Sh. Q. Formanov

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Sh. Q. Formanov

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI

(Darslik)

Toshkent
“Universitet”
2014

УДК 519.21(075.8)
22.171
Ф25
Sh.Q.Formanov. Ehtimolliklar nazariyasi. Universitetlar va pedagogika oliy ta'lim muassasalari talabalari uchun darslik. Toshkent, "Universitet", 2014.
КБК 22.171

Ushbu darslik universitetlar va pedagogika oliy o'quv yurtlari bakalavriat ta'lim yo'nalishidagi o'quv rejalarida "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" fanining amaldagi dasturlari asosida yozilgan. Darslikda fan bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumotlar keltirilgan va ularga oid misollar yechib ko'rsatilgan. Har bir bobning oxirida mustaqil yechish uchun misol va masalalar ro'yxati keltirilgan. Mazkur darslikdan tatbiqiy matematika, mexanika, fizika, informatika hamda iqtisodiyot fanlari yo'nalishidagi talabalar va ehtimolliklar nazariyasini mustaqil o'rganuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:
R.N.G'anixo'jayev – f.-m.f.doktori, M.Ulug'bek nomidagi O'zMU professori.
Y.M.Xusanhoyev – f.-m.f.doktori, Toshkent Arxitektura va qurilish instituti prorektori, professor

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2013yil 13-martdagi 82-sonli buyrug'iga asosan 5130100 – matematika yo'nalishi bakalavrlari uchun tavsiya etilgan va nashrga ruxsat berilgan.

ISBN – 978-9943-4306-00

SO'Z BOSHI

Ehtimolliklar nazariyasi zamonaviy matematika fanining asosiy yo'nalishlaridan biri bo'lib u universitetlar, pedagogika va texnika oliy o'quv yurtlarida matematika bo'yicha o'qitiladigan asosiy kurslar qatoriga kiradi.

Ushbu darslik "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" kursining respublikamiz universitetlari va pedagogika institutlari uchun matematika, tatbiqiy matematika, informatika mutaxassisliklari bo'yicha qabul qilingan o'quv dasturlari asosida yozilgan. Kitobda hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosiy boblari aksiomatik (formal) usulda kiritilgan "ehtimolliklar fazosi" tushunchasi hamda o'lchovlar nazariyasi, Lebegning abstrakt integral nazariyalariga tayangan holda, matematik qat'iylik bilan bayon etilgan.

Darslikni yozishda muallifning Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida, M.V.Lomonosov nomidagi Moskva Davlat universitetining Toshkent filialida, Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika universitetida ko'p yillar davomida o'qigan ma'ruzalar matnlaridan foydalanildi.

Qo'lyozma bilan tanishib, o'zlarining foydali maslahatlarini bergan fizika-matematika fanlari doktori, professorlar R.N.G'anixo'jayev va Y.M.Xusanboyevlarga hamda darslikni tugal shaklga keltirishda yordam bergan katta ilmiy xodim, fizika-matematika fanlari nomzodi J.B.Azimovga, tadqiqotchilar F.N.Sadriddinov, I.I.Sheraliyevlarga chuqur minnatdorchilik izhor etamiz.

Sh.Q.Formanov
O'zbekiston Fanlar Akademiyasi akademigi.

KIRISH

1. Tasodifiylik. Ehtimolliklar nazariyasi yuzaga kelishidan oldin fanlar, asosan, ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisa va tajribalarni o'rgangan. Masalan, moddiy nuqta og'irlik kuchi ta'sirida bo'lib, uning biror momentdagi vaziyati va tezligi (boshlang'ich shartlar) ma'lum bo'lsa, nuqtaning bu vaqtdan keyingi harakati mos differentsial tenglama orqali bir qiymatli aniqlanadi. Lekin bunday mexanik model har qanday harakat jarayonini qoniqarli ravishda ifoda eta olmaydi. Masalan, miltiqdan otilgan o'qning traektoriyasini bir qiymatli tarzda aniqlash mumkin emas, chunki har bir otish uchun boshlang'ich tezlik o'zgarmas bo'lmasdan, qandaydir tasodifiy xususiyatlarga bog'liq bo'lib qoladi (Masalan, merganning ruhiy va jismoniy holati, uning ko'rish qobilyati darajasi, o'q otish tajribasiga ta'sir etadi).

Agar boshlang'ich tezlikning o'zgarishi katta bo'lmasa (masalan, mos differentsial tenglamani sonli integrallash xatoligidan kichik bo'lsa), deterministik mexanik modeldan foydalanish mumkin va bu modelda harakat boshlang'ich shartlar orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Ma'lum shartlar asosida o'tkazilgan tajribalarning natijalarini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lmaydigan holatlar juda ko'p uchraydi. Tanga tashlash tajribasi bu holatlar uchun birinchi misol bo'lishi mumkin. Haqiqatan ham tanga tashlanganda uning gerb (G)li tomoni bilan yoki raqam (R) yozilgan tomoni bilan tushishini oldindan aytib bo'lmaydi. Biror aniq miqdorni bir necha marta bir xil sharoitda "o'lchash" natijalari ham turlicha bo'ladi. Alohida har biri tajriba natijasiga ta'sir etmaydigan, ko'p sondagi har xil sabablar tajribaning natijalarini oldindan aytib berish (bir qiymatli aniqlash) mumkin bo'lmaslik holatini yuzaga keltiradi va bunday tajribalarning natijalari tasodifiy (aniq bo'lmagan) deb hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasi ro'y berishi yoki ro'y bermasligida ozmi ko'pmi qandaydir noaniqlik holatlarini hisobga olishga to'g'ri keladigan hodisalarning modellarini o'rganadi (lekin hodisalarning o'zini emas, chunki ehtimolliklar nazariyasi matematik fanlar turkumiga kiradi). Boshqacha qilib aytganda, ehtimolliklar nazariyasi natijalarini oldindan aniq qilib aytib berish mumkin bo'lmagan tajribalarning modellarini o'rganadi. Tanga tashlash, ertangi yoki keyingi kunlarda ro'y beradigan ob-havo, biror bir asbobning to‘xtovsiz ishlashi, texnik nazoratda yaroqsiz buyumlarning qismlari, elektrik signalni uzatishdagi “xalaqitlar” - bular hammasi ehtimolliklar nazariyasining qo‘llanish sohalarini tashkil qiladi.

2. Ehtimollik va chastota. Kundalik hayotda “ehtimollik”, “hodisa” so‘zlari ko‘p ishlatiladi. Intuitiv darajada biror hodisaning ehtimolhgi, bu hodisaning ro‘y berish imkoniyatlari haqida ob’yektiv xarakteristika bo‘lib hisoblanadi. Agar biror hodisa A ni kuzatish bo‘yicha bir xil sharoitda n marta tajriba o‘tkazilgan bo‘lsa va ulardan $n(A)$ tajribada A hodisa kuzatilgan bo‘lsa,

$$m_n(A)=\frac{n(A)}{n}$$

nisbat, A ning ro‘y berish chastotasi deb ataladi. Ehtimolliklar nazariyasining asosiy teoremalaridan biri “katta sonlar qonuni” tasdiq etadiki, n o‘sib borgan sari $m_n(\cdot)$ chastota biror $P(\cdot)$ songa yaqinlashib boradi $(0\le P\le 1)$. Shunday qilib har qanday hodisani qandaydir P son bilan bog‘lash mumkinki, bu hodisaning chastotasi $n\to\infty$ da, shu P songa yaqinlashadi, va P ni A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi, deb qabul qllinadi.

Demak, bizning ongimizda “ehtimollik” tushunchasi biror hodisaning bir xil tajribalar o‘tkazilganda ko‘p yoki oz marta ro‘y berishi bilan bog‘liq. Masalan, ko‘p marta foydalanadigan klassik misol-tanga tashlash tajribasini ko‘raylik. Agar tanga n marta tashlansa va unda tanga “gerb” (G) tomoni bilan n_G marta tushsa,

$$m_n=\frac{n_G}{n}$$

miqdor n marta o‘tkazilgan tajribalarning G tomoni bilan tushgan qismini (chastotasini) ifoda qiladi. Agar har bir tajriba (tanga tashlash) qolgan tajribalarga bog‘liq bo‘lmasa, intuitiv ravishda (tajriba buni tasdiqlaydi) m_n miqdor katta n lar uchun $\frac{1}{2}$ ga yaqin bo‘ladi, deb tushunish mumkin, ya’ni

$$m_n\to\frac{1}{2},\qquad n\to\infty \qquad (*)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi va tanganing G tomoni bilan tushish “ehtimolligimi” $\frac{1}{2}$ ga teng deb hisoblash mumkin. Lekin amaldagi matematik analiz chegarasida $(*)$ munosabatni qat’iy ravishda asoslab bo‘lmaydi. Birinchidan tajribalarning bog‘liqsizlik tushunchasi qat'iy ravishda kiritilishi kerak bo'ladi, ikkinchidan esa m_n biror aniq sonni ifoda etmaydi, u "tasodifiy" miqdor bo'lib, o'tkazilgan har xil tajribalarda turli qiymatlarni qabul etadi.

Qayd etilgan qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun "tasodifiy hodisalarning" qat'iy aksiomatik modellarini tuzish kerak bo'ladiki, ular yordamida hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash qoidalari, tajribalarning bog'liqsizligini ifoda etadigan tushuncha, tasodifiy miqdorlarni yaqinligi haqidagi tushunchalarni kiritish imkoniyati yuzaga kelishi taqazo etiladi.

3. Matematik model. Ehtimolliklar nazariyasi matematik fan sifatida bevosita biror jarayonning o'zini o'rganish bilan shug'ullanmaydi, u shu jarayonning matematik modeli bilan ish ko'radi. Matematik modellarda o'rganilayotgan jarayonning asosiy xususiyatlari to'g'ri aks etilgan bo'lib, ularda shu jarayonning muhim hisoblangan tomonlariga e'tibor qilish talab etiladi. Masalan, unchalik muhim bo'lmagan parametrlarni hisobga olishga harakat qilinsa, bu jarayonning matematik modelini murakkablashishiga olib keladi va natijada jarayonni o'rganish qiyinlashadi. Muhim bo'lgan parametrlarni hisobga olmaslik esa, noto'g'ri xulosalarga olib kelishi mumkin. Matematik model qanchalik to'g'ri tanlangan bo'lishini, uning asosida chiqarilgan nazariy xulosalarni, o'tkazilgan tajriba natijalariga mos kelishi bilan taqqoslanadi.

Ehtimolliklar nazariyasida ehtimollik tasodifiy hodisalarning funksiyasi sifatida qaraladi. Matematik analiz kurslarida funksiyalarni o'rganishdan oldin, bu funksiyalar aniqlangan soha haqiqiy sonlar to'plami yaxshi analiz qilinadi. Xuddi shuningdek, ehtimollik hodisalarning funksiyasi bo'lgani uchun kitobning I va II - boblarida hodisalar haqidagi intuitiv tushunchalar aniqlashtirilib, so'ng ehtimollik tushunchasi kiritiladi.

Mashhur matematik A.N.Kolmogorov tomonidan ishlab chiqilgan ehtimolliklar nazariyasining aksiomatik fan ekanligi to'g'risidagi kontsepsiyasi uni matematik fanlar qatoriga qo'shdi. Bu fanning aksioma va teoremalari abstrakt ko'rinishda tasodifiy hodisalarga xos bo'lgan qonuniyatlarni o'rganadi.

I BOB. DISKRET EHTIMOLLIKLAR FAZOSI

I bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Ehtimolliklar nazariyasining hozirgi zamon matematik fanlar tizimidagi o'rni va ahamiyati.*
- *Elementar hodisalar to'plami diskret bo'lganda, ehtimollik tushunchasi konstruktiv ravishda kiritilishi mumkinligiga, hodisalar ustidagi algebraik amallar.*
- *Ehtimollikning klassik ta'rifi.*
- *Ehtimolliklar nazariyasidagi Bernulli sxemasi*

haqida tasavvurlarga ega bo'linadi;

- *Ehtimolliklar taqsimoti ta'rifini.*
- *Elementar hodisalar ehtimolliklarini.*
- *Hodisalar uchun "ikkilik" prinsipini.*
- *Klassik sxemaning ta'rifini.*
- *Bernulli sxemasidagi binomial taqsimotni*

bilish va amalda qo'llay olish;

- *Tasodifiy hodisalar yig'indilari uchun isbotlangan formulani qo'llab masalalar yechishni,*
- *Klassik ta'rif asosida masalalar va misollar yechishni,*
- *Hodisalarning ehtimolliklarini hisoblashda kombinatorika Elementlaridan foydalanishni*

o'rganib olish mumkin.

§ 1.1. Elementar hodisalar fazosi

Eslatib o'tamiz, natijalarini oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalarni, tasodifiy natijalarga ega bo'lgan stoxastik tajribalar deb ataladi. Bu tajribalarni matematik ma'noda tasarruf etish uchun bizga elementar hodisalar fazosi tushunchasi zarur bo'ladi. Bu fazo sifatida o'rganilayotgan tajribalarni bir-birini istisno qiladigan natijalar to'plami Ω tushuniladi. Shunday qilib Ω to'plamning elementlari elementar hodisa hisoblanib, unga ta'rif berilmaydi, uni faqat tushuntiriladi. Yuzaki qaraganda elementar hodisalar fazosi – bu tajribaning "mayda" (elementar), "parchalanmaydigan", birgalikda ro'y bermaydigan natijalaridir. Elementar hodisalar fazosi Ω-elementar hodisalar (natijalar) ω larning to'plami, ya'ni

$$\Omega = \{\omega : \omega - elementar\ hodisa\}.$$

Ω to'plamning elementlari sonini shartli ravishda $|\Omega|$ deb belgilaymiz.

Misollar 1. Tanga tashlash. Bu tajriba uchun 2 ta elementar hodisa mavjud, ya'ni $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, ω_1 – tangani "gerb" (G) tomoni bilan, ω_2 – tangani "raqam" (R) tomoni bilan tushish hodisalari, $|\Omega|=2$.

2.Kubik tashlash, ya'ni tomonlari $\{1,2,...,6\}$ raqamlar bilan helgilangan kubni tashiash.

Bu holda $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\}, |\Omega|=6$, ω_i – kubni i raqami yozilgan tomoni bilan tushish hodisasi.

3. Tangani 2 marta tashlash. Bu holda

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\{GG,GR,RG,RR\},$$

GG - har ikki holda ham tanga "G" tomoni bilan,
GR - birinchi tashlashda "G", ikkinchisida "R" tomonlari bilan,
RG - birinchi tashlashda "R", ikkinchi tashlashda "G" tomoni bilan,
RR - har ikki holda ham "R" tomoni bilan tushish hodisalari.

Bu yerda $|\Omega|=4$, GR va RG larni har xil elementar hodisalar, deb tushunish kerak. Eslatib o'tamizki, tangani 2 marta tashlash tajribasi yoki 2 ta tangani birdaniga tashlash tajribasi bilan teng kuchli, chunki bu tajribalar uchun elementar hodisalar to'plami bir xil bo'ladi.

4. Tajribalar ketma-ketligi.

Faraz qilaylik, n marta o'tkazilgan tajribalarning har birida biror hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligi kuzatilsin. Agar hodisa ro'y bersa, uni "yutuq" deb, ro'y bermasa "yutqiziq", deb hisoblaymiz. Masalan, tanga ko'p marta tashlanganda, uni "G" tomoni bilan tushishi "yutuq", "R" tomoni bilan tushishi "yutqiziq", tayyor mahsulotni sifatini tekshirishda "yaroqli" buyumlarni uchratishni "yutuq", deb hisoblash mumkin. Agar shartli ravishda "yutuqni" 1, "yutqiziqni" 0 deb hisoblasak, n marta o'tkazilgan tajribaning elementar hodisalari uzunligi n ga teng bo'lgan va elementlari 1 yoki 0 dan iborat ketma-ketlikni tashkil qiladi, ya'ni bu tajriba uchun

$$\Omega=\{\omega;\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n),\omega_i=1 \text{ } yoki \text{ } 0\}$$

Masalan, $\omega=1001$ yozuv, $n=4$ va birinchi hamda to'rtinchi tajribalar "yutuqli" bo'lganini ko'rsatadi. Bu elementar hodisalar to'plami uchun

$$|\Omega|=2^n$$

va har bir elementar hodisani n-xonali sonni ikkilik sanoq sistemasida yozuvi, deb tushunish mumkin (0 ni hisobga olgan holda).

Keltirilgan misollarda elementar hodisalar chekli to'plamni tashkil qiladi.

5. "Xizmat ko'rsatish tizimiga" tushgan buyurtmalar. Eng avvalo qayd qilib o'tish joizki, "tizim" va "buyurtma" so'zlarini keng ma'noda tushunish kerak. Misol sifatida abonentlarni telefon stansiyasiga ulanishi, xaridorlarni biror savdo tashkilotiga murojaati, elektron hisoblash mashinasi ayrim bloki orqali informatsion signallarni o'tishi, maxsus hisoblagichlar yordamida kosmik nurlarni qayd etilishi kabi voqealarni keltirish mumkin. Agar faqat ma'lum bir vaqt davomida tushadigan "buyurtmalar" bilan qiziqadigan bo'lsak, u holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...\}$$

va bu yerda $\omega_i - i$ ta "buyurtma" paydo bo'lishiga mos keladigan elementar hodisa. Bu tajriba uchun $|\Omega|=\infty$ va Ω – sanoqli to'plam.

6.Kutish vaqti. Yo'lovchi ixtiyoriy vaqtda metro stansiyasiga kirishi mumkin. Poyezdlar qatnovi oralig'ini vaqt birligi sifatida qabul qilsak, elementar hodisa sifatida ixtiyoriy $\omega\in[0,1]$ sonni olish mumkin.

Bu misolda $\Omega=[0,1]$-sanoqsiz to'plam va $|\Omega|=\infty$.

7. Kuzatish xatosi. Agar tajribamiz biror miqdorni kuzatishdan (o'lchashdan) iborat bo'lsa, ba'zi sabablarga ko'ra xatoliklar yuzaga keladi. Bu xatoliklar musbat yoki manfiy sonlarda ifodalanishi mumkin va Ω sifatida barcha haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,\infty)$ olinishi maqsadga muvofiq bo'ladi.

Albatta, tajribalar uchun keltirilgan elementar hodisalar fazolaridan ko'ra ancha murakkab bo'lganlarini ham keltirish mumkin. Masalan, ma'lum vaqt davomida elektr toki miqdorining o'zgarishini kuzatish, kasallarning elektro-kardiogrammalarini olish jarayonlari uchun elementar hodisa sifatida funksiyalar yuzaga keladi va Ω sifatida ma'lum bir funksional fazolarni qabul qilishga to'g'ri keladi. Dengiz yoki daryoda to'lqinlanish voqealarini o'rganish jarayonida elementar hodisalar sifatida qandaydir geometrik sirtlar paydo bo'ladi va hokazo.

8. Tangani cheksiz marta tashlash. Bu holda elementar hodisa (natija) sifatida elementlari 0 va 1 dan iborat

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...),\ \omega_i=1,0.$$

ketma-ketlikni tushunish mumkin. Bu holda elementar hodisalar fazosi Ω sanoqli to'plam bo'lmaydi. Haqiqatan ham $[0,1]$ oraliqda har qanday sonni

$$0,\omega_1\omega_2...\omega_n...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n}{2^n}$$

ikkilik sanoq sistemasida yozish mumkin.

Demak,

$$\Omega=\{\omega;\quad \omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...)\}$$

to'plam $[0,1]$ oraliqdagi haqiqiy sonlar to'plamiga ekvivalent bo'ladi. Keltirilgan elementar hodisalar to'plami universal xususiyatga ega, chunki u tangani chekli marta tashlash tajribalari uchun yaroqli bo'ladi. Masalan, tangani 1 marta tashlash tajribasida ω ketma-ketlikning faqat birinchi elementi ω_1 ga e'tibor beriladi, xolos, ikki marta tashlashda ω_1 va ω_2 elementlarga va umuman n marta tanga tashlanganda $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ elementlargagina e'tibor qilinadi.

Ixtiyoriy ko'rinishdagi Ω to'plamlar uchun tajribalar modellarini qurish ancha murakkab kechadi, lekin elementar hodisalar fazosi (to'plami) Ω diskret bo'lgan holda esa yuzaga kelgan qiyinchiliklar oson bartaraf etiladi. Shuning uchun ham tasodifiy tajribalarni elementar hodisalar fazosi Ω diskret bo'lgan holdan boshlaymiz.

§ 1.2. Diskret elementar hodisalar fazosida ehtimolliklar taqsimoti

1.1. Elementar hodisalar ehtimolliklari.

Elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

diskret to'plamdan iborat bo'lsin.

Ta'rif 1. Ω da aniqlangan $p(\omega)$ funksiya shu to'plamda ehtimolliklar taqsimotini beradi deyiladi, agar $p(\cdot)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) Hamma ω lar uchun $p(\omega) \geq 0$;

2) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ (Bu yerda va boshqa joylarda ham $\sum\limits_{\omega \in \Omega}$ – belgi Ω ning hamma elementlari bo'yicha olingan yig'indini bildiradi).

2) munosabatdagi yig'indi ma'noga ega, chunki unda ko'pi bilan sanoqli sondagi qo'shiluvchilar bor. Ω diskret to'plam ekanligidan $p(\cdot)$ funksiyaning qiymatlari

$$p_1, p_2, ..., p_n, ...$$

ketma-ketlik tashkil etadi va

$$p(\omega_k) = p_k, \quad k = 1, 2, ...$$

sonlar elementar hodisalarning ehtimolliklari deyiladi va 2) munosabatga ko'ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Elementar hodisalar ehtimolliklarini konkret hollarda qanday tanlash masalasiga ko'p marta murojaat etamiz. Masalan, tanga tashlash tajribasi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{G, R\}$ uchun $p(G) = p(R) = \frac{1}{2}$, kub tashlash tajribasi

$$\Omega=\{\omega_1,...,\omega_6\}=\{1,...,6\}$$

uchun $p(\omega_k)=p_k=\frac{1}{6}$, $(k=1,...,6)$ deb qabul qilish maqsadga muvofiq bo'ladi. Paragraf 1 da 5) misoldagi "tizimga" tushgan "buyurtmalar" bilan bog'liq bo'lgan tajriba uchun

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,...,\omega_n,...\}$$ va

$p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,..., \lambda>0.$ (*)

Elementar hodisalarning ehtimolliklari p_k lar uchun 1) va 2) munosabatlar o'rinli va (*)-Puasson taqsimoti deb ataladi va bu taqsimot ehtimolliklar nazariyasida muhim rol o'ynaydi.

1. 2. Hodisalar va ularning ehtimolliklari.

Ta'rif 2. Elementar hodisalar to'plamining ixtiyoriy qismi $A\subseteq\Omega$ hodisa deb ataladi.

Masalan, kub tashlash tajribasi uchun $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_6\}$, ω_k kubni k raqam yozilgan tomoni bilan tushishi $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ – kubni juft raqam yozilgan tomoni bilan tushish hodisasi.

Hodisalar ustida amallar

1. A hodisaga qarama-qarshi bo'lgan hodisa $\bar{A}=\Omega\setminus A$, ya'ni A ga kirmaydigan elementar hodisalar to'plami.
2. A va B hodisalarning ko'paytmasi $A\cap B$ – ham A ga, ham B ga kiradigan elementar hodisalar to'plami.
3. A va B hodisalarning yig'indisi $A\cup B$ – A yoki B ga tegishli bo'lgan elementar hodisalar to'plami.

Eslatib o'tamizki, bo'sh to'plam $\varnothing$ - har qanday to'plamga qism bo'ladi va bu hodisa uchun

$$\bar{\varnothing}=\Omega,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cap\bar{A}=\varnothing,$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Lemma. (Ikkilik prinsipi) Har qanday A va B hodisalar uchun

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

Isbot. Ixtiyoriy elementar hodisa ω ning $\overline{A\cup B}$ to'plamga tegishli bo'lishidan, uning A ga ham B ga ham tegishli bo'lmasligi, ya'ni uni $\bar{A}$ ga ham, $\bar{B}$ ga ham tegishli bo'lishi kelib chiqadi $(\omega\in\bar{A}\cap\bar{B})$. Xuddi shuningdek $\omega\in\overline{A\cap B}$ munosabatdan esa $\omega\in\bar{A}\cup\bar{B}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, lemma isbotlandi. Ikkilik prinsipi lemmadagi har ikki tenglikda $\cup$ va $\cap$ amallarning o'rinlarini almashtirish mumkinligini bildiradi. Lemmada keltirilgan tenglik cheksiz sondagi hodisalar ucbun ham o'rinli. Agar

$$A_1, A_2, \dots A_n, \dots$$

hodisalar ketma-ketlilgi bo'lsa,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}, \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

Ta'rif 3. Elementar hodisalar to'plami Ω da ehtimolliklar taqsimotini beradigan $p(\omega)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy A hodisaning ebtimolligi $P(A)$ deb,

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Keltirilgan ta'rifdan $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$ tengliklami olamiz. Umuman aytganda, Ω to'plam tajriba natijasida kamida bittasi ro'y beradigan elementar hodisalar (ω lar) to'plami va uni ro'y berishi muqarrar bo'lgan hodisa deb, aksincha bo'sb to'plam ($\varnothing$) bo'lsa, ro'y bermaydigan hodisa deb tushuniladi. Hodisa A to'plamga kiruvchi bamma elementar hodisalardan, hech bo'lmaganda birortasi ro'y bersa, A hodisa ro'y berdi deb tushuniladi. Aytib o'tilgan ma'noda A hodisaning ehtimolligi, (1) tenglik bilan aniqlanadigan to'plam funksiyasi $P(A)$ hisoblanadi va u ehtimollik o'lcbovi deb ham ataladi. Masalan, kub tashlash tajribasida

$$p(\omega_1) = \dots = p(\omega_6) = \frac{1}{6},$$

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6,\}$ – kubni juft raqam yozilgan tomoni bilan tushish hodisasi bo'lsa,

$$P(A) = p(\omega_2) + p(\omega_4) + p(\omega_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ehtimollik $P(\bullet)$ ning ta'rifidan ko'rinadiki, $P([\omega]) = p(\omega)$ (bu yerda $[\omega]$ – bitta elementar hodisadan iborat bo'lgan hodisa). Agar F bilan hamma hodisalar sinfini belgilasak, ya'ni

$$F = \{A;\ A \subseteq \Omega\} \text{ bo'lsa,}$$

(Ω, F) – juftlik o'lchovli fazo deyiladi. Endi F da (1) formula bilan aniqlanadigan $P(\bullet)$ ehtimollikni hisobga olib, (Ω, F, P) ucblikni hosil qilamiz va uni ehtimolliklar fazosi deb ataymiz.

Endi (1) formula bilan aniqlangan $P(\bullet)$ ebtimollikning ba'zi xossalarini ko'raylik.

1) Agar $A \subseteq B$ bo'lsa (bu holda A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi, cbunki A hodisa ro'y bersa, B hodisa albatta ro'y beradi),

$$P(A) \le P(B).$$

Bu munosabatni isboti haqida fikr yuritishni o'quvchiga havola etamiz.

2) Har qanday A hodisa uchun

$$0 \le P(A) \le P(\Omega) = 1.$$

Bu munosabatning isboti

$$\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$$

ekanligidan va 1) xossadan kelib chiqadi.

3) Har qanday elementar hodisa ω uchun

$P([\omega]) = p(\omega)$, $[\omega]$ – bitta ω elementar hodisadan iborat bo'lgan tasodifiy hodisa.

4) Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ munosabat o'rinli.

Bu tenglikdan

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

ekanligini olamiz.

Isbot. Ehtimollikning (1) formula orqali ifodasidan va $\sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$ qatorning absolyut yaqinlashishidan foydalanib,

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

tenglikni yoza olamiz.

Xususiy holda $A \cap B = \varnothing$ (ya'ni A va B hodisalar bir vaqtda ro'y bermasa)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Keltirilgan $P(\bullet)$ ehtimollikning additivlik xossasi sanoqli sondagi kesishmaydigan

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

hodisalar ketma-ketligi uchun ham o'rinli bo'ladi: agar $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \ne j)$ bo'lsa,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

5) Har qanday A hodisa uchun

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Haqiqatan ham, har qanday A hodisa uchun

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

va keltirilgan xossa $P(\bullet)$ ning additivligidan kelib chiqadi.

§ 1.3. Hodisalar yig'indisining ehtimolligi

Ixtiyoriy diskret ehtimolliklar fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ni ko'ramiz.

Teorema. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar yig'indisi uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Isbot. n=2 holda

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demak, bu holda teorema o'rinli. Endi faraz qilamizki, $(n-1)$ ta hodisalar $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ uchun teoremadagi formula o'rinli bo'lsin. Agar $B = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ deb belgilasak,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P(B \cap A_n) = P(B) + P(A_n) - P(B \cap A_n)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi formulada

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right), \quad P(B \cap A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_n\right)$$

o'rinli ekanligini hisobga olib, teoremadagi formulaning o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi keltirilgan formula yordamida quyidagi masalani yechaylik. Qandaydir tartibda joylashgan n ta element berilgan bo'lsin. Tasodifiy ravishda bu elementlar ustida o'rin almashtirishlar bajarilgan bo'lsin.
Bu tajriba uchun

$$\Omega = \left\{\omega;\ \omega = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_n})\right\}$$

va

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \text{– ixtiyoriy o'rin almashtirish.}$$

Bu holda

$$|\Omega| = n!$$

va ixtiyoriy ω o'rin almashtirish uchun

$$p(\omega) = \frac{1}{n!}$$

Hech bo'lmaganda 1 elementning o'z o'rnida bo'lishlik ehtimolligini topaylik. Bu masalaga quyidagicha tushuntirish berish mumkin. n ta

konvert tasodifiy ravishda adreslar bilan to'ldirilgan. Hech bo'lmaganda 1 konvertga yozilgan adres to'g'ri bo'lishi ehtimolligi topilsin.

Hamma o'rin almashtirishlar soni $n!$. A_k hodisa sifatida k-nchi elementning o'z o'rnida bo'lishini tushunsak, bu hodisa $(n-1)!$ imkoniyatlarga ega bo'ladi (ya'ni , $(n-1)!$ elementar hodisalardan iborat bo'ladi). Demak,

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!}$$

O'z navbatida $A_k \cap A_j$ hodisa k-nchi va j-nchi elementlarni o'z joylarida bo'lishini ifoda etadi. Shuning uchun ham

$$P(A_k \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \ldots, P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{[n-(n-1)]!}{n!} = \frac{1}{n!}$$

yig'indi $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ hodisa, hech bo'lmaganda 1 ta element o'z o'rnida bo'lishini bildiradi. Teoremadagi isbotlangan formula bo'yicha

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} =$$

$$= 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right),$$

qavs ichidagi ifoda e^{-1}ni qatorga yoyganda birinchi (n+1) ta hadini bildiradi. Shuning uchun ham

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - e^{-1}.$$

Yechimi keltirilgan masala ehtimolliklar nazariyasida "to'g'ri kelin tanlash" nomi bilan ma'lum va unga har xil izohlar berish mumkin.

§ 1.4. Klassik sxema

Aytaylik, biror tajribaning natijalari n ta elementar hodisadan iborat bo'lsin, ya'ni

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Ω to'plamda

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

ehtimolliklar taqsimotini ko'ramiz. Bu holda har bir elementar hodisaning ro'y berishi teng imkoniyatli deb hisoblanadi va ixtiyoriy A hodisaning ehtimolligi ($A \subseteq \Omega$) uchun

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{n(A)}{n} \qquad (1)$$

tenglikni olamiz ($n(A)$ - A bodisani tashkil etuvchi elementar hodisalar soni)

Masalan, yon yoqlarida $\{1,2,...,6\}$ sonlar yozilgan simmetrik kubni tashlash tajribasida

$$p(1) = p(2) = ... = p(6) = \frac{1}{6}.$$

Agarda $A = \{2,4,6\}$ (kubni juft raqam bilan tushish) hodisasi bo'lsa, uning uchun $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

Sodda simmetrik tangani tashlash tajribasida esa ($\Omega = \{G, R\}$)

$$P(G) = P(R) = \frac{1}{2}.$$

Simmetrik tangani, to G birinchi marta paydo ho'lishigacha tashlash tajribasi uchun $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ sanoqli to'plam bo'ladi va bu holda $\omega_n = RR...RG$.

Elementar bodisalarning ehtimolliklari

$$p(\omega_1) = P(G) = \frac{1}{2}, \; p(\omega_2) = P(RG) = \frac{1}{2^2},$$

$$p(\omega_3) = P(RRG) = \frac{1}{2^3}, ..., p(\omega_n) = \frac{1}{2^n}, ...$$

bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ ekanligidan $p(\cdot)$ funksiya Ω to'plamda aniqlangan ehtimolliklar taqsimotini beradi. Masalan, tajriba juft marta o'tkazilganda, tugallanish hodisasi

$$A = \{\omega_2, \omega_4, ...\} = \{RG, RRRG, ...\}$$

bo'lib, ehtimolligi

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Tajriba toq marta o'tkazilganda, tugallanish hodisasi

$$B = \{\omega_1, \omega_3, ...\}$$

uchun esa

$$P(B)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{-2n}=\frac{2}{3}$$

Keltirilgan hisoblashlar intuitiv ma'nodagi tasavvurga asoslangan (tajribaning toq yoki juft marta o'tkazilganda tugallanishi) $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ ehtimolliklarni (gipotezani) rad etadi.

Yuqoridagi (1) formula bilan aniqlangan ehtimollik $p(\cdot)$ hodisalarning klassik ma'nodagi ehtimolligi, deb ataladi va unga asos bo'lgan $p(\cdot)=\frac{1}{n}$ funksiya uchun tekis diskret taqsimot termini ham ishlatiladi. Umuman, keltirilgan ehtimollikga asoslangan modellar klassik sxemalar deb yuritiladi.

Endi klassik sxemalarga misollar keltiramiz. Aytaylik, $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamni bosh to'plam deb qabul qilinadi. Bosh to'plamdan olingan k-hajmdagi tanlanma deb tartiblangan $\{a_{j_1},a_{j_2},...,a_{j_k}\}$ ketma-ketlik tushuniladi (to'plam tartiblangan deb hisoblanadi agar uning elementlari nomerlangan bo'lsa). Bu tanlanmani quyidagicha tashkil etish mumkin: birinchi element a_{j_1} ni hamma bosh to'plamdan olamiz, keyingi a_{j_2} elementni, a_{j_1} element kirmagan bosh to'plamdan, a_{j_3} elementni esa a_{j_1} va a_{j_2} elementlar kirmagan bosh to'plamdan olamiz va bokazo. Hosil qilingan tanlanmalar qaytarilmaydigan tanlanmalar deb ataladi. Bu xildagi $\{a_{j_1},a_{j_2},...,a_{j_k}\}$ k-hajmdagi tanlanmalar soni, n ta elementlarni k ta joylarga o'rinlashtirishlar soniga teng bo'ladi:

$$n_{(k)}=n(n-1)...(n-k+1).$$

Haqiqatdan ham, keltirilgan tanlanmani hosil qilishda birinchi joyda bosh to'plamning xohlagan (ixtiyoriy) n ta elementi, ikkinchi joyda ixtiyoriy n-1 ta elementi qatnashishi mumkin va bokazo. Qat'iyroq bo'lgan isbotni esa induksiya orqali amalga oshirish mumkin.

Endi qaytarilmaydigan sxema bo'yicha olingan tanlanmalar

$$\Omega=\{\omega;\ \omega=(a_{j_1},...,a_{j_k}),k\le n\}$$

to'plamida har bir tanlanmaga

$$P(\omega)=\frac{1}{n_{(k)}}$$

ehtimollikni beradigan "tekis taqsimotni" kiritamiz. Bunda har bir ω tasodifiy tanlanma deb ataladi va ular klassik sxemani tashkil etadi.

Masalan, birinchi va ikkinchi elementlari fiksirlangan $\left(a_{j_1}=a_1, a_{j_2}=a_2\right)$ tanlanmalar paydo bo'lishi hodisasining ehtimolligini hisoblaylik. Keltirilgan talab bo'yicha tanlanmaning k-2 joyini bosh to'plamning qolgan n-2 elementlari egallashi mumkin, ya'ni birinchi 2 ta joyda a_1 va a_2 elementlar qatnashadigan tanlanmalar soni $(n-2)_{(k-2)}$ ga teng bo'ladi. Demak o'rganilayotgan hodisaning ehtimolligi

$$\frac{(n-2)_{(k-2)}}{(n)_k}=\frac{(n-2)(n-3)...(n-k+1)}{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}=\frac{1}{n(n-1)}.$$

Qaytarilmaydigan tanlanmalar sxemasini quyidagicha oson tushuntirish mumkin. Aytaylik, qopda 1,2,..., n tartib raqamlari bilan belgilangan n ta shar bor. Qopdan ixtiyoriy ravishda shar olamiz va uning raqamini qayd etamiz va olingan sharni qopga qaytarmasdan ikkinchi sharni olamiz va bu jarayonni k marta ketma-ket davom ettiramiz.

Lekin tanlanmalarni boshqacha qilib ham tashkil etish mumkin. Qopdan olingan sharning raqami qayd etiladi va u qopga qaytariladi, yana qopdan shar olinadi va uning raqami qayd etiladi va hokazo. Shu usul bilan hosil qilingan tanlanmalar qaytariladigan sxema bo'yicha olingan deb hisoblanadi. Bu holda tanlanmalar to'plami

$$\Omega=\left\{\omega;\ \omega=(a_{j_1},a_{j_2},...,a_{j_k}), k=1,2,...\right\}$$

elementlari soni $n(\Omega)=n^k$ bo'ladi. Keltirilgan tanlanmalar hajmi $k\le n$ yoki $k>n$ bo'lishi mumkin. Endi qaytariladigan sxemada ixtiyoriy tanlanma uchun

$$p(\omega)=\frac{1}{n^k}$$

deb hisoblasak, biz yana klassik sxemani hosil qilamiz.

Masalan, qaytariladigan sxemada $k\le n$ uchun hamma elementlari turli xil bo'lgan tanlanmalar paydo bo'lish ehtimolligini hisoblaylik. Elementlari takrorlanmaydigan tanlanmalar soni, qaytarilmaydigan sxemadagi tanlanmalar soni $(n)_k$ ga teng va hisoblanayotgan ehtimollik $\frac{(n)_k}{n^k}$ ga teng bo'ladi.

Endi $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ bosh to'plamdan qaytarilmaydigan sxema bo'yicha olingan tanlanmalarga qaytamiz. Bizni hajmi $k\le n$, faqat tarkibi bilan farq qiladigan tanlanmalar qiziqtiradi. Bu sxemadagi hajmi k bo'lgan va tarkibi bir xil, faqat elementlarning tartibi bilan farq qiladigan tanlanmalar soni $k!$. Shuning uchun ham tarkibi bilan farqli bo'ladigan tanlanmalar soni

$$\frac{(n)_k}{k!}=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad k\le n.$$

Demak, bunda yangi tanlanmani paydo bo'lishi ehtimolligi

$$\frac{k!}{(n)_k}=\frac{1}{C_n^k}$$

va biz yana klassik ehtimollik sxemasini olamiz (umuman $k<0$, $k>n$ bo'lganda $C_n^k=0$ deb olinadi).

Klassik sxema uchun juda muhim hisoblanadigan quyidagi misolni ko'raylik. Aytaylik, qopda n ta shar bo'lib, ulardan n_1 tasi qora, $n-n_1$ tasi oq bo'lsin. Hajmi k ga teng va qaytarilmaydigan sxema bo'yicha tanlanma olingan bo'lsin. Bu tanlanmada k_1 ta qora shar bo'lishi ehtimolligini topaylik. Yuqorida e'tirof etilganidek, tarkibi bilan farq qiladigan tanlanmalar soni C_n^k. Hamma n_1 ta qora sharlardan k_1 tasi $C_{n_1}^{k_1}$ usul bilan tanlanishi mumkin. Qolgan $k-k_1$ ta oq sharlar hamma $n-n_1$ oq sharlardan $C_{n-n_1}^{k-k_1}$ usul bilan olinadi. Bunda har qanday qora sharlar uyushmasi, qolgan oq sharlar uyushmasi bilan birgalikda ro'y beradi. Shuning uchun ham hajmi k ga teng bo'lib, tarkibi bilan farq qiladigan va k_1 ta qora sharni o'z ichiga oluvchi tanlanmalar soni $C_{n_1}^{k_1}C_{n-n_1}^{k-k_1}$. Demak, bizni qiziqtirayotgan ehtimollik

$$P_{n_1,n}(k_1,k)=\frac{C_{n_1}^{k_1}C_{n-n_1}^{k-k_1}}{C_n^k},k\le n.$$

Ko'rish qiyin emaski, $\{P_{n_1,n}(0,k),P_{n_1,n}(1,k),...,P_{n_1,n}(k,k),\}$ sonlar ehtimolliklar taqsimotini tashkil qiladi, ya'ni

$$\sum_{k_1=0}^{k}P_{n_1,n}(k_1,k)=1$$

va bu tenglikdan har qanday $0<n_1<n$ uchun o'rinli bo'lgan

$$\sum_{k_1=0}^{n}C_{n_1}^{k_1}C_{n-n_1}^{k-k_1}=C_n^k$$

kombinatorik ayniyatni olamiz.

Ehtimolliklar taqsimoti

$$\{P_{n_1,n}(k_1,k),\ 0\le k_1\le k\}$$

gipergeometrik taqsimot deb aytiladi va u ehtimolliklar nazariyasining klassik sxemalarida, tadbiqiy statistika masalalarida ko'p uchraydi.

Masalan, tayyor mahsulotlar partiyasini statistik nazorat qilish nazariyasi shu taqsimotga asoslanadi.

Misol. O'tgan asrning 90 - yillarida "Sportloto" deb ataladigan lotereya turi keng tarqalgan edi. Lotereya qatnashchisi 49 ta nomli sport turidan (ular raqamlar bilan yozilgan bo'lar edi) 6 tasini belgilaydi. Yutuq esa, lotereya o'yini paytida ko'pchilikning ko'z oldida maxsus mexanik qurilma orqali o'tkaziladigan tasodifiy va hajmi 6 ga teng bo'lgan tanlanmadan o'yinchi nechtasini topganiga qarab belgilanadi. Lotereya qatnashchisining (o'yinchining) hamma 6 ta nomni to'g'ri topishi (maksimal yutuq), 5 tasini, 4 tasini va hakozo nomlarini to'g'ri topishi ehtimolligini hisoblaylik.

Ko'rish qiyin emaski, keltirilgan lotereya o'yini gipergeometrik taqsimot sxemasi orqali ifodalanadi. Bunda bosh to'plam 49 ta (sport turlari nomi) elementdan iborat, lotereya egalariga 6 ta "oq" shar ajratilgan. Shuning uchun ham tasodifan belgilangan 6 ta elementdan k_1 tasi "oq" bo'lish (bilet egasi belgilaganlari bilan ustma-ust tushish) hodisasining ehtimolligi $P_{6,49}(k_1,6)$ ga teng bo'ladi. Masalan, maksimal yutuq ehtimolligi

$$P_{6,49}(6,6)=(C_{49}^{6})^{-1}\approx 7{,}2\cdot 10^{-8}.$$

Keltirilgan misoldan ko'rinadiki, "Sportloto" lotereyasida ham qolgan lotereya turlaridagi kabi, katta yutuq chiqishi ehtimolligi juda ham kam.

Gipergeometrik taqsimot (uning nomi analizdagi maxsus gipergeometrik funksiyalarga mos keladi) misolida ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika o'rganiladigan masalalarning mohiyatini tushuntirish mumkin. Bosh to'plamning tarkibini bilgan holda, biz gipergeometrik taqsimot yordamida tanlanmaning tarkibini o'rganishimiz mumkin. Bu ehtimolliklar nazariyasi uchun xos masala hisoblanadi. Lekin ko'p hollarda teskari masalalarni yechishga, ya'ni tanlanmaning tarkibi bo'yicha hosh to'plamning tarkibini aniqlashga to'g'ri keladi. Keltirilgan teskari masalalarga o'xshash bo'lgan muammolar matematik statistikaning asosini tashkil etadi.

§ 1.5. Bernulli sxemasi

O'z o'zidan tushunarliki, o'tkazilayotgan tajribaning natijalari (elementar hodisalar) eng kamida 2 ta bo'lishi kerak. Tajriba bilan bog'liq elementar hodisalar soni 2 ga teng bo'lgan holni Bernulli sxemasi deb atashadi. Bu sxema uchun har bir tajriba natijasida biror A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi kuzatiladi, deb tushunish mumkin. Agar A

hodisa ro'y bersa, shartli ravishda "yutuq", ro'y bermasa "yutqiziq" deb hisoblab, "yutuq" qa 1 ni, "yutqiziq" qa 0 mos qo'ygan bo'laylik. Bu holda bosh to'plam 2 ta $\{0,1\}$ elementlardan iborat deb, undan qaytariladigan sxema bo'yicha hajmi n ga teng bo'lgan tanlanma olsak, bu tanlanmalar soni 2^n ga teng bo'ladi. Endi p ni $[0,1]$ oralig'idagi ixtiyoriy son deb hisoblab, hamma tanlanmalar

$$\Omega=\{\omega:\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n),\omega_i=1 \ yoki \ 0\}$$

to'plamida $p(\omega)$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar ω tanlanmada $k(\omega)$ ta 1 bo'lsa,

$$p(\omega)=p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}.$$

Aniqlangan $p(\omega)$ funksiya ehtimollik taqsimotini berishi uchun

$$P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=1$$

ekanligini isbot etish kerak bo'ladi.

Oson tushunish mumkinki, k ta 1 larni n joyga C_n^k usul bilan joylashtirish mumkin. Demak, k ta elementlari 1 ga teng bo'lgan tanlanmalar soni ham C_n^k ga teng, ya'ni

$$P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1.$$

Bu yerda Nyuton binomi formulasidan foydalanildi va bir vaqtning o'zida tanlanmada k ta 1 lar borligi ehtimolligi

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,...,n$$

topildi. Ehtimolliklar taqsimoti

$$\{P_n(0),P_n(1),...,P_n(n)\}$$

binomial taqsimot deb ataladi va uni quyidagicha tushunish mumkin. Har bir tajriba natijasida 2 ta elementar hodisalar ro'y berishi mumkin:

1 ("yutuq") yoki 0 ("yutqiziq"). Agar ketma-ket n marta tajriba o'tkazilsa, $P_n(k)$ bu tajribalarda "yutuq" (1) k marta ro'y berishlik ehtimolligiga ega bo'ladi.

Keltirilgan tajribalar ketma-ketligi ($p(\omega)=p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ ($k(\omega)$ tanlanma ω dagi 1 lar soni) elementar ehtimolliklarni hisobga olgan holda) Bernulli sxemasi deyiladi.

Tekshirib ko'rish qiyin emaski, ω tanlanmada 1 ning fiksirlangan s-nchi joyda bo'lish ehtimolligi p ga teng. Haqiqatan ham, ω tanlanmadan s-nchi elementni tushirib qoldirib,

$$\omega'=(\omega_1'\omega_2'...\omega_{n-1}', \omega_i'\neq\omega_s)$$

tanlanmani hosil qilamiz. Bu ω' bosh to'plam $\{0,1\}$ dan qaytariladigan sxema bo'yicha $n-1$ hajmdagi tanlanma bo'ladi. Demak,

$$P(\omega_s=1)=\sum_{\{\omega;\omega_s=1\}} p(\omega)=\sum_{\omega'\in\Omega} pp(\omega')=p\sum_{\omega'\in\Omega} p(\omega')=p.$$

Aytib o'tilgan fikrlarni takrorlab, 1 ning ω tanlanmada fiksirlangan k joylarda bo'lish ehtimolligi p^k ga teng ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi $P_n(k)$ ehtimollikning k ning har xil qiymatlarida qanday o'zgarishini o'rganaylik. Buning uchun quyidagi nisbatni qaraymiz:

$$R_n(k)=\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}=\frac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}=$$

$$=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{n-k+1}{k}=\frac{p}{1-p}\left(\frac{n+1}{k}-1\right).$$

Demak, $R_n(k)$ nisbat k ning o'sishi bilan monoton ravishda kamayadi va bir vaqtda

$$R_n(k)\geq 1,\qquad \frac{k}{n+1}\leq p \text{ bo'lganda,}$$

$$R_n(k)<1,\qquad \frac{k}{n+1}>p \text{ bo'lganda.}$$

Bu munosabatlar $P_n(k)$ ehtimollikning k o'zgarishi bilan oldin o'sishini ($k<[(n+1)p]$ qiymatlarda), keyin esa kamayishini ($k>[(n+1)p]$ qiymatlarda) ko'rsatadi (bu yerda $[x]$ sifatida x ning butun qismi olingan). Keltirilganlardan kelib chiqadiki,

$$\max_{0\leq k\leq n} P_n(k)=P_n(k_0),\ \ k_0=[(n+1)p].$$

Endi $Q_n(k)=\sum_{j=0}^{k} P_n(j)$ ehtimollikni o'rganaylik. Bu yig'indi Bernulli sxemasida "yutuqlar" soni k dan ko'p bo'lmaslik ehtimolligini ifodalaydi. Agar $k<k_0$ bo'lsa,

$$Q_n(k)=P_n(k)\left(1+\frac{1}{R_n(k)}+\frac{1}{R_n(k)R_n(k-1)}+\ldots\right)\leq$$

$$\leq P_n(k)\frac{R_n(k)}{R_n(k)-1}=P_n(k)\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k}.$$

Keltirilgan baho k va n larning katta qiymatlarida, $\frac{k}{np}$ nisbat esa 1dan farqli bo'lgan hollarda ancha aniq bo'ladi.
Bu holda

$$1+\frac{1}{R_n(k)}+\frac{1}{R_n(k)R_n(k-1)}+\ldots$$

yig'indi geometrik progressiya yig'indisi $\sum_{j=0}^{\infty} R_n^{-j}(k)$ dan kam farq qiladi va quyidagi taxminiy tenglik o'rinli bo'ladi:

$$Q_n(k)\approx P_n(k)\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k}. \qquad (1)$$

Masalan, n=30, p=0,7 , k=16, bo'lsa, $np=21, P_n(k)\approx 0{,}023$ bo'ladi. Bu holda

$$\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k}=15\cdot\frac{0{,}7}{5{,}7}\approx 1{,}84.$$

Demak, (1) ifodaning o'ng tomoni $0{,}023\cdot 1{,}84\approx 0{,}042$.

Ehtimollik $Q_n(k)$ ning haqiqiy qiymati esa $n=30, p=0{,}7; k=16$ bo'lganda 0,040 ga teng (verguldan keyin uch xonalik aniqlik bilan).

Endi n ta elementdan iborat bo'lgan bosh to'plamdan qaytarilmaydigan sxema bo'yicha olingan tanlanmaga qaytamiz. Agar bosh to'plamning n_1 ta elementga bitta ko'rinishda, qolgan $n_2=n-n_1$ ta elementi ikkinchi ko'rinishda bo'lsa, biz gipergeometrik taqsimotga ega bo'lamiz:

$$P_{n_1,n}(k_1,k)=\frac{C_{n_1}^{k_1}C_{n-n_1}^{k-k_1}}{C_n^k},\ 0\le k_1\le k.$$

Teorema. Agar n va n_1 sonlar cheksizlikka intilib, $\frac{n_1}{n}\to p\ (0\le p\le 1)$ bo'lsa,

$$P_{n_1,n}(k_1,k)\to P_k(k_1)=C_k^{k_1}p^{k_1}(1-p)^{k-k_1}$$

limit munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot: Haqiqatan ham $k_2=k-k_1, n_2=n-n_1$ deb olsak, $n\to\infty$ da

$$P_{n_1,n}(k_1,k)=\frac{k!(n-k)!}{n!}\cdot\frac{n_1!}{k_1!(n_1-k_1)!}\cdot\frac{n_2!}{k_2!(n_2-k_2)!}=$$

$$=\frac{k!}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\frac{n_1}{n}\left(\frac{n_1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n_1}{n}-\frac{k_1-1}{n}\right)}{\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k_1-1}{n}\right)}\times$$

$$\times\frac{n_2}{n}\left(\frac{n_2}{n}-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{n_2}{n}-\frac{k_2-1}{n}\right)\to C_k^{k_1}p^{k_1}(1-p)^{k_2}.$$

4. Tavakkaliga besh xonali son tanlanmoqda. Quyidagi hodisalar ehtimolliklarini toping:

$A=\{$son o'ngdan chapga va chapdan o'ngga bir xilda o'qiladi (masalan,13531)$\}$

$B=\{$5 ga karrali bo'ladi$\}$

$C=\{$son faqat toq raqamlardan iborat bo'ladi$\}$

Javob: $P(A)=0{,}01$, $P(B)=0{,}2$, $P(C)=\frac{5}{144}$

5. 52 talik qartalar to'plamidan tavakkaliga 4 tasi tanlandi. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping.

$A=\{$tanlangan qartalarning barchasi "g'ishtin"$\}$

$B=\{$kamida bitta tuz bor$\}$.

Javob: $P(A)\approx 0{,}264\cdot 10^{-2}$, $P(B)\approx 0{,}2813$

6. Beshta kartochkaga 1 dan 5 gacha raqamlar yozilgan. Tajriba uchta kartochkani ketma-ket olib, ularni olinish tartibida chapdan o'ngga qo'yishdan iborat. Quyidagi hodisalar ehtimolliklarini toping:

$A=\{$123 soni hosil bo'ladi$\}$,

$B=\{$3 raqami qatnashmagan son hosil bo'ladi$\}$,

$C=\{$ketma-ket kelgan raqamlardan tuzilgan son hosil bo'ladi$\}$,

$D=\{$juft son hosil bo'ladi$\}$.

Javob: $P(A)=\frac{1}{60}$; $P(B)=\frac{2}{5}$; $P(C)=\frac{1}{20}$; $P(D)=\frac{2}{5}$

7. Telefon kitobchasidan tavakkaliga bitta raqam tanlandi. Telefon raqami 7 xonalik sondan iborat va barcha qatnashgan raqamlarning kombinatsiyalari teng imkoniyatli bo'lsa, quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

$A=\{$so'nggi to'rtta raqami bir xil$\}$,

$B=\{$barcha raqamlar turlicha$\}$,

$C=\{$nomerda uchta 5, ikkita 1 va ikkita 2 raqami bor$\}$.

Javob: $P(A)=0{,}001$, $P(B)\approx 0{,}0605$, $P(C)\approx 2{,}1\cdot 10^{-5}$

8. (Kavaler de Mere masalasi). Uchta o'yin kubigi tashlanadi. Quyidagi hodisalardan qaysinisining ehtimolligi ko'proq:

$A=\{$tushgan raqamlar yig'indisi 11 ga teng$\}$;

$B=\{$tushgan raqamlar yig'indisi 12 ga teng$\}$?

Javob: $P(A)=\frac{27}{216}>P(B)=\frac{25}{216}$.

9. Sonlar to'plami $E=\{1,2,3,...,n\}$ dan uchta son ajratilmoqda. Ikkinchi son birinchi va uchinchi sonlar orasiga tushish ehtimolligini quyidagi hollarda hisoblang:

A) sonlar qaytarilmaydigan tanlash bilan ajratiladi,

B) sonlar qaytariladigan tanlash bilan ajratiladi.

Javob: A) $\frac{1}{3}$, B) $\frac{(n-1)(n-2)}{3n^2}$

10. Mergan uchun bitta tajribada mishon markaziga o'q tekkizish ehtimolligi $\frac{1}{4}$ ga teng. Mergan nishonga 5 ta o'q uzdi. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

A=$\{$bitta o'q nishon markaziga tegdi$\}$,

B=$\{$ rosa ikkita o'q nishon markaziga tegdi $\}$,

C=$\{$hech bo'lmaganda bitta o'q nishon markaziga tegdi $\}$,

D=$\{$ uchtadan kam bo'lmagan o'q nishon markaziga tegdi $\}$.

Javob: $P(A)\approx 0{,}3955$, $P(B)\approx 0{,}2637$, $P(C)\approx 0{,}7627$, $P(D)\approx 0{,}1035$.

11. Bernulli sxemasi bo'yicha ketma-ket tajribalar o'tkazilmoqda. Bitta tajribada yutuq bo'lish ehtimolligi p ga teng. Quyidagi hodisa ehtimolligini toping:

A=$\{$ n ta tajribada barcha k sondagi "yutuq" ketma-ket ro'y beradi$\}$.

Javob: $P(A)=(n-k+1)p^k q^{n-k}$.

12. Idishda 8 ta oq, 5 ta qizil va 2 ta qora sharlar bor. Qaytariladigan tanlash bo'yicha bittadan shar besh marta tanlandi. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

A=$\{$3 ta oq, 1 ta qizil va 1 ta qora shar olindi$\}$,

B=$\{$ rosa 3 ta shar olindi $\}$,

C=$\{$3 ta oq, 1 ta qizil va 1 ta qora shar olindi, oq sharlar ketma-ket olindi $\}$.

Javob: $P(A)\approx 0{,}1348$, $P(B)\approx 0{,}3304$, $P(C)\approx 0{,}0404$.

(albatta, hamma to'plam ostilari emas) va bu sinfdagi hodisalar uchun ehtimollik tushunchasi kiritiladi.

I-bobdagi mulohazalar ko'rsatadiki, ehtimollik tushunchasi kiritiladigan Ω ning to'plam ostilari sistemasi (sinfi), to'plam ma'nosidagi yig'indi, ko'paytirish, to'ldirisb amallariga nisbatan yopiq bo'lishi kerak. Shu munosabat bilan quyida keltirilgan ta'riflarni muhim, deb hisoblash mumkin:

Ta'rif 1. Ω-ixtiyoriy ω elementlar to'plami bo'lsin. Ω ning to'plami ostilaridan tuzilgan sistema

$$\mathfrak{I}_a = \{A; A \subseteq \Omega\}$$

algebra deyiladi, agarda

$$a)\ \Omega \in \mathfrak{I}_a,$$

$$b)\ A,B \in \mathfrak{I}_a\ bo'lsa,\quad A \cup B \in \mathfrak{I}_a,\quad A \cap B \in \mathfrak{I}_a$$

$$c)\ A \in \mathfrak{I}_a\ bo'lsa,\quad \overline{A} \in \mathfrak{I}_a.$$

Bunda ko'rish mumkinki $b)$ shartda $A \cup B$ yoki $A \cap B$ ning birortasini $\mathfrak{I}_a$ ga kirishini talab qilish yetarli, chunki ikkilik prinsipiga asosan

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},\quad A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Ta'rif 2. $\mathfrak{I}_a$-Ω ning to'plam ostilaridan tuzilgan algebra bo'lsin. To'plamlar funksiyasi $P(A)$, $A \in \mathfrak{I}_a$, chekli additiv ehtimollik o'lchovi deyiladi, agar o'zaro kesishmaydigan A va B to'plamlar ($A \cap B = \varnothing$) uchun

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

tenglik o'rinli bo'lib, $P(\Omega) = 1$ bo'lsa.

Keltirilgan to'plamlar funksiyasi chekli additiv ehtimollik deb ataladi.

Ta'rif 3. $(\Omega, \mathfrak{I}_a, P)$ obyektlar majmuasi umumiy ma'nodagi ehtimollik fazosi (modeli) deb ataladi va bu yerda :

a) Ω- ω elementlar to'plami,

b) $\mathfrak{I}_a$- Ω to'plamning to'plam ostilaridan tuzilgan algebra,

c) $P - \mathfrak{I}_a$ da aniqlangan chekli additiv ehtimollik.

Lekin, ko'p hollarda tasodifiy tajribalarning matematik modellarini tuzishda, keltirilgan ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}_a, P)$ juda umumiy xususiyatli bo'lgani uchun muayyan xulosalar chiqarishga imkoniyat bermaydi. Shuning uchun ham, Ω ning to'plam ostilari sistemasiga (sinfiga), ularda aniqlangan ehtimolliklarga ham qo'shimcha shartlar kiritishga to'g'ri keladi.

Ixtiyoriy stoxastik tajribani ko'raylik. Aytaylik, bu tajribaning natijalari (elementar hodisalar) to'plami Ω bo'lsin. Bu Ω to'plamning to'plam ostilaridan tuzilgan sistema $\mathfrak{I}$ σ - algebra tashkil qiladi deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

A_1) $\Omega \in \mathfrak{I}$

A_2) Agar $A \in \mathfrak{I}$ bo'lsa, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{I}$

A_3) Agar $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ hodisalar ketma-ketligi bo'lib,

$$A_n \in \mathfrak{I}, \; n = 1, 2, ...$$

munosabatlardan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$$

tegishlilik munosabatlari kelib chiqsa.

Yuqorida keltirilgan ikkilik prinsipiga asoslanib, A_3 shartda $\bigcup$ yoki $\bigcap$ amallardan birortasini qoldirish yetarli bo'ladi, chunki

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}$$

munosabatlar o'rinli.

$\mathfrak{I}$ - σ - algebraning elementlarini tasodifiy hodisalar (yoki hodisalar) deyiladi va hodisalar sistemasi $\mathfrak{I}$ da aniqlangan $P(\cdot)$ funksiya ehtimollik deb ataladi, agar uning uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

P_1) Har qanday $A \in \mathfrak{I}$ uchun $P(A) \geq 0$;

P_2) $P(\Omega) = 1$;

P_3) Agar $\{A_n, n \geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligi uchun

$$A_i \bigcap A_j = \varnothing \; (i \neq j)$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Keltirilgan $A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ tasdiqlar majmuasi hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari sistemasini tashkil qiladi. Bu aksiomalar A.N.Kolmogorov tomonidan taklif etilgan bo'lib, ular ehtimolliklar nazariyasini matematik fan sifatida shakllanishida juda muhim hisoblanadilar. Demak, A.N.Kolmogorov aksiomalari sistemasining birinchi uchtasida (A_1, A_2, A_3) hodisalar σ-algebrasi $\mathfrak{I}$ va qolgan uchtasida (P_1, P_2, P_3) hodisalarning ehtimolliklari tayin etiladi. Hosil qilingan uchlik $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$-ehtimollik fazosi deb ataladi. Tajribalar uchun ehtimollik modeli tuzilgan deb hisoblanadi, agar uning elementar hodisalar fazosi Ω, shu tajriba bilan bog'liq hodisalar σ-algebrasi $\mathfrak{I}$ ko'rsatilib, unda $P(\cdot)$ ehtimollik funksiyasi aniqlangan bo'lsa.

§ 2.2. Ehtimollik xossalari

Endi P_1, P_2, P_3 aksiomalar orqali kiritilgan va A_1, A_2, A_3 aksiomalar bilan ta'riflangan hodisalar σ- algebrasi $\mathfrak{I}$ da aniqlangan ehtimollik $P(\cdot)$ funksiyaning xossalarini ko'raylik.

1. $P(\varnothing)=0$. Bu $\varnothing\cup\Omega=\Omega$ tenglamadan va P_2, P_3 aksiomalardan kelib chiqadi.

2. Har qanday hodisa A uchun $(A\in\mathfrak{I})$

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Bu tenglik $A\cup\overline{A}=\Omega$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$ ekanligidan va P_2, P_3 aksiomalardan kelib chiqadi.

3. Agar $A\subseteq B$ bo'lsa,

$$P(B\setminus A)=P(B)-P(A),\ P(A)\le P(B).$$

chunki bu holda,

$$B=A\cup(B\setminus A),\quad A\cap(B\setminus A)=\varnothing$$

4. Har qanday A hodisa uchun $(A\in\mathfrak{I})$

$$0\le P(A)\le 1,$$

chunki har qanday A hodisa uchun $\varnothing\le A\le\Omega$ munosabat o'rinli. Endi 4) xossa P_1, P_2 aksiomalardan va 3- xossadan kelib chiqadi.

5. Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\quad A,B\in\mathfrak{I}$$

tenglik o'rinli. Haqiqatan ham, $A\cup B=A\cup\left[B\setminus(A\cap B)\right]$ tenglik o'rinli va bu xossa P_3 aksioma va 3- xossadan kelib chiqadi.

6. Oldingi 5- xossadan va P_1 aksiomadan

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B),\quad A,B\in\mathfrak{I}$$

Munosabat o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

7. Ixtiyoriy $A_1,A_2,\ldots,A_n$ hodisalar majmuasi uchun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+$$

$$+\sum_{k<i<j}P(A_k\cap A_i\cap A_j)-\ldots..(-1)^{n-1}P(A_1\cap\ldots\cap A_n).$$

Bu formula oldin Ω diskret to'plam bo'lgan hol uchun isbotlangan va foydalanilgan edi. Bu yerda bam induksiya metodidan va 5) xossadan foydalanish mumkin.

Quyida keltirilgan teorema P_1, P_2, P_3 aksiomalar orqali ta'riflangan $P(\cdot)$ ehtimollikning asosiy xossalaridan bisoblanadi. Oldin hodisalar ketma-ketligi uchun limit tushunchasini eslatib o'tamiz. Agar hodisalar ketma – ketligi

$$A_1, A_2, ..., A_n, ... \quad (*)$$

"o'suvchi" bo'lsa, ya'ni har qanday n uchun $A_n \subseteq A_{n+1}$ munosabat o'rinli bo'lsa,

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

deb qabul qilinadi. Demak, A_3 aksiomaga asosan $\lim A_n \in \mathfrak{I}$ bo'lib, bu hodisa A_n hodisalardan eng kamida bittasi ro'y berganda, ro'y beradigan hodisa bo'ladi.

Agar (*) hodisalar ketma-ketligi "kamayuvchi" bo'lsa, ya'ni $A_n \supseteq A_{n+1}$ munosabat o'rinli bo'lsa,

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$$

deb hisoblanadi ($\lim A_n$ hodisa sifatida barcha A_n lar ro'y bergan holda ro'y beradi).

Teorema. Hodisalar σ-algebrasi $\mathfrak{I}$ da $P(\cdot)$-chekli additiv bo'lgan ehtimollik o'lchovi aniqlangan bo'lsin. Bu holda, quyidagi to'rtta shartlar teng kuchli:

1) $P(\cdot)$-sanoqli additiv, ya'ni

$$A_n \in \mathfrak{I},\ n = 1,2,...,\quad A_i \cap A_j \neq \varnothing,\ i \neq j$$

ketma-ketligi uchun

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

2) agar $\{A_n, n \geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligi kamayuvchi bo'lmasa $(A_n \subseteq A_{n+1})$,

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

3) agar $\{A_n, n \geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligi o'suvchi bo'lmasa $(A_n \supseteq A_{n+1})$,

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

4) agar $P(\cdot)$ $\varnothing$ da uzluksiz bo'lsa, ya'ni

$$A_n \supseteq A_{n+1},\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$$

munosabatlar bajarilsa,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\varnothing) = 0.$$

Isbot. Isbotni quyidagi

$$1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)\Rightarrow 4)\Rightarrow 1)$$

mantiqiy sxemada o'tkaziladi.

$1)\Rightarrow 2)$. Hodisalar ketma-ketligi $\{A_n, n\geq 1\}$ kamayuvchi bo'lmasin. $A_0=\varnothing$ deb hisoblab,

$$B_i = A_{i+1}\setminus A_i \in \mathfrak{I}$$

hodisalarni kiritamiz. Bu holda,

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$$

va $P(\cdot)$ chekli additiv bo'lgani uchun

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(B_i).$$

Bevosita tekshirib ko'ramizki,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

tenglik o'rinli bo'lib, B_n lar bir vaqtda ro'y bermaydigan hodisalar bo'ladi.

Demak, 1) ga asosan

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Shunday qilib $1)\Rightarrow 2)$ implikatsiya o'rinli.

$2)\Rightarrow 3)$. Hodisalar ketma-ketllgi $\{A_n, n\geq 1\}$ o'suvchi bo'lmasin. $(A_n \supseteq A_{n+1})$. Bu holda,

$$\{\overline{A_n}, n\geq 1\}$$

hodisalar ketma-ketligi kamayuvchi bo'lmaydi $\left(\overline{A_n}\subseteq \overline{A_{n+1}}\right)$ va 2) ga asosan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}\right) =$$
$$= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\overline{A_n}\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

$3)\Rightarrow 4)$. Quyidagi

$$P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

tenglikga asoslanib, o'suvchi bo'lmagan va $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ tenglikni qanoatlantiradigan har qanday $\{A_n, n\geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligi uchun, 3) ga ko'ra

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

tenglikni yozish mumkin.

Endi $4)\Rightarrow 1)$ munosabatni isbotlaymiz.

Agar $\{A_n, n\geq 1\}$ bir vaqtda ro'y bermaydigan hodisalar ketma-ketligi bo'lsa, $(A_i \cap A_j = \varnothing, i\neq j)$,

$$C_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$$

hodisalar ketma-ketligi

$$C_{n+1}\subset C_n, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$$

munosabatlarni qanoatlantiradi. $P(\cdot)$ ning chekli additiv ekanligidan

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) + P(C_N) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) + P(C_N)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

4) xossaga asosan

$$\lim_{N\to\infty} P(C_N) = 0.$$

va demak,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

teorema isbot etildi.

Teoremadagi 2) va 3) xossalarni quyidagicha ifoda etish mumkin: agar $\{A_n, n\geq 1\}$ hodisalarning monoton ketma-ketligi bo'lsa,

$$P(\lim A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Oxirgi tenglikni esa, $P(\cdot)$ ehtimollik funksiyasining uzluksizligi deb tushunish mumkin. Demak, isbot etllgan teoremaga asosan $P(\cdot)$ funksiyaning sanoqli additivligi (P_3 aksioma), bu funksiyaning uzluksizlik xossasiga teng kuchli bo'lar ekan.

Keltirilgan teoremaga qo'shimcha qilib, har qanday chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ hodisalar ketma-ketligi uchun

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n), \qquad (*)$$

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) \geq 1 - \sum_n P\left(\overline{A_n}\right) \qquad (**)$$

tengsizliklar o'rinli ekanligini isbotlaymiz.

Birinchi (*) tengsizlikni isbot etish uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

$$B_1 = A_1,\ B_2 = \overline{A_1} \cap A_2, \ldots, \qquad B_n = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$$

Ko'rish qiyin emaski,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$$

tenglik o'rinli va B_n hodisalar bir vaqtda ro'y bermaydi (kesishmaydi). Bulardan tashqari $B_n \subset A_n$ munosabat bajariladi.

Demak,

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P(B_n) \le \sum_n P(A_n).$$

Ikkinchi $(*)$ tengsizlik

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_n A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcup_n \overline{A_n}\right) \ge 1 - \sum_n P\left(\overline{A_n}\right)$$

munosabatlardan kelib chiqadi.

Bu yerda $(*)$ tengsizlikda isbotlangan

$$P\left(\bigcup_n \overline{A_n}\right) \le \sum_n P\left(\overline{A_n}\right)$$

bahodan foydalanildi.

§ 2.3. Geometrik ehtimolliklar

Faraz qilaylik, Ω tekislikdagi chekli yuzaga $(m(\Omega) < \infty)$ ega bo'lgan soha bo'lsin. Bunda Ω sohani elementar hodisalar fazosi sifatida qabul qilamiz (Masalan, Ω ga mos kelgan tajriba sifatida "nuqta" ni Ω sohaga tashlash deb tushunish mumkin). Tasodifiy hodisa deganda, Ω ning yuzaga ega bo'lgan qismini tushunamiz. Agar Ω ning A qism to'plami $m(A)$ yuzaga ega bo'lsa, bu A hodisaning ehtimolligi sifatida

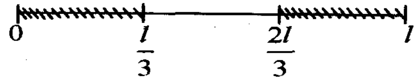
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \qquad (*)$$

nisbatni olish mumkin. Keltirilgan (*) tenglik bilan aniqlanadigan ehtimolliklar, geometrik ehtimolliklar deyiladi.

Misol 1. Uzunligi l ga teng bo'lgan sterjen ixtiyoriy x nuqtada sindiriladi. Hosil bo'lgan 2 ta kesmadan kichkinasining uzunligi $\frac{l}{3}$ dan kichik bo'lishi ehtimolligi topilsin. Bu masala uchun elementar hodisalar to'plami sifatida $\Omega = \{x;\ 0 \le x \le l\} = [0,l]$, hodisalar sistemasi uchun esa $F = \{A; A \subseteq [0,l],\ A$ to'plamning uzunligi $l(A)$ mavjud$\}$ to'plamlarni olish mumkin. Bizni qiziqtirayotgan hodisa

$$B=\left\{x;\,0\le x\le\frac{l}{3}\right\}\cup\left\{x;\,\frac{2l}{3}\le x\le l\right\}$$

to‘plamdan iborat va $l(B)=\frac{l}{3}+\frac{l}{3}=\frac{2}{3}l$. Aytib o‘tilganlarni quyidagi shakl orqali oson tushunish mumkin:



Demak, bizni qiziqtirayotgan ehtimollik

$$P(B)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{\frac{2}{3}l}{l}=\frac{2}{3}.$$

Misol 2. Uchrashuv haqidagi masala.

Faraz qilaylik, ikkita shaxs A va B lar $[0,T]$ vaqt oralig‘ida uchrashishga qaror qilishdi. Uchrashuvga birinchi bo‘lib kelgan shaxs, ikkinchisini τ birlik vaqt davomida kutadi, agar u kelmasa birinchi shaxs qaytib ketadi.

Agar birinchi shaxsning uchrashuvga kelgan vaqtini x deb, ikkinchi shaxsning kelgan vaqtini y desak, o‘rganilayotgan tajriba uchun elementar hodisalar fazosi sifatida

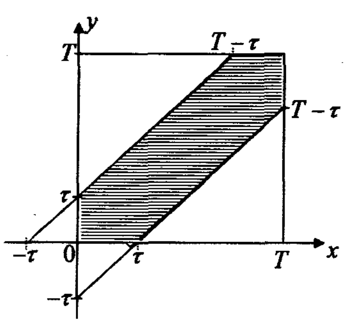
$$\Omega=\{(x,y);0\le x\le T,0\le y\le T\}=[0,T]\times[0,T],$$

tomonlari T bo‘lgan kvadratni olamiz. Endi “uchrashuv” ro‘y berishi hodisasining ehtimolligini topaylik. Uchrashuv ro‘y berish hodisasini C deb belgilasak

$$C=\{(x,y);\;|x-y|\le\tau,\;0\le x\le T,\;0\le y\le T\}\text{ va}$$
$$m(C)=T^2-(T-\tau)^2$$

bo‘ladi. Demak,

$$P(C)=\frac{T^2-(T-\tau)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{\tau}{T}\right)^2.$$



Aytib o‘tilganlar quyidagi shaklda oson va tushunarli namoyish etiladi: Masalan, $T=1$ soat, $\tau=\frac{1}{3}$ soat($=20$ minut) bo‘lsa

$$P(C)=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

tabiiyki τ kichkina miqdor bo'lsa, uchrashuv ehtimolligi 0 ga yaqin son bo'ladi.

§ 2.4. Shartli ehtimolliklar va hodisalarning bog'liqsizligi

Ko'p hollarda tasodifiy hodisalarning ro'y berish ehtimolligini boshqa bir ehtimolligi musbat bo'lgan hodisaning ro'y berganligi ma'lum bo'lganligi sharti bilan o'rganishga to'g'ri keladi. Bu shartli ehtimollik tushunchasini kiritishni taqozo qiladi. Aniq va qat'iy ta'riflarga o'tishdan oldin, aytib o'tilgan vaziyatni oydinlashtiruvchi misollar keltiramiz.

Aytaylik, tajriba simmetrik tangani 3 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu elementar hodisalar to'plami

$$\Omega = \{GGG, GGR, ..., RRG, RRR\}, \quad |\Omega| = 8$$

bo'ladi. A-hodisa, G-ning bir marta tushish hodisasi bo'lsin, ya'ni

$$A = \{GRR, RGR, RRG\}.$$

Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan $P(A) = \frac{3}{8}$. Faraz qilaylik, qo'shimcha ravishda tajribaning natijasi haqida

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{G \text{ lar tushish soni toq}}\}$$

hodisaning ro'y berganligi ma'lum bo'lsin. B hodisa to'g'risidagi ma'lumotga ega bo'linsa, A hodisaning ro'y berish ehtimolligi nimaga teng bo'ladi degan savol o'z-o'zidan yuzaga keladi. Bu yerda

$$\mathrm{B} = \{GGG, GRR, RGR, RRG\},$$

$$A = \{GRR, RGR, RRG\} \subset B$$

bo'lib, klassik sxema doirasida bu yangi ehtimollik, $3/4$ ga teng deb qabul qilish tabiiy bo'ladi. Bu yangi ehtimollik ya'ni A hodisaning, B hodisa ro'y berganligi sharti bilan ehtimolligi $P(A/B)$ deb belgilanadi. Yana bitta misol keltiramiz: tajriba simmetrik o'yin kubigini 2 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada

$$B = \{(i,j) : i + j < 4\},$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$$

hodisalarni ko'raylik (B hodisa tushgan ochkolar yig'indisi 4 dan kichik bo'lish, A hodisa birinchi tashlanganda 1 tushish hodisasi). Hamma elementar hodisalar to'plami

$$\Omega = \left\{(i,j),\ i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\right\}$$

36 ta elementdan iborat, undagi hodisa

$$B = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}.$$

Demak,

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},$$
$$P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

Agar B hodisa ro'y bergan bo'lsa, faqat (1,1) va (1,2) elementar hodisa ro'yobga chiqqandagina A hodisa ro'y beradi. Demak, shartli ehtimollik

$$P(A/B)=\frac{12}{18}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3},$$

deb qabul qilish to'g'ri bo'ladi.

Umuman n ta elementar hodisalardan iborat klassik sxema berilgan bo'lib, A hodisa m, B hodisa l, $A\cap B$ hodisa esa, r elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin. Bu holda,

$$P(B)=\frac{l}{n},\quad P(A\cap B)=\frac{r}{n}.$$

Agar B hodisa ro'y bergan bo'lsa, l ta elementar hodisadan bittasi ro'y bergan bo'ladi va A hodisa $A\cap B$ ni tashkil qilgan r ta elementar hodisalardan bittasi ro'y bergandagina ro'yobga chiqadi. Shuning uchun ham keltirilgan misollar kabi

$$P(A/B)=\frac{r}{l}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{l}{n}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

deb qabul qilish tabiiy hisoblanadi.

Ta'rif 1. Ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ da A va B hodisalar berilgan va $P(B)>0$ bo'lsin. A hodisaning B hodisaning ro'y bergandagi shartli ehtimolligi deb

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

nisbatga aytiladi.

Aytish mumkinki, $P(A/B)$ni A hodisaning B hodisaga nisbatan shartli ehtimolligi deb o'qish, tushunmovchiliklarga olib kelmaydi.

Keltirilgan ta'rifdan va ehtimollik $P(\cdot)$ ning xossalaridan shartli ehtimollik $P(\cdot/B)$ quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

$$1)\ P(A/B)\geq 0,\quad 2)\ P(\Omega/B)=1,\quad 3)\ P(B/B)=1$$

4) Agar $\{A_n, n\geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligi juftma-juft bir vaqtda ro'y bermaydigan $(A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j)$ hodisalardan iborat bo'lsa,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n/B\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n/B)$$

2) va 4) xossalarni isbotlaymiz. Haqiqatan ham,

$$P(\Omega / B)=\frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,$$

$$P\left(\bigcup_n A_n / B\right)=\frac{P\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap B\right)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P\left(\bigcup_n (A_n \cap B)\right)}{P(B)}=\frac{\sum_n P(A_n \cap B)}{P(B)}=\sum_n \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$=\sum_n P(A_n / B).$$

Aytaylik,

$$F_B=\{A \cap B,\ A \in \mathfrak{I}\},$$

ya'ni F_B hodisalar ko'paytmasi $A \cap B$ ko'rinishdagi hodisalar σ – algebrasi bo'lsin.

Teorema 1. Agar $P(A)>0,\ P(B)>0$ bo'lsa,

$$P(A \cap B)=P(B) P(A / B)=P(A) P(B / A). \qquad (1)$$

Keltirilgan (1) formula ***hodisalarni ko'paytirish formulasi*** deb yuritiladi. (1) formulani umumiylashtirish oson. Aytaylik, $A_1, \ldots, A_n$ uchun

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})>0$$

bo'lsin. Quyidagi

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \subset \ldots \subset A_2 \cap A_1 \subset A_1$$

munosabat o'rinli ekanligidan

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-l} A_j\right)>0, \qquad l=1,2, \ldots, n-1.$$

Aytib o'tilganlarga asosan,

$$P\left(A_n \Big/ \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right), \qquad k=2,3, \ldots, n$$

shartli ehtimolliklarni mavjud bo'lishligini olamiz.

Endi matematik induksiya orqali quyidagi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)=P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \qquad (2)$$

tenglikning to'g'ri ekanligiga ishonch bosil qilamiz. (2) formula (1) ning umumlashgan varianti bo'lib, u ko'p qo'llanishlarga ega bo'ladi.

Ta'rif 2. A va B hodisalar bog'liqsiz deb ataladi, agar

$$P(A \cdot B)=P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Bog'liqsiz hodisalarning quyidagi xossalarini keltiramiz.

1. Agar $P(B)>0$ bo'lsa, A va B larni bog'liqsizligi

$$P(A / B)=P(A)$$

tenglikka teng kuchli bo'ladi.

2. Agar A va B bog'liqsiz bo'lsa, $\bar{A}$ va B ham bog'liqsiz bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$P(\bar{A} \cdot B)=P(B \setminus AB)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A) \cdot P(B)=$$

$$P(B)(1-P(A))=P(B) \cdot P(\bar{A})$$

Oxirgidan A va B bog'liqsiz bo'lsa,

$$\bar{A} \text{ va } B,\ A \text{ va } \bar{B},\ \bar{A} \text{ va } \bar{B}$$

hodisalar bog'liqsiz ekanligi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik A va B_1, A va B_2 hodisalar bog'liqsiz bo'lib, $B_1 \cap B_2=\varnothing$. Bu holda, A va $B_1 \cup B_2$ hodisalar bog'liqsiz bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$P(A(B_1 \cup B_2))=P(AB_1 \cup AB_2)=P(AB_1)+P(AB_2)=$$

$$=P(A) P(B_1)+P(A) \cdot P(B_2)=P(A)(P(B_1)+P(B_2))=$$

$$=P(A) P(B_1 \cup B_2)$$

Bu yerda $B_1 \cap B_2=\varnothing$ sharti muhim, oxirgi tenglikda uni tushirib qoldirish mumkin emas.

Misol 1. Tajriba simmetrik tangani 2 marta tashlashdan iborat, A-birinchi tashlashda tangani G tomoni bilan, B-ikkinchi tashlashda tangani R tomoni tushish hodisalar. Demak,

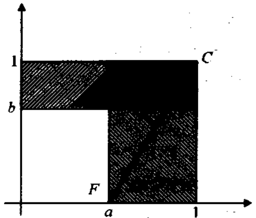
$$P(A)=P(B)=1/2$$

$$P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=P(A) P(B)$$

Shunday qilib, A va B hodisalar bog'liqsiz.

Misol 2. Kvadrat $[0,1]^2=[0,1] \times[0,1]$ da tekis taqsimotni ko'ramiz. A tasodifan nuqtani kvadratga tashlanganda, uni absissasi a dan o'ng tomonda bo'lgan sohaga B esa, ordinatasi b dan yuqori bo'lgan sohalarga tushish hodisalar bo'lsin.

1-rasmda bu 2 ta soha shtrixlangan. AB hodisa esa kataklar bilan shtrixlangan. Demak, bu holda



(1-rasm)

$$P(A)=1-a, \qquad P(B)=1-b$$
$$P(AB)=(1-a)(1-b)=P(A)\cdot P(B),$$

ya'ni A va B hodisalar bog'liqsiz. Lekin B hodisa rasmdagidan boshqacharoq sohaga mos kelsa, masalan, tasodifiy nuqtaning $F \subset D$ uchburchakka tushish hodisasi bo'lsa, A va B hodisalar bog'liqsiz bo'lmaydi.

Endi chekli sondagi hodisalar majmuasi uchun bog'liqsizlik tushunchasini kiritaylik.

Ta'rif 3. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalar birgalikda bog'liqsiz deyiladi, agar har qanday $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n$, $r = 2,3,\ldots,n$ uchun

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{r} B_{i_k}\right)=\prod_{k=1}^{r} P\left(B_{i_k}\right)$$

tengliklar bajarilsa.

Hodisalarning juftma-juft bog'liqsiz bo'lishi, ularni birgalikda bog'liqsiz bo'lishi uchun yetarli bo'lmaydi. Buni quyidagi misol tasdiqlaydi.

Misol 3. (Bernshteyn). Tajriba, uch tomoni mos ravishda qizil, sariq va yashil ranglarga bo'yalgan, to'rtinchi tomoni esa bu ranglarning hammasiga bo'yalgan tetraedr tashlashdan iborat. Tetraedrni qizil rang bilan bo'yalgan tomoni bilan tushish hodisasini Q, sariq rangga bo'yalgan tomoni bilan tushish hodisasini S, yashil rangga bo'yalgan tomoni bilan tushishini Y hodisasi desak, har bir rang 2 ta tomonga kiritilganidan

$$P(Q)=P(S)=P(Y)=1/2$$

ehtimolliklarni olamiz va shu sababga ko'ra

$$P(QS)=P(QY)=P(SY)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=P(Q)\cdot P(S)=P(Q)\cdot P(Y)=P(S)\cdot P(Y),$$

ya'ni Q,S,Y hodisalar juftma-juft bog'liqsiz bo'ladi, lekin

$$P(QSY)=\frac{1}{4}\neq P(Q)\cdot P(S)\cdot P(Y)=\frac{1}{8}$$

Demak, Q,S,Y hodisalar birgalikda bog'liqsiz emas.

§ 2.5. To'la ehtimollik va Bayes formulalari

Ehtimolliklar fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Tasodifiy hodisalar ketma-ketligi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalarning to'la guruhini tashkil qiladi deyiladi, agar:

1) $H_i \cap H_j = \varnothing \ (i \neq j)$

2) $H_1 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$ shartlar bajarilsa.

Teorema 1. Agar $H_1, \ldots, H_n$ hodisalarning to'la guruhini tashkil qilib, $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$ bo'lsa, ixtiyoriy tasodifiy hodisa A uchun $(A \in \mathfrak{I})$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Keltirilgan (1) tenglik to'la ehtimollik formulasi deb ataladi va bu nom ta'rifda berilgan hodisalarning to'la guruhi xususiyatlari bilan bog'liq

$$(P(\Omega)=P(H_1)+\ldots+P(H_n)=1).$$

Isbot. $H_1, \ldots, H_n$ hodisalarning to'la guruhi bo'lgani uchun

$$A = A \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^{n}(H_i \cap A)$$

tenglikni yozamiz va $H_i \cap A$ hodisalar juftma-juft bir vaqtda ro'y bermasligini qayd qilib o'tamiz. Shuning uchun ham

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Isbot etilgan (1) formula hodisalarning to'la guruhi sanoqli sondagi hodisalardan iborat bo'lgan hol uchun ham o'rinli.

Endi, to'la ehtimollik formulasi tatbiqi yordamida yechiladigan masalalarga o'tamiz.

Misol 1. Imtihon ~~uchun~~ tayyorlangan N biletlardan n tasi "baxtli" (bu biletdagi savollarga javoblar oson va ma'lum). Kimning "baxtli" bilet olish ehtimolligi kattaroq: "birinchi bo'lib" kirgan talabaningmi, yoki "ikkinchi bo'lib" kirgannimi?

"Birinchi bo'lib" kirgan talabaning "baxtli" bilet olish ehtimolligi $\frac{n}{N}$, "ikkinchi bo'lib" kirgan talabaga "baxtli" bilet tushish hodisasini A deylik. "Birinchi" talabaga nisbatan 2 taxmin (gipoteza) mavjud: H_1 – u "baxtli" bilet oldi, H_2 –u "baxtli" bilet olmadi. Bu H_1 va H_2 hodisalar to'la guruh tashkil qiladi va

$$P(H_1)=\frac{n}{N}, \qquad P(H_2)=\frac{N-n}{N}.$$

To'la ehtimollik formulasi bo'yicha

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_2)+P(H_2)P(A/H_2)=$$
$$=\frac{n}{N}\cdot\frac{n-1}{N-1}+\frac{N-n}{N}\cdot\frac{n}{N-1}=\frac{n}{N}$$

Demak, "ikkincbi" talabaning "baxtli" bilet olish ehtimolligi ham $\frac{n}{N}$ ga teng ekan.

Endi, quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 2. $H_1,\dots,H_n$ hodisalarning to'la guruhini tashkil qilib, $P(H_i)>0,\ i=\overline{1,n}$ bo'lsin.

U holda, $P(A)>0$ bo'lgan har qanday hodisa A uchun

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k)} \qquad i=\overline{1,n}. \qquad (2)$$

Bu (2) tenglikdagi formulalar Bayes formulalari deb ataladi va ularni konkret masalalarda qo'llanish sxemasi quyidagicha amalga oshiriladi. Faraz qilamizki, A hodisa turli xil shart-sharoitlarda ro'y berishi mumkin va ular to'g'risida n ta $H_1,H_2,\dots,H_n$ gipotezalar qabul qilamiz. Bu gipotezalar hodisalarning to'la guruhini tashkil qiladi va A hodisa ulardan biri bilan birgalikda ro'y beradi. Gipotezalar taqsimoti

$$P(H_1),\dots,P(H_n)$$

aprior (tajriba o'tkazilgunga qadar) ehtimolliklar deyiladi.

Faraz qilamizki, tajribada A hodisaning ro'y bergani kuzatiladi. Bu vaziyat aprior ehtimolliklar $P(H_i)$ larni $P(H_i/A)$ shartli ehtimolliklar bilan taqqoslashni talab etadi. Bayes formulasi aposterior (tajribadan so'ng) ehtimolliklar deb ataluvchi $P(H_i/A)$ lar uchun $P(H_i)$, $P(A/H_i)$ ehtimolliklar orqali ifodalar beradi. Keltirilgan teorema 2 ning isboti oson va u quyidagidan iborat:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i\cap A)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k)}.$$

Bu yerda biz to'la ehtimollik formulasidan foydalandik.

Endi, (2) formula orqali yechiladigan misollar keltiramiz.

Misol 2. Idishda n ta shar bor. Ularga nisabatan $(n+1)$ ta

$$H_0,H_1,\dots,H_n$$

taxminlar qabul qilish mumkin. (H_i-idishdagi oq sharlar soni i ta). Faraz qilamizki, bu taxminlar bir xil imkoniyatli, ya'ni

$$P(H_0)=P(H_1)=\dots=P(H_n)=\frac{1}{n+1}$$

Aytaylik, A deb idishdan tavakkal qilib olingan shar oq bo'lish hodisasi bo'lsin. A hodisa ro'yobga chiqqanda idishda i ta oq shar borligi ehtimolligi $P(H_i/A)$ hisoblansin.

Tushunarliki,

$$P(A/H_i)=\frac{i}{n}, \qquad i=0,1,\dots,n$$

Bayes formulasi bo'yicha

$$P(H_i/A)=\frac{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{i}{n}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{k}{n}}=\frac{2i}{n(n+1)}$$

Demak, $P(H_0/A), P(H_1/A),\dots,P(H_n/A)$ aposterior ehtimolliklardan eng kattasi H_n taxminga mos kelar ekan.

Misol 3. Buyum 2 ta korxonada ishlab chiqariladi. Ma'lumki, birinchi korxonaning ishlab chiqarish quvvati ikkinchi korxonaning ishlab chiqarish quvvatidan n marta katta. Yaroqsiz buyumlarning umumiy mahsulotga nisbati birinchi korxona uchun P_1, ikkinchi korxona uchun esa P_2. Bu ikki korxona umumiy mahsulotidan tavakkaliga olingan buyum yaroqsiz bo'lib chiqdi. Yaroqsiz buyumni birinchi korxonadan chiqarilganligining ehtimolligi topilsin.

Yechish. Olingan buyumning birinchi korxonada tayyorlanganligi hodisasini H_1, bu buyumni ikkinchi korxonada tayyorlanganligi hodisasini H_2 bilan belgilaylik. Bu holda,

$$P(H_1)=\frac{n}{n+1}, \qquad P(H_2)=\frac{1}{n+1}.$$

Tavakkaliga olingan buyumni yaroqsiz bo'lish hodisasini A deb belgilaylik. Masalaning shartlari bo'yicha

$$P(A/H_1)=P_1, \qquad P(A/H_2)=P_2$$

Bayes formulasiga asosan,

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=.$$

$$=\frac{\frac{n}{n+1}\cdot P_1}{\frac{n}{n+1}P_1+\frac{1}{n+1}\cdot P_2}=\frac{nP_1}{nP_1+P_2}$$

Xuddi shunga o'xshash yaroqsiz buyumni ikkinchi korxonada ishlab chiqarilganligi ehtimolligi

$$P(H_2/A)=\frac{P_2}{nP_1+P_2}$$

ekanligini topamiz.

Hisoblab topilgan $P(H_1/A)$ va $P(H_2/A)$ ehtimolliklarni H_1 va H_2 taxminlar A hodisa ro'y berib o'tgandan keyingi aposterior ehtimolliklari deb ataladi.

Misol va masalalar

1. Ehtimollik ta'rifidan kelib chiqadigan quyidagi natijalarni isbotlang:

A) $P(A+B)\le P(A)+P(B)$

B) $P(AB)\le P(A)\le P(A+B)$

2. Tajribada kuzatilayotgan A va B hodisalar uchun

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(AB)=P(A+B)-P(AB)$$

ekanligini ko'rsating

3. Tajribada kuzatilayotgan A,B va C uchta hodisalar uchun quyidagi qo'shish teoremasi o'rinli ekanligini ko'rsating:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

4. Uchlari (0,0), (1,0), (1,1) va (0,1) da bo'lgan kvadratdan tavakkaliga $M(x,y)$ nuqta tanlanmoqda. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

$$A=\{(x,y)\setminus x^2+y^2\le a^2,\ a>0\}$$

$$B=\{(x,y)\setminus xy<a,\ a>0\}$$

$$C=\{(x,y)\setminus \max(x,y)<a,\ a>0\}$$

$$D=\{(x,y)\setminus \min(x,y)<a,\ 0\le a\le 1\}$$

Javob:

$$P(A)=\begin{cases}\dfrac{\pi a^2}{4}; & 0<a\le 1\\ \sqrt{a^2-1}+a^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{1}{a}\right), & 1<a\le\sqrt{2}\\ 1, & \sqrt{2}<a\end{cases}$$

$$P(B)=\begin{cases}a(1-\ln a), & 0<a\le 1\\ 1, & 1<a\end{cases}$$

$$P(C)=\begin{cases}a^2, & 0<a\le 1\\ 1, & 1<a\end{cases}$$

$$P(D)=a(2-a)$$

5. Agar p va q lar $[-1,1]$ oraliqdagi sonlar bo'lsa, $x^2+px+q=0$ tenglama haqiqiy ildizga ega bo'lishi ehtimolligini toping.

Javob: $\dfrac{13}{24}$

6. Uzunligi l ga teng kesmadan tavakkaliga ikkita nuqta tanlandi. Hosil bo'lgan uchta kesma yordamida uchburchak yasash mumkin bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{1}{4}$

7. Radiuslari $R>r$ bo'lgan ikkita konsentrik aylanalar berilgan. Katta aylanadan tavakkaliga A va B nuqtalar tanlanadi. Hosil bo'lgan AB kesma kichik aylanani kesmaslik ehtimolini toping.

Javob: $\frac{2}{\pi}\arccos\frac{r}{R}$

8. Oilada ikkita farzand bor. O'g'il va qiz bolalar tug'ilishi bog'liqsiz va teng imkoniyatli bo'lsin. Agar oilada o'g'il farzand borligi ma'lum bo'lsa, ikkala farzand ham o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{1}{3}$

9. Uchta o'yin kubigi tashlandi. Quyidagi hodisalar kuzatilmoqda:
   A={Turli raqamlar tushadi}
   B={hech bo'lmaganda bitta kubikda "6" raqami tushadi}.
   $P(B/A)$ va $P(A/B)$ ehtimolliklarni hisoblang.

Javob: $P(B/A)=0{,}5$, $P(A/B)=\frac{60}{91}$

10. Idishda 12 ta qizil, 8 ta yashil va 10 ta sariq sharlar bor. Tavakkaliga ikkita shar olindi. Agar sariq shar olinmagan bo'lsa, turli rangdagi sharlar olingan bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{48}{95}$.

11. A va B hodisalar biror tajribada kuzatilayotgan bo'lib, $P(B)=0{,}4, P(A/B)=0{,}3$ va $P(A/\bar{B})=0{,}2$ bo'lsin. Quyidagi ehtimolliklarni hisoblang:

$$P(A),\ P(\bar{A}\cdot\bar{B}),\ P(\bar{A}+\bar{B}),\ P(A\Delta B).$$

Javob: $P(A)=0{,}24$, $P(\bar{A}\bar{B})=0{,}48$, $P(\bar{A}+\bar{B})=0{,}88$, $P(A\Delta B)=0{,}4$.

12. Statistik ma'lumotlar bo'yicha matematika fakulteti talabalarining 60 foizi sport bilan shug'ullanadi, 40 foizi ilmiy ish bilan faol shug'ullanadi va 20 foizi ham sport ham ilmiy ish bilan shug'ullanadi. Fakultet ro'yxatlaridan tavakkaliga bitta talaba tanlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping: A={tanlangan talaba qayd etilgan mashg'ulotlarning kamida

bittasi bilan shug'ullanadi}; B={tanlangan talaba faqat sport bilan shug'ullanadi}; C={tanlangan talaba faqat bitta mashg'ulot bilan shug'ullanadi}.

Javob: $P(A)=0{,}8$; $P(B)=0{,}4$; $P(C)=0{,}6$.

13. Akbar va Botir navbat bilan tanga tashlaydi. Kimga birinchi "gerb" tushsa, o'sha odam yutadi. Akbar birinchi bo'lib tashlaydi. Agar tangani yetarlicha ko'p marta tashlash mumkin bo'lsa, har birining yutish ehtimolliklarini toping.

Javob: $p_1=\frac{2}{3}$; $p_2=\frac{1}{3}$;

14. Hakamlar hay'ati 3 ta hakamdan iborat. Birinchi va ikkinchi hakam bir biridan bog'liqsiz ravishda p ehtimollik bilan to'g'ri qaror qabul qiladi, uchinchi hakam esa qaror chiqarish uchun tanga tashlaydi. Yakuniy xulosa ko'pchilik ovoz bilan chiqariladi. Hakamlar hay'ati to'g'ri qaror chiqarish ehtimolligini toping.

Javob: p

15. Sportchilar guruhida 20 ta chang'ichi, 6 ta velosipedchi va 4 ta yuguruvchi bor. Saralash normasini bajarish ehtimolligi chang'ichi uchun 0.9, velosipedchi uchun 0.8, yuguruvchi uchun 0.75. Tavakkaliga ajratilgan sportchining normani bajara olish ehtimolligini toping.

Javob: 0.86.

16. Idishda 15 ta yangi va 5 ta ishlatilgan tennis koptoklari bor. O'yin uchun tavakkaliga 2 ta koptok olindi va o'yindan so'ng yana idishga qaytarildi. Ikkinchi o'yin uchun yana ikkita koptok tanlandi. Ikkinchi o'yin yangi koptoklar bilan o'ynalish ehtimolligini toping.

Javob: 0,445

17. Shaxmat taxtasiga oq va qora rangli ikkita "fil" qo'yiladi. Bu figuralar bir-biriga xavf tug'dirish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{36}$

18. Talaba 25 ta imtihon biletidan 10 tasini biladi. Qaysi holda talabaning biladigan bilet olish imkoniyati ko'proq: birinchi bo'lib bilet olsami yoki ikkinchi bo'lib bilet olsami?

Javob: imkoniyatlar teng.

19. Agar barcha mahsulotning 4% i sifatsiz, sifatli mahsulotning 75% i birinchi nav talabiga javob berishi ma'lum bo'lsa, tasodifan olingan mahsulotning birinchi navli bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: 0,72.

20. Ichida ikkita shar bor idishga bitta oq shar qo'shildi. Yaxshilab aralashtiilgach bitta shar tanlandi. Agar tanlangan shar oq ekanligi ma'lum bo'lsa, idishda oq shar qolgan bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{2}{3}$;

III BOB. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOT FUNKSIYALARI

III bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Tasodifiy miqdor va taqsimot funksiyalar.,*
- *Taqsimot funksiyalarining turlari.*
- *Tasodifiy vektorlar va ularning taqsimotlari.*
- *Turli tipdagi tasodifiy vektorlar.*
- *Tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligi.*
- *Ehtimolliklar nazariyasida foydalanadigan integrallar*

haqida tasavvurlarga ega bo'linadi;

- *Tasodifiy miqdorlar ehtimolliklar fazosidagi o'lchovli funksiyalar bo'lishini.*
- *Taqsimot funksiyalari ma'lum xossalarga ega bo'lishini.*
- *Mavjudlik teoremasi o'rinli bo'lishini.*
- *Ehtimolliklar nazariyasida Lebeg, Stiltes, Riman integrallaridan foydalanishni*

bilish va amalda qo'llay olish;

- *Taqsimotlarning zichlik funksiyalarini.*
- *Diskret tipdagi taqsimotlarni.*
- *Ko'p o'lchovli absolyut uzluksiz taqsimotlarni.*
- *Lebeg, Stiltes, Riman integrallarining xossalarini*

o'rganib olish mumkin.

§ 3.1. Ta'rif va misollar

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - biror ehtimollik fazosi berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1. ξ tasodifiy miqdor deb Ω to'plamni haqiqiy sonlar to'plami R ga akslantiruvchi o'lchovli $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga aytiladi, ya'ni ixtiyoriy Borel to'plami $B \in \mathrm{B}(R)$ ning aksi (proobrazi) $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ σ-algebra $\mathcal{F}$ ga tegishli to'plamdir.

Bunday hollarda ξ funksiya $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$ ni $\langle R, \mathrm{B}(R) \rangle$ ga o'lchovli akslantiradi deyiladi.

Masalan, tanga tashlashda Ω ikki nuqtadan iborat: gerb va raqam. Agar tanganing gerb tomoniga 1 va raqam tomoniga 0 qiymatni mos qo'ysak, quyidagi jadval ko'rinishda berilgan tasodifiy miqdorni olamiz:

ω	G	R
ξ	1	0

O'yin kubigi tashlaganda ustki yog'ida tushadigan ochkolar soni ham tasodifiy miqdorga misol bo'ladi va uni

ω	ω_1	ω_2	...	ω_6
ξ	1	2	...	6

ko'rinishda ifodalash mumkin.

$\{(x,y): x^2 + y^2 \le t\}$ to'plam o'lchovli bo'lgani uchun $[0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1]$ kvadratga tasodifiy ravishda tashlangan nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Yuqorida ta'kidlanganidek, tasodifiy miqdor ta'rifidan to'g'ri chiziq R da aniqlangan Borel to'plamlarining σ-algebrasi $\mathrm{B}(R)$ dan olingan ixtiyoriy B to'plam uchun

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

munosabat o'rinli. Demak, $\langle R, \mathrm{B}(R) \rangle$ o'lchovli fazoda $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ ehtimollik aniqlangan ekan.

Ta'rif 2. $P_\xi(B)$ ehtimollik ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb ataladi.

Demak, ξ tasodifiy miqdor abstrakt ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ni R dagi $(R, \mathrm{B}(R), P_\xi)$ ehtimollik fazosiga akslantiradi deb tushunish mumkin.

Agar $B = (-\infty, x)$ deb olsak, haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Quyida taqsimot funksiyasi tasodifiy miqdorning taqsimotini to'la aniqlashiga va tasodifiy miqdorni tavsiflashda keng qo'llanishiga amin bo'lamiz.

Tushunmovchiliklar kelib chiqmaydigan joylarda keyinchalik $F_\xi(x)$ yozuv o'rniga oddiy belgi $F(x)$ ishlatamiz.

ξ tasodifiy miqdor Ω to'plamni R haqiqiy sonlar o'qiga akslantirgani sababli $P(|\xi| < \infty) = P(\{\omega; \xi(\omega) \in R\}) = P(\Omega) = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi. Ayrim hollarda bunday tasodifiy miqdorlar bilan $\pm\infty$ qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarni ham ko'rib o'tish qulay. Bunday tasodifiy miqdorlar Ω to'plamni $R \cup \{\pm\infty\}$ ga o'lchovli akslantiradi.

$P(|\xi| = \infty) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorlarni xosmas tasodifiy miqdorlar deb ataymiz. Shunday tasodifiy miqdorlar hosil bo'lgan vaziyatni alohida ta'kidlaymiz.

Misol 1. Tajribalar soni n va ehtimollik parametri p bo'lgan Bernulli sxemasini ko'raylik (§1.5). Ma'lumki, bu vaziyatda Ω elementar hodisalar fazosi 0 va 1 lardan iborat n uzunlikdagi barcha mumkin bo'lgan ketma-ketliklardan iborat. $\mathfrak{I}$ σ – algebra sifatida Ω ning barcha qism to'plamlari sistemasini olamiz. Ω to'plamda tasodifiy miqdorni quyidagicha aniqlaymiz: 0 va 1 lardan iborat har bir ketma-ketlikka shu ketma-ketlikdagi birlar sonini mos qo'ysak, tasodifiy miqdorni aniqlagan bo'lamiz va tasodifiy miqdor $\xi(\omega)$ uchun

$$P_n(k) = P(\xi(\omega) = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\dots n.$$

Demak, bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \sum_{k<x} P_n(k),$$

bunda yig'indi barcha x dan kichik butun k lar bo'yicha amalga oshiriladi. Agar $x < 0$ bo'lsa, $F(x) = 0$ va $x > n$ bo'lsa, $F(x) = 1$ bo'ladi.

Misol 2. Haqiqiy sonlar o'qidan olingan $[a,b]$ kesmaga tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda. Bunda nuqtaning $[a,b]$ kesmaning biror qismiga (kesmaga tegishli biror to'plamga) tushish ehtimoli shu to'plamning Lebeg o'lchoviga proporsional deb qabul qilingan. Bunda Ω $[a,b]$ kesmadan iborat va $\mathfrak{I}$ σ – algebra $[a,b]$dan olingan Borel to'plamlar sinfidan iboratdir. Tasodifiy miqdorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\xi(\omega) = \omega, \quad \omega \in [a,b],$$

ya'ni tasodifiy miqdor $[a,b]$ kesmaga tashlangan nuqta tushgan songa teng. Bunday aniqlangan tasodifiy miqdor o'lchovli funksiyadir. Agar $x < a$ bo'lsa, $F(x) = P(\xi < x) = 0$. Agar $x \in [a,b]$ bo'lsa, $\{\xi < x\}$ hodisa nuqtaning $[a,x)$ intervalga tushganini anglatadi. Ushbu intervalga tushish ehtimoli interval uzunligiga proporsional, demak,

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Agar $x > b$ bo'lsa, $F(x) = 1$ bo'lishi tushunarli. Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Bu funksiyani $[a,b]$ intervalda aniqlangan tekis taqsimot funksiyasi deyiladi.

Misol 3. Normal taqsimot. Ehtimoliklar nazariyasida normal taqsimot juda muhim rol o'ynaydi. Parametrlari a va σ^2 bo'lgan normal taqsimot deb

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du, \qquad a \in R, \sigma^2 > 0,$$

taqsimot funksiyasiga aytiladi. Bu funksiya uchun

$$F(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx = 1$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Buni ko'rsatish uchun oxirgi integralda $u = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirishni bajarsak, analiz kursidan ma'lum Puasson integraliga kelamiz:

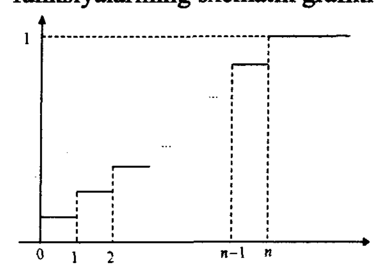
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

Normal taqsimot ko'p hollarda Gauss taqsimoti deb ham ataladi.

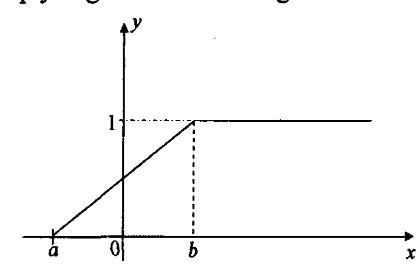
Keyingi paragrafda $\langle R, \mathrm{B} \rangle$ aniqlangan Lebeg o'lchovi $\mu(B)$ uchun

$$P_\xi(B) = \frac{1}{b-a} \mu(B \cap [a,b])$$

munosabat o'rinli ekanligini ko'ramiz. Keltirilgan misollardagi taqsimot funksiyalarining sxematik grafiklari quyidagi rasmlarda berilgan.



Misol 1.



Misol 2.

§ 3.2. Tasodifiy miqdorlar orqali aniqlanadigan hodisalar

Tasodifiy miqdor $\xi(\omega)$ biror ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ da aniqlangan bo'lsin. U holda,

$$\Omega \xrightarrow{\xi(\omega)} R(-\infty, \infty)$$

va har qanday $x \in R$ uchun

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\xi^{-1}((-\infty,x))\in\mathfrak{I}.$$

Teorema. $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ ehtimollik fazosi bo'lib, unda $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor aniqlangan bo'lsin. Agar B to'g'ri chiziqdagi $(B\subseteq R)$ ixtiyoriy Borel to'plami bo'lsa,

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$$

tasodifiy hodisa bo'ladi, ya'ni $\xi^{-1}(B)\in\mathfrak{I}$.

Isbot. Ishonch hosil qilish mumkinki, to'plamlardan ularning proobrazlariga "o'tish amali" (ya'ni $B\subset R$ dan $\xi^{-1}(B)\subset\Omega$ to'plamlariga o'tish) to'plamlar ustidagi $\cup,\cap$ va "-" amallarini saqlaydi. Demak, quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right)=\bigcup_n \xi^{-1}(B_n)$$

$$\xi^{-1}\left(\bigcap_n B_n\right)=\bigcap_n \xi^{-1}(B_n) \qquad (*)$$

$$\xi^{-1}(\bar{B})=\overline{\xi^{-1}(B)}.$$

Lemma. Tasodifiy miqdor $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ ehtimollik fazosida aniqlangan bo'lsin. U bolda, Ω ning quyidagi qism to'plamlari

$$\{\omega;\xi(\omega)\ge x\},\qquad \{\omega;\xi(\omega)\le x\},$$

$$\{\omega;\xi(\omega)>x\},\qquad \{\omega;a\le\xi(\omega)<b\},$$

$$\{\omega;a<\xi(\omega)<b\},\qquad \{\omega;\xi(\omega)=x\}$$

tasodifiy hodisalar bo'ladi, ya'ni bu to'plamlarning har biri $\mathfrak{I}$ σ-algebraga tegishli bo'ladi.

Isbot. Bevosita quyidagi tengliklar o'rinli ekanligiga isbonch hosil qilish mumkin:

$$\{\omega;\xi(\omega)\ge x\}=\Omega\setminus\{\omega;\xi(\omega)<x\},$$

$$\{\omega;\xi(\omega)\le x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\omega;\xi(\omega)<x+\frac{1}{n}\right\},$$

$$\{\omega;\xi(\omega)>x\}=\Omega\setminus\{\omega;\xi(\omega)\le x\},$$

$$\{\omega;a\le\xi(\omega)<b\}=\{\omega;\xi(\omega)<b\}\setminus\{\omega;\xi(\omega)<a\},$$

$$\{\omega;a<\xi(\omega)<b\}=\{\omega;\xi(\omega)<b\}\setminus\{\omega;\xi(\omega)\le a\},$$

$$\{\omega;\xi(\omega)=x\}=\{\omega;\xi(\omega)\le x\}\setminus\{\omega;\xi(\omega)<x\}.$$

Funksiya $\xi=\xi(\omega)$ ni o'lchovli funksiya ekanligidan har qanday $x\in R$ uchun $\{\omega;\xi(\omega)<x\}\in\mathfrak{I}$. Demak, keltirilgan tengliklardan va σ-algebra xossasidan lemmaning isboti kelib chiqadi.

Quyidagi B to'plamlar sistemasi

$$K=\{B,B\subset R,\xi^{-1}(B)\in\mathfrak{I}\}$$

yuqorida keltirilgan tengliklarga ko'ra, σ-algebra tashkil etishini eslatib o'tamiz. O'z navbatida, isbotlangan lemmaga asosan $[a,b)$ ko'rinishdagi yarim intervallar K sistemaga tegishli bo'ladi $([a,b)\in K)$. Borel σ-algebrasi B intervallar sistemasini o'z ichiga oluvchi minimal σ-algebra bo'lgani uchun $B\subset K$. Demak, teorema har qanday Borel to'plami B uchun o'rinli ekan.

§ 3.3. Taqsimot funksiyalarning xossalari

Tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x)=P(\xi^{-1}(-\infty,x))=P(\xi<x)$$

quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

$F1$. Har qanday $x\in R$ uchun $0\le F_\xi(x)\le 1$.

$F2$. Har qanday $x_1\le x_2$ lar uchun $F_\xi(x_1)\le F_\xi(x_2)$.

$F3$. $F_\xi(x)$ chapdan uzluksiz, ya'ni

$$\lim_{x\uparrow x_0}F_\xi(x)=\lim_{x\to x_0-0}F_\xi(x)=F_\xi(x_0).$$

$F4$. $\lim\limits_{x\to-\infty}F_\xi(x)=F_\xi(-\infty)=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}F_\xi(x)=F_\xi(+\infty)=1$.

F1 xossaning isboti taqsimot funksiyasining ta'rifidan, F2 xossa ehtimollikning monotonlik xossasidan kelib chiqadi: agar $x_1\le x_2$ bo'lsa,

$$\{\omega:\xi(\omega)<x_1\}\subseteq\{\omega:\xi(\omega)\le x_2\}.$$

F3 xossani isbotlasb uchun

$$A_n=\{\omega:\xi(\omega)<x_n\},\quad A=\{\omega:\xi(\omega)<x_0\}$$

hodisalarni ko'ramiz. Bu yerda $\{x_n,\ n\ge1\}$ monoton o'suvchi va $n\to\infty$ da

$$x_n\le x_0,\ x_n\to x_0\quad (x_n\to x_0-0).$$

Oxirgidan

$$A_n\subseteq A_{n+1},\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A=\lim A_n$$

munosabatlar o'rinli bo'lganligi kelib chiqadi. Demak, $P(\cdot)$ ebtimollikning uzluksizlik xossasiga ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$$

tenglikni olamiz. Endi

$$P(A_n)=P(\xi<x_n)=F_\xi(x_n)$$
$$P(A)=P(\xi<x_0)=F_\xi(x_0)$$

tengliklarni hisobga olib, F3 xossaning o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

F4 dagi birinchi tenglikni olish uchun monoton kamayuvchi va $Y_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ ketma-ketlik orqali

$$B_n = \{\omega : \xi(\omega) < Y_n\}$$

o'suvchi bo'lmagan $(B_{n+1} \subseteq B_n)$ hodisalar ketma-ketligini tahlil qilamiz. Bu ketma-ketlik uchun

$$\lim B_n = B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$$

va ehtimollikning uzluksizlik xossasidan

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\varnothing) = 0$$

kelib chiqadi.

Oxirgi tenglikni esa,

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(Y_n) = F_\xi(-\infty) = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. F4 dagi ikkinchi tenglik shunga o'xshash ravishda isbotlanadi. Bu holda Y_n ketma-ketlikni monoton kamaymaydigan (o'suvchi) va $Y_n \to +\infty$ shartni bajaradigan qilib tanlash yetarli bo'ladi. F4 xossadan taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ ni to'la variatsiyasi

$$\underset{-\infty<x<\infty}{Var} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) - F_\xi(-\infty) = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

Taqsimot funksiyaning keltirilgan xossalariga asoslanib, tasodifiy miqdor va uning taqsimoti haqida mukammal va umumiy tasavvurga ega bo'lish mumkin. Bunda quyida keltirilgan mulohazalar muhim rol o'ynaydi.

Ta'rif. R da aniqlangan $F(x)$ funksiya F1-F4 xossalarni qanoatlantirsa, uni taqsimot funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agar $F(x)$ taqsimot funksiya bo'lsa, u holda $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ehtimollik fazosi mavjud bo'lib, unda $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorni aniqlash mumkin, uning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = F(x)$$

bo'ladi.

Keltirilgan teoremani mavjudlik teoremasi deb tushunish tabiiy, chunki unda berilgan $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning mavjudligi ta'min etiladi (aslida esa bunday tasodifiy miqdorlar cheksiz ko'p bo'ladi).

Isbot. Talab qilingan ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ni keltiramiz. Elementar hodisalar fazosi sifatida $\Omega = R = (-\infty, +\infty)$, $F = B -$ to'g'ri chiziq R

da Borel to'plamlari $\sigma-$ algebrasi deb qabul qilamiz. Ravshanki, $[a,b)$ interval yoki chekli sondagi bunday intervallarning yig'indisi ko'rinishidagi to'plamlar sistemasi $\mathfrak{I}_0$ algebra tashkil qiladi va $\mathfrak{I}_0$ sistema yuzaga keltirgan $\sigma-$algebra

$$\sigma(\mathfrak{I}_0)=B.$$

Ta'kidlab o'tamizki, xususan $a=-\infty, b=+\infty$ bo'lishi mumkin. $\mathfrak{I}_0$ sistemada berilgan taqsimot funksiyasi $F(x)$ orqali to'plamlar funksiyasi $P(\cdot)$ni quyidagicha aniqlaymiz:

Agar $A\in F_0$ bo'lsa,

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i),\quad n\geq 1$$

ko'rinishida bo'ladi (bu yerda $[a_i,b_i)$ intervallarni o'zaro kesishmaydigan deb hisoblash mumkin) va $P(\cdot)$ funksiyani

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(b_i)-F(a_i)\right]$$

tenglik bilan aniqlaymiz. Bundan ko'rinadiki, $P(A)-$to'plamlarda aniqlangan chekli additiv funksiya va $P(\Omega)=1$ bo'ladi. Oxirgi jumlada $F(\cdot)$ funksiyaning taqsimot funksiyasi ekanligidan foydalanildi.

Endi $P(\cdot)$ funksiyaning $\mathfrak{I}_0$ da sanoqli additiv ($\sigma-$additiv) bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun uning uzluksiz bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. O'z navbatida har qanday monoton kamayuvchi ketma-ketlik $\{A_n,\, n\geq 1\}$ ($A_n\in\mathfrak{I}_0$ har qanday $n\geq 1$ bo'lganda $A_{n+1}\subseteq A_n$) uchun

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A),\qquad A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

tenglik o'rinli ekanligini tekshirish yetarli bo'ladi.

Umumiylikni cheklamagan holda

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[a,b)$$

deb hisoblash mumkin. Har qanday $n\geq 1$ uchun $A\subseteq A_n$ ekanligidan, A_n to'plam shunday $[a_n,b_n)$ intervalni o'z ichiga oladiki, bu interval uchun $a_n\leq a,\ b_n\geq b$ tengsizliklar bajariladi va uni A_n dagi A ni o'z ichiga oladigan maksimal interval deb qabul qilish mumkin. Aytilganlardan kelib chiqadiki, qandaydir $n\geq 1$ dan boshlab

$$A_n=[a_n,b_n)=[a_n,b).$$

Demak,

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=\lim_{n\to\infty}\left[F(b)-F(a_n)\right]=F(b)-F(a)=P(A).$$

Oxirgi tenglik $\mathfrak{I}_0$ da aniqlangan $P(\cdot)$ funksiyaning sanoqli additiv ekanligini isbotlaydi. Endi ma'lum Karateodori teoremasiga asoslanib (И.И.Гихман, А.В.Скороход, М.И.Ядренко. Теория вероятностей и математическая статистика. Гл. 3. §3) ehtimollik funksiyasi $P(\cdot)$ ni $\mathfrak{I}_0$-algebradan uni u yuzaga keltirgan σ-algebra $\sigma(\mathfrak{I}_0)$ ga yagonalik shartini bajargan holda davom ettirish mumkin. Yuqorida keltirilgan $\sigma(\mathfrak{I}_0)=B$-(to'g'ri chiziqdagi Borel to'plamlari sistemasi (σ-algebrasi)) munosabatni e'tiborga olib $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ $(\Omega=R,\mathfrak{I}=B,P)$, ehtimollik fazosini tuzamiz va unda $\xi(\omega)=\omega$ koordinat funksiyasini aniqlaymiz.

Bu holda,

$$P(\{\omega:\xi(\omega)<x\})=P(-\infty,x)=F(x)$$

Demak, $\xi(\omega)=\omega$- tasodifiy miqdor berilgan taqsimot funksiyasi F ga ega bo'ladi.

Agar taqsimot funksiyasini

$$F(x)=P(\xi\le x)$$

tenglik bilan ta'riflasak, $F(x)$ o'ng tomondan uzluksiz bo'lishiga $(F(x+0)=F(x))$ ishonch hosil qilish mumkin. Umuman aytganda, taqsimot funksiyasi qabul qilingan ta'rifga nisbatan o'ng tomondan uzluksiz bo'lishi shart emas, chunki uzluksizlik aksiomasiga asosan

$$F(x+0)-F(x)=\lim_{n\to\infty}\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left(x\le\xi<x+\frac{1}{n}\right)=P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\xi\in\left[x,x+\frac{1}{n}\right]\right\}\right]=$$

$$=P(\xi=x)=F(x+0)-F(x-0)$$

Oxirgi tengliklardan kelib chiqadiki, taqsimot funksiyasi $F(x)$ ning x nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun, $P(\xi=x)=0$ bo'lishi yetarli va zaruriy shart.

Keltirilgan munosabatlardan

$$P(a\le\xi\le b)=P_\xi([a,b])=F(b+0)-F(a)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Misol 1. Quyidagi tenglik bilan aniqlangan funksiya

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du,\ a\in R,\ \sigma>0$$

taqsimot funksiyasining F1-F4 shartlarini qanoatlantiradi va u ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikada markaziy rollardan birini

o'ynaydi. Demak, qandaydir ehtimollik fazosi $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ da aniqlangan $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor mavjud bo'ladiki,

$$P(\xi<x)=\Phi_{a,\sigma^2}(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi (yuqorida keltirilgan mavjudlik teoremasiga asosan) va bu tasodifiy miqdor parametrlari (a,σ^2) bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb ataladi.

Misol 2. Quyidagi tenglik bilan aniqlangan funksiya

$$\pi_\lambda(x)=\sum_{\{k;\,k<x\}}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad \lambda>0$$

taqsimot funksiyasining hamma F1-F4 shartlarini qanoatlantiradi. Unga mos kelgan tasodifiy miqdor ξ qiymatlari

$$\{0,1,2,...\}$$

to'plamni tashkil qiladi va bu qiymatlar $\pi_\lambda(x)$ funksiyasinimg uzllish nuqtalari bo'ladi.

Demak,

$$P(\xi=k)=\pi_\lambda(k+0)-\pi_\lambda(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0,1,2,...$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tasodifiy miqdor, parametri $\lambda>0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega deb ham yuritiladi.

§ 3.4. Taqsimotlarning zichlik funksiyalari

Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimot funksiyasi

$$P(\xi<x)=F(x)$$

bo'lsin. ξ tasodifiy miqdor uzluksiz taqsimot funksiyasiga ega deyiladi, agar integrallanuvchi $p(u)$ funksiya mavjud bo'lib

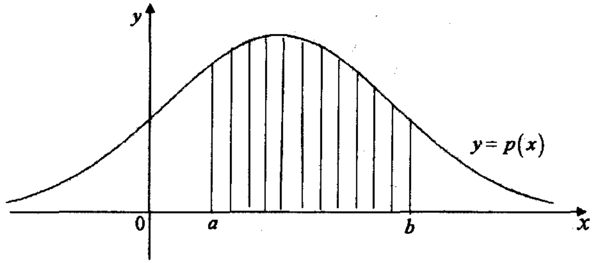
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du,\qquad x\in R \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa. Funksiya $p(u)$ tasodifiy miqdor ξ taqsimotining zichlik funksiyasi deyiladi.

Matematik analiz kursidan ma'lumki, (1) tenglikdagi $p(\cdot)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, $F(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib

$$F'(x)=p(x)$$

tenglik bajariladi. Bunday funksiyaning sxematik grafigi quyidagi rasmda keltirilgan.



Taqsimot funksiyasi $F(x)$ kamaymaydigan bo'lgani uchun $F'(x) \geq 0$. Demak, $p(x)$-manfiy bo'lmagan funksiya va (1) tenglikdan ko'rinadiki, $F'(x) = p(x)$ tenglik deyarli hamma x lar uchun o'rinli bo'ladi.

Agar ξ tasodifiy miqdor $p(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa,

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b p(u)\,du. \tag{2}$$

Haqiqatan ham,

$$P(a \leq \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a)$$

Bundan va (1) tenglikdan (2) tenglikni olamiz (tasodifiy miqdor ξ ning qiymatlari $[a,b)$ kesmaga tushish ehtimolligi rasmdagi shtrixlangan yuzaga teng). O'z navbatida (2) tenglikdan $p(\cdot)$ funksiya uzluksiz bo'lgan holda,

$$P(x \leq \xi < x + \Delta x) = p(x)\Delta x + o(\Delta x) \tag{3}$$

Oxirgidan esa,

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

va bu tenglik $p(\cdot)$ ni taqsimotning zichlik funksiyasi deb atashga asos bo'ladi. (1) tenglikdan va $F(+\infty) = 1$ ekanligidan

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u)\,du = 1. \tag{4}$$

Aytib o'tilganlardan xulosa qilish mumkinki, taqsimotning zichlik funksiyasi bu-(1) va (4) tengliklarni qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan $p(x)$ funksiya va aksincha, har bir zichlik funksiya (4) tenglikni qanoatlantiradi. Umuman, (1) tenglik ko'rinishidagi hamma $F(x)$ funksiyalarni absolyut uzluksiz taqsimot funksiyalari deyiladi. Bu taqsimot funksiyalar (4) shartni qanoatlantiruvchi zichlik funksiyalari orqali bir qiymatli aniqlanadi. Izohlab o'tamizki, (4) shart o'rniga undan ancha umumiy bo'lgan munosabatlarga o'tish mumkin. Masalan,

$p(x) \geq 0$ bo'lib, $p(u) \in L_1(-\infty, \infty)$ bo'lsa, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = c < \infty$$

shart bajarilsa, $\tilde{p}(x) = \dfrac{p(x)}{c}$ funksiya (4) shartni qanoatlantiradigan zichlik funksiya bo'ladi.

Eslatib o'tish mumkinki, agar zichlik funksiyasi $p(\cdot)$ (4) shartni qanoatlantirsa, (1) tenglik bo'yicha aniqlangan $F(x)$ funksiya F1-F4 xossalarning hammasini qanoatlantiradi va oldingi paragrafdagi mavjudlik teoremasiga asosan taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan tasodifiy miqdor mavjud bo'ladi.

Misol 1. Parametrlari (a,σ^2) bo'lgan normal taqsimot $N(a,\sigma^2)$ quyidagi zichlik funksiyasi orqali aniqlanadi:

$$p(x) = p(x,a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Birinchi navbatda $p(x)$ funksiyani taqsimotning zichlik funksiyasi bo'lishini tekshirish kerak bo'ladi, ya'ni (4) tenglikka asosan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

bo'lishiga ishonch hosil qilish kerak bo'ladi.

Haqiqatan ham, oxirgi integralda

$$u = \frac{x-a}{\sigma}$$

almashtirishni bajarsak,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du = 1$$

bo'ladi. Analiz kursidan ma'lumki (Puasson integrali),

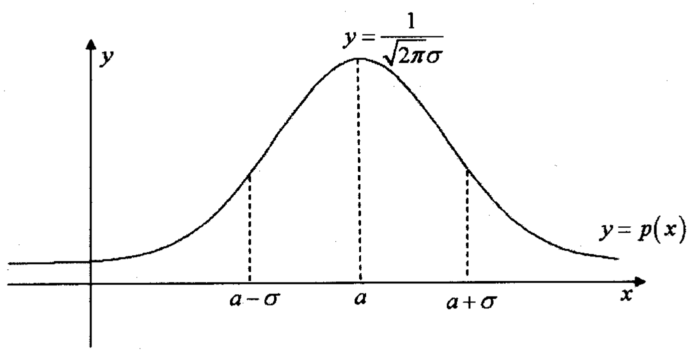
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

demak, $p(x,a,\sigma)$ zichlik funksiyasi bo'ladi.

Bevosita

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

funksiyaning F1-F4 shartlarini bajarishini ko'rish mumkin. Zichlik funksiyasi $p(\cdot)$ sxematik grafigi quyidagi rasmda keltirilgan

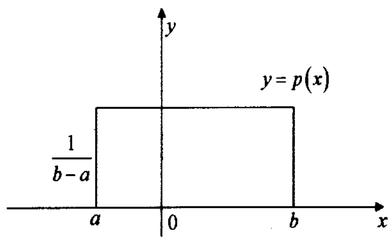


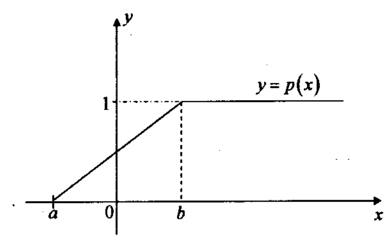
Misol 2. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimot deb, quyidagi zichlik funksiyasi

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0 & x\overline{\in}[a,b]\end{cases}$$

orqali aniqlangan taqsimotga aytiladi.

Quyidagi rasmlarda $[a,b]$ oraliqdagi tekis taqsimotning zichlik va taqsimot funksiyalarining grafiklari keltirilgan





Misol 3. Quyidagi zichlik funksiyasi orqali aniqlangan taqsimotni ko'ramiz:

$$p(x)=p(x,\lambda,q)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0\\ \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)}x^{q-1}e^{-\lambda x}, & agar\ x>0\end{cases}$$

va bu yerda $\Gamma(\cdot)$- Eyler funksiyasi

$$\Gamma(q)=\int_0^\infty x^{q-1}e^{-x\lambda}dx,\ \lambda,q>0.$$

Keltirilgan zichlik funksiyasi $p(x,\lambda,q)$ ga ega bo'lgan taqsimot-Gamma taqsimot deb ataladi. Xususiy holda $q=1$ bo'lsa, Γ-taqsimot funksiya

$$\Gamma_\lambda(x)=\int_0^x p(u)du=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

ko'rsatkichli taqsimot deb ataladi va u texnikaga oid masalalarda ko'p uchraydi.

§ 3.5. Diskret tipdagi tasodifiy miqdorlar

Ixtiyoriy $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ ehtimollar fazosida $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor aniqlangan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorni diskret tipdagi tasodifiy miqdor deyiladi, agar uning qiymatlari diskret to'plamni tashkil qilsa (eslatib o'tamizki, chekli yoki sanoqli elementlarga ega bo'lgan to'plamlar diskret to'plamlar deb ataladi).

Teorema. Ω da aniqlangan $\xi(\omega)$ funksiya chekli yoki sanoqli sondagi

$$a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu funksiya F ga nisbatan o'lchovli bo'lishi uchun n ning barcha qiymatlarida

$$\{\omega:\xi(\omega)=a_n\}\in\mathfrak{I} \qquad (1)$$

munosabatning bajarilishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, $\xi(\omega)$ funksiya uchun (1) munosabatlar o'rinli bo'lsa, bu funksiya F ga nisbatan o'lchovli bo'ladi, chunki har qanday haqiqiy son x uchun

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\bigcup_{\{n:a_n<x\}}\{\omega:\xi(\omega)=a_n\}\in\mathfrak{I}.$$

Aksincha, $\xi(\omega)$ o'lchovli funksiya bo'lsa, har qanday haqiqiy son a uchun

$$\{\omega:\xi(\omega)=a\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\omega:\xi(\omega)\in\left(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right)\right\}\in\mathfrak{I}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi xulosaga kelish mumkin. Agar $\xi(\omega)$- diskret tipdagi tasodifiy miqdor bo'lib, uning qiymatlari $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ ketma-ketlikni tashkil etsa, har qanday n uchun

$$p_n=P(\{\omega:\xi(\omega)=a_n\}) \qquad (2)$$

ehtimolliklar aniqlangan bo'ladi. Ehtimollik taqsimotini tashkil qiladigan $\{p_n,n\ge1\}$ ketma-ketlik $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb ataladi, chunki ξ ning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x)=\sum_{\{n:a_n<x\}}p_n$$

tenglik bilan to'la aniqlanadi.

Aytilganlardan diskret tipdagi tasodifiy miqdorning taqsimotini quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin:

$\xi(\omega)$ qiymatlari	a_1	a_2	...	a_n	...
Ehtimolliklar	p_1	p_2	...	p_n	...

Qayd qilib o'tamizki, $p_n \geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Endi, diskret tipdagi diqqatga sazovor bo'lgan tasodifiy miqdorlarga misol keltiramiz.

Geometrik taqsimot. Faraz qilamizki, natijalari biror hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligidan iborat bo'lgan bog'liqsiz tajribalar o'tkazilayotgan bo'lsin.

Kuzatilayotgan hodisa ro'y berish natijasini "yutuq" yoki 1 deb, ro'y bermaslik natijasini "yutqiziq" yoki 0 deb hisoblaymiz. Aytaylik, tajribalar birinchi marta "yutuq" (1) natija ro'y berishiga qadar davom ettirilsin va birinchi marta 1 ning ro'y berishiga qadar o'tkazilgan tajribalar soni ξ bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorning taqsimotini topaylik. Har bir tajribada 1 ni paydo bo'lish ehtimolligi p, 0 ni paydo bo'lish ehtimolligi $q = 1 - p$ bo'lsin. Elementar hodisalar fazosi Ω sifatida quyidagi

$$\Omega = \left\{1, 01, 001, \ldots, \underbrace{00\ldots0}_{n-1}1, \ldots\right\}$$

sanoqli to'plamni olish mumkin. Tajribalar o'zaro bog'liqsiz deb hisoblangani uchun

$$P\left(\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1\right) = q^{n-1} \cdot p .$$

Shunday qilib,

$$P(\xi(\omega) = n) = q^{n-1} \cdot p, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \cdot p = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

(3) dagi ehtimolliklar geometrik taqsimot deb aytiladi.

Agar tasodifiy miqdor ξ geometrik taqsimotga ega bo'lsa, har qanday $m \geq 1$ uchun

$$P(\xi = n + m / \xi \geq n) = P(\xi = m) \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$P(\xi = n + m / \xi \geq n) = \frac{P(\xi = n + m,\ \xi \geq n)}{P(\xi \geq n)} = \frac{P(\xi = n + m)}{P(\xi \geq n)} = \frac{q^{n+m-1} \cdot p}{\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cdot p} = q^{m-1} \cdot p$$

Keltirilgan (4) formulani quyidagicha sharhlab o'tish mumkin. Telefon orqali aloqa sxemasini ko'raylik. Faraz qilamizki, bu aloqalar uzunligi butun sonlarda ifoda etiladigan minutlarda o'lchansin. Har minutning boshida p ehtimollik bilan aloqani to'xtatish haqida qaror qilinsin va $1-p$ ehtimollik bilan aloqa davom ettirilsin. Bu holda, telefon orqali qilingan aloqa uzunligi tasodifiy miqdor bo'lib, u geometrik taqsimotga ega bo'ladi. Keltirilgan sxemada (4) tenglik telefon aloqasi $n-1-$minutda to'xtatilgan bo'lmasa, uning yana $n+m$ minut davom etishi shartli ehtimolligi, aloqaning m minut davom etishi shartsiz ehtimolligiga teng bo'ladi. Telefon orqali aloqaning (4) tenglik bilan aniqlanadigan xossasi aloqaning qancha davom etishli shu minutga qadar o'tgan aloqa uzunligiga bog'liq bo'lmaydi. Izohlab o'tilgan xossani "oldingi o'tgan jarayonning" kelgusidagi "jarayonga" ta'siri bo'lmaslik xossasi deb tushuntirish mumkin, yoki qisqaroq qilib aytganda, (4) tenglik "o'tgan voqealarning" kelgusidagi "voqealarga" ta'siri bo'lmasligini anglatadi. O'z navbatida, oxirgi jumlani shartli ravishda "kelgusiga ta'sir yo'qlik" xossasi deb ham atash mumkin.

Quyidagi qiziq va foydali faktni qayd qilib o'tamiz. Hamma diskret taqsimotlardan faqat geometrik taqsimot "kelgusiga ta'sir yo'qlik" xossasiga ega bo'ladi, ya'ni bu taqsimot (4) tenglik bilan to'la tavsiflanadi.

Haqiqatan ham aytaylik, $\{p_n, n\geq 1\}$ qiymatlari $\{1,2,...\}$ to'plamni tashkil etadigan biror tasodifiy miqdorning taqsimoti bo'lsin va bu taqsimot (4) tenglikni qanoatiantirsin. Bu holda (4) tenglikni $n\geq 2,\ m\geq 1$ bo'lganda,

$$\frac{p_{n+m}}{\sum_{k=n}^{\infty} p_k} = p_m \tag{5}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar (5) da $n=2$ bo'lsa,

$$p_{m+1} = p_m \cdot \sum_{k=2}^{\infty} p_k = p_m(1-p_1)$$

oxirgi rekkurent munosabatdan

$$p_m = (1-p_1)^{m-1}\cdot p_1$$

tenglikni olamiz, ya'ni $\{p_m;\ m\geq 1\}$ geometrik taqsimot bo'ladi.

§ 3.6. Tasodifiy vektorlar va ularning taqsimotlari

Matematikada d-o'lchovli Evklid fazosi R^d deb, aniq bir bazisga asoslangan d-o'lchovli chiziqli fazo tushuniladi. Bu fazoning nuqtalari x,y,a,b kabi nuqtalar bilan belgilanib, ular tanlangan bazisdagi koordinatalar orqali ifodalanadi. Masalan, $x=(x_1,x_2,...,x_d)$, $a=(a_1,a_2,...,a_d)$ va hokazo. Fiksirlangan bazisda R^d ni "yarim tartiblangan" fazo deb qarash mumkin: $a\le b$, agar $a_k\le b_k$ bo'lsa, $k=1,2,...,d$, agar $a_k<b_k$ $k=1,2,...,d$, bo'lsa $a<b$.

R^d fazodagi nuqtalar to'plami

$$[a,b)=\{x;a\le x<b\}=\{(x_1,...,x_d),a_1\le x_1<b_1,...,a_d\le x_d<b_d\}$$

intervallar deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash $[a,b]$ ($[a,b]-[a,b)$ ning yopig'i), (a,b) ($(a,b)-[a,b)$ intervallarning ichki nuqtalari) intervallarni ta'rifiash mumkin.

Endi qandaydir ehtimollik fazosi $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ berilgan bo'lsin. Evklid fazosi R^d da qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy vektor ξ deb $(\xi_1,...,\xi_d)$-tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga aytiladi. Bu yerda ξ_i, $i=1,2,...d$, $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ da aniqlangan haqiqiy tasodifiy miqdorlar ξ tasodifiy vektorning i-koordinatasi deb ataladi, tasodifiy miqdor $\xi_i=f_i(\omega)-F$ o'lchovli haqiqiy funksiya bo'lgani uchun $\xi=\xi(\omega)=(f_1(\omega),...,f_d(\omega))$, ya'ni tasodifly vektor $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ da aniqlangan, R^d da qiymatlar qabul qiluvchi F-o'lchovli vektor funksiya bo'ladi va bu funksiya Ω ni R^d ga akslantiradi. R^d dagi ixtiyoriy to'plam B uchun $\left(B\subseteq R^d\right)$

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega;f(\omega)\in B\}\subseteq\Omega$$

B to'plamning aksi (proobrazi) deb ataladi.

Yuqorida aytib o'tilgan $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy vektorning F-o'lchovli funksiya bo'lishi, har qanday d-o'lchamli Borel to'plami B uchun $\left(B\subseteq R^d\right)$

$$\xi^{-1}(B)\in F$$

ekanligini bildiradi. ($\xi^{-1}(B)$ Evklid fazosi R^d dagi hamma Borel to'plamlari sistemasi B^d ni F ga akslantiradi). Demak d-o'lchovli Borel to'plamlarida

$$F(B)=P\left(\xi^{-1}(B)\right)$$

o'lchov aniqlangan bo'ladi. Bu o'lchovning ehtimollik o'lchovi bo'lishini isbot etaylik. Haqiqatan ham R^d dagi o'zaro kesishmaydigan Borel to'plami ketma-ketligi

$$B_1,B_2,...,B_n,....$$

uchun

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} F(B_n)$$

ekanligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=P\left(\xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi^{-1}(B_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} F(B_n).$$

Bulardan tashqari $F\left(R^d\right)=P\left(\xi^{-1}\left(R^d\right)\right)=P(\Omega)=1.$

Ehtimollik o'lchovi $F(\cdot)$ tasodifiy vektorning taqsimoti deb ataladi.

Aytib o'tilganlardan $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy vektor $(\Omega,\mathcal{J},P)$ ehtimollik fazosini R^d aniqlangan $\left(R^d,B^d,F\right)$ ehtimollik fazosiga akslantiradi deb tushunish mumkin.

Tasodifiy vektorning taqsimoti bu vektor haqida to'la axborot beradi, chunki bu ehtimollik orqali ξ bilan bog'liq bo'lgan hodisalarning ehtimolliklarini ifoda etish mumkin. Shuning uchun ham uni berilish usullarini topish muhim hisoblanadi. Umumiy holda bu taqsimotni tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi orqali aniqlash mumkin.

Ta'rif: Tasodifiy vektor ξ ning taqsimot funksiyasi deb,

$$F(x)=P(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,...,\xi_d<x_d)$$

funksiyaga aytiladi.

Taqsimot funksiyasinimg quyidagi asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $0\le F(x)\le 1$;
2. Agar $x_1,...,x_d$ koordinatalaridan biri $x_k\to-\infty$ bo'lsa, $\lim F(x)=0$;
3. Agar $x_1\to+\infty, x_2\to+\infty,...,x_d\to+\infty$ bo'lsa, $\lim F(x)=1$, $\left(\min_k x_k\to+\infty\right)$;
4. $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz. Eslatib o'tamizki, $F(x)$ $\left(x\in R^d\right)$ funksiya chapdan uzluksiz deb ataladi, agar $x^{(n)}$ nuqtalar ketma-ketligi

$$x^{(n)}\le x,\ n=1,2,...,\ \text{va}\ \lim_{n\to\infty} x^{(n)}=x\ \text{bo'lsa,}\ \lim F\left(x^{(n)}\right)=F(x)$$

Taqsimot funksiyaning keltirilgan xossalarining isboti bir o'lchovli $(d=1)$ taqsimot funksiyasi bo'lgan holdan farq etmaydi va shuning uchun bu haqda to'xtab o'tirmaymiz.

Endi ξ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bu vektorning taqsimoti $F(B)=P(\xi\in B)$ ni to'la bir qiymatli ravishda aniqlanishini ko'rsatib o'taylik. Birinchi navbatda bu funksiya yordamida

$\{\omega;\xi(\omega)\in[a,b)\}$, $a\le b$, $a,b\in R^d$ hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash mumkinligini ko'raylik.

R^d da aniqlangan ixtiyoriy $g(x)=g(x_1,...,x_d)$ funksiya uchun chekli-ayirma operatori Δ_h^i ni quyidagi formula bilan kiritamiz:

$$\Delta_h^i g(x)=g(x_1,...,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},...,x_d)-g(x_1,...,x_i,...,x_d),\quad i=1,2,...,d$$

Agar Δ_h^i operator bir argumentli funksiyaga qo'llanilsa, Δ_h^i o'rniga Δ_h deb yozamiz.

O'z-o'zidan ravshanki, agar A ixtiyoriy hodisa, η esa tasodifiy miqdor bo'lib, $f(\cdot)$ funksiya $f(x)=P(A\cap\{\eta<x\})=P(A;\eta<x)$ tenglik bilan aniqlansa

$$P(A;x\le\eta<x+h)=\Delta_h f(x)$$

formula o'rinli bo'ladi. Oxirgidan induksiya orqali $(h=(h_1,...,h_d))$

$$P(\xi\in[a,a+h))=\Delta_{h_1}^1\Delta_{h_2}^2...\Delta_{h_d}^d F(a) \qquad (1)$$

tenglikni olamiz.

Masalan, $d=2$ bo'lgan holda (tekislikda)

$$P(\xi\in[a,b))=\Delta_{b_1-a_1}^1\left[F(a_1,b_2)-F(a_1,a_2)\right]=$$
$$=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_1,a_2)+F(a_1,a_2)$$

formula (1) dan kelib chiqadiki, taqsimot funksiyasi $F(x)$ ehtimollik $F(B)$ni B-to'plam d – intervallar ko'rinishda bo'lgan holda, bir qiymatli aniqlaydi. Umumiy o'lchovlar nazariyasida ixtiyoriy Borel to'plami uchun $F(B)=\inf\left(\sum_k F([a_k,b_k])\right)$ ekanligi isbot etilgan (bu yerda $\inf B$ to'plam qoplovchi $[a_k,b_k)$, $k=1,2,...$ intervallar sistemasi bo'yicha olinadi, ya'ni $B\subseteq\bigcup_k[a_k,b_k)$). Demak, taqsimot funksiyasi $F(x)$, $F(B)$ taqsimotni bir qiymatli aniqlaydi.

Tasodifiy vektor $\xi=\xi(\omega)$ ning taqsimot funksiyasi $F(x)=F(x_1,...,x_d)$ bo'lsin va ξ vektorning "qisqartirilgan" varianti

$$\eta=(\xi_1,...,\xi_s),\qquad s<d$$

vektorni ko'raylik. Bu vektorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ orqali quydagicha ifodalanadi:

$$F_\eta(x_1,...,x_s)=P(\xi_1<x_1,...\xi_s<x_s)=P(\xi_1<x_1,...\xi_s<x_s,\xi_{s+1}<+\infty,...,\xi_d<+\infty)=$$
$$=F_\xi(x_1,...x_s,+\infty,...,+\infty).$$

Demak, ξ va η vektorlar R^s da bir xil taqsimot funksiyasiga ega bo'ladi $(s<d)$.

§ 3.7. Ko'p o'lchovli absolut uzluksiz va diskret taqsimotlar

1. Absolyut uzluksiz taqsimotlar. Tasodifiy vektor $\xi=\xi(\omega)$ absolyut uzluksiz taqsimotga ega deyiladi, agar uning taqsimoti

$$F_\xi(B)=F(B)=\int_B p(x)dx=\int_{R^d} I_B(x)p(x)dx$$

ko'rinishda bo'lsa. Bu yerda tenglikning o'ng tomonidagi integral Lebeg yoki Riman ma'nosida tushuniladi, $I_B(x)$ esa Borel to'plami B ning xarakteristik funksiyasi, ya'ni

$$I_B(x)=\begin{cases}1, & agar\ x\in B\\ 0, & agar\ x\overline{\in} B,\end{cases}$$

Keltirilgan integralning yoyib yozilgan varianti

$$\int_B p(x)dx=\int\ldots\int p(x_1,\ldots x_d)dx_1\ldots dx_d \qquad (1)$$

va uning ehtimollik taqsimoti bo'lishi uchun $p(x_1,\ldots x_d)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

1. $p(x)\geq 0$ har qanday $x=(x_1,\ldots x_d)\in R^d$.

2. $\int_{R^d} p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1,\ldots x_d)dx_1\ldots dx_n=1.$

Evklid fazosi R^d da aniqlangan 1 va 2 sbartlarni qanoatlantiradigan $p(x)$ tasodifiy vektor ξ ning taqsimotini zichlik funksiyasi deb ataladi. Bu funksiyaning (1) tenglik orqali ta'rifini ekvivalent ravishda

$$F_\xi(x_1,\ldots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_d} p(u_1,\ldots,u_d)du_1\ldots du_d \qquad (2)$$

sharti bilan almashtirish mumkin.

Haqiqatan ham, agar (2) o'rinli bo'lsa, sanoqli additiv bo'lgan

$$Q(B)=\int_B p(x)dx$$

o'lchovni aniqlash mumkin. Kitobning oxirida keltirilgan ilovadagi integralning xossasiga asosan har qanday Borel to'plami B uchun

$$P_\xi(B)=F_\xi(B)=\int_B dF_\xi=\int_B p(x)dx=Q(B)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

O'z navbatida (2) dan kelib chiqadiki,

$$\frac{\partial^d F(x_1,...,x_d)}{\partial x_1...\partial x_d} = p(x_1,...,x_d).$$

Oxirgi tenglik $p(x_1,...,x_d)$ funksiya $F_\xi(\cdot)$ taqsimotning zichlik funksiyasi deb atalishini oydinlashtiradi.

Aytaylik, B_1, s-o'lchovli R^s dagi Borel to'plami $(s<d), B\subset R^d$ da

$$B=\{x=(x_1,...x_s,x_{s+1},...,x_d),\ (x_1,...x_s)\in B_1\}$$

d-o'lchovli Borel to'plami bo'lsin. To'plam B ni, asosi B_1 $(B_1\subset R^s)$ to'plamda bo'lgan silindrik to'plam deb ataladi. Agar $\eta=(\xi_1,...,\xi_s)$ "qisqartirilgan" tasodifiy vektor bo'lsa, $\xi=(\xi_1,...,\xi_d)$ tasodifiy vektor uchun

$$\{\omega:\eta(\omega)\in B_1\}=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}.$$

Demak, ξ tasodifiy vektorning taqsimoti $p(x_1,...,x_d)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa,

$$F_\eta(B_1)=P(\eta\in B_1)=P(\xi\in B)=$$

$$=\int_{B_1}...\int_{B_1}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,...,x_s,x_{s+1},...,x_d)dx_1...dx_s dx_{s+1}...dx_d$$

tenglik o'rinli bo'ladi va

$$p_\eta(x_1,...,x_s)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,...,x_s,x_{s+1},...,x_d)dx_{s+1}...dx_d \qquad (3)$$

deb olsak,

$$F_\eta(B_1)=\int...\int p_\eta(x_1,...,x_s)dx_1...dx_s$$

bo'ladi. Demak, ξ tasodifiy vektor taqsimoti zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, qisqartirilgan $\eta=(\xi_1,...,\xi_s)$ tasodifiy vektorning taqsimoti absolut uzluksiz bo'lib, uning zichlik funksiyasi $p_\eta(x_1,...,x_s)$ (3) formula bilan hisoblanar ekan.

Endi aytib o'tilganlarga misol sifatida ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikada muhim rol o'ynaydigan ko'p o'lchovli normal taqsimotni ko'raylik. Faraz qilaylik $a=(a_1,...,a_d)$ d-o'lchovli sonli vektor,

$$\zeta^2=(\zeta_{ij})^d,\qquad i,j=1,2,...,d$$

musbat aniqlangan simmetrik matritsa bo'lsin. Berilgan ζ^2 matritsaga teskari bo'lgan matritsani $A=(a_{ij})^d$, deb belgilaymiz, ya'ni $\zeta^2=A^{-1}$.

Tasodifiy vektor $\xi=(\xi_1,...,\xi_d)$ parametrlari (a,ζ^2) bo'lgan normal taqsimotga ega deymiz, agar uning taqsimoti

$$p(x)=p(a,x,\zeta^2)=\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)A(x-a)^T\right\} \qquad (4)$$

zichlik funksiyaga ega bo'lsa. Bu yerda $|A|$- A matritsaning determinanti va T belgi esa matritsa uchun transponirlash amali, ya'ni

$$xAx^T=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}x_ix_j.$$

Berilgan $p(x)$ funksiya zichlik funksiyasi bo'lishiga

$$\int_{R^d}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)A(x-a)^T\right\}dx=\frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{|A|}}$$

tenglikdan (ko'p o'lchovli Puasson integrali) ishonch hosil qilamiz. Demak, bitta sonli vektor a va musbat aniqlangan simmetrik matritsa ζ^2 dan iborat (a,ζ^2) juftlik, (4) formula orqali d-o'lchovli normal taqsimotni aniqlar ekan.

§ 3.8. Diskret tipdagi tasodifiy vektorlar

Ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ da aniqlangan $\xi=\xi(\omega)$ d-o'lchovli tasodifiy vektor diskret tipga tegishli deb hisoblanadi, agar uning qiymatlari chekli yoki sanoqli to'plamni tashkil qilsa:

$$\Omega\xrightarrow{\xi}A\subseteq R^d,\qquad A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\},$$

$$a_1=(a_{11},a_{12},...,a_{1d}),...,a_n=(a_{n1},...,a_{nd}),...$$

Quyidagi ehtimolliklar

$$p_1=p(\xi=a_1),\quad p_2=p(\xi=a_2),..,\ p_n=p(\xi=a_n),...$$

$\xi=(\xi_1,...,\xi_d)$ tasodifiy vektorning taqsimoti deyiladi (vektorlarning tengligi ularning mos koordinatalari teng deb tushuniladi).

Diskret tipdagi tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x)=F(x_1,...,x_d)=\sum_{\{n,a_n<x\}}p_n$$

yig'indi ko'rinishda bo'ladi va $\{a_n<x\}$ tengsizlik $\{a_{n1}<x_1,...,a_{nd}<x_d\}$ tengsizliklar sistemasini tashkil qiladi. Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, diskret tipdagi tasodifiy miqdorlarni o'rganishni uning taqsimot funksiyasi

$F_\xi(x)$ orqali olib borishdan ko'ra, bevosita $\{p_n, n \geq 1\}$ ehtimolliklar orqali bajarish qulay hisoblanadi. Endi nazariy va amaliy jihatdan muhim diskret taqsimotlardan biri-polinomial taqsimotni ko'raylik. Vektor P ning koordinatalari

$$P=(p_1,...,p_d), \quad p_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{d} p_j = 1$$

munosabatlar bilan aniqlangan bo'lsin. Bu vektorni tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan $A_1,...,A_d$ hodisalarning ehtimolliklari deb tushunish mumkin. $\left(A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{\alpha} A_j = \Omega\right)$. Butun qiymatli tasodifiy vektor $v=(v_1,...,v_d)$ polinomial taqsimotga ega deymiz, agar

$$k=(k_1,k_2,...,k_d), \quad \sum_{j=1}^{d} k_j = n$$

bo'lganda, ehtimollik

$$P(v=k)=\frac{n!}{k_1!...k_d!}p_1^{k_1}...p_d^{k_d} \qquad (5)$$

formula orqali aniqlansa. Keltirilgan ta'rif korrektli, chunki

$$\sum_{\left\{k;\sum_{j=1}^{\alpha} k_j = n\right\}} P(v=k)=(p_1+...+p_d)^n=1$$

va (5) ehtimollik $(p_1+...+p_d)^n$ polinomni $p_1,...,p_d$ larning darajalari bo'yicha yoyilmasining "k–" hadiga teng.

Tasodifiy vektor v ning koordinatalari v_j larga n ta o'tkazilgan bog'liqsiz tajribada A_j hodisaning ro'y berishlar soni degan ma'no berish mumkin (bu yerda $p_j = P(A_j)$). Agar $d=2$ bo'lsa, $p=(\alpha, 1-\alpha)$ α biror A hodisaning ro'y berish, $1-\alpha$ ro'y bermaslik ehtimolliklari bo'ladi va tajribalarning polinimial sxemasi Bernulli sxemasiga aylanadi. Bu holda, (5) taqsimot

$$P(v=k)=\frac{n!}{k!...(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

binomial taqsimotni ifoda etadi.

Polinomial taqsimot bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligida $A_1,...,A_s$ $(s \geq 2)$ hodisalarning har biri necha marta ro'y berganini ifoda etuvchi tasodifiy vektorning taqsimoti bo'ladi. Haqiqatan ham, A_j hodisaning n ta tajribada ro'y berishlar sonini $S_n^{(i)}$ desak,

$$S_n = \left(S_n^{(1)},...,S_n^{(d)}\right)$$

tasodifiy vektorning taqsimoti

$$P(S_n = k), \qquad k=(k_1,...,k_d), \ \sum_{j=1}^{d} k_j = n$$

(5) formula bilan aniqlanadi.

§ 3.9. Tasodifiy miqdorlar va hodisalar sistemalarining bog'liqsizligi

1. Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdorlar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bog'liqsiz deyiladi, agar

$$P(\xi_1 \in B_1,...,\xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)\cdot...\cdot P(\xi_n \in B_n) \qquad (1)$$

tenglik to'g'ri chiziqdagi (R) har qanday Borel to'plamlari $B_1,...,B_n$ uchun bajarilsa.

Tenglik (1) ning chap tomonidagi ehtimollik

$$P(\xi_1 \in B_1,...,\xi_n \in B_n)$$

$\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti deyiladi. Demak, ta'rifdan kelib chiqadiki, $\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz deyiladi, agar ularning birgalikdagi taqsimoti har bir tasodifiy miqdor taqsimotlarining ko'paytmasiga teng bo'lsa.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari uchun bog'liqsizlik tushunchasini kiritish mumkin. Ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ da aniqlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ bog'liqsiz deyiladi, agar har qanday chekli $n \geq 1$ uchun (1) tenglik bajarilsa. Demak, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining bog'liqsizligi, shu ketma-ketlikdagi chekli sondagi tasodifiy miqdorlarning bog'liqsiz bo'lishini bildiradi.

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligini o'rganishda quyidagi teorema ahamiyatli bo'ladi.

Teorema 1. Tasodifiy miqdorlar $\xi_1,...,\xi_n$ bog'liqsiz bo'ladi shu holda va faqat shu holdaki, agar

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n) = F_{\xi_1}(x_1)\cdot...\cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

tenglik bajarilsa.

Bu teoremaning isboti shu paragrafda keyinroq keltiriladi.

Agar $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimoti absolut uzluksiz bo'lsa, uning komponentlari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lishi belgisi quyidagi teoremada keltiriladi.

Teorema 2. Tasodifiy miqdorlar $\xi_1,...,\xi_n$-larning mos zichlik funksiyalari $f_1(x),...,f_n(x)$ mavjud bo'lsin. Bu holda, $\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsiz bo'lishi uchun $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ vektorning

$$f(x_1,...,x_n)=f_1(x_1)\cdot...\cdot f_n(x_n)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi zichlik funksiyasi mavjud bo'lishi yetarli va zaruriy shart.

Bu teoremadan kelib chiqadiki, ξ vektorning zichlik funksiyasi, uning komponentlari zichlik funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lsa, $\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lar ekan. Masalan, normal taqsimlangan $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorning komponentlari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lishi uchun A va σ^2 matritsalar diagonal ko'rinishida, ya'ni

$$a_{ij}=0,\ \sigma_{ij}=0,\ i\neq j$$

tengliklar bajarilishi yetarli va zaruriy shartlar bo'ladi.

Teoremaning isboti. Agar ξ_i tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_{\xi_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{x_i} f_i(u_i)\,du_i$$

bo'lib, $\xi_1,...,\xi_n$ lar bog'liqsiz bo'lsa, bu tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot...\cdot F_{\xi_n}(x_n)=$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1} f_1(u_1)du_1\cdot...\cdot\int_{-\infty}^{x_n} f(u_n)du_n=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1)...f(u_n)du_1...du_n$$

Demak,

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)=f_{\xi_1}(u_1)\cdot...\cdot f_{\xi_n}(u_n).$$

Agar aksincha,

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1)...f_n(u_n)du_1...du_n$$

bo'lsa,

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot...\cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi tasodifiy miqdorlar diskret bo'lgan holni ko'raylik. Tasodifiy vektor

$$\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$$

kompenentlari butun qiymatlar qabul qiladi deb faraz qilaylik. U holda bu tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun

$$P(\xi_1=k_1,...,\xi_n=k_n)=P(\xi_1=k_1)\cdot...\cdot P(\xi_n=k_n)$$

tenglikni hamma $k_1,...,k_n$ lar uchun bajarilishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Bu fikrni isboti qiyinchiliklarga duch kelmaydi va uni o'quvchiga havola qilish mumkin.

Bog'liqsizlik tushunchasi ehtimolliklar nazariyasi uchun juda muhim hisoblanib, undan doim foydalanishga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, biz qandaydir jarayonning stoxastik modelini tuzmoqchi bo'laylik. Buning uchun shu jarayonga mos ehtimollik fazosini tuzib, unda aniqlangan tasodifiy miqdorlar majmuasi bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Lekin tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz yoki bog'liq bo'lishini tekshirishni qanday amalga oshirish masalasi murakkabligicha qolaveradi.

2. Hodisalar sistemasining bog'liqsizligi.

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi, hodisalarning $\sigma-$algebralari bog'liqsizligi tushunchasi bilan chambarchas bog'langan.

Ehtimollik fazosi $(\Omega,\Im,P)$ da $\Im_1$ va $\Im_2$ hodisalar sistemasi berilgan bo'lsin. $\left(\Im_1\subset\Im,\ \Im_2\subset\Im\right)$.

Ta'rif 2. $\Im_1$ va $\Im_2$ hodisalar sistemasi bog'liqsiz deyiladi, agar har qanday $A_1\in\Im_1$ va $A_2\in\Im_2$ hodisalar uchun

$$P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Quyidagi ta'rifda hodisalar sistemasi ketma-ketligining bog'liqsizlik tushunchasi keltiriladi.

Ta'rif 3. Hodisalar sistemasi ketma-ketligi $\left\{\Im_n, n\geq 1\right\}$ bog'liqsiz deyiladi, agar butun sonlarning har qanday $n_1,...,n_k$ majmuasi uchun $\left(\Im_n\subset\Im,\ n\geq 1\right)$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j}\right)=\prod_{j=1}^{k} P\left(A_{n_j}\right),\qquad A_{n_j}\in\Im_{n_j},\quad j=\overline{1,k}$$

tenglik bajarilsa.

Masalan, bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligida turli xil tajribalarga mos keluvchi hodisalar $\sigma-$algebralari bog'liqsiz bo'ladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, hodisalar algebrasi ketma-ketligining bog'liqsizligi, shu ketma-ketlikning chekli sondagi hodisalar majmualarining bog'liqsizligi bilan aniqlanadi.

Ma'lumki, hodisalarning har qanday $\sigma-$ algebrasi $\mathfrak{I}_0$ ni, hodisalarning qandaydir algebrasi $\mathfrak{I}_{0a}$ yuzaga keltirgan deb tushunish mumkin va bu $\mathfrak{I}_0 = \sigma\left(\mathfrak{I}_{0a}\right)$ ko'rinishda yoziladi.

Shu munosabat bilan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 3. Agar hodisalar algebralari $\mathfrak{I}_{1a}$ va $\mathfrak{I}_{2a}$ bog'liqsiz bo'lsa, ular yuzaga keltirgan $\sigma-$algebralar $\sigma\left(\mathfrak{I}_{1a}\right)$ va $\sigma\left(\mathfrak{I}_{2a}\right)$ ham bog'liqsiz bo'ladi.

3. Kiritilgan tushunchalar orasidagi munosabatlar.

Ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ da $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor yoki tasodifiy vektor aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 4. $\mathfrak{I}$ dagi hodisalarning $\sigma-$algebrasi

$$\mathfrak{I}_\xi = \{A;\ A = \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(w) \in B\}, B - \text{Borel to'plami}\}$$

ξ tasodifiy miqdor yuzaga keltirgan $\sigma-$algebra deb ataladi va $\mathfrak{I}_\xi = \sigma(\xi)$ deb belgilanadi.

$\mathfrak{I}_\xi$ hodisalar sistemasi σ- algebra tashkil qilishini bevosita ko'rish mumkin. Haqiqatan ham, A to'plamlar ustida bajarilgan amallarga, $B = \xi(A)$ Borel to'plamlari ustida bajarilgan amallar mos keladi.

Masalan, to'g'ri chiziqdagi (R, B, P) ehtimollik fazosini ko'raylik. ($\Omega = R$, $\mathfrak{I} = B-$to'g'ri chiziqdagi Borel to'plamlari $\sigma-$algebrasi). Agar

$$\xi = \xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ 1, & \omega \geq 0 \end{cases}$$

bo'lsa, $\mathfrak{I}_\xi = \sigma(\xi) = \{R, \varnothing, \{\omega < 0\}, \{\omega \geq 0\}\}$ bo'lib, ξ tasodifiy miqdor B dan keltirilgan 4 ta to'plamdan boshqa to'plam "ajratolmaydi". Lekin ξ $\sigma-$algebra $\sigma(\xi)$ dan "boyroq" bo'lgan har qanday $\sigma-$algebra B_1 ga nisbatan o'lchovli bo'ladi $\left(\sigma(\xi) \subset B_1 \subset B\right)$. Agar $\xi = \xi(\omega) = [\omega]$ (ω ning butun qismi) bo'lsa, $\mathfrak{I}_\xi = \sigma(\xi)$ $\sigma-$algebra, $\left\{\omega : k \leq \omega < k+1,\ k = \ldots -1, 0, 1, \ldots\right\}$ ko'rinishdagi hodisalardan iborat bo'ladi. Yana izohlab o'tamizki, $\xi(\omega) = \varphi(\omega)$ bo'lib, $\varphi(\cdot)$ monoton funksiya va $\varphi(-\infty) = -\infty$, $\varphi(\infty) = \infty$ bo'lsa, $\sigma(\xi) = B$ bo'ladi. Keltirilgan fikrlarni taqqoslagan holda, quyidagi qiziqarli bo'lgan faktni eslatib o'tamiz: $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ehtimollik fazosida ξ va η tasodifiy miqdorlar aniqlangan bo'lsin. Agar ξ tasodifiy miqdor $\sigma(\eta)-\sigma-$algebraga nisbatan o'lchovli bo'lsa bu tasodifiy miqdorlar orasida funksional bog'liqlik mavjud bo'ladi, ya'ni shunday Borel funksiyasi $g(\cdot)$ mavjud bo'lib, $\xi=g(\eta)$ bo'ladi.

Endi tasodifiy miqdorlar va hodisalarning $\sigma-$algebrasi orasidagi bog'liqsizlikga oid munosabatga o'taylik: tasodifiy miqdorlar $\xi_1,\dots,\xi_n$ bog'liqsiz bo'ladi shu holda va faqat shu holdaki, agar $\sigma(\xi_1),\dots,\sigma(\xi_n)$ $\sigma-$algebralar bog'liqsiz bo'lsa. Bu bog'liqsizlik ta'rifidan kelib chiqadi.

Endi teorema 1 ning isbotini keltirish mumkin. Birinchi navbatda $[\cdot,\cdot)$ ko'rinishdagi intervallarning chekli sondagi yig'indilari (bu intervallarning chegaralari cheksiz uzoqlashgan nuqtalarda bo'lishi mumkin) sistemasi $\mathfrak{I}_0$ algebra tashkil qilishini va $\sigma(\mathfrak{I}_0)=B$ bo'lishini eslatib o'tamiz.

Teorema 1 ning isboti. Bog'liqsizlikning (1) tenglik orqali berilgan ta'rifidan

$$B_1=(-\infty,x_1),\dots,B_n=(-\infty,x_n)$$

bo'lganida,

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n) \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, teorema 1 ning isboti uchun (2) tenglik bajarilganda,

$$\sigma(\xi_1),\dots,\sigma(\xi_n)$$

$\sigma-$algebralar bog'liqsiz bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Soddalik uchun $n=2$ deb, hisoblab Δ va $\wedge$ lar orqali mos ravishda $[x_1,x_2)$ va $[y_1,y_2)$ yarim intervallarni belgilaymiz. Bu holda quyidagi tengliklarni yozish mumkin.

$$P\left(\xi_1\in\Delta,\ \xi_2\in\Lambda\right)=P(\xi_1\in[x_1,x_2),\xi_1\in[y_1,y_2))=$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)=$$
$$=\left(F_{\xi_1}(x_2)-F_{\xi_1}(x_1)\right)\left(F_{\xi_2}(y_2)-F_{\xi_2}(y_1)\right)=P(\xi_1\in\Delta)\cdot P(\xi_2\in\Lambda)$$

Demak, Δ_i, $i=1,\dots,n$ va Λ_j, $j=1,\dots,m$ ikkita kesishmaydigan intervallar sistemasi bo'lsa,

$$P\left(\xi_1\in\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i,\ \xi_2\in\bigcup_{j=1}^{m}\Lambda_j\right)=\sum_{i,j}P\left(\xi_1\in\Delta_i,\ \xi_2\in\Lambda_j\right)=$$

$$=\sum_{i,j}P(\xi_1\in\Delta_i)\cdot P\left(\xi_2\in\Lambda_j\right)=P\left(\xi_1\in\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i\right)\cdot P\left(\xi_2\in\bigcup_{j=1}^{m}\Lambda_j\right) \qquad (3)$$

tengliklarni yozish mumkin.

Agar

$$\mathcal{J}_a = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \ n = 1,2,\ldots \right\}$$

deb olsak, $\mathcal{J}_a$ sistema algebra tashkil qiladi.

O'z navbatida $\{\omega;\ \xi(\omega) \in A\} = \xi^{-1}(A)$ hodisalar ham $A \in \mathcal{J}_a$ ho'lganda, algebra tashkil qiladi va uni $a(\xi)$ deb belgilaymiz. Isbotlangan tenglik (3) dan kelib chiqadiki $a(\xi_1)$ va $a(\xi_2)$ algebralar bog'liqsiz bo'ladi. Yuqorida biz ikkita σ – algebralar bog'liqsiz bo'lishligi uchun, ularning yuzaga keltiruvchi algebralar bog'liqsiz bo'lishligi yetarli va zaruriy shartlar ekanligini aytib o'tgan edik. Bundan esa $\sigma(\xi_1) = \sigma(a(\xi_1))$ va $\sigma(\xi_2) = \sigma(a(\xi_2))$ σ – algebralar bog'liqsiz bo'lishligi kelib chiqadi.

Quyidagi faktni teorema ko'rinishida keltiramiz.

Teorema 4. Tasodifiy miqdorlar ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz bo'lib, φ_1 va φ_2-Borel funksiyalari bo'lsin, u holda $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1)$, $\eta_2 = \varphi_2(\xi_2)$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Isbot. Quyidagi

$$P\big(\varphi_1(\xi_1) \in B_1,\ \varphi_2(\xi_2) \in B_2\big) = P\big(\varphi_1(\xi_1) \in B_1\big) \cdot P\big(\varphi_2(\xi_2) \in B_2\big) \quad (4)$$

tenglikni isbot etish talab qilinadi.

Ko'rilayotgan $\varphi_i(x)$ funksiyalar o'lchovli ekanligidan

$$\{x : \varphi_i(\xi_i) \in B_i\} = \varphi_i^{-1}(B_i) = B_i^*$$

to'plamlar yana Borel to'plamlari bo'lib qolaveradi.

Shuning uchun ham

$$\{\omega;\ \varphi_i(\xi_i) \in B_i\} = \{\omega : \xi_i(\omega) \in B_i^*\}$$

va (4) multiplikativ tenglik ξ_i tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligidan kelib chiqadi.

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ berilgan bo'lsin va unda

$$\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m, \qquad k \leq m \leq \infty$$

qism ketma-ketlikni ko'raylik. ($m = \infty$ bo'lsa, $\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots$). Tasodifiy miqdorlar

$\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m$ yuzaga keltirgan

$$\sigma(\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m)$$

σ – algebra deb,

$$\bigcap_{j=k}^{m} A_j,\ A_j \in \sigma(\xi_j),\ j=\overline{k,m}$$

hodisalar sistemasi yuzaga keltirgan σ – algebra tushuniladi.

Teorema 5. Har qanday $k \ge 1$ uchun $\sigma(\xi_{n+k})$ σ – algebra, $\sigma(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ σ – algebraga bog'liq bo'lmaydi.

Isbot. Quyidagi

$$B=\bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \ A_i \in \sigma(\xi_i),\ i=\overline{1,n},$$

hodisalar sistemasi yuzaga keltirgan σ – algebra $\sigma(B)$ ni ko'ramiz. Teoremani isbotlash uchun $\sigma(B)$ va $\sigma(\xi_{n+k})$ σ – algebralar bog'liqsiz bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Agar $A \in \sigma(\xi_{n+k})$ bo'lsa, σ – algebralar

$$\sigma(\xi_1),\sigma(\xi_2),\dots,\sigma(\xi_n),\sigma(\xi_{n+k})$$

bog'liqsiz ekanligidan

$$P(AB)=P(A)\cdot P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n)=P(A)\cdot P(B)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek,

$$P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cdot A\right]=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cdot P(A)$$

munosabatning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz (yig'indi $\bigcup A_i$ ni o'zaro kesishmaydigan $\sigma(B)$ ning elementlari yig'indisi ko'rinishida yozish yetarli). Shunday qilib, $\sigma(B)$ σ – algebra $\sigma(\xi_{n+k})$ga bog'liq emas, demak, $\sigma(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ σ – algebra $\sigma(\xi_{n+k})$ dan bog'liqsiz bo'ladi.

Tushunish qiyin emaski, keltirilgan xulosalarni $\xi,\xi_2,\dots$ tasodifiy vektorlarga nisbatan takrorlash mumkin va ularning bog'liqsizligini

$$P(\xi_1 \in B_1,\dots,\xi_n \in B_n)=\prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \in B_i)$$

tengliklar bilan aniqlaymiz. Bu yerda B_i-ko'p o'lchovli Borel to'plamlari.

§ 3.10. Ehtimolliklar nazariyasida foydalaniladigan integrallar

1. O'lchov bo'yicha abstrakt Lebeg integrali.

Yuqorida biz Kolmogorov aksiomalari orqali ehtimollik fazosi tushunchasini kiritgan edik. Bu tushuncha har qanday stoxastik tajriba uchun matematik model bo'lishini (eslatib o'tamizki, stoxastik tajriba – bu natijalarini oldindan aytib berish mumkin bo'lmagan tajriba) ko'rgan edik.

Ehtimollik fazosi berilgan deb ayta olish uchun, chegaralangan va sanoqli additivlik xossasiga ega bo'lgan o'lchov berilganligi yetarli bo'ladi. Bu esa $(\Omega,\mathfrak{I},P)$, ehtimollik fazosida aniqlangan har qanday $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor va to'g'ri chiziq R da aniqlangan $g(\cdot)$ Borel funksiyasi uchun P o'lchov bo'yicha

$$\int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega) \qquad (1)$$

Lebeg abstrakt integralini kiritish imkonini beradi. (Eslatib o'tamizki R da aniqlangan $g(x)$ funksiyani Borel funksiyasi deyiladi, agar $\{x;\, g(x)<t\}$ to'plam har qanday t haqiqiy son uchun Borel to'plami bo'lsa).

Lebeg integrali (1) ning ta'rifi, uning xossalari o'quvchiga ma'lum deb hisoblanadi. Yetarli tayyorgarlikka ega bo'lmagan o'quvchilar uchun kitobning oxirgi qismida keltirilgan ilova bilan tanishib chiqishni tavsiya etamiz (u yerda (1) integralga tegishli bo'lgan barcha ma'lumotlar keltirilgan). Ammo uzluksiz yoki diskret tipdagi tasodifiy miqdorlarni o'rganish bilan chegaralanib qoladigan o'quvchi uchun eslatib o'tilgan ilova bilan tanishish zaruriyati yuzaga kelmaydi, chunki bunday tasodifiy miqdorlar uchun (1) integral to'g'ri chiziqdagi oddiy Riman integraliga yoki chekli yig'indi, sonli qatorlarning yig'indisiga aylanadi. Ehtimolliklar nazariyasida quyida aniqlangan Stiltes integrali ham muhim rol o'ynaydi. Bu integral mohiyatini tushunish uchun uni quyidagicha izohlab o'tamiz: ma'lumki har qanday tasodifiy miqdor $\xi(\omega)$ R da

$$P_\xi(B)=P\left(\xi^{-1}(B)\right)=P(\xi\in B), \qquad B\in B(R)$$

tenglik bilan aniqlanadigan $P_\xi(\cdot)$ o'lchovni yuzaga keltiradi. Xususan

$$P_\xi([x,y))=P(x\le\xi<y)=F_\xi(y)-F_\xi(x).$$

Ehtimollik o'lchovi $P_\xi(\cdot)$ berilgan $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb ataladi va bu o'lchov orqali (1) integralni

$$\int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega)=\int_{R} g(x)P_\xi(dx)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu tenglikni (1) da $x=\xi(\omega)$ almashtirish orqali olingan deb tushunish mumkin va uning o'ng tomonidagi integralni $F_\xi(x)$ taqsimot funksiyasi orqali

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x) \qquad (2)$$

ko'rinishda yozamiz (Bunda taqsimot funksiya tasodifiy miqdorning taqsimotini bir qiymatli ravishda aniqlash hisobga olinadi).

Keltirilgan ko'rinishda aniqlangan (2) integral $g(x)$ funksiyaning $F_\xi(x)$ taqsimot bo'yicha Stiltes integrali deb ataladi.

2. Stiltes integrali. Endi (2) integralning konstruktiv tusdagi ta'rifini keltiramiz. Agar $g(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, (2) integralni odatdagidek integral yig'indilarining limiti ko'rinishida aniqlash mumkin: chekli oraliq $[a,b)$ ni $x_0, x_1, \ldots, x_N$ bo'linish nuqtalari orqali

$$[a,b) = \bigcup_{k=0}^{N-1} [x_k, x_{k+1}). \qquad x_0 = a,\ x_N = b$$

ko'rinishda yozib

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} g(\widetilde{x_k})\left[F(x_{k+1}) - F(x)\right], \qquad (3)$$

bu tenglikni $g(x)$ uzluksiz funksiyaning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'yicha Stiltes integrali deb e'lon qilish mumkin (agar (3) tenglikda takroriy limitlar mavjud bo'lsa). Bu yerda $\widetilde{x_k} \in \Delta_k = [x_k, x_{k+1})$ va bo'linish nuqtalari $x_0, x_1, \ldots, x_N$ (har qanday N uchun unga mos ravishda bu nuqtalar turlicha) shunday xossaga egaki,

$$\max_{0\le k\le N} (x_{k+1} - x_k) \to 0, \quad N \to \infty.$$

Qayd qilib o'tish kerakki, (3) tenglikda takroriy limitlarning qiymati $[a,b)$ oraliqni bo'lish usuliga bog'liq bo'lmaydi, demak, (3) tenglik bilan aniqlangan Stiltes integralini ta'rifi korrektlik xususiyatiga ega bo'ladi.

Kitobning oxirida keltirilgan Lebeg integralining ta'rifiga asosan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{R} g(x)P_\xi(dx) =$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \lim_{N\to\infty} \int_a^b g_N(x)P_\xi(dx) \qquad (4)$$

va bu yerda $g_N(x)$-berilgan $g(x)$ funksiyaga monoton yaqinlashadigan oddiy funksiyalar (ya'ni chekli sondagi qiymatlar qabul qiluvchi) ketma-ketligi. Eslatib o'tamizki, (4) tenglikdagi integralning qiymati $g_N(x)$ funksiyaning ko'rinishiga bog'liq bo'lmaydi.

Keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, (3) va (4) tenglikdagi integrallar chekli $[a,b)$ oraliqda ustma-ust tushishini isbotlash yetarli bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} g(\widetilde{x_k})\left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right] = \int_a^b g(x)dF(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_a^b g_N(x)P_\xi(dx). \qquad (5)$$

Haqiqatan ham, har qanday uzluksiz funksiya $g(x)$ uchun Lebeg integrali

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)P_\xi(dx)$$

mavjud ekanligidan uning ta'rifidagi $g_N(x)$ funksiya sifatida ikkita sodda funksiyalar ketma-ketliklari g_N^* va g_N^{**} larni olish mumkinki, bu funksiyalar Δ_k larda o'zgarmas bo'lib, bu oraliqlarda

$$g^*(x_k)=\sup_{x\in\Delta_k} g(x), \quad g^{**}(x_k)=\inf_{x\in\Delta_k} g(x)$$

tengliklar bilan aniqlanadi. (3) tenglikdagi g_N^* va g_N^{**} funksiyalar orqali aniqlangan ikkita ketma-ketlik turli tomondan (chapdan va o'ngdan) bitta umumiy limitga intiladi va bu limitning qiymati

$$\int_a^b g(x)dF(x)$$

Lebeg integraliga teng bo'ladi. Lekin Δ_k larga tegishli bo'lgan har qanday $\widetilde{x_k}$ lar uchun $(\widetilde{x_k}\in\Delta_k)$

$$g^{**}(x_k)\le g(\widetilde{x_k})\le g^*(x_k).$$

Demak, (3) tenglikdagi integral yig'indi uchun

$$\int_a^b g_N^{**}(x)dF(x)\le\sum_{k=0}^{N} g(\widetilde{x_k})[F(x_{k+1})-F(x_k)]\le$$

$$\le\int_a^b g_N^*(x)dF(x)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi va ular (5) tenglikni to'g'ri ekanligini isbotlaydi.

Umumiy holda integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$$

mavjud deb hisoblanadi, agar $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dF(x)<\infty$ bo'lsa, Stiltes integralining ta'rifidan oson ko'rinadiki, zinapoyasimon (diskret taqsimot) funksiyalari uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)=\sum_k g(x_k)(F(x_k+0)-F(x_k))=$$

$$=\sum_k g(x_k)P(\xi=x_k)$$

va bu yerda $x_1,x_2,...,-F(x)$ uzilish yoki sakrash nuqtalari. Agar $F(x)$ taqsimot

$$\int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

ko'rinishida bo'lsa, $p(x)$ va $g(x)$ funksiyalar Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, Stiltes integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

ya'ni Stiltes integrali oddiy Riman integraliga aylanadi.

Yana bir marta qayd qilib o'tamizki, Stiltes va Lebeg integrallari bilan yaxshi tanish bo'lmagan o'quvchi integralning oxirgi 2 ta interpretatsiyasini hisobga olgan holda, kitobni o'qishni davom ettirishi mumkin, chunki amaliyotda va nazariyada ko'p uchraydigan taqsimotlar yo diskret, yoki uzluksiz tipda bo'ladilar.

Endi (3), (4) tengliklar bilan aniqlangan Stiltes integralining boshqa xossalarini ko'raylik. Agar $g(x)$ funksiya chekli variatsiyaga ega bo'lsa,

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b gdF = \int_0^c gdF + \int_c^b gdF,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g_1 + g_2)dF = \int_{-\infty}^{\infty} g_1 dF + \int_{-\infty}^{\infty} g_2 dF,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cgdF = c\int_{-\infty}^{\infty} gdF(x), \qquad c - const.$$

$$\int_a^b gdF = gF\Big|_a^b - \int_a^b Fdg$$

Misol va masalalar

1. Qutida bir xil o'lchamli 7 ta shar bo'lib, 4 tasi oq, qolganlari esa qora rangda. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. ξ diskret tasodifiy miqdor – olingan oq sharlar soni bo'lsa, ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javob:

ξ:	0	1	2	3
P:	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

2. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ:	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
P:	0,2	0,7	0,1

$\eta = \sin\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javob:

ξ:	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
P:	0,2	0,7	0,1

3. Avtobuslar 5 minut oraliq bilan qatnaydilar. Bekatda avtobus kutish vaqti ξ tekis taqsimlangan deb, $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping. Kutish vaqti 3 minutdan ortiq bo‘lish ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } F(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0,\\ 0{,}2x, & agar\ 0<x\le 5,\\ 1, & agar\ x>5.\end{cases}$$

$$P(\xi>3)=0{,}4.$$

4. O‘yin kubigi ikki marta tashlanmoqda. Tasodifiy miqdorlar: X – «6» raqamlar soni, Y - juft raqamlar soni bo‘lsin.

A) (X,Y) tasodifiy vektorning taqsimot qonunini toping.

B) X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liq yoki bog‘liqsiz ekanligini aniqlang.

C) Har bir tasodifiy miqdor taqsimot qonunlarini toping.

D) $P(X\ge Y)$ ehtimollikni hisoblang.

Javob: A)

x_i \ y_i	0	1	2	$P(X=x_i)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

B) X va Y bog‘liq; D) $P(X\ge Y)=\frac{4}{9}$;

5. Tasodifiy vektor (X,Y) ning zichlik funksiyasi quyidagicha:

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y), & agar\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1.\\ 0, & qolgan\ hollarda\end{cases}$$

A) O‘zgarmas son c ni va $P\{X+Y<1\}$ hisoblang.

B) X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liq yoki bog‘liqsiz ekanligini aniqlang.

C) X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini toping.

Javob: A) $c=1$, $P\{X+Y<1\}=\frac{1}{3}$;

B) $f_X(x)=\begin{cases}0, & agar\ 0\le x\ va\ x>1,\\ x+\frac{1}{2}, & agar\ 0<x\le 1,\end{cases}$

X va Y bog‘liq.

C) $F_X(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0\\ \frac{1}{2}x(x+1), & agar\ 0<x\le 1\\ 1, & agar\ x>1\end{cases}$

6. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_X(x)$ bo‘lsa, quyidagi tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyalarini toping:

$$Y=9x^2-4,\ Z=|x-1|,\ V=e^{-2x}$$

$$\text{Javob: } F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le -4,\\ F_X\left(\frac{\sqrt{4+y}}{3}\right)-F_X\left(-\frac{\sqrt{4+y}}{3}\right), & -4<y.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ F_X(1+z)-F_X(1-z), & 0<z.\end{cases}$$

$$F_V(v)=\begin{cases}0, & v\le 0,\\ 1-F_X\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{v}\right), & 0<v\le 1,\\ 1, & 1<v\end{cases}$$

IV BOB. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

IV bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.*
- *Shartli matematik kutilmalar.*
- *Tasodifiy miqdorlar funksiyalarining matematik kutilmasi.*
- *Tasodifiy miqdorlar dispersiyasi.*
- *Korrelatsiya koeffisiyenti va yuqori tartibli momentlar.*
- *Momentlar uchun tengsizliklar*

haqida tasavvurlarga ega bo'linadi;

- *Tasodifiy miqdorlarni sonli xarakteristikalarining ta'riflarini.*
- *Shartli matematik kutilmalar uchun to'la ehtimollik formulasini.*
- *Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisi dispersiyasining xossalarini.*
- *Korrelatsiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorlarning bog'liqlik tavsifi ekanligini*

bilish va amalda qo'llay olishi;

- *Matematik kutilma va dispersiyaga oid misol va masalalar yechishni.*
- *Momentlar uchun Koshi – Shvarts tipidagi tengsizliklarni o'rinli bo'lishini.*
- *Tasodifiy miqdorlar uchun korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblashni.*
- *Tasodifiy yig'indilar uchun Vald ayniyatini isbotlarini*

o'rganib olish mumkin.

§ 4.1. Matematik kutilma

Ta'rif: Ehtimollik fazosi $(\Omega, \Im, P)$ da aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

songa aytiladi. Demak, $E\xi$ ehtimollik fazosi $(\Omega, \Im, P)$ da aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ o'lchovli funksiyaning Lebeg integrali bo'lar ekan. (Lebeg integrali bilan tanish bo'lmagan o'quvchi kitobning ilovasida bayon etilgan material bilan tanishib chiqishi mumkin). $E\xi$ ni tasodifiy miqdor ξ ning o'rta qiymati deb ham aytiladi va uning uchun

$$E\xi = \int_{R} x P_{\xi}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $P_\xi(\cdot)$-tasodifiy miqdorning taqsimoti, $F_\xi(x)$-taqsimot funksiyasi.

Keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki $E\xi$ mavjud bo'ladi, agar $E|\xi| < \infty$ bo'lsa va uning mavjud bo'lishi yoki bo'lmasligi taqsimot "dumi" $1-F_\xi(x)$ ning cheksizda (x ning katta qiymatlarida) kichikligining tartibiga bog'liq. Masalan, x ning katta qiymatlarida $1-F_\xi(x) > \frac{1}{x}$ bo'lsa, $E\xi$ mavjud bo'lmaydi.

Aytib o'tilgan ilovadan ma'lumki, agar $F_\xi(x) = F(x)$ taqsimot diskret tipda bo'lsa, (ya'ni $F(x)$ "zinopayasimon" funksiya bo'lsa, (1) dagi Stiltes integrali yig'indiga aylanadi va

$$E\xi = \sum_n a_n P(\xi = a_n).$$

Agar $F(x)$ zichlik funksiya $p(x)$ ga ega bo'lsa (ya'ni $F(x)$ uzluksiz tipdagi taqsimot funksiyasi bo'lsa),

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx.$$

Demak, $E\xi$ to'g'ri chiziqdagi birlik massa taqsimoti $F(x)$ ning "og'irlik markazining" koordinatasi bo'lar ekan (Oxirgi jumlada matematik kutilma $E\xi$ ning mexanik talqini keltirilgan). Bundan tashqari $E\xi$ ni $F(x)$ taqsimotning "markazi" deb ham ataladi, chunki $x = E\xi$ nuqtaning chap va o'ng tomonlarida ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari joylashgan bo'ladi.

Agar $g(x)$ to'g'ri chiziq R da aniqlangan Borel funksiyasi bo'lsa, $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdor bo'lib, uning uchun

$$Eg(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_{g(\xi)}(x).$$

Oxirgi tenglik (1) formuladan kelib chiqadi.

Endi matematik kutilmaning xossalarini keltiramiz, ular asosan integralning quyidagi xossalari bilan bir xil bo'ladi.

E1. Agar a va b lar o'zgarmas sonlar bo'lsa,

$$E(a + b\xi) = a + bE\xi$$

E2. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$, agar $E\xi_1$ va $E\xi_2$ mavjud bo'lsa.

E3. Agar $a \le \xi \le b$ bo'lsa, $a \le E\xi \le b$. $|E\xi| \le E|\xi|$ tengsizlik har doim o'rinli.

E4. Agar $\xi \ge 0$ bo'lib, $E\xi = 0$ bo'lsa, $P(\xi = 0) = 1$. Haqiqatan ham, Chebishev tengsizligiga asosan

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

E5. A hodisaning ehtimolligini matematik kutilma orqali

$$P(A) = EI(A)$$

tenglik bilan ifoda etish mumkin. Bu yerda $I(A) - A$ hodisaning indikatori $(I(A) = 1$ agar $\omega \in A$, $I(A) = 0$ aks holda).

Endi bir nechta misollar keltiramiz.

Misol 1. Bernulli sxemasi bilan bog'liq matematik kutilmalar. Agar ξ Bernulli taqsimotiga ega bo'lsa, ya'ni

$$\xi = \begin{cases} 1, & p \quad ehtimollik\, bilan, \\ 0, & q = 1 - p \ ehtimollik\, bilan \end{cases}$$

bo'lsa, u holda

$$E\xi = 0 \cdot P(\xi = 0) + 1 \cdot P(\xi = 1) = p$$

Endi Bernulli sxemasida to birinchi marta "yutuq" (1) ro'y berguncha o'tkaziladigan tajribalar ketma-ketligini ko'ramiz. Boshqacha aytganda ξ bilan bir xil taqsimlangan $\xi_1, \xi_2, \ldots$, bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketllgini

$$\eta = \min\{k \geq 1, \xi_k = 1\}$$

momentga qadar o'rganamiz. Bu tasodifiy miqdor η ning taqsimoti

$$P(\eta = k) = q^{k-1}p, \quad k \geq 1$$

bo'ladi. Demak, η – geometrik taqsimotga ega bo'lar ekan va uning uchun

$$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Agar $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ bo'lsa, $ES_n = np$. Endi $N \geq 1$ bo'lganda, quyidagi tasodifiy miqdorni aniqlaymiz:

$$\eta = \min\{k \geq 1, S_k = N\}$$

va bu tasodifiy miqdor $\{S_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlikni, N "to'siqqa" yetgan vaqti bo'ladi. Uning taqsimoti

$$P(\eta = k) = P(S_{k-1} = N-1)p.$$

Bu yerda $P(S_k = m)$ ehtimollik binomial taqsimotni tashkil etgani sababli,

$$E\eta = p\sum_{k=N}^{\infty} kC_{N-1}^{k-1}p^{N-1}q^{k-N} = \frac{p^N}{(N-1)!}\sum_{k=N}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-N+1)q^{k-N},$$

bu tenglikdagi yig'indi

$$\varphi(x) = \sum_{k=o}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

funksiyaning $x = q$ nuqtadagi N – tartibli hosilasiga teng, ya'ni

$$\sum_{k=N}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-N+1)q^{k-N} = \frac{N!}{p^{N+1}}$$

Demak,

$$E\eta = \frac{N}{p}$$

Misol 2. Tasodifiy miqdor ξ parametrlari (a, σ^2) bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsin. Bu holda,

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{a,\sigma^2}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dt + \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}du =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx + a = a$$

Shunday qilib, parametrlari (a, σ^2) bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $E\xi = a$ ekan.

Misol 3. Agar ξ tasodifiy miqdor parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsa, uning o'rta qiymati (matematik kutilmasi) $E\xi = \lambda$ bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

Misol 4. Agar ξ tasodifiy miqdor $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsa,

$$E\xi = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Yuqorida keltirilgan matematik kutilmaning E1 hossasiga asosan $[a,b]$ da tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning o'rta qiymati

$$E\xi = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Misol 5. Tasodifiy miqdor ξ zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

bo'lgan Koshi taqsimotiga ega bo'lsin. Bu holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx = +\infty.$$

Demak, bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud bo'lmas ekan.

§ 4.2. Shartli taqsimot funksiyalari va shartli matematik kutilmalar

$(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ehtimollik fazosi, B hodisa uchun $(B \in \mathfrak{I})$ uning ehtimolligi $P(B) > 0$ bo'lsin. Bu ehtimollik fazosidan yangi $(\Omega, \mathfrak{I}, P_B)$ ehtimollik fazosiga o'tamiz va undan har qanday $A \in \mathfrak{I}$ hodisa uchun uning ehtimolligini

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

tenglik bilan aniqlaymiz. Oson ko'rinadiki, P_B ehtimollik P_1, P_2, P_3 aksiomalarni qanoatlantiradi. $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor ξ $(\Omega, \mathfrak{I}, P_B)$ da ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdor ξ ning $(\Omega, \mathfrak{I}, P_B)$ dagi matematik kutilmasi uning B hodisaga nisbatan shartli matematik kutilmasi deb atalib, $E(\xi / B)$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak,

$$E(\xi / B) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P_B(d\omega).$$

va P_B ehtimollik ta'rifiga ko'ra,

$$E(\xi / B) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P_B(d\omega) = \frac{1}{P(B)} \int_{\Omega_B} \xi(\omega) P_B(d\omega \cap B) = \frac{1}{P(B)} \int_{\Omega_B} \xi(\omega) P_B(d\omega)$$

Oxirgi integralni $E\xi$ dan farqi shundaki, unda integrallash faqat $B \subset \Omega$ to'plam bo'yicha bo'ladi, xolos va uni

$$E(\xi; B) = \int_{B} \xi(\omega) P(d\omega).$$

deb belgilasak,

$$E(\xi / B) = \frac{E(\xi; B)}{P(B)}$$

tenglikni olamiz.

Oson ko'rish mumkinki, funksiya

$$F(x / B) = P_B(\xi < x) = P(\xi < x / B)$$

ξ tasodifiy miqdorning $(\Omega, \mathfrak{I}, P_B)$ fazodagi taqsimot funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif 2. $F(x / B)$ funksiyasi ξ tasodifiy miqdorning B hodisaga nisbatan shartli taqsimot funksiyasi deyiladi.

Ixtiyoriy qism σ – algebra $\mathfrak{I}_1$ $(\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I})$ B hodisadan bog'liqsiz deyiladi, agar har qanday hodisa $A_1 \in \mathfrak{I}_1$ uchun

$$P(A_1 B) = P(A_1) \cdot P(B)$$

tenglik bajarilsa. Xususan tasodifiy miqdor ξ yuzaga keltirgan σ-algebra $\sigma(\xi)$ hodisa B ga bog'liq bo'lmasa, uni B hodisadan bog'liqsiz deyiladi. Agar ξ tasodifiy miqdor B hodisaga bog'liq bo'lmasa,

$$P_B(A) = P(A)$$

tenglik har qanday $A \in \sigma(\xi)$ hodisa uchun bajariladi. Demak, bu holda

$$F(x / B) = F(x) = P(\xi < x), \quad E(\xi / B) = E\xi,$$

$$E(\xi; B) = P(B) E\xi$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar $\{B_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik hodisalarning to'la guruhini tashkil qilsa,

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi dP = \sum_{n} \int_{B_n} \xi dP = \sum_{n} E(\xi / B_n) P(B_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi va uni matematik kutilmalar uchun to'la ehtimollik formulasi deyiladi.

Misol. Faraz qilaylik, biror bir mexanizmning xizmat qilish muddati $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdor bo'lsin. Mexanizmning a vaqt davomida ishlab turgani ma'lum bo'lsa, uning yana qolgan vaqt davomida xizmat qilish ehtimolligi taqsimoti topilsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi nimaga teng?

O'z o'zidan ma'lumki qo'yilgan masalaning yechimi

$$P(\xi - a \geq x / \xi \geq a), \; E(\xi - a / \xi \geq a)$$

ifodalarni topishdan iborat bo'ladi va bunda

$$P(a) = P(\xi / a) > 0$$

deb hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan formulalarga asosan,

$$P(\xi - a \geq x / \xi \geq a) = \frac{P(x-a)}{P(a)},$$

$$E(\xi - a / \xi \geq a) = \frac{1}{P(a)} \int_0^{\infty} x dF(x+a)$$

Quyidagi holatni qayd qilib o'tish qiziqarli. Ko'p tatbiqiy masalalarda, ayniqsa bir nechta ishonchli detallardan tashkil topgan murakkab mexanizmlarning ishida ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$P(x) = 1 - F(x) = P(\xi \geq x) = e^{-2\mu x}, \ \mu > 0$$

ko'rsatkichli taqsimot deb hisoblash mumkin bo'ladi (Bunday mexanizmlar uchun elektron hisoblash qurilmalari misol bo'la oladi). Lekin, ko'rsatkichli taqsimot uchun mexanizmning qolgan vaqt davomida ham xizmat qilish ehtimolligi

$$P(\xi - a \geq x / \xi \geq a) = \frac{P(x+a)}{P(a)} = \frac{e^{-\mu(x+a)}}{e^{-\mu a}} =$$

$$= e^{-\mu x} = P(x) \qquad (1)$$

yangi (ishlamagan) mexanizmning xizmat qilish muddati taqsimoti bilan bir xil bo'ladi. Ko'rsatkichli taqsimotning oxirgi jumlasida keltirilgan xossasi xizmat muddati mexanizmning kelgusidagi ishiga ta'sir etmasligini bildiradi va uni

$$P(x+a) = P(x) \cdot P(a) \qquad (2)$$

funksional tenglama ko'rinishida ifoda etish mumkin. O'z navbatida, (2) funksional munosabat faqat va faqat (1) ko'rsatkichli taqsimot uchun bajariladi, xolos.

§ 4.3. Tasodifiy miqdorlar funksiyalarining matematik kutilmalari

Biror ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ da aniqlangan tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi $F(x)$, $g(x)$ esa, R da aniqlangan Borel funksiyasi (ya'ni har qanday Borel to'plami uchun $g^{-1}(B) = \{x : g(x) \in B\}$ yana Borel to'plami) bo'lsa, $g(\xi)$ tasodifiy miqdor bo'ladi. Quyidagi mulohazalardan matematik kutilma $Eg(\xi)$ ni hisoblash uchun, $g(\xi)$ ni taqsimot funksiyasini topish shart bo'lmasdan, uni bevosita $g(\cdot)$ funksiya va $F(x)$ orqali ifoda etish mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, Stiltes integrali va matematik kutilmaning ta'riflaridan va ularning

xossalaridan foydalanib, quyidagi teoremaning o'rinli ho'lishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Teorema 1. Tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi $F(x), g(x)$ esa, uzluksiz yoki chekli sondagi birinchi turdagi uzilish nuqtalarga ega bo'lgan funksiya bo'lsin.

Agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dF(x) < \infty$$

bo'lsa,

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x). \qquad (1)$$

Formula (1) ni quyidagi xususiy hollarda ko'ramiz.

1) Agar tasodifiy miqdor ξ diskret bo'lib, uning taqsimoti

$$P(\xi = a_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \sum_k p_k = 1,$$

bo'lsa,

$$Eg(\xi) = \sum_k g(a_k) p_k \qquad (2)$$

agar

$$\sum_k |g(a_k)| p_k < \infty$$

(2) formulaning o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish uchun ξ diskret bo'lgan holda, $g(\xi)$ ham diskret tasodifiy miqdor bo'lishiga e'tibor berish yetarli bo'ladi.

2) Agar tasodifiy miqdor ξ ning taqsimotini zichlik funksiyasi $p(x)$ va Borel funksiyasi $g(\cdot)$ uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| p(x) dx < \infty$$

bo'lsa,

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx. \qquad (3)$$

Keltirilgan (2), (3) formulalarga oid misollarni ko'ramiz.

Misol 1. Agar ξ tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega bo'lsa, $E\frac{1}{1+\xi}$ hisoblansin.

Yechish. Formula (2) dan foydalansak, $\left(g(x) = \frac{1}{1+x}\right)$.

$$E\frac{1}{1+\xi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Misol 2. Tasodifiy miqdor ξ $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsa, (3) formula bo'yicha

$$E\sin^2\pi\xi=\int_0^1\sin^2\pi x dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos 2\pi x)dx=\frac{1}{2}$$

Bu holda, $g(x)=\sin^2\pi x$.

Misol 3. Tasodifiy miqdor ξ Koshi taqsimotiga ega bo'lsin. Bu holda, uning taqsimoti zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$E\min(|\xi|,1)$ hisoblansin.

Yuqoridagi (3) formula bo'yicha

$$E\min(|\xi|,1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\min(|x|,1)\frac{1}{1+x^2}dx=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\ln 2$$

Bu yerda

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

ekanligi hisobga olindi.

2. Umumlashgan Chebishev tengsizligi. Yuqoridagi teorema 1 ning tatbiqi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 2. Funksiya $g(x)$ – manfiy bo'lmagan va kamaymaydigan bo'lsin. Bu holda, har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$P(\xi>\varepsilon)\le\frac{Eg(\xi)}{g(\varepsilon)}.$$

Agar $F(x)=P(\xi<x)$ bo'lsa, yuqoridagi (1) formulaga asosan

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x)\ge\int_{\varepsilon}^{\infty}g(x)dF(x)\ge$$
$$\ge g(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{\infty}dF(x)=g(\varepsilon)P(\xi>\varepsilon).$$

Oxirgi tengsizliklardan teorema 2 ning isbotini olamiz. Xususan, ξ manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'lsa, $g(x)=x$ deb olib,

$$P(\xi>\varepsilon)\le\frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Chebishev tengsizligiga ega bo'lamiz.

Tasodifiy vektorlar funksiyalarining matematik kutilmasi. $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ ehtimollik fazosida

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),...,\xi_k(\omega))$$

tasodifiy vektor aniqlangan bo'lsin. Agar R^k ni R ga akslantiradigan

$$g(x)=g(x_1,...,x_k)$$

Borel funksiyasi berilgan bo'lsa,

$$g(x)=g(\xi_1(\omega),...,\xi_k(\omega))$$

tasodifiy miqdor bo'lib, uning matematik kutilmasi

$$Eg(\xi)=\int_{\Omega}g(\xi_1(\omega),...,\xi_k(\omega))P(d\omega). \qquad (4)$$

Bu (4) integralni R^k dagi ξ tasodifiy vektorning taqsimoti $P_\xi(\cdot)$ bo'yicha (Lebeg integrali ma'nosida)

$$Eg(\xi)=\int_{R^k}g(x)P_\xi(dx), \qquad x=(x_1,...,x_k)\in R^k, \qquad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar ξ vektorning komponentlari

$$\xi_1(\omega),...,\xi_k(\omega)$$

bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsa, (5) integralni muayyan ravishda hisoblash imkoniyatlari yuzaga keladi. Qulaylik uchun $k=2$ holni ko'ramiz. Agar to'plam

$$B=B_1\times B_2=\{(x_1,x_2),x_1\in B_1,x_2\in B_2\}\subset R^2$$

bo'lsa (bu yerda B_1 va B_2 lar R dagi o'lchovli to'plamlar),

$$P_\xi(B)=P(\xi\in B)=P(\xi_1\in B_1,\xi_2\in B_2)=P(\xi_1\in B_1)P(\xi_2\in B_2) \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu holda, R^2 dagi taqsimot

$$P_\xi(dx_1,dx_2)=P_{\xi_1\xi_2}(dx_1,dx_2)=P(\xi_1\in dx_1,\xi_2\in dx_2)$$

R dagi

$$P_{\xi_1}(dx_1)=P(\xi_1\in dx_1),\ P_{\xi_2}(dx_2)=P(\xi_2\in dx_2)$$

taqsimotlarni to'g'ri ko'paytmasi deb ataladi. Biz bilamizki, (6) formula (R^2,B^2) (B^2-ikki o'lchovli Borel to'plamlari σ – algebrasi) fazodagi $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ tasodifiy vektorning taqsimotini ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlarning (R,B) dagi taqsimotlari orqali bir qiymatli aniqlaydi. Aytilganlardan $P_{\xi_1\xi_2}$ taqsimot bo'yicha integral

$$\int_{R^2} g(x_1,x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1,dx_2) \qquad (7)$$

P_{ξ_1} va P_{ξ_2} taqsimotlar bo'yicha olingan integrallar orqali ifoda etilishi mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, quyidagi Fubini teoremasi o'rinli.

Teorema 3. (Takroriy integrallash haqidagi Fubini teoremasi).

Borel funksiyasi $g(x,y)$, ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$Eg(\xi_1,\xi_2)=\int_{R^2} g(x_1,x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1,dx_2)=$$

$$=\int_R\left[\int_R g(x_1,x_2)P_{\xi_2}(dx_2)\right]P_{\xi_1}(dx_1) \qquad (8)$$

Bu tenglikda integral va indekslarning o'rinlarini almashtirish mumkin.

Izoh. Funksiya $g(x_1,x_2)$ o'lchovli bo'lishidan, (8) tenglikdagi integral ostidagi

$$\int_R g(x_1,x_2)P_{\xi_2}(dx_2)$$

funksiyaning o'lchovli bo'lishi kelib chiqadi.

Natija 1. Funksiya $g(x_1,x_2)=g_1(x_1)\cdot g_2(x_2)$ bo'lsin. Bu holda, quyidagi ikkita shartlardan:

1) $\int_{R^2} g_1(x_1)g_2(x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1,dx_2)$ mavjud;

2) $\int_R g_i(x_i)P_{\xi_i}(dx_i)$, $i=1,2$, mavjud;

birortasi bajarilsa,

$$\int_{R^2} g_1(x_1)g_2(x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1,dx_2)=$$

$$=\int_R g_1(x_1)P_{\xi_1}(dx_1)\cdot\int_R g_2(x_2)P_{\xi_2}(dx_2). \qquad (9)$$

Oxirgi (9) tenglikni soddaroq

$$E(g_1(\xi_1)g_2(\xi_2))=Eg_1(\xi_1)\cdot Eg_2(\xi_2)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Natija 2. Agar $g(x_1,x_2)=I_B(x_1,x_2)$ (B to'plamning indikatori) bo'lsa,

$$P_{\xi_1\xi_2}(B)=P((\xi_1,\xi_2)\in B)=\int_R P((x_1,\xi_2)\in B)P_{\xi_2}(dx_2). \qquad (10)$$

Bu yerda $\{(x_1,\xi_2)\in B\}$ hodisaning ehtimolliligini $P(\xi_2\in B_{x_1})=P_{\xi_2}(B_{x_1})$ ko'rinshida yozish mumkin.

Yuqoridagi

$$B_{x_1}=\{x_2:(x_1,x_2)\in B\}$$

to'plam B to'plamning x_1 nuqtadagi "kesimi" deb ataladi.

Agar (10) da

$$B=\{(x_1,x_2);\ x_1+x_2<x\}$$

deb olsak,

$$P((\xi_1,\xi_2)\in B)=P(\xi_1+\xi_2<x)=F_{\xi_1+\xi_2}(x)=$$

$$=\int_R P(x_1+\xi_2<x)P_{\xi_1}(dx_1)=\int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-x_1)dF_{\xi_1}(x_1) \qquad (11)$$

tenglikni olamiz. Agar oxirgi (11) tenglikda

$$F_{\xi_1}(x)=F_1(x)=P(\xi_1<x),\ F_{\xi_2}(x)=F_2(x)=P(\xi_2<x)$$

deb hisoblasak, ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorning yig'indisi $\xi_1+\xi_2$ ning taqsimot funksiyasi uchun

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-u)dF_1(u)=\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u)dF_2(u)$$

formulani olamiz. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral F_1 va F_2 taqsimotlarning kompozitsiyasi deyilib,

$$F_1*F_2=F_2*F_1=\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u)dF_2(u) \qquad (12)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Hamma taqsimotlar fazosi (*) kompozitsiya amaliga nisbatan ma'lum ko'rinishdagi algebraik strukturani tashkil qiladi, lekin bu holat taqsimotlarning xususiyatlarini o'rganishga yordam bermaydi.

Taqsimotlar kompozitsiyasi (12) formuladagi taqsimotlardan birortasi zichlik funksiyaga ega bo'lsa, ularning kompozitsiyasi F_1*F_2 zichlik funksiyasiga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, masalan,

$$F_2(x)=\int_{-\infty}^{x} p_2(u)du$$

ko'rinishda bo'lsa,

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=F_1*F_2=\int_{-\infty}^{\infty} dF_1(u)\int_{-\infty}^{x} p_2(y-u)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dF_1(u)p_2(y-u)\right)dy$$

Demak, $\xi_1+\xi_2$ yig'indining taqsimoti

$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x-u)dF_1(u)$$

zichlik funksiyasiga ega bo'lar ekan. Agar ξ_1 tasodifiy miqdorning taqsimoti ham uzluksiz tipda bo'lib $p_1(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa,

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x-u)p_1(u)du=p_2*p_1$$

yig'indi $\xi_1+\xi_2$ taqsimotining zichlik funksiyasi bo'ladi.

Misol 4. Bog'liqsiz ξ_1,ξ_2 tasodifiy miqdorlar $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsin, ya'ni ular umumiy

$$p(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\bar{\in}[0,1]\end{cases}$$

zichlik funksiyasiga ega bo'ladilar. Bu holda,

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_0^1 p(x-u)du=\begin{cases}0, & x\bar{\in}[0,2]\\ x, & x\in[0,1]\\ 2-x, & x\in[1,2]\end{cases}$$

Zichlik funksiyasi $p_{\xi_1+\xi_2}(x)$ oxirgi formula bilan aniqlanadigan taqsimot, "uchburchak" taqsimot deb ataladi.

§ 4.4. Tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi va bog'liqsizlik

Teorema 1. Tasodifiy miqdorlar ξ,η bog'liqsiz, $g(x,y)$ Borel funksiyasi bo'lsin. Agar $Eg(\xi,\eta)$ chekli bo'lsa,

$$Eg(\xi,\eta)=E\left[Eg(x,\eta)/_{x=\xi}\right]. \qquad (1)$$

Agar $g(x,y)=g_1(x)g_2(y)$ bo'lib, $Eg_1(\xi)$ va $Eg_2(\eta)$ mavjud bo'lsa,

$$Eg(\xi,\eta)=Eg_1(\xi)\cdot Eg_2(\eta) \qquad (2)$$

Izoh. Teoremadagi (1) tenglikning o'ng tomonidagi ifodani hech qanday shartli matematik kutilma emasligini nazarda tutish kerak. Aslida esa

$$Eg(x,\eta)=G(x)$$

bo'lib, (1) tenglikning o'ng tomoni $EG(\xi)$ga teng deb tushinish to'g'ri bo'ladi.

Isbot. Keltirilgan izohdan kelib chiqadiki, teoremaning birinchi qismi yuqoridagi Fubini teoremasining matematik kutilmalar terminidagi yozuvi, xolos. Teorema 1 ning ikkinchi qismi esa, oldingi paragrafdagi natija 1 dan iborat ((9) tenglikka qaralsin).

Agar $B=\{\eta=y\}$ hodisaning ehtimolligi $P(B)>0$ bo'lsa, (1) tenglikning isboti matematik kutilmalar uchun to'la ehtimollik formulasidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$E[g(\xi,\eta)/\eta=y]=\frac{E[g(\xi,\eta);\ \eta=y]}{P(\eta=y)}=$$

$$=\frac{Eg(\xi,\eta)I_{\{\eta=y\}}}{P(\eta=y)}=\frac{Eg(\xi,y)I_{\{\eta=y\}}}{P(\eta=y)}=Eg(\xi,y).$$

Oxirgi tenglikni to'g'riligida $g(\xi,y)$ va $I_{\{\eta=y\}}$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsiz bo'lishligidan foydalanildi

$$Eg(\xi,y)I_{\{\eta=y\}}=Eg(\xi,y)\cdot P(\eta=y).$$

Teoremadagi (2) tenglikni umumiylikni chegaralamagan holda,

$$E\xi\cdot\eta=E\xi\cdot E\eta \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgidan (2) ni olish uchun ξ sifatida $g_1(\xi)$ ni, η sifatida $g_2(\eta)$ ni qabul qilish yetarli, chunki ξ va η lar qatorida $g_1(\xi)$ va $g_2(\eta)$ lar ham bog'liqsiz bo'ladi.

Yuqoridagi (2) va (3) tengliklardagi fikrlarga teskari bo'lgan fikrlar, umuman aytganda, to'g'ri emas. Shunday ξ va η tasodifiy miqdorlarni topish mumkinki, ular uchun

$$E\xi\cdot\eta=E\xi\cdot E\eta$$

tenglik to'g'ri, lekin ξ va η lar o'zaro bog'liqsiz bo'lmaydi.

Misol. ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, $E\xi_1=E\xi_2=0$ bo'lsin. Agar $\eta_1=\xi_1\xi_2$ deb olsak, albatta, ξ_1 va η_1 lar bog'liq tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Lekin

$$E\xi_1\eta_1=E\xi_1^2\xi_2=E\xi_1^2\cdot\mathrm{E}\xi_2=0=E\xi_1\cdot E\eta_1.$$

§ 4.5. Kelajakka bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasi

Ehtimollik fazosi $(\Omega,\Im,P)$ da $\{\xi_n,\ n\geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va butun manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdor v aniqlangan bo'lsin. Tasodifiy miqdorlar

$$\xi_k,\ldots,\xi_n,\qquad k\leq n$$

yuzaga keltirgan $\sigma-$ algebrani $\sigma(\xi_k,\ldots,\xi_n)=\Im_{k,n}$ deb belgilaylik.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor v kelajakka bog'liq emas deyiladi, agar $\{v\leq n\}$ hodisa $\Im_{n+1,\infty}-\sigma-$algebraga bog'liq bo'lmasa.

Tasodifiy miqdor v Markov yoki to'xtash momenti deyiladi, agar $\{v\leq n\}\in\Im_{1,n}$ bo'lsa. Boshqacha aytganda, bu holda $\xi_1,\ldots,\xi_n$ larning qiymatlari $\{v \leq n\}$ hodisalar ro'y berganligi yoki bermaganligini aniqlaydi. Keltirilgan Markov yoki to'xtash momenti v uchun $\{v \leq n\}$ yoki $\{v > n\}$ hodisalar $\mathfrak{I}_{n+1}^{\infty} - \sigma -$algebradan bog'liqsiz bo'ladi. Demak, Markov momenti $\{\xi_n, n \geq 1\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun kelajakga bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'ladi.

Misol 1. $\{\xi_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, v qiymati N ga teng yoki undan katta bo'lgan birinchi tasodifiy miqdorning nomeri bo'lsin, ya'ni

$$v = \inf\{k : \xi_k \geq N\}.$$

Agar $\{\xi_n, n \geq 1\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa, v kelajakka bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\{v \leq n\} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{\xi_k \geq N\} \in \mathfrak{I}_{1,n}$ hodisa uchun o'z-o'zidan ravshanki, v tasodifiy miqdor $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ketma-ketlikka bog'liq bo'lmasa (ya'ni $\sigma(v)$ va $\mathfrak{I}_{1,\infty}$ $\sigma -$algebralar bog'liqsiz), bu tasodifiy miqdor kelajakka bog'liq bo'lmaydi.

"To'xtash momenti" tushunchasi ko'p amaliy masalalarning mohiyati bilan bog'liq bo'ladi. Masalan, tayyor mahsulotning statistik nazorati quyidagi sxema bo'yicha o'tkaziladi: ξ_k tasodifiy miqdor $k -$ partiyadagi "nosoz" (brak) buyumlar soni bo'lsin. Statistik nazorat bo'yicha hamma mahsulot "nosoz" deb hisoblanadi, agar biror n uchun yig'indi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ ning qiymati $a + bn$ dan katta bo'lsa. Agar v aytilgan hodisaning ro'y bergan partiya nomeri bo'lsa, ya'ni

$$v = \min\left\{n;\ S_n \geq a + bn\right\}$$

bu tasodifiy miqdor nazorat jarayonining "to'xtash momenti" bo'ladi.

Agar v butun qiymatli, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa,

$$S_v = \xi_1 + \ldots + \xi_v$$

tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi bo'ladi. Uni "qisqa qilib" tasodifiy yig'indi deb ataymiz.

Teorema (Kolmogorov – Proxorov). Butun qiymatli manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdor v ketma-ketlik $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ga nisbatan kelajakka bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'lsin. Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(v \geq k) E|\xi_k| < \infty \qquad (1)$$

bo'lsa,

$$ES_v = \sum_{k=1}^{\infty} P(v \geq k) E\xi_k. \qquad (2)$$

Agar $\xi_k \geq 0$ bo'lsa, (1) shart ortiqcha bo'ladi.

Isbot. To'la ehtimollik formulasi bo'yicha

$$ES_v = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(S_v;\ v = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n; v = n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k, v = n) = \sum_{k=1}^{\infty} E(\xi_k, v \geq k) \qquad (3)$$

oxirgi tenglikda yig'indilar tartibini almashtirish mumkinligini tushuntirishdan oldin (3) tenglikdan teoremaning isboti kelib chiqishini ko'rsatamiz. Hodisa

$$\{v \geq k\} = \{v > k - 1\}$$

$\sigma -$ algebra $\mathfrak{I}_{k,\infty}$ dan bog'liqsiz bo'lgani sababli, u $\sigma -$algebra $\sigma(\xi_k)$ ga ham bog'liq bo'lmaydi (chunki $\sigma(\xi_k) \subset \mathfrak{I}_{k,\infty}$). Shunga asosan,

$$E(\xi_k, v \geq k) = P(v \geq k) E\xi_k$$

bo'lib, bu tenglik teoremani isbotlaydi. Yuqoridagi (3) tenglikda yig'indilar tartibini almashtirish mumkin, chunki undagi qator absolut yaqinlashadi.

Haqiqatan ham, teoremaning shartiga asosan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} E\left(|\xi_k|;\ v = n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(|\xi_k|; v \geq k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(v \geq k) E|\xi_k| < \infty.$$

Agar $\xi_k \geq 0$ bo'lsa, oxirgi qatordagi hamma qo'shiluvchilar manfiy bo'lmasdan, unda yig'indilar tartibini almashtirish doim mumkin bo'ladi.

Natija (Vald ayniyati). Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan, v tasodifiy miqdor kelajakka bog'liq bo'lmagan bo'lib, $Ev < \infty$ bo'lsa,

$$ES_v = E\xi_1 \cdot Ev. \qquad (4)$$

Haqiqatan ham,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(v \geq n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(v = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(v = k) = Ev$$

va (4) tenglik (2) dan kelib chiqadi.

§ 4.6. Tasodifiy miqdorlar dispersiyasi

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalaridan biri dispersiya tushunchasini keltiramiz.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor ξ ning dispersiyasi deb

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

songa aytiladi.

Bu xarateristika tasodifiy miqdorning qiymatlari matematik kutilma $E\xi$ atrofida "tarqoqligini" yoki "quyuqligini" ifoda etadi. Mexanika nuqtayi nazaridan, dispersiya birlik massaning to'g'ri chiziqdagi taqsimotini inersiya momentiga teng bo'ladi. Matematikada esa dispersiya tasodifiy miqdor funksiyasi

$$g(\xi) = (\xi - E\xi)^2$$

ning matematik kutilmasi.

Bevosita hisoblab,

$$D\xi = E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 \qquad (1)$$

formulani olamiz.

Dispersiyani

$$D\xi = \min_a E(\xi - a)^2$$

tenglik bilan ham aniqlash mumkin. Haqiqatan ham,

$$D\xi = E\xi^2 + \min_a \left(a^2 - 2aE\xi\right) = E\xi^2 - (E\xi)^2,$$

chunki

$$\min\left(a^2 - 2aE\xi\right)$$

$a = E\xi$ bo'lganda erishiladi. Oxirgidan ko'rinadiki, $a = E\xi$ son tasodifiy miqdor ξ uchun o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi "baho" (taqribiy qiymat) bo'ladi.

Misol 1. Tasodifiy miqdor ξ ning taqsimoti parametrlari $\left(a, \sigma^2\right)$ bo'lgan normal zichlik funksiyaga ega bo'lsin, ya'ni

$$P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{a,\sigma^2}(u)\,du,$$

$$\varphi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Yuqorida biz $E\xi = a$ ekanligini ko'rgan edik. Bu taqsimot uchun

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2/2} du$$

Oxirgi tenglik $u=\frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish orqali olinadi. Bo'laklab integrallashni bajarib

$$D\xi=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[ue^{-u^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du=\sigma^2$$

tenglikni olamiz. Demak, normal taqsimotning ikkinchi parametri $\sigma^2=D\xi$ ekan.

Misol 2. Tasodifiy miqdor ξ parametri $\lambda>0$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin, ya'ni

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\dots$$

Oldin biz $E\xi=\lambda$ ekanligini topgan edik. Demak,

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\cdot\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor ξ uchun

$$E\xi=D\xi=\lambda,$$

ya'ni matematik kutilma va dispersiya teng bo'lar ekan. Oxirgi jumlada keltirilgan xossa Puasson taqsimotini tavsiflaydi, hamma diskret taqsimotlar sinfida faqatgina Puasson taqsimoti uchun $E\xi=D\xi$ tenglik bajariladi.

Misol 3. Agar ξ tasodifiy miqdor $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsa, uning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & x\overline{\in}[0,1]\end{cases}$$

bo'ladi va

$$E\xi=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\quad E\xi^2=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

Demak, (1) formula bo'yicha

$$D\xi=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}.$$

Misol 4. Agar ξ tasodifiy miqdor Bernulli taqsimotiga ega bo'lsa, ya'ni

$$\xi=\begin{cases}1, & p\\ 0, & 1-p.\end{cases}$$

Bu holda, $E\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \ \ \xi^2 = \xi$

$$E\xi^2 = E\xi = p$$

tengliklar to‘g‘ri bo‘lib, (1) formuladan

$$D\xi = p - p^2 = p(1-p)$$

ekanligini olamiz.

Endi dispersiyaning muhim bo‘lgan xossalarini keltiramiz.

D1. $D\xi \geq 0$, $D\xi = 0$ faqat va faqat $P(\xi = c) = 1$ bo‘lgan holda, bu yerda $c = const$ (w dan bog‘liq emas).

Birinchi keltirilgan xossa isbot talab etmaydi, chunki

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \geq 0.$$

Agar $P(\xi = c) = 1$ bo‘lsa,

$$(E\xi)^2 = E\xi^2 = c^2.$$

Demak,

$$D\xi = c^2 - c^2 = 0.$$

Agar $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = 0$ bo‘lsa,

$$(\xi - E\xi)^2 \geq 0, \ \ P(\xi - E\xi = 0) = 1$$

yoki $P(\xi = E\xi) = 1$ (matematik kutilmaning E4 xossasiga qaralsin).

D2. Agar a va b o‘zgarmas bo‘lsa,

$$D(a + b\xi) = b^2 D\xi.$$

Bu xossa $D\xi$ ta’rifidan kelib chiqadi.

D3. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lsa,

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Haqiqatan ham,

$$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E\xi + E\eta)^2 =$$
$$= E\xi^2 + 2E\xi \cdot E\eta + E\eta^2 - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi \cdot E\eta =$$
$$= E\xi^2 - (E\xi)^2 + E\eta^2 - (E\eta)^2 = D\xi + D\eta.$$

Keltirilgan hisoblashlardan ko‘rinadiki, dispersiyaning additivlik xossasi (D3) faqat va faqat ξ va η lar bog‘liqsiz bo‘lgan holda bajarilib qolmasdan, umumiyroq

$$E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$$

tenglik bajariladigan hollarda ham o‘rinli bo‘lar ekan.

Misol 5. Tasodifiy miqdor $v \geq 0$ butun qiymatli bo‘lib, bir xil taqsimlangan va bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ dan bog‘liqsiz va Ev, $E\xi_j = a$ matematik kutilmalar mavjud bo‘lsin. Quyidagi

$$S_v = \xi_1 + \ldots + \xi_v$$

tasodifiy yig‘indining dispersiyasi DS_v topilsin.

Yechish. Biz yuqorida isbotlagan Vald ayniyatiga asosan

$$ES_v = aEv.$$

To‘la ebtimollik formulasiga ko‘ra

$$DS_v = E(S_v - ES_v)^2 = \sum_n E\left[(S_v - ES_v)^2, \, v = n\right] =$$
$$= \sum_n P(v = n) E(S_n - ES_v)^2 =$$
$$\sum_n P(v=n)\left[E(S_n - an)^2 + (an - aEv)^2\right] =$$
$$= \sum_n P(v=n) nD\xi_1 + a^2 E(v - Ev)^2 =$$
$$= D\xi_1 Ev + a^2 Dv.$$

Keltirilgan tenglikni

$$E(S_v - va)^2 = Ev \cdot D\xi_1$$

munosabat bilan teng kuchli ekanligini ko‘rish qiyin emas.

§ 4.7. Korrelatsiya koeffitsiyenti va yuqori tartibli momentlar

Ixtiyoriy ξ va η tasodifiy miqdorlar orasida $\xi = g(\eta)$ funksional (deterministik) bog‘langanligi, funksional bo‘lmagan bog‘liqlik, yoki ular bog‘liqsiz bo‘lishi mumkin. Quyida aniqlangan ikkita tasodifiy miqdorlar orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti yordamida bu tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘liqlik darajasi o‘rganiladi.

Ushbu paragraf davomida o‘rganilayotgan tasodifiy miqdorlar uchun nolga teng bo‘lmagan dispersiyalar mavjudligi talab etiladi.

Agar ξ tasodifiy miqdor uchun $E\xi = 0$, $D\xi = 1$ bo‘lsa, uni standart deb hisoblaymiz. Ixtiyoriy tasodifiy miqdorni chiziqli almashtirish yordamida standart variantga keltirish mumkin. Haqiqatan ham, ixtiyoriy ξ uchun

$$\xi_c = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

tasodifiy miqdor standart variant bo‘ladi.

Ta’rif. Tasodifiy miqdorlar ξ va η orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti deb

$$\rho(\xi, \eta) = E\xi_c \cdot \eta_c$$

sonni aytamiz.

Quyida korrelatsiya koeffitsiyenti $\rho(\xi,\eta)$ ning xossalari keltiriladi.

1. Korrelatsiya koeffitsiyenti $|\rho(\xi,\eta)|\le 1$.

Haqiqatan ham,

$$0\le D(\xi_c\pm\eta_c)=E(\xi_c\pm\eta_c)^2=2\pm 2\rho(\xi,\eta).$$

Bu tenglikdan esa, $|\rho(\xi,\eta)|\le 1$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

2. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, $\rho(\xi,\eta)=0$.

Bu munosabat ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligidan ξ_c va η_c larning ham bog'liqsiz bo'lishidan kelib chiqadi.

Keltirilgan jumlaga teskari bo'lgan fikr to'g'ri emas, ya'ni $\rho(\xi,\eta)=0$ bo'lsa, ξ va $\eta-$larni bog'liqsiz bo'lishi shart emas. Bunga oldin misol keltirilgan edi (Shunday bog'liq ξ va η tasodifiy miqdorlar mavjudki, ular uchun $E\xi=E\eta=0$ va $E\xi\cdot\eta=0$). Lekin shunday tasodifiy miqdorlar jufti ξ va η mavjudki, ularning bog'liqsizligi $\rho(\xi,\eta)=0$ tenglikka ekvivalent bo'ladi. Bunga quyidagi Bernulli taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar misol bo'ladi. Aytaylik,

$$\xi=\begin{cases}1, & p\\ 0, & 1-p\end{cases}$$

$$\eta=\begin{cases}1, & q\\ 0, & 1-q\end{cases}$$

bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$E\xi=p,\ D\xi=p(1-p),\quad E\eta=q,\ D\eta=q(1-q)$$

Demak, ξ va η lar orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{E(\xi-p)(\eta-q)}{\sqrt{pq(1-p)(1-q)}}.$$

Agar $\rho(\xi,\eta)=0$ bo'lsa,

$$E\xi\cdot\eta=P(\xi=1,\eta=1)=pq=P(\xi=1)\cdot P(\eta=1),$$
$$P(\xi=1,\eta=0)=P(\xi=1)-P\big(\xi=1,\ \eta=1\big)=p-pq=$$
$$=p(1-q)=P(\xi=1)\cdot P(\eta=0),$$
$$P(\xi=0,\eta=1)=P(\eta=1)-P(\xi=1,\eta=1)=$$
$$=q-pq=(1-p)q=P(\xi=0)\cdot P(\eta=1),$$
$$P(\xi=0,\eta=0)=P(\xi=0)-P\big(\xi=0,\ \eta=1\big)=$$

$$=(1-p)-(1-p)q=(1-p)(1-q)=P(\xi=0)\cdot P(\eta=0).$$

Keltirilgan tengliklardan ξ va η tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi kelib chiqadi.

3. Agar $|\rho(\xi,\eta)|=1$ bo'lsa, bu tasodifiy miqdorlar chiziqli bog'liq, ya'ni shunday a va $b\ne 0$ sonlar topiladiki,

$$P(\eta=a+b\xi)=1 \qquad (*)$$

Isbot. Faraz qilaylik $|\rho(\xi,\eta)|=1$ bo'lsin. Agar $\rho(\xi,\eta)=1$ bo'lsa,

$$D(\xi_c-\eta_c)=2(1-\rho(\xi,\eta))=0 \qquad (1)$$

yuqorida keltirilgan disspersiyaning D1 xossasiga asosan (1) tenglik $P(\xi_c-\eta_c=c)=1$, $c-$ o'zgarmas son bo'lgan holdagina bajariladi, xolos.

Agar $\rho(\xi,\eta)=-1$ bo'lsa,

$$D(\xi_c+\eta_c)=1+\rho(\xi,\eta)=0 \qquad (2)$$

va oldingidek (2) tenglik

$$P(\xi_c+\eta_c=c)=1$$

bo'lgan holdagina bajariladi, xolos.

Agar $\rho>0$ bo'lsa, ξ va η tasodifiy miqdorlar musbat korrelatsiyalangan, $\rho<0$ bo'lsa, manfiy korrelatsiyalangan deyiladi.

Izoh. Oson ko'rish mumkinki, agar ξ va η tasodifiy miqdorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, ular orasidagi korrelatsiya koeffitsyenti $|\rho(\xi,\eta)|=1$ bo'ladi. Haqiqatan ham, (*) tenglik bajarilsa, $\alpha=E\xi$ va $\beta=\sqrt{D\xi}$ belgilashlarni kiritib,

$$\rho(\xi,\eta)=E\frac{\xi-\alpha}{\beta}\cdot\frac{a+b\xi-a-b\alpha}{|b|\beta}=signb=\begin{cases}1, & b\ge 0\\ -1, & b<0\end{cases}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Aytib o'tilgandan quyidagi xulosaga kelamiz: tasodifiy miqdorlar orasida chiziqli bog'liqlik mavjud bo'lishi uchun, ular orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti +1 ga yoki -1 ga teng bo'lishi yetarli va zaruriy shart ekan.

Misol. Signal uzatadigan qurilmani ko'ramiz. Tasodifiy miqdor ξ uzatiladigan signal miqdori bo'lsin. Har xil to'sqinchiliklar oqibatida $\eta=\alpha\xi+\Delta$ signal qabul qilinadi. (bu yerda $\alpha-$ signal kuchaytirish koeffitsienti, $\Delta-$ "shovqin" miqdori). Tasodifiy miqdorlar ξ va Δ bog'liqsiz va

$$\alpha=E\xi,\ D\xi=1,\ E\Delta=0,\ D\Delta=\sigma^2$$

deb hisoblansin. Bu miqdorlar orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti

$$\rho(\xi,\eta) = E\xi_c \cdot \eta_c = E\left[(\xi-\alpha)\cdot\frac{(\alpha\xi+\Delta-\alpha a)}{\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}\right] = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}.$$

Agar σ kuchaytirgich α ga nisbatan katta son bo'lsa, koeffisiyent $\rho(\cdot,\cdot)$ nolga yaqin bo'ladi va η deyarli ξ ga bog'liq bo'lmaydi. Agar σ kuchaytirgich α ga nisbatan kichik son bo'lsa, koeffitsient $\rho(\cdot,\cdot)$ 1 ga yaqin son bo'lib, qabul qilingan signal η bo'yicha, ξ ni tiklash mumkin.

Endi tasodifiy miqdorlarning matematik kutilma va dispersiyadan boshqa sonli xarakteristikalarini ko'ramiz. Bunday xarakteristikalar sifatida yuqori tartibli momentlarni ko'rish mumkin.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor ξ ning $k-$tartibli momenti deb, $E\xi^k$ songa aytiladi. Tasodifiy miqdorning $k-$tartibli markazlashgan momenti deb

$$\alpha_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k \, dF_\xi(x)$$

songa aytiladi. Masalan, ikkinchi tartibli markazlashgan moment dispersiya bo'ladi.

Misol 1. Faraz qilaylik ξ tasodifiy miqdor parametrlari a va σ^2 bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsin. Bu holda, taqsimotning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}.$$

Oldin biz $E\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$ ekanligini ko'rgan edik.

Tasodifiy miqdor ξ ning yuqori tartibli markazlashgan momentlarini topaylik.

Ta'rif bo'ycha,

$$E(\xi - a)^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right\} dx$$

Oxirgi integralda $u = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajarilsa

$$E(\xi - a)^k = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-u^2/2} du$$

tenglikni olamiz.

Agar $k = 2s + 1 -$ toq son bo'lsa,

$$E(\xi - a)^{2s} = \frac{2\sigma^{2s}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^{2s} e^{-u^2/2} du.$$

Bu yerda $\frac{u^2}{2}=t$ almashtirish bajarsak,

$$E(\xi-a)^{2s}=\frac{2^s\sigma^{2s}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{s-1/2}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{2^s\sigma^{2s}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2s-1)\sigma^{2s}=(2s-1)!!\sigma^{2s}.$$

Bu yerda $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ – Eylerning Γ-funksiyasi.

Masalan,

$$E(\xi-a)^2=D\xi=\sigma^2$$

$$E(\xi-a)^4=3\sigma^2 \text{ va hokazo.}$$

Misol 2. Tasodifiy miqdor ξ parametri λ ga teng bo'lgan ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lsin. Bu holda taqsimot funksiyasi

$$F(x)=P(\xi<x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

va zichlik funksiyasi

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x},\qquad x>0.$$

Bu tasodifiy miqdorning yuqori tartibli momentlarini hisoblaylik.

Ta'rif bo'yicha,

$$E\xi^k=\int_0^\infty x^k\lambda e^{-x}dx=\lambda\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda^k}\int_0^\infty u^k e^{-u}du=\frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k}=\frac{k!}{\lambda^k}$$

masalan, $E\xi=\frac{1}{\lambda}$, $E\xi^2=\frac{2}{\lambda^2}$ va shuning uchun ham

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Ushbu paragrafni tasodifiy vektorlarning sonli xarakteristikalariga izoh berish bilan tugatamiz.

Agar $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ tasodifiy vektor berilgan bo'lsa,

$$E\xi=(E\xi_1,\ldots,E\xi_k)=(m_1,\ldots,m_k)$$

sonli vektorni ξ tasodifiy vektorning matematik kutilmalari vektori deb ataymiz. Umuman ikkita tasodifiy miqdorlar ξ va η larning kovariatsiyasi deb,

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$$

songa aytiladi. Tushunarliki, bu tasodifiy miqdorlar orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}}$$

Quyidagi $k\times k$ tartibli kvadrat matritsa $C=\left(c_{ij}\right)^{k}$, $c_{ij}=\operatorname{cov}\left(\xi_i,\xi_j\right)$ ξ tasodifiy vektorning kovariatsion matritsasi deb ataladi. Bu matritsa manfiy aniqlanmagan kvadratik matritsa bo'lib, tasodifiy vektorlar uchun dispersiya rolini o'ynaydi.

Agar $\xi=\left(\xi_1,...,\xi_k\right)$ tasodifiy vektor berilgan bo'lsa,

$$M_{s_1,...,s_k}=E\xi_1^{s_1}...\xi_k^{s_k}$$

ifoda ξ ning $s_1+...+s_k$ tartibli aralash momenti deb ataladi. Masalan,

$$E\xi_1=...=E\xi_k=0$$

bo'lganda, hamma 2-tartibli momentlar kovariatsion matritsani tashkil qiladi.

Agar

$$E|\xi|^s=E\left(\xi_1^2+...+\xi_k^2\right)^{s/2}<\infty$$

bo'lsa, $s_1+...+s_k\le s$ tartibli hamma aralash momentlar mavjud bo'ladi. Tasodifiy vektor ξ ning komponentalari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlardan iborat bo'lganda,

$$M_{s_1,...,s_k}=E\xi_1^{s_1}\cdot E\xi_2^{s_2}...E\xi_k^{s_k}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

§ 4.8. Momentlar uchun tengsizliklar

Teorema 1. (Koshi – Shvars tengsizligi). Agar ξ va η lar ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar bo'lsa,

$$E|\xi|\cdot|\eta|\le\left[E\xi^2\cdot E\eta^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Isbot. Quyidagi elementar tengsizlikdan foydalanamiz:

$$2|a\cdot b|\le a^2+b^2$$

bu yerda

$$a^2=\frac{\xi^2}{E\xi^2},\quad b^2=\frac{\eta^2}{E\eta^2}$$

deb olsak,

$$\frac{|\xi\cdot\eta|}{\left[E\xi^2\cdot E\eta^2\right]^{\frac{1}{2}}}\le1.$$

Endi oxirgi tengsizlikda har ikki tomondan matematik kutilma olinsa, teorema isbot bo'ladi. Koshi-Shvars tengsizligi ancha umumiy bo'lgan tengsizliklarning xususiy holi bo'ladi.

Teorema 2 (Gyolder tengsizligi). Agar $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ bo'lsa,

$$E|\xi \cdot \eta| \le \left[E|\xi|^r\right]^{\frac{1}{r}} \left[E|\eta|^s\right]^{\frac{1}{s}}, \qquad (1)$$

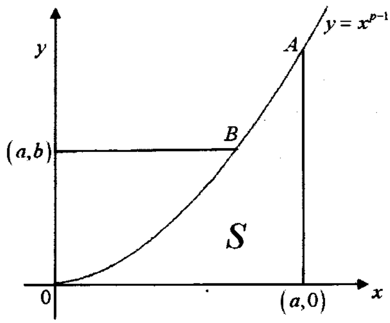
$$\left[E(\xi + \eta)^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \left[E|\xi|^r\right]^{\frac{1}{r}} + \left[E|\xi|^r\right]^{\frac{1}{r}}. \qquad (2)$$

Bu yerdagi ikkinchi munosabatni Minkovskiy tengsizligi deb ataladi.

Isbot. Quyidagi rasmda keltirilgan OBA egri chiziqning tenglamasi

$$y = x^{r-1} \text{ yoki } x = y^{s-1}$$

Bu egri chiziqda $B = \left(b^{s-1}, b\right)$ va $A = \left(a, a^{r-1}\right)$nuqtalarni tanlaymiz va bunda $b < a^{r-1}$ deb hisoblaymiz.



Yuqoridagi shaklda S va T yuzalar mos ravishda

$$S = \int_0^a x^{r-1} dx = \frac{1}{r} a^r,$$

$$T = \int_0^b y^{s-1} dy = \frac{1}{s} b^s$$

bo'ladi va o'z-o'zidan ravshanki, $ab \le S + T$.
Demak,

$$ab \le \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s}$$

tengsizlik o'rinli ekan.
Bu tengsizlikda

$$a=\frac{|\xi|}{\left(E|\xi|^r\right)^{\frac{1}{r}}}\cdot\frac{|\eta|}{\left(E|\eta|^s\right)^{\frac{1}{s}}}\le\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$$

tengsizlikni hosil qilamiz va undan (1) (Gyolder) tengsizligi kelib chiqadi.

Minkovskiy tengsizligini (2) isbotlash uchun

$$|\xi+\eta|\le|\xi|+|\eta|$$

tengsizlikdan foydalanib, quyidagi bahoni yozamiz:

$$E|\xi+\eta|^r\le E|\xi||\xi+\eta|^{r-1}+E|\eta||\xi+\eta|^{r-1}.$$

Bu tengsizlikni o‘ng tomondagi qo‘shiluvchilarga isbotlangan Gyolder tengsizligini qo‘llab,

$$E|\xi+\eta|^r\le\left[\left(E|\xi|^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(E|\eta|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\left[E|\xi+\eta|^{(r-1)s}\right]^{\frac{1}{s}}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Endi,

$$(r-1)s=r,\qquad \frac{1}{s}=1-\frac{1}{r}$$

ekanligini hisobga olsak, oxirida (2) tengsizlikni isbotlagan bo‘lamiz.

O‘z-o‘zidan ravshanki, $r=s=2$ bo‘lganda Gyolder tengsizligi Koshi-Shvars tengsizligiga aylanadi.

Faraz qilaylik, $g(x)$to‘g‘ri chiziqda aniqlangan qabariq funksiya bo‘lsin. Eslatib o‘tamizki, $g(\cdot)$ funksiya qabariq deyiladi, agar har qanday $x_1,x_2\in R$ uchun

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(g(x_1)+g(x_2)\right)$$

tengsizlik bajarilsa.

Analiz kursidan ma’lumki, ikki karra differensiallanuvchi $g(x)$ funksiya qabariq bo‘lishi uchun, $g''(x)\ge 0$ bo‘lishi yetarli va zaruriy shart.

Teorema 3. Agar $E\xi$ mavjud bo‘lib, $g(x)$- qabariq funksiya bo‘lsa,

$$g(E\xi)\le Eg(\xi). \qquad (3)$$

Bu (3) tengsizlikni Yensen tengsizligi deb ataladi.

Isbot. Analiz kursidan ma’lumki, hamma x lar uchun

$$g(x)\ge g(x_0)+k(x_0)(x-x_0) \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli va bu yerda $k(x_0)$ qandaydir son bo‘ladi.

Endi (4) tengsizlikda $x=\xi(\omega),\ x_0=E\xi(\omega)$ deb olsak, $g(\xi)\ge g(E\xi)+c(\xi-E\xi)$, $c-$o‘zgarmas son, tengsizlikni hosil qilamiz.

Oxirida ikki tomondan matematik kutilma olsak, $Eg(\xi) \geq g(E\xi)$ Yensen tengsizligini olamiz.

Xususiy holda $g(x) = x^r$ bo'lsa,

$$(E\xi)^r \leq E\xi^r,$$

$g(x) = |x|^r$ bo'lsa, $|E\xi|^r \leq E|\xi|^r$ va hokazo.

Natija (Lyapunov tengsizligi). Agar $0 < s < t$ bo'lsa,

$$\left(E|\xi|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(E|\xi|^t\right)^{\frac{1}{t}} \tag{5}$$

Isbot. Funksiya $g(x) = x^r, r = \dfrac{t}{s} \geq 1, \eta = |\xi|^s$ bo'lsin. Yensen tengsizligiga asosan,

$$\left(E|\xi|^s\right)^{\frac{t}{s}} \leq E\left(|\xi|^s\right)^{\frac{t}{s}} = E|\xi|^t.$$

Bundan esa Lyapunov tengsizligi (5) kelib chiqadi.

Teorema 4. Agar $\xi \geq 0$ (1 ehtimollik bilan) bo'lsa,

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

har qanday $\varepsilon > 0$ uchun.

Isbot. Haqiqatan ham,

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi dP \geq \varepsilon \int_{\{\omega; \xi(\omega) \geq \varepsilon\}} dP = \varepsilon E\left(1; \xi \geq \varepsilon\right) = \varepsilon E(\xi \geq \varepsilon)$$

Agar $g(x)$ monoton o'suvchi bo'lsa,

$$\left\{\xi; \xi \geq \varepsilon\right\} = \left\{\xi; g(\xi) \geq g(\varepsilon)\right\}$$

va teorema 5 ni qo'llab,

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(\varepsilon)}$$

tengsizlikni olamiz.

Natija (Chebishev tengsizligi). Har qanday tasodifiy miqdor ξ uchun

$$P\left(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \tag{6}$$

(6) tengsizlikni isbotlash uchun $\eta = (\xi - E\xi)^2$ tasodifiy miqdorga nisbatan teorema 5 ni qo'llash yetarli bo'ladi.

Misol va masalalar

1. Tasodifiy miqdor X faqat musbat butun qiymatlar qabul qiladi. Bu tasodifiy miqdor uchun $EX = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ ekanligini isbotlang.

2. Idishda N ta shar bo'lib, ulardan M tasi oq. Tavakkaliga n ta shar olindi. ξ tasodifiy miqdor olingan sharlar ichidagi oq sharlar soni bo'lsa, uning matematik kutilmasi $E\xi = \frac{M}{N} \cdot n$ ekanligini isbotlang.

3. Avtobuslar 5 minut oraliq bilan qatnaydilar. Bekatda avtobus kutish vaqti ξ tekis taqsimlangan deb, kutish vaqtining matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.

Javob: $E\xi = \frac{5}{2}$, $D\xi = \frac{25}{12}$;

4. Partiyadagi 100 ta mahsulotning 10 tasi nosoz. Tekshirish uchun partiyadan 5 ta mahsulot tasodifiy ravishda tanlab olinadi. Tanlanmadagi nosoz mahsulotlar sonining matematik kutilmasini toping.

Javob: $E\xi$=0,5.

5. Taqsimot funksiyasi $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$ (x>0) bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotga ega ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javob: $D\xi$=100.

6. ξ tasodifiy miqdor $[0;1]$ kesmada $f(x) = 3x^2$ zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu kesmadan tashqarida $f(x) = 0$. Matematik kutilmasini toping.

Javob: $E\xi = 0,75$.

7. Normal taqsimotga ega jamlanmada 15 % qiymatlar 12 dan kichik va 40% qiymatlar 16,2 dan katta. Ushbu taqsimotning matematik kutilmasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javob: 15,39, 3,26.

8. X tasodifiy miqdor $N(1,\sigma)$ taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan. Agar $P\{X < 2\} = 0,99$ ekanligi ma'lum bo'lsa, EX^2 va $P\{X^2 > 2\}$ larni hisoblang.

Javob: $EX^2 \approx 1,1842$, $P\{X^2 > 2\} \approx 0,8328$.

V BOB. BERNULLI TASODIFIY MIQDORLARI KETMA-KETLIGI
(Natijalari ikkita elementar hodisalardan iborat ho'lgan bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi)

V bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Bernulli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi.*
- *Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni. markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi.*
- *Lokal va integral (Muavr – Laplas) teoremalari.*
- *Binomial taqsimotni Puasson taqsimoti bilan approksimatsiyalash*

haqida tasavvurlarga ega bo'linadi;

- *Bernulli tasodifiy miqdorlari ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishini.*
- *Muavr – Laplas teoremalari yordamida binomial taqsimotni o'rganishni.*
- *Puasson teoremasi isbotida "bitta ehtimollik fazosi" metodini*

bilish va amalda qo'llay olish;

- *Muavr-Laplas teoremasini qo'llab, binomial taqsimotga tegishli masalalarni yechishni.*
- *Puasson teoremasi tadbiqlarini.*
- *Binomial taqsimot uchun limit taqsimotlar sinfini*

o'rganih olish mumkin.

Har bir tajriba natijasida biror A hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligi kuzatiladigan va har bir tajribaning natijasi qolgan tajribalarning natijalariga bog'liq bo'lmaydigan tajribalar ketma-ketligi ehtimolliklar nazariyasida Bernulli sxemasi deb ataladi. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $P(A)=p$ tajribalar tartibiga bog'liq bo'lmasa, ya'ni tajribadan-tajribagacha o'zgarmas bo'lib qolaversa, mos Bernulli sxemasi bir jinsli deb hisoblanadi, aks holda bu hodisaning ro'y berish ehtimolligi tajriba tartibiga bog'liq bo'lsa, mos tajribalar sxemasi bir jinsli bo'lmagan deb hisoblanadi. Demak, bir jinsli bo'lmagan Bernulli sxemasi uchun 1-nchi tajribada A hodisa ro'y berish ehtimoli $P(A)=p_1$ (ya'ni ro'y bermaslik ehtimoli $1-p_1$), 2-tajribada A hodisa ro'y berish ehtimoli p_2, umuman $n-$tajribada $P(A)=p_n$ deb hisoblanadi. Ko'p hollarda bir jinsli bo'lmagan Bernulli sxemasi Puasson sxemasi nomi bilan ham yuritiladi.

Masalan, tanga tashlash tajribalar ketma-ketligi bir jinsli Bernulli sxemasini tashkil etadi va bu holda

$$P(A)=P(G)=P(\overline{A})=P(R)=\frac{1}{2}.$$

Agar tashlanadigan tanga simmetrik bo'lmasa, $(0<p<1)$

$$P(A)=P(G)=p \quad P(\overline{A})=P(R)=1-p\neq\frac{1}{2}.$$

Bir jinsli bo'lmagan Bernulli (Puasson) sxemasi

$$(p_1,1-p_1),\ (p_2,1-p_2),\dots,(p_n,1-p_n),\dots$$

juftlik ehtimolliklar orqali aniqlanadi.

Umuman ehtimolliklar nazariyasida biror ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ da aniqlangan tasodifiy miqdor ξ faqat 2 ta a va b qiymatlarni qabul qilsa, $(a\neq b)$ bu miqdor Bernulli tasodifiy miqdori deb ataladi. Xususan, tasodifiy miqdor ξ faqat bitta $(a=b=const)$ qiymat qabul qilsa,

$$P(\xi=a)=P(\xi=const)=1$$

bo'lib, boshqa ehtimolliklar yuzaga kelmaydi. Shuning uchun ham tasodifiy miqdorlar analizi Bernulli tasodifiy miqdorlarini o'rganishdan boshlanadi.

Keltirilgan, Bernulli sxemasi deb atalgan bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi quyidagi Bernulli tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi

$$\xi_1,\ \xi_2,\dots,\xi_n,\dots$$

orqali ifoda etilishi muhim rol o'ynaydi. Bu yerda $\xi_k=1$, agar k-tajribada A hodisa ro'y bersa, $\xi_k=0$ agar k-tajribada A hodisa ro'y bermasa. Demak, bu tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib,

$$\xi_k=\begin{cases}1, ehtimolligi\ p=P(A)\\ 0, ehtimolligi\ 1-p=P(\overline{A})\end{cases}$$

ya'ni,

$$P(\xi_k=1)=p,\ P(\xi_k=0)=1-p.$$

Shunday qilib,

$$S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$$

bo'lsa, S_n tasodifiy miqdor n-ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning ro'y berishlar sonini ifodalaydi va

$$P(S_n=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\dots,n,$$

ehtimolliklar binomial taqsimotni tashkil qiladi. Qo'shimcha ravishda ta'kidlab o'tamizki,

$$E\xi_k=p,\quad D\xi_k=p(1-p)=pq,$$
$$ES_n=np,\quad DS_n=D\xi_1+\dots+D\xi_n=npq.$$

§ 5.1. Katta sonlar qonuni

Quyidagi teorema Bernulli sxemasi uchun katta sonlar qonuni nomi bilan ehtimolliklar nazariyasining ilk limit teoremalaridan hisoblanadi.

Teorema 1. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Bu munosabat katta sonlar qonuni haqidagi teoremaning ixtiyoriy bir xil taqsimlangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun o'rinli bo'lishidan kelib chiqadi.

Teorema 2. (Bernulli sxemasi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni) Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left(\sup_{k\geq n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Isbot. Birinchi navbatda, ehtimollik $P(\cdot)$ ostidagi ifodaning hodisa ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\left\{\omega;\ \sup_{k\geq n}\left|\frac{S_k(\omega)}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$= \bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega;\ \left|\frac{S_k(\omega)}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \in \mathfrak{I}.$$

Chebishev tengsizligiga asosan,

$$P\left(\sup_{k\geq n}\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\left|\frac{S_k}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_k}{k} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{E(S_k - kp)^4}{k^4\varepsilon^4}. \tag{1}$$

Oxirgi yig'indidagi qavsni ochib quyidagi munosabatni olamiz:

$$E(S_k - kp)^4 = E\left(\sum_{j=1}^{k}(\xi_j - p)\right)^4 = \sum_{j=1}^{k} E(\xi_j - p)^4 + 6\sum_{i<j}(\xi_i - p)^2(\xi_j - p)^2 =$$

$$= k\left(pq^4 + qp^4\right) + 3k(k-1)(pq)^2 \leq k + k(k-1) = k^2 \tag{2}$$

Bu yerda

$$\max_{0\leq x\leq 1} x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

elementar tengsizlikdan foydalanildi. Endi (1) va (2) munosabatlardan

$$P\left(\sup_{k\ge n}\left|\frac{S_k}{k}-p\right|\ge\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-4}\sum_{k=n}^{\infty}k^{-2}\to 0,\quad n\to\infty \qquad (3)$$

teorema 2 isbot etildi.

Izoh: (1) tengsizlikni o'rinli bo'lishligida biz Chebishev tengsizligini to'rtinchi momenti bilan birga qo'lladik. Agar bu munosabatda Chebishev tengsizligini ikkinchi tartibdagi moment orqali qo'llasak, teoremani isbotini beradigan (3) bahoni ololmagan bo'lar edik.

Natija 1. Agar $f(x)-[0,1]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$\sup_{0\le p\le 1}\left|Ef\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right|\to 0,\quad n\to\infty, \qquad (4)$$

Haqiqatdan ham, isbotlangan teoremaga asosan

$$E\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right|\le E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right|;\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)+$$

$$+E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right|;\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\le\sup_{|x|\le\varepsilon}\left|f(p+x)-f(p)\right|+o(1)$$

Bu yerda tasodifiy miqdor ξ uchun uning "toraytirilgan" o'rta qiymati $(A\subset\Omega,\ A\in\mathfrak{I})$

$$E(\xi;A)=\int_A\xi dP=E\xi I_A=\int_\Omega\xi I_A dP$$

ishlatlldi va har qanday $A\in\mathfrak{I}$, uchun $E\xi\subseteq E(\xi;A)+E(\xi;\overline{A})$ tengsizlikdan foydalanildi.

Endi isbot etilgan natijaning analiz kursidagi uzluksiz funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish masalasidagi tatbiqiga o'tamiz.

Natija 2. Agar $f(x)$ funksiya $[0,1]$oraliqda uzluksiz bo'lsa, $n\to\infty$ da

$$\sup_{0\le x\le 1}\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-f(x)\right|\to 0.$$

Keltirilgan natija isbot etilgan (4) limit munosabatning boshqa yozuvi, xolos. Haqiqatdan ham, S_n binomial taqsimotga ega ekanligidan

$$Ef\left(\frac{S_n}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P(S_n=k)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

Bu natija uzluksiz funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish mumkinligi haqidagi Veyershtras teoremasining sodda isbotini beradi va unda aniq ko'rinishdagi

$$B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

Bernshteyn pohnomlari foydalaniladi.

§ 5.2. Lokal limit teorema

Yuqorida biz Bernulli sxemasida n ta tajribada biror hodisaning k marta $(k\le n)$ ro'y berish ehtimolligi

$$P(S_n=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=\overline{0,n},\ 0<p<1$$

binomial taqsimot orqali ifoda qilinganini ko'rgan edik. Lekin sodda

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formuladan kelib chiqadiki, n va k larning katta qiymatlarida binomial taqsimot bo'yicha hisoblash ishlari katta qiyinchiliklarga duch keladi. Shu munosabat bilan $P(S_n=k)$ ehtimolliklar uchun $n\to\infty$ da asimptotik formulalar topish zaruriyati yuzaga keladi. Umuman, ehtimolliklar nazariyasida ayrim $P(S_n=k)$ ko'rinishdagi ehtimolliklar uchun qulay asimptotik formulalar topish masalalari lokal limit teoremalari nomi bilan o'rganiladi.

Kelgusida $a_n\sim b_n$ belgi, berilgan $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar uchun

$$\frac{a_n}{b_n}\to 1,\qquad n\to\infty$$

ekanligini anglatadi (bu holda $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ lar ekvivalent ketma-ketllklar deb hisoblanadi). Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$H(x)=x\ln\frac{x}{p}+(1-x)\ln\frac{1-x}{1-p},\qquad p^*=\frac{k}{n} \qquad (1)$$

Teorema 1. $k\to\infty$ va $n-k\to\infty$ da

$$P(S_n=k)=P\left(\frac{S_n}{n}=p^*\right)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\{-nH(p^*)\} \qquad (2)$$

Isbot. Analiz kursidan yaxshi ma'lum bo'lgan

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n},\qquad n\to\infty$$

Stirling formulasidan foydalanamiz. Bu holda

$$P(S_n=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\times\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\left\{-k\ln\frac{k}{n}-(n-k)\ln\frac{n-k}{k}+k\ln p+(n-k)\ln(1-p)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\cdot\exp\left\{-n\left[p^*\ln p^*+(1-p^*)\ln(1-p^*)-p^*\ln p-(1-p^*)\ln(1-p)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\left\{-nH(p^*)\right\}.$$

Teorema 1 isbot bo'ldi va undan quyida biz qiziqarli xulosalar chiqarishda foydalanamiz.

(1) formulada aniqlangan $H(x)$ funksiya (0,1) oraliqda hamma tartibli hosilalarga ega va bevosita quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$H'(x)=\ln\frac{x}{p}-\ln\frac{1-x}{1-p},\qquad H''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$$

va umuman

$$H^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k(k-2)!}{x^{k-1}}+\frac{(k-2)!}{(1-x)^{k-1}},\quad k\geq 2. \qquad (3)$$

Agar $p^*=\frac{k}{n}$ ning p ga yaqin qiymatlarida, ya'ni $p^*-p\to 0$ $(k\to\infty, n\to\infty)$ da

$$H(p^*)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\right)(p^*-p)^2+o\left(|p^*-p|^3\right) \qquad (4)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikda Teylor formulasidan va

$$H(p)=H'(p)=0$$

ekanligidan foydalanildi.

Teoremadagi (2) va (3), (4) tengliklardan foydalanib, $p^*\sim p$, $n(p^*-p)^3\to 0$ munosabatlar o'rinli bo'lgan holda $(q=1-p)$

$$P(S_n=k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{n}{2pq}\left(p^*-p\right)^2\right\}$$

asimptotik formulani hosil qilamiz va undan

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{npq}},\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

belgilashlardan foydalanib, quyidagi natijani olamiz.

Natija 1. Agar $u=n(p^*-p)=k-np=o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ bo'lsa,

$$P(S_n=k)=P(S_n-np=u)\sim\varphi(u\Delta)\cdot\Delta.$$

Ko'p ishlatiladigan belgilashlarga asosan

$$a(x)=o(b(x)),\qquad a(x)=O(b(x)),\qquad x\to x_0$$

munosabatlar mos ravishda

$$b(x)>0, \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{b(x)}=0, \qquad \lim_{x\to x_0}\sup\frac{a(x)}{b(x)}<\infty$$

ekanligini anglatadi. Keltirilgan natijalardan

$$\sqrt{npq}P(S_n=k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

asimptotik formulani hosil qilamiz va u Muavr-Laplas lokal limit teoremasi nomi hilan ehtimolliklar nazariyasining asosiy teoremalaridan hisoblanadi.

Misol. Toq sondagi $n=2m+1$ hayat a'zolaridan har biri boshqalarga bog'liq bo'lmagan holda $p=0,7$ ehtimollik bilan to'g'ri qaror qabul qiladi. Ko'pchilik ovoz bilan qabul qilinadigan to'g'ri qarorning $0,99$ dan kam bo'lmagan ehtimollik bilan qabul qilinishi uchun hayat a'zolarinimg minimal soni qancha bo'lishi kerak?

Yechish. Tasodifiy miqdor $\xi_k=1$ bo'ladi, agar hayatning k – a'zosi to'g'ri qaror qabul qilsa, aks holda $\xi_k=0$ deb hisoblanadi. Agar $S_n=\xi_1+...+\xi_n$ bo'lsa, biz o'rganayotgan masalaning yechimi

$$P(S_n\le m)\le 0,01$$

tengsizlikni qanoatlantruvchi n larning toq sondagi qiymatlari qiziqtiradi. Tushunarliki, qo'yilgan masalaning yechimi n ning katta qiymatlarida aniq bo'ladi. Yuqorida biz Binomial taqsimotning xossalarini o'rganishda

$$\frac{(n+1-m)p}{(n+1)p-m}P(S_n=m)\approx\frac{p}{2p-1}P(S_n=m)$$

taqribiy tenglikni keltirgan edik.
Biz o'rganayotgan masala uchun

$$p^*\approx\frac{1}{2}, \qquad H\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln 4p(1-p), \qquad H'\left(\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1-p}{p}$$

Teorema 1 ga asosan

$$P(S_n\le m)\simeq\frac{p}{2p-1}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\exp\left\{-nH\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right\}\approx$$

$$\approx\frac{p}{2p-1}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\exp\left\{-nH\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}H'\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\approx\frac{\sqrt{2p(1-p)}}{2p-1\sqrt{\pi n}}\left(\sqrt{4p(1-p)}\right)^n\approx$$

$$\approx 0,915\frac{1}{\sqrt{n}}(0,84)^{\frac{n}{2}}$$

Oxirgi munosabatning o'ng tomonidagi

$$a(n)=0{,}915\frac{1}{\sqrt{n}}(0{,}84)^{\frac{n}{2}}$$

ifoda monoton kamayuvchi funksiya bo'ladi. Endi $a(n)=0{,}01$ tenglamani yechib, masalaning yechimi bo'lgan $n=33$ qiymatini olamiz. Agar Binomial taqsimotni aniq ko'rinishi bo'lgan formuladan foydalansak ham, $n=33$ javobni olgan bo'lar edik. Bu esa, teorema 1 dagi taqribiy formula yuqori darajada aniq bo'lishini ko'rsatadi.

Polinimial taqsimot uchun asimptotik formulalar Bernulli sxemasidagi binomial taqsimot uchun isbotlangan lokal teoremalarning umumlashtirilgan varianti bo'ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$p^*=\frac{k}{n}, \qquad H(x)=\sum x_j \ln\frac{x_j}{p_j}, \quad x=(x_1,...,x_d)$$

Stirling formulasidan kelib chiqadigan

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}e^{-n}\cdot n^n, \qquad n\to\infty$$

asimptotik munosabatdan foydalanib, quyidagi teoremani isbot etish mumkin.

Teorema. Agar d ta $k_1,...,k_d$ o'zgaruvchilardan har biri 0 yoki cheksizga intilsa,

$$P(S_n=k)\sim(2\pi n)^{\frac{(1-k_0)}{2}}\left(\prod_{\substack{j=1\\ p_j^*\neq 0}}^{d} p_j^*\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-nH(p^*)\}$$

va bu yerda $k_0-k_1,...,k_d$ o'zgaruvchilardan nolga teng bo'lmaganlari soni.

§ 5.3. Muavr-Laplas teoremasi va uning aniq varianti

O'zaro bog'liqsiz Bernulli tasodifiy miqdorlarining yig'indisi

$$S_n=\xi_1+...+\xi_n$$

taqsimotini o'rganishni davom ettiramiz. Bu yerda

$$P(\xi_1=1)=...=P(\xi_n=1)=p$$

$$P(\xi_1=0)=...=P(\xi_n=0)=q=1-p.$$

Agar

$$\overline{S}_n=\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}$$

deb olsak,

$$P\left(a<\overline{S}_n<b\right)=\sum_{a\sqrt{npq}<z<b\sqrt{npq}} P\left(S_n-np=z\right) \qquad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz ($a<b$ lar fiksirlangan sonlar).

Oldingi paragraflarda keltirilgan

$$Z_{nk}=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Delta Z_{nk}=\Delta=Z_{n(k+1)}-Z_{nk}=\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

belgilashlarni hisobga olgan holda, (1) tenglikda $P\left(S_n-np=z\right)$ o'rniga $\Delta\varphi(z\Delta)=\varphi(z\Delta_{nk})\Delta_{nk}$ ifodani qo'ysak,

$$P\left(a<\overline{S}_n<b\right)\approx\sum_{a\sqrt{npq}<z<b\sqrt{npq}}\varphi(z\Delta)\approx\int_a^b\varphi(x)dx$$

integral yig'indini hosil qilamiz. Demak, oxirgi taqribiy tenglikdan esa,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(a<\overline{S}_n<b\right)=\int_a^b\varphi(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (2)$$

munosabat o'rinli bo'lishligi kelib chiqadi, bu yerda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Bu (2) tenglik Muavr-Laplasning integral limit teoremasi deb ataladi (umuman ehtimollar nazariyasida taqsimot funksiyalar uchun isbotlangan limit teoremalarni "integral limit teoremalar" deb hisoblashadi).

Quyida biz binomial taqsimot uchun oldingi paragrafda keltirilgan lokal limit teoremalardan foydalanib, (2) limit munosabatni aniqlashtirilgan variantini isbot etamiz (eslatib o'tamizki, lokal limit teorema deb, ayrim $P\left(S_n=k\right)$ ehtimolliklar uchun isbotlangan limit munosabatlar aytiladi).

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$a=\frac{A-np}{\sqrt{npq}}, \qquad b=\frac{B-np}{\sqrt{npq}}$$

bu yerda A va B lar butun sonlar.

Teorema 1. $b>a$, $c=\max\left(|a|,|b|\right)$ va $\rho=\frac{c^3+3c}{3}\Delta+\frac{\Delta^2}{2}$ bo'lsin. Agar

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{npq}}\le\frac{1}{2}, \qquad \rho\le\frac{1}{2} \text{ bo'lsa, u holda}$$

$$P(A\le S_n<B)=P\left(a\le \overline{S}_n<b\right)=\int_a^b \varphi(u)du(1+\theta_1\Delta c)(1+2\theta_2\rho) \qquad (3)$$

va bu yerda $|\theta_i|\le 1, \quad i=1,2.$

Bu teorema ko'rsatadiki (3) ning chap tomoni a va $b$lar katta bo'lganda ham, $\Phi(b)-\Phi(a)$ga ekvivalent bo'lishi mumkin. Keltirilgan shartlar bajarilganda $\Phi(b)-\Phi(a)$ ayirma 0ga yaqinlashishi mumkin va (2) limit munosabatdagi nisbiy xatolikni o'rganish qulay bo'ladi.

Isbot: Eng avvalo izohlab o'tamizki,

$|z|=|k-np|<c\sqrt{npq}$ tengsizlik bajarilganda oldingi paragrafdagi teoremani shartlari bajariladi. Haqiqatan ham,

$$\left|p^*-p\right|<\frac{1}{2}\min(p,q)$$

tengsizlikni o'rinli bo'lishi uchun

$$|k-np|<\frac{npq}{2}=\frac{1}{2\Delta^2}$$

tengsizlik bajarilishi yetarli bo'ladi va oxirgi tengsizlik $\frac{c}{2\Delta}$ bo'lganda bajariladi, lekin $\rho\le\frac{1}{2}$ ekanligidan

$$\frac{c\left(c^2+3\right)\Delta}{3}<\frac{1}{2}, \qquad c\Delta<\frac{1}{2}$$

tengsizliklarni olamiz.

Shunday qilib,

$$a\sqrt{npq}\le z<b\sqrt{npq}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday k uchun oldingi paragrafdagi teoremadan foydalanib, quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$P(A\le S_n<B)=\sum_{a\sqrt{npq}<z<b\sqrt{npq}}P(S_n=k)=$$

$$=\sum_{a\le z\Delta<b}\varphi(z\Delta)\Delta\left[1+\left(\exp\left\{\theta\left(\frac{|z|^3\Delta^4}{3}+\left(|z|+\frac{1}{6}\right)\Delta^2\right)\right\}-1\right)\right],$$

bu yerda $|\theta|\le 1$. Har qanday $\rho\le 1$ bo'lganda, $\left|\frac{e^\rho-1}{\rho}\right|<(e-1)<z$ tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun (4) formuladagi qoldiq had (bunda $z\Delta=c$)

$$\left|\exp\left\{\theta\left(\frac{c^3\Delta}{3}+c\Delta+\frac{\Delta^2}{6}\right)-1\right|\le 2\theta\left(\frac{c^3\Delta}{3}+c\Delta+\frac{\Delta^2}{6}\right)=2\theta\rho.$$

Demak,

$$P(A \le S_n \le B) = \sum_{a \le z\Delta < b} \varphi(z\Delta)\Delta(1+2\theta_1\rho) \qquad (5)$$

va oldingilardek $|\theta_1| \le 1$.

Endi (5) tenglikning o'ng tomonidagi yig'indini o'rganamiz. Har qanday differensiallanuvchi $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$\left|\Delta\varphi(x) - \int_x^{x+\Delta} \varphi(u)du\right| \le \frac{\Delta^2}{2} \max_{x \le u \le x+\Delta} |\varphi'(u)| \qquad (6)$$

Lekin $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ bo'lganda,

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x)$$

va $\varphi(u)$ ning $[x, x+\Delta]$, $|x| \le c$ oraliqdagi eng katta qiymati, shu oraliqdagi eng kichik qiymatidan $\exp\left\{c\Delta + \frac{\Delta^2}{2}\right\}$ ko'paytuvchiga farq qiladi, xolos. Shuning uchun ham $|x| \le c$ bo'lganda (6) tensizlikka ko'ra,

$$\left|\Delta\varphi(x) - \int_x^{x+\Delta} \varphi(u)du\right| \le \frac{\Delta^2 c}{2} e^{c\Delta + \frac{\Delta^2}{2}} \min_{x \le u \le x+\Delta} \varphi(u) \le \frac{\Delta c}{2} e^{c\Delta + \frac{\Delta^2}{2}} \int_x^{x+\Delta} \varphi(u)du.$$

Endi $c\Delta + \frac{\Delta^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, $\quad e^{c\Delta + \frac{\Delta^2}{2}} \le 2$

tengsizliklarni hisobga olib,

$$\Delta\varphi(x) \le \int_x^{x+\Delta} \varphi(u)du(1+\theta_1\Delta c), \qquad |\theta_1| \le 1$$

munosabat o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Oxirgi va (5) formulalardan teoremaning isboti kelib chiqadi.

§ 5.4. Binomial taqsimotni Puasson taqsimoti bilan approksimatsiyalash haqidagi teoremalar

Biz yuqorida npq yetarli darajada katta bo'lganda, Muavr-Laplas teoremasi binomial taqsimot uchun yaxshi approksimatsiya formulalari mavjudligini tasdiq etishini ko'rgan edik. Agar p va q lar fiksirlangan musbat sonlar bo'lsa, npq son n bilan bir vaqtda kattalashib boraveradi. Lekin, masalan $p = 0,001$, $n = 1000$ va $np = 1$ bo'lganda, nima qilish kerak degan savol o'z-o'zidan yuzaga keladi. Bu holda n yetarli katta bo'lgani bilan Muavr-Laplas teoremasini qo'llash hech qanday ma'noga ega bo'lmaydi. Bunday hoilarda binomial taqsimot

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ 0 \le k \le n$$

uchun Puasson taqsimoti π_λ yaxshi approksimatsiya formulasi bo'lar ekan. Eslatib o'tamizki, Puasson taqsimoti

$$\pi_\lambda(B) = \sum_{0 \le k \in B} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

Teorema 1. Har qanday B to'plam uchun

$$|P(S_n \in B) - \pi_\lambda(B)| \le \frac{\lambda^2}{n},\ \lambda = np$$

Bu teoremani $P(S_n = k)$ uchun keltirilgan formuladan foydalanib, lokal limit teorema sifatida isbot etish mumkin. Lekin, teoremaning isbotini ehtimolliklar nazariyasida ko'p qo'llaniladigan "bitta ehtimollik fazosi metodi" bilan keltiramiz. Bu metodning asosiy g'oyasini tushunish qiyin emas: S_n tasodifiy miqdor aniqlangan ehtimollik fazosi $(\Omega, \Im, P)$ da, shunday S_n^* tasodifiy miqdorlar aniqlaymizki, ular S_n ga mumkin qadar yaqin bo'lib, S_n^* Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Keltirilgan "bitta ehtimollik fazosi metodi" qo'shimcha qiyinchiliklar yuzaga kelmagan holda, har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun umumlashtirilishi mumkin. Bu holatdan foydalanib, har xil taqsimlangan Bernulli tasodifiy miqdorlari uchun umumlashgan teoremani keltiramiz va undan teorema 1 xususiy hol sifatida kelib chiqadi.

Shunday qilib, faraz qilamizki $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Bernulli tasodifiy miqdorlari

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & p_j \\ 0, & 1 - p_j \end{cases}$$

o'zaro bog'liqsiz va $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ bo'lsin. Quyidagi teorema $P(S_n = k)$ ehtimollikni, p_j lar kichik, $\lambda = \sum_{j=1}^{n} p_j$ yig'indi, esa "1 bilan taqqoslanadigan" miqdor bo'lgan holda, baholaydi.

Teorema 2. Har qanday B to'plam uchun

$$|P(S_n \in B) - \pi_\lambda(B)| \le \sum_{j=1}^{n} p_j^2.$$

Teoremaning isbotiga o'tishdan oldin, Puasson taqsimotining muhim bo'lgan xossasini keltiramiz.

Lemma. Musbat va butun qiymatli bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar η_1 va η_2 mos ravishda π_{λ_1} va π_{λ_2} Puasson taqsimotiga ega bo'lsalar, $\eta_1 + \eta_2$ yig'indi $\pi_{\lambda_1 + \lambda_2}$ taqsimotga ega bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, to‘la ehtimollik formulasiga asosan,

$$P(\eta_1+\eta_2=k)=\sum_{j=0}^{k}P(\eta_1=j)P(\eta_2=k-j)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\sum_{j=0}^{k}C_k^j\lambda_1^j\lambda_2^{k-j}=$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Teorema 2 ning isboti. $\Omega=[0,1]$ oraliqda aniqlangan bog‘liqsiz $\omega_1,...,\omega_n$ tasodifiy miqdorlar, shu oraliqda tekis taqsimotga ega bo‘lsin, ya’ni har bir ω_k ni $[0,1]$ oraliqda aniqlangan koordinat funksiya $(\xi(\omega_k)=\omega_k)$ deb tushunish mumkin. Demak, $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)$ vektorni

$$\Omega^n=[0,1]\times...\times[0,1]=[0,1]^n$$

n o‘lchovli kubda aniqlangan va unda tekis taqsimlangan deb qabul qilish mumkin.

Endi Ω^n da ξ_j va ξ_j^* tasodifiy miqdorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\xi_j(\omega)=\begin{cases}0, & \omega_j<1-p_j,\\ 1, & \omega_j\ge 1-p_j\end{cases}$$

bo‘lsa,

$$\xi_j^*(\omega)=\begin{cases}0, & \omega_j<e^{-p_j},\\ k\ge 1, & \omega_j\in[\pi_{k-1},\pi_k)\end{cases}$$

bo‘lsa,

$$\pi_k=\sum_{m<k}e^{-p_j}\frac{(p_j)^m}{m!},\quad k=0,1,2,...$$

Keltirilgan va konstruktiv ravishda aniqlangan tasodifiy miqdor $\xi_j(\omega)$ lar bog‘liqsiz va har biri Bernulli taqsimotiga ega, $\xi_j^*(\omega)$ tasodifiy miqdorlar ham bog‘liqsiz (chunki ω_j lar bog‘liqsiz) va ulardan har biri π_{p_j} Puasson taqsimotiga ega bo‘ladi. Qayd qilib o‘tamizki, $1-p_j\le e^{-p_j}$ bo‘lgani uchun, $\xi_j(\omega)\ne\xi_j^*(\omega)$ agar

$$\omega_j\in[1-p_j,e^{-p_j}]\cup[e^{-p_j}+p_je^{-p_j},1]$$

bo‘lsa. Demak,

$$P(\xi_j\ne\xi_j^*)=(e^{-p_j}-1+p_j)+(1-e^{-p_j}-p_je^{-p_j})=$$

$$=p_j(1-e^{-p_j})\le p_j^2$$

Endi $S_n^* = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^*$ deb belgilasak, lemmaga asosan bu yig'indi π_λ Puasson taqsimotiga ega bo'ladi. Oxirgi tengsizlikdan

$$P\left(S_n \neq S_n^*\right) \leq P\left(\bigcup_j \left(\xi_j \neq \xi_j^*\right)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} P\left(\xi_j \neq \xi_j^*\right) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j^2 .$$

Quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$P(S_n \in B) = P\left(S_n \in B,\, S_n = S_n^*\right) + P\left(S_n \in B,\, S_n \neq S_n^*\right) =$$

$$= P\left(S_n^* \in B\right) - P\left(S_n^* \in B,\, S_n \neq S_n^*\right) + P\left(S_n \in B,\, S_n \neq S_n^*\right)$$

va bundan

$$\left|P(S_n \in B) - P\left(S_n^* \in B\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|P\left(S_n^* \in B,\ S_n \neq S_n^*\right) - P\left(S_n \in B,\, S_n \neq S_n^*\right)\right| \leq$$

$$\leq P\left(S_n \neq S_n^*\right) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j^{\,2}$$

Teorema 2 isbot bo'ldi.

Izoh. Yig'indi S_n va S_n^* larni boshqa (teorema 2 ning isbotidagisidan farqli) bitta ehtimollik fazosida aniqlash mumkin va undan $P(S_n \in B)$ taqsimot uchun Puasson approksimatsiyasi yanada aniqroq bo'ladi.

Haqiqatan ham, bog'liqsiz tasodifiy miqdor $\xi_j^*(\omega)$ lar parametrlari

$$r_j = -\ln\left(1 - p_j\right) \geq p_j$$

bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. Bu holda,

$$P\left(\xi_j^* = 0\right) = e^{-r_j} = 1 - p_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

va $\xi_j(\omega) = \min\left(1, \xi_j^*(\omega)\right)$ deb olsak, bu tasodifiy miqdor parametri p_j bo'lgan Bernulli taqsimotiga ega bo'ladi. Oxirgi jumladan esa,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} \left\{\xi_j(\omega) \neq \xi_j^*(\omega)\right\}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P\left(\xi_j^* \geq 2\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(1 - e^{-r_j} - r_j e^{-r_j}\right)$$

ekanligini olamiz.

Endi $r = -\ln(1 - p)$ bo'lganda,

$$1-e^{-r}-re^{-r}=p+(1-p)\ln(1-p)\le p+(1-p)\left(-p-\frac{p^2}{2}\right)\le$$
$$\le\frac{p^2}{2}(1+p)$$
tengsizlik o'rinli bo'lishini eslatib o'tamiz. Demak, keltirilgan Puasson approksimatsiya uchun
$$P\left(S_n\ne S_n^*\right)\le\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_j^2\left(1+p_j\right)$$
va $\lambda=-\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-p_j\right)$ deb olsak $\left(\lambda\ge\sum_{j=1}^{n}p_j\right)$, yuqoridagi mulohazalarni takrorlab
$$\left|P(S_n\in B)-\pi_\lambda(B)\right|\le\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_j^2\left(1+p_j\right)$$
bahoni olamiz.

Keltirilgan baho ("ozgina siljigan parametr" bilan) teorema 2 dagi bahodan yaxshiroq va keyingi ehtimollik fazosida $\xi_j\le\xi_j^*$, $S_n\le S_n^*$ bo'lib,
$$P(S_n\ge k)\le P\left(S_n^*\ge k\right)=\pi_\lambda([k,\infty)).$$

Yana ξ_k tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan holga qaytamiz. Isbotlangan teorema 2 dan Muavr – Laplas tipidagi lokal teoremalarni olish uchun bu masalani boshqacharoq qo'yishga to'g'ri keladi. Haqiqatan ham, np miqdor n katta bo'lganda chegaralangan bo'lishi uchun $p=P(\xi_k=1)$ ehtimollik nolga intilish zarur bo'ladi. Demak, $np\sim\lambda$ munosabatga $(0<\lambda<\infty)$ fiksirlangan bitta tasodifiy miqdorlar
$$\xi_1,\xi_2,\ldots$$
ketma-ketligini o'rganish bilan erishib bo'lmaydi.

Shuning uchun quyidagi tasodifiy miqdorlarning seriyalari ketma-ketligini o'rganishga to'g'ri keladi:
$$\begin{array}{l}\xi_{11}\\ \xi_{21},\xi_{22}\\ \ldots\quad\ldots\\ \xi_{n1},\xi_{n2},\ldots,\xi_{nn}\end{array}$$
bu yerda birinchi indeks seriya nomerini, ikkinchisi esa seriyadagi tasodifiy miqdor nomerini anglatadi. Keltirilgan jadval tasodifiy miqdorlarning seriya sxemasi deb atalib, u "uchburchak" ko'rinishida bo'ladi (n – seriya n ta tasodifiy miqdorlardan iborat).

Faraz qilaylik, n – seriyani tashkil etuvchi ξ_{nk} tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lib Bernulli taqsimotiga ega bo‘lsin:

$$\xi_{nk} = \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & 1-p_n \end{cases} \qquad k = 1,2,\dots,n$$

va $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ deb belgilaylik.

Puasson teoremasi. Agar $n \to \infty$ da $np_n \to \lambda > 0$ bo‘lsa,

$$P(S_n = k) \to \pi_\lambda(\{k\}). \qquad (1)$$

Bu teorema yuqoridagi teorema 1 ning natijasi bo‘lib, bu holda $B = \{k\}$ to‘plam bitta manfiy bo‘lmagan butun sondan iborat va

$$\pi_\lambda(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Keltirilgan teoremaning isbotini bevosita

$$P(S_n = k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

formulasidan olish ham mumkin:

$$P(S_n = 0) = q_n^n = e^{n\ln(1-p_n)} \sim e^{-\lambda},$$

$$\frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p_k}{1-p_n} \sim \frac{\lambda}{k+1}.$$

Demak, $n \to \infty$ da

$$P(S_n = k+1) \sim \frac{\lambda}{k+1} P(S_n = k).$$

Bu rekkurent limit munosabatni k ga nisbatan takrorlab,

$$P(S_n = k) \sim \frac{\lambda^k}{k!} P(S_n = 0) \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

(1) asimptotik formulaning isbotini olamiz.

Teorema 2 dan ξ_{nk} tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo‘lmasa ham, ular 0 va 1 dan farqli qiymatlarni qabul qilgan umumiy holda ham, Puasson teoremasining analoglarini keltirib chiqarish mumkin.

Natija. Bog‘liqsiz $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}$ tasodifiy miqdorlar ehtimolliklar taqsimoti

$$p_{nj} = P(\xi_{nj} = 1)$$

quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\max_j p_{nj} \to 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{nj} \to \lambda > 0$$

$$P(\xi_{nj} = 0) = 1 - p_{nj} + o(p_{nj})$$

u holda (1) asimptotik formula o‘rinli.

Bu natijaning isbotida teorema 2 dan va

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n}\left\{\xi_{nj}\neq 0,\ \xi_{nj}\neq 1\right\}\right)\leq\sum_{j=1}^{n}o\left(p_{nj}\right)=o(1) \qquad (2)$$

munosabatdan foydalaniladi. Bu yerdagi (2) tengsizlik ξ_{nj} tasodifiy miqdorlar 1 ga yaqin ehtimolliklar bilan faqat 0 va 1 qiymatlarni qabul qilishini ko'rsatadi.

Keltirilgan natijalar qatorida teorema 1 va 2 lardagi kabi (har qanday B to'plam uchun)

$$\lim_{n\to\infty}P\left(S_n\in B\right)=\pi_\lambda(B) \qquad (3)$$

ko'rinishdagi limit teoremalarni isbotlash mumkin. Agar $np^2\to 0$ bo'lsa, teorema 1 shartlarida (3) limit munosabat $np\to\infty$ bo'lgan holda ham o'rinli bo'lishi mumkin. Bir vaqtning o'zida $np\to\infty$ bo'lgan holda S_n yig'indi taqsimotini Muavr-Laplas teoremasiga asosan normal taqsimot bilan ham approksimatsiyalash mumkin, chunki bu holda $p<q$ deb hisoblasak

$$npq>\frac{1}{2}np\to\infty$$

Demak, shunday ketma-ketliklar

$$p\in\left\{p: np\to\infty,\ np^2\to 0\right\}$$

mavjudki, ular uchun normal va Puasson approksimatsiyalari bir vaqtda o'rinli bo'ladi.

Teorema 2 dan xulosa qilish mumkinki, Puasson teoremasidagi yaqinlashish tezligi n^{-1} miqdor bilan aniqlanadi va

$$P\left(S_n=0\right)-\pi_0=e^{n\ln(1-p)}-e^{-\lambda}\sim\frac{\lambda^2}{2n}e^{-\lambda}$$

munosabat o'rinli ekanligidan bu bahoni yaxshilab bo'lmaydi.

Endi Puasson teoremasidagi (1) asimptotik munosabat k va λ larning quyidagi

$$k=o\left(n^{2/3}\right), \qquad \lambda=o\left(n^{2/3}\right), \qquad (k-\lambda)=o(\sqrt{n}) \qquad (*)$$

qiymatlarida ham saqlanib qolishini ko'raylik.

Haqiqatan ham,

$$P\left(S_n=k\right)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(1-p)^{n-k}e^{np}=\pi_\lambda\left(\{k\}\right)e^{\varepsilon(n,k)}$$

Demak, k va λ larni keltirilgan qiymatlarida

$$\varepsilon(n,k) = \ln\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(1-p)^{n-k}e^{np}\right] = o(1) \qquad (4)$$

ekanligini isbotlash kerak bo'ladi. Biz (4) dagi qoldiq liadining kamayish tartibi bahosini ham keltiramiz va quyidagi tenglik to'g'ri ekanligini isbotlaymiz:

$$\varepsilon(n,k) = \frac{k-(k-\lambda)^2}{2n} + O\left(\frac{k^3+\lambda^3}{n^2}\right) \qquad (5)$$

va undan foydalanib,

$$P(S_n = k) = \left[1 + \frac{k-(k-\lambda)^2}{2n} + O\left(\frac{k^3+\lambda^3}{n^2}\right)\right]\pi_\lambda(\{k\})$$

tenglikni hosil qilib, k va λ larning o'sish tartibi (*) munosabatlarni qanoatlantirganda Puasson teoremasining isbotini olamiz.

Endi (5) munosabatni isbotlaymiz. Agar $\alpha \to 0$ da

$$\ln(1-\alpha) = -\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^3)$$

ekanligini hisobga olsak (4) va (5) limit munosabatlar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{j}{n}\right) = -\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right) = \frac{k(k-1)}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)$$

$$(n-k)\ln(1-p) + np = (n-k)\left(-p - \frac{p^2}{2} + O(p^3)\right) + np =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2n} + \frac{k\lambda}{n} + O\left(\frac{\lambda^3}{n^2}\right).$$

Aytib o'tilganlardan xulosa qilsak, binomial taqsimotning asimptotik analizida normal taqsimot (Muavr-Laplas teoremasi) va Puasson taqsimotlari muhim ahamiyatga ega bo'lar ekan.

§ 5.5. Bernulli sxemasi uchun ba'zi muhim teoremalar

Bernulli sxemasida yuzaga keladigan binomial taqsimotning asimptotik xossasini o'rganishda

$$H(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$$

funksiyaning roli muhim ekanligini oldingi paragraflarda ko'rib o'tgan edik.

Oldingi paragraflardagi kabi

$$P(S_n=k)=P(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

$\xi_1,...,\xi_n$ lar esa, o‘zaro bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan Bernulli tasodifiy miqdorlari, ya’ni

$$P(\xi_1=1)=p, \quad P(\xi_1=0)=q=1-p.$$

Quyidagi teoremada keltirilgan tengsizliklar binomial taqsimot parametrlarining har qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi (demak, n va p larning ixtiyoriy qiymatlarida).

Teorema. Har qanday z uchun

$$P(S_n-np\ge z)\le \exp\left\{-nH\left(p+\frac{z}{n}\right)\right\},$$

$$P(S_n-np\le -z)\le \exp\left\{-nH\left(p-\frac{z}{n}\right)\right\}. \qquad (1)$$

Isbot: Agar tasodifiy miqdor $\xi>0$ bo‘lsa,

$$P(\xi\ge x)=P\left(e^{\lambda\xi}\ge e^{\lambda x}\right)\le e^{-\lambda x}Ee^{\lambda\xi}, \quad \lambda>0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi va unda $\xi=S_n$ deb qabul qilib,

$$P(S_n\ge np+z)\le e^{-\lambda(np+z)}Ee^{\lambda S_n} \qquad (2)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Tasodifiy miqdorlar $\xi_1,...,\xi_n$ bog‘liqsiz ekanligini hisobga olib,

$$e^{\lambda S_n}=\prod_{k=1}^{n}e^{\lambda\xi_k}$$

tenglikdan quyidagilarni yoza olamiz.

$$Ee^{\lambda S_n}=\prod_{k=1}^{n}Ee^{\lambda\xi_k}=\left(pe^{\lambda}+q\right)^n=\left[1+p\left(e^{\lambda}-1\right)\right]^n,$$

demak, (2) ga asosan

$$P(S_n\ge np+z)\le\left[1+p\left(e^{\lambda}-1\right)e^{-\lambda(p+\alpha)}\right]^n, \quad \alpha=\frac{z}{n}.$$

Oxirgi tengsizlikdagi kvadrat qavs ostida turgan ifoda

$$y(\lambda)=Ee^{\lambda[\xi_i-(p+\alpha)]}$$

funksiyaga teng va $y(\lambda)$

$$e^{-\lambda(p+\alpha)}, \quad p\left(e^{\lambda}-1\right)e^{-\lambda(p+\alpha)}$$

qavariq funksiyalarning yig‘indisi sifatida λ ning qavariq funksiyasi bo‘ladi. Bu funksiyaning eng kichik (minimum) qiymatini beradigan $\lambda_0=\lambda(\alpha)$ nuqta

$$-(p+\alpha)\left(1+p\left(e^{\lambda}-1\right)\right)+pe^{\lambda}=0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Aytilganlardan kelib chiqadiki

$$e^{\lambda(\alpha)}=\frac{(p+\alpha)q}{p(q-\alpha)},$$

$$\left[1+p\left(e^{\lambda(\alpha)}-1\right)e^{-\lambda(\alpha)(p+\alpha)}\right]=\frac{q}{q-\alpha}\left[\frac{p(q-\alpha)}{(p+\alpha)q}\right]^{p+\alpha}=$$

$$=\frac{p^{p+\alpha}\cdot q^{q-\alpha}}{(p+\alpha)^{p+\alpha}(q-\alpha)^{q-\alpha}}=\exp\left\{-(p+\alpha)\ln\frac{p+\alpha}{p}-(q-\alpha)\ln\frac{q-\alpha}{q}\right\}=$$

$$=\exp\{-H(p+\alpha)\}.$$

Tengsizlik (1) ning birinchisi isbot bo'ldi, ikkinchisi esa birinchisidan kelib chiqadi (agar biz uni yuzaga kelishi mumkin bo'lgan nollar soni uchun tengsizlik deb qarasak).

Bevosita

$$H(p)=H'(p)=0, \qquad H''(x)=\frac{1}{x(1-x)}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Funksiya $[0,1]$ oraliqdagi minimum qiymati $x=\frac{1}{2}$ nuqtada bo'lishligini e'tiborga olsak,

$$H''(x)\geq 4$$

Demak, p ning har qanday qiymatida

$$H(p+\alpha)\geq 4\cdot\frac{\alpha^2}{2}=2\alpha^2 \qquad (3)$$

Oxirgi (3) tengsizlikdan (1) tengsizlikdagi x har bir ehtimollik

$$\exp\{-2z^2/n\}$$

dan katta bo'lmasligiga ishonch hosil qilamiz.

Isbotlangan (1) tengsizliklarni yuqorida keltirlgan Muavr-Laplas teoremasi bilan taqqoslash uchun birinchi tengsizlikni

$$P\left(\frac{S_n}{n}\geq p^*\right)\leq\exp\{-nH(p^*)\}, \qquad p^*=\frac{k}{n}$$

ko'rinishda yozamiz. Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki, $z=o\left(n^{2/3}\right)$ bo'lganda

$$-nH\left(p+\frac{z}{n}\right)=-\frac{z^2}{2npq}+o(1), \qquad n\to\infty.$$

Bu munosabat (3) tengsizlikni hisobga olgan holda, teoremadagi (1) tengsizliklar Muavr-Laplas teoremasiga yaqin asimptotik munosabatlar ekanligini bildiradi.

Misol va masalalar

1. Fakul'tetda 500 ta talaba bor. Talabalardan k – tasi uchun 1 sentabr tug'ilgan kuni bo'lishi ehtimolini toping. Bu ehtimollikni $k=0,1,2,3$ bo'lgan hollarda hisoblang.

   Javob: $p_0 \approx 0,2541$; $p_1 \approx 0,3481$; $p_2 \approx 0,2385$; $p_3 \approx 0,1089$;

2. Aloqa tarmog'iga 1 minutda o'rta hisobda 120 ta chaqiruv kelib tushadi. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

   A={2 sekund davomida birorta ham chaqiruv bo'lmaydi}.

   B={2 sekund davomida 2 ta dan kam chaqiruv bo'ladi}.

   Javob: $P(A) \approx 0,135$, $P(B) \approx 0,677$

3. 500 betdan iborat qo'lyozmada 1300 ta xatolik mavjud. Bir betda uchraydigan xatolikning eng ehtimoliy soni va bu sonning ehtimolligini toping.

   Javob: 2 ta, $p \approx 0,251$.

VI BOB. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOTLAR KETMA-KETLIGINING YAQINLASHISH TURLARI

VI bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Tasodifiy miqdorlar ketma-kelligining ehtimollik, 1 ehtimollik bilan, (r)-tartibdagi o'rta ma'noda yaqinlashish turlari.*
- *Taqsimotlarning sust yaqinlashishi va uni metrizatsiyalash masalalari*

haqida tasavvurlarga ega ho'linadi;

- *Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi yaqinlashish turlarini taqqoslashni.*
- *Taqsimotlar fazosi ayrim olingan yaqinlashish turlariga nisbatan kompakt to'plam bo'lishini.*
- *Ehtimolliklar nazariyasida sust yaqinlashishning ko'proq qo'llanishini*

hilish va amalda qo'llay olish;

- *Ehtimollik va 1 ehtimollik bo'yicha yaqinlashish turlari katta sonlar qonuniga tatbiqlarini.*
- *Sust yaqinlashishni markaziy limit teorema bilan bog'liq ekanligini.*
- *Sust yaqinlashishda taqsimotni aniqlovchi funksiyalar sinflarini topishni*

o'rganib olish mumkin.

§ 6.1. Tasodifiy miqdorlar yaqinlashuvi

Ehtimolliklar fazosi $(\Omega, \Im, P)$ da $\{\xi_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va tasodifiy miqdor ξ aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif 1. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ehtimollik bo'yicha ξ ga intiladi deyiladi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ehtimollik bo'yicha yaqinlashish

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad n \to \infty$$

ko'rinishida belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifda $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik va tasodifiy miqdor ξ larni bitta ehtimollik fazosida aniqlangan bo'lishi talab qilinadi.

Ta'rif 2. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdor ξ ga bir ehtimollik bilan yaqinlashadi deyiladi, agar $\xi_n(\varepsilon) \to \xi(\omega)$ yaqinlashish $n \to \infty$ da $\omega \in \Omega$ bo'lgan deyarli hamma nuqtalarida o'rinli bo'lib, yaqinlashish buziladigan nuqtalar to'plami $N\subset\Omega$ uchun $P(N)=0$ bo'lsa.

Bu yerda ham $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ dagi kabi, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va limit tasodifiy miqdor bitta ehtimollik fazosida aniqlangan deb hisoblanadi.

Agar $\{\xi_n, n\geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa,

$$A=\{\xi_n \text{ ketma-ketlik } \xi \text{ ga yaqinlashadi}\}=$$
$$=\{\lim \xi_n=\xi\}=\{\omega:\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)\}$$

hodisani ko'ramiz. Haqiqatan ham, $A\subset\Omega$ hodisa ekanligiga ishonch hosil qilish uchun uni

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{\omega:|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\leq\frac{1}{k}\right\}$$

ko'rinishda yozish mumkinligini eslatib o'tish yetarli bo'ladi: bu yerda

$$A_{N,k}=\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n-\xi|\leq\frac{1}{k}\right\}$$

hodisa $|\xi_n-\xi|\leq\frac{1}{k}$ tengsizlik hamma $n\geq N$ uchun bajarilishini

$$B_k=\bigcup_{N=1}^{\infty}A_{N,k}$$

hodisa shunday N natural son mavjud bo'lib, $|\xi_n-\xi|\leq\frac{1}{k}$ tengsizlik $n\geq N$ bo'lganda bajarilishini,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$$

hodisa esa hamma k natural son uchun, shunday $N>1$ mavjud bo'lib, $n\geq N$ bo'lganda, $|\xi_n-\xi|\leq\frac{1}{k}$ tengsizlik bajarilishini, ya'ni $\lim\xi_n=\xi$ bo'lishini ko'rsatadi.

Aytib o'tilganlarga asoslanib, 1 ehtimollik bilan yaqinlashishni quyidagicha ta'riflash mumkin.

Ta'rif 2'. Agar

$$P(A)=P(\lim\xi_n=\xi)=P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n-\xi|\leq\frac{1}{k}\right\}\right)=1$$

bo'lsa, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n\geq 1\}$ tasodifiy miqdor ξ ga 1 ehtimollik bilan yaqinlashadi deyiladi va uni

$$P(\xi_n\to\xi)=1 \text{ yoki } P(\lim\xi_n=\xi)=1$$

ko'rinishida belgilanadi.

Quyidagi uncha murakkab bo'lmagan mulohazalar 1 ehtimollik bilan yaqinlashish mohiyatini oydinlashtiradi.

Agar

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)=1$$

bo'lsa, hamma k lar uchun $P(B_k)=1$ va aksincha hamma k lar uchun $P(B_k)=1$ bo'lsa,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)=1$$

Demak, 1 ehtimollik bilan $\xi_n \to \xi$ bo'lishi uchun,

$$P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n-\xi|\le\frac{1}{k}\right\}\right)=1$$

tenglik bajarilishi yetarli va zaruriy bo'lar ekan. Yuqoridagi

$$A_{N,k}=\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n-\xi|\le\frac{1}{k}\right\}$$

hodisalar ketma-ketligi monoton kamayuvchi $(A_N \subseteq A_{N+1})$ bo'lgani uchun, ehtimollikning uzluksizlik xossasiga asosan (1) bajarilishi uchun

$$\lim_{N\to\infty} P(A_{N,k})=\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n-\xi|\le\frac{1}{k}\right\}\right)=1$$

munosabatning hamma k lar uchun o'rinli bo'lishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Oxirgi munosabatda $\frac{1}{k}$ ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ bilan almashtirish mumkin. Demak, quyidagi teorema o'rinli ekan.

Teorema 1. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n\ge 1\}$ tasodifiy miqdor ξ ga 1 ehtimollik bilan yaqinlashishi uchun

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty}\{|\xi_n-\xi|\le\varepsilon\}\right)=1$$

munosabatning (har qanday $\varepsilon>0$ bo'lganda) bajarilishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Izoh. Quyidagi tengsizlik

$$P(|\xi_n-\xi|\le\varepsilon)\ge P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\{|\xi_n-\xi|\le\varepsilon\}\right)$$

o'rinli ekanligidan ξ_n ni 1 ehtimollik bilan ξ ga intilishidan, uni ξ ga ehtimollik bo'yicha, yaqinlashuvi kelib chiqadi, chunki bu holda,

$$P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=1-P(|\xi_n-\xi|\le\varepsilon)\to 0, \qquad n\to\infty$$

Natija 1. Teorema 1 ning sharti har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|\xi_n-\xi|>\varepsilon\}\right)=0 \qquad (1)$$

tenglik bajarilishiga teng kuchli bo'ladi.

Endi quyidagi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz.

$$\zeta_n = \sup_{k\ge n} |\xi_k - \xi|$$

Bu holda teorema 1 ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

Teorema 2. Ketma-ketlik $\{\xi_n, n\ge 1\}$ 1 ehtimollik bilan ξ ga intilishi uchun

$$\zeta_n \xrightarrow{P} 0,\ n\to\infty$$

munosabatlar bajarilishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$\{\zeta_n > \varepsilon\} = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lib, teorema 2 ning isboti (1) va (2) munosabatlardan kelib chiqadi.

Yuqorida biz $\left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi\right)$ limit munosabatdan $P(\lim \xi_n = \xi) = 1$ tenglik kelib chiqmasligini ko'rgan edik. Lekin ehtimollik

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$$

nolga ma'lum tezlik bilan intilsa, $\{\xi_n, n\ge 1\}$ ketma-ketlikni ξ ga 1 ehtimollik bilan yaqinlashuvi mumkin bo'ladi.

Teorema 3. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty \qquad (3)$$

bo'lsa, $P(\lim \xi_n = \xi) = 1$.

Bu teoremaning isboti

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \le \sum_{n=N}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$$

ekanligidan va (1) tenglikdan kelib chiqadi. Lekin (3) munosabatdan $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$ ehtimollikni nolga qanday tezlik bilan intilishi to'g'risida biror xulosaga kelib bo'lmaydi. O'quvchi $\{\xi_n, n\ge 1\}$ ketma-ketlikning ξ ga 1 ehtimollik yaqinlashuvi o'rinli bo'ladigan, lekin $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$ ehtimollik 0 ga xohlagancha sust intiladigan ketma-ketliklarga misollar topishi mumkin.

Keltirilgan teorema 3 dan quyidagi natijani olamiz.

Natija 2. Agar $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ bo'lsa, shunday $\{\xi_{n_k}, k\ge 1\}$ qism ketma-ketlik mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$P\left(\lim \xi_{n_k} = \xi\right) = 1.$$

Bu natijaning isboti ham oson, chunki n_k sifatida shunday indekslarni olish mumkinki, ular uchun

$$P\left(\left|\xi_n-\xi\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{1}{k^2}$$

tengsizlik bajariladi.

Teorema 3 dagi (3) shart munosabati bilan ehtimolliklar nazariyasida 1 ehtimollik bilan tavsiflanadigan xossalarni o'rganishda asosiy mezon bo'ladigan quyidagi Borel-Kantelli lemmasini keltiramiz.

Aytaylik,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

hodisalar ketma-ketligi bo'lsin. Bu ketma-ketlikdagi hodisalardan cheksiz ko'p ro'y berish hodisasi

$$\limsup A_n=\overline{\lim} A_n=\left\{A_n,\ cheksiz\ ko'p\ n\ uchun\right\}.$$

Borel – Kantelli lemmasi. Quyidagi munosabatlar o'rinli:

A) Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$ bo'lsa , $P(A_n, ch.k)=0$.

B) Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$ va $A_1, A_2, \ldots,$ hodisalar bog'liqsiz bo'lsa, $P(A_n, ch.k.)=1$

Isbot.

A) Ta'rif bo'yicha,

$$\left\{A_n, ch.k\right\}=\left\{\overline{\lim} A_n\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

oxirgi ehtimollikning uzluksizlik xossasiga asosan,

$$P(A_n, ch.k)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

Oxirgidan A) xulosa kelib chiqadi.

B) Agar $A_1, A_2, \ldots,$ hodisalar bog'liqsiz bo'lsa, $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots$ hodisalar ham bog'liqsiz bo'ladi. Bu holda har qanday $N\geq n$ uchun

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A}_k\right)=\prod_{k=n}^{N} P\left(\overline{A}_k\right)$$

va bu tenglikdan

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k\right)=\prod_{k=n}^{\infty} P\left(\overline{A}_k\right)\tag{4}$$

to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Bu yerda

$$\log(1-x)\le -x,\ 0\le x<1$$

elementar tengsizlikdan foydalansak,

$$\log\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-P(A_k)\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\log\left[1-P(A_k)\right]\le$$

$$\le -\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=-\infty$$

Demak, har qanday n uchun

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k\right)=0$$

va $P(A_n, ch.k)=1$.

lemma isbotlandi.

Natija 3. Agar $A_n^{\varepsilon}=\{\omega; |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\varepsilon\}$ bo'lsa, (3) shart bajarilgan bolda har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n^{\varepsilon}\right)<\infty,\ \varepsilon>0$$

qator yaqinlashadi.

Demak, Borel–Kantelli lemmasi bo'yicha

$$P\left(A^{\varepsilon}\right)=P\left(\overline{\lim}A_n^{\varepsilon}\right)=0,\ \varepsilon>0.$$

Demak, quyidagi mantiqiy implikatsiyalar o'rinh:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\right)<\infty,\quad \varepsilon>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(A^{\varepsilon}\right)=0,\ \varepsilon>0\Leftrightarrow P(\xi_n\not\to\xi)=0.$$

Natija 4. Musbat sonlar ketma-ketligi $\varepsilon_n\downarrow 0,\ n\to\infty$. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon_n\right)<\infty$$

bo'lsa, $P(\xi_n\to\xi)=1$.

Haqiqatan ham,

$$A_n=\left\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon_n\right\}$$

bo'lsin. Borel-Kantelli lemmasi bo'yicha, $P(A_n\ ch.k)=0$. O'z navbatida oxirgi tenglikka asosan deyarli har bir elementar hodisa $\omega\in\Omega$ uchun $N=N(\omega)$ natural son mavjud bo'ladiki, $n\ge N(\omega)$ bo'lganda $|\xi_n-\xi|\le\varepsilon_n$. Lekin $\varepsilon_n\downarrow 0$, buning oqibatida $\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)$ deyarli hamma $\omega\in\Omega$ uchun.

Ta'rif 3. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n\ge 1\}$ tasodifiy miqdor ξ ga r–tartibli o'rta ma'noda yaqinlashadi deyiladi, agar

$$E|\xi_n-\xi|^r\to 0,\qquad n\to\infty$$

bo‘lsa. Bunday yaqinlashish

$$\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi, \quad n \to \infty$$

ko‘rinishda belgilanadi.

Chebishev tengsizligiga binoan,

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r}$$

Demak, $r-$ tartibli o‘rta ma’noda yaqinlashishdan ehtimollik bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqar ekan $\left(\left(\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi\right)\right)$. Lekin, ehtimollik bo‘yicha yaqinlashishdan o‘rta ma’noda yaqinlashish kelib chiqmaydi.

Misol 1. $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ehtimollik fazosida

$$\Omega = [0,1], \; F = \mathbf{B}[0,1], \; P\text{-Lebeg o‘lchovi},$$

berilgan bo‘lsin. Bu fazoda

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & 0 \leq \omega \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \omega > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini aniqlaylik. Bu $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik 1 ehtimollik bilan (demak, ehtimollik bo‘yicha) nolga intiladi. Ammo

$$E|\xi_n|^r = \frac{e^r}{n} \to \infty \qquad n \to \infty .$$

Misol 2. $r-$tartibli o‘rta ma’noda yaqinlashishidan 1 ehtimollik bilan yaqinlashish kelib chiqmaydi, ya’ni

$$\left(\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi\right) \not\Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{1\, eht.bn} \xi\right).$$

Haqiqatan ham $\{\xi_n, n \geq 1\}-$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma–ketligi bo‘lib,

$$P(\xi_n = 1) = p_n, \qquad P(\xi_n = 0) = 1 - p_n .$$

Bu holda,

$$\begin{cases} \left(\xi_n \xrightarrow{(r)} 0\right) \Leftrightarrow \{p_n \to 0\}, \; n \to \infty, \\ \left(\xi_n \xrightarrow{P} 0\right) \Leftrightarrow \{p_n \to 0\}, \; n \to \infty, \\ \left(P(\xi_n \to 0) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty\right). \end{cases}$$

Xususan, $p_n = \frac{1}{n}$ bo‘lsa, $\xi_n \xrightarrow{(r)} 0$, lekin 1 ehtimollik bilan $\xi_n \not\to \xi$.

Quyidagi teoremada qanday shart bajarilganda, 1 ehtimollik bilan yaqinlashishdan 1-tartibli o‘rta ma’noda $(\xi_n \xrightarrow{(1)} \xi)$ kelib chiqishi o‘rganiladi.

Teorema 3. $\{\xi_n, n \geq 1\}$ - manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib,

$$P(\xi_n \to \xi) = 1, \quad E\xi_n \to E\xi < \infty.$$

bo'lsin. Bu holda, $E|\xi_n - \xi| \to 0, \ n \to \infty$.

Isbot. Keltirilgan shartlar bajarilgan yetarli katta n lar uchun $E\xi_n < \infty$ bo'ladi. Shuning uchun ham

$$E|\xi_n - \xi| = E|\xi - \xi_n| = E(\xi - \xi_n)I_{\{\xi \geq \xi_n\}} +$$
$$+E(\xi_n - \xi)I_{\{\xi_n > \xi\}} = 2E(\xi - \xi_n)I_{\{\xi \geq \xi_n\}} + E(\xi_n - \xi). \qquad (5)$$

Lekin

$$0 \leq (\xi - \xi_n)I_{\{\xi \geq \xi_n\}} \leq \xi.$$

Oxirgidan va $P(\xi_n \to \xi) = 1$ ekanligidan

$$\lim_{n \to \infty}(\xi - \xi_n)I_{\{\xi \geq \xi_n\}} = 0 \qquad (6)$$

(kitobning ilovasiga qarang).

Endi teorema 3 ning isboti (5) va (6) munosabatlardan kelib chiqadi.

Izoh. Biz foydalangan (6) tenglik $P(\xi_n \to \xi) = 1$ shartni, ehtimollik bo'yicha yaqinlashish $\left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi\right)$ bilan almashtirsak ham o'rinli bo'lib qolaveradi.

§ 6.2. Taqsimotlar yaqinlashishi

Oldingi paragrafda biz bitta $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ehtimollik fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar yaqinligining uch xil turini o'rgandik (1 ehtimollik bilan, ehtimollik bo'yicha va (r)-tartibdagi o'rta ma'noda). Lekin tasodifiy miqdorlar har xil ehtimollik fazosida aniqlangan (yoki, umuman ularni qayerda aniqlanganligi ma'lum, bo'lmasa), taqsimotlari esa "o'xshash" bo'lsa, bu tasodifiy miqdorlar "yaqinligini" qanday tushunish kerak degan savol o'z-o'zidan yuzaga keladi (bu yerda binomial taqsimot uchun Muavr-Laplas, Puasson teoremalarini eslatib o'tish juda o'rinli bo'ladi). Aytib o'tilgan vaziyatda tasodifiy miqdorlar yaqinligini ularning taqsimotlari yaqinligi xususiyatlari orqali ifoda etish muhim hisoblanadi. Agar taqsimotlar yaqinligining qulay xususiyatiarini topolsak, kerakli bo'lgan, lekin hisoblanishi murakkab bo'lgan taqsimotlarni sodda taqsimotlar orqali "approksimatsiyalash" imkoniyatiga ega bo'lamiz. Kelfirilgan fikrlar hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining "limit teoremalar" deb ataluvchi bo'limiga asos bo'lib xizmat qiladi.

Shunday qilib, qanday taqsimotlarni "yaqin" deb hisoblash kerak degan savol alohlda e'tiborga molik masalaga aylanadi. Bu holda, albatta, taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $\{F_n(x), n\geq 1\}$ aniq bir taqsimot funksiyasi $F(x)$ ga intiladi degan jumlaga aniqlik kiritish zarur bo'ladi. Masalan, birinchi qarashda $\xi_n=\xi-\frac{1}{n}$ va ξ tasodifiy miqdorlarni taqsimotlari yaqinlashadi degan xulosa tabiiy ko'rinadi, chunki

$$\sup_{\omega}|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|=\frac{1}{n}.$$

Lekin, bu holda

$$\sup_{n}|F_n(x)-F(x)|$$

miqdorni nolga yaqinligini talab etish to'g'ri bo'lmaydi, chunki bu shartni

$$F_n(x)=P(\xi_n<x)=F\left(x+\frac{1}{n}\right),\ F(x)=P(\xi<x)$$

taqsimot funksiyalari, agar $F(x)$ funksiya birorta nuqtada uzilishga ega bo'lsa, qanoatlantirmaydi.

Quyida biz F_n ni F ga yaqinligini, ularga mos kelgan tasodifiy miqdorlarning ehtimollik bo'yicha yaqin bo'lgan holda yuzaga keladigan vaziyatlarni hisobga oladigan qilib aniqlaymiz.

Ta'rif 1. Taqsimot funksiyalari ketma-ketligi $\{F_n(x), n\geq 1\}$ taqsimot funksiyasi $F(x)$ ga sust yaqinlashadi deyiladi, agar har qanday uzluksiz va chegaralangan $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF_n(x)\to\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF(x) \qquad (1)$$

yaqinlashish o'rinli bo'lsa.

Sust yaqinlashish $F_n\Rightarrow F$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar $P_n(B)$ va $P(B)$ (B-Borel to'plamlari) taqsimot funksiyalari $F_n(x)$va $F(x)$ larga mos keluvchi ehtimollik taqsimotlari bo'lsa, P_n taqsimot P taqsimotga sust yaqinlashadi deymiz va uni $P_n\Rightarrow P$ ko'rinishda belgilaymiz.

Bu holda (1) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_R f(x)P_n(dx)\to\int_R f(x)P(dx),$$

yoki

$$Ef(\xi_n)\to Ef(\xi),\ n\to\infty,$$

oxirgida $P(\xi_n\in B)=P_n(B),\ P(\xi\in B)=P(B),\ B$-Borel to'plami.

Sust yaqinlashishning boshqa varianti quyidagi teoremadan kelib chiqadi.

Teorema. Sust yaqinlashish $F_n\Rightarrow F$ o'rinli bo'ladi, shu holda va faqat shu holdaki, qachon $F_n(x)\to F(x)$ yaqinlashish $F(x)$ ning har bir uzluksiz nuqtasi x uchun o'rinli bo'lsa.

Isbot. Aytaylik, (1) munosabat o'rinli bo'lsin.

Har qanday $\varepsilon>0$ uchun uzluksiz bo'lgan

$$f_\varepsilon(u)=\begin{cases}1, \ agar\ u<x\\ chiziqli, agar\ u\leq x+\varepsilon\\ 0,\ agar\ u>x+\varepsilon\ bo'lsa\end{cases}$$

funksiyani ko'ramiz. Bu holda,

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{x}f_\varepsilon(u)dF_n(u)\leq\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(u)dF_n(u)$$

yuqoridagi (1) munosabatga asosan

$$\limsup_{n\to\infty}F_n(x)\leq\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(u)dF(u)\leq F(x+\varepsilon).$$

Agar $x\in C(F)$ ($F(x)$ ning uzluksiz nuqtalari to'plami) bo'lsa, ε ixtiyoriy musbat bo'lgani uchun

$$\limsup_{n\to\infty}F_n(x)\leq F(x).$$

Xuddi shu fikrlarni $f_\varepsilon^*(u)=f_\varepsilon(u+\varepsilon)$ funksiyaga nisbatan takrorlab,

$$\liminf_{n\to\infty}F_n(x)\geq F(x)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Endi teskari teorema o'rinli bo'lsin, ya'ni har bir $x\in C(F)$ uchun $F_n(x)\to F(x)$. Aytaylik, $M\in C(F),\ N\in C(F)$ shunday bo'lsinki, ular uchun

$$F(-M)<\varepsilon/5,\ \ 1-F(N)<\varepsilon/5$$

tengsizliklar bajarilsin. Bu holda, yetarli katta n lar uchun

$$F_n(-M)<\varepsilon/4, \qquad 1-F_n(N)<\varepsilon/4.$$

Demak, agar umumiylikni chegaralamasdan $|f(x)|\leq 1$ deb hisoblasak,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF_n(x)-\int_{-M}^{N}f(x)dF_n(x)\right|<\varepsilon/2, \qquad (3)$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF(x)-\int_{-M}^{N}f(x)dF(x)\right|<\varepsilon/2,$$

Endi yarim interval $(-M,N]$da zinapoyasimon $f_\varepsilon(x)$ funksiyani quyidagicha tanlaymiz : $F(x)$ ning uzluksizlik nuqtalari $f_\varepsilon(x)$ uchun uzilish nuqtalari bo'lib,

$|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. Yarim interval, $(-M,N]$ dan tashqarida $f_\varepsilon(x)=0$. Masalan,

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{k} f(x_j)\delta_j(x), \quad x_0=-M, x_1,\dots,x_k=N$$

va

$x_j \in C(F)$ bo‘lib,

$$\delta_j(x)=\begin{cases}1, & agar\ x\in(x_{j-1},x_j]\\ 0, & agar\ x\,\overline{\in}\,(x_{j-1},x_j]\end{cases}$$

Bu holda,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dF_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

Aytib o‘tilganlar bilan bir vaqtda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dF_n(x)=\sum_{j=1}^{k} f(x_j)[F_n(x_j)-F_n(x_{j-1})]\to$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dF(x), \quad n\to\infty$$

va

$$\lim\sup \int_{-\infty}^{\infty} fdF_n \le \varepsilon + \lim\sup \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon dF_n \le 2\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} fdF \qquad (5)$$

$$\lim\inf \int_{-\infty}^{\infty} fdF_n \ge \lim\inf \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon dF_n \ge \int_{-\infty}^{\infty} fdF - 2\varepsilon \qquad (6)$$

Musbat son ε ixtiyoriy bo‘lgani uchun yaqinlashishning (1) ko‘rinishdagi varianti (5) va (6) munosabatlardan kelib chiqadi.

Izoh 1. Isbotlangan teoremaga asoslanib, taqsimotlarning sust yaqinlashishini (1) ko‘rinishga teng kuchli variantda quyidagicha ta’riflash mumkin: $F_n(x)$ taqsimot funksiya $F(x)$ ga sust yaqinlashadi, agar $F_n(x)\to F(x)$ har qanday $x\in C(F)$ o‘rinli bo‘lsa. Lekin (1) variant ko‘p ustunliklarga ega. Masalan, u cheksiz o‘lchovli fazolardagi ehtimolliklar taqsimotlari uchun yaroqli bo‘ladi.

Izoh 2. Teoremaning isbotida ko‘p bo‘lmagan sodda o‘zgartirishlar qilib, sust yaqinlashishning (1) ko‘rinishiga teng kuchli bo‘lgan quyidagi ta’rifini keltirish mumkin: $F_n \Rightarrow F$ deyiladi, agar ayirmalar ketma-ketligi uchun

$$F_n(y)-F_n(x)\to F(y)-F(x)$$

hamma $y,x\in C(F)$ uchun bajarilsa.

Izoh 3. Agar $F(x)$ uzluksiz tipdagi taqsimot funksiyasi bo‘lsa, $F_n \Rightarrow F$ yaqinlashish

$$\sup_x |F_n(x)-F(x)|\to 0, \qquad n\to\infty$$

tekis yaqinlashishga teng kuchli bo‘ladi.

Bu jumlaning isboti $F_n(x)-F(x)$ yaqinlashishni $F(x)$ uzluksiz bo‘lgani sababli to‘g‘ri chiziqning har qanday chekli qismida tekis bo‘lishidan kelib chiqadi.

Izoh 4. Agar F_n va F taqsimotlar diskret bo‘lib, umumiy $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ nuqtalarda sakrashga ega bo‘lsa, $F_n \Rightarrow F$

$$F_n(x_k+0)-F_n(x_k)\to F(x_k+0)-F(x_k)$$

yaqinlashuvga teng kuclili bo‘ladi. Oxirgida $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ qiymatlarga mos kelgan ehtimolliklar yaqinlashuvi yozilgan.

Ehtimolliklar taqsimoti ketma-ketligi $\{P_n, n\ge 1\}$ berilgan bo‘lsin va unga mos tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$$

shundayki, ular uchun

$$P_n(B)=P(\xi_n\in B),\ n=1,2,\dots\ B-\text{Borel to‘plami.}$$

Umumiy holda bu tasodifiy miqdorlarni bitta ehtimollik fazosida aniqlanishi shart emas.

Ta’rif. Agar $P_n \Rightarrow P,\ P(\xi\in B)=P(B)$ bo‘lsa, $\{\xi_n, n\ge 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga sust yaqinlashadi deymiz va uni

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

deb belgilaymiz.

Ko‘p hollarda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini sust yaqinlashishini taqsimot bo‘yicha yaqinlashish deb ataladi.

Tushunarliki, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ bo‘lsa, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Lekin $(\xrightarrow{d})$ dan $(\xrightarrow{P})$ kelib chiqmaydi. Bu holatni quyidagi teorema oydinlashtiradi.

Teorema. Agar $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ $(F_n \Rightarrow F)$ bo‘lsa, bitta ehtimollik fazosida ξ_n' va ξ' tasodifiy miqdorlarni shunday aniqlash mumkinki,

$$P(\xi_n'<x)=P(\xi_n<x)=F_n(x)$$

$$P(\xi'<x)=P(\xi<x)=F(x)$$

bo‘lib,

$$P(\xi_n'\to\xi')=1$$

ya’ni ξ_n' tasodifiy miqdorlar ξ' ga 1 ehtimollik bilan yaqinlashadi.

§ 6.3. Sust yaqinlashish belgilari

Oldingi paragrafda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining sust yaqinlashishi mezonlari keltirilgan edi. Lekin ulardan aniq hollarda foydalanish davomida qo'shimcha noqulayliklar yuzaga keladi. Masalan, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ekanligini isbotlash uchun

$$Ef(\xi_n) \to Ef(\xi), \qquad n \to \infty$$

limit munosabatlarni hamma uzluksiz va chegaralangan $f(\cdot)$ funksiyalar sinfi uchun tekshirishga to'g'ri keladi. Amaliyot nuqtayi nazaridan, agar biz bu funksiyalar sinfini sust yaqinlashishini ta'min etadigan qilib toraytirolsak, sezilarli muvaffaqiyatga erishgan bo'lar edik. Shu maqsadda ba'zi yangi tushunchalar kiritish zaruriyati yuzaga keladi.

Birinchi navbatda $\mathfrak{I} = \{F\}$ hamma taqsimot funksiyalari sinfini $\{G\}$ funksiyalar sinfigacha, $VarF = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ shartni $G(-\infty) \geq 0$, $G(\infty) \leq 1$ talablari bilan almashtirish yo'li bilan kengaytirishga to'g'ri keladi. $\{G\}$ sinfdagi funksiyalarni umumlashgan taqsimot funksiyalari deb tushunish mumkin. Ularni musbat ehtimollik bilan cheksiz qiymatlarni qabul qiladigan xos bo'lmagan tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi deb qabul qilish mumkin, ya'ni

$$G(-\infty) = P(\xi = -\infty), \qquad 1 - G(\infty) = P(\xi = \infty)$$

deb hisoblash mumkin.

Oldingilardagi kabi, $G_n \Rightarrow G$, $G_n \in \{G\}$, $G \in \{G\}$ yozuv, $G_n(x) \to G(x)$ har qanday $x \in C(G)$ uchun degan munosabatni belgilaydi.

Teorema 1. (Xelli). $\{G\}$ sinf $\Rightarrow$ yaqinlashishga nisbatan kompakt, ya'ni har qanday $\{G_n, n \geq 1\}$, $G_n \in \{G\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashadigan $\{G_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik ajratish mumkinki, $G_{n_k} \Rightarrow G \in \{G\}$.

Natija 1. $\{G_n\}$ da ajratilgan hamma $\{G_{n_k}\}$ qism ketma-ketliklar uchun $G_{n_k} \Rightarrow G \in \{G\}$ bo'lsa, $G_n \Rightarrow G \in \{G\}$.

Hamma tasodifiy funksiyalari sinfi $\mathfrak{I}$ ni kengaytirish zaruriyatini asosiy sabablaridan biri, $\mathfrak{I} = \{F\}$ kompakt bo'lmaydi, ya'ni $F_n \Rightarrow G$ yaqinlashish $(F_n \in \mathfrak{I})$ G ni taqsimot funksiyasi bo'lishini ta'min etmaydi. Masalan, $\{F_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlikda

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -n, \\ \frac{1}{2}, & n < x \leq n \\ 1, & x > n \end{cases}$$

bo'lsa, $F_n \Rightarrow G(x) \equiv \frac{1}{2} \overline{\in} \mathfrak{I}$ va mos xos bo'lmagan tasodifiy miqdor ξ uchun $P(\xi = \pm\infty) = \frac{1}{2}$.

Ammo kengaytirilgan sinfda $\{G\}$ bilan ham ish ko'rish ba'zi noqulayliklar bilan bog'liq. Birinchi navbatda $G_n \Rightarrow G$, $G-$ ning barcha uzluksizlik nuqtalarida va

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dG_n \to \int_{-\infty}^{\infty} f dG, \quad n \to \infty$$

hamma uzluksiz va chegaralangan $f(\cdot)$ funksiyalar uchun degan jumlalar $\{G\}$ sinfda teng kuchli emas (bunga ishonish uchun (1) misolda $f=1$ holni ko'rish yetarli). Ikkinchidan esa $\int_{-\infty}^{\infty} f dG$ integrallar $\{G\}$ da $G-$funksiyani bir qiymatli aniqlamaydi. Aytib o'tilgan noqulayliklarni bartaraf etish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

Ta'rif 1. $\{P_n, n \geq 1\}$ taqsimotlar ketma-ketligi (yoki taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $\{F_n, n \geq 1\}$) zich deyiladi, agar $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ mavjud bo'lib

$$\inf_n P_n([-N, N]) > 1 - \varepsilon \tag{2}$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa.

Ta'rif 2. Uzluksiz va chegaralangan $f(\cdot)$ funksiyalar sinfi $\mathfrak{F}$ taqsimotni aniqlaydi deymiz, agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x), \quad F \in \mathfrak{I}, \; G \in \{\mathfrak{I}\}$$

tengliklar har qanday $f \in \mathfrak{F}$ uchun bajarilishidan $F = G$ tenglik kelib chiqsa.

Teorema 2. $\mathfrak{F}$ taqsimotni aniqlaydigan sinf bo'lsin. U holda $F_n \Rightarrow F$, $F \in \mathfrak{I}$ taqsimot funksiyasini mavjud bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi yetarli va zarur:

1) $\{F_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik zich,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dF_n$ hamma $f \in \mathfrak{F}$ lar uchun mavjud.

Izoh. (2) zichlik xossa $\{F_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik uchun

$$\inf_n \left(F(N) - F(-N)\right) > 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad N \geq N(\varepsilon)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Teoremaning isboti. Keltirilgan shartlarning zarurligi oson tekshiriladi.

Yetarlilik. Teorema 1 ga asosan $\{n_k\}$ qism ketma-ketlik mavjudki, uning uchun $F_{n_k} \Rightarrow F \in \{G\}$. Lekin teoremaning shartiga asosan [1) shart] $F \in \mathfrak{I}$. Haqiqatan ham, $x \geq N$ nuqta F uchun uzluksizlik nuqtasi bo'lsa, ta'rif 1 ga asosan

$$F(x) = \lim F_{n_k}(x) \geq 1 - \varepsilon .$$

Xuddi shunga o'xshash $x \leq -N$ lar uchun $F(x) < \varepsilon$, musbat $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+x) = 1$$

Endi ixtiyoriy yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik $F_{n_k} \Rightarrow G \in \mathfrak{I}$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy chegaralangan va uzluksiz $f(\cdot)$ uchun

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} f dF_{n_k} = \int_{-\infty}^{\infty} f dF, \quad \lim \int_{-\infty}^{\infty} f dF_{n_k} = \int_{-\infty}^{\infty} f dG \qquad (3)$$

Lekin (2) shart bo'yicha,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dF = \int_{-\infty}^{\infty} f dG \qquad (4)$$

Demak, (3) va (4) lardan teorema 1 ning natijasiga asosan $F = G$. Teorema 2 isbot bo'ldi.

Agar muayyan taqsimot funksiyasi F ga yaqinlashish talab etilsa, teorema 2 dagi "zichlik" shartini tushurib qoldirish mumkin.

Natija 2. $\Im$ taqsimot aniqlaydigan sinf bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dF_n \to \int_{-\infty}^{\infty} f dF, \qquad F \in \mathfrak{I} \qquad (5)$$

har qanday $f \in \Im$ uchun bajarilsin.

Quyidagi shartlardan birortasi o'rinli bo'lsin:

1) $\{F_n, n \geq 1\}$ ketma - ketlik "zich",

2) $F \in \{G\}$

3) $f \equiv 1 \in \Im$

u holda $F \in \mathfrak{I}$ va $F_n \Rightarrow F$.

Isbot. Natijaning 1) shart bajarilgandagi isboti teorema 2 dan kelib chiqadi. 3) shart va 5) yaqinlashish 2) shartni bajarilishiga olib keladi. Agar 2) shart bajarilsa, (3), (4) munosabatlardagi $F \in \mathfrak{I}$ va $G = F$ tenglikni olamiz.

Ko‘p hollarda, 1) – 3) shartlardan birortasi albatta bajariladi, shuning uchun ham asosiy masala bo‘lib, (5) yaqinlashishni $\Im$ sinfida tekshirish qoladi.

Endi taqsimotni aniqlaydigan X funksiyalar sinfi $\Im$ ga misollar keltiramiz.

Misol 1. $\Im_0$ quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lgan funksiyalar sinfi bo‘lsin:

$$f_{a,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \le a \\ 0, & x \ge a+\varepsilon \end{cases}$$

oraliq $[a, a+\varepsilon]$ da esa $f_{a,\varepsilon}$ funksiya chiziqli va uzluksiz. $\Im_0$- ikki parametrli (a va ε) funksiyalar sinfi.

Endi $\Im_0$ taqsimotni aniqlashini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f dF = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f dG$ hamma $f \in \Im$ uchun bajarilgan bo‘lsin.

Bu holda,

$$F(a) \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{a,\varepsilon} dF = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{a,\varepsilon} dG \le G(a+\varepsilon)$$

va

$$G(a) \le F(a+\varepsilon), \ \varepsilon > 0$$

Agar a sifatida F va G larning, uzluksiz nuqtasi deb olsak,

$$F(a) = G(a), \qquad F = G.$$

Misol 2. $\Im_1$ sifatida uzluksiz va cliegaralangan funksiyalarning shunday sinfini olamizki, har qanday

$$f \in \Im \text{ (yoki } \overline{\Im}_0 - \Im_0 \text{ ning yopig‘i)}$$

uchun $\{f_n(x), \ n \ge 1\}$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib,

$$f_n \in \Im_1, \ \sup_x |f_n(x)| \le M < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in R.$$

Faraz qilaylik,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f dF = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f dG \text{ hamma } f \in \Im_1 \text{ uchun.}$$

Integralning xossasi bo‘yicha

$$\lim \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n dF = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f dF, \ \lim \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n dG = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f dG, \ f \in \Im_0.$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dF = \int_{-\infty}^{\infty} f dG, \ f \in \Im_0 .$$

va misol 1 ga ko'ra, $F = G$ ya'ni $\Im_1$ sinf taqsimotni aniqlaydi.

Quyidagi teorema taqsimotlarning sust yaqinlashuvini korrektli ekanligini ko'rsatadi.

Teorema 3. Taqsimotlar $\{P_n, n \geq 1\}$ ketma-ketligining sust limiti mavjud bo'lsa u yagona bo'ladi.

Isbot. Agar $\{P_n, n \geq 1\}$ taqsimotlar ketma-ketligining sust limiti P' va P'' bo'lsa,

$$\int_R f(x) P'(dx) = \int_R f(x) P''(dx) \qquad (6)$$

tenglik hamma uzluksiz va chegaralangan $f(x)$ funksiya uchun bajariladi. Shuning uchun ham teorema 3 ning isboti quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

Lemma. Agar P' va P''-ikkita ehtimollik o'lchovlari R dagi Borel to'plamlari $\sigma-$algebrasida aniqlangan bo'lib, (6) tenglik hamma uzluksiz va chegaralangan funksiyalar uchun bajarilsa, hamma Borel to'plamlari uchun

$$P'(A) = P''(A)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Yuqoridagi (6) tenglik o'rinli bo'ladigan hamma o'lchovli funksiyalar sinfini K deb belgilaylik. U holda :

1) $K-$ chiziqli, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x) \in K$ bo'lsa,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \in K.$$

2) $K-$yopiq, nuqtada va chegaralanganlik yaqinlashuviga nisbatan, ya'ni

$$f_n \in K, \ |f_n(x)| \leq c, \ \forall n, (n \in R),$$

$$\lim f_n(x) = f_0(x)$$

bo'lsa, $f_0(x) \in R$ (bu xossa ilovadagi integralning xossasidan kelib chiqadi).

3) Hamma uzluksiz, chegaralangan (R da aniqlangan) funksiyalar sinfini $CB(R)$ desak,

$$CB(R) \subset K.$$

Bu 1), 2), 3) hollarga ega bo'lgan funksiyalarning minimal sinfi $\sigma(K)$-hamma Borel funksiyalari sinfidan iborat bo'ladi.

Demak, K hamma Borel funksiyalarini o'z ichiga oladi. Oxirgidan (6) da $f(x) = I_A(x)-$ BOREL to'plami A ning indikatori deb olsak, hamma Borel to'plamlari A lar uchun

$$P'(A) = P''(A)$$

tenglikni olamiz.

Isbotlangan lemmadan $\int\limits_R f dP$ integrallar ehtimollik o'lchovi $P(A)$ ni bir qiymatli aniqlaydi degan muhim xulosaga kelamiz.

Misol va masalalar

1. Agar $\xi_n \to \xi$ va shu vaqtda $\xi_n \to \eta$ bo'lsa, u holda ξ va η lar ekvivalent ekanligini $\left(P(\xi \neq \eta) = 0\right)$ ko'rsating.
2. Agar $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ va tasodifiy miqdorlar ξ va η ekvivalent bo'lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $n \to \infty$ da
$$P\{|\xi_n - \eta_n| \geq \varepsilon\} \to 0$$
ekanligini ko'rsating.
3. Agar $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$ bo'lsa, u holda $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$ ekanligini ko'rsating.
4. Agar $\xi_n \xrightarrow{d} c$ (c – o'zgarmas son) bo'lsa, u holda ehtimol bo'yicha yaqinlashish ham o'rinli, ya'ni $\xi_n \xrightarrow{d} c \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$ ekanligini ko'rsating.

VII BOB. XARAKTERISTIK FUNKSIYALAR

VII bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Xarakteristik funksiyalar taqsimotni bir qiymatli aniqlashi.*
- *Xarakteristik funksiyaning asosiy xossalari.*
- *Teskari almashtirish formulalari.*
- *Xarakteristik funksiyalarni ehtimolliklar nazariyasining limit teoremalarida qo'llanishi.*
- *Ko'p o'lchovli xarakteristik funksiyalar*

haqida tasavvurlarga ega bo'linadi;

- *Xarakteristik funksiyalar ehtimolliklar nazariyasida analitik metodlar asoslari bo'lishini.*
- *Teskari almashtirish formulalarini muayyan masalalarga tatbiq etish mumkinligini.*
- *Xarakteristik funksiyalar yordamida taqsimotning turlarini aniqlash mumkinligini*

bilish va amalda qo'llay olishi;

- *Xarakteristik funksiyalar orqali tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini topishni.*
- *Xarakteristik funksiyalarni limit taqsimotlar sinfini topishdagi rolini*

o'rganib olish mumkin.

Xarakteristik funksiyalar ehtimolliklar nazariyasining analitik metodlaridan eng asosiylaridan biri bo'lib, klassik va kompleks analizning hozirgi zamon tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasida qo'llanish imkoniyatini yaratib beradi. Xarakteristik funksiyalar matematik statistikada ham muhim rol o'ynaydi. Xarakteristik funksiyalarga asoslangan analitik metodning unumli qo'llanishining negizida xarakteristik funksiyalar taqsimot funksiyalari kabi, ehtimollik taqsimotlarini bir qiymatli aniqlashi yotadi.

§ 7.1. Xarakteristik funksiyalar ta'rifi va asosiy xossalari

Eng avvalo, haqiqiy qiymatli tasodifiy miqdorlar qatorida kompleks qiymatli tasodifiy miqdorlarni ham o'rganish mumkin. Bunday tasodifiy miqdorlar

$$\xi(\omega)=\xi_1(\omega)+i\xi_2(\omega)$$

ko'rinishda bo'lib, ular haqiqiy qiymatli ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlardan tashkil topadi. Bu tasodifiy miqdorlarni o'rta qiymati (matematik kutilmasi) deb

$$E\xi(\omega)=E\xi_1(\omega)+iE\xi_2(\omega)$$

formulani qabul qilish tabiiy bo'ladi. Demak, kompleks qiymatli tasodifiy miqdorlarni o'rganish, (ξ_1,ξ_2)-tasodifiy vektorni o'rganishdan iborat bo'ladi. Masalan, $\xi=\xi_1+i\xi_2$ va $\eta=\eta_1+i\eta_2$ tasodifiy miqdorlarni bog'liqsizligi $\sigma(\xi_1,\xi_2)$ va $\sigma(\eta_1,\eta_2)$ σ-algebralarni bog'liqsiz bo'lishini anglatadi. Bunday tasodifiy miqdorlar uchun

$$E\xi\cdot\eta=E\xi\cdot E\eta$$

tenglik o'rinli bo'lishini hech qiyinchiliksiz tekshirib ko'rish mumkin.

Ta'rif 1. Haqiqiy qiymatli tasodifiy miqdor ξ ning xarakteristik funksiyasi deb

$$f_\xi(t)=Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_\xi(x),\quad t\in R$$

kompleks qiymatli funksiyaga aytiladi.

Agar taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ uzluksiz tipda bo'lib, $p_\xi(x)$ zichhk funksiyaga ega bo'lsa,

$$f_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p_\xi(x)dx$$

bo'lib, $f_\xi(t)$ zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ ning Furye almashtirishidan iborat bo'ladi. Umumiy holda esa $f_\xi(t)$ taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ ning Furye-Stiltes almashtirishi bo'ladi. Xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ har qanday tasodifiy miqdor ξ uchun mavjud bo'ladi. Bu esa,

$$|f_\xi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_\xi(x)\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot dF_\xi(x)=1$$

ekanligidan kelib chiqadi.

Endi xarakteristik funksiyalarning asosiy xossalarini keltiramiz.

1. Har qanday tasodifiy miqdor ξ uchun

$$f_\xi(0)=1 \text{ va } |f_\xi(t)|\le 1,\quad t\in R.$$

Bu xossa isbot talab etmaydi.

2. Har qanday tasodifiy miqdor ξ uchun

$$f_{a\xi+b}(t)=e^{-ibt}f_\xi(at).$$

Haqiqatan ham,

$$f_{a\xi+b}(t)=Ee^{it(a\xi+b)}=e^{itb}\cdot Ee^{ita\xi}=e^{itb}f_\xi(at).$$

3. Agar $\xi_1,\dots,\xi_n$-bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsa, $S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$ yig'indining xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_n}(t)=f_{\xi_1}(t)\dots f_{\xi_n}(t).$$

Bu tenglik matematik kutilmaning bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ko'paytmasi uchun o'rinli bo'lgan xossasidan kelib chiqadi.

Haqiqatan ham,

$$f_{S_n}(t)=Ee^{itS_n}=Ee^{it\xi_1}...e^{it\xi_n}=Ee^{it\xi_1}...Ee^{it\xi_n}=f_{\xi_1}(t)...f_{\xi_n}(t).$$

Demak, $F_{\xi_1}*F_{\xi_2}$ – taqsimot funksiyalarni kompozitsiyasiga $f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)$ ko‘paytma mos keladi.

Agar

$$F_1*F_2=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-u)dF_2(u)$$

ekanligini hisobga olsak, bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlarni yig‘indisining taqsimotini o‘rganishdagi murakkab bo‘lgan (*) – kompozitsiya operatsiyasi xarakteristik funksiyalar uchun oddiy arifmetik ko‘paytirish amali bilan almashtirish mumkin ekan.

4. Xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ to‘g‘ri chiziqning har qanday chekli qismida tekis uzluksiz. Haqiqatan ham,

$$|f(t+h)-f(t)|=\left|E\left(e^{i(t+h)\xi}-e^{it\xi}\right)\right|\le E\left|e^{ih\xi}-1\right|.$$

Endi har qanday haqiqiy α uchun o‘rinli bo‘lgan

$$\left|e^{i\alpha}-1\right|=\left|\int_0^\alpha\frac{d\left(e^{iu}\right)}{i}\right|\le|\alpha|$$

tengsizlikdan foydalanib, quyidagini yozish mumkin:

$$|f(t+h)-f(t)|\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{ihx}-1\right|dF(x)\le\int_{|x|\le N}|hx|dF(x)+$$

$$+\int_{|x|>N}2\cdot dF(x)\le N\cdot|h|+2(1-F(N)+F(-N)).$$

Oxirgi tengsizlikda oldin N ni yetarli katta qilib tanlab, so‘ng h ni nolga intiltirib, keltirilgan xossaning isbotini olamiz.

Xarakteristik funksiyaning navbatdagi xossasini keltirishdan avval quyidagilarni izohlab o‘tamiz: Ma’lumki, tasodifiy miqdor ξ ning momentlari mavjud bo‘lishi, unga mos keluvchi taqsimot funksiyasi F ning $\pm\infty$ da nolga intilishi tartibiga bog‘liq bo‘ladi. Quyidagi xarakteristik funksiyaning xossasidan kelib chiqadiki, tasodifiy miqdorlarni momentalarini mavjud bo‘lishi, ularning xarakteristik funksiyalarini nol atrofidagi asimptotikasiga bog‘liq bo‘lar ekan.

5. Agar $E|\xi|^k<\infty$, $k\ge1$ bo‘lsa, $f_\xi(t)$ k-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo‘lib,

$$f_\xi^{(k)}(0)=i^kE\xi^k,\qquad k\ge1$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Quyidagi tengsizlik

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(ix)e^{itx}dF(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x) = E|\xi| < \infty$$

o'rinli ekanligidan integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}(ix)e^{itx}dF(x)$$

t ga nisbatan tekis yaqinlashadi. Demak, integral ostida differensiallash mumkinligidan

$$f'(t) = i\int_{-\infty}^{\infty}xe^{itx}dF(x), \qquad f'(0) = iE\xi$$

tenglikni yoza olamiz. Keyingi mulohazalar induksiya orqali olib boriladi. Agar $s < k$ uchun

$$f^{(s)}(t) = i^s\int_{-\infty}^{\infty}x^s e^{itx}dF(x)$$

bo'lsa,

$$f^{(s+1)}(t) = i^{s+1}\int_{-\infty}^{\infty}x^{s+1}e^{itx}dF(x)$$

tenglikning o'ng tomomidagi integral tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun to'g'ri bo'ladi. Demak,

$$f^{(s+1)}(0) = i^{s+1}E\xi^{s+1}.$$

Isbot etilgan xossadan, $E|\xi|^k < \infty$ bo'lganda, $t = 0$ nuqtaning atrofida Teylor formulasi

$$f(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k}\frac{(it)^j}{j!}E\xi^j + o(t^k), \qquad t \to 0$$

o'rinli ekanligini olamiz.

Keltirilgan xossaga teskari bo'lgan, $f^{(k)}(0)$ mavjud bo'lsa, $E|\xi|^k$, $k \ge 1$ mavjud bo'ladi degan jumla qisman o'rinli: agar $f^{(2k)}(0)$ mavjud bo'lsa,

$$E|\xi|^{2k} < \infty, \qquad f^{(2k)}(0) = (-1)^k E\xi^{2k}, \quad k \ge 1.$$

Bu xossani $k = 1$ bo'lgan holda isbotlaymiz (keyin esa induksiyadan foydalanish mumkin). Quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$-\frac{2f(0) - f(2h) - f(-2h)}{4h^2} = E\left(\frac{e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}}{2h}\right)^2 =$$

$$= E\frac{\sin^2 h\xi}{h^2}.$$

Bu tenglikda h nolga intilganda limitga o'tib,

$$-f''(0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2f(0) - f(2h) - f(-2h)}{4h^2}\right) =$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{E\sin^2 h\xi}{h^2}\ge E\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h\xi}{h^2}=E\xi^2$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerda

$$\frac{\sin^2 h\xi}{h^2}\to\xi^2, \qquad h\to 0$$

ekanligidan va Fatu lemmasidan foydalanildi.

6. Agar $\overline{f(t)}$ kompleks son $f(t)$ ga qo'shma bo'lsa,

$$\overline{f_\xi(t)}=\overline{Ee^{it\xi}}=E\overline{e^{it\xi}}=Ee^{-it\xi}.$$

Oxirgidan xulosa qilish mumkinki, agar ξ tasodifiy miqdor simmetrik bo'lsa (ya'ni $-\xi$ bilan bir xil taqsimlangan bo'lsa), uning xarakteristik funksiyasi haqiqiy qiymatli bo'ladi.

Xarakteristik funksiyaning keltirilgan xossalaridan foydalanib, ba'zi konkret funksiyalar taqsimotning (yoki biror tasodifiy miqdorning) xarakteristik funksiyasi bo'ladimi degan savolga javob berish mumkin. Masalan, o'quvchiga

$$(1+t)^{-1},\ 1+t,\ \sin t,\ \cos t,\ e^{i|t|}$$

elementar funksiyalardan qaysi biri xarakteristik funksiya bo'lishini yoki bo'lmasligini tekshirib ko'rishni taklif etamiz.

Lekin umumiy holda qo'yilgan savol juda murakkab hisoblanadi. Quyida biz ma'lum natijalardan birini keltiramiz.

Teorema (Boxner – Xinchin). Uzluksiz va $f(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi $f(t)$ funksiya biror taqsimotning xarakteristik funksiyasi bo'lishi uchun, uning manfiy bo'lmagan aniqlangan bo'lishi, ya'ni hamma $t_1,\dots,t_n$ haqiqiy va $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ kompleks sonlar uchun ($\overline{\lambda}$-kompleks λ sonning qo'shmasi)

$$\sum_{k,j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}\ge 0$$

tengsizlik bajarilishi yetarli va zaruriy shartdir.

Qayd qilib o'tamizki, keltirilgan shartning zaruriyligi oson ko'rinadi. Haqiqatan ham, $f(t)=Ee^{it\xi}$ bo'lsa,

$$\sum_{k,j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}=E\sum_{k,j}e^{i(t_k-t_j)\xi}\cdot\lambda_k\cdot\overline{\lambda_j}=$$

$$=E\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{it_k\xi}\right|^2\ge 0.$$

§ 7.2. Ba'zi taqsimotlarning xarakteristik funksiyalari

Bu paragrafda ehtimolliklar nazariyasida ko'p uchraydigan taqsimotlarning xarakteristik funksiyalarini hisoblab topamiz.

1. "Birlik" taqsimot. Eslatib o'tamiz, ξ tasodifiy miqdor "birlik" taqsimotga ega deyiladi, agar uning qiymatlari bitta o'zgarmas sondan iborat bo'lsa, ya'ni $P(\xi = a) = 1$. Bu holda,

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{iat}.$$

2. Bernulli taqsimoti. Tasodifiy miqdor

$$\xi = \begin{cases} 1, & ehtimolligi \ \ p \\ 0, & ehtimolligi \ \ 1-p \end{cases}$$

bo'lsin.

Bu holda,

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it} \cdot p + e^{it\cdot 0}(1-p) = pe^{it} + 1 - p$$

3. Binomial taqsimot. Tasodifiy miqdor ξ qiymatlari

$$m = 0,1,\dots,n$$

bo'lib,

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \ m = 0,1,\dots,n.$$

Bu tasodifiy miqdor

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

va bu yerda ξ_i lar Bernulli taqsimotiga ega va o'zaro bog'liqsiz bo'lgan tasodifiy miqdorlar. Demak, xarakteristik funksiyaning xossasiga asosan

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} = Ee^{it\xi_1}\dots Ee^{it\xi_n} =$$
$$= \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$$

4. Puasson taqsimoti. Tasodifiy miqdor ξ ning qiymatlari

$$k = 0,1,2,\dots.$$

bo'lib,

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0, \ k = 0,1,2,\dots.$$

Bu holda,

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

5. Geometrik taqsimot. Bu holda,

$$P(\xi = n) = pq^{n-1}, \qquad n = 1,2,\ldots, \quad q = 1-p$$

va

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itn} pq^{n-1} = pe^{it}\sum_{n=1}^{\infty}\left(qe^{it}\right)^{n-1} = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

6. Normal taqsimot. Uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor ξ normal (yoki Gauss) taqsimotga ega deyiladi, agar ξ taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha bo'lsa,

$$p(x,a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

(a,σ^2) – parametr, $a \in R$, $\sigma > 0$.

Oldin parametri (0,1) bo'lgan standart normal taqsimotning

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (1)$$

xarakteristik funksiyasini hisoblaylik.

(1)tenglikni differensiallab (t bo'yicha),

$$f'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx-\frac{x^2}{2}}dx$$

tenglikni hosil qilamiz va unda bo'laklab integrallashni amalga oshirsak,

$$f'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(-e^{itx-\frac{x^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx\right] = -tf(t)$$

munosabatni olamiz. Demak, standart normal taqsimotning xarakteristik funksiyasi

$$f'(t) + tf(t) = 0 \qquad (2)$$

differensial tenglamani $f(0) = 1$ boshlang'ich shart bilan qanoatlantirar ekan. Bu tenglamani yechib,

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (3)$$

tenglikni olamiz.

Endi parametri (a,σ^2) bo'lgan normal taqsimotning xarakteristik funksiyasini topaylik. Agar ξ_c deb, xarakteristik funksiyasi (3) bo'lgan standart normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorni belgilasak, parametri (a,σ^2) bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor ξ ni

$$\xi = \sigma\xi_c + a$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak,

$$f_\xi(t) = f_{\sigma\xi_c+a}(t) = e^{iat}\cdot f_{\xi_c}(t\sigma) = e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

formula o'rinli bo'ladi.

7. $[a,b]$ oraliqdagi tekis taqsimot. Bu holda taqsimot uzluksiz tipda bo'lib, uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \overline{\in} [a,b]. \end{cases}$$

Mos xarakteristik funksiya

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

Ba'zi xususiy hollarni eslatib o'tamiz:

1) $a = -l$, $b = l$ bo'lsa

$$f(t) = \frac{e^{ilt}-e^{-ilt}}{2itl} = \frac{\sin lt}{lt}.$$

2) $a = 0$, $b = L$ bo'lsa

$$f(t) = \frac{e^{itL}-1}{itL}.$$

8. Γ – taqsimot. Bu holda zichlik funksiyasi

$$p_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-x}, \qquad x \ge 0.$$

Bu zichlik funksiyasiga mos kelgan xarakteristik funksiyani $f_\alpha(t)$ deb belgilaylik. Oldin quyidagi faktni tasdiqlab o'tamiz: oson ko'rinadiki, $p_{\alpha+\beta}(x)$ zichlik funksiya, $p_\alpha(x)$ va $p_\beta(x)$ funksiyalarning kompozitsiyasidan iborat. Demak,

$$p_{\alpha+\beta}(x) = \int_0^x p_\beta(x-u)p_\alpha(u)du = \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\int_0^x u^{\alpha-1}(x-u)^{\beta-1}du$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy.$$

Oxirgi integral Eylerning $B(\alpha,\beta)$-integrali nomi bilan ma'lum va u Γ – funksiya bilan

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

munosabatda bo‘ladi. Demak,

$$p_{\alpha+\beta}(x)=\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-x}, \qquad x\geq 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

O‘z navbatida

$$p_{\alpha+\beta}=p_\alpha * p_\beta$$

ekanligini olamiz. Oldin $\alpha=1$ bo‘lgan holda,

$$f_1(t)=\int_0^\infty e^{itx}p_1(x)\,dx$$

integralni hisoblaymiz. Bo‘laklab integrallash orqali

$$f_1(t)=-e^{itx-x}\Big|_0^\infty+it\int_0^\infty e^{itx-x}dx=1+itf_1(t)$$

tenglikni hosil qilamiz va undan

$$f_1(t)=\frac{1}{1-it} \tag{5}$$

bo‘lishini topamiz.

Har qanday $n\geq 1$ uchun (4) va (5) lardan

$$f_n(t)=\frac{1}{(1-it)^n}$$

tenglikni olamiz va ularga asoslanib,

$$f_1(t)=\left[f_{\frac{1}{n}}(t)\right]^n \qquad f_{\frac{1}{n}}(t)=(1-it)^{-1/n},$$

$$f_{\frac{m}{n}}(t)=\left[f_{\frac{1}{n}}(t)\right]^m=(1-it)^{-m/n}$$

tengliklarni yoza olamiz. Demak, har qanday ratsional α uchun

$$f_\alpha(t)=(1-it)^{-\alpha} \tag{6}$$

o‘rinli bo‘ladi. Zichlik funksiya $p_\alpha(x)$ parametr α ga nisbatan ham uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun

$$p_{\alpha_n}(x)\to p_\alpha(x), \qquad \alpha_n\to\alpha$$

va demak,

$$f_{\alpha_n}(t)\to f_\alpha(t).$$

Shunday qilib (6) formula hamma $\alpha>0$ uchun o‘rinli bo‘lishiga ishonch hosil qilamiz. Agar α kasr son bo‘lsa, ko‘p qiymatli (6) funksiyadan $f_\alpha(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi bir qiymatli “shox” ajratib olinadi.

§ 7.3. Xarakteristik funksiyalar va har xil tipdagi taqsimotlar

Furye almashtirishlari haqidagi Lebeg teoremasini eslaymiz. Agar $p(x)$ funksiya uchun $\int_{-\infty}^{\infty}|p(x)|dx<\infty$ bo‘lsa,

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p(x)dx$$

$p(x)$ ning Furye almashtirishi

$$\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=0.$$

Xususan, $p(x)=p_\xi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ bo‘lgani uchun

$$f_\xi(t)\to 0, \ |t|\to\infty.$$

Bu Furye almashtirishi haqidagi Lebeg teoremasining natijasidir. Agar $f_\xi(t)$ nolga yuqori tartibda intilsa, bu $F(x)$ taqsimotning “ko‘proq silliq” bo‘lishini anglatadi. Masalan, zichlik funksiyasi $p(x)$ k marta differensiallanuvchi bo‘lib, integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi^{(k)}(x)dx<\infty$$

mavjud bo‘lsa, bo‘laklab integrallashlar natijasida

$$f_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p_\xi(x)dx=\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p_\xi^{(1)}(x)dx=\ldots=\frac{1}{(it)^k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p_\xi^{(k)}(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi va

$$|f_\xi(t)|=O\left(\frac{1}{|t|^k}\right), \quad |t|\to\infty$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

Endi, tasodifiy miqdor ξ diskret tipda bo‘lsin. Bu holda, ξ ning qiymatlari

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

ketma-ketlikni tashkil etsa,

$$f_\xi(t)=Ee^{it\xi}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{ita_n}P(\xi=a_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Quyida biz diskret tasodifiy miqdorlar sinfida “panjarasimon” taqsimotlarga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlar qism sinfini kiritamiz. Ularni o‘rganishda xarakteristik funksiyalar muhim rol o‘ynaydi.

Ta’rif. Tasodifiy miqdor ξ “panjarasimon” taqsimotga ega deyiladi, agar a va $h>0$ sonlar mavjud bo‘lib,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = a + kh) = 1$$

tenglik bajarilsa.

Demak, ξ tasodifiy miqdor "panjarasimon" taqsimotga ega bo'lsa, uning qiymatlari

$$a + kh, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

ko'rinishdagi arifmetik progressiya tashkil etar ekan. Bu yerda h musbat son "panjaraning qadami" deb ataladi va bunga sabab tasodifiy miqdorning qo'shni qiymatlari bir-biridan $h > 0$ masofada joylashgani bo'ladi.

Masalan, har qanday ikki qiymatli tasodifiy miqdor ξ "panjarasimon" taqsimotga ega bo'ladi. Haqiqatan ham

$$\xi = \begin{cases} a_1, ehtimolligi \ p > 0 \\ a_2, ehtimolligi \ q = 1 - p \end{cases}$$

bo'lib, $a_2 > a_1$ deb hisoblasak, bu tasodifiy miqdorlar qiymatlarini

$$a_1 + (a_2 - a_1) \cdot k = a_1 + kh, \quad h = a_2 - a_1, \quad k = 0,1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Tasodifiy miqdorning "panjarisimon" taqsimotga ega bo'lisliini xarakteristik funksiya terminida ifoda etish mumkin.

Teorema 1. Tasodifiy miqdor ξ "panjarasimon" taqsimotga ega bo'lish uchun, uning xarakteristik funksiyasini absolut qiymati biror $t_0 \neq 0$ nuqtada 1 ga teng bo'lishi yetarli va zaruriy shart bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar ξ tasodifiy miqdor "panjarasimon" taqsimotga ega bo'lib,

$$p_k = P(\xi = a + kh), \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasi

$$f_\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{it(a+kh)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikht} \right) e^{iat}.$$

Kompleks sohada darajali funksiya e^z davriy ekanligidan

$$e^{i2\pi k} = 1, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

tenglikka ega bo'lamz. Demak,

$$f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = e^{ia\frac{2\pi}{h}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{i2\pi k} = e^{ia\frac{2\pi}{h}},$$

Ya'ni $\left| f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right| = 1$ bo'lib, biz teoremaning zaruriylik qismini isbot etgan bo'lamiz.

Endi faraz qilaylik, biror $t_0 \neq 0$ nuqtada $|f_\xi(t_0)| = 1$ bo'lsin. Bu holda ξ albatta "panjarasimon" taqsimotga ega bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham, α biror haqiqiy son bo'lganda,

$$f_\xi(t_0) = e^{it_0\alpha}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,

$$1 = f_{\xi-\alpha}(t_0) = E\cos t_0(\xi-\alpha) + iE\sin t_0(\xi-\alpha);$$

yoki

$$E(1-\cos t_0(\xi-\alpha)) = 0.$$

Oxirgi tenglikdan va matematik kutilmaning $E4$ xossasiga asosan

$$\cos t_0(\xi-\alpha) = 1.$$

Demak, 1 ehtimollik bilan

$$t_0(\xi-\alpha) = 2\pi k, \quad k = \ldots,-1,0,1,\ldots$$

yoki

$$\xi = \alpha + \frac{2\pi}{t_0}k = \alpha + hk, \quad h = \frac{2\pi}{t_0}.$$

Teorema 1 isbot bo'ldi.

Soddaroq qilib aytganda, h musbat sonni taqsimotning qadami deb atash qulay va to'g'ri bo'ladi. Uni maksimal qadam deyiladi, agar hech qanday a va $h_1 > h$ uchun tasodifiy miqdor ξ ning qiymatlarini $a + kh_1$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lmasa. Masalan, ξ faqat toq sonlarni qabul qilsa (ya'ni uning qiymatlar to'plami toq sonlardan iborat bo'lsa), bu qiymatlarni $a = 0, h = 1$ bo'lganda, $a + kh$ ko'rinishda yozish mumkin. Lekin $h = 1$ qadam maksimal bo'la olmaydi, chunki ξ ning barcha qiymatlarini $a = 1, h_1 = 2$ deb hisoblab, $a + kh_1$ ko'rinishda yozish mumkin.

Qadam h ning maksimal bo'lish sharti quyidagi teoremada keltiriladi.

Teorema 2. Taqsimot qadami h maksimal bo'ladi, shu holdaki, agar taqsimot xarakteristik funksiyasining moduli $0 < |t| < \frac{2\pi}{h}$ bo'lganda, 1 dan kichik va $f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = 1$ bo'lsa.

Isbot. Haqiqatan ham, agar $0 < t_0 < \frac{2\pi}{h}$ bo'lganda, $|f_\xi(t_0)| = 1$ bo'lsa, teorema 1 ning isbotida ko'rsatilganidek $\frac{2\pi}{t_0}$-taqsimot qadami bo'ladi, lekin

$$h < \frac{2\pi}{t_0}$$

bo'lgani uchun, h maksimal qadam bo'la olmaydi.

Keltirilgan teoremalardan ξ tasodifiy miqdor "panjarasimon" taqsimotga ega bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasi uchun,

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = \left| f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right| = 1$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Paragrafning boshida taqsimot uzluksiz tipda bo'lsa,

$$\lim_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 0$$

o'rinli bo'lishini Lebeg teoremasi ta'min etishini eslatib o'tgan edik.

Agar

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = \alpha < 1$$

bo'lsa, bu shartni qanoatlantiradigan cheksiz ko'p singular tipdagi taqsimotlar mavjud bo'lar ekan. (Лукач Е. Характеристические функции. М. Наука. 1977).

§ 7.4. Teskari almashtirish formulalari

Shunday qilib, har qanday tasodifiy miqdor uchun unga mos keluvchi xarakteristik funksiya mavjud ekan. Endi, aksincha, xarakteristik funksiya tasodifiy miqdorning taqsimotini bir qiymatli aniqlashi masalasini ko'raylik. Buning uchun esa, o'z navbatida

$$\Im = \left\{ e^{itx},\ t \in R \right\}$$

funksiyalar sinfi taqsimotni aniqlashi, ya'ni tasodifiy miqdor ξ ning xarakteristik funksiyasi $f_\xi(t)$, bu tasodifiy miqdor taqsimoti $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ (B – Borel to'plami) ehtimollik o'lchovini bir qiymatli aniqlashini isbot etish yetarli bo'ladi. Bunda

$$f_\xi(t) = \int_R e^{itx} P_\xi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x)$$

formulaga e'tibor qilsak, $f_\xi(t)$ orqali $F_\xi(x)$ ni bir qiymatli aniqlash mumkinligi qo'yilgan masalani yechimi bo'ladi.

Teorema 1 (Teskari almashtirish formulasi). Agar $F(x)$-tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi, $f(t)$ esa ξ ning xarakteristik funksiyasi bo'lsa, $F(x)$ ning har qanday uzluksiz x va y nuqtalari uchun

$$F(y)-F(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{it}f(t)e^{-t^2\sigma^2}dt \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli.

Agar $\frac{f(t)}{t}\in L_1(-\infty,\infty)$ bo‘lsa,

$$F(y)-F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{it}f(t)\,dt \qquad (2)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Agar $\frac{f(t)}{t}\in L_1(-\infty,\infty)$ bo‘lsa, (1) formulada integral ostida limitga o‘tish mumkin va biz (2) formulani olamiz.

Oldin $F(x)$ ni absolut uzluksiz deb hisoblab, uning zichlik funksiyasini $p(x)$ deb belgilaymiz, $f(t)$ xarakteristik funksiyani esa cheksizlikda integrallanuvchi $\left(|f(t)|\in L_1(-\infty,\infty)\right)$ deb faraz qilamiz. Bu holda, Furye teskari almashtirish formulasi bo‘yicha,

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)\,dt$$

formulani olamiz. Bu yerda (3) formuladan foydalanib,

$$F(y)-F(x)=\int_x^y p(u)\,du=\int_x^y\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itu}f(t)\,dt\right]du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_x^y e^{-itu}du\right]f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{it}f(t)\,dt$$

(2) formulani to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu yerda integrallash tartibini almashtirish mumkinligi

$$\sup_x p(x)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi, $f(t)$ ixtiyoriy taqsimot funksiyasi $F(x)$ ga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor ξ ning xarakteristik funksiyasi bo‘lsin. Bu tasodifiy miqdor aniqlangan ehtimollik fazosi $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ da ξ ga bog‘liq bo‘lmagan va parametri $\left(0,2\sigma^2\right)$ normal taqsimotga ega bo‘lgan η tasodifiy miqdorni ko‘ramiz. Ma’lumki, η ning xarakteristik funksiyasi

$$f_\eta(t)=e^{-t^2\sigma^2}$$

Demak, $\xi+\eta$ ning xarakteristik funksiyasi

$$f_{\xi+\eta}(t)=f_\xi(t)\cdot f_\eta(t)=f(t)e^{-t^2\sigma^2}\in L_1(-\infty,\infty).$$

Shuning uchun ham (2) formula bo'yicha,

$$F_{\xi+\eta}(y)-F_{\xi+\eta}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{it}f(t)e^{-t^2\sigma^2}dt \tag{4}$$

Chebishev tengsizligini qo'llab,

$$P(|\eta|>\varepsilon)\le\frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2}\to 0,\qquad \sigma\to 0$$

munosabatni, ya'ni $\eta\xrightarrow{P}0,\ \sigma\to 0$ yaqinlashishni olamiz. Oxirgidan esa sust ma'noda

$$F_{\xi+\eta}\Rightarrow F_\xi=F,\ \sigma\to 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, x va y lar $F(\cdot)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalari bo'lsa,

$$F(y)-F(x)=\lim_{\sigma\to 0}\left[F_{\xi+\eta}(y)-F_{\xi+\eta}(x)\right].$$

Bu tenglik (4) bilan birgalikda teoremaning to'g'ri ekanligini isbotlaydi.

Teoremaning isbotida ishlatilgan usul (ya'ni ξ tasodifiy miqdordan $\xi+\eta$ ga o'tish) ancha universal xususiyatga ega bo'lib, uni taqsimotlarni "silliqlashtirish" metodi deyiladi.

Bu metod (2) teskari almashtirish formulasini qo'llanilishi bilan bog'liq qiyinchiliklarni bartaraf etishda juda qo'l keladi.

Natija. Tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi, uning taqsimot funksiyasini bir qiymatli aniqlaydi.

Bu natija teoremadagi teskari almashtirish formulasidan (1) va $F(y)-F(x)$ ayirmalar $F(x)$ ni bir qiymatli aniqlashidan kelib chiqadi.

Natijaning xulosasini quyidagicha aniqlashtirish mumkin: Har qanday xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ ga yagona taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ mos keladi.

Isbot. Haqiqatan ham, (1) formula bo'yicha $F_\xi(x_2)-F_\xi(x_1)$ ayirma x_1 va x_2 nuqtalar $F_\xi(\cdot)$ ning uzluksizlik nuqtalari bo'lganda, xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ orqali bir qiymatli aniqlanadi. Ayirma $F_\xi(x_2)-F_\xi(x_1)$ da x_1 ni $F_\xi(\cdot)$ uzluksiz nuqtalari orqali $-\infty$ ga intiltirib, $F_\xi(x_2)$ ni x_2 uzluksizlik nuqtalarida bir qiymatli aniqlaymiz. Lekin har qanday x nuqta uchun

$$F_\xi(x)=\lim_{x_2\downarrow x}F_\xi(x_2)$$

ekanligidan (bu yerda limit $F_\xi(\cdot)$ ning uzluksizlik nuqtalari x_2 lar orqali olinadi). $F_\xi(x)$ xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ orqali bir qiymatli aniqlanishiga ishonch hosil qilamiz.

Izoh. Tasodifiy miqdor ξ ga bog'liqsiz bo'lgan η "silliqlashtiruvchi" tasodifiy miqdorning taqsimotini tanlashda "ixtiyoriylik" borligini hisobga olib, (1) teskari almashtirish formulasiga teng kuchli bo'lgan boshqa ko'rinishdagi formulalarga o'tish mumkin. Lekin, bu formulalarning mohiyati yagona bo'lib, u taqsimot funksiyalari xarakteristik funksiyalar orqali bir qiymatli aniqlanishini tasdiq etadi.

Masalan, ξ, η_0, η_1 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, mos ravishda $F_\xi(x)$, η_0 tasodifiy miqdor $(-l,l)$ oraliqdagi tekis taqsimotga, η_1 esa parametrlari (0,1) bo'lgan standart taqsimotga ega bo'lsalar $\xi + l\eta_0 + \sigma\eta_1$ yig'indi

$$f_\xi(t)\cdot\frac{\sin lt}{lt}\cdot e^{-\sigma^2 t^2/2} \in L_1(-\infty,\infty)$$

xarakteristik funksiyaga ega bo'ladi va bu holda (1) teskari almashtirish formulasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

Teorema 2. Agar $x+l$ va $x-l$ nuqtalar $F_\xi(\cdot)$ ning uzluksiz nuqtalari bo'lsa,

$$F_\xi(x+l) - F_\xi(x-l) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_\xi(t)\frac{\sin lt}{lt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,dt$$

formula o'rinli bo'ladi.

"Panjarasimon" taqsimotlar uchun teskari almashtirish formulasi soddalashadi. Masalan, tasodifiy miqdor ξ butun sonli qiymatlar qabul qilib, uning taqsimoti

$$P(\xi = j) = p_j,\quad j = \ldots -1,0,1,\ldots$$

bo'lsin. Bu holda, ξ ning xarakteristik funksiyasi

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu tenglikni har ikki tomonini $e^{-\mathrm{int}}$ ga ko'paytirib, so'ng $[-\pi,\pi]$ oraliqda hadma-had integrallab (bu mumkin, chunki $\left|p_k e^{-ikt}\right| = p_k$, $\sum_k p_k = 1$), quyidagi formulani olamiz:

$$p_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{int}} f(t)\,dt. \tag{5}$$

Bu yerda biz

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = \begin{cases} 2\pi, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

tenglikni hisobga oldik.

(5) tenglik ko'rsatadiki, butun qiymatli tasodifiy miqdorning taqsimoti $[-\pi,\pi]$ oraliqda berilgan xarakteristik funksiya bilan to'la aniqlanadi.

Bu tenglikdagi $\{p_n\}$ taqsimot Furye qatori koeffisiyentlarini belgilaydi va unga sodda qilib, quyidagicha geometrik ma'no berish mumkin:

$$l_k = e^{ikt}, \qquad k = \ldots,-1,0,1,\ldots$$

funksiyalar, kompleks qiymatli va kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar Gilbert fazosi $L_1(-\pi,\pi)$ da ortonormallashtirilgan bazis tashkil qiladi. Skalyar ko'paytma esa,

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t)dt$$

formula bilan aniqlanadi ($\overline{g}$ - funksiya g ga kompleks qo'shma bo'lgan funksiya). Agar

$$f_\xi = \sum l_k P(\xi = k)$$

bo'lsa,

$$f_\xi = \sum l_k (f_\xi, l_k)$$

tenglikdan

$$P(\xi = k) = (f_\xi, l_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f_\xi(t)\,dt$$

formulani olamiz.

§ 7.5. Xarakteristik funksiyalar sinfi va taqsimot funksiyalar sinfi orasidagi uzluksiz moslik haqidagi teorema

Yuqorida isbotlangan teskari almashtirish formulasidan ko'rinadiki, xarakteristik va taqsimot funksiyalari sinfi orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Ushbu paragarafda bu o'zaro bir qiymatli moslik uzluksiz bo'lishi ham isbotlanadi.

Eslatib o'tamizki, agar $F_n(x)$ - tasodifiy miqdor ξ_n ning taqsimot funksiyasi, $F(x)$ esa ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lib, $F_n \Rightarrow F$ bo'lsa, $\{\xi_n, n\ge 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga taqsimot bo'yicha yaqinlashadi deyilib, bu munosabat $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar

$$P(\xi = x_1) = P(\xi = x_2) = 0,$$

ya'ni x_1 va x_2 taqsimot funksiya $F(x)$ ning uzluksizlik nuqtalari bo'lsa, taqsimot bo'yicha yaqinlashish $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ dan

$$P(x_1 < \xi_n \le x_2) \to P(x_1 < \xi \le x_2), \quad n \to \infty$$

kelib chiqadi.

Quyidagi misol ko'rsatadiki, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ dan har bir nuqtada

$$F_n(x) \to F(x), \quad n \to \infty$$

yaqinlashish kelib chiqmaydi. Haqiqatan ham,

$$P\left(\xi_n = \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad P(\xi = 0) = 1$$

bo'lsa, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, lekin har bir nuqtada $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ emas, chunki $F_{\xi_n}(0) = 0$ va $F_\xi(0) = 1$.

Xarakteristik funksiyalarning foydali va juda ahamiyatli xossalaridan biri quyidagi ikkita teoremada keltiriladi.

Aytaylik, $F_n(x)$ va $F(x)$ taqsimot funksiyalari, $f_n(t)$ va $f(t)$ esa ularga mos keluvchi xarakteristik funksiyalar bo'lsin.

Teorema 1. (To'g'ri limit teorema) Agar $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ bo'lsa, har bir t nuqtada $f_n(t) \to f(t)$.

Teorema 2. (Teskari limit teorema) Agar $f_n(t)$ har bir t nuqtada qandaydir $f(t)$ funksiyaga yaqinlashib, $f(t)$ $t = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $F_n \Rightarrow F$ bo'lib, $f(t)$ funksiya $F(x)$ taqsimot funksiyaning xarakteristik funksiyasi bo'ladi.

Keltirilgan teoremalarning isbotida quyidagi lemmalardan foydalanamiz.

Lemma 1. Agar to'g'ri chiziqda "zich" bo'lgan D to'plam nuqtalarida $F_n(x) \to F(x)$ bo'lsa, $F_n \Rightarrow F$.

Isbot. Aytaylik, $x - F(x)$ funksiyaning uzluksiz nuqtasi bo'lsin. D to'plamda x' va x'' nuqtalar mavjud bo'ladiki, ular uchun $x' < x < x''$ bo'ladi. Oxirgidan

$$F_n(x') \le F_n(x) \le F_n(x'')$$

tengsizlikga ega bo'lamiz. Demak,

$$F(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x'') \quad (1)$$

munosabat o'rinli. Lekin $F(x') \le F(x) \le F(x'')$ va $F(x'') - F(x')$

ayirma yuqoridagi D to'plamning xossasiga asosan xohlagancha kichik bo'lishi mumkin. Bundan esa, (1) munosabatga asosan

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Lemma 2 (Xelli teoremasi). Har qanday $\{F_n, n \geq 1\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligidan sust yaqinlashadigan qism ketma-ketliklar ajratib olish mumkin.

Isbot. Aytaylik,

$$D = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset R$$

"zich" bo'lgan sanoqli to'plam bo'lsin. Chegaralangan ketma-ketlik $F_n(x_1)$ $(0 \leq F_n(x_1) \leq 1)$ yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik $\{F_{1n}(x_1)\}$ ni o'z ichiga oladi. $\lim\limits_{n\to\infty} F_{1n}(x_1) = F(x_1)$ deb belgilaylik. Endi chegaralangan $0 \leq F_{1n}(x_2) \leq 1$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $F_{2n}(x_2) \to F(x_2)$ qism ketma-ketlikni ajratib olamiz va hokazo. Dioganal usuli bilan $F_{nn}(x)$ qism ketma-ketlik har qanday $x_k \in D$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} F_{nn}(x_k) = F(x_k)$ bo'ladi. Demak, lemma 1 ga asosan $F_{nn}(x) \Rightarrow F(x)$.

Izoh. Isbotlangan lemmadagi $F(x)$ funksiya taqsimot funksiyasi bo'lishi shart emas. Masalan,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$$

bo'lsa, $F_n(x) \Rightarrow F(x) \equiv 0.$

Lemma 3. Agar taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $F_n \Rightarrow F$ bo'lib, $\operatorname{var} F = F(\infty) - F(-\infty) = 1$ bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x). \qquad (2)$$

Bu yerda $g(\cdot)$- uzluksiz va chegaralangan funksiya $(g \in CB(R))$. Bu lemmaning isboti yuqoridagi "taqsimotlarning sust yaqinlashishi" paragrafida keltirilgan va u Xellining ikkinchi teoremasi deb ataladi.

Teorema 1 ning isboti. Lemma 3 ga asosan, $F_n \Rightarrow F$ dan ((2) tenglikka qarang)

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF = f(t). \qquad (3)$$

Xarakteristik funksiya har qanday chekli oraliqda tekis uzluksiz bo'lgani uchun (3), yaqinlashish to'g'ri chiziqning chekli qismida tekis bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema 2 ning isboti. Lemma 2 ga asosan $\{F_n\}$ ketma-ketlikdan qism ketma-ketlik

$$F_{nn}(x) \Rightarrow F^*(x)$$

ajratib olish mumkin. Endi $F^*(x)$ taqsimot funksiya bo'lishini isbotlaymiz, ya'ni $F^*(\infty) = 1$, $F^*(-\infty) = 0$ ekanligini ko'rsatamiz.

Lemma 4. Tasodifiy miqdor ξ ning xarakteristik funksiyasi $f(t)$ bo'lsa,

$$P(|\xi| \le N) \ge \frac{\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| - \frac{1}{N\tau}}{1 - \frac{1}{N\tau}}, \quad N > 0,\ \tau > 0 \tag{4}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xususan, $\tau N = 2$ bo'lsa,

$$P(|\xi| \le N) \ge 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| - 1. \tag{5}$$

Keltirilgan (4) tengsizlikni isbotlaylik. Har qanday N, $\tau > 0$ uchun

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} Ee^{it\xi}dt\right| = \left|\frac{1}{2\tau}E\int_{-\tau}^{\tau} e^{it\xi}dt\right| = \left|E\frac{sin\tau\xi}{\tau\xi}\left(I_{(|\xi|\le N)} + I_{(|\xi|>N)}\right)\right| \le$$

$$\le EI_{(|\xi|\le N)} + \frac{1}{\tau N}EI_{(|\xi|>N)} = P(|\xi| \le N) + \frac{1}{\tau N}\left(1 - P(|\xi| \le N)\right)$$

Bu tengsizliklardan (4) munosabat kelib chiqadi.

Teoremaning sharti bo'yicha $f(t)$ funksiya $t = 0$da uzluksiz va shuning uchun ham $\tau_0 > 0$ mavjud bo'lib, $0 < \tau \le \tau_0$ bo'lganda,

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| \ge 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Har bir t nuqtada $f_n(t) \to f(t)$ ekanligidan, shunday n_0 topiladiki, $n \ge n_0$ bo'lganda,

$$\left|\int_{-\tau}^{\tau} f_n(t)\,dt - \int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| \le \frac{\varepsilon\tau}{2}.$$

Demak, $n_0 \le n$ lar uchun

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_n(t)\,dt\right| \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

va (5) tengsizlikdan

$$P\left(|\xi_n| \le \frac{2}{\tau}\right) = F_n\left(\frac{2}{\tau}\right) - F_n\left(-\frac{2}{\tau}\right) \ge 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1 = 1 - \varepsilon,$$

ya'ni

$$F_n\left(\frac{2}{\tau}\right) - F_n\left(-\frac{2}{\tau}\right) \ge 1 - \varepsilon.$$

Oxirgi tengsizlikdan τ ixtiyoriy kichik musbat son bo'lgani uchun,

$$F^*(+\infty) = 1, \qquad F^*(-\infty) = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Endi $F_n \Rightarrow F$ ekanligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $F_n \not\Rightarrow F$ bo'lsin. Bu holda ikkita qism $\{n'\}$ va $\{n''\}$ ketma-ketliklar mavjud bo'ladiki, ular uchun

$$F_{n'} \Rightarrow F^*, \quad F_{n''} \Rightarrow F^{**}$$

munosabat o'rinh bo'lar edi. Lekin $f_n \to f$ (teoremanimg sliartiga asosan), demak,

$$f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{**}(x) = f^{**}(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = f(t).$$

Oxirgi tenghiklar $F_n \not\Rightarrow F$ limit munosabatga zid. Teorema 2 isbot etildi.

Quyidagi teoremada taqsimot funksiyalari va xarakteristik funksiyalar orasidagi uzluksiz moslik haqidagi masalaga to'la aniqlik kiritiladi.

Teorema 3. Xarakteristik funksiyalar ketma-ketligi

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x)$$

uchun liar bir nuqtada $f_n(t) \to f(t)$ bo'lsin. Bu holda quyidagi shartlar teng kuchli:

a) $f(t)$ xarakteristik funksiya,

b) $f(t)$ funksiya $t = 0$ nuqtada uzluksiz,

c) taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $\{F_n, n \ge 1\}$ "zich".

Shunday qilib, agar biz $f_n(t) \to f(t)$ munosabat o'rinli ekanhigini ko'rsatsak va keltirilgan uchta a), b), c) shartlardan birortasi bajarilsa, taqsimot funksiyasi F mavjud bo'lib, $F_n \Rightarrow F$ sust yaqinlashish bajariladi.

Teorema 3 ning isboti. Quyidagi implikatsiya sxemasi

$$\begin{array}{ccc} a) & \Leftrightarrow & c) \\ \Downarrow & \nearrow & \\ b) & & \end{array}$$

bo'yicha o'tkaziladi. Haqiqatan ham, $a)$ va $c)$larning teng kuchliligi oldingi paragraflarda isbot etilgan, $a) \Rightarrow b)$ munosabat esa xarakteristik funksiyalar xossasiga asosan o'z-o'zidan ravshan. Demak, $b)$ dan $c)$kelib chiqishini ko'rsatish qoldi, xolos. Oxirgi uchun esa, boshqa masalalar uchun ham muhim bo'lgan quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz.

Lemma 5. Agar $f(t)$ tasodifiy miqdor ξ ning xarakteristik funksiyasi bo'lsa, har qanday $u > 0$ uchun

$$P\left(|\xi| > \frac{2}{u}\right) \le \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}[1 - f(t)]\,dt.$$

Isbot. Tengsizlikning o'ng tomoni

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - e^{-itx}\right]dF(x)\,dt$$

ifodaga teng ($F - \xi$ ning taqsimot funksiyasi). Bu yerda integrallash tartibini almashtirib va

$$\int_{-u}^{u}\left[1 - e^{-itx}\right]dt = \left(t + \frac{e^{-itx}}{ix}\right)\Bigg|_{-u}^{u} = 2u\left(1 - \frac{\sin ux}{ux}\right)$$

tenglikni hisobga olsak,

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}[1 - f(t)]\,dt = 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin ux}{ux}\right)dF(x) \ge 2\int_{|x| > \frac{u}{2}}\left(1 - \left|\frac{\sin ux}{ux}\right|\right)dF(x) \ge$$

$$\ge 2\int_{|x| > \frac{u}{2}}\left(1 - \frac{1}{|ux|}\right)dF(x) \ge \int_{|x| > \frac{u}{2}} dF(x)$$

lemmani isbot etadigan tengsizliklar ketma-ketligini hosil qilamiz. Xususan ulardan lemmadagi tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda musbat son ekanligini ham ko'rdik.

Endi b) shart bajarilgan bo'lsin. Lemmaga asosan

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{|x| > \frac{2}{u}} dF_n(x) \le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}[1 - f_n(t)]\,dt = \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}[1 - f(t)]\,dt.$$

tengsizlikni yoza olamiz va $f(t)$ funksiyaning $t = 0$ nuqtada uzluksiz ekanligidan

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}[1 - f(t)]\,dt$$

o‘rta qiymatni (musbat u ni yetarli katta qilib tanlash hisobiga) xohlagancha kichik qilish mumkinligini olamiz. Bu esa $c)$ shart bajarilganini bildiradi.

§ 7.6. Xarakteristik funksiyalarni Puasson teoremasiga tatbiqi

Bog‘liqsiz va butun qiymatli tasodifiy miqdorlar

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

ketma-ketligi uchun

$$P(\xi_k = 1) = p_k, \qquad P(\xi_k = 0) = 1 - p_k = q_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

bo‘lsin.

Teorema. Quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\left| P(S_n = k) - \pi_\lambda(k) \right| \le \sum_{k=1}^{n} p_k^{\,2} + 2\sum_{k=1}^{n} q_k .$$

Bu yerda

$$\pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots \qquad \lambda = \sum_{k=1}^{n} p_k .$$

Shunday qilib, bog‘liqsiz butun qiymatli tasodifiy miqdorlar seriyalari

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

berilgan bo‘lib,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}, \qquad P(\xi_{nk} = 1) = p_{nk}$$

$$P(\xi_{nk} = 0) = 1 - p_{nk} = q_{nk}, \qquad \lambda = \sum_{k=1}^{n} p_{nk},$$

bo‘lsa, $P(S_n = k) - \pi_\lambda(k)$ ayirmani nolga intilishi uchun,

$$\sum_{k=1}^{n} q_{nk} \to 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} p_{nk}^2 \to 0, \qquad n \to \infty \qquad (1)$$

shartlari bajarilishi yetarli bo‘ladi.

Izoh. Tengsizlik

$$\sum_{k=1}^{n} p_{nk}^2 \le \lambda \cdot \max_{k \le n} p_{nk}$$

o‘rinli ekanligidan, keltirilgan (1) shartlarni bajarilishi uchun,

$$\max_{1 \le k \le n} p_{nk} \to 0, \quad \lambda \le \lambda_0 = const$$

bo‘lishi yetarli bo‘ladi.

Lemma. Agar kompleks β uchun, $\operatorname{Re}\beta \le 0$ bo‘lsa,

$$\left|e^{\beta}-1\right|\le|\beta|,\quad \left|e^{\beta}-1-\beta\right|\le\frac{|\beta|^2}{2},$$

$$\left|e^{\beta}-1-\beta-\frac{\beta^2}{2}\right|\le\frac{|\beta|^3}{6}.$$

Isbot. Keltirilgan tengsizliklar quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi (Ularda $t=\beta u$ almashtirishdan va $\operatorname{Re}s\le 0$ bo'lganda, $\left|e^{s}\right|\le 1$ bo'hshi faktidan foydalaniladi)

$$\left|e^{\beta}-1\right|=\left|\int_0^{\beta}e^{t}dt\right|=\left|\beta\int_0^{1}e^{\beta u}du\right|\le|\beta|,$$

$$\left|e^{\beta}-1-\beta\right|=\left|\int_0^{\beta}\left(e^{t}-1\right)dt\right|=\left|\beta\int_0^{1}\left(e^{\beta u}-1\right)du\right|\le$$

$$\le|\beta|^2\int_0^1 udu=\frac{|\beta|^2}{2}.$$

Oxirgi tengsizlik

$$\left|e^{\beta}-1-\beta-\frac{\beta^2}{2}\right|=\left|\int_0^{\beta}\left(e^{t}-1-t\right)dt\right|$$

munosabatdan foydalanib, oldingilariga o'xshash ravishda isbotlanadi.

Teoremaning isboti. Quyidagi tenglikka egamiz:

$$f_k(t)=Ee^{it\xi_k}=1+p_k\left(e^{it}-1\right)+q_k\left(\gamma_k(t)-1\right)$$

bu yerda $\gamma_k(t)$ qandaydir butun qiymatli tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi, tasodifiy miqdorlar ξ_k larni bog'liqsiz ekanligidan

$$f_{S_n}(t)=Ee^{itS_n}=\prod_{k=1}^{n}f_k(t).$$

Agar ξ_0 parametri λ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'lsa,

$$f_{\xi_0}(t)=Ee^{it\xi_0}=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}=\prod_{k=1}^{n}\psi_k(t)$$

va bu yerda $\psi_k(t)=e^{p_k\left(e^{it}-1\right)}$.

Demak, $f_{S_n}(t)$ va $f_{\xi_0}(t)$ xarakteristik funksiyalar ayirmasi

$$\left|f_{S_n}(t)-f_{\xi_0}(t)\right|=\left|\prod_{k=1}^{n}f_k(t)-\prod_{k=1}^{n}\psi_k(t)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f_k-\psi_k\right|.$$

Lemmada keltirilgan tengsizhklar bo'yicha

$$\left|\psi_k(t)-1-p_k\left(e^{it}-1\right)\right|\le\frac{p_k^{\,2}\left|e^{it}-1\right|^2}{2}=$$

$$= \frac{p_k^2}{2}\left(\sin^2 t + (1-\cos t)^2\right) = p_k^2\left(\frac{\sin^2 t}{2} + 2sin^4\frac{t}{2}\right), \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k - \psi_k| \le 2\sum_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} p_k^2\left(\frac{\sin^2 t}{2} + 2\sin^4\frac{t}{2}\right).$$

Endi $P(S_n = k)$ uchun teskari almashtirish formulasidan foydalansak,

$$|P(S_n = k) - \pi_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\left|f_{S_n}(t) - f_{\xi_0}(t)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[2\sum_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} p_k^2\left(\frac{\sin^2 t}{2} + 2\sin^4\frac{t}{2}\right)\right]dt =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} p_k^2,$$

chunki

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt = \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt = \frac{3}{4}$$

teorema isbot bo'ldi.

Agar (2) da $\left|e^{it} - 1\right| \le 2$ tengsizlikdan foydalansak, yuqoridagi hisoblashlar soddalashadi, chunki oxirgi ikki integralni hisoblash zaruriyati bo'lnaydi. Lekin biz bunda ancha qo'pol bo'lgan

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k - \psi_k| \le 2\left(\sum_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} p_k^2\right),$$

$$|P(S_n = k) - \pi_\lambda(k)| \le 2\left(\sum_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} p_k^2\right)$$

baholarni olgan bo'lar edik.

§ 7.7. Ko'p o'lchovli xarakteristik funksiyalar

Quyidagi belgilashlar to'g'risida kelishib olamiz. R^n dagi algebraik operatsiyalarda $a \in R^n$ sonli vektor deb

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

vektor–ustun, $a^* = (a_1,...,a_n)$ esa vektor –satr tushuniladi. Agar $a,b \in R^n$ bo'lsa, bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

yig'indini aytiladi. Demak, $(a,b) = a^* \cdot b$.

Agar $a \in R^n$, $T = \|t_{ij}\| - n \times n$ tartibli matritsa bo'lsa,

$$(Ta,a) = a^* Ta = \sum_{i,j=1}^{n} a_i t_{ij} a_j$$

Ta'rif 1. $(R^n, B(R^n))$-o'lchovli fazoda $F = F(x) - n$ o'lchovli taqsimot funksiyasi berilgan bo'lsin $(x = (x_1,...,x_n))$. Uning xarakteristik funksiyasi deb

$$f(t) = \int_{R^n} e^{i(t,x)} dF(x), \ t \in R^n,$$

funksiyaga aytiladi.

Ta'rif 2. Agar $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) - (\Omega, \mathfrak{I}, P)$ ehtimollik fazosida aniqlangan, R^n da qiymat qabul qiladigan tasodifiy vektor bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasi deb,

$$f_\xi(t) = \int_{R^n} e^{i(t,x)} dF_\xi(x), \ t \in R^n,$$

funksiyaga aytiladi. Bu yerda $F_\xi = F_\xi(x)$-tasodifiy $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ vektorning taqsimot funksiyasi, $x = (x_1,...,x_n)$.

Agar $F(x)$ zichlik funksiyasi $p(x)$ ga ega bo'lsa,

$$f(t) = \int_{R^n} e^{i(t,x)} p(x) dx.$$

Demak, bu holda xarakteristik funksiya $f(t)$ zichlik funksiyasi $p(x)$ ning Furye almashtirishi bo'lar ekan. Keltirilgan ta'riflardan ξ tasodifiy vektorning xarakteristik funksiyasi

$$f_\xi(t) = Ee^{i(t,\xi)}, \ t \in R^n$$

tenglik bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

Ko'p o'lchovli xarakteristik funksiyalarning xossalari $n=1$ bo'lgan holdagi tasodifiy miqdor xarakteristik funksiyaning xossalari bilan ustma-ust tushadi. Lekin, tasodifiy vektorning momentlarini xarakteristik funksiyalar orqali ifoda etish aytib o'tilgan fikrdan mustasno bo'lishi mumkin.

Xarakteristik funksiya va taqsimotning momentlari

Qiymatlari R^n da bo'lgan tasodifiy vektor $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ning $|k| = k_1 + ... + k_n$ tartibli aralash momenti deb,

$$M_{k_1k_2\dots k_n}=E\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\dots\xi_n^{k_n}$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu yerda $k_i\geq 0$ bo‘lgan butun son, $i=1,2,\dots,n$. Qayd qilib o‘tish mumkinki, agar

$$E|\xi_k|^p<\infty,\quad k=1,\dots,n$$

bo‘lsa, $|k|\leq p$ tartibli hamma $M_{k_1\dots k_n}$ momentlar mavjud bo‘ladi. Haqiqatan ham, o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik miqdolar orasidagi munosabat bo‘yicha,

$$\prod_{i=1}^{n}|\xi_i|^{k_i}=\prod_{i=1}^{n}|\xi_i|^{|k|\cdot\frac{k_i}{|k|}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{|k|}|\xi_i|^{|k|}$$

va bundan

$$E\prod_{i=1}^{n}|\xi_i|^{k_i}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{|k|}E|\xi_i|^{|k|}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{|k|}\left(E|\xi_i|^p\right)^{\frac{|k|}{p}}<\infty.$$

Taqsimotning momentlarini xarakteristik funksiyaning hosilalari orqali ifoda etish mumkin. Xarakteristik funksiya $f(t)$ ning “aralash” hosilalari

$$\frac{\partial^{|k|}f(t)}{\partial t_1^{k_1}\dots\partial t_n^{k_n}}=E(i\xi_1)^{k_1}\dots(i\xi_n)^{k_n}\cdot\exp(i(t,\xi))\tag{1}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu formula (1) dan $t=(0,\dots,0)$ deb olsak,

$$M_{k_1\dots k_n}=(i)^{-|k|}\left.\frac{\partial^{|k|}f(t)}{\partial t_1^{k_1}\dots\partial t_n^{k_n}}\right|_{t=0}\tag{2}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Quyidagi teorema ko‘p o‘lchovli xarakteristik funksiyalarni tasodifiy miqdorlarni bog‘liqsizligi tushunchasiga aloqador ekanligini ko‘rsatadi.

Teorema 1. Tasodifiy vektor $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ ning komponentalari $\xi_1,\dots,\xi_n$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar bo‘lishi uchun, bu vektorning xarakteristik funksiyasi

$$f_\xi(t)=f_{\xi_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot f_{\xi_n}(t_n),\qquad t=(t_1,\dots,t_n)$$

tenglikni qanoatlantirishi yetarli va zaruriy shart.

Isbot. Keltirilgan tenglikning yetarli bo‘lishini isbotlash uchun $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ vektorning taqsimot funksiyasini $F=F(x_1,\dots,x_n)$, ξ_k $(1\leq k\leq n)$ tasodifiy miqdorning taqsimotini esa $F_k(x)$ deb belgilaymiz. Aytaylik,

$$G=G(x_1,\dots,x_n)=F_1(x_1)\dots F_n(x_n)$$

bo'lsin. Bu holda, Fubini teoremasi bo'yicha har qanday $(t_1,...,t_n)\in R^n$ uchun

$$\int_{R^n} e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)}dG(x_1,...,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\int_R e^{it_kx_k}dF_k(x_k)=\prod_{k=1}^{n}Ee^{it_k\xi_k}=Ee^{i(t_1\xi_1+...+t_n\xi_n)}=$$

$$=\int_{R^n} e^{i(t_1\xi_1+...+t_n\xi_n)}dF(x_1,...,x_n)$$

Demak, qisqaroq yozuvda

$$\int_{R^n} e^{i(t,x)}dG(x)=\int_{R^n} e^{i(t,x)}dF(x).$$

Endi $L=\left\{e^{i(t,x)},\ x\in R^n\right\}$ funksiyalar sinfi taqsimotni aniqlaydigan sinf bo'lgani uchun $G=F$, ya'ni

$$F(x_1,...,x_n)=F_1(x_1)...F_n(x_n).$$

Oxirgi tenglik $\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz ekanligini anglatadi.

Teoremadagi zaruriylik quyidagidan bevosita kelib chiqadi: agar $\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa,

$$e^{it_1\xi_1},...,e^{it_n\xi_n}$$

miqdorlar ham bog'liqsiz bo'ladi.

Ko'p o'lchovli normal taqsimot.

Komponentalari bog'liqsiz va parametrlari

$$\left(a_k^0,\sigma_k^2\right),\quad \sigma_k>0,\qquad k=1,2,...,n$$

bo'lgan normal taqsimot bilan taqsimlangan

$$\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$$

tasodifiy vektorni ko'raylik. Eslatib o'tamizki, parametrlari $\left(a,\sigma^2\right)$ bo'lgan normal taqsimotning zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

bo'lib, uning xarakteristik funksiyasi

$$f(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Shuning uchun ham ξ vektor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$p(x_1,...,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left(x-a_k^0\right)^2}{\sigma_k^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{k=1}^{n}\sigma_k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(D^{-1}\left(x-a^0\right),\left(x-a^0\right)\right)\right\}$$

va bu yerda $a^0=\left(a_1^0,...,a_n^0\right)$, D^{-1} – diagonal matritsa bo‘lib, diagonalda σ_k^{-2} element turadi. Masalan $n=2$ holda

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}, & 0\\ 0, & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}.$$

Bu taqsimotning xarakteristik funksiyasi

$$f_\xi(t)=E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}t_k\xi_k\right\}=\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{ia_k^0t_k-\frac{\sigma_k^2t_k^2}{2}\right\}=\exp\left\{i\left(a^0,t\right)-\frac{1}{2}(Dt,t)\right\},$$

bu yerda $D-D^{-1}$ ga teskari bo‘lgan matritsa bo‘lib,

$$D=\left\|\delta_{ik},\sigma_k^2\right\|_1^n,\quad \delta_{ik}=0,\, i\neq k,\ \delta_{kk}=1.$$

R^n da ixtiyoriy chiziqli almashtirish A ni ko‘raylik (A bu chiziqli almashtirishga mos kelgan matritsani belgilaydi) va

$$\eta=A\xi$$

bo‘lsin. Xarakteristik funksiya

$$f_\eta(t)=f_\xi\left(A^*t\right)=\exp\left\{i\left(a,A^*t\right)-\frac{1}{2}\left(Da^*t,A^*t\right)\right\}$$

yoki

$$f_\eta(t)=\exp\left\{i(a,t)-\frac{1}{2}(Bt,t)\right\}. \qquad (3)$$

Bu yerda * - transpozitsiya belgisi,

$$a=Aa^*,\quad B=ADA^*.$$

E’tibor qilamizki, B – simmetrik va manfiy aniqlanmagan matritsa:

$$B^*=\left(ADA^*\right)^*=\left(A^*\right)^*D^*A^*=ADA^*,$$

$$\left(B^*t,t\right)=\left(ADA^*t,t\right)=(Dv,v)\geq 0.$$

Ta’rif. Xarakteristik funksiyasi (3) tenglik bilan aniqlanadigan n – o‘lchovli taqsimot normal (yoki Gauss) taqsimot deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan fikrlar normal taqsimotning mavjudligini isbotlab, bu ta’rifning ma’noga ega ekanligini tasdiqlaydi.

Agar $\det B>0$ bo‘lsa, normal taqsimotning zichlik funksiyasi $\left(x\in R^n\right)$

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det B}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(x-a),x-a\right)\right\}. \tag{4}$$

Demak, ixtiyoriy vektor a va simmetrik, musbat aniqlangan matritsa B dan iborat (a,B) juftlik (3) yoki (4) tengliklar orqali mos normal taqsimotni aniqlaydi. Bu (a,B) juftlk $n-$o'lchovli normal taqsimotning parametri deb ataladi.

Endi, $n-$o'lchovli normal taqsimotni aniqlaydigan (a,B) parametrning nazariy ehtimollik ma'nosini ko'raylik. Buning uchun (3) tenglikdagi xarakteristik funksiya $f_\eta(t)=f(t)$ ning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz va natijada quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial \ln f(t)}{\partial t_k}=\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial t_k},$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(t)}{\partial t_k \partial t_r}=\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t_k \partial t_r}-\frac{1}{f^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial t_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial t_r}$$

Demak,

$$\left.\frac{\partial \ln f(t)}{\partial t_k}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial t_k}\right|_{t=0}=ic_k$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln f(t)}{\partial t_k \partial t_r}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t_k \partial t_r}\right|_{t=0}-\left.\frac{1}{f^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial t_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial t_r}\right|_{t=0}=-c_{rk}+c_k c_r$$

belgilashlardan foydalansak,

$$c_k=E\eta_k, \qquad c_{kr}=E\eta_k\eta_r$$

tengliklarni hosil qilamiz (eslatib o'tamiz $\eta=(\eta_1,...,\eta_k)$-xarakteristik funksiyasi (3) bilan aniqlanadigan tasodifiy vektor). Oxirgilardan

$$\ln f_\eta(t)=\ln f(t)=i(a,t)-\frac{1}{2}(Bt,t)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$a_\eta=E\eta_k,\, b_{kr}=E(\eta_k-c_k)(\eta_r-c_r)=c_{kr}-c_k c_r \tag{5}$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi, (3)-(5) lardan shunday xulosaga kelish mumkin: $a=(a_1,...,a_n)-$vektor, η tasodifiy vektorning komponentalarining o'rta qiymatidan tashkil topgan vektor (η ning o'rta qiymati), B matritsaning elementlari b_{kr} lar esa, η vektorning komponentalarini ikkinchi tartibli markazlashtirilgan momentlariga teng bo'ladi. $B-$matritsa η vektorning korrelatsion matritsasi deb ataladi.

Vektor ξ ning komponentalari ξ_k va ξ_r tasodifly miqdorlar orasidagi korrelatsiyalar koeffitsiyentini ρ_{kr}, ξ_k ning dispersiyasini σ_k deb belgilasak,

$$b_{kr} = \rho_{kr}\sigma_k \cdot \sigma_r$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Misol sifatida ikki o'lchovli normal taqsimotning zichlik funksiyasini keltiramiz (bu funksiyaning argumentlari x_1 va x_2 o'rniga x va y larni ishlatamiz). Bu holda,

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right), \qquad \rho = \rho_{12},$$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \qquad (6)$$

Oxirgi (6) formuladan ko'rinadiki, normal taqsimotga ega bo'lgan $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ vektorning komponentalari ξ_1 va ξ_2 lar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lishi uchun, ular orasidagi korrelatsiya koeffitsiyenti

$$\rho = \rho_{12} = 0$$

ekanligi yetarli va zaruriy shartdir. Haqiqatan ham, $\rho = 0$ bo'lsa,

$$p(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right\} =$$

$$= p_1(x, a_1, \sigma_1) \cdot p_2(y, a_2, \sigma_2),$$

$$p_1(x, a_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right\},$$

$$p_2(x, a_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}.$$

Demak, $p(x, y, a_1, a_2) = p_{\xi_1}(x) \cdot p_{\xi_2}(y)$.

Misol va masalalar

1. Quyidagi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarning qaysilari xarakteristik funksiya bo'la olmaydi:

$$f_1(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f_2(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad f_3(t) = \sin bt, \quad f_4(t) = \cos bt, \quad f_5(t) = 1 - it$$

Javob: $f_1(t)$, $f_3(t)$, $f_5(t)$

2. Tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuniga ega:

X:	-2	0	2
P:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Xarakteristik funksiyasini toping va uning yordamida dispersiyasini hisoblang.

Javob: $f(t) = \cos^2 t$, $DX = 2$.

3. X tasodifiy miqdor $p > 0$ parametrli geometrik taqsimot qonuniga ega. Bu tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini toping.

Javob: $f(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$.

4. X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bir xil taqsimlangan, xarakteristik funksiyalari $f(t)$ ga teng tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Agar $Z = X - Y$ bo'lsa, Z ning xarakteristik funksiyasini toping.

Javob: $f_Z(t) = |f(t)|^2$.

5. Uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. $\eta = F(\xi)$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini toping va uning qaysi taqsimot qonuniga mos kelishini aniqlang.

Javob: $f_\eta(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$; tekis taqsimot qonuniga mos keladi.

VIII BOB. BOG'LIQSIZ TASODIFIY MIQDORLAR KETMA-KETLIGI. LIMIT TEOREMALAR

VIII bobni o'qib chiqish natijasida:

- *Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni qachon o'rinli bo'lishini.*
- *Bir xil taqsimlangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi shartlari.*
- *Qoldiq σ - algebra hodisalari uchun "0 yoki 1" qonuni.*
- *Markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi uchun yetarli va zaruriy shartlar*

haqida tasavvurlarga ega bo'linadi;

- *Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishida (D) va (L) shartlar kerak bo'lishini.*
- *Markaziy limit teoremada qo'shiluvchilarning cheksiz kichik bo'lishini zaruriyligini*

bilish va amalda qo'llay olishi;

- *Lindeberg shartini markaziy limit teorema uchun yetarli bo'lishini.*
- *Zaruriylik haqidagi Feller teoremasini o'rinli bo'lish shartlarini.*
- *Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun yetarli shartlarni topishni*

o'rganib olish mumkin.

Oldingi boblarda yozilganlarga asoslanib aytish mumkinki, ehtimolliklar nazariyasining ko'p masalalarida tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotini o'rganishga to'g'ri keladi. Masalan, binomial taqsimotni Normal yoki Puasson taqsimoti bilan aproksimatsiyasi bilan bog'liq bo'lgan Muavr – Laplas, Puasson teoremalari bunga misol bo'la oladi.

§ 8.1. Katta sonlar qonuni

Bu bobda, asosan, o'zaro bog'liqsiz bo'lgan

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o'rganiladi. Bog'liqsizlik sharti tasodifiy miqdorlarni bitta umumiy ehtimollik fazosi $(\Omega, \Im, P)$ da aniqlangan bo'lishini taqozo qiladi.

Ta'rif: Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ uchun $E\xi_n (n \geq 1)$ mavjud bo'lsin. Ayirma

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\xrightarrow{P}0, \qquad n\to\infty$$

ehtimollik bo'yicha nolga intilishini ta'kidlaydigan hamma teoremalar, katta sonlar qonuni deb ataladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, katta sonlar qonuni mohiyati va ma'nosi nuqtayi nazaridan, tasodifiy miqdorlar uchun ularning "vaqt bo'yicha" o'rta qiymatlari "fazoviy" o'rta qiymatlar bilan yaqinligini bildiruvchi ergodik teoremalar bo'lar ekan. Amaliy nuqtayi nazardan, ehtimolllklar nuqtayi nazaridan tatbiqlarini (tatbiq etish mumkinligini) katta sonlar qonuni orqali tushuntirish mumkin. Haqiqatan ham, katta sonlar qonuni limit holatda (katta n lar uchun) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ tasodifiy miqdorni $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k$ konkret son bilan almashtirish mumkinligini tasdiqlaydi, demak katta n lar uchun "tasodifiylik" yo'qola borib, qandaydir "statistik turg'unlik" yuzaga kela boshlaydi. Qo'polroq qilib aytganda, katta sonlar qonuni o'rinli bo'lmasa, "tasodifiylik" saqlanib qolaveradi va bu holda katta ishonchlilik bilan muayyan xulosalarga kelib bo'lmaydi.

Chebishev teoremasi. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots \qquad (1)$$

uchun $E\xi_n=a,\ D\xi_n\le c<\infty$ munosabat bajarilsin. Bu holda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n\xrightarrow{P}a, \qquad n\to\infty, \qquad (2)$$

ya'ni (1) ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi.

Isbot. Aslida teoremaning xulosasidan "kuchli" bo'lgan

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-a\right)^2\to 0, \qquad n\to\infty$$

jumlani isbotlaymiz. O'z navbatida oxirgi uchun

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_n\right)\to 0, \qquad n\to\infty,$$

ekanligini isbotlash yetarli bo'ladi. Tasodifiy miqdor ξ_k lar bog'liqsiz bo'lgani uchun

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k\le\frac{1}{n^2}\cdot nc=\frac{c}{n}\to 0.$$

Izoh. Katta sonlar qonuni (2) o'rinli bo'lishi uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=0 \qquad (3)$$

sharti bajarilishi yetarli bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k, \qquad y_n = n^2$$

deb olsak, limitlar haqidagi Shtols teoremasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{D\xi_n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{D\xi_n}{2n-1} = 0.$$

Bu fikrlardan kelib chiqadiki, (2) katta sonlar qonuni o'rinli bo'hshi uchun, $D\xi_n \le c$ sharti o'rniga

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D\xi_n}{n} = 0$$

sharti bajarilishi yetarli bo'ladi.

Natija. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (1) uchun

$$E\xi_n = a, \quad D\xi_n \le c, \qquad n = 1,2,...$$

shartlar bajarilsin. Bu holda, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Haqiqatan ham, Chebishev tengsizligi bo'yicha

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k \to 0, \text{ ixtiyoriy}$$

$$\varepsilon > 0, \ n \to \infty.$$

Bu natija noma'lum miqdorlarni bir necha marta o'lchab, so'ng biror xulosaga kelishga asoslangan "o'rta arifmetik" prinsipi to'g'ri ekanligini isbot etadi. Masalan, a miqdor noma'lum planetaning diametri bo'lsin. Bir xil sharoitda kuzatuvchi o'lchov ishlarini bajarib $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ natijalarni oladi va a uchun taqribiy qiymat sifatida kuzatilgan natijalarnig o'rta arifmetigi

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n}$$

miqdorni qabul qiladi. Agar kuzatuvchilarda sistematik xatolar qaytarilmasa, ya'ni $E\xi_n = a$ bo'lsa, yuqoridagi natija bo'yicha

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - a \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

Aytib o'tilganlardan tabiiy ravishda tasodifiy miqdorlarni dispersiyalari mavjud bo'lmasa ham , katta sonlar qonuni bajariladimi degan savol yuzaga keladi. Bu haqda quyidagi Xinchin teoremasi o'rinli bo'ladi.

Teorema (Xinchin). Aytaylik, $\{\xi_n, n \geq 1\}$-bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $E\xi_n = a$ mavjud bo'lsin. Bu holda,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} a, \qquad n \to \infty.$$

Isbot. Oldin quyidagi lemmadagi faktni qayd qilib o'tamiz.

Lemma. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ uchun limit tasodifiy miqdor ξ o'zgarmas bo'lsa, ehtimollik bo'yicha yaqinlashish $\left(\xi_n \xrightarrow{p} c\right)$ va sust yaqinlashish $\left(\xi_n \xrightarrow{d} c\right)$ teng kuchli bo'ladi.

Lemmada keltirilgan jumlani quyidagi implikatsiya diagrammasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left\{\xi_n \xrightarrow{p} c\right\} \Leftrightarrow \left\{\xi_n \xrightarrow{d} c\right\}. \tag{4}$$

Agar

$$F_n(x) = P(\xi_n < x), \qquad E_c(x) = P(\xi_0 < x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases}$$

deb olsak, $E_c(x)$ ning uzluksizlik nuqtalari to'plami

$$C(E_c) = (-\infty, c) \cup (c, \infty).$$

Endi, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P(|\xi_n - c| > \varepsilon) = 1 - P(|\xi_n - c| \leq \varepsilon) = 1 - P(c - \varepsilon \leq \xi_n < c + \varepsilon) =$$

$$= 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon) \tag{5}$$

tenglik o'rinli ekanligidan va

$$c - \varepsilon \in C(E_c), \qquad c + \varepsilon \in C(E_c)$$

munosabatlarni hisobga olib (5) dan (4) diagramma to'g'ri bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Lemmadan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0, \qquad n \to \infty$$

va

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n}{n} < x\right) \Rightarrow E_a(x), \qquad n \to \infty$$

munosabatlar teng kuchli bo'lishi kelib chiqadi.

Oxirgi sust yaqinlashish $(F_n \Rightarrow E_a)$ o'z navbatida, uzluksizlik teoremasiga asosan xarakteristik funksiyalar ketma-ketligi uchun

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) \to e^{iat}, \qquad n \to \infty \qquad (6)$$

limit munosabatning har qanday t nuqtada bajarilishi bilan teng kuchli bo'ladi.

Endi, ξ_1 tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini $f(t)$ deb belgilasak,

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left[f\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$$

tenglikka ega bo'lamiz. Xarakteristik funksiya $f(t)$ qandaydir $\delta > 0$ uchun, $|t| < \delta$ bo'lganda

$$|f(t) - 1| < \frac{1}{2}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, $|t| < \delta$ bo'lganda

$$l(t) = \ln f(t)$$

funksiyani aniqlash mumkin (bu yerda logarifmning bosh qiymati nazarda tutiladi). Matematik kutilma $E\xi_n = a$ mavjud bo'lgani uchun

$$l'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = ia.$$

Shunday qilib, $t$ning fiksirlangan har qanday qiymatida, yetarli katta n lar uchun $l\left(\frac{t}{n}\right)$ funksiya aniqlangan va

$$f_{\frac{s_n}{n}}(t) = e^{nl\left(\frac{t}{n}\right)}.$$

Endi $l(0) = 0$ ekanligini hisobga olib, quyidagi asimptotik munosabatni yoza olamiz:

$$e^{nl\left(\frac{t}{n}\right)} = \exp\left\{ \frac{l\left(\frac{t}{n}\right) - l(0)}{\frac{t}{n}} \cdot t \right\} \to e^{l'(0)t} = e^{iat}.$$

Demak, oxirgidan (6) munosabatning to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

Bernulli teoremasi. Yuqorida keltirilgan katta sonlar haqidagi Chebishev teoremasining yana bir xususiy holini ko'ramiz. O'zaro bog'liqsiz va har bir tajribaning natijasi 2 ta elementar hodisadan iborat tajribalar ketma-ketligini ko'raylik (Bernulli sxemasi). Bu ikkita elementar hodisalarni , Yutuq (Yu) va Yutqiziq ($\overline{Yu}$) deb hisoblab quyidagi $\{\xi_n, n \geq 1\}$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritaylik: agar n – tajribada Yu ro'y bergan bo'lsa, $\xi_n = 1$, $\overline{Yu}$ (yutqiziq) ro'y bersa $\xi_n = 0$ deb hisoblaymiz. Har bir tajribada Yu ro'yobga chiqish ehtimolligi $P(Yu) = p$, chiqmaslik ehtimolligi P($\overline{Yu}$)=1- p deb olsak, o'zaro bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

hosil bo'lib, unda

$$\xi_k = \begin{cases} 1, \ ehtimolligi & p, \\ 0, \ ehtimolligi & 1 - p. \end{cases}$$

Bu holda,

$$E\xi_n = p, \qquad D\xi_n = p(1-p) \le \frac{1}{4},$$

bo'lib Chebishev teoremasining shartlari bajariladi. Tasodifiy miqdor

$$\upsilon_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

birinchi n tajribada yutuqning ro'y berish chastotasini (necha marta takrorlanishini) ifoda etadi. Chebishev teoremasiga asosan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$P(|\upsilon_n - p| > \varepsilon) \to 0, \qquad n \to \infty \qquad (7)$$

ya'ni $\upsilon_n \xrightarrow{p} p$ munosabat bajariladi. Bu (7) munosabat Bernulli teoremasi deb atalib, kiritilgan p ehtimollikni statistik-intuitiv tassavurlarga mos kelishini isbotlaydi.

§ 8.2. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar seriyasi uchun katta sonlar qonuni

Endi katta sonlar qonuni ixtiyoriy bog'liqsiz va har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli bo'lishi shartlarini topishga harakat qilamiz. Bunda ancha umumiy bo'lgan masalani, katta sonlar qonuni bog'liqsiz va har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardan tashkil topgan seriyalar sxemasi uchun o'rinli bo'lishi shartlarini o'rganamiz.

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

ixtiyoriy seriyalari berilgan bo'lsin (ξ_{nk} tasodifiy miqdorlar taqsimoti n ga bog'liq bo'lishi mumkin). Agar

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$$

deb belgilasak, (1) seriyalar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi deganda

$$S_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

ko'rinishdagi hamma teoremalarni tushunish mumkin, chunki umumiylikni chegaralamasdan

$$E\xi_{nk} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

deb hisoblash mumkin.

Kelgusida quyidagi shart: $n \to \infty$ da

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} E \min\left(|\xi_{nk}|, |\xi_{nk}|^2\right) \to 0 \tag{D}$$

muhim rol o'ynaydi.

Teorema 1. Agar (2), (D) shartlar bajarilsa, (1) seriyalar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$S_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

Izoh 1. Teorema 1 ni boshqacha teng kuchli variantda quyidagicha yozish mumkin:

$$P(S_n < x) \Rightarrow E_0(x), \quad n \to \infty$$

bu yerda

$$E_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Izoh 2. Yuqoridagi bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi haqidagi Xinchin teoremasi teorema 1 ning xususiy holi bo'ladi. Bu fikrni isbotini $E\xi_k = 0$, $E|\xi_k|^s \le c < \infty$, $1 < s \le 2$, shartlarni qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdor ξ_k misolida ko'raylik. Faraz qilaylik $b(n) = o(n)$ o'suvchi ketma-ketlik uchun

$$\frac{n^{1/s}}{b(n)} = o(1), \quad \xi_{nk} = \frac{\xi_k}{b(n)}$$

bo'lsin. Bu holda,

$$D_n \le nc / b^s(n) = o(1), \qquad n \to \infty,$$

$$S_n = \sum_{k}^{n} \xi_{nk} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{b(n)} \xrightarrow{P} 0$$

munosabat bajariladi.

Endi, (D) shartga e'tiborimizni qaratamiz.

O'z - o'zidan ravshanki, bu shartni quyidagicha yozish mumkin:

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|; |\xi_{nk}| > 1\right) + \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|^2; |\xi_{nk}| < 1\right) \to 0.$$

Agar $n \to \infty$ da

$$M_1 = \sum_{k=1}^{n} E|\xi_{nk}| \le c < \infty \tag{3}$$

bo'lsa, (D) shartni bajarilishi uchun

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|;\, |\xi_{nk}| > \varepsilon\right) \to 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{L}$$

munosabatni o'rinli bo'lishi yetarli va zaruriy bo'ladi. Haqiqatan ham, $\varepsilon \le 1$, $g(x) = \min\left(|x|, x^2\right)$ deb hisoblab,

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_{nk}) = \sum_{k=1}^{n} E\left(g(\xi_{nk}); |\xi_{nk}| > \varepsilon\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|^2;\, |\xi_{nk}| \le \varepsilon\right) \le L_n(\varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|; |\xi_{nk}| \le \varepsilon\right) \le L_n(\varepsilon) + \varepsilon L_n(0) \tag{4}$$

tengsizliklarni yoza olamiz.

Endi, $L_n(0) = M \le c$ va $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy ekanligidan, oxirgi (4) tengsizliklardan

$$D_n \to 0, \ n \to \infty$$

munosabatni olamiz.

Aksincha (bu yerda (3) shart bajarilishi talab etilmaydi) $\varepsilon \le 1$ bo'lganda

$$L_n(\varepsilon) \le \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|; |\xi_{nk}| > 1\right) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|^2;\, \varepsilon < |\xi_{nk}| \le 1\right) \le \frac{D_n}{\varepsilon} \to 0 \tag{5}$$

keltirilgan (D) va (L) shartlardan har biri $E|\xi_{nk}|$ ni tekis cheksiz kichik miqdor bo'lishini, ya'ni

$$\max_{1\le k\le n} E|\xi_{nk}| \to 0, \ n \to \infty \tag{6}$$

munosabat bajarilishini ta'min etadi.

Haqiqatan ham (L) dan, shunday yetarli darajada kamayadigan $\varepsilon_n \to 0$ ketma-ketlik olish mumkin bo'lib,

$$L_n(\varepsilon_n) \to 0, \ n \to \infty.$$

Shuning uchun ham,

$$\max_{1\le k\le n} E|\xi_{nk}| \le \max_{1\le k\le n}\left[\varepsilon + E\left(|\xi_{nk}|; |\xi_{nk}| > \varepsilon\right)\right] \le$$

$$\le \varepsilon_n + L(\varepsilon_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Tasodifiy miqdorlar $\{\xi_{nk}\}$ lar cheksiz kichik miqdorlar deyiladi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n} P\left(|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\right)=0 \qquad \text{(S)}$$

Oxirgi (S) tenglikda keltirilgan munosabatni ξ_{nk} tasodifiy miqdorlarni ehtimollik bo'yicha tekis nolga intilishi xossasi deb tushunish mumkin va bu xossa (6) dan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, Chebishev tengsizligi bo'yicha $n\to\infty$ da

$$\max_{k\le n} P\left(|\xi_{nk}|>\varepsilon\right)\le\frac{\max\limits_{k\le n} E|\xi_{nk}|}{\varepsilon}\to 0$$

bo'ladi.

Bu xossa (L) bajariladigan holda ham o'rinli:

$$P\left(\max_{1\le k\le n}|\xi_{nk}|>\varepsilon\right)=P\left(\bigcup_k\left\{|\xi_{nk}|>\varepsilon\right\}\right)\le$$

$$\le\sum_{k\le n}P\left(|\xi_{nk}|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k\le n}E\left(|\xi_{nk}|;|\xi_{nk}|>\varepsilon\right)=$$

$$=\frac{L_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\to 0.$$

Teorema 1 ning isboti. Bu teoremaning "to'g'ri ehtimollik" metodidan foydalanib isbot etish ham mumkin edi. Lekin, biz xarakteristik funksiyalar metodini qo'llaymiz va bunda bu metodning mohiyati va imkoniyatlarini namoyish etishga harakat qilinadi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$f_{nk}(t)=Ee^{it\xi_{nk}},\quad \Delta_{nk}(t)=\Delta_k(t)=f_{nk}(t)-1$$

Yuqorida keltirilgan izoh 1 ga asoslanib

$$f_{S_n}(t)=Ee^{itS_n}=\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)\to 1,\qquad n\to\infty$$

yaqinlashish har qanday t uchun o'rinli bo'lishini tekshirib ko'rish yetarli bo'ladi.

Lemma 1. Agar $|a_k|\le 1,\quad |b_k|\le 1,\quad k=1,\dots,n$ bo'lsa,

$$\left|\prod_{k=1}^n a_k-\prod_{k=1}^n b_k\right|\le\sum_{k=1}^n|a_k-b_k|.$$

Isbot. Quyidagi

$$A_n=\prod_{k=1}^n a_k,\qquad B_n=\prod_{k=1}^n b_k$$

belgilashlarni qo'llab va $|A_n|\le 1$, $|B_n|\le 1$ tengsizliklar o'rinli bo'lishini hisobga olsak,

$$|A_n-B_n|=|A_{n-1}a_n-B_{n-1}b_n|=\left|(A_{n-1}-B_{n-1})a_n+(a_n-b_n)B_{n-1}\right|\le$$

$$\le|A_{n-1}-B_{n-1}|+|a_n-b_n|.$$

Bu oxirgi tengsizliklarni n marta qo'llasak, lemmaning isbotini olamiz.

Isbotlangan lemmada

$$a_k = f_{nk}(t), \quad b_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

deb tanlasak,

$$\left|f_{S_n}(t) - 1\right| = \left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{n} 1\right| \le \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k(t)| \tag{8}$$

tengsizlikni yoza olamiz.

Endi, $E\xi_{nk} = 0$ ekanligidan foydalanib (8) tengsizlikni o'ng tomonini quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta_k(t)| = \sum_{k=1}^{n} \left|E\left(e^{it\xi_{nk}} - 1\right)\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left|E\left(e^{it\xi_{nk}} - 1 - it\xi_{nk}\right)\right| \tag{9}$$

Har qanday haqiqiy α uchun o'rinli bo'lgan

$$\left|e^{i\alpha} - 1\right| \le |\alpha|, \qquad \left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha\right| \le \frac{\alpha^2}{2}$$

tengsizliklardan va

$$g(x) = \min\left(|x|, x^2\right), \qquad h(t) = \max\left(|t|, t^2\right)$$

belgilashlardan foydalansak,

$$\left|e^{itx} - 1 - itx\right| \le \min\left(2|tx|, \frac{t^2x^2}{2}\right) \le 2g(tx) \le 2h(t)\,g(x)$$

munosabatni olamiz.

Yuqoridagi (8), (9) munosabatlarda oxirgi tengsizlikni qo'llab,

$$\left|f_{S_n}(t) - 1\right| \le 2h(t)\sum_{k=1}^{n} Eg(\xi_{nk}) = 2h(t)\,D_n \to 0.$$

bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. Teorema 1 isbotlandi.

Quyidagi teoremada katta sonlar qonunining kuchaytirilgan varianti keltiriladi.

Teorema 2. Agar (2) va (D) shartlar bajarilsa,

$$E|S_n| \to 0 \quad (\text{yoki } S_n \xrightarrow{(1)} 0)$$

Keltirilgan teoremadan $\{S_n,\ n \ge 1\}$ ketma-ketlik tekis integrallanuvchi bo'lishligi kelib chiqadi va undan teorema 1 ning isbotini olamiz. Haqiqatan ham, Chebishev tengsizligiga asosan,

$$P\left(|S_n| > \varepsilon\right) \le \frac{E|S_n|}{\varepsilon} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Teorema 2 ning isboti. Bu teoremaning isbotida "to'g'ri ehtimollik" metodidan (xarakteristik funksiyalarni ishlatmasdan) foydalanamiz. Oldin "tasodifiy miqdorlarni kesish" usulini qo'llaymiz. Quyidagi "qirqilgan" tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$\xi'_{nk} = \begin{cases} \xi_{nk}, & agar\ |\xi_{nk}| \le 1, \\ 0, & agar\ |\xi_{nk}| > 1,\ bo'lsa, \end{cases}$$

$\xi''_{nk} = \xi_{nk} - \xi'_{nk}$. Bu holda, $\xi_{nk} = \xi'_{nk} + \xi''_{nk}$,

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \xi'_{nk}, \quad S''_n = \sum_{k=1}^{n} \xi''_{nk}, \qquad S_n = S'_n + S''_n.$$

Koshi- Shvars tengsizligiga asosan $\left(\left|ES'_n\right| = \left|ES''_n\right|\right)$

$$E|S_n| \le E\left|S'_n - ES'_n\right| + E\left|S''_n - ES''_n\right| \le \sqrt{E\left(S'_n - ES'_n\right)^2} +$$

$$+E\left|S''_n\right| + E\left|S''_n\right| \le \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} D\xi'_{nk}\right)^{1/2}} + 2\sum_{k=1}^{n} E\left|\xi''_{nk}\right| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} E\left(\xi'_{nk}\right)^2} + 2\sum_{k=1}^{n} E\left|\xi''_{nk}\right| =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} E\left(\xi^2_{nk};\ |\xi_{nk}| \le 1\right)\right]^{1/2} + 2\sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|;|\xi_{nk}| > 1\right) \le \sqrt{D_n} + 2D_n \to 0.$$

Teorema 2 isbot etildi.

Izoh 3. Teoremaning isbotidan ko'rinadiki, agar ξ_{nk} larni bog'liqsizlik shartini, ξ''_{nk} tasodifiy miqdorlarni korrelatsiyalangan bo'lmaslik sharti bilan almashtirsak ham teoremaning xulosasi to'g'ri bo'lib qolaveradi.

Endi $\{\xi_k,\ k \ge 1\}$ fiksirlangan (n ga bog'liq bo'lmagan). Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad a_k = E\xi_k,$$

bo'lsa, bu holda katta sonlar qonunini o'rganish

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - a_k}{b(n)}, \qquad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} = \frac{S_n - \sum_{k=1}^{n} a_k}{b(n)}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini o'rganishga olib kelinadi. Bu yerda $\{\xi_{nk}\}$ (1) shartni qanoatlantiradi, $b(n)$ – cheksiz o'suvchi sonli ketma-ketlik. Ko'p hollarda

$$b(n)=\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k|$$

deb qabul qilinadi.

Umumiylikni chegaralamasdan $a_k=0$ deb hisoblaymiz. Teorema 2 dan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Natija 1. Agar $n\to\infty$ da

$$D_n=\frac{1}{b(n)}\sum_{k=1}^{n} E\min\left(|\xi_k|,\frac{\xi_k^2}{b(n)}\right)\to 0,$$

yoki

$$L_n(\varepsilon)=\frac{1}{b(n)}\sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_k|;|\xi_k|>b(n)\right)\to 0, \qquad \forall\varepsilon>0$$

shartlari bajarilsa,

$$\overline{S}_n\xrightarrow{P}0.$$

Natija 2. Oldingi paragrafdagi Xinchin teoremasining sharti bajarilsa, $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{(1)}a.$

Isbot. Agar $\{\xi_k\}$ bir xil taqsimlangan, $E|\xi_k|<\infty$ bo'lsa, $b(n)=n$ bo'lganda, $L_n(\varepsilon)\to 0$, chunki

$$E\left(|\xi_k|;|\xi_k|>\varepsilon n\right)\to 0, \quad n\to\infty.$$

Natija 2 isbot bo'ldi.

Izoh 4. Yuqoridagi (2) va (M_1) shartlar bajarilganda $D_1\left(D_1^{(n)}\to 0\right)$ va $(L)\left(L_n(\varepsilon)\to 0\right)$ shartlaridan birortasi ham katta sonlar qonuni $\left(S_n\xrightarrow{P}0\right)$ uchun zaruriy bo'la olmaydi. Bunga ishonish uchun quyidagi misolni ko'ramiz: Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_{nk}=\begin{cases}-n, \text{ ehtimolligi} & \dfrac{1}{n^2},\\ 0, \text{ ehtimolligi} & 1-\dfrac{2}{n^2},\\ n, \text{ ehtimolligi} & \dfrac{1}{n^2}.\end{cases}$$

Bu holda, katta sonlar qonuni $S_n\xrightarrow{P}0$ o'rinli. Haqiqatan ham,

$$P(S_n\neq 0)\leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{\xi_{nk}\neq 0\}\right)\leq\frac{2}{n}\to 0.$$

$$E|\xi_{nk}| = \frac{2}{n} \to 0, \qquad M_1 = \sum_k E|\xi_{nk}| = 2.$$

bular bilan bir qatorda

$$\sum_k E\left(|\xi_{nk}|; |\xi_{nk}| \geq 1\right) = 2 \not\to 0$$

va D_1 bamda (L) shartlari bajarilmaydi.

Lekin, quyidagi sbartlar bajarilsa, (D_1) zaruriy bo'ladi. $((S_n \xrightarrow{p} 0)$ uchun):

$$\xi_{nk} \geq -\varepsilon_{nk}, \qquad \varepsilon_{nk} \geq 0, \qquad (*)$$

$$\max_k \varepsilon_{nk} \to 0, \qquad \sum_k \varepsilon_{nk} \leq c < \infty.$$

Bu faktni isbotlashdan oldin quyidagi foydali lemmani keltiramiz.

Lemma 2. Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\sum_k |\Delta_{nk}(t)| \leq |t| M_1, \qquad \Delta_{nk}(t) = f_{nk}(t) - 1.$$

Agar (S) sharti bajarilsa, bar qanday t uchun

$$\max_k |\Delta_{nk}(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Agar tasodifiy miqdor ξ quyidan chegaralangan $\left(\xi \geq -c,\ c > 0\right)$ va $E\xi = 0$ bo'lsa, $E|\xi| \leq 2c$.

Isbot. Haqiqatan ham,

$$|\Delta_{nk}(t)| \leq E\left|e^{it\xi_{nk}} - 1\right| \leq |t| E|\xi_{nk}|,$$

$$\sum_k |\Delta_{nk}(t)| = |t| \cdot M_1.$$

Endi,

$$|\Delta_{nk}(t)| \leq E\left(\left|e^{it\xi_{nk}} - 1\right|;\ |\xi_{nk}| \leq \varepsilon\right) +$$

$$+E\left(\left|e^{it\xi_{nk}} - 1\right|; |\xi_{nk}| > \varepsilon\right) \leq |t| \cdot \varepsilon + 2P\left(|\xi_{nk}| > \varepsilon\right)$$

munosabat o'rinli, ε – ixtiyoriy musbat son bo'lganidan, (S) shartidan foydalanib lemmaning ikkinchi jumlasi to'g'ri ekanligiga ishonch bosil qilamiz.

Uchinchi jumlani isbotlash ucbun ξ tasodifiy miqdorning

$$\xi^+ = \max(0, \xi) \geq 0,$$

$$\xi^- = \max(0, -\xi) \geq 0$$

musbat va manfiy qismlarini ko'ramiz. Bu holda,

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \qquad E\xi = E\xi^+ - E\xi^- = 0,$$

$$E|\xi| = E\left(\xi^+ + \xi^-\right) = 2E\xi^- \leq 2c.$$

Lemma 2 isbot bo'ldi va uning oxirgi jumlasidan (S) shartlardan (2) va

$$\max_k E|\xi_{nk}| \to 0, \quad n \to \infty$$

munosabatlar kelib chiqishini ko'rsatadi.

Teorema 3. Tasodifiy miqdorlar ξ_{nk} lar uchun $E\xi_{nk} = 0$ bo'lib, (*) shartni qanoatlantirsin. Bu holda, (D_1) (yoki (M_1)) katta sonlar qonuni bajarilishi uchun zaruriy bo'ladi.

Isbot. Agar katta sonlar qonuni $\left(S_n \xrightarrow{P} 0\right)$ o'rinli bo'lsa, lemma 2 dan

$$\lim_{n\to\infty} f_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_k \Delta_{nk}(t)} = 1$$

Demak,

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n} E\left(e^{it\xi_{nk}} - 1 - it\xi_{nk}\right) \to 0.$$

Bulardan tashqari

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\left|e^{it\xi_{nk}} - 1 - it\xi_{nk}\right|; |\xi_{nk}| \le \varepsilon_{nk}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|^2; |\xi_{nk}| \le \varepsilon_{nk}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{nk}^2 \le \max_k \varepsilon_{nk} \cdot \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{nk} \to 0.$$

Oxirgi va undan oldingi munosabatlardan katta sonlar qonuni bajarilgan holda ((*) ni hisobga olib)

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(e^{it\xi_{nk}} - 1 - it\xi_{nk};\ \xi_{nk} > \varepsilon_{nk}\right) \to 0.$$

Endi,

$$\alpha(x) = \frac{e^{ix} - 1}{ix}$$

funksiyani ko'ramiz. Bu funksiya uchun

$$|\alpha(x)| \le 1, \quad \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 1.$$

Demak, $x > \varepsilon > 0$ bo'lganda, shundek $\delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki,

$$\mathrm{Re}(1 - \alpha(x)) \ge \delta(\varepsilon).$$

Oxirgidan ($\mathrm{Im}\, r$ kompleks sonning mavhum qismi).

$$\mathrm{Im}\left(1 + ik - e^{ix}\right) \ge \delta(\varepsilon)x, \qquad x > \varepsilon > 0,$$

ya'ni

$$x \le \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \mathrm{Im}\left(1 + ix - e^{ix}\right).$$

Bularning hammasidan

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|;|\xi_{nk}| > \varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{n} E\left(\xi_{nk};\ \xi_{nk} > \varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} E\left(1 + i\xi_{nk} - e^{i\xi_{nk}};\ \xi_{nk} > \varepsilon_{nk}\right) \to 0.$$

Shunday qilib, (M_1) sharti bajarilib, (2) bilan birgalikda (D_1) shartini bajarilishiga olib keladi.

§ 8.3. Bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema

Tasodifiy miqdorlar

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

o'zaro bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

bo'lsin. Oldingi paragrafda (1) ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun, qo'shiluvchilarning o'rta qiymati $E\xi_k = a$ mavjud bo'lishi yetarli ekanligi isbotlangan edi. Lekin, (1) ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi uchun qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi $D\xi_n = \sigma^2$ mavjud bo'lishligi talab etiladi.

Endi markazlashtirilgan va normallashtirilgan

$$\overline{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

yig'indining taqsimot funksiyasini $F_n(x)$, parametrlari (0,1) bo'lgan standart normal taqsimot funksiyasini $\Phi(x)$ deb belgilaylik, ya'ni

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Teorema (Levi). Agar $0 < \sigma^2 < \infty$ bo'lsa,

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

ya'ni (1) ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi.

Bu holda $\left\{\overline{S}_n, n \geq 1\right\}$ ketma-ketlik asimptotik normal taqsimotga ega deyiladi.

Agar standart normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor ξ_c deb belgilansa, keltirilgan teoremaning xulosasini

$$\overline{S}_n \xrightarrow{d} \xi_c, \qquad F_n \Rightarrow \Phi, \qquad n \to \infty$$

ko'rinishda yozish mumkin (bu yerda teoremadagi tekis yaqinlashish, sust yaqinlashish va $\Phi(x)$ funksiyaning uzluksiz ekanligi natijasi bo'lishi hisobga olinadi). Bundan tashqari

$$\overline{S}_n^2 \geq 0,\ E\overline{S}_n^2 = E\xi_c^2 = 1$$

ekanligidan, $\left\{\overline{S}_n^2,\ n \geq 1\right\}$ ketma-ketlikning tekis integrallanuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, bu holda

$$Eg\left(\overline{S}_n\right) \to Eg(\xi_c),\quad \forall g \in CB(R)$$

sust yaqinlashish bilan bir vaqtda $|g(x)| \leq C\left(1+x^2\right)$ shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz $g(\cdot)$ uchun $(g \in C(R))$

$$Eg\left(\overline{S}_n\right) \to Eg(\xi_c),\quad n \to \infty$$

bo'lishligi kelib chiqadi.

Teoremaning isboti. Umumiylikni chegaralamasdan $a = 0$ deb hisoblash mumkin, chunki aks holda (1) ketma-ketlikni $\left\{\xi_n^1 = \xi_n - a,\ n \geq 1\right\}$ ketma-ketlik bilan almashtirish mumkin va bu holda $\left\{\overline{S}_n,\ n \geq 1\right\}$ ketma-ketlik o'zgarmasdan qolaveradi.

Demak, teoremaning isbotlash uchun xarakteristik funksiya

$$f_{\overline{S}_n}(t) = Ee^{it\overline{S}_n} \to e^{-t^2/2}$$

bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Haqiqatan ham ($a = 0$ bo'lgan holda)

$$f_{\overline{S}_n}(t) = f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),\quad f(t) = Ee^{it\xi_1},$$

va $E\xi_n{}^2$ mavjud bo'lgani uchun, $|f''(t)|$ mavjud.

Aytib o'tilganlarni hisobga olib, Teylor formulasini qo'llasak,

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\cdot\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o\left(t^2\right)$$

formulani olamiz.

Demak, $n \to \infty$ da

$$\ln f_n(t) = n\ln\left[1 - \frac{\sigma^2}{2}\cdot\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t}{n}\right)^2\right] =$$

$$= n\left(-\frac{t^2}{2^n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = -\frac{t^2}{2} + o(1) \to -\frac{t^2}{2}.$$

teorema isbot etildi.

§ 8.4. Lindeberg-Feller teoremasi

Oldingilardek bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar seriyalari

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

va ularning

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$$

yig'indilarini ko'raylik. Qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlar dispersiyalari mavjud deb hisoblab $\left(\sigma_{nk}^2 = D\xi_{nk} < \infty\right)$, umumiylikni chegaralamagan holda,

$$E\xi_{nk} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = DS_n = 1 \tag{1}$$

shartlari bajarilishini talab qilamiz.

Kelgusidagi mulohazalarda quyidagi shartlar muhim rol o'ynaydi: $s > 2$, $n \to \infty$ bo'lganda,

$$D_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} E \min\left(\xi_{nk}^2, |\xi_{nk}|^s\right) \to 0. \tag{D}$$

Agar (1) shart bajarilsa, (D) shartning bajarilishi uchun, quyidagi Lindeberg sharti

$$L_2^{(n)}(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|^2; \ |\xi_{nk}| > \varepsilon\right) \to 0, \tag{L}$$

bajarilishi yetarli va zaruriy bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$g_2(x) = \min\left(x^2, |x|^s\right), \qquad s > 2.$$

deb olsak,

$$D_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} Eg_2(\xi_{nk}) \le \sum_{k=1}^{n} E\left(\xi_{nk}^2; |\xi_{nk}| > \varepsilon\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|^s; |\xi_{nk}| \le \varepsilon\right) \le$$

$$\le L_2^{(n)}(\varepsilon) + \varepsilon^{s-2} L_2(0) = L_2^{(n)}(\varepsilon) + \varepsilon^{s-2}.$$

Oxirgi munosabatda ε ixtiyoriy musbat son bo'lgani uchun, $L_2^{(n)}(\varepsilon) \to 0$ va $D_2^{(n)} \to 0$, $n \to \infty$.

Aksincha, $\varepsilon \le 1$ bo'lganda (bu yerda (1) shartning bajarilishi shart emas)

$$L_2^{(n)}(\varepsilon) \le \sum_{k=1}^{n} E\left(\xi_{nk}^2; |\xi_{nk}| > 1\right) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{s-2}}\sum_{k=1}^{n} E\left(|\xi_{nk}|;\varepsilon<|\xi_{nk}|\le 1\right)\le\frac{D_2^{(n)}}{\varepsilon^{s-2}}\to 0.$$

(D) shartga umumiyroq ko‘rinish berish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{n} E\xi_{nk}^2 h(\xi_{nk})\to 0,$$

va bu yerda $h(x)$ quyidagi xossalarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya:

$$h(x)>0,\ h(x)\uparrow,\qquad x>0 \text{ bo‘lganda},$$

$$h(x)\to 0,\ x\to 0 \text{ bo‘lganda},$$

$$h(x)\to c<\infty,\quad x\to\infty \text{ bo‘lganda}.$$

Lindeberg (L) shartida

$$h(x)=I_{(\varepsilon,\infty)}(x)$$

va $F_{nk}(x)=P(\xi_{nk}<x)$ bo‘lsa, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$L_2^{(n)}(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)\to 0.$$

Oson ko‘rish mumkinki, har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$\max_k D\xi_{nk}=\max_k\sigma_{nk}^2\le\varepsilon^2+L_2^{(n)}(\varepsilon),$$

demak $n\to\infty$ da

$$\max_k\sigma_{nk}^2\to 0. \qquad (2)$$

Chebishev tengsizligi bo‘yicha

$$\max_k P(|\xi_{nk}|\ge\varepsilon)\le\frac{\max_k\sigma_{nk}^2}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

O‘z navbatida (2) va (3) lardan $\{\xi_{nk}, 1\le k\le n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi tekis cheksiz kichiklik shartini qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\max_k P(|\xi_{nk}|\ge\varepsilon)\to 0. \qquad (S)$$

Shuning uchun ham (1) shart chegarasida (dispersiyalar mavjud bo‘lgan holda) $\{\xi_{nk}\}$ ketma-ketlikni cheksiz kichiklik sharti sifatida (2) shartni tushunsa bo‘ladi.

Agar fiksirlangan (n ga bog‘liq bo‘lmagan) $\{\xi_k\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\qquad E\xi_k,\ D\xi_k=\sigma_k^2$$

bo‘lsa, markazlashtirilgan va normallashtirilgan yig‘indilarni

$$\overline{S}_n = \frac{S_n - \sum_{k=1}^{n} a_k}{B_n}, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

o'rganishga to'g'ri keladi, lekin bunda ham sxemalar seriyasining xususiy holi

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday $\{\xi_k\}$ ketma-ketlik uchun (D) va (L) shartlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$D = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} E \min\left((\xi_k - a_k)^2, \frac{|\xi_k - a_k|^s}{B_n^{s-2}} \right) \to 0,$$

$$L_2^{(n)}(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} E\left((\xi_k - a_k)^2;\ |\xi_k - a_k| > \varepsilon B_n \right) \to 0.$$

Teorema 1. (Lindeberg markaziy limit teoremasi)

Agar $\{\xi_{nk}, 1 \le k \le n\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (1), (D) shartlarni qanoatlantirsa,

$$\sup_x \left| P(S_n < x) - \Phi(x) \right| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad \text{(CLT)}$$

Isbot. Uzluksiz moslik teoremasiga asosan

$$f_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) \to e^{-t^2/2}, \quad f_{nk}(t) = E e^{it\xi_{nk}}$$

bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\left| f_{S_n}(t) - e^{-t^2/2} \right| = \left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{n} e^{-t^2 \sigma_{nk}^2 / 2} \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left| f_{nk}(t) - e^{-t^2 \sigma_{nk}^2 / 2} \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left| f_{nk}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2} \right| + \sum_{k=1}^{n} \left| e^{-t^2 \sigma_{nk}^2 / 2} - 1 + \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2} \right|. \qquad (4)$$

Endi,

$$\left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right| \le \min\left(\alpha^2, \frac{|\alpha|^3}{6} \right) = g_2(\alpha)$$

bahodan foydalansak, (4) dagi birinchi yig'indi

$$\sum_{k=1}^{n} \left| E\left(e^{it\xi_{nk}} - 1 - it\xi_{nk} + \frac{t^2 \xi_{nk}^2}{2} \right) \right| \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} Eg_2\left(|t\xi_{nk}|\right) \leq h(t)\sum_{k=1}^{n} Eg_2\left(|\xi_{nk}|\right) \leq$$

$$\leq h(t)D_2^{(n)} \to 0,$$

bu yerda $h(t) = \max\left(t^2, |t|^3\right)$.

Agar elementar tengsizlik

$$\left|e^{-\beta} - 1 + \beta\right| \leq \frac{\beta^2}{2}, \quad \beta \geq 0$$

ishlatilsa, (4) dagi ikkinchi yig'indi

$$\sum_{k=1}^{n} \left|e^{-t^2\sigma_{nk}^2/2} - 1 + \frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{t^4}{8} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^4 \leq \frac{t^4}{8} \max_k \sigma_{nk}^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Teorema 1 isbotlandi.

Natija 1. Agar $E\xi_{nk} = 0, DS_n \to \sigma^2 > 0$ bo'lib, (D) yoki (L) shartlardan birortasi bajarilsa

$$\sup_x \left|P(S_n < x) - \Phi_{0,\sigma^2}(x)\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Bu yerda $\Phi_{0,\sigma^2}(x)$ – parametrlari $\left(0, \sigma^2\right)$ bo'lgan normal taqsimot, ya'ni $\Phi_{0,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$.

Izoh 1. Teorema 1 dan yuqoridagi, $\{\xi_k\}$ bir xil taqsimlangan va bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \Sigma E\xi_1}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - nE\xi_1}{\sigma\sqrt{n}}$$

yig'indining asimptotik normal taqsimotga ega ekanligi haqidagi Levi teoremasi kelib chiqadi. Buning uchun $B_n^2 = n\sigma^2$ ($\sigma^2 - \xi_k$ ning dispersiyasi bo'lgan holda, Lindeberg sharti (L) ni bajarilishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Haqiqatan ham, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$L_2^n(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^2} E\left((\xi_1 - a)^2; |\xi_1 - a| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \int_{|x| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}} (x - a)^2 \, dF(x) \to 0, \quad n \to \infty,$$

Bu yerda $a = E\xi_1$, $F(x) = P(\xi_1 < x)$.

Izoh 2. Markaziy limit teoremani o'rinli ekinligini ta'min etadigan Lindeberg sharti (L) ni tekshirib chiqish ancha qiyin bo'ladi. Quyida (L) dan kuchliroq, lekin

tekshirish oson bo'lgan shartlardan birini keltiramiz.

Agar $\left\{\xi_{nk},\ 1 \le k \le n\right\}$ seriyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsa,

$$L_n^{(s)} = \sum_{k=1}^{n} E\left|\xi_{nk}\right|^s, \quad s > 2$$

miqdorni "$s-$tartibli Lyapunov kasri" deb ataladi. Bu nom fiksirlangan $\{\xi_k\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun

$$\xi_{nk} = \frac{(\xi_k - a_k)}{B_n}, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

bo'lib (ξ_k lar n ga bog'liq emas),

$$L_n^{(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} E\left|\xi_k - a_k\right|^s}{B_n^s}$$

kasr ko'rinishda bo'lishidan olingan.

Agar ξ_k lar bir xil taqsimlangan va

$$a_k = a, \quad D\xi_k = \sigma_k^2 = \sigma^2, \quad \mu = E\left|\xi_1 - a\right|^s < \infty$$

bo'lsa,

$$L_n^{(s)} = \frac{\mu}{\sigma^s n^{(s-2)/2}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Umumiy holda

$$L_n^{(s)} \to 0, \quad s > 2$$

munosabatni Lyapunov sharti deb ataladi.

Lyapunov shartidan Lindeberg sharti (L) (to'g'rirog'i unga teng kuchli bo'lgan (D)) kelib chiqishi har qanday $2 < s \le 3$ uchun

$$g_2(x) = \min\left(x^2, |x|^s\right) \le |x|^s,$$

tengsizlik to'g'ri ekanligidan va $D_n^{(2)} \le L_{ns}$ bo'lishidan o'z – o'zidan ko'rinadi.

Oxirgi tengsizlik $D_n^{(2)} \le L_{ns}$, quyidagi teoremani isbotlaydi.

Teorema 2. (Lyapunovning markaziy limit teoremasi).

Agar $\{\xi_{nk}, 1 \le k \le n\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (1) va $L_n^{(s)} \to 0,\ s > 2$ shartini qanoatlantirsa,

$$\sup_x \left|P(S_n < x) - \Phi(x)\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Izoh 3. Teng kuchli bo'lgan (D) va (L) shartlardan birortasi markaziy limit teoremasining o'rinli bo'lishi uchun zaruriy shart bo'lolmaydi. Buning isboti uchun quyidagi misolni ko'rish yetarli: ξ_{n1} standart normal taqsimotga ega, ya'ni

$$P(\xi_{n1} < x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

$\xi_{n2} = \xi_{n3} = \ldots = \xi_{nn} = 0$ bo'lsin. Bu holda, (1) o'rinli bo'lib,

$$P(S_n < x) = \Phi(x).$$

Lekin

$$D_2^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \min\left(x^2, |x|^S\right) d\Phi(x) \not\to 0.$$

Biroq, markaziy limit teoremasining o'rinli bo'lishi qatorida, ξ_{nk} lar tekis cheksiz miqdorlik shartini qanoatlantirsa, (D), (L) shartlar zaruriy bo'ladi.

Teorema 3. (Lindeberg – Feller). Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\left\{\xi_{nk};\, 1 \le k \le n\right\}$ (1) shartni qanoatlantirsin, bu holda,

$$(D)\,\&\,(CLT) \Leftrightarrow (L).$$

Isbot. Oldingidek $\Delta_{nk}(t) = f_{nk}(t) - 1$ deb belgilaylik.

Lemma 1. Faraz qilaylik, (1) va (S) shartlar bajarilsin. Bu holda, $n \to \infty$ da

$$\max_{1 \le k \le n} |\Delta_{nk}(t)| \to 0, \quad \sum_k |\Delta_{nk}(t)| \le \frac{t^2}{2}.$$

Isbot. Agar ξ tasodifiy miqdor $f(t)$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lib

$$if'(0) = E\xi = 0, \quad -f''(0) = \sigma^2 < \infty$$

munosabatlar bajarilsa, har qanday t uchun

$$|\Delta(t)| = |f(t) - 1| \le \frac{\sigma^2 t^2}{2}.$$

Haqiqatan ham,

$$|f(t) - 1| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1\right) dF(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dF(x) \right| \le$$

$$\le \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \frac{t^2 \sigma^2}{2}.$$

Endi, lemma 1 ning isboti (1) dan kelib chiqadi.

Lemma 2. Agar (1) va (S) shartlar bajarilsa,

$$f_{S_n}(t) \to f(t), \qquad n \to \infty$$

yaqinlashish o'rinli bo'lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{nk}(t) \to \ln f(t), \quad n \to \infty$$

munosabatning bajarilishi yetarli va zaruriy shart.

Isbot. Qayd qilib o'tamizki,

$$\operatorname{Re} \Delta_{nk}(t) = \operatorname{Re}\left(f_{nk}(t) - 1\right) \le 0$$

$$\left|e^{\Delta_{nk}(t)}\right| = e^{\operatorname{Re}\Delta_{nk}(t)} \le 1.$$

Demak,

$$\left|f_{S_n}(t) - e^{\sum \Delta_{nk}(t)}\right| = \left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{n} e^{\Delta_{nk}(t)}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\left|f_{nk}(t) - e^{\Delta_{nk}(t)}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|e^{\Delta_{nk}(t)} - 1 - \Delta_{nk}(t)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta_{nk}(t)\right|^2 \le \frac{1}{2}\max_{k}\left|\Delta_{nk}(t)\right| \cdot \sum_{k=1}^{n}\left|\Delta_{nk}(t)\right|.$$

Bu oxirgi tengsizlikdan va lemma 1 ga asosan, agar $f_{S_n}(t) \to f(t)$ bo'lsa,

$$e^{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{nk}(t)} \to f(t)$$

va aksincha. Lemma 2 isbot bo'ldi.

Teorema 3 ning isboti. Keltirilgan shartlarning yetarli ekanligi yuqoridagi Lindeberg teoremasida isbot etildi. Zaruriylikni isbotlash uchun lemma 2 dan foydalanamiz. Agar

$$f_{S_n}(t) \to e^{-t^2/2}, \qquad n \to \infty$$

bo'lsa, bu lemmaga asosan

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{nk}(t) \to \ln\left(e^{-t^2/2}\right) = -\frac{t^2}{2}.$$

Bu munosabatni $t = 1$ bo'lgan holda, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} E\left(e^{i\xi_{nk}} - 1 - i\xi_{nk} + \frac{\xi_{nk}^2}{2}\right) \to 0 \qquad (1)$$

Endi,

$$\alpha(x)=\frac{e^{ix}-1-ix}{x^2}, \qquad x\in R.$$

funksiyani ko'ramiz. Bu funksiya uchun

$$|\alpha(x)|\le\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\alpha(x)=\frac{1}{2}.$$

Demak, $x\ne 0$, bo'lganda, $|\alpha(x)|\le\frac{1}{2}$ tengsizlik, qat'iy bo'lib, har qanday $\tau>0$ uchun $\delta=\delta(\tau)$ topiladiki,

$$\operatorname{Re}\left[\alpha(x)+\frac{1}{2}\right]\ge\delta(\tau)$$

yoki

$$x^2\le\frac{1}{\delta(\tau)}\operatorname{Re}\left(e^{ix}-1-ix+\frac{x^2}{2}\right).$$

Bu tengsizlikni va har qanday $\varepsilon>0$ uchun

$$E\left(\xi_{nk}^2;\ |\xi_{nk}|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\operatorname{Re}E\left(e^{i\xi_{nk}}-1-i\xi_{nk}+\frac{\xi_{nk}^2}{2}\right)$$

bo'lishini hisobga olib, (1) dan

$$L_2^{(n)}(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}E\left(\xi_{nk}^2;\ |\xi_{nk}|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{\delta(\varepsilon)}|R_n|\to 0, \qquad n\to\infty$$

munosabat kelib chiqishiga ishonch hosil qilamiz.

Teorema isbot bo'ldi.

§ 8.5. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni

O'zaro bog'liqsiz chekli matematik kutilmalarga ega bo'lgan

$$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko'ramiz. Bu tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetik qiymatlari va mos matematik kutilmalar o'rta arifmetik qiymatlari orasidagi farq (ayirmasi)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\xrightarrow{1.eht.}0$$

ko'rinishdagi hamma teoremalar kuchaytirilgan katta sonlar qonuni deb ataladi. Hozirgacha bu ayirmaning ehtimollik bo'yicha nolga intilishi haqidagi teoremalar katta sonlar qonuni deb atalib kelinar edi. Bunday teoremalarni isbot etishda, asosan Chebishev tengsizligi qo'llanishini yuqorida namoyish etdik. Kuchaytirilgan variantdagi katta sonlar qonunini o'rganishda quyida keltirilgan Kolmogorov tengsizligi muhim rol o'ynaydi, u Chebishev tengsizligini umumiylashtiradi va aniqlashtiradi.

Teorema 1. (Kolmogorov tengsizligi). Tasodifiy miqdorlar $\xi_1,...\xi_n$ o'zaro bog'liqsiz bo'lib, ular uchun $E\xi_k$ va $D\xi_k$ lar cbekli bo'lsin. U holda,

$$P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k - ES_k| \ge \varepsilon\right) \le \frac{DS_n}{\varepsilon^2}, \qquad (1)$$

bu yerda $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$

Isbot. Kelgusida $E\xi_k = 0$ deb bisoblaymiz, aks holda ξ_k lardan $\xi_k - E\xi_k$ miqdorlarga o'tish kerak bo'lar edi.

Quyidagi to'xtash momenti bo'lgan

$$v = \min\left\{k;\ |S_k| \ge \varepsilon\right\}$$

tasodifiy miqdorni ko'ramiz. Agar

$$\max_{1\le k\le n}|S_k| < \varepsilon$$

bo'lsa, $v = n + 1$ deb hisoblaymiz.

Oson ko'rinadiki,

$$S_n^2 \ge S_n^2 \sum_{k=1}^{n} I_{\{v=k\}}$$

va bu

$$ES_n^2 \ge \sum_{k=1}^{n} ES_n^2 I_{\{v=k\}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[\xi_1 + ... + \xi_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n\right]^2 I_{\{v=k\}} \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} E\left(\xi_1 + ... + \xi_k\right)^2 I_{\{v=k\}} +$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1} E\left(\xi_1 + ... + \xi_k\right) I_{\{v=k\}}\left(\xi_{k+1} + ... + \xi_n\right)$$

Tasodifiy miqdor $I_{\{v=k\}}$ faqat $\xi_1,...,\xi_k$ larga bog'liq bo'lib, $\xi_{k+1},...,\xi_n$ larga bog'liq emasligidan

$$E\left(\xi_1 + ... + \xi_k\right) I_{\{v=k\}}\left(\xi_{k+1} + ... + \xi_n\right) =$$

$$= E\left(\xi_1 + ... + \xi_k\right) I_{\{v=k\}} \cdot E\left(\xi_{k+1} + ... + \xi_n\right) = 0.$$

Hodisa $\{v = k\}$ ni tashkil qiluvchi elementar hodisalar uchun (ya'ni $\omega \in \{v(\omega) = k\}$)

$$S_k^2 \ge \varepsilon, \qquad P(v \le n) = P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge \varepsilon\right)$$

munosabatlar o'rinli ekanligidan

$$ES_n^2 \ge \sum_{k=1}^{n} ES_k^2 I_{\{v=k\}} \ge \varepsilon^2 P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge \varepsilon\right)$$

Demak, (1) tengsizlik isbot etildi.

Endi ixtiyoriy bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonunini keltiramiz.

Teorema 2. Tasodifiy miqdorlar $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ bog'liqsiz, $E\xi_n = 0,\ D\xi_n = \sigma_n^2$ va

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

bo'lsin. U holda, $n \to \infty$ da

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{1.eht.} 0. \qquad (2)$$

Isbot. Agar $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ deb olsak, ehtimollik va 1 ehtimollik bilan yaqinlashishlar orasidagi munosabatdan, (2) yaqinlashish

$$P\left(\sup_{k \ge n} \left|\frac{S_k}{k}\right| \ge \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty, \ \varepsilon > 0 \qquad (3)$$

limit munosabatga teng kuchli bo'ladi.

Endi,

$$A_n = \left\{\max_{2^{n-1} \le k < 2^n} \left|\frac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right\}$$

hodisalarni ko'raylik. Bu holda (3) munosabat

$$P\left(\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}\right) \to 0, \qquad n \to \infty \qquad (4)$$

bo'lishiga teng kuchli.

Kolmogorov tengsizligiga asosan ((1) tengsizlik),

$$P(A_n) \le P\left(\max_{2^{n-1} \le k < 2^n} |S_k| > \varepsilon 2^{n-1}\right) \le$$

$$\le P\left(\max_{1 \le k \le 2^n} |S_k| > 2^{n-1}\varepsilon\right) \le 4 \cdot \frac{DS_{2^n}}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2n}}.$$

Demak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \le 4\varepsilon^{-2} \sum_{c=1}^{\infty} 2^{-2k} \sum_{n=1}^{2^k} \sigma_n^2 \le$$

$$\le 4\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2k} \sum_{n=1}^{2^k} \sigma_n^2 \le 4\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \sum_{\{k:\, 2^k \ge n\}} 2^{-2k} \le 8\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty.$$

Bu yerda

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-2k} \le 2 \cdot 2^{-2k_0}$$

ekanligidan foydalanildi. Endi $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ qatorni yaqinlashuvchi ekanligidan

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Oxirgidan va (3) va (4) munosabatlardan teorema 3 ning isboti kelib chiqadi.

Bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishini ta'min etadigan yetarli va zaruriy shartlarni keltirish mumkin.

Teorema 2. (Kolmogorovning kuchaytirilgan katta sonlar qonuni). Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi_1,...\xi_n,...$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan miqdorlardan iborat bo'lsin. Bu holda

$$\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}\xrightarrow{1.eht.}a,\quad n\to\infty$$

limit munosabat o'rinli bo'lishi uchun $E\xi_1=a$ chekli matematik kutilmaning mavjud bo'lishi yetarli va zaruriy shartdir.

Isbot. Keltirilgan shartning yetarli ekanligini isbotlash uchun ehtimolliklar nazariyasida ko'p qo'llaniladigan "kesilgan tasodifiy miqdorlarni kiritish" metodidan foydalanamiz.

Quyidagi "kesilgan" tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$\overline{\xi_k}=\begin{cases}\xi_k, & agar\ |\xi_k|\le n,\\ 0, & agar\ |\xi_k|>n\ bo'lsa.\end{cases}$$

Bu $\overline{\xi_1},\overline{\xi_2},...$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'ladi, chunki $\overline{\xi_k}$ tasodifiy miqdor ξ_k ning funksiyasi. Oldingilarga mos ravishda

$$\overline{S_n}=\overline{\xi_1}+...+\overline{\xi_n}$$

deb olsak,

$$\frac{S_n-na}{n}=\frac{S_n-\overline{S_n}}{n}+\frac{\overline{S_n}-E\overline{S_n}}{n}+\left(\frac{E\overline{S_n}}{n}-a\right)\qquad(5)$$

tenglikka asosan, teoremani isbotlash uchun oxirgi (5) tenglikdagi uchta hadning 1 ehtimollik bilan nolga intilishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. (5) dagi uchinchi had "tasodifiy miqdor" bo'lmasdan

$$\frac{E\overline{S_n}}{n}-a=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_kI_{\{|\xi_k|>n\}}=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E\xi_1I_{\{|\xi_1|>n\}}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Endi,

$$A_n=\left\{\xi_n\ne\overline{\xi_n}\right\}$$

hodisalarni ko'ramiz va

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini o'rganamiz. Buning uchun quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. Tasodifiy miqdor ξ ning matematik kutilmasi mavjud bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi|>n)$$

qatorning yaqinlashishi yetarli va zaruriy shart.

Isbot. Lebegning abstrakt integrali xossasidan, agar $E\xi$ mavjud bo'lsa, $E|\xi|$ ham chekli bo'ladi va aksincha. Uning uchun quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(n-1<|\xi|\le n)\le E|\xi|\le\sum_{n=1}^{\infty}nP(n-1<|\xi|\le n).$$

Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nP(n-1<|\xi|\le n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}P(m<|\xi|\le m+1)=$$

$$=P(|\xi|>0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi|>n)\le 1+\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi|>n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(n-1<|\xi|\le n)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nP(n-1<|\xi|\le n)-P(\xi>0)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi|>n).$$

Bu munosabatlardan

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi|>n)\le E|\xi|\le 1+\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi|>n)$$

lemmani isbot etadigan tengsizlikni olamiz.

Teorema 2 ni isbotini davom ettiramiz.

Ko'rilayotgan A_n hodisalar uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|>n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_1|>n)$$

va oxirgi qator $E\xi_1$ mavjud bo'lgani uchun isbotlangan lemmaga asosan yaqinlashadi. Demak, Borel-Kantelli lemmasiga asosan $A_n=\{\overline{\xi_n}\neq\xi_n\}$ hodisalar faqat n ning chekli sondagi qiymatlari uchun o'rinli bo'ladi xolos, ya'ni (5) da

$$\frac{S_n-\overline{S_n}}{n}\xrightarrow{1.eht.}0,\qquad n\to\infty.$$

Bu yerda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n\neq\overline{S_n}\}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

ekanligidan ham foydalanildi.

Endi, $n\to\infty$ da

$$\frac{\overline{S_n} - E\overline{S_n}}{n} \xrightarrow{1.eht.} 0, \qquad (6)$$

bo'lishini isbotlaymiz. O'z navbatida (6) ni isbotlash uchun teorema 1 ga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\overline{\xi_n}}{n^2}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatish yetarli. Quyidagi tengsizlik o'rinli ekanligini qayd qilamiz:

$$D\overline{\xi_n} \le E\overline{\xi_n}^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(k-1 < |\xi| \le k)$$

Demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\overline{\xi_n}}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} P(k-1 < |\xi_1| \le k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(k-1 < |\xi_1| \le k) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

O'z-o'zidan ravshanki,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_k^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{k},$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} = \frac{k+1}{k^2}.$$

Bularni hisobga olib, quyidagi tengsizliklarni yoza olamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\overline{\xi_n}}{n^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2(k+1)}{k^2} P(k-1 < |\xi_1| \le k) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) P(k-1 < |\xi_1| \le k) \le$$

$$\le 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P(k-1 < |\xi_1| \le k) \le 2 + E|\xi_1| < \infty.$$

Teorema 2 da $E|\xi|$ ning mavjud bo'lishi kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun yetarli ekanligi isbot bo'ldi.

Zaruriylik. Agar limit munosabat

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{1.eht.} a, \quad n \to \infty$$

bajarilsa,

$$\frac{\xi_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{1.eht.} 0.$$

Demak, 1 ehtimollik bilan

$$\left\{\omega : \frac{|\xi_n|}{n} > 1\right\}$$

hodisalardan faqat chekli sondagilari ro'y beradi, xolos. Bu esa, o'z navbatida, Borel-Kantelli lemmasiga asosan

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| > n) < \infty$$

qatorning yaqinlashishini ta'min etadi.

Demak, shu paragrafdagi lemmaga ko'ra, $E\xi_1$ chekli bo'ladi. Teorema 2 to'la isbot etlldi.

Natija 2. (Borel teoremasi). Bernulli sxemasida "yutuqlar" soni S_n uchun faqat katta sonlar qonuni

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p,$$

o'rinli bo'lib qolmasdan, balki kuchaytirilgan katta sonlar qonuni

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{1.eht} p$$

ham bajariladi.

Bu natija teorema 2 dan kelib chiqadi. Bu holda,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

bo'lib, bu yerda $\xi_1, \ldots, \xi_n$ lar bog'liqsiz va umumiy Bernulli taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar, ya'ni

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = 0) = 1 - p.$$

Bu holda, $E\xi_1 = p$.

§ 8.6. Kolmogorovning "0 yoki 1" qonuni

Qandaydir ehtimollik fazosi $(\Omega, \Im, P)$ da

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots \quad (A_n \in \Im)$$

hodisalar ketma-ketllgi aniqlangan bo'lsin.

Ehtimolliklar nazariyasida ko'p hollarda (masalan, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonunini o'rganishda), hodisalar ketma-ketligi $\{A_n, n \geq 1\}$ bilan bog'liq bo'lgan, quyidagi ikkita

$$A^* = \{\omega; \omega \in A_n \ n \text{ ning cheksiz ko'p qiymatlarida}\},$$

$A_* = \{\omega;\ \omega \in A_n \ n$ ning chekli qiymatlaridan tashqari, qolgan hamma qiymatlarida$\}$

hodisalarning ehtimolliklarini o'rganishga to'g'ri keladi.

Bu hodisalar mos ravishda $\{A_n, n \geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligining yuqori va
quyi limitlari deb ataladi va ularni

$$A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n, \qquad A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

ko'rinishda belgilanadi.

Ko'rish qiyin emaski,

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

tengliklar o'rinli bo'ladi va shuning uchun ham A^* va A_* lar $\mathfrak{I}$ ga tegishli bo'lib, ularni tasodifiy bodisalar deb hisoblash mumkin. Agar

$$A^* = A_* = A$$

bo'lsa, A ni A_n lar limiti, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

deb atalib, $\{A_n, n \geq 1\}$ hodisalar ketma-ketligi yaqinlashadi deb hisoblanadi. Agar I_{A_n} hodisalar indikatorlarini kiritsak, quyidagi munosabatlarni o'rinli bo'lishini ko'rish qiyin bo'lmaydi:

$$I_{A^*} = \limsup_{n\to\infty} I_{A_n} \Leftrightarrow A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

$$I_{A_*} = \liminf_{n\to\infty} I_{A_n} \Leftrightarrow A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n,$$

$$I_A = \lim_{n\to\infty} I_{A_n} \Leftrightarrow A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Eslatib o'tamizki, monoton hodisalar ketma-ketligi doim yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ bo'lsa,

$$A_n \uparrow A_* = A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

agar $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ bo'lsa

$$A_n \downarrow A^* = A_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ehtimollikning uzluksizlik xossasi (σ – additivlik) bo'yicha bu ikki holda

$$P(A_n) \uparrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \quad P(A_n) \downarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right), \quad n \to \infty.$$

Ko'p marta eslatib o'tilgan Borel-Kantelli lemmasi

$$A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

hodisaning ehtimolligi nol yoki bir bo'lishi shartlarini belgilaydi va undan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ hodisalar bog'liqsiz bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{ qator yaqinlashsa, } P\left(A^*\right) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{ qator uzoqlashsa, } P(A^*) = 1.$$

Bu natijaning xulosasini Kolmogorovning "0 yoki 1" qonuni ancha umumlashtiradi.

Ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ da

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

Bog'liqsiz bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi aniqlangan bo'lsin (ya'ni har qanday N uchun $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_N$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz). Biz oldin

$$A = \{\omega; (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B\},$$

ko'rinishda bo'lgan hodisalardan tashkil topgan $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$- σ – algebrani kiritgan edik (bu yerda B to'plam R^n dagi borel to'plami) va uni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yuzaga keltirgan σ – algebra deb atagan edik. Xuddi shunga o'xshash

$$\sigma(\xi_n) \subseteq \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}) \subseteq \dots$$

hodisalar σ – algebralarini aniqlash mumkin. Ko'rish qiyin emaski, hamma

$$\sigma(\xi_n), \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}), \dots$$

σ – algebralar yig'indisi

$$\sigma(\xi_n) \cup \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}) \cup \dots = \mathfrak{F}_{\xi_n, \xi_{n+1}, \dots}$$

hodisalar algebrasini tashkil qiladi. Bu $\mathfrak{F}_{\xi_n, \xi_{n+1}, \dots}$ algebra yuzaga keltirgan σ – algebralar

$$\sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots) = \sigma(\mathfrak{F}_{\xi_n, \xi_{n+1}, \dots}), \quad n = 1, 2, \dots$$

kamayuvchi (to'plamlar ma'nosida) bo'lgan σ – algebralar ketma-ketligini tashkil qiladi.

Bu σ – algebralarning ko'paytmasi

$$\mathfrak{F}_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ning qoldiq σ – algebrasi deyiladi va $A \in \mathrm{F}_{\infty}$ hodisalar – qoldiq hodisalar deb ataladi. Bu nom bunday hodisalarni har qanday chekli sondagi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlardan bog'liqsiz bo'lib, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ ketma-ketlikning "cheksiz uzoqdagi" qiymatlari orqali aniqlanishini anglatadi.

Ma'lumki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qator uzoqlashadi, lekin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qator yaqinlashadi. Agar

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$
bog'liqsiz va bir xil Bernulli taqsimotiga ega bo'lgan $\left(P(\xi_1 = +1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}\right)$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$ qator yaqinlashadimi yoki uzoqlashadimi degan savolni qo'yamiz.

Boshqacha aytganda, umumiy hadi $\pm\frac{1}{n}$ bo'lgan, $+$ va $-$ belgilar esa tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi_1, \ldots, \xi_n$ lar orqali taqsimlangan qator yaqinlashadimi yoki yo'qmi? Bu savolga javob berish uchun

$$A = \{\omega;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(\omega)}{n} \text{ yaqinlashadi } \}$$

hodisani va unimg ehtimolligi $P(A)$ ni ko'ramiz. Oson ishonish mumkinki,

$$A \in \mathfrak{I}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_1, \xi_{n+1}, \ldots)$$

ya'ni, bu hodisa $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ga nisbatan qoldiq hodisa bo'ladi.

Quyidagi teoremadan kelib chiqadigan ajoyib fakt shundan iboratki, qoldiq hodisalarning ehtimolligi 0 yoki 1 ga teng bo'lar ekan.

Xususan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi(\omega)}{n}$ qator $\frac{1}{2}$ ehtimollik bilan yaqinlashadi degan jumla ma'nosiz bo'lib, tasodifiy miqdorlardan tuzilgan qator 1 ehtimollik bilan yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ro'y berar ekan.

Teorema. (Kolmogorovning "0 yoki 1" qonuni).

Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$-bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa, har qanday qoldiq hodisa $A \in \mathfrak{I}_\infty$ ehtimolligi $P(A)$ 0 yoki 1 ga teng bo'ladi.

Isbot. Agar $A \in \mathfrak{I}_\infty$ bo'lsa, har qanday n uchun $A \in \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$. Lekin $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ va $\sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$ $\sigma-$algebralar bog'liqsiz ekanligidan

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

har qanday $B \in \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ va $n \geq 2$ bo'lganda keltirilgan tenglik o'rinli. Demak, A har qanday $B \in \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ hodisaga bog'liq bo'lmaydi, chunki $F_\infty \subseteq \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Oxirgidan A hodisaning o'z-o'ziga bog'liq emasligi kelib chiqadi, ya'ni

$$P(AA) = P(A) = P^2(A)$$

bo'lib, $P(A) = 0$ yoki $P(A) = 1$ bo'ladi.

Natija. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsa, $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik 1 ehtimollik bilan yaqinlashadi yoki 1 ehtimollik bilan uzoqlashadi.

Bu xulosani $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ ketma-ketlikga qo'llab, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator 1 ehtimollik bilan yaqinlashadi yoki 1 ehtimollik bilan uzoqlashadi degan fikrga kelamiz.

Misol va masalalar

1. ξ tasodifiy miqdor ushbu $E\xi = 1$, $D\xi = 0,04$ xarakteristikalarga ega. $A = \{0,5 \leq \xi < 1,5\}$, $B = \{0,75 \leq \xi < 1,35\}$, $C = \{\xi < 2\}$ hodisalar ehtimolligini quyidan baholang.

   Javob: $P(A) \geq 0,84$; $P(B) \geq 0,36$; $P(C) \geq 0,96$.

2. $\xi_1, \xi_2, ...$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ξ_n $\sqrt{n}, 0$ va $-\sqrt{n}$ qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni bajariladimi?

   Javob: bajariladi.

3. $\xi_1, \xi_2, ...$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ξ_n $-n, 0$ va n qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{2n^2}, 1-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{2n^2}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonunini qo'llash mumkinmi?

   Javob: ha.

4. $\xi_1, \xi_2, ...$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ξ_n $-n, 0, n$ qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonunini qo'llash mumkinmi?

   Javob: yo'q.

5. $\xi_1, \xi_2, ...$ matematik kutilmalari 0 va dispersiyalari chekli bo'lgan bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar

ketma-ketligi bo‘lsin, $\eta_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{3}$ bo‘lsa, $D\xi_i$ ni toping.

Javob: $D\xi_i = \frac{1}{\sqrt{x}}$; bu yerda x soni $\Phi(x) = \frac{2}{3}$ tenglamaning yechimi.

6. $\xi_1, \xi_2, ...$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin, $\eta_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Agar ξ_n tasodifiy miqdor $[a_n - 1, a_n + 1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lib, $a_1, a_2, ...$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun $\sum a_i = A < \infty$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(0 < \frac{\eta_n}{\sqrt{n}} < 1\right)$ ni toping.

Javob: $\Phi\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{3}$.

7. ξ tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan $\lim\limits_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right)$ ni toping.

Javob: $(0,1)$ parametrli normal taqsimot

QO‘SHIMCHA BOB. MARKOV ZANJIRLARI

1. Ta’rif va misollar

Biz yuqorida natijalari ikkita elementar hodisadan iborat $\{1 -$ “yutuq”, $0 -$ “yutqiziq”$\}$ bo‘lgan tajribalar ketma-ketligini (Bernulli sxemasi) o‘rgangan edik. Agar 1-tajribaning natijasini ω_1, 2-tajribaning natijasini ω_2, va hokazo. $n -$ tajribaning natijasini ω_n deb belgilasak, bu tajribalar ketma-ketligining elementar hodisalar to‘plami

$$\Omega = \left\{\omega;\ \omega = \left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\right)\right\}$$

bo‘lib, bu yerda ω_i 1 yoki 0 ga teng bo‘ladi. Agar ω elementar hodisa uchun

$$p(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i} q^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i} \qquad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$

deb qabul qilsak, bu n ta tajribalar bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligi bo‘lishini va $p(\omega)$ funksiya ehtimolliklar taqsimotini berishini ko‘rgan edik. Demak, $\left\{\omega_{i_1} = \delta_{i_1}, ..., \omega_{i_r} = \delta_{i_r},\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n,\ r = 1, 2, ..., n\right\}$ bog‘liqsiz hodisalar sistemasi bo‘ladi.

Biz quyida, Markov zanjirlari orqali bog‘liq bo‘ladigan bog‘liqlik tushunchasini kiritamiz. Bunda ω_n qanday qiymat qabul qilishi (hodisasi), $\omega_1, ..., \omega_{n-2}$ larga bog‘liq bo‘lmasdan faqat undan oldingi ω_{n-1} ga bog‘liq bo‘ladi, xolos, va bu holat kiritilgan sxemani “zanjir” deb atalashini izohlaydi. Aytib o‘tilganlarni tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi orqali tushuntirish qulay va matematika nuqtayi nazaridan qat’iylik saqlanadi.

Aytaylik, tajriba natijasida

$$E_1, E_2, ..., E_s, \qquad s \ge 2$$

elementar hodisalardan bittasi ro‘y bersin. Agar ekspirement bu tajribani n marta takrorlashdan iborat bo‘lsa, elementar hodisalar to‘plami

$$\Omega = \left\{\omega;\ \omega = \left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\right)\right\}$$

s^n ta elementar ω hodisalardan tashkil topadi va bu yerda ω_i lar E_j lardan biriga teng bo‘ladi. Endi $\{1, 2, ..., s\}$ to‘plamdan qiymatlar qabul qiladigan

$$x_0, x_1, ..., x_n, ... \qquad (1)$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz:

$$P\left(x_0 = i\right) = p_i, \quad i = 1, 2, ..., s, \quad \sum_{i=1}^{s} p_i = 1,$$

va x_k tasodifiy miqdor i ga teng bo'ladi, agar k –nchi tajribada E_i elementar hodisa ro'y bersa, ya'ni x_k miqdor k –nchi tajribada ro'y bergan elementar hodisaning tartib raqamiga teng bo'ladi.

Aytilgan ma'noda

$$\left\{\omega;\ x_k(\omega)=i\right\},\qquad k=1,2,\ldots,n$$

hodisani qiymatlari $(E_1,\ldots,E_s)$ to'plamdan iborat bo'lgan qandaydir fizik sistema k –nchi momentda E_i holatda bo'lishini anglatadi deb tushunish mumkin va shu ma'noda x_0 sistemaning boshlang'ich (0-nchi) holatiga mos keladi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (1), holatlari $S=\{1,2,\ldots,s\}$ bo'lgan Markov zanjiri deb ataladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\sum\limits_{i=1}^{s} P(x_k=i)=1, \qquad k=0,1,2,\ldots,$

2) har qanday $0\le t_1<t_2<\ldots<t_r<m<n$ $(r=1,2,\ldots)$, $i,j\in S$ lar va S ning har qanday $B_1,\ldots,B_r$ to'plam ostilari uchun

$$P\left(x_n=j\,/\,x_{t_1}\in B_1,\ldots,x_{t_r}\in B_r,x_m=i\right)=P\left(x_n=j\,/\,x_m=i\right). \qquad (2)$$

Keltirilgan (2) tenglik (1) ketma-ketlik uchun Markov xossasi deb ataladi va o'rganilayotgan sistemaning berilgan m momentdagi holati fiksirlangan bo'lsa, kelgusida $(n>m)$ sistemaning holatlari o'zgarishi uning "o'tmishdagi" $\left(\xi_{t_1}\in B_1,\ldots,\xi_{t_r}\in B_r\right)$ holatlariga bog'liq emasligini bildiradi. Markov xossasi qisqa qilib aytganda, sistemaning "kelajagi", "hozirgi" holati fiksirlangan bo'lsa, uning "o'tmishiga" bog'liq bo'lmasligini anglatadi. Bu yerda ham oldin eslatib o'tilganidek,

$$\left\{\omega;x_n(\omega)=i\right\},\ i\in S,\ n=0,1,\ldots$$

hodisa sistemaning n –momentda i holat bo'lishini belgilaydi.

Markov zanjiri bir jinsli deyiladi, agar har qanday $i,j\in S$ lar uchun

$$P\left(x_{n+1}=j\,/\,x_n=i\right)=p_{ij},\qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (3)$$

ehtimolliklar n ga bog'liq bo'lmasa.

Bu (3) tenglikdagi p_{ij} lar o'tish ehtimolliklari va ular tashkil qilgan matritsa

$$P=\left(p_{ij}\right)_1^s=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{s1} & \cdots & p_{ss}\end{pmatrix}$$

o'tish ehtimolliklar matritsasi deb ataladi. Bu matritsaning elementlari quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,s. \qquad (4)$$

Elementlari (4) tengliklarni qanoatlantiradigan har qanday $P = \left(p_{ij}\right)_1^s$ matritsa ehtimolliklar nazariyasida stoxastik matritsalar deb ataladi.

Endi, o'tish ehtimolliklari matritsasi P va boshlang'ich ehtimolliklar deb ataluvchi x_0 tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$p = (p_1,\ldots,p_s)$$

(1) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini to'la aniqlashini isbotlaymiz. Buning uchun $(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimotini P va p larning elementlari orqali ifoda etish mumkinligini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Haqiqatan ham, shartli ehtimolliklar formulasiga asosan

$$\begin{aligned} P\left(x_0 = i_0, x_1 = i_1, x_2 = i_2,\ldots,x_{n-1} = i_{n-1}, x_n = i_n\right) = \\ = P(x_0 = i_0)\cdot P(x_1 = i_1 / x_0 = i_0)\times \\ \times P\left(x_2 = i_2 / x_0 = i_0,\ x_1 = i_1\right)\times\ldots \\ \ldots\times P\left(x_n = i_n / x_0 = i_0, x_1 = i_1,\ldots,x_{n-1} = i_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Bu yerda (2) tenglik bilan berilgan Markov xossasiga asosan $(i_k \in S)$

$$\begin{aligned} P(x_k = i_k / x_0 = i_0, x_1 = i_1,\ldots,x_{k-1} = i_{k-1}) = \\ P(x_k = i_k / x_{k-1} = i_{k-1}),\ k = 1,2,\ldots. \end{aligned} \qquad (5)$$

Markov zanjirining bir jinslilik xossasi (3) dan foydalanib, (5) tenglikning o'ng tomonidagi ehtimollik p_{i_{k-1},i_k} ga teng ekanligini olamiz. Bularni va $p-$ boshlang'ich taqsimotning elementini hisobga olib, $x_0,x_1,\ldots,x_n$ tasodifiy miqdorlarning birlashgan taqsimoti uchun quyidagi formulani olamiz:

$$P(x_0 = i_0, x_1 = i_1,\ldots,x_n = i_n) = p_{i_0}\cdot p_{i_0 i_1}\cdot p_{i_1 i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1} i_n} \qquad (6)$$

O'z-o'zidan ko'rinadiki, (5) tenglik (2) ning xususiy holi va undan (6) tenglikni keltirib chiqardik. Aksincha, (6) tenglikdan (2) (Markov xossasi) ham kelib chiqadi. Demak, (2)- Markov xossasi (6) tenglikka teng kuchli bo'lar ekan. Ya'ni (6) formuladan kelib chiqadiki, $\omega = (\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in\Omega$ elementar hodisaga

$$p(\omega) = p_{i_0}\cdot p_{i_0 i_1}\cdot p_{i_1 i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1} i_n} \qquad i_k \in S,$$

ehtimollik yozilsa,

$$x_0, x_1,\ldots,x_n,\ldots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Markov sxemasi bilan bog'liq bo'lgan tajribalar ketma-ketligini ifoda etadi.

Bir jinsli Markov zanjirlari uchun

$$P\left(x_{t+v}=j/x_v=i\right)=P\left(x_t=j/x_0=i\right),\ i,j\in S, \qquad (7)$$

o'rinli ekanligiga ishonish qiyin emas (bunda ham (6) formuladan foydalanish yetarli bo'ladi).

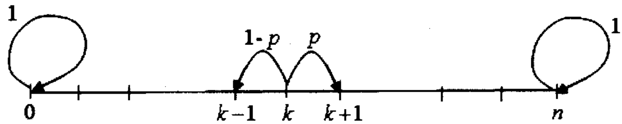
(7) tenglikdagi ehtimollik v ga bog'liq bo'lmagani uchun

$$P\left(x_{t+v}=j/x_v=i\right)=P_{ij}(t). \qquad (8)$$

Bu $P_{ij}(t)$, $i,j\in S$, ehtimolliklarni t qadamda i holatdan j holatga o'tish ehtimolliklari deyiladi ($t=0,1,2,\ldots$).

Endi, bir necha misollar keltiramiz.

Misol 1. $[0,n]$ oraliqdagi butun sonlarga mos keluvchi nuqtalar bo'yicha "daydib" yurgan zarrachaning harakatini ko'raylik va "daydish" quyidagi sxema bo'yicha ro'y bersin:



ya'ni "zarracha" 0 va n oralig'idagi ixtiyoriy k nuqtadan "daydishini" boshlab, bir qadamda p ehtimollik bilan o'ngga, $1-p$ ehtimollik bilan esa chapga siljiydi ($0<p<1$). Zarracha chekka nuqtalar 0 va n larga tushishi bilan ulardan qaytib chiqmaydi. Bu "daydish" holatlar to'plami

$$S=\{0,1,\ldots,k-1,k,k+1,\ldots,n\}$$

bilan Markov zanjirini tashkil qiladi va uning uchun boshlang'ich taqsimot

$$p_i=0,\ i\neq k,\ p_k=1,$$

ya'ni $p=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (k –joyda 1).

O'tish ehtimolliklari esa,

$$p_{nl}=0 \quad (l=0,1,\ldots,n-1), \quad p_{0l}=0 \quad (l=1,\ldots,n),$$

$$p_{00}=1,\ p_{nn}=1,\ p_{l,l+1}=p,\ p_{l,l-1}=1-p=q \qquad (l=1,\ldots,n-1).$$

Bu ehtimolliklar quyidagi o'tish matritsasini tashkil qiladi:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Misol 2. Stoxastik matritsasi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

va boshlang'ich taqsimoti

$$p = (p_1, p_2, p_3) = (1,0,0)$$

bilan aniqlangan Markov zanjirini ko'raylik.

Bu holda,

$$S = (1,2,3)$$

va 2, 3-holatlarni 1-holatga o'tishi mumkin bo'lmagani uchun

$$P(x_n = 1) = P\left(x_0 = 1,\ x_1 = 1, \dots, x_n = 1\right) =$$

$$= P(x_0 = 1) \cdot P(x_1 = 1 / x_0 = 1) \dots P(x_n = 1 / x_{n-1} = 1) = 3^{-n}.$$

Agar "zanjirning" doim 1-nchi holatda qolishi hodisasini A deb belgilasak, uni

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_n = 1\}$$

ko'rinishda yozish mumkin va $\{x_n = 1\}$ kamayuvchi hodisalar ketma-ketligi bo'lishidan ehtimollikning uzluksizlik xossasiga asosan,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(x_n = 1) = \lim_{n \to \infty} 3^{-n} = 0$$

bo'ladi.

Misol 3. O'tish matritsasi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

va boshlang'ich taqsimoti $p = (p_1, p_2) = (1,0)$ bo'lgan Markov zanjirini ko'raylik.

Agar $n = 0$ boshlang'ich momentda sistema 1 holatda bo'lsa, toq tartib raqamli momentlarda sistema 2 holatda, juft tartib raqamli momentlarda esa 1 holatda bo'ladi. Shuning uchun ham

$$P_{12}(t) = \frac{1-(-1)^t}{2}, \qquad P_{11}(t) = \frac{1+(-1)^t}{2}.$$

2. O'tish ehtimolliklari uchun tenglamalar. Statsionar taqsimot

Eslatib o'tamizki, t qadamda o'tish ehtimolliklari

$$P_{ij}(t) = P\left(x_{t+t_0} = j / x_{t_0} = i\right) = P(x_t = j / x_0 = i)$$

har qanday $t, t_0 = 0,1,2,\dots,\ i,j \in S$.

Teorema 1. Har qanday m va n lar uchun

$$P_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{s} P_{ik}(n) P_{kj}(m), \qquad i,j \in S. \qquad (1)$$

Isbot. O'tish ehtimolliklari uchun to'la ehtimolliklar formulasini qo'llab quyidagi tenglikni olamiz:

$$P_{ij}(m+n) = P\left(x_{m+n} = j / x_0 = i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} P\left(x_n = k / x_0 = i\right) \cdot P\left(x_{m+n} = j / x_0 = i,\ x_n = k\right). \qquad (2)$$

Markov xossasiga asoslanib,

$$P\left(x_{m+n} = j / x_0 = i,\ x_n = k\right) = P\left(x_{m+n} = j / x_n = k\right) =$$

$$= P\left(x_m = j / x_0 = k\right) = P_{kj}(m)$$

tenglikni hosil qilamiz. Teorema 1 ning isboti oxirgi va (2) tengliklardan kelib chiqadi.

Isbotlangan (1) tenglikni o'tish ehtimolliklari Kolmogorov-Chepmen tenglamalari deb ataladi.

Agar

$$P(m) = \left(P_{ij}(m)\right)_1^s = \left\| P_{ij}(m) \right\|_1^s$$

deb olsak, Kolmogorov-Chepmen tenglamalarini har qanday m va n uchun

$$P(m+n) = P(n) \cdot P(m) \qquad (3)$$

matritsalar ko'rinishida yozish mumkin.

Endi $P_{ij}(1) = p_{ij}$ ekanligini hisobga olsak,

$$P(1) = P = \left(p_{ij}\right)_1^s.$$

Demak, (3) tenglikka ko'ra

$$P(n) = \left[P(1)\right]^n = P^n \qquad (4)$$

ya'ni n qadamda o'tish ehtimolliklari

$$P_{ij}(n) = P\left(x_n = j / x_0 = i\right)$$

Markov zanjirini aniqlaydigan stoxastik matritsa P ning elementlari p_{ij} lar orqali topilishi mumkin bo'lar ekan. Bunda (3) va (4) formulalar alohida ahamiyat kasb etadi.

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, Markov zanjirini tashkil qiladigan $\left\{x_n, n \geq 0\right\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini o'rganishda manfiy bo'lmagan matritsalar nazariyasi muhim rol o'ynar ekan. Bu fikrni

Markov zanjirlari uchun muhim bo'lgan quyidagi tushunchalar misolida namoyish qilamiz.

Markov zanjirining i holati ahamiyatga molik bo'lmagan holat deyiladi, agar shunday j holat va t_0 musbat butun son mavjud bo'lib, $P_{ij}(t_0) > 0$ va har qanday t uchun $P_{ji}(t) = 0$ munosabatlar o'rinli bo'lsa. Aks holda i holat ahamiyatga molik bo'lgan holat deyiladi. Demak, i ahamiyatga molik bo'lmagan holat bo'lsa, undan biror j holatga o'tish mumkin, lekin bu j holatdan i ga qaytish mumkin bo'lmaydi. Masalan, oldingi punktdagi misol 2 da holatlar to'plami (1,2,3) va o'tish ehtimolliklari matritsasi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

bo'lgan Markov zanjiri ko'rilgan edi. Bu misolda birinchi holat 1 ahamiyatga molik bo'lmagan, aksincha (2,3) lar ahamiyatga molik bo'lgan holatlar bo'ladi. Haqiqatan ham, 1 dan 2 va 3 holatlarga mos ravishda $\frac{1}{3}$ va $\frac{1}{3}$ ehtimolliklar bilan bir qadamda o'tish mumkin, lekin ulardan 1 holatga qaytish mumkin emas. Ko'rilayotgan zanjir qandaydir qadamda (2,3) holatlarga tushganidan so'ng, u bu holatlarda doim qolib ketadi.

Bu hodisani o'rganilayotgan zanjir uchun uning 1 holatda doim qola olmasligi (A hodisaning ehtimolligi 0 ekanligi) va o'tish ehtimolliklari matritsasi P da pastki o'ng burchakda

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

qism stoxastik matritsa borligi tasdiq etadi.

Umumiy holda Markov zanjiri ahamiyatga molik bo'lmagan holatlarda doim qolmasdan, qandaydir chekli qadamda zanjir ahamiyatga molik holatlarga o'tadi. Bu eslatib o'tilgan misol 2 da namoyish etilgan edi.

Markov zanjiri $\{x_n, n \geq 0\}$ uchun yechilishi kerak bo'lgan asosiy masalalardan biri, x_n tasodifiy miqdorning ixtiyoriy n momentdagi taqsimotini topish hisoblanadi. To'la ehtimollik formulasini qo'llab,

$$P(x_n = j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_0 = i) P(x_n = j / x_0 = i) = \sum_{i=1}^{s} p_i P_{ij}(n) \qquad (5)$$

tenglikni olamiz.

Ba'zi hollarda $P(x_n = j)$ taqsimot n ga bog'liq bo'lmasligi mumkin, ya'ni

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'lishi mumkin. Shu munosabat bilan statsionar taqsimot tushunchasini kiritamiz.

Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan

$$q = (q_1, \ldots, q_s)$$

sonli vektor statsionar ehtimollik taqsimoti deyiladi, agar

1) $q_k \geq 0, \ k = 1, \ldots, s, \qquad \sum_{k=1}^{s} q_k = 1,$

2) $\sum_{k=1}^{s} q_k p_{kj} = q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (6)$

Bu yerda p_{ij} Markov zanjirini aniqlaydigan o'tish ehtimolliklari.

Agar Markov zanjirida boshlang'ich taqsimot

$$P(x_0 = j) = p_j = q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

bo'lsa, bu holda har qanday $n \geq 0$ uchun

$$P(x_n = j) = q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (7)$$

Haqiqatan ham, Kolmogorov-Chepmen tenglamasini qo'llab, (5) va (6) formulalardan

$$P(x_n = j) = \sum_{k=1}^{s} q_k P_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{n} q_k \left(\sum_{i=1}^{s} p_{ki} P_{ij}(n-1) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{s} q_k p_{ki} \right) P_{ij}(n-1) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_{ij}(n-1) =$$

$$= \ldots = \sum_{i=1}^{s} q_i p_{ij} = q_j$$

tengliklarni olamiz.

Agar (7) tenglik bajarilsa, $\{x_n, n \geq 0\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi statsionar Markov zanjiri deb ataladi.

3. O'tish ehtimolliklari uchun limit teorema

O'tish ehtimolliklari matritsasi

$$P = (p_{ij})_1^s$$

bo'lgan Markov zanjiri

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

berilgan bo‘lsin.

Markov zanjiri (1) ergodik xossaga ega deymiz, agar quyidagi limitlar

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad j = 1,2,\dots,s$$

mavjud bo‘libgina qolmasdan, boshlang‘ich holat i ga bog‘liq bo‘lmagan holda limit qiymatlar $(\pi_1,\dots,\pi_s)$ ehtimollik taqsimotini tashqil qilsa, ya’ni

$$\pi_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{s} \pi_j = 1. \tag{2}$$

Bu (2) taqsimot – ergodik taqsimot deb ataladi.

Quyidagi teorema ergodik Markov zanjirlari yetarli darajada katta sinfni tashkil etishini ifoda etadi.

Teorema (Ergodik teorema). Tasodifiy miqdorlar ketma–ketligi (1) holatlar to‘plami

$$S = \{1,2,\dots,s\}$$

va o‘tish ehtimolliklari matritsasi P bo‘lgan Markov zanjiri bo‘lsin.

A) Agar qandaydir n_0 uchun

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0 \tag{3}$$

bo‘lsa, shunday $\pi_1,\dots,\pi_s$ sonlar topiladiki, ular uchun (2) munosabatlar o‘rinli bo‘lib, har bir $j \in S$ va har qanday $i \in S$ uchun

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

B) Aksincha, agar (2) va (4) munosabatlarni qanoatlantiruvchi $\pi_1,\dots,\pi_s$ sonlar mavjud bo‘lsa, (3) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

C) (2) va (4) shartlarni qanoatlantiruvchi $(\pi_1,\dots,\pi_s)$ sonlar

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{s} \pi_k p_{kj}, \qquad j = 1,\dots,s \tag{5}$$

tenglamalar sistemasini yechimi bo‘ladi.

Isbot. A) Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m_j^{(n)} = \min_i p_{ij}^{(n)}, \quad M_j^{(n)} = \max_i p_{ij}^{(n)}$$

Kolmogorov – Chepmen tenglamasi bo‘yicha

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{s} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \tag{6}$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun

$$m_j^{(n+1)} = \min_i p_{ij}^{(n+1)} = \min_i \sum_{k=1}^{s} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \geq$$

$$\min_i \sum_{k=1}^{s} p_{ik} \cdot \min_{k\le s} p_{kj}^{(n)} = m_j^{(n)}$$

Demak, $m_j^{(n)} \le m_j^{(n+1)}$ va shuningdek $M_j^{(n)} \ge M_j^{(n+1)}$.

Shuning uchun ham (4) limit munosabatni isbot etish uchun

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0,\ n \to \infty,\quad j = 1,\dots,s$$

ekanligini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Agar

$$\varepsilon = \min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)}$$

deb olsak, quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$p_{ij}^{(n_0+n)} = \sum_k p_{ij}^{(n_0)} p_{kj}^{(n)} = \sum_k \left(p_{ik}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\right) p_{kj}^{(n)} +$$

$$+\varepsilon \sum_k p_{jk}^{(n)} p_{kj}^{(n)} = \sum_k \left[p_{ik}{}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\right] p_{kj}^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}$$

lekin

$$p_{ik}{}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n_0)} \ge 0$$

va shuning uchun ham

$$p_{ij}^{(n_0+n)} \ge m_j^{(n)} \sum_k \left[p_{ik}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n_0)}\right] + \varepsilon p_{jj}^{(2n)} =$$

$$= m_j^{(n)} (1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}.$$

Demak,

$$m_j^{(n_0+n)} \ge m_j^{(n)} (1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$M_j^{(n_0+n)} \le M_j^{(n)} (1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}$$

tengsizlikni olamiz.

Oxirgi tengsizliklarni birlashtirib,

$$M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)} \le \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right)(1-\varepsilon)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak, $k \to \infty$ da

$$M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)} \le \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right)(1-\varepsilon)^k \downarrow 0.$$

Shunday qilib, qandaydir n_β^j qism ketma-ketlik bo'yicha

$$M_j^{(n_\beta)} - m_j^{(n_\beta)} \to 0, \qquad n_\beta \to \infty.$$

Lekin $M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$ ayirma n bo'yicha monoton bo'lgani uchun

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Agar

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)}$$

deb qabul qilsak, yuqoridagi tengsizliklarga asosan $n \geq n_0$ bo'lganda

$$\left|p_{ij}^{(n)} - \pi_j\right| \leq M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq (1-\varepsilon)^{\left[\frac{n}{n_0}\right]-1},$$

ya'ni $p_{ij}^{(n)}$ limit qiymatlar π_j larga geometrik tezlik bilan yaqinlashadi.

Tushunarliki, $m_j^{(n)} \geq m_j^{(n_0)} \geq \varepsilon > 0$ va $\pi_j > 0$.

B) (3) shart (4) dan bevosita kelib chiqadi, chunki holatlar soni chekli va $\pi_j > 0$.

C) (5) tenglamalar sistemasi (4) va (6) munosabatlardan kelib chiqadi. Teorema isbot etildi.

Endi, $(\pi_1,\dots,\pi_s)$ statsionar taqsimot yagona ekanligini isbot etaylik.

Agar $(p_1,\dots,p_s)$ boshqa statsionar taqsimot bo'lsa,

$$p_j = \sum_k p_j p_{kj} = \dots = \sum_k p_k p_{kj}^{(n)}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi va $p_{kj}^{(n)} \to \pi_j$ ekanligidan

$$p_j = \sum_k p_k \pi_j = \pi_j, \qquad j = 1,\dots,s.$$

Izohlab o'tamizki, statsionar taqsimot ergodik bo'lmagan Markov zanjirlari uchun ham mavjud bo'lishi mumkin. Masalan,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lsa,

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ mavjud emas, lekin

$$q_j = \sum_k q_k p_{kj}, \qquad j = 1, 2$$

tenglamalar sistemasi

$$q_1 = q_2, \qquad q_2 = q_1$$

tenglamalarga aylanib, ularning $q_1 + q_2 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ juftlikdan iborat bo'ladi.

Misol. Holatlari 0 va 1 bo'lgan bir jinsli Markov zanjirini ko'raylik. Uning o'tish ehtimolliklari

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Hisoblab ko'rish mumkinki,

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{00}^2 + p_{01}p_{10} & p_{01}(p_{00} + p_{11}) \\ p_{10}(p_{00} + p_{11}) & p_{11}^2 + p_{01}p_{10} \end{pmatrix}$$

va induksiya bo'yicha $|p_{00} + p_{11} - 1| < 1$ bo'lganda,

$$P^n = \frac{1}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{pmatrix} 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(p_{00} + p_{11} - 1)^n}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{pmatrix} 1 - p_{00} & -(1 - p_{00}) \\ -(1 - p_{11}) & 1 - p_{11} \end{pmatrix}.$$

Bu tenglikdan P matritsaning elementlari $|p_{00} + p_{11} - 1| < 1$ shartni qanoatlantirsa (xususan, hamma o'tish ehtimolliklari p_{ij} musbat bo'lsa),

$$P^n \to \frac{1}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{pmatrix} 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \end{pmatrix}, \quad n \to \infty \tag{7}$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} P_{i0}^{(n)} = \dfrac{1 - p_{11}}{2 - p_{00} - p_{11}}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \dfrac{1 - p_{00}}{2 - p_{00} - p_{11}}.$

ILOVA

§ 1. Ehtimollik o'lchovi bo'yicha Lebeg abstrakt integrali

Ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\Im,P)$da o'lchovli funksiya (tasodifiy miqdor) $\xi(\omega)$ aniqlangan bo'lsin. Bu funksiya uchun Lebeg abstrakt integrali

$$\int_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega)=\int_{\Omega}\xi dP=E\xi$$

tushunchasini kiritamiz. Bu ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorlarning sonli tavsiflarini aniqlashda asos bo'lib xizmat qiladi va bu integral $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning o'rta qiymati (matematik kutilmasi) deb ataladi. $E\xi$ integralni quyidagi bosqichlarda kiritamiz.

1. **Sodda funksiyaning integrali.**

O'lchovli funksiya (tasodifiy miqdor) $\xi=\xi(\omega)$ sodda deyiladi, agar uning qiymatlari to'plami chekli bo'lsa. Ixtiyoriy $A\in\Im$ hodisaning indikatori deb

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, \; agar \;\; \omega\in A\\ 0, \; agar \;\; \omega\overline{\in} A\end{cases}$$

sodda funksiyaga aytiladi. E'tibor qilib o'tamizki $A\subset\Omega$ to'plam o'lchovli bo'lishi uchun $(A\in\Im)$ uning indikatori $I_A(\omega)$ o'lchovli funksiya bo'lishi yetarli va zaruriy shart. Bu munosabat quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$\{\omega: I_A(\omega)<x\}=\begin{cases}\varnothing, \; agar \;\; x<0\\ A, \; agar \;\; 0\le x<1\\ \Omega, \; agar \;\; x\ge 1 \;\; bo'lsa.\end{cases}$$

Qiymatlari $a_1, a_2, ..., a_n$ bo'lgan sodda funksiya $\xi=\xi(\omega)$ni

$$\xi(\omega)=\sum_{k=1}^{n}a_k I_{A_k}(\omega) \qquad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin va bu yerda

$$A_k=\{\omega_k;\,\xi(\omega)=a_k\}, \qquad k=1,2,...,n.$$

A_k to'plamlar o'zaro kesishmaydi va $\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\Omega$. Demak, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning to'la guruhini tashkil qiladi. Bu yerda (1) tenglik bilan aniqlangan ξ funksiyaning o'lchovli bo'lishi uchun $A_k\in\Im$ munosabatlar har qanday $k=1,2,...,n$ uchun o'rinli ekanligi yetarli va zaruriy bo'ladi.

Sodda funksiya $\xi=\xi(\omega)$ ning integrali (sodda tasodifiy miqdorning o'rta qiymati) deb quyidagi yig'indiga aytiladi:

$$\int_{\Omega}\xi dP=\int_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega)=\sum_{k=1}^{n}a_kP(A_k)=E\xi.$$

Sodda, o'lchovli $\xi=\xi(\omega)$ funksiyaning A to'plam bo'yicha integrali deb $(A\in F)$ $\int_A\xi dP=\int_\Omega\xi(\omega)I_A(\omega)P(d\omega)=E\xi I_A$ songa aytiladi.

Keltirilgan integrallarning korrekt ekanligini (ya'ni (1) tenglikdagi $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar har xil bo'lishi mumkinligi) bevosita tekshirib ko'rish mumkin.

2. Manfiy bo'lmagan funksiyalarning integrali.

Ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\mathcal{F},P)$ da aniqlangan $\xi(\omega)$ funksiya elementar hodisalar to'plami Ω ni yarim to'g'ri chiziq $R^+=[0,\infty)$ ga akslantirsin, ya'ni $\xi(\omega)\geq 0$.

Lemma 1. Agar $\xi(\omega)\geq 0$ bo'lsa, o'lchovli bo'lgan sodda funksiyalar ketma-ketligi $\{\xi_n, n\geq 1\}$ mavjud bo'lib, $n\to\infty$ da

$$\xi_n(\omega)\leq\xi(\omega),\qquad \xi_n(\omega)\to\xi(\omega)$$

ya'ni $\xi_n\uparrow\xi$ munosabat o'rinli.

Isbot: R^+ dagi $[0,n]$oraliqni $n\cdot 2^n$ta teng "mayda" bo'laklarga bo'lamiz. Agar

$$0=x_0,\ x_1,...,x_{n2^n}=n$$

"bo'lish nuqtalari" bo'lsa, $x_i-x_{i+1}=\frac{1}{2^n}$.

Quyidagi ω - to'plamlarni ko'ramiz:

$$A_i=\{\omega;\ x_i\leq\xi(\omega)<x_{i+1}\},\ i=1,2,...,n2^n-1,$$

$$A_0=\{0\leq\xi(\omega)<x_1\}\cup\{\xi(\omega)\geq n\}.$$

Agar

$$\xi_n(\omega)=\sum_{i=0}^{n2^n-1}x_iI_{A_i}(\omega)$$

deb olsak, $\xi_n(\omega)$ sodda, o'lchovli bo'lib, $\xi_n(\omega)\leq\xi(\omega)$ va bulardan tashqari har qanday $\omega\in\Omega$ uchun $n>\xi(\omega)$ bo'lganda, $0\leq\xi(\omega)-\xi_n(\omega)\leq\frac{1}{2^n}$ o'rinli.

Lemma 2. Sodda funksiyalar ketma-ketliklari $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ lar uchun

$$\xi_n\uparrow\xi\geq 0,\ \eta_n\uparrow\eta\geq 0$$

munosabatlar bajarilsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\xi_n dP=\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\eta_n dP$

Isbot. Oldin har qanday m uchun $\int_\Omega\xi_m dP\leq\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\eta_n dP$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'raylik.

Funksiya ξ_m sodda bo'lgani uchun

$$P(\xi_m\leq C_m)=1,\ C_m-const.$$

Bundan va $\xi=\xi I_A+\xi I_{\bar{A}}$ tenglikdan foydalanib, har qanday $n,\varepsilon>0$ uchun

$$\xi_m-\eta_n\leq C_mI_{\{\xi_m\geq\eta_n+\varepsilon\}}+\varepsilon$$

tengsizlik to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Oxirgidan esa,

$$E\xi_m\leq C_mP(\xi_m\geq\eta_n+\varepsilon)+\varepsilon+E\eta_n.$$

Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi ehtimollik

$$P(\xi_m\geq\eta_n+\varepsilon)\leq P(\xi\geq\eta_n+\varepsilon)\to 0, n\to\infty,$$

chunki η_n deyarli hamma ω uchun $\xi(\omega)$ ga yaqinlashadi (demak, $P(|\eta_n-\xi|\geq\varepsilon)\to 0,\ n\to\infty$). O'z navbatida oxirgi ikkita tengsizlikdan

$$E\xi_m\leq\varepsilon+\lim_{n\to\infty}E\eta_n,$$

ya'ni $\varepsilon>0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}E\xi_n\leq\lim_{n\to\infty}E\eta_n.$$

Keltirilgan fikrlashda $\{\xi_n\}$ va $\{\eta_n\}$ketma-ketliklarni o'rinlarini almashtirib,

$$\lim_{n\to\infty}E\eta_n\leq\lim_{n\to\infty}E\xi_n$$

tengsizlikni olamiz. Lemma 2 isbotlandi.

Endi, lemma 1 va 2 larga asoslanib, quyidagi ta'rifni keltiramiz:

Ta'rif. Manfiy bo'lmagan $\xi(\omega)$ funksiyaning integrali deb

$$\int_\Omega\xi dP=E\xi=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\xi_n dP=\lim_{n\to\infty}E\xi_n \qquad (2)$$

songa aytiladi. Bu yerda $\{\xi_n\}-\xi$ ga intiladigan o'lchovli sodda funksiyalar ketma-ketligi $(\xi_n\uparrow\xi, n\to\infty)$. Integral $\int_\Omega\xi dP$ mavjud bo'ladi, $(\xi=\xi(\omega)$ funksiya integrallanuvchi bo'ladi) agar

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\xi_n dP$$

sonli ketma-ketlik limitga ega bo'lsa.

3. Ixtiyoriy o'lchovli funksiyaning integrali.

Ehtimolliklar fazosi $(\Omega,\mathcal{F},P)$ da aniqlangan ixtiyoriy $\xi=\xi(\omega)$ funksiyaning (har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lgan) integralini aniqlash uchun uni

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad \xi^\pm = \max(0, \pm\xi) \ge 0$$
ko'rinishda yozamiz. Bu funksiyaning integrali deb
$$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$$
songa aytamiz. Agar $E\xi^\pm$ integrallardan birortasi mavjud bo'lsa, $\xi = \xi(\omega)$ integrallanuvchi deyiladi. Aks holda, $E\xi$ aniqlanmagan hisoblanadi. Quyidagi
$$|\xi| = \xi^+ + \xi^-,$$
tenglikdan ko'rinadiki, $E|\xi|$ mavjud bo'lgan holda va faqat shu holda $E\xi$ mavjud bo'ladi. Agar $E\xi$ mavjud bo'lsa, ixtiyoriy to'plam bo'yicha olingan
$$E(\xi; A) = \int_A \xi dP = E\xi I_A, \quad A \in F,$$
integral ham mavjud bo'ladi.

Lemma 3. Agar $E\xi$ mavjud va $A_n \in \mathfrak{I}$-hodisalar ketma-ketligi bo'lib, $P(A_n) \to 0$ munosabat o'rinli bo'lsa,
$$E(\xi, A_n) \to 0.$$

Isbot. Sodda funksiyalar ketma-ketligi $|\xi_m| \uparrow |\xi|$ shartni qanoatlantirsin va $B_m = \{|\xi| \le m\}$ hodisani ko'raylik. Bu holda,
$$E|\xi| \ge \lim_{m\to\infty} E|\xi| \cdot I_{B_m} \ge \lim_{m\to\infty} E|\xi_m| I_{B_m} = E\xi,$$
chunki $|\xi_m| I_{B_m} \uparrow |\xi|$. Demak,
$$E|\xi| = \lim_{m\to\infty} E|\xi| I_{B_m} = \lim_{m\to\infty} E(|\xi|; |\xi| \le m).$$
yoki boshqacha qilib aytganda, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun, shunday $m(\varepsilon)$ mavjud bo'ladiki, $m \ge m(\varepsilon)$ bo'lganda,
$$E|\xi| - E(|\xi|; |\xi| \le m) < \varepsilon$$
tengsizlik bajariladi. Shu sababdan ham shunday m lar uchun
$$E(|\xi|; A_n) = E(|\xi|; \{|\xi| \le m\} A_n) + E(|\xi|; \{|\xi| > m\} A_n) \le mP(A_n) + \varepsilon.$$
Demak, $\overline{\lim_{n\to\infty}} E(|\xi|; A_n) \le \varepsilon$.

4. Integral xossalari.

1. Agar $A_n \in \mathfrak{I}$ to'plamlar (hodisalar) kesishmasa va $\bigcup_n A_n = \Omega$ bo'lsa,
$$\int_\Omega \xi dP = \sum_n \int_{A_n} \xi dP. \qquad (3)$$
Tenglik (3) ni $\xi(\omega) \ge 0$ bo'lgan hol uchun isbotlash yetarli. (1) tenglik ko'rinishidagi sodda funksiyalar uchun

$$\int_{\Omega}\xi dP=\sum_{k}a_kP(\xi=a_k)=\sum_{n}\sum_{k}a_kP(\xi=a_k;A_n).$$

Umumiy holda (2) tenglikni hisobga olib,

$$\int_{\Omega}\xi dP=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\xi_n dP=\lim_{n\to\infty}\sum_{k}\int_{A_k}\xi_n dP=\sum_{k}\lim_{n\to\infty}\int_{A_k}\xi_n dP=\sum_{k}\int_{A_k}\xi dP$$

ega ho'lamiz. Bu yerda limitga o'tish va yig'indining tartibini almashtirish mumkin, chunki lemma 3 ga ko'ra $N\to\infty$ da

$$\sum_{j=N}^{\infty}\int_{A_j}\xi_n dP=E\left(\xi_n;\bigcup_{j=N}^{\infty}A_j\right)\le E\left(\xi;\bigcup_{j=N}^{\infty}A_j\right)\to 0.$$

2. $\int_{\Omega}(\xi+\eta)dP=\int_{\Omega}\xi dP+\int_{\Omega}\eta dP.$

Sodda funksiyalar uchun keltirilgan tenglik to'g'ri ekanligi integralning ta'rifidan kelib chiqadi.

Umumiy holda ($\xi^{\pm}$ va $\eta^{\pm}$ lar oldingidek ta'riflanadi).

$$\int_{\Omega}(\xi+\eta)dP=\int_{\Omega}\xi^{+}dP+\int_{\Omega}\eta^{-}dP-\int_{\Omega}\left(\xi^{-}+\eta^{-}\right)dP=$$

$$=\int_{\Omega}\xi^{+}dP-\int_{\Omega}\xi^{-}dP+\int_{\Omega}\eta^{+}dP-\int_{\Omega}\eta^{-}dP=\int_{\Omega}\xi dP+\int_{\Omega}\eta dP$$

3. Agar a ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa,

$$\int_{\Omega}a\xi dP=a\int_{\Omega}\xi dP$$

4. Agar $\xi(\omega)\le\eta(\omega)$ bo'lsa, $\int_{\Omega}\xi dP\le\int_{\Omega}\eta dP$.

Keltirilgan 3 va 4 xossalarning isboti o'z-o'zidan ravshan. Keltirilgan $1-4$ xossalarni

$$E\xi=\int_{\Omega}\xi dP$$

ekanligini hisobga olgan holda, ularni o'rta qiymat ko'rinishida keltirish qulay.

$1'$. Agar $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ hodisalarning to'la guruhini tashkil qilsa

$\left(A_i\cap A_j=\varnothing,\ \ i\ne j,\ \ \bigcup_{j}A_j=\Omega\right)$, bu holda $E\xi=\sum_{j}E(\xi;A_j)$

$2'$. $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$

$3'$. $E\xi\le E\eta$, agar $\xi\le\eta$ bo'lsa.

$4'$. $Ea\xi=aE\xi$.

Endi, integral $E\xi$ ning $1'-4'$ xossalaridan kelib chiqadigan boshqa xossalarini keltiramiz.

5. $|E\xi|\le E|\xi|$

6. Agar $c_1\le\xi\le c_2$ bo'lsa, $c_1\le E\xi\le c_2$

7. Agar $\xi \geq 0$ va $E\xi = 0$ bo'lsa, $P(\xi = 0) = 1$.

Haqiqatan ham, Chebishev tengsizligiga asosan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} = 0$.

8. Agar $P(\xi = \eta) = 1$ va $E\xi$ mavjud bo'lsa, $E\xi = E\eta$.

Haqiqatan ham,

$$E\eta = \lim_{n\to\infty} E(\eta; |\eta| \leq n) = \lim_{n\to\infty} E(\xi; |\xi| \leq n) = E\xi.$$

§ 2. Integralning boshqa muhim xossalari

1. Yaqinlashish teoremalari.

Ma'lumki, ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining to'rt xil yaqinlashish ko'rinishlaridan foydalaniladi. Agar $\{\xi_n, n \geq 1\}$ biror tasodifiy miqdor ξ ga qandaydir ma'noda yaqinlashsa, sonli ketma-ketlik $\{E\xi_n, n \geq 1\}$ ning limit tasodifiy miqdor ξ ning o'rta qiymati $E\xi$ ga intilishini o'rganish muhim masala hisoblanadi. Bu masalani yechishda $\{\xi_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining quyidagi ta'rifda keltirilgan xossasi muhim rol o'ynaydi.

Ta'rif: Ketma-ketlik $\{\xi_n, n \geq 1\}$ tekis integrallanuvchi deyiladi, agar

$$\sup_n E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Teorema 1. Agar $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik tekis integrallanuvchi bo'lsa,

$$\sup_n E|\xi_n| \leq c < \infty. \qquad (1)$$

Isbot. N sonni shunday tanlab olamizki,

$$\sup_n E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) \leq 1$$

tengsizlik bajarilsin. Bu holda,

$$\sup_n E|\xi_n| = \sup_n \{E(|\xi_n|; |\xi_n| \leq N) + E(|\xi_n|; |\xi_n| > N)\} \leq N + 1 = c < \infty.$$

Lekin (1) munosabatdan $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlikning tekis integrallanuvchi bo'lishi kelib chiqmaydi.

Haqiqatan ham, quyidagi

$$P(\xi_n = n) = \frac{1}{n}, \quad P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

taqsimotlarga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar uchun

$$E|\xi_n| = 1,$$

Lekin, bu tasodifiy miqdorlar tekis integrallanuvchi bo'lgan ketma-ketlik tashkil etmaydi.

Teorema 2. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{E\xi_n, n \geq 1\}$ tekis integrallanuvchi bo'lib, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ bo'lsin. Bu holda, $E\xi$ mavjud bo'lib,

$$E|\xi_n - \xi| \to 0, \qquad n \to \infty$$

limit munosabat o'rinli bo'ladi va aksincha,

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad E|\xi| < \infty, \quad E|\xi_n - \xi| \to 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlik tekis integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. Eng avval $E\xi$ ning mavjud ekanligini isbot etamiz. Yuqorida biz $E\xi$ integralning quyidagi xossasini keltirgan edik: agar $P(A_n) \to 0$ bo'lsa,

$$E(\xi; A_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \qquad (2)$$

Shu boisdan ham har qanday N va ε lar uchun

$$E\min(|\xi|, N) = \lim_{n\to\infty} E\left[\min(|\xi|, N); |\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\right] + \lim_{n\to\infty} E\left[\min(|\xi|, N); |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right]$$

Lekin $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ munosabat o'rinliligidan

$$E\min(|\xi|, N) = \lim_{n\to\infty} E\left[\min(|\xi|, N); |\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\right] \leq \lim_{n\to\infty} E\min(|\xi_n| + \varepsilon, N) \leq c + \varepsilon.$$

Demak, $E|\xi| \leq c$.

Endi, $\eta_n = |\xi_n - \xi|$ deb olaylik. Bu holda,

$$\eta_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

va η_n, ξ_n lar bilan bir qatorda tekis integrallanuvchi bo'ladi.

Har qanday N va ε uchun

$$E\eta_n = E(\eta_n, \eta_n \leq \varepsilon) + E(\eta_n; \varepsilon < \eta_n \leq N) + E(\eta_n; \eta_n > N) \qquad (3)$$

tenglikni yoza olamiz. Demak, (2) dan

$$E\eta_n \leq \varepsilon + NP(\eta_n > \varepsilon) + E(\eta_n, \eta_n > N). \qquad (4)$$

Endi, N shunday tanlaymizki

$$\sup_n E(\eta_n;\ \eta_n > N) \leq \varepsilon.$$

Bu holda, shunday N uchun (4) da yuqori limitga o'tib,

$$\lim_{n\to\infty} \sup E\eta_n \leq 2\varepsilon,$$

musbat ε son ixtiyoriy bo'lgani uchun oxirgidan

$$E\eta_n \to 0, \quad n \to \infty$$

limit munosabatni olamiz.

Endi teoremani ikkinchi qismini isbot etamiz (ya'ni $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ketma-ketlikni tekis integrallanuvchi bo'lishini). Quyidagi tengsizliklarni yozamiz:

$$E(|\xi_n|, |\xi_n| > N) \leq E(|\xi_n - \xi|, |\xi_n| > N) + E(|\xi|, |\xi_n| > N) \leq$$

$$\leq E|\xi_n - \xi| + E(|\xi|, |\xi_n| > N) \leq E|\xi_n - \xi| + E(|\xi|, |\xi_n - \xi| > 1) + E(|\xi|, |\xi| > N - 1) \quad (5)$$

Oxirgi (5) tenglikdagi birinchi qo'shiluvchi

$$E|\xi_n - \xi| \to 0, \qquad n \to \infty$$

teoremaning sharti bo'yicha, ikkinchi qo'shiluvchi (2) munosabatga ko'ra (bunda A_n hodisa sifatida $\{|\xi_n - \xi| > 1\}$ hodisani olish kerak bo'ladi va teoremaning shartiga ko'ra $P(|\xi_n - \xi| > 1) = P(A_n) \to 0$) nolga intiladi, uchinchi qo'shiluvchi esa n ga bog'liq emas va uni N ni tanlash bilan xohlagancha kichik qilish mumkin. Demak, (5) tengsizlikni o'ng tomoni yetarli katta n lar uchun xohlaganimizgacha kichik bo'ladi.

Endi

$$\sup_{n \leq n_0} E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) = \max_{n \leq n_0} E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) \leq \sum_{n=1}^{n_0} E(|\xi_n|; |\xi_n| > N)$$

tengsizlikdan foydalanib, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun N ni yetarli katta qilib tanlash hisobiga

$$\max_{n \leq n_0} E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) \leq n_0 \cdot \varepsilon .$$

Demak, oxirgi va (5) tengsizlikni hisobga olib, har qanday chekli n_0 uchun

$$\sup_n E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) = \max_{n \leq n_0} E(|\xi_n|; |\xi_n| > N) + \sup_{n \geq n_0} E(|\xi_n|; |\xi_n| > N)$$

tengsizlik to'g'ri ekanligidan teoremaning isbotini olamiz.

Quyidagi ko'p marta qo'llaniladigan yaqinlashish haqidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema 3 (Chegaralanib yaqinlashish haqidagi teorema).

Agar $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$ shartlar bajarilsa, $E\xi$ mavjud bo'lib

$$E\xi_n \to E\xi, \quad n \to \infty$$

limit munosabat o'rinli bo'ladi.

Teorema 4 (Monoton yaqinlashish haqidagi teorema)

Agar $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ bo'lsa, $E\xi = \lim_{n \to \infty} E\xi_n$.

Quyidagi teorema integral ostida limitga o'tish mumkinligini ta'min etadi.

Teorema 5. (Fatu-Lebeg). Tasodifiy miqdorlar η va ζ integrallanuvchi bo'lsin (ya'ni $E\eta<\infty, E\zeta<\infty$). Agar $\xi_n\le\eta$ bo'lsa,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega}\xi_n dP\le\int_{\Omega}\limsup_{n\to\infty}\xi_n dP,$$

Agar $\xi_n\ge\zeta$ bo'lsa,

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\xi_n dP\ge\int_{\Omega}\liminf_{n\to\infty}\xi_n dP.$$

Agar $\xi_n\uparrow\xi,\ \xi_n\ge\zeta$ bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\xi_n dP=\int_{\Omega}\xi dP.$$

Oxirgi shartni $P(\xi_n\to\xi)=1,\ \zeta\le\xi_n\le\eta$ munosabatlar bilan almashtirish mumkin.

§ 3. To'g'ri chiziqdagi ehtimollik taqsimoti orqali aniqlangan integral

To'g'ri chiziq Rda aniqlangan Borel funksiyasi $g(x)$ni ko'raylik. Bu jumla quyidagi ma'noga ega: $\mathbf{B}$-to'g'ri chiziqdagi Borel to'plamlari σ-algebrasi bo'lsa, ixtiyoriy borel to'plami B ning aksi

$$g^{-1}(B)=\{x;g(x)\in B\}\in\mathbf{B}.$$

O'lchovli funksiya xossasiga asosan, agar $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda

$$\eta=g(\xi(\omega))$$

funksiya ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Oldin biz har qanday tasodifiy miqdor $\xi(\omega)$

$$(R,\mathbf{B},P_\xi)$$

ehtimollik fazosini yuzaga keltirishini eslatib o'tgan edik va bu yerdagi

$$P_\xi(B)=P(\xi^{-1}(B))=P(\{\omega;\xi(\omega)\in B\})$$

ehtimollik o'lchovi $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimoti bo'ladi. Demak, R da aniqlangan funksiyalarning $P_\xi(\cdot)$o'lchovi bo'yicha olingan integrallari haqida so'z yuritish mumkin.

Teorema 7. Agar $E\eta$ mavjud bo'lsa,

$$E\eta=\int_{\Omega}\eta dP=\int_{R}g(x)P_\xi(dx)=\int_{R}gdP_\xi.$$

Isbot. Oldin $g(x)=I_B(x)$ (B to'plamning indikatori) bo'lgan holni ko'raylik. Bu holda,

$$\eta=g(\xi(x))=I_{\{\omega;\xi(x)\in B\}}(\omega)$$

va $E\eta = P(\{\omega;\xi(x)\in B\}) = P(\xi\in B)$. Shuning uchun ham

$$\int_R g(x)P_\xi(dx) = \int_R I_B(x)P_\xi(dx) = P_\xi(B) = P(\xi\in B) = E\eta .$$

Integralning xossalaridan foydalanib, teoremani $g(\cdot)$–sodda funksiyalar uchun o'rinligiga ishonch hosil qilamiz. Endi, $g(\cdot)\geq 0$ bo'lgan holga o'tamiz. Agar $g(\xi)I_B(\xi) = \eta(\omega)I_{\{\xi\in\omega\}}(\omega)$ funksiya chegaralangan bo'lsa,

$$\int_B g(x)P_\xi(dx) = E(\eta;\xi\in B)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shuning uchun ham

$$\int_{\{g\leq n\}} g dP_\xi = E(\eta;\eta\leq n).$$

Oxirgi tenglikda n bo'yicha limitga o'tib teoremaning isbotini olamiz. Umumiy holda, ya'ni funksiya $g(\cdot)$ manfiy va musbat qiymatlar qabul qilgan holda, qo'shimcha qiyinchiliklar yuzaga kelmaydi.

Agar

$$F(x) = P(\xi<x) = P(\xi^{-1}(-\infty,x))$$

ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsa,

$$\int_R g(x)P_\xi(dx) \qquad (5)$$

integral bilan bir vaqtda

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) \qquad (6)$$

integralni ham ko'rish mumkin. Stiltes integrali (6) va (5) integral uzluksiz bo'lgan $g(x)$ funksiyalar uchun teng bo'ladi. Agar $F(x)$ uzluksiz tipdagi taqsimot funksiyasi bo'lsa, ya'ni

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ko'rinishda bo'lsa, (5) va (6) integrallar oddiy Riman integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

bilan ustma-ust tushadi.

Ehtimolliklar nazariyasining matematik fan sifatida yuzaga kelishi tarixidan lavhalar

Ehtimolliklar nazariyasi fan sifatida shakllanishini bu sohaning yirik mutaxassislari, akademiklar A.N.Kolmogorov, B.V.Gnedenko, Y.V.Proxorov, S.X.Sirojiddinov, A.N.Shiryaevlar, asosan, quyidagi bosqichlarga bo'ladilar:

1. Qadimgi davr (ehtimolliklar nazariyasi yuzaga kelishigacha o'tgan davr).
2. Birinchi bosqich (XVII-XVIII asr boshi).
3. Ikkinchi bosqich (XVIII-XIX asr boshi).
4. Uchinchi bosqich (XIX asrning ikkinchi yarmi).
5. To'rtinchi bosqich (XX asrning boshi va o'rtasi).

Qadimgi davr

Tasodifiylik to'g'risidagi birinchi tasavvurlar (kishi taqdiriga oid munosabatlar, faslning issiq yoki sovuq kelishi, janjalli masalalar natijalarining oldindan ayta bilish, sayyoralar harakatlarining holatlari – munajjimlik va boshqalar) uzoq asrlar boshiga borib taqaladi. Bu tasavvurlar ilmiy jihatdan asoslanganligiga o'tgan davrda inson aqli tomonidan inkor etib bo'lmaydigan holatlarga tegishli bo'lib, ularga oxirgi bir necha asrlar davomidagina ilmiy ma'no berildi, xolos.

Birinchi tasodifiyliklar asboblari – qimor o'yinlari oshiqlari haqida ko'pgina arxeologik ma'lumotlar mavjud. Ularga moslanib, bu oshiqlar qadimgi Misrning birinchi sulolasi davrida (eramizdan 3500 yil ilgari), qadimgi Yunon va Rim imperiyalarida qimor o'yinlari uchun asbob bo'lib, xizmat qilganini aytib o'tish mumkin. Masalan, Rim imperatorlari Avgust (63 yil eramizga qadar –14 yil yangi era) va Klavdiy (10 yil eramizga qadar – 54 yil yangi era) "oshiq" o'yinining eng ashaddiy muxlislari bo'lgan.

Qimor o'yinlaridan tashqari, foydali va ziyonli imkoniyatlar bilan bog'liq bo'lgan tasodifiyotlar, savdo-sotiq, sug'urta (страхование) sohalarida qadimgi davrlarda yuzaga kelgan.

Masalan, qadimgi Bobil (Vavilon) davlatchiligiga oid yozuvlarda eramizdan 4-3 ming yil oldin sug'urta uchun kontrakt (kelishuv) asosiy hujjat bo'lib hisoblangan. Bu yozuvlarning ko'pchiligi dengiz orqali yuk tashish moslamalariga tegishli bo'lgan. Sug'urtaning kontrakt shakllari finikiylar orqali yunonlarga, rimliklarga, hindularga o'tgan.

Ular qadimgi Rim imperiyasi davlat va madaniyat kodekslarida, Vizantiya imperiyasi qonunlarida o'z akslarini topgan. Masalan, Rim imperiyasi davrida Yuriy Ulpian (eramizdan 220 yil oldin) kishi hayoti sug'urtasiga oid xatolarni o'rganib, birinchi marta "o'lim jadvalini" tuzgan.

Italiya shahar-respublikalari (Rim, Venetsiya, Genuya, Piza, Florensiya) gullab yashnagan davrda sug'urta faoliyati bilan bog'liq statistik ma'lumotlarni yig'ish va o'rganish zaruriyati yuzaga kelgan. Tarixiy ma'lumotlardan ma'lumki, kishi hayoti sug'urtasi haqidagi kuni aniq belgilangan kontrakt 1347 yilda Genuyada manfaatdor shaxslar tomonidan tuzilgan.

G'arbiy Yevropa "Uyg'onish" davrida (XIV asr oxiri – XVII asr boshi) aytib o'tilgan shahar-respublikalar ijtimoiy va madaniy hayotda ro'y bergan ulkan islohotlarda muhim rol o'ynadilar. Xususan, shu davrda falsafiy ilmlarda "ehtimollik" tushunchasi shakllana boshlagandi. Bu jarayonda italyan matematiklari Luki Pacholi (1445-1517), Ch.Kalkanini (1479–1541), N.Tartali (1500–1557) va boshqalarning faoliyati sezilarli iz qoldirdi.

Qimor o'yinlarida ro'y berishi mumkin bo'lgan imkoniyatlarni matematik nuqtayi nazardan tahlil qilish bilan birinchilar qatorida shug'ullangan mashhur ixtirochi Dj. Kardano (1501–1576) bo'lgan. Ma'lumki, uning texnika sohasida "Kardan val" ni ixtiro qilishi va matematikada esa uchinchi darajali tenglamalarni yechish uchun topgan "Kardano formulalari", uni fan tarixida o'chmas iz qoldirganini bildiradi. Dj. Kardano vafotidan keyin bosilgan "Qimor o'yinlari haqidagi kitob" nomli asari bu o'yinning ishqibozlari uchun ajoyib qo'llanma bo'lib xizmat qilgan. Bu asrlarda kombinatorika g'oyalaridan foydalanilgan va bemalol aytish mumkinki, u ehtimollikning hozirgi zamonda ishlatiladigan "klassik" ta'rifiga juda yaqin bo'lgan.

1. ***Birinchi bosqich*** (XVII asr – XVIII asr boshi).

Juda ko'pchilik matematiklar fikricha (xususan mashhur fransuz matematigi P.Laplas), hozirgi zamon "ehtimolliklar nazariyasi"ning yuzaga kelishi XVII asrda yashab ijod qilgan taniqli fransuz matematiklari B.Paskal (1623–1662) va P.Ferma (1601–1665) orasida olib borilgan "ehtimolliklar hisobi" nomi bilan mashhur bo'lgan yozilmalardan boshlanadi. Bu yozilmalar esa o'sha davrda taniqli shaxs Anton Gotvaud (kavaler de Mere, yozuvchi, targ'ibotchi, 1607–1684) tomonidan B.Paskalga qo'yilgan ba'zi savollarga asoslangan. Xususan, bu savollardan birida ma'lum biror sabab bilan qimor o'yini to'xtatilsa, yutuqlarni qanday taqsim etish kerakligi masalasi qo'yiladi. Oxirgi jumlaga quyidagicha aniqlik kiritish mumkin. Aytaylik, A va B o'yinchilar kelishib olishdiki, kim birinchi bo'lib 5 ta partiyada g'olib bo'lsa, unga o'yinning hamma ganak (tikilgan pul) beriladi. Masalan, 1984-yilda shaxmat bo'yicha jahon chempionligi uchun o'tkazilgan Karpov-Kasparov matchida kim birinchi bo'lib 6 ta partiyani yutsa, chempion deb e'lon qilinishiga kelishib olingan. Bunda, durrang natijalar hisobga olinmaydi va partiyalar soni chegaralanmaydi.

Faraz qilaylik, o'yin ba'zi sababalarga ko'ra majburiy ravishda, A o'yinchi 4 ta yutuqqa, B o'yinchi esa 3 ta yutuqqa ega bo'lgan holda to'xtatildi. (Eslatib o'tilgan Karpov-Kasparov matchida 48 partiyadan so'ng Karpov 5 ta, Kasparov 3 ta yutuqqa ega bo'lgan holatda Jahon Shaxmat Federatsiyasi tomonidan to'xtatilgan). To'xtatilgan o'yinda umumiy ganakni qanday nisbatda bo'linishi kerakligi haqidagi savol bilan kavaler de Mere matematik B. Paskalga murojaat qilgani "tabiiy" variantlardan biri sifatida 2:1 nisbati qabul qilinishi mumkin. Haqiqatan ham, o'yin davom ettirilsa qolgan partiyalarda A o'yinchi 1 marta yutishi yetarli bo'ladi, B o'yinchi esa 2 marta yutishi kerak bo'ladi. Bundan 2:1 nisbatga kelamiz, ya'ni A o'yinchi umumiy yutuqning 2/3 qismini, B esa 1/3 qismini olishi kerak.

Lekin yutilgan partiyalar sonini hisobga olgan holda, 4:3 nisbat ham "tabiiy" deb hisoblanishi mumkin. Eslatib o'tilgan yozishmalarda B.Paskal va P. Ferma keltirilgan har ikki nisbat ham noto'g'ri bo'lganligini, aslida 3:1 nisbat haqqoniy ekanligini isbotlab berilgan.

Kavaler de Merening savollariga bog'liq bo'lgan ikkinchi bir masala quyidagicha qo'yiladi: olti qirrali o'yin kubigini 4 marta tashlaganda hech bo'lmaganda 1 ta 6 raqam tushishini yoki 2 o'yin kubigini 24 marta tashlaganda (6,6) juftlikni hech bo'lmaganda 1 marta yuzaga kelishi haqiqatga yaqinmi?

Bu savolga ham Paskal va Ferma to'g'ri javob topishgan. Birinchi kombinatsiya ikkinchisiga nisbatan haqiqatga yaqin, chunki birinchi kombinatsiya yuzaga kelish ehtimolligi

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0,516,$$

ikkinchi kombinatsiya uchun esa, ehtimollik

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0,491$$

keltirilgan javoblarni olishda Paskal va Ferma qo'yilgan masalalarni kombinatorikaga oid mulohazalar bilan yechishgan va bunda binomial koeffitsiyentlardan tashkil topgan "Paskal uchburchagi" o'zining amaliy tadbiqini topgan.

1657-yilda fanning ko'p sohalarida mashhur olim bo'lgan X.Gyuygensning (1629-1695) "Qimor o'yinlaridagi hisoblar haqida" kitobi bosmadan chiqqan va u "ehtimollik hisobi" bo'yicha birinchi manbaa bo'lib xizmat qilgan. Bu kitobda ehtimollik tushunchasining fundamental ta'rifi va ehtimolliklarni hisoblash prinsiplari, ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish formulalari keltirilgan. X.Gyuygensning kitobi uzoq vaqt davomida "Elementar ehtimolliklar nazariyasi" bo'yicha asosiy qo'llanma bo'lgan.

Eslatib o'tilgan davrda "ehtimolliklar nazariyasi"ning fan sifatida shakllanishida ensiklopedik olim Yakob Bernullining (1654–1705) roli juda ahamiyatli bo'lgan. U tomonidan hozirgi zamon "ehtimolliklar nazariyasi" ning klassik ta'rifi kiritilgan. Tabiatni matematik metodlar bilan o'rganishda juda ham muhim va Ya.Bernulli nomi bilan bog'langan "Katta sonlar qonuni" ehtimolliklar nazariyasining amaliyotdagi qo'llanmalari asosida yotadi. Bu qonun ehtimolliklar nazariyasining birinchi limit teoremalaridan hisoblanib, u Ya.Bernulli vafotidan so'ng 1713-yilda "Farazlar san'ati" kitobida (jiyani N.Bernulli qatnashuvida) chop etilgan. Buyuk rus matematiklaridan A.A.Markovning (1856–1921) e'tirof etishicha Ya.Bernulli o'zining 1704yil 20aprelda mashhur olim G.Leybnitsga (1646–1716) yozgan xatida "katta sonlar haqidagi teorema" unga ancha oldin ma'lum bo'lganligini eslatib o'tadi (qiziqligi shundaki, "katta sonlar qonuni" ilmiy termin sifatida 1835-yilda Puasson tomonidan keltirilgan).

Mashhur Bernullilar sulolasidan bo'lgan Daniil Bernulli (1667–1748) ehtimolliklar nazariyasida "Peterburg paradoksi" deb ataluvchi muammoni hal qilgani bilan o'z nomini abadiylashtirgan (u ko'p yillar davomida Sankt-Peterburg shahrida yashab ijod qilgan). Bu paradoksni hal qilish jarayonida tasodifiy sonlarning asosiy sonli xarakteristikasi sifatida "ahloqiy kutilma" tushunchasidan foydalangan. Qayd qilib o'tish zarurki, "Peterburg paradoksi" hozirgi zamon "Moliya va sug'urta matematikasining" birinchi fundamental modellaridan hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasining yuzaga kelishining ilk davri tabiatshunoslikni "matematikalashtirish" jarayoniga mos keladi. Aynan shu davrda matematikada uzluksizlik, cheksiz katta va kichik miqdorlar konsepsiyalari shakllana boshladi. Shu davrga kelib I.Nyuton (1642–1727) va G.Leybnits bu konsepsiyalarga asoslangan holda, differensial va integral hisobni yaratdilar. Ma'lumki, o'rganilayotgan dinamik sistemaning hozirgi holatga nisbatan kelgusidagi evolyutsiyasi differensial tenglamalar orqali o'rganiladi. Lekin determinístik xarakterga ega bo'lmagan sistemalarni o'rganish uchun differensial tenglamalar nazariyasi yetarli bo'lmaydi. Tabiatshunoslikda ehtimolliklar nazariyasi nodeterministik sistemalarni o'rganishda juda ham muhim bo'lib, uning qo'llanishlari tajribalarni cheksiz marta takrorlash imkoniyatlari (tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga o'tish) bilan bog'liq bo'ladi.

2. ***Ikkinchi bosqich*** (XVIII asr-XIX asr boshi).

Bu davrda ehtimolliklar nazariyasini mustaqil fan sifatida rivojlantirish P.R. Monmor (1678-1719), A.Muavr (1667-1754), T.Bayes (1702-1761), P.S.Laplas ((1749-1827), K.Gauss (1777-1855), S.Puasson (1741-1840) kabi mashhur matematiklarning ijodida namoyon bo'ldi.

Yuqorida keltirilgan (1-punktda) farqlardan kelib chiqadiki, birinchi bosqich asosan falsafiy xususiyatga ega bo'lib, ehtimolliklar nazariyasining predmeti va metodlari shakllanmagan edi. Ikkinchi bosqich davomida bu fan muayyan matematika sifatida o'zining analitik metodlarini yaratib, uni matematik analiz elementlari bilan boyitib bordi. Bu bosqichda ehtimollik tushunchasi asosida amaliy sohalarda hisoblash usullarini rivojlantirish zaruriyati yuzaga keladi.

Aynan shu davrda ehtimolliklar nazariyasi "qimor o'yinlari" kabi tor soba doirasidan chiqib, astronomik kuzatishlar, harbiy sohada ("O'q otish nazariyasi") va tajriba o'tkazishlar bilan bog'liq bo'lgan boshqa amaliy yo'nalishlarda tadqiq etila boshladi. Masalan, ebtimollik-statistik metodlar asosida "xatoliklar nazariyasi" yuzaga keldi.

Yuqorida nomlari keltirilgan taniqli matematiklardan Monmor va Muavrlar ijodlarida Ya.Bernullining "ehtimolliklarni hisoblash" traktati chuqur iz qoldirgan. Monmorning "Tasodifiy o'yinlarning analizi tajribalari" (1708 y.) kitobida turli o'yinlar uchun ro'y berish mumkin bo'lgan imkoniyatlarni hisoblash metodlari takomillashtirilgan.

A.Muavr o'zining ikki kitobida ("Hodisalar doktrinasi", 1718-y., "Analitik metodlar", 1730-y.) ehtimollik nazariyasi uchun muhim bo'lgan "hodisalarning bog'liqsizligi", "matematik kutilma", "shartli ehtimolliklar" tushunchalarini chuqur tahlil etgan. Lekin, A.Muavr matematikada binomial taqsimot uchun normal approksimatsiya mavjud ekanligini isbotlagan teoremasi bilan mashhurdir. Bu teorema haqida quyida to'xtalamiz.

Hech shubhasiz aytish mumkinki, ehtimolliklar nazariyasi taraqqiyoti uchun mazkur bosqichda P.Laplas monumental shaxs hisoblanadi. Uning 1812yilda chop etilgan "Analitik ehtimollik nazariyasi" kitobi XIX asr davomida ehtimolliklar nazariyasi bo'yicha asosiy darslik bo'lgan. U bundan tashqari ehtimollik tushunchasining falsafiy asoslariga, bevosita ehtimolliklarni hisoblashga, ehtimolliklar nazariyasini astronomiyada, mexanika va matematik analiz masalalarida tadbiqlariga oid bir nechta asarlar yozgan. P.Laplas binomial taqsimotni normal qonun orqali yaqinlashtirish (approksimatsiyalash) haqidagi yuqorida eslatib o'tilgan A.Muavr teoremasini umumlashtirib qolmasdan, uning yangi analitik isbotini topdi. Bu teorema Muavr-Laplas nomi bilan atalib, XIX asr matematikasida sharafli mavqelarga ega bo'ldi. Muavr-Laplas teoremasining nazariy va amaliy ahamiyatini oydinroq yoritish maqsadida uning hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasidagi ifodasini keltiramiz.

O'zaro bog'liqsiz va bir xil Bernulli qonuni bilan taqsimlangan

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko'ramiz, ya'ni har qanday j uchun

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & p \quad \text{ehtimollik bilan,} \\ 0 & 1-p \quad \text{ehtimollik bilan,} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

bo'lsin. Agar

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

deb belgilasak, $P(S_n = k)$ ehtimollik quyidagi ma'noga ega. Aytaylik, Bernulli sxemasida n ta takroriy tajribalar o'tkazilib, har bir tajribada biror A hodisaning ro'y berish yoki bermasligi kuzatilsin. Bu holda n ta tajribada (kuzatishda) A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolligi

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Bu formulada $p = P(A)$ – har bir tajribada A hodisaning ro'y berish, $q = 1 - p$ – ro'y bermaslik ehtimolliklaridir.

Agar biz $p = P(A)$ ehtimollik berilgan deb hisoblasak, $P(S_n = k)$ ehtimolliklarni topish ehtimolliklar nazariyasining masalasi bo'ladi. Agar p ehtimollik noma'lum bo'lsa, uni A hodisa ustidan kuzatishlar (tajribalar) o'tkazish orqali aniqlashga to'g'ri keladi, ya'ni oldingi masalaga nisbatan teskari bo'lgan masala yuzaga keladi. Aytilgan ma'nodagi teskari masalalar matematik statistikaning asosiy predmeti bo'ladi. O'z-o'zidan tusbunarliki $\frac{S_n}{n}$ miqdor A hodisaning n ta tajribada qanchalik ko'p ro'y berishlarini tavsiflaydi va uni A hodisaning chastotasi deyiladi.

Ya.Bernulli tomonidan isbotlangan va ehtimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuni deb ataluvchi limit teorema quyidagidan iborat.

1-teorema. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \to \infty$ da

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0. \tag{2}$$

Bu teoremaning ma'nosi yetarli darajadagi katta n lar uchun $\frac{S_n}{n} \approx p$ bo'ladi degan xulosadan iborat.

Muavr-Laplas teoremasi (2) limit munosabatdagi ehtimollikni baholash imkoniyatini beradi va u quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Har qanday $a<b$ haqiqiy sonlar uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a<\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}<b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}du. \qquad (3)$$

Bu tenglamaning simmetrik hol uchun ($p=q=1/2$) A.Muavr va ixtiyoriy $0<p\le 1$ uchun P.Laplas isbotlagan. (3) limit munosabatning o'ng tomonini $\Phi(b)-\Phi(a)$ ko'rinishda yozish mumkin va bunda $\Phi(\cdot)$ standart normal taqsimot funksiyasi bo'lib,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du. \qquad (4)$$

Muavr-Laplas teoremasining tadbiqi sifatida quyidagi misolni ko'rish mumkin.

Rasmiy statistik ma'lumotlarga ko'ra o'g'il bola tug'ilish ehtimolligi o'zgarmas $p=0{,}512$ ga teng. Aytaylik, 10^4 bola tug'ildi. Shu tug'ilgan bolalardan o'g'il bolalar soni qiz bolalar sonidan 200 ta ko'p bo'lish ehtimolligi topilsin.

Qo'yilgan masala bog'liqsiz tajribalar Bernulli sxemasi doirasida quyidagicha yechiladi. Faraz qilaylik mumkin 10^4 bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi bor ($n=10^4$) va undagi har bir tajribaning natijasi o'g'il yoki qiz bola tug'ilishidan iborat bo'ladi. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ξ_j larni quyidagicha keltiramiz: $\xi_j=1$, agar j-tug'ilgan bola o'g'il bo'lsa, $\xi_j=0$, agar u qiz bola bo'lsa. U holda,

$$S_n=\sum_{j=1}^{10^4}\xi_j$$

miqdor ro'yxatdan o'tgan o'g'il bolalar sonini belgilaydi. Bu holda,

$$npq\approx 0{,}25\cdot 10^4.$$

Topilishi kerak bo'lgan ehtimollik 2-teoremaga asosan

$$P(S_n\ge 5100)=1-P(S_n<5100)=1-P\left(\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}<\frac{5100-5120}{\sqrt{2500}}\right)=$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{20}{50}\right)=1-\Phi(-0{,}4)\approx 0{,}66.$$

Eslatib o'tamizki, $\Phi(x)$ funksiyaning sonli qiymatlari jadvali ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yozilgan deyarli hamma qo'llanmalarda keltiriladi.

Agar

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formulani hisobga olsak, topilgan ebtimollikni (1) formula orqali hisoblash deyarli mumkin emasligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham,

$$P(S_n \geq 5100) = \sum_{\{k:k\geq 5100\}} \frac{(10^4)!}{(10^4-k)!k!} p^k q^{n-k}$$

tenglik o'rinli bo'lib, yig'indi ostidagi qo'shiluvchilarni deyarli hisoblah bo'lmaydi.

Alobida qayd qilib o'tish kerak bo'ladiki, Muavr-Laplas teoremasi (1) formuladagi binomial taqsimot parametrlari n va p lar, $np \to \infty$ munosabatda bo'lganda (xususan, p fiksirlangan holda) samarali natijalar beradi. Agar $p = p(n)$ bo'lib va $n \to \infty$da $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ asimptotik munosabat bajarilsa, Muavr-Laplas teoremasi o'rniga Puasson teoremasini ishlatishga to'g'ri keladi.

Muavr-Laplas teoremasidan tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasi boshlandi degan fikrni oldinga sursak, hech ham xato qilmagan bo'lamiz. Uning umumlashgan variantlari "ehtimolliklar nazariyasining markaziy limit teoremalari" nomi bilan hozirgi zamon matematikasining fundamental va amaliy jihatdan juda muhim yo'nalishini tashkil qiladi (termin mashhur matematik D.Poya (1887-1985) tomonidan taklif qilingan).

Shu davr davomida Bernulli tomonidan ilgari surilgan va "ehtimollikning klassik ta'rifini" asoslaydigan "teng imkoniyatlilik" prinsipidan chetlanish g'oyalari ham yuzaga keldi. Buning natijasida klassik sxemalarga mos kelmaydigan "noklassik taqsimotlar" mavjud bo'lishi va ular nazariya va amaliyotda muhim rol o'ynashi kashf etildi. Masalan, (4) formula bilan aniqlanadigan normal taqsimot, Puasson taqsimotlari shular jumlasidandir (eslatib o'tamizki butun va manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega deyiladi, agar

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \ k = 0,1,...$$

bo'lsa. Tushunarliki, ehtimollikning klassik ta'rifi darajasida bu taqsimotni aniqlab bo'lmaydi).

"Noklassik taqsimotlar"ni boshqa misoli sifatida "geometrik ehtimolliklarni" keltirisb mumkin. Bu ehtimolliklar birinchi bor mashhur naturalist I.Nyutonda uchraydi (1665-y.). Bu ehtimolliklar Byuffonning "ignalarni tasodifiy tashlash" nomi bilan mashhur masalasida uchraydi.

Teng imkoniyatli bo'lmagan taqsimotlar 1763-yilda topilgan Bayes formulasi va unga bog'liq bo'lgan "to'la ehtimollik" formulalarini asosini tashkil qiladi va ular "klassik sxemaning" juda tor ekanligini isbotlaydi. Bu formulalar kelgusida matematik statistika masalalarida yangi yo'nalish – Bayes metodlarini yuzaga keltirdi.

Lekin aytib o'tilgan taraqqiyotlar (shu davrda erishilgan) ehtimollik nazariyasini mustaqil fan darajasiga ko'tara olmadilar, chunki bu davrda ushbu fan nazariyasi uchun umumiy (abstrakt) konstruksiyalar yo'q edi. Ikkinchidan esa, shu davrda qo'llanilgan metodlar qimor o'yinlari, xatolik nazariyasi, sodda sug'urta, demografiyaning muayyan masalalarini yechish doirasida chegaralanib qolgan edi.

3. ***Uchinchi bosqich*** (XIX asrning ikkinchi yarmi)

XIX asr ikkinchi yarmidan boshlab Sankt-Peterburg ehtimolliklar nazariyasining umumiy muammolari bo'yicha olib borilayotgan ilmiy tadqiqotlarning markaziga aylandi. P.L.Chebishev (1821-1894), A.A.Markov (1856-1921), A.M.Lyapunov (1857-1918) va boshqa rus matematiklari ehtimolliklar nazariyasini mustaqil matematika fani sifatida rivojlanishiga katta hissa qo'shdilar. Aynan shu olimlarning tadqiqotlari natijasida ehtimolliklar nazariyasi "klassik sxema" doirasidan chiqdi. Masalan, P.L.Chebishev tasodifiy miqdorlar, matematik kutilma tushunchalarini juda erkin his qilganini sezish qiyin emas.

Bu davrgacha kashf qilingan katta sonlar qonuni, Muavr-Laplas teoremasi faqat 2 ta qiymat qabul qiladigan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga tegishli edi, xolos (Bernulli sxemasi). P.L.Chebishev bu teoremalarning tadbiq doiralarini kengaytirdi. Masalan, u katta sonlar qonunini biror o'zgarmas son bilan tekis chegaralangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun o'rinli ekanligini isbot etdi. Uning shogirdi A.A.Markov bu tadqiqotni davom ettirib, katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun kerak bo'ladigan yetarli va zaruriy shartlarni topdi. Bu tadqiqotlar davomida matematikaning boshqa sohalarida ham muhim ahamiyatga ega bo'lgan Chebishev, Chebishev-Markov tengsizliklari isbot etildi.

Katta sonlar qonunidan so'ng P.L.Chebishev yuqorida keltirilgan Muavr-Laplas teoremasining umumiy ko'rinishi – markaziy limit teoremaning juda keng tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari sinfi uchun o'rinli bo'lish muammolari bilan shug'ullandi. Bu tadqiqotlarda P.L.Chebishev markaziy limit teoremasining o'rinli bo'lishida ko'p qo'llaniladigan "momentlar metodi"ni ishlab chiqdi. Bu metod A.A.Markovning ishlaridan takomillashtirildi.

Ma'lumki, "momentlar metodi"ni qo'llanlishi, qo'shiluvchi bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun hamma tartibdagi momentlar mavjud bo'lishligini taqozo qiladi. P.L.Chebishevning shogirdlaridan biri A.M. Lyapunov o'zi asos solgan analitik metod – xarakteristik funksiyalar metodini qo'llab, markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi uchun qo'shiluvchi bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning atigi $2+\delta$ $(\delta>0)$ tartibdagi momentlari mavjudligi yetarli ekanligini isbotladi. Eslatib o'tamizki, A.M.Lyapunov ehtimolliklar nazariyasidan tashqari matematika va mexanikaning boshqa sobalarida ham juda sermahsul ish qilgan. Masalan, u hozirgi zamon fanidagi "turg'unlik nazariyasiga" asos solganini eslatib o'tish yetarli bo'ladi.

Bu davr oxirida A.A.Markov tomonidan bog'liqsiz bo'lmagan, ya'ni bog'liqli bo'lgan tasodifiy miqdorlar sxemasini kiritilgani va o'rganilgani ehtimolliklar nazariyasida butunlay yangi konsepsiyasini yuzaga keltirdi. Bu sxema "Markov prinsipi" deb ataladigan qoidaga bo'ysunib, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ifoda etadigan fizik sistemaning "kelgusidagi" evolutsiyasi faqat uning hozirgi holatiga bog'liq bo'lishini taqozo qiladi. Pirovardida bu sxema tasodifiy miqdorlarning "Markov zanjirlari" nomini oldi va Markovning o'zi ikki qiymatli "zanjirlar" uchun ergodik teorema (katta sonlar qonunining qat'iy shakli) va markaziy limit teoremasi (Muavr-Laplas teoremasining umumlashgani) o'rinli ekanligini isbotladi. A.A.Markovning bu ishlari hozirgi zamon ebtimolliklar naziriyasining "Markov tasodifiy jarayonlari" yo'nalishiga asos bo'ldi.

Umuman, xulosa qilib aytish mumkinki, P.L.Chebishev, A.A.Markov A.M.Lyapunovlarning yuqorida qisqacha izohlangan ishlari ("Peterburg maktabi") ehtimollik nazariyasining keyingi davrlardagi rivojlanishiga mustahkam poydevor bo'lib xizmat qildi.

XIX asrning ikkinchi yarmida g'arbiy Yevropada ham ehtimolliklar nazariyasiga qiziqish keskin yuksaldi. Bu qiziqishning asosiy sabablari, bu nazariyaning sof matematika tushunchalari orqali, statistik fizika va endigina ro'yobga chiqayotgan matematik statistika masalalari bilan uzviy ravishda bog'liqligi bor ekanligida bo'ldi. Shu davrda ko'pchilik matematiklarga ehtimolliklar nazariyasi mustaqil fan sifatida rivojlanish uchun uni "klassik asoslardan" (ya'ni elementar hodisalar soni chekli va ularning teng imkoniyatligi) qutulishi kerakligi tushunarli bo'ldi.

Ayni shu davrda sof matematikaning o'zida ham "ehtimollik" tushunchasi bilan bog'liq bo'lgan ulkan o'zgarishlar ro'y berdi. Masalan, ehtimolliklar nazariyasidan juda yiroq bo'lgan sonlar nazariyasida ehtimolliklar taqsimotlari bilan bog'liq metodlarni qo'llash orqali qiyin masalalar hal qilindi. 1880 yilda mashhur matematik A.Puankare

(1854–1912) "Uch jism harakati" haqidagi qiyin mexanik masalalarni yechishda tasodifiy xususiyatda bo'lgan dinamik sistemalarning "qaytalanish" xossalaridan foydalandi. Shu davrda "tasodifiy tanlash" kabi, tushunchalarga murojaat ko'payib bordi. Masalan, A.Puankare 1886yilda chop etgan "Ehtimolliklar nazariyasi" kitobida "[0,1] oraliqdan tasodifiy ravishda tanlangan nuqtaning ratsional songa mos kelishligi qanday ehtimollik bilan ro'y beradi" kabi masalalarga ko'p to'xtalgan. 1888-yilda astronom X.Gyulden (1841–1896) tomonidan yozilgan maqolada, A.Puankare qo'ygan bu masala, sayyoralar harakatlarining "turg'unlik bo'lishi yoki bo'lmasligi" bilan bog'liq ekanligi ko'rsatib o'tilgan.

"Ehtimolliklar taqsimoti" tushunchalari va ular bilan bog'liq metodlar XIX asrning ikkinchi yarmida klassik fizikada va statistik mexanikada keng qo'llanila boshladi. Masalan, zarrachalarning molekular harakati uchun "Maksvell taqsimoti" (J.Maksvell (1831–1879) mashhur ingliz fizigi), L.Bolsman (1844–1906) tomonidan "o'zgaruvchi o'rta qiymatlar" va "ergodik" prinsiplarini kashf etilganini eslatib o'tish yetarli bo'ladi. Ehtimolliklar nazariyasi va uning metodlarini shu davrdagi rivojlanishiga 1827-yilda "Braun harakati" (R.Braun (1773–1858) ingliz botanigi) nomi bilan atalgan tasodifiy jarayonlarni ochilganligi sezilarli ravishda ta'sir etdi. Bu "harakat"ning matematik asoslari keyinroq mashhur fizik A.Eynshteyn (1879–1955) va uning shogirdi M.Smoluxovskiy ishlarida keltirildi. Braun jarayonlari ("harakatlari") A.Bekkeren (1852–1908) tomonidan kashf etilgan jismlarning radioaktivlik xossalarini o'rganishda muhim rol o'ynadi. 1900 yilda esa, L.Bashale (1870–1946) "aksiyalarning qiymatini" matematik usul bilan aniqlashda "Braun jarayonlari" dan foydalandi (eslatib o'tish mumkinki, hozirgi zamon moliya matematikasiga L.Bashalening shu ishlari asos bo'ldi).

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, yuqorida keltirilgan va muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lgan tasodifiy jarayonlarning mohiyatini "klassik" konsepsiyaga asoslangan ehtimolliklar nazariyasi orqali tushuntirib berish mumkin bo'lmaydigan vaziyat yuzaga keldi. Aynan shu davr oxirida sof matematikada to'plamlar nazariyasini va u bilan bog'liq ravishda "o'lchamlar nazariyasi" shakl topa boshladi. Bu yangi nazariyalar yuqorida keltirilgan va ehtimolliklar nazariyasini "boshi berk" ko'chaga olib kirgan vaziyatini bartaraf etishda muhim omil bo'lib xizmat qildi. Bunda mashhur fransuz matematigi E.Borel (1871–1956) tomonidan "o'lchovli to'plamlar", "to'plamlarning o'lchovi" tushunchalari kiritilishi muhim ahamiyat kasb etdi. To'plamlarning "Borel o'lchovlari" matematikada muhim bo'lgan uzunlik, yuza, hajm tushunchalarini beqiyos umumlashtiradi. E.Borelning bu ishlarida tajribalarning elementar natijalari ixtiyoriy to'plam tashkil etishini hisobga olgan holda, bu tajribaning matematik modelini qurish mumkinligiga asos solindi. Xususan, bu modellar berilgan tajribaning cheksiz marta davom ettirish mumkinligi hollari uchun ham mos keladi. Matematik nuqtayi nazardan oxirgi xulosada to'plamlar ustida sanoqli sondagi birlashtirish (qo'shish) va umumlashtirish (ko'paytirish), pirovardida esa, limitga o'tish amallarini bajarish kerakligi e'tirof etiladi. Aytilganlardan tushunarliki, E.Borelning ishlarida ehtimolliklar nazariyasi uchun butunlay yangi konseptual-falsafiy asos solindi. Ayni paytda bular XIX asrning oxirlarida isbotlangan "kuchaytirilgan katta sonlar qonuni" haqidagi teoremada namoyon bo'ldi. Bu teorema ma'lum xossani qanoatlantiradigan haqiqiy sonlar "ko'pligi yoki ozligi" haqida tasavvur hosil qilish imkonini beradi va uni quyidagicha izohlash mumkin:

Aytaylik, haqiqiy son $\omega \in [0,1]$ bo'lib,

$$\omega = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

bu sonning ikkilik sanoq sistemasidagi yoyilmasi bo'lsin. Ya'ni har qanday n uchun $\alpha_n = 0$ yoki 1. Agar $v_n(\omega)$ deb birinchi $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ qismida 1 ning takrorlanishi chastotasini belgilasak, u holda

$$\left\{\omega : v_n(\omega) \to 1/2\right\}, \quad n \to \infty$$

to'plamning "Borel o'lchovi" 1 ga teng bo'ladi yoki aksincha, bu xossani qanoatlantirmaydigan ω lar to'plami uchun bu "o'lchov" 0 ga teng bo'ladi. Bu teorema hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida "Borelning kuchaytirilgan sonlar qonuni" nomi bilan atalib yuqorida keltirilgan Bernullining katta sonlar qonunini tubdan kuchaytirdi. Haqiqatan ham, Bernulli teoremasi har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|v_n(\omega) - 1/2\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

ekanligini e'tirof etsa, Borel teoremasi esa,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \sup_{m\geq n}\left|v_m(\omega) - 1/2\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

ekanligini tasdiqlaydi.

Mashhur fransuz matematigi A.Lebeg (1875–1941) yuqorida izohlangan E.Borelning ishlarini davom ettirib, haqiqiy funksiyalar nazariyasida o'lchovli fazolar tushunchasini kiritib, ularda yangi integral hisobini ixtiro qildi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, Borelning o'lchovlar nazariyasi va Lebegning abstrakt integral nazariyasi kelgusida ehtimollik tushunchasi

bilan bog'liq bo'lgan matematik modellarni o'rganishda konseptual baza bo'lib xizmat qildi.

4. To'rtinchi bosqich (XX asrning boshi va o'rtasi)

XIX asr oxiriga kelib ehtimolliklar nazariyasining sof matematika bilan munosabatlari aniq tus oldi. Bu esa ehtimolliklar nazariyasini mustaqil matematik fan sifatida aksiomatik asosda qayta qurish muammolarini yuzaga keltirdi. Bu muammolar mashhur nemis matematigi D.Gilbert (1862–1943) 1900-yil 8-avgust kuni matematiklarining Parijda o'tgan II jahon kongressida qilgan ma'ruzasida o'z aksini topdi. Qizig'i shundaki, bu olamshumul ma'ruzada D.Gilbert ehtimollik nazariyasini fizika fanlar qatoriga qo'yib, uni sof matematik nuqtayi nazardan asoslash zarurligini uqtirib o'tdi.

Ehtimolliklar nazariyasini matematik fan sifatida shakllanishining to'rtinchi bosqichi – uni mantiq asosida mustaqil fan ko'rinishini olish davri hisoblanadi.

D.Gilbert ma'ruzadan ko'p vaqt o'tmasdan ehtimolliklar nazariyasini to'plamlar nazariyasi va o'lchovlar nazariyasi asosida "matematikalashtirish" harakatlari boshlandi. Lekin bu harakatlarning ko'pchillgini muvaffaqiyatli deb bo'lmaydi.

XX asrning o'rtalariga kelib, anig'i 1933yilda mashhur matematik A.N.Kolmogorov (1903–1987) tomonidan taklif qilingan askiomalar sistemasi hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosini tashkil etganligini e'tirof etildi. A.N.Kolmogorov taklif qilgan konsepsiya sodda va bir vaqtning o'zida mukammal xarakterga ega. U

$$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

ehtimollik fazosi tushunchasiga asoslanadi. Bu yerda Ω – ixtiyoriy to'plam bo'lib, uning elementlari ω lar $(\omega \in \Omega)$ elementar hodisalar sifatida qabul qilinadi. $\mathfrak{F}$ esa, Ω bilan bog'liq hodisalar σ-algebrasi. $\mathfrak{F}$-sistema σ-algebra tashkil qilish shartlari (aksiomalari) va $(\Omega, \mathfrak{F})$ o'lchovli fazoda $P(\cdot)$ ehtimollik o'lchovi bo'lish shartlari (aksiomalari) birgalikda Kolmogorov aksiomalar sistemasini tashkil qiladi. Natijalarni oldindan aytish mumkin bo'lmagan tajribalar uchun ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ matematik asos bo'lib xizmat qiladi (ushbu kitobning 1.4-§ ga qarang).

O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika fani

Yuqorida keltirilgan ehtimolliklar nazariyasining shakllanishi va rivojlanishi to'rtinchi davrida (XX arsning 30-yillaridan boshlab) O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika sohasida butun dunyoga tanilgan ilmiy maktab yaratildi. Bu maktabning asoschilari, shu sohaning yirik namoyondalari akademiklar Vsevolod Ivanovich Romanovskiy (1879-1954), Toshmuhammad Alievich Sarimsoqov (1915-1995), Sa'di Hasanovich Sirojiddinov (1920-1988) edilar. Quyida biz bu buyuk allomalar faoliyati haqida qisqa bo'lsa ham ma'lumotlar berishga harakat qilamiz.

V.I.Romanovskiy 1879-yil 5-dekabrida Qozog'istonning Verniy (hozirgi Olma-ota) shahrida tug'ildi. Uning yoshlik yillaridayoq Romanovskiylar oilasi Toshkentga ko'chib kelgan edi. U o'rta maktabni (aniqrog'i o'sha paytdagi real bilim yurtini) bitirgandan so'ng Sankt-Peterburg Universitetining fizika-matematika fakultetiga o'qishga kiradi. Universitetda unga mashhur rus matematigi Andrey Andreyvich Markov (1856-1921) ustozlik qilgan. 1904yilda V.I.Romanovskiy universitetni a'lo baholar bilan bitirgandan so'ng, uni professorlik lavozimiga tayyorlash uchun magistraturaga qabul qilingan (A.A.Markov rahbarligida). V.I.Romanovskiyning ilmiy va pedagogik faoliyati Sankt-Peterburg Universitetida privait-dotsentlik lavozimidan boshlangan. (1906y). Keyinchalik u Varshavadagi rus Universitetida, Rostovning Don Universitetida ishlagandan so'ng, 1917yili Toshkentga qaytib keladi va mahalliy gimnaziyalarda matematika va fizikadan dars beradi. 1918-yilda Toshkentda bir guruh o'zbek ziyolilarining tashabbusi bilan hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti ochildi va tez orada V.I.Romanovskiy bu o'quv maskanida faoliyat ko'rsata boshladi.

V.I.Romanovskiy ko'p qirrali olim bo'lgan. Masalan, uning birinchi dissertatsiyasi mexanikada ko'p uchraydigan differensial tenglamalarni integrallash masalalariga bag'ishlangan. Lekin, u uchun ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika asosiy mutaxassislik bo'lgan desak, xato qilmaymiz. U o'zining ustozi A.A.Markov tomonidan kiritilgan "tasodifiy miqdorlarni zanjir arqoni" bog'liq bo'lishligi tushunchasini umumlashtirdi va aniqlashtirdi. V.I.Romanovskiy XX asr boshida R.Frobuonis tomonidan yaratilgan manfiy bo'lmagan matritsalar nazariyasini kengaytirib, uni Markov zanjirlariga tatbiq etdi. Bu ishlar hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida "Romanovskiyning matritsa metodlari" nomi bilan o'z mavqeyiga ega bo'ldi.

V.I.Romanovskiy haqli ravishda "Matematik statistika" mustaqil matematik fan sifatida shakllanishiga asos solgan olimlardan biri hisoblanadi. Bu fikrning isbotini bu sohada birinchi bo'lib rus tilida 1938 yilda Moskvada chop etilgan "Математическая статистика" kitobi (monografiya, 803 bet) V.I.Romanovskiy tomonidan yozilganligida ham ko'rish mumkin. Ayniqsa bu kitob matematik statistika "soxta fan" deb hisoblanib, quvg'in ostiga olingan paytda chop etilganini hisobga olsak, bu olimning g'oyaviy jihatdan mustahkam mavqeyini tanlaganligini inkor etib bo'lmaydi. Aytib o'tilganlar qatorida "Markov zanjirlari" bo'yicha yozilgan birinchi monografik asar ham V.I.Romanovskiy qalamiga tegishli ekanligini eslatib o'tish kerak bo'ladi. (Дискретные цепи Маркова. Москва 1949, 507-bet).

V.I.Romanovskiy matematik statistika metodlarini bevosita ishlab chiqarishda (texnikada, qishloq xo'jaligida) qo'llash masalalariga juda e'tibor qilgan va bu sohadagi ishlarni tartibga keltirib, 1947yilda «Применения математической статистики в опытном деле» deb atalgan kitob-tavsiyanomani yozgan.

V.I.Romanovskiy sermahsul ijodiy shaxs bo'lishi bilan bir qatorda, mashhur pedagog ham bo'lgan. U ko'p yillar davomida talabalar uchun matematika va mexanikaning turli sohalari bo'yicha ma'ruzalar o'qigan, aspirant va yosh olimlarning ilmiy ishlariga rahbarlik qilgan. Mashhur akademik olimlar T.N.Qori-Niyoziy, T.A.Sarimsoqov, S.X.Sirojiddinovlar bu buyuk olimning shogirdlari bo'lganlar.

Akademik Toshmuhammad Aliyevich Sarimsoqov 1915-yil 7-sentabrida Andijon viloyatining Shahrixon shahrida tug'ilgan. Bolalik va o'smirllk yillari Qo'qon shahrida o'tgan. T.A.Sarimsoqovning ilmiy faoliyati O'rta Osiyo Davlat universitetida (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti) boshlangan. Dastlabki davrlarda u ehtimolliklar nazariyasini matematik analiz masalalaridagi tatbiqlari bllan shug'ullangan. Masalan, analizda ko'p uchraydigan maxsus ko'phadlarning ildizlarini "tarqoq yoki zich" taqsimlanish hollari T.A.Sarimsoqov tomonidan mukammal o'rganilgan. Keyingi navbatlarda esa ustozi V.I.Romanovskiyning Markov zanjirlarini matritsa usuli bilan o'rganish metodlarini kengaytirib umumlashtirishni va ularni holatlari cheksiz (sanoqli yoki kontinium) to'plamni tashkil qilgan tasodifiy Markov jarayonlarini o'rganishga tatbiqlari haqidagi muammolar T.A.Sarimsoqov uchun asosiy ilmiy mavzu bo'lgan. Holatlari uzluksiz to'plam ((a,b) oraliq) bo'lgan Markov zanjirlari uchun ehtimolliklar nazariyasining asosiy limit teoremalari – markaziy limit teorema va takroriy logarifm qonunlari o'rinli bo'lgan muammolari T.A.Sarimsoqov tomonidan ilk bor o'rganilgan. Bu muammolarni yechish jarayonida XX asrning birinchi yarmida L.Fredgolm yaratgan integral tenglamalar nazariyasini ehtimollik nazariyasi uchun o'ziga xos ko'rinishda talqin etish mumkinligi isbotlandi. Pirovardida esa bu ilmiy tadqiqotlar holatlari kontinium to'plamlar bo'lgan Markov jarayonlarini o'rganish uchun "integral tenglamalar metodi"ni yuzaga keltirishga olib keldi. Aytib o'tilgan ilmiy natijalar

T.A.Sarimsoqovning 1954yilda Moskvada chop etilgan "Основы теории Марковских процессов" monografiyasida qayd etildi. Bu monografiya va muallifning taniqli ilmiy jurnallardagi qator materiallari Markov jarayonlarini o'rganish va ularning tatbiq etish sohalarida yangi istiqbolli yo'nalishlar ochilishiga olib keldi.

O'tgan asrning 60-yillaridan boshlab T.A.Sarimsoqov rahbarligida Toshkentda abstrakt fazolarda ehtimolliklar taqsimoti tushunchalari bilan bog'liq bo'lgan yangi matematik obyektlarni o'rganish ishlari boshlandi. Bu yo'nalishda hozirgi zamon funksional analizi uchun muhim bo'lgan "topologik yarim maydonlar" nazariyasi yaratildi. Bu yangi obyektlar uchun o'ziga xos yaqinlashish tushunchalari va ularga mos keladigan integrallash amallari kiritildi. Oldingi ehtimolliklar nazariyasidan farqli ravishda bu ehtimolliklar fazolarida elementar hodisa, tasodifiy miqdor kabi so'zlarga aniq ma'no beradigan fizik tushunchalar topish imkoniyati yuzaga keldi. Nazariy fizikaning muayyan masalalarida uchraydigan jarayonlarning Gilbert fazolari uchun "kvant ehtimolliklar" matematik modellari mukammal o'rganildi. Eslatib o'tilgan tadqiqotlar asosida 1985-yilda T.A.Sarimsoqovning fundamental "Введение в квантовую теорию вероятностей" (Toshkent, "Fan", 307-b) monografiyasi yaratildi.

O'zbekistonda "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" maktabining yuzaga kelishida akademik Sa'di Hasanovich Sirojiddinovning faoliyati beqiyos hisoblanadi. S.X.Sirojiddinov 1920-yil 10-may kuni Qo'qon shahrida tug'ilgan. 1942-yilda O'rta Osiyo Davlat universiteti (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti) a'lo baholar bilan bitirgandan so'ng, 1945-yilgacha harbiy injener-sinoptik vazifasida ishlagan. 1947-yilda V.I.Romanovskiy rahbarligida "Ermitning ko'p o'lchovli polinomlari" mavzusida kandidatlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Bu dissertatsiyada Ermit ko'phadlarining matemtik statistikadagi tatbiqlariga bog'liq masalalar yechilgan. 1948-yilda Toshkentda akademiklar A.A.Kolmogorov, V.I.Romanovskiylarning tashabbusi bilan ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha xalqaro anjuman o'tkazilgan. Bu anjuman paytida yosh olim S.X.Sirojiddinov mashhur matematik A.N.Kolmogorov diqqatiga sazovor ilmiy ma'ruza qilgan. Anjuman oxirida A.N.Kolmogorov unga doktorantura bo'yicha ilmiy rahbar bo'lishga rozilik bergan. Shunday qilib, S.X.Sirojiddinov 1949-1952-yillar davomida Moskvadagi matematika bo'yicha dunyoga mashhur ilmiy markaz – V.A.Steklov nomidagi Matematika Institutida akademik A.N.Kolmogorov rahbarligida doktorant bo'lgan. 1953yilda shu institutning Ilmiy Kengashida "Bir jinsli Markov zanjirlari uchun limit teoremalar" mavzusidagi doktorlik dissertatsiyasini

himoya qilgan. Bu himoyaning juda muvaffaqqiyatli o'tganini mazkur dissertatsiya bo'yicha akademiklar Yu.V.Linnik, B.V.Gnedenko, M.V. Smirnovlar opponentlik vazifasini hajarganliklarida ham ko'rish mumkin. Haqiqatdan ham bu dissertatsiyada birinchi bo'lib bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoremasidagi qoldiq hadning nolga intilishi tartibi birjinsli Markov zanjirlari uchun ham bir xil bo'lishligi isbot etilgan.

Bundan tashqari oddiy Markov zanjirlari A.N.Kolmogorov tomonidan isbotlangan ko'p o'lchovli lokal teoremaning qoldiq hadining asimptotik yoyilmasi topildi. Bu natijalarni olish jarayonida S.X.Sirojiddinov stoxastik matritsalarni spektral nazariyasini kashf etdi va uni analifik metod-xarakteristik funksiyalar metodi bilan moslashtirdi.

1953-1957-yillar davomida S.X.Sirojiddinov ustozi A.N.Kolmogorovning tavsiyasi bilan Moskva Davlat universitetida professorlik lavozimida ishladi. Bu davrda u tayyor sanoat mahsulot sifatini statistik usullar bilan nazorat qilish, diskret taqsimotlarning o'rta qiymatlari uchun «siljimaydigan» statistik baholar topish masalalari bilan shug'ullandi. Ayniqsa, uzluksiz (vaqt bo'yicha) Markov zanjirlari sxemasi bo'yicha bog'liq bo'lgan miqdorlar yig'indilarining taqsimotlari absolut uzluksiz komponentaga ega bo'lishi haqidagi S.X.Sirojiddinov tomonidan isbotlangan teorema mutaxassislarda katta qiziqish uyg'otdi. (Bu teorema 1958yil Edenburg shahrida bo'lib o'tgan matematiklarning xalqaro kongressida S.X.Sirojiddinovning ma'ruzasida keltirilgan). Moskva Davlat universitetida ishlagan paytlarida S.X.Sirojiddinov ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yosh mutaxassislar tayyorlashga juda katta e'tibor bergan. O'zlarining ilmiy ishlari bilan shuhrat qozongan professorlar S.A.Ayvazyan, M.L.Meshalkinlar uning shogirdlari bo'lganlar.

S.X.Sirojiddinovning Toshkentga qaytib kelgandan keyingi ilmiy va jamoatchilik faoliyati O'zbekiston Fanlar Akademiyasi Matematika instituti, Toshkent Davlat universiteti (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti) bilan bog'liqdir. Shaxsan uning tashabbusi bilan O'zbekistonda ehtimollik nazariyasi va matematik statistikaning eng zamonaviy yo'nalishlari bo'yicha ilmiy tadqiqot ishlari boshlandi. Bular qatorida birinchi navbatda o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasi, tasodifiy jarayonlar (xususan, tarmoqlanuvchi jarayonlar, ommaviy xizmat ko'rsatish sxemalari, statsionar jarayonlarning ekstremal masalalari), statistik baholarning asimptotik xossalari kabi yo'nalishlarni sanab o'tish lozim.

Akademik S.X.Sirojiddinov O‘zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo‘yicha yetuk mutaxassislar tayyorlash sohasida ham jonbozlik ko‘rsatgan. Uning bevosita rahbarligida 60 tadan ko‘p nomzodlik, 10 tadan ko‘p doktorlik dissertatsiyalari himoya qilingan. Bulardan tashqari ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo‘yicha mutaxassislarning Xalqaro Bernulli jamiyatining I-kongressi Toshkentda (1986-y.) o‘tkazilganligi va bu anjumanda S.X.Sirojiddinov tashkiliy qo‘mita raisi bo‘lganligi olimlar xotirasida o‘chmas bo‘lib qoladi.

Ilovalar

1-jadval

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning qiymatlari

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3604	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3189	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	1874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2631	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2466	2444
1,0	2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2056	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1624	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1466	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1136	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0308	0297	0290
2,3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0170	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$ **funksiyaning qiymatlari**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34164	34850	35083	35134	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41416	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49890	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49915	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998

$x=$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
$\Phi(x)=$	0,499979	0,499986	0,499991	0,499995	0,499997
$x=$	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
$\Phi(x)=$	0,499998	0,4999987	0,4999992	0,4999995	0,4999997

3-jadval.

$P_k(\lambda) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ning qiymatlari (Puasson taqsimoti)

k / λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0283	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031

k / λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0004
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1805	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1660	1954	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0034	0216	0595	1044	137?	1490	1396	1171	0901
8	0000	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0000	0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0000	0000	0008	0062	0161	0413	0710	0993	1186	1251
11	0600	0000	0000	0019	0082	0077	0452	0722	0970	1137
12	0000	0000	000	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0946
13	0000	0000	0000	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0000	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. М., УРСС. 1999.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей М., УРСС. 2003.
3. Зубков А. М. Севостьянов Б. А. Чистяков В. П. Сборник задач по терии вероятностей М., "Наука". 1989.
4. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей М., "Наука". 2003
5. Ширяев А. Н. Вероятность – 1, 2. МЦНМО. 2004.

MUNDARIJA

Shokir Qosimovich Formanov

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI
(Darslik)

Muharrirlar: D.S.Akmalova, S.Sh.Qurbonov
Musahhih: D.Tolipov

Bosishga ruxsat etildi 09.04.2014 Bichimi 60x84 1/16
Nashriyot bosma tabag'i 15,2
Sharli bosma tabag'i 28,1
Bahosi shartnoma asosida. Adadi 500 nusxa.
Buyurtma №123

"Universitet" nashriyoti. Toshkent-100174.
Talabalar shaharchasi. Mirzo Ulug'bek nomidagi
O'zMU ma'muriy binosi.

"Ko' hi-Nur" ma'suliyati cheklangan jamiyat.
Toshkent, Bunyodkor shohko'chasi, 44