Oliy matematika. – T.: O‘qituvchi, 1–2-jild, 1994.; 3-jild, 1996.
9. D. Raximov. Oliy matematika. Darslik. – T.: «Fan va texnologiya», 2007.
10. Sh. Shoraxmetov, D. Asraqulova, J. Qurbonov. Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to‘plami. – T.: «Iqtisodiyot», 2011.
11. H.D. Дадажанов, M.Ш. Жўраева. Геометрия, 1-қисм. – T.: Ўқитувчи, 1996.
12. H.C. Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. – T.: Ўқитувчи, 1974.
13. В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. Олий математика қисқа курси. – T.: Ўқитувчи, 1985.
14. А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. Математика в экономике. – М.: Финансы и статистика, 1,2 часть. 2001.

15. Х.Э. Крынский. Математика для экономистов. – М.: Статистика, 2000.
16. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред. В.И. Ермакова. – М.: INFRA, 2006.
17. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Крамера. – М.: ЮНИТИ, 2008.
18. М.С. Красс, Б.П. Чупринов. Математике для экономического бакалавриата. – М.: Дело, 2006.
19. Ю.И. Клименко. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи. – М.: Экзамен, 2005.
20. А.Д. Мышкис. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
21. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1-часть, 1974; 2-часть, 1986.
22. В.А. Колемаев. Математическая экономия. – М.: ЮНИТИ, 1998.
23. Р. Аллеи, Математическая экономия. – М.: Иностранная литература, 1963.
24. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчислению. – М.: НАУКА, 1969.

## MUNDARIJA

|  |     |
|--|-----|
| <b>SO‘ZBOSH</b> .....                                      | 3   |
|  | 5   |
| 1. Tekislikda analitik geometriya.....                     |     |
| 2. Oliy algebra elementlari .....                          | 37  |
| 3. Fazoda analitik geometriya.....                         | 84  |
| 4. Chiziqli fazo .....                                     | 98  |
| 5. To‘plamlar. Ketma-ketliklar va funksiyalar limiti ..... | 118 |
| 6. Funksiya hosilasi va differensialli .....               | 162 |
| 7. Funksiyani to‘liq tekshirish .....                      | 179 |
| 8. Aniqmas integral .....                                  | 217 |
| 9. Aniq integral .....                                     | 244 |
| 10. Qatorlar .....   | 267 |
| 11. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar .....                   | 292 |
| 12. Birinchi tartibli differensial tenglamalar .....       | 330 |
| 13. Yuqori tartibli differensial tenglamalar .....         | 345 |
|  | 381 |
| <b>ADABIYOTLAR</b> .....                                   |     |



Sharaxmetov Shaturgun,  
Kurbanov Odiljon Tuxtamuradovich

# **IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA**

*Darslik*

Muharrir *M. Tursunova*  
Dizayner *D. Ermatova*  
Musahhah *M. Turdiyeva*

O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti,  
100029, Toshkent shahri, Matbuotchilar ko‘chasi, 32-uy.  
Tel./faks: 239-88-61.

Nashriyot litsenziyasi: AI №216, 03.08.2012.

Bosishga ruxsat etildi 04.12.2017. «Times New Roman» garniturasida.  
Ofset usulida chop etildi. Qog‘oz bichimi 60x84  $\frac{1}{16}$ . Shartli bosma  
tabog‘i 24,5. Nashriyot bosma tabog‘i 24,0. Adadi 200 nusxa.

Buyurtma № 19

«AVTO-NASHR» XK bosmaxonasida chop etildi.  
Manzil: Toshkent shahri, 8-mart ko‘chasi, 57-uy.