Роберт Дж. Барро
Хавьер Сала-и-Мартин

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

Роберт Дж. Барро
Хавьер Сала-и-Мартин

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

Перевод с английского
А. Н. Моисеева, О. В. Капустиной

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 65.012.2
ББК 330.83
Б25

Барро Р. Дж.

Б25 Экономический рост / Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин ; пер. с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. 824 с. : ил.

ISBN 978-5-94774-790-4

Книга посвящена исследованию вопросов, связанных с ростом экономики, неоклассических и более поздних теорий роста. Второе издание является серьезно переработанным, расширенным применительно к новым областям и отражает передовые исследования. Рассматриваются неоклассические модели роста от Солоу—Свэна до модели Кэса—Купманса. Кроме того, приводятся эмпирический анализ отдельных регионов и эмпирические данные по экономическому росту большой группы стран, начиная с 1960 г.

Книга адресована специалистам, студентам, аспирантам экономических специальностей вузов.

УДК 65.012.2
ББК 330.83

Учебное издание

Барро Роберт Дж.
Сала-и-Мартин Хавьер

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

Ведущий редактор *Ю. А. Серова*
Художник *Н. А. Новак*
Оригинал-макет подготовлен *М. Ю. Копаницкой* в пакете LaTeX 2ε
с использованием кириллических шрифтов семейства LH

Подписано в печать 12.03.15. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 66,95.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-94774-790-4

Посвящается Рейчел.
Роберт Дж. Барро

A la memòria dels meus estimats Joan Martín Pujol i Oriol Martín Montemayor.
Хавьер Сала-и-Мартин

Предисловие

Существуют ли какие-либо меры, которые бы могло предпринять правительство Индии, чтобы привести экономику страны к такому же росту, как в Индонезии и Египте? - Если да, то что нужно сделать конкретно? Если нет, то что такого есть в «природе Индии», что приводит к такому результату? Ответы на подобные вопросы имеют просто потрясающие последствия для благосостояния людей: однажды начав думать о них, трудно уже думать о чем-либо другом[1].

Robert E. Lucas, Jr. (1998)

Конечно же, экономисты всегда понимали, что изучение причин и следствий экономического роста очень важно. Однако на практике интерес к исследованию вопросов, связанных с ростом экономики, как-то окончательно пропал к концу 1960-х гг. Затем, после перерыва в два десятилетия, в конце 1980-х гг., интерес к исследованию возродился. Новое дыхание это направление экономической мысли обрело после появления моделей, прогнозирующих долгосрочный рост, которые в совокупности называются сейчас теорией эндогенного роста. В других недавних исследованиях расширены старые неоклассические модели роста, при этом особый акцент делается на эмпирических следствиях относительно сходимости экономик. В данной книге рассмотрены эти новые результаты, а также дан обзор всех исследований, появившихся в период с 1950-х до начала 2000-х гг. Особое внимание уделено эмпирическим прогнозам

[1]Эти воодушевляющие слова Лукаса стали, возможно, самыми цитируемыми в литературе, посвященной экономическому росту. Однако пикантность ситуации заключается в том, что пока Лукас записывал свои идеи, экономический рост Индии происходил быстрее экономического роста Индонезии и Египта. Темпы прироста ВВП на душу населения с 1960 по 1980 г. в Египте составили 3,2%, в Индонезии – 3,9%, в Индии – 3,6% в год, в то время как в период с 1980 по 2000 г. темпы прироста ВВП на душу населения составили 1,8% в Египте, 3,5% в Индонезии и 3,6% в Индии. Так что индийское правительство, судя по всему, приняло вызов Лукаса, а вот Египет был не столь решителен.

теорий и связям этих прогнозов с данными и фактами. Объединение теории и ее эмпирического приложения это самый интересный и захватывающий аспект в современных исследованиях экономического роста.

Во введении настоящей книги представлено обоснование необходимости исследования экономического роста, выделены некоторые ключевые эмпирические закономерности в процессе роста, приведена краткая история современной теории роста. В главах 1 и 2 описаны неоклассические модели роста: от модели Солоу—Свэна, появившейся в свет в 1950-х, до модели Кэса—Купманса (и старых моделей Рамсея) из 1960-х, включая недавние улучшения этой модели. В главе 3 рассмотрены обобщения данной модели за счет включения в модель правительственного сектора и учета издержек ввода при инвестировании, а также рассмотрены модели с открытой экономикой и конечным временем жизни домохозяйств. В главах 4 и 5 описаны версии эндогенной теории роста, в основе которых лежит постоянная отдача воспроизводимых производственных факторов. В главах 6, 7 и 8 исследуются последние модели научно-технического прогресса и НИОКР, включая рост ассортимента и качества продуктов, и распространение знаний. В главе 9 рассматриваются эндогенные детерминанты объемов предложения труда и населения, включая модели миграции, фертильности и выбора между работой и досугом. В главе 10 вырабатываются необходимые для расчета экономического роста рекомендации и затем производится расчет на примере эндогенных моделей роста. В главе 11 содержится эмпирический анализ различных регионов стран, включая штаты США, регионы Европы и Японии. В главе 12 представлено эмпирическое обоснование экономического роста для широкого спектра стран с 1960 по 2000 г.

Материал написан как пособие для студентов-экономистов первого курса обучения. Первое издание данной книги оказалось весьма популярным и полезным в качестве учебного пособия для студентов, изучающих курсы, посвященные макроэкономике, экономическому росту и экономическому развитию. В большинстве глав рассматриваются задачи, которые препроводят студентов от рутинных упражнений к размышлениям относительно улучшения моделей. Уровень математического аппарата, используемый в книге, включает дифференциальные уравнения и динамическую оптимизацию (эти вопросы обсуждаются в математическом приложении в конце книги). Для школьников, знакомых с таким уровнем математики, книга может служить хорошим пособием на дополнительных факультативных курсах. Первое издание успешно использовалось на этом уровне во всем мире.

Введение

В.1. Важность роста

Чтобы показать важность экономического роста, проанализируем долгосрочное функционирование экономики США. Реальный валовой внутренний продукт (ВВП) на душу населения в США вырос в 10 раз — с 3340 долл. в 1870 г. до 33 330 долл. в 2000 г. (в долларах США 1996 г.). Этот прирост ВВП на душу населения соответствует темпу прироста, равному 1,8% в год. Такая производительность вывела США на второе место в мире по ВВП на душу населения в 2000 г. (после Люксембурга, страны с населением всего лишь около 400 000 чел.)[1].

Для того чтобы оценить последствия незначительных различий в темпах роста, накопленных в течение большого периода времени, мы можем вычислить, где бы находилась экономика США в 2000 г., если бы она росла с 1870 г. с темпом прироста 0,8% в год, что на один процентный пункт меньше реального значения. Темп прироста, равный 0,8% в год, близок к темпу прироста, имевшему место в течение длительного периода — с 1900 по 1987 г. — в таких странах, как Индия (0,64% годовых), Пакистан (0,88%) и Филиппины (0,86%). Если бы экономика США начинала свое развитие в 1870 г. с ВВП на душу населения в 3340 долл. и затем росла с темпом прироста 0,8% в год последующие 130 лет, то ВВП на душу населения в 2000 г. составил бы 9450 долл., т. е. только в 2,8 раза больше значения 1870 г. и лишь 28% от реального значения, 33 330 долл. в 2000 г. Тогда в 2000 г. США заняли бы не второе место в мире, а лишь 45-е среди 150 стран, по которым имеются данные. Другими словами, если бы темп прироста был ниже только лишь на один процентный пункт, то ВВП на душу населения США в 2000 г. был бы таким же, как в Мексике и Польше.

Предположим теперь, что реальный ВВП США на душу населения рос с 1870 г. с темпом 2,8% в год, т. е. на один процентный пункт больше реального значения. Примерно такой же рост долгосрочно наблюдался в Японии (2,95% в год с 1890 по 1990 г.) и Тайване (2,75% в год с 1900 по 1987 г.). Если бы экономика США, начиная с ВВП на душу населения,

---

[1] Долгосрочные данные по ВВП взяты из Maddison (1991) и обсуждаются в гл. 12. Последние данные взяты из Heston, Summers, and Aten (2002) и также обсуждаются в гл. 12.

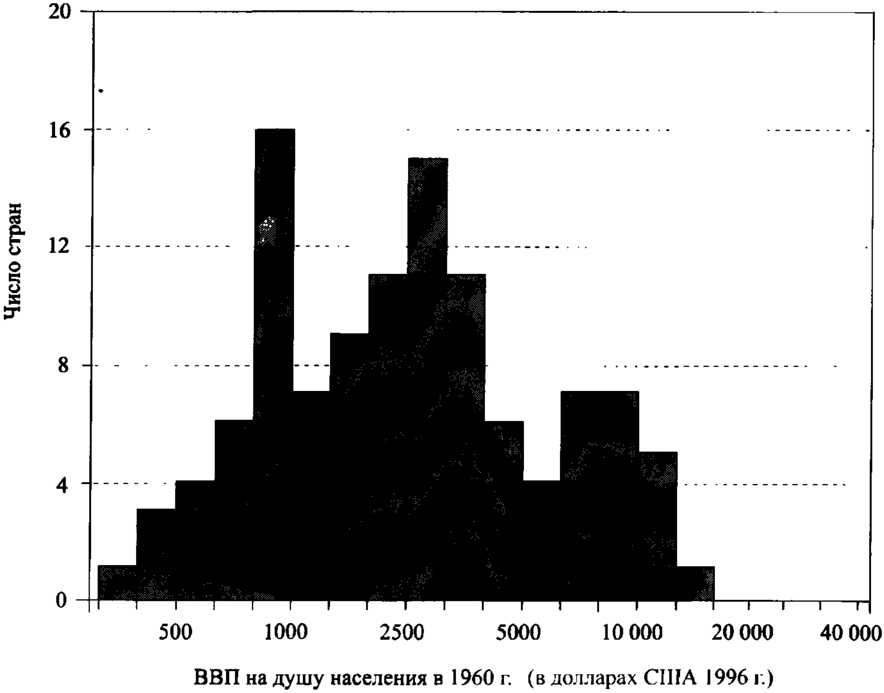


Рис. В.1. Гистограмма ВВП на душу населения в 1960 г. Данные для 113 стран сопоставлены по паритету покупательной способности (ППС), взяты из Penn World Tables ver.6.1, описаны в Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002). В рамках каждой группы отмечены репрезентативные страны: *1* — Танзания; *2* Конго (Браззавиль), Малави; *3* — Пакистан, Уганда; *4* Китай, Индия, Кения; *5* — Индонезия, Нигерия, Румыния, Таиланд; *6* — Сирия, Зимбабве; *7* Мозамбик, Южная Корея, Тайвань; *8* — Малайзия, Сенегал, Сингапур; *9* — Бразилия, Иран, Турция; *10* Гонконг, Перу, Португалия; *11* — Япония, Мексика, Испания; *12* — Ирландия, Израиль, Южная Африка; *13* — Франция, Италия, Аргентина, Венесуэла; *14* — Канада, Западная Германия, Англия; *15* Австралия, Дания, США; *16* - Швейцария

равного 3340 долл. в 1870 г., росла с темпом прироста 2,8% в год в течение последующих 130 лет, то к 2000 г. значение ВВП на душу населения составило бы 127 000 долл., что в 38 раз больше начального значения и в 3,8 раза больше реального значения в 2000 г. Значения ВВП на душу населения в 127 000 долл. еще ни одна страна в мире не достигла и на самом деле, может быть, никогда и не достигнет (впрочем, в 1870 г. люди, возможно, также думали и о значении в 33 330 долл.). США, например, при сохранении долгосрочного темпа прироста 1,8% в год достигнут значения ВВП 127 000 долл. на душу населения только в 2074 г.

Сравнивая уровни реального ВВП на душу населения через столетие, мы обнаруживаем очень большие кратности; так, например, ВВП на душу населения в Японии в 1990 г. был в 20 раз больше, чем в 1890 г. При сравнении уровней реального ВВП на душу населения между странами в некоторый момент времени, мы наблюдаем даже еще бо́льшие множители. На рис. В.1 представлена гистограмма логарифма реального ВВП на душу населения для 113 стран (по которым есть данные) в 1960 г. Среднее значение ВВП на душу населения соответствует 3390 долл. (в долларах США 1996 г.). Стандартное отклонение логарифма реального ВВП на душу населения (мера пропорционального рассеяния реального ВВП) равнялось 0,89. Это число означает, что интервал, задаваемый единичным стандартным отклонением влево и вправо от среднего, охватил диапазон от 0,41 значения среднего до 2,4. Наибольшее значение ВВП на душу населения, равное 14 980 долл. для Швейцарии, было в 39 раз больше, чем наименьшее значение, равное 381 долл. для Танзании. США были на втором месте со значением 12 270 долл. На рисунке отмечены репрезентативные страны для каждого диапазона ВВП на душу населения. Богатейшими странами были те, которые входили в состав ОЭСР, плюс несколько стран Латинской Америки, таких как Аргентина и Венесуэла. Большинство стран Латинской Америки находились в среднем диапазоне ВВП на душу населения. Беднейшими странами были африканские и азиатские страны, впрочем, некоторые азиатские страны находились в среднем диапазоне ВВП на душу населения.

На рис. В.2 представлена сравнительная гистограмма для 150 стран в 2000 г. Среднее значение здесь соответствует ВВП на душу населения, равное 8490 долл., что в 2,5 раза больше, чем в 1960 г. Стандартное отклонение логарифма ВВП на душу населения в 2000 г. равнялось 1,12, из чего следует, что интервал единичного стандартного отклонения простирается от 0,33 до 3,1 значения среднего. Следовательно, соразмерный разброс ВВП на душу населения увеличился за период с 1960 по 2000 г. Наибольшее значение ВВП на душу населения в 2000 г. наблюдалось в Люксембурге — 43 990 долл., что в 91 раз больше, чем наименьшее значение в Танзании, равное 482 долл. (Демократическая Республика Конго, наверное, была еще беднее, но данных за 2000 г. для этой страны нет). Если исключить из рассмотрения Люксембург, в силу того что это очень маленькая страна, и сравнить ВВП на душу населения Танзании и США (33 330 долл. — второе наивысшее значение после Люк-

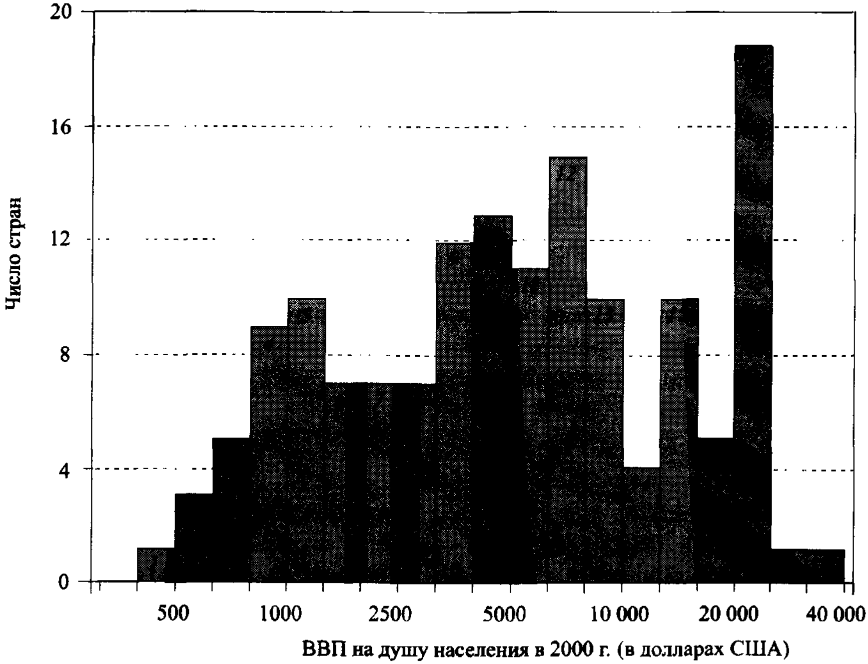


Рис. В.2. Гистограмма ВВП на душу населения в 2000 г. Данные для 150 стран взяты из тех же источников, что и для рис. В.1. В рамках каждой группы отмечены репрезентативные страны: *1* — Танзания; *2* — Эфиопия, Сьерра-Леоне; *3* — Мадагаскар, Нигерия; *4* — Мозамбик, Уганда, Замбия; *5* — Гана, Кения; *6* — Бангладеш, Сенегал; *7* — Кот-д'Ивуар, Пакистан; *8* — Боливия, Индия, Зимбабве; *9* — Китай, Индонезия, Филиппины; *10* — Египет, Перу, Румыния; *11* — Колумбия, Коста-Рика, Иран; *12* — Ботсвана, Бразилия, Россия, Южная Африка, Венесуэла; *13* — Чили, Мексика, Польша; *14* — Аргентина, Венгрия; *15* — Израиль, Португалия, Южная Корея; *16* — Италия, Тайвань, Испания; *17* — Австралия, Канада, Франция, Гонконг, Япония, Сингапур, Англия; *18* — США; *19* - Люксембург

сембурга), то ВВП на душу населения будет различаться в 69 раз. На рис. В.2 вновь отмечены некоторые репрезентативные страны для каждого диапазона ВВП на душу населения. Страны ОЭСР по-прежнему доминировали в группе наибольших значений, включив в свой состав некоторые восточноазиатские страны. Большинство других азиатских стран находились в среднем диапазоне ВВП на душу населения, так же как и большинство латиноамериканских стран. Область наименьших значений в 2000 г. занимали африканские страны.

Для того чтобы оценить превалировавшие в 2000 г. масштабы различий в ВВП на душу населения, рассмотрим ситуацию с Танзанией - беднейшей из стран, представленной на рис. В.2. Если бы экономика Танзании росла с долгосрочным темпом прироста 1,8% в год (т. е. с темпом роста экономики США), то ей бы понадобилось 235 лет, чтобы достичь ВВП на душу населения США уровня 2000 г., или 154 года, если бы экономика Танзании росла с японским долгосрочным темпом 2,75% в год.

Для 112 стран, по которым имеется достаточно данных, средний темп прироста реального ВВП на душу населения между 1960 и 2000 гг. составил 1,8% годовых — по случайному совпадению такой же, как долгосрочный темп прироста США — со стандартным отклонением 1,7[1]. На рис. В.3 представлена гистограмма этих темпов прироста; изменение от 3,2% в год для Демократической Республики Конго (бывший Заир) до 6,4% годовых для Тайваня. (Если бы не отсутствие данных, страной с наименьшим темпом роста, вероятно, мог быть Ирак.) Эти различия в темпах роста в течение 40 лет имеют громадные последствия для стандартов жизни. Тайвань увеличил свой реальный ВВП на душу населения в 13 раз – с 1430 долл. в 1960 г. (76-е место среди 113 стран) до 18 730 долл. в 2000 г. (24-е место среди 150 стран), в то время как Демократическая Республика Конго уменьшила свой реальный ВВП на душу населения в 3 раза – с 980 долл. в 1960 г. (93-е место среди 113 стран) до 320 долл. в 1995 г., — если бы не отсутствие данных, эта страна имела бы наименьший ВВП на душу населения и в 2000 г.

В период с 1960 по 2000 г. еще несколько стран имели такие же высокие темпы прироста, как Тайвань: темпы прироста более 5% в год имели Сингапур (6,2%), Южная Корея (5,9%), Гонконг (5,4%) и Ботсвана (5,1%). Эти страны увеличили свой уровень ВВП на душу населения почти в 7 раз за 40 лет. Немного медленнее развивались Таиланд и Кипр (4,6%), Китай (4,3%), Япония (4,2%, с быстрым ростом в основном в 1970-х) и Ирландия (4,1%). Рис. В.3 показывает, что основная часть других стран ОЭСР попала в следующую по темпам роста группу, вместе с несколькими странами Латинской Америки (включая Бразилию и Чили) и чуть большим количеством азиатских стран (включая Индонезию, Индию, Пакистан и Турцию). США заняли 40-е место с темпом прироста 2,5% в год.

В отрицательной области, помимо Демократической Республики Конго, оказались 16 стран, темпы роста реального ВВП на душу населе-

[1]Эта статистика включает Демократическую Республику Конго (бывший Заир), по которой имеются данные с 1960 по 1995 г.

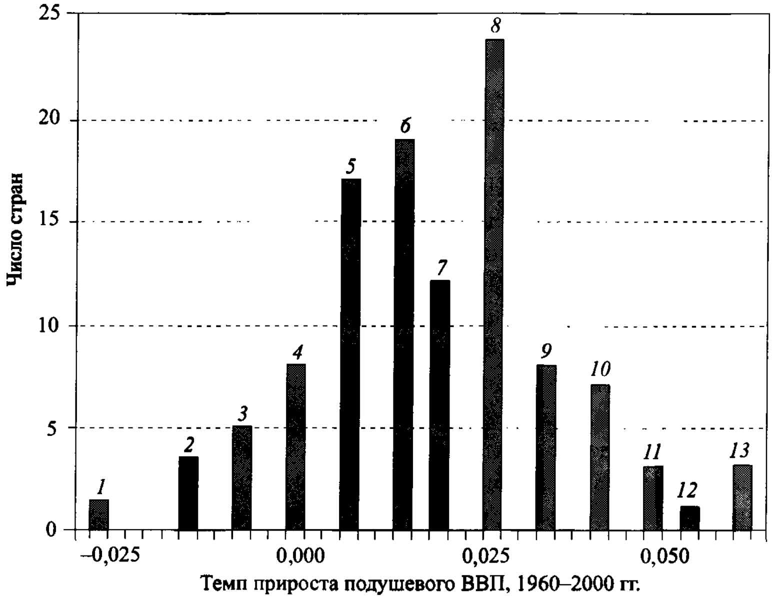


Рис. В.3. Гистограмма ВВП на душу населения с 1960 по 2000 г. Темпы прироста рассчитаны для 112 стран по значениям ВВП на душу населения, представленных для 1960 и 2000 гг. на рис. В.1 и В.2. Для Демократической Республики Конго (ранее Заир) темп прироста взят за 1960 г. и до 1995 г. Из-за проблем, связанных с объединением Германии, Западная Германия включена в рис. В.1 (для 1960 г.), но исключена из рис. В.3. В рамках каждой группы отмечены репрезентативные страны: *1* — Демократическая Республика Конго; *2* — Ангола, Нигер, Никарагуа; *3* — Мозамбик, Нигерия, Замбия; *4* — Мали, Руанда, Сенегал, Венесуэла; *5* — Боливия, Эфиопия, Кот-д'Ивуар, Перу, Танзания; *6* — Аргентина, Гана, Кения, Южная Африка, Швейцария; *7* — Австралия, Иран, Мексика, Швеция, Англия; *8* — Бразилия, Канада, Чили, Египет, Франция, Индия, Израиль, Италия, Пакистан, Турция, США; *9* — Греция, Индонезия, Румыния, Испания; *10* — Китай, Япония, Ирландия, Португалия; *11* — Ботсвана, Кипр, Таиланд; *12* — Гонконг; *13* — Тайвань, Сингапур, Южная Корея

ния которых с 1960 по 2000 г. оказались отрицательными. Этот список (который был бы значительно полнее, если бы не отсутствие данных), начиная снизу, состоит из Центрально-Африканской Республики, Нигера, Анголы, Никарагуа, Мозамбика, Мадагаскара, Нигерии, Замбии, Чада, Коморских островов, Венесуэлы, Сенегала, Руанды, Того, Бурунди и Мали. Таким образом, за исключением Никарагуа и Венесуэлы, эта группа состоит только из африканских стран. Для 38 африканских стран (южнее пустыни Сахара), по которым есть данные, среднее значение темпа прироста с 1960 по 2000 г. составило только 0,6% годовых. Следовательно, среднестатистическая африканская страна увеличила свой ВВП на душу населения всего лишь в 1,3 раза за 40 лет. Чуть быстрее ВВП африканских стран рос ВВП некоторых медленно растущих латиноамериканских стран, включая Боливию, Перу и Аргентину.

Итак, обобщая эти наблюдения относительно темпов прироста в различных регионах, можно сказать, что Африка (южнее Сахары) была бедной в 1960 г. и, имея самый низкий темп прироста, пришла к 2000 г. беднейшим регионом. Азия стартовала чуть выше Африки, но росла быстрее и закончила развитие с преимущественно средними результатами. Латинская Америка стартовала в средневысоком диапазоне, росла немного ниже среднего и, таким образом, пришла к 2000 г. со средними результатами вместе с Азией. И наконец, страны ОЭСР, начав развитие на самом высоком уровне в 1960 г., росли на среднем уровне или выше и в итоге пришли к финишу по-прежнему богатейшими странами.

Для того чтобы понять, почему страны так сильно отличаются в стандартах жизни (см. рис. В.1 и В.2), следует разобраться в том, почему страны имеют такое отчетливое расхождение в долгосрочных темпах прироста (рис. В.3). Даже незначительные различия в темпах прироста, будучи накопленными за 40 лет и более, имеют бóльшие последствия для стандартов жизни, нежели различные виды краткосрочных бизнес-циклов, которые обычно привлекают основное внимание макроэкономистов. Другими словами, если мы сможем понять, какие правительственные политические решения могут иметь хотя бы небольшое влияние на долгосрочные темпы роста, то мы сможем внести гораздо больший вклад в улучшение стандартов жизни, чем это было сделано всей историей макроэкономического анализа антициклической политики и тонкой настройки экономики. Экономический рост, являющийся предметом изучения в этой книге, — это та часть макроэкономики, которая действительно важна.

В.2. Распределение дохода в мире

В данной книге мы акцентируем внимание на теоретических и эмпирических детерминантах агрегированного экономического роста, но нам следует иметь в виду, что рост имеет важные последствия и для благосостояния индивидуумов. В самом деле, возможно, что агрегиро-

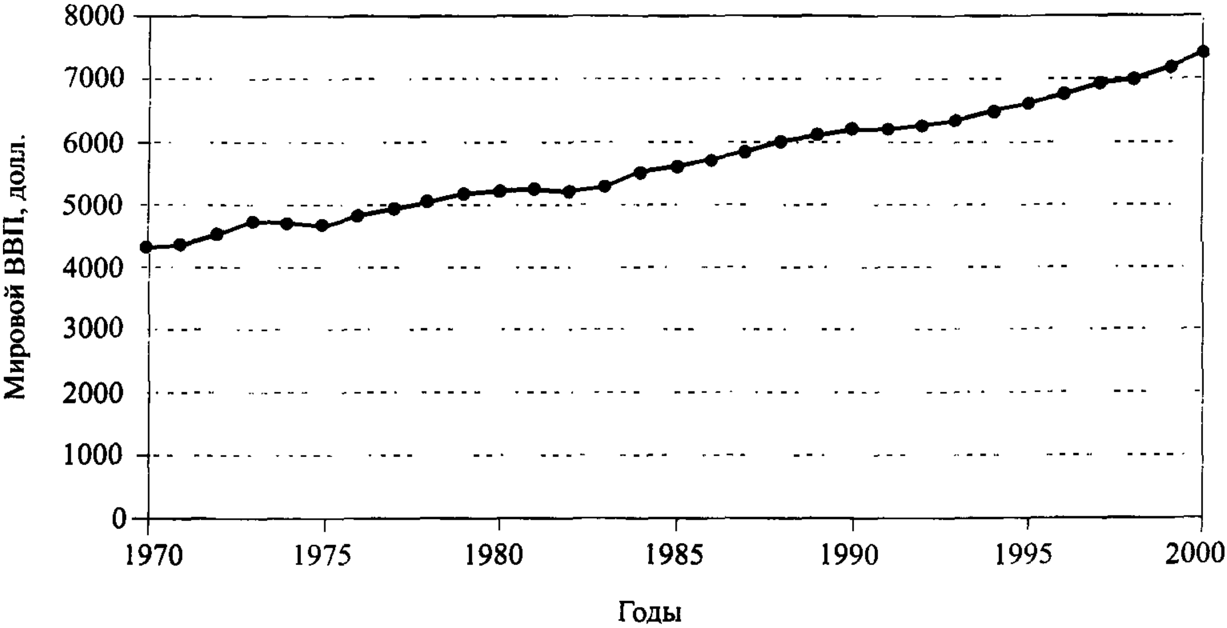


Рис. В.4. Мировой ВВП на душу населения, 1970–2000 гг. Мировой ВВП на душу населения равен сумме ВВП 126 стран (139 после распада СССР в 1989 г.), деленной на численность населения. Выборка из 126 стран используется в работе Sala-i-Martin (2003a) и представляет 95% мирового населения

ванный рост является единственным решающим фактором, влияющим на уровни доходов индивидуумов. Следовательно, понимание детерминантов агрегированного экономического роста является ключом к пониманию того, как повысить стандарты жизни индивидуумов в мире и, таким образом, снизить мировой уровень бедности.

На рис. В.4 показано изменение мирового ВВП на душу населения в период с 1970 по 2000 г.[1]. Ясно, что средний человек на планете со временем становится богаче. Однако положительность среднего темпа прироста последние три десятилетия вовсе не означает, что увеличился доход всех жителей. В частности, это не означает, что доходы беднейших людей выросли, а также что число людей, чьи доходы ниже определенной черты бедности (скажем, 1 долл. в день, как определено Мировым

[1] По Sala-i-Martin (2003a, 2003b) «мир» состоит приблизительно из 126 стран (139 стран после распада СССР в 1989 г.). Индивидуумы в этих 126 странах составляют около 95% всего мирового населения. Мировой ВВП на душу населения оценивается как сумма соответствующих данных для отдельных стран из Heston, Summers, and Aten (2002), деленная на численность населения мира.

банком) уменьшилось[1]. В самом деле, если бы неравенство в доходах росло вместе с экономическим ростом, то тогда в мире наблюдались бы как положительный рост ВВП на душу населения, так и растущее число людей, живущих ниже черты бедности. Для определения степени влияния агрегированного роста на бедность Sala-i-Martin (2003a) оценивает мировое распределение индивидуального дохода. Чтобы сделать это, он использует макроэкономические обзоры и данные по агрегированному ВВП для каждой страны и для каждого года между 1970 и 2000 гг.[2]. Итог для 1970 г. показан на рис. B.5. По горизонтальной оси отложены значения уровня дохода (логарифмическая шкала), по вертикальной оси — число людей. Тонкие кривые соответствуют распределению доходов в отдельной стране. Отметим, например, что в Китае (наиболее населенной стране мира) значительная часть распределения находится ниже черты 1 долл./день. То же верно для Индии и большого числа малых стран. Для США, Японии и даже СССР ситуация противоположна, часть распределения ниже черты 1 долл./день очень мала. Обозначенная толстой линией кривая на рис. B.5 представляет собой интеграл отдельных распределений. Таким образом, эта линия соответствует мировому распределению дохода в 1970 г. И вновь существенная часть жителей мира в 1970 г. находилась за чертой бедности, т. е. доход был менее 1 долл./день на человека.

---

[1]Определение «точной» черты бедности имеет долгую историю, но современная «один доллар в день» черта имеет происхождение от World Bank (1990). Изначально Мировой банк определил черту бедности как 1 долл. в день в ценах 1985 г. Хотя позже собственное определение Мирового банка изменилось на 1,08 долл. в день в долларах 1993 г. (заметьте, что 1 долл. 1985 г. не соответствует 1,08 долл. 1993 г.), мы используем исходное определение – «один доллар в день» в ценах 1985 г. Один доллар в день (или 365 долл. в год) в ценах 1985 г. превратился в 495 долл. в год в ценах 1996 г., который является базовым для данных, используемых для построения мирового распределения доходов в работе Heston, Summers, and Aten (2002). Следуя работе Bhalla (2002), Sala-i-Martin (2003a) устанавливает эту черту бедности выше на 15%, чтобы скорректировать смещение, связанное с занижением сведений богатыми. Эта корректировка означает, что наша черта бедности «один доллар в день» соответствует 570 долл. в год (или 1,5 долл. в день) в долларах 1996 г.

[2]Sala-i-Martin (2003b) конструирует аналогичное распределение, по которому он оценивает число людей, чьи персональные потребительские расходы меньше «одного доллара в день». Рассмотрение потребления вместо дохода для оценок более соответствует концепции «экстремальной бедности», используемой международными институтами, такими как Мировой банк и ООН. Однако персональное потребление имеет тот недостаток, что не учитываются расходы на коммунальные услуги и сбережение.

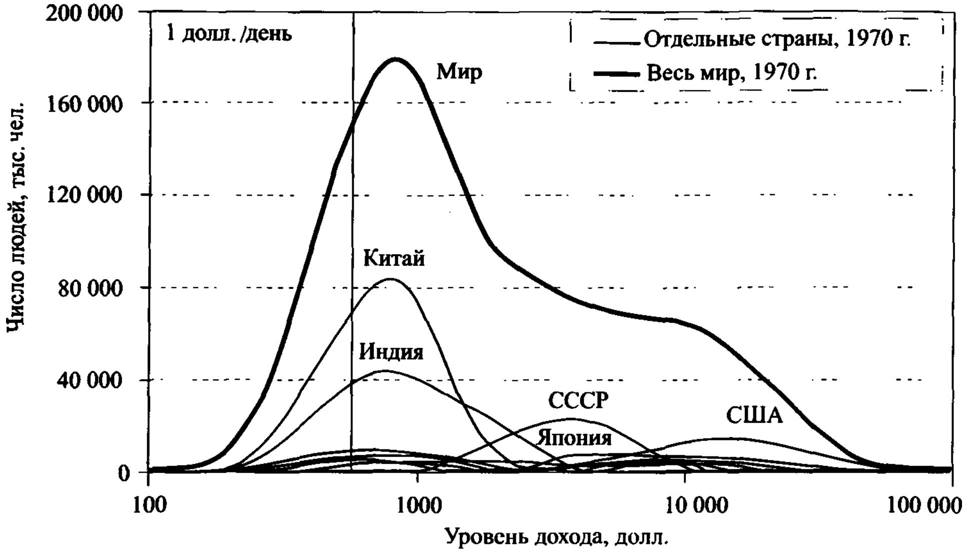


Рис. В.5. Мировое распределение дохода в 1970 г. По горизонтальной оси отложены значения уровня дохода (по логарифмической шкале), по вертикальной оси - число людей. Тонкие кривые соответствуют распределению доходов в отдельной стране. Толстая кривая является интегралом распределений отдельных стран и соответствует мировому распределению дохода. Вертикальная линия отмечает черту бедности (соответствует значению дохода, равного 1 долл./день в ценах 1985 г.). Источник: Sala-i-Martin (2003a)

На рис. В.6 показаны соответствующие распределения в 2000 г. Если сравнить распределения для 1970 и 2000 гг., то можно заметить ряд интересных особенностей. Во-первых, мировое распределение дохода сдвинулось вправо. Это смещение соответствует накопленному росту ВВП на душу населения. Во-вторых, в основе изменения всемирного дохода лежит изменение доходов в большинстве стран мира. ВВП на душу населения в большинстве стран увеличилось, и, следовательно, сдвинулись вправо распределения. В-третьих, мы видим, что дисперсия распределений дохода некоторых стран, в особенности Китая, увеличилась за этот период. Другими словами, неравенство доходов внутри некоторых больших стран выросло. В-четвертых, рост неравенства в доходах внутри некоторых стран оказался не столь большим, чтобы нивелировать агрегированный подушевой рост, так что доля людей в мире с доходами ниже черты бедности кардинально уменьшилась.

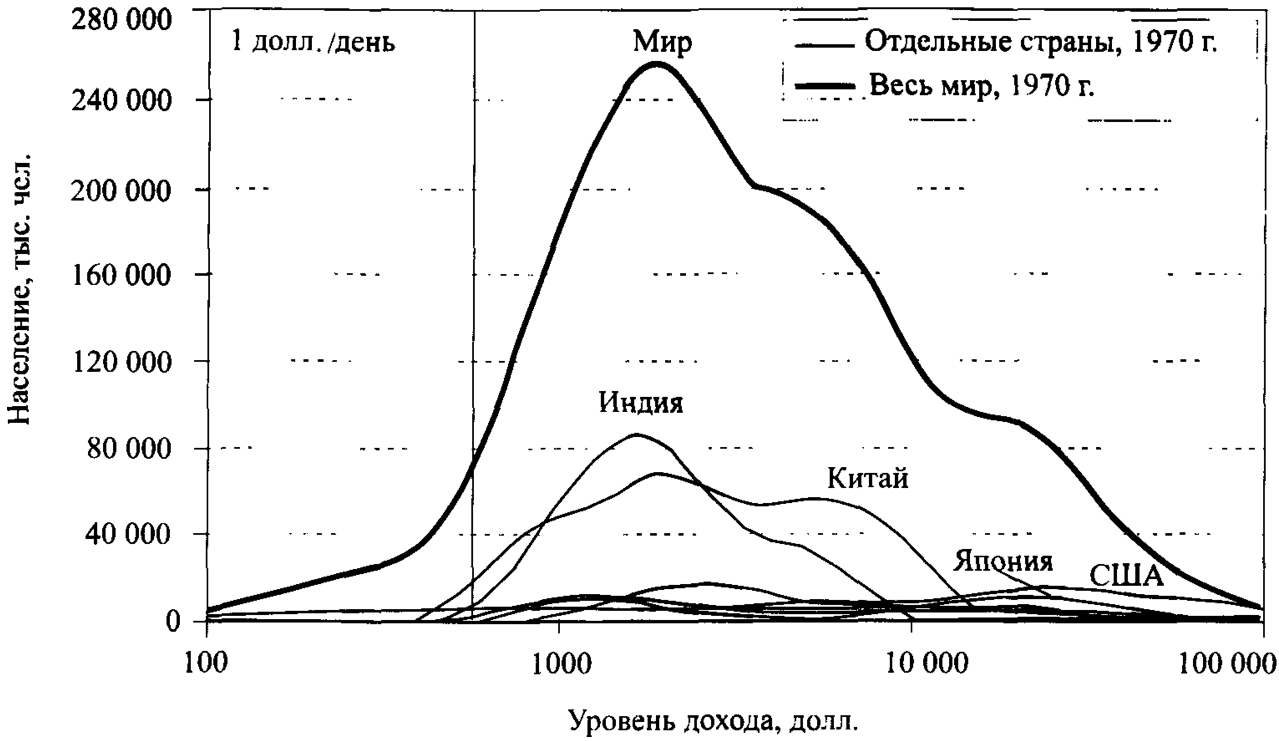


Рис. В.6. Мировое распределение дохода в 2000 г. По горизонтальной оси отложены значения уровня дохода (по логарифмической шкале), по вертикальной оси - число людей. Тонкие кривые соответствуют распределению доходов в отдельной стране. Толстая кривая является интегралом распределений отдельных стран и соответствует мировому распределению дохода. Вертикальная линия отмечает черту бедности (которая соответствует значению дохода в 1 долл./день в ценах 1985 г.). Источник: Sala-i-Martin (2003a)

Точное значение доли жителей мира с доходами ниже черты бедности может быть подсчитано через распределения, построенные Sala-i-Martin (2003a)[1]. Представленные на рис. В.7 уровни бедности уменьшились в 3 раза за 30 лет: в 1970 г. 20% жителей мира были бедны, в 2000 г. бедны были только 7%[2]. В период между 1970 и 1978 гг. рост населения притормозил снижение уровней бедности. Действительно,

[1] Мировой банк, ООН и многие другие исследователи определяют бедность в терминах потребления, а не дохода. Sala-i-Martin (2003b) рассчитывает уровни бедности и численность бедных на основе потребления. Эволюция потребительской бедности аналогична описанной здесь доходной, однако, очевидно, если использовать для оценки бедности потребление вместо дохода при той же черте бедности, то уровни бедности оказываются выше.

[2] Sala-i-Martin (2003a) описывает кумулятивные функции распределения для 1970, 1980, 1990 и 2000 гг. Используя эти функции, можно легко обнаружить, что уровни бедности за последние 30 лет резко упали, независимо от принятой черты бедности. Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что агрегированный рост уменьшил бедность.

113718

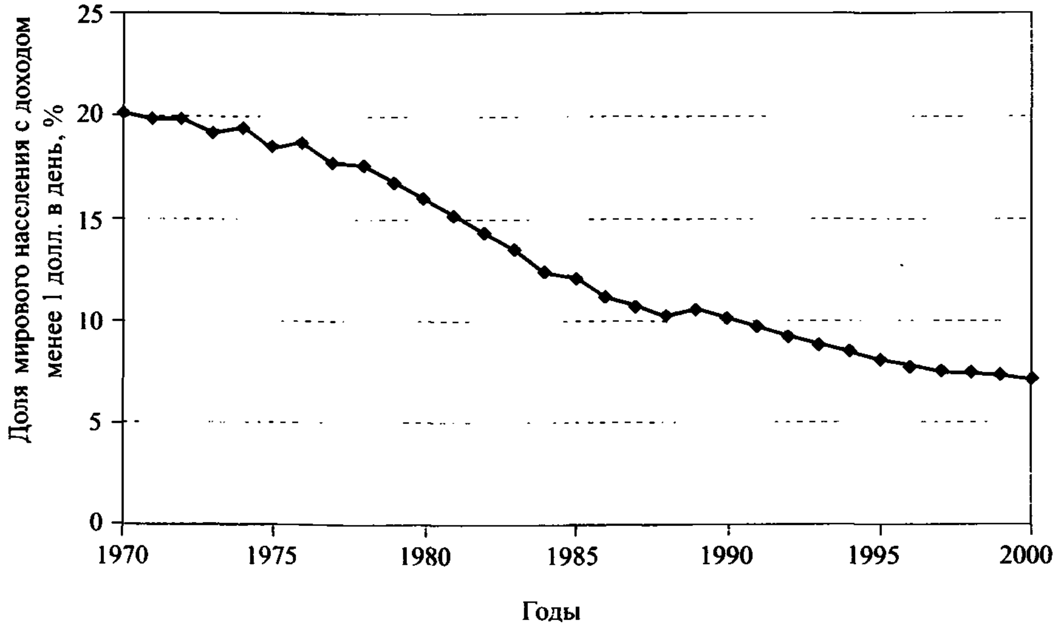


Рис. В.7. Мировые уровни бедности. График доли совокупного населения с доходом ниже черты бедности в период с 1970 по 2000 г. Источник: Sala-i-Martin (2003a)

Sala-i-Martin (2003a) показывает, что за этот период совокупное число бедных увеличилось на 20 млн чел. Но уже с 1978 г. общее число людей с доходом ниже порога в 1 долл. в день уменьшилось более чем на 300 млн чел. Это достижение тем более примечательно, если учесть, что совокупное население увеличилось за этот период более чем на 1,6 млрд чел.

Итак, мы можем сделать заключение, что экономический рост на протяжении последних 30 лет вел к существенному снижению как мировых уровней бедности, так и числа бедных. Как было сказано выше, такой результат вовсе не был неизбежен: если бы экономический рост сопровождался существенным ростом неравенства доходов, то была бы возможна ситуация, когда среднее значение распределения дохода выросло, но одновременно выросла бы и часть распределения ниже определенного порога бедности. Sala-i-Martin (2003a) показывает, что даже несмотря на то, что такой негативный вариант развития событий теоретически возможен, последние 30 лет мир так не развивался. Более того, он также показывает, что мировое неравенство доходов в реальности слегка уменьшилось за период с 1980 по 2000 г. Этот вывод верен независимо от того, как измеряется неравенство доходов, будь то коэффициент Джини, индекс Тейла, среднее логарифмическое

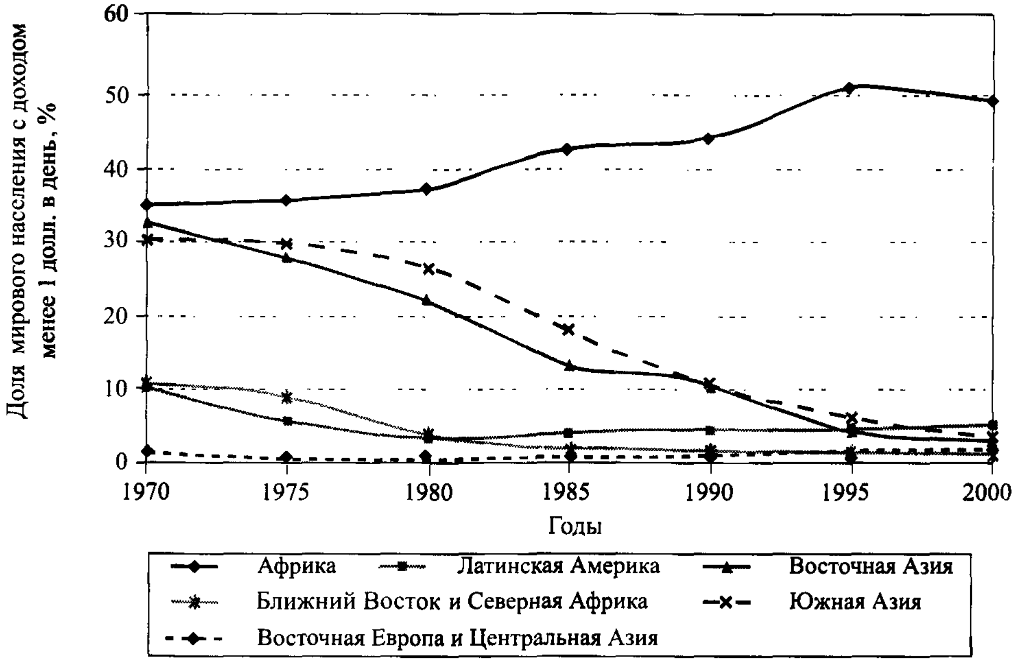


Рис. В.8. Региональные уровни бедности. Графики долей населения каждого региона с доходом ниже черты бедности. Регионы определены Мировым банком: Восточная Азия, Южная Азия, Латинская Америка, Африка, Ближний Восток и Северная Африка (БВСА), Восточная Европа и Центральная Азия. Источник: Sala-i-Martin (2003a)

отклонение, различные индексы Аткинсона, дисперсия логарифма дохода или коэффициент вариации.

Sala-i-Martin (2003a) разбивает мир на регионы и замечает, что борьба с бедностью более всего декларировалась в регионах с наибольшим ростом. На рис. В.8 изображены уровни бедности для беднейших регионов мира: Восточная Азия, Южная Азия, Латинская Америка, Африка, Ближний Восток и Северная Африка (БВСА), Восточная Европа и Центральная Азия. В 1970-м в трех этих регионах уровень бедности был близок или больше 30%. В двух из них (Восточной Азии и Южной Азии) произошло существенное снижение уровней бедности, и в них также были большие положительные темпы прироста. В другом регионе (Африке) в течение последних 30 лет наблюдалось значительное увеличение уровней бедности. Мы также знаем, что в большинстве стран Африки темпы прироста были отрицательны или близки к нулю. Из рис. В.8 также видно, что в 1970 г. два региона имели уровни бедности, равные примерно 10%. Это Латинская Америка и БВСА. В обоих регионах произошло снижение уровней бедности. Причем в Латинской Америке в 1970-х гг. наблюдался резкий подъем, тогда темпы роста были весьма значительны, но в течение 1980-х регион испытал регресс («потерянное десятилетие», которое характеризовалось отрицательными темпами прироста). Уровни бедности в Латинской Америке стабилизировались в течение 1990-х гг. Уровни бедности в БВСА немного снизились в период между 1970 и 1975 гг. Затем снижение усилилось в период десятилетия быстрого роста после нефтяного кризиса, а затем, как только рост прекратился, стабилизировались и уровни бедности.

И последний регион, Восточная Европа и Центральная Азия (регион включает бывший Советский Союз), имел очень низкие уровни бедности в 1970 г. Однако с 1989 по 2000 г. уровни бедности возросли в 10 раз. Такой резкий рост уровней бедности в этом регионе можно объяснить двумя причинами. Одна из них заключается в том, что после крушения коммунистической системы резко возросло неравенство доходов населения. Вторым фактором можно назвать вялый совокупный рост в этих странах. Отметим, впрочем, что средние уровни дохода в этих странах остаются очень высокими относительно уровней Африки и даже Азии. Таким образом, даже после снижения среднего значения дохода и роста его дисперсии уровни бедности в странах Восточной Европы и Центральной Азии остаются относительно низкими.

В.3. Эмпирические закономерности экономического роста

Kaldor (1963) перечислил несколько эмпирических закономерностей, которые, по его мнению, сопутствуют процессу экономического роста.

1. Выпуск на душу населения растет со временем, а его темп прироста не уменьшается.
2. Физический капитал на одного работника растет со временем.
3. Норма доходности капитала примерно постоянна.
4. Отношение физического капитала к выпуску примерно постоянно.
5. Доли труда и физического капитала в национальном доходе примерно постоянны.
6. Темп роста выпуска на одного работника варьирует в значительной степени в различных странах[1)].

[1)]Kuznets (1973, 1981) выявляет другие особенности современного экономического роста. Он отмечает высокую скорость структурных изменений, которые включают переход от сельского хозяйства к промышленности и от промышленности к сфере

Шестой факт согласуется с реальными данными по странам, которые мы уже обсудили. Факты 1, 2, 4 и 5 кажутся вполне согласующимися с долгосрочными данными для развитых в настоящее время стран. Постоянство долгосрочного отношения физического капитала к ВВП в Японии, Германии, Италии, Великобритании и США обсуждается в работе Maddison (1982, гл. 3). В долгосрочном постоянстве долей производственных факторов в конечном продукте в США можно убедиться, изучив работы Denison (1974, Приложение J) и Jorgenson, Gollop, and Fraumeni (1987, табл. 9.3). Young (1995) показывает, что с начала или с середины 1960-х по 1990-е гг. доли производственных факторов достаточно стабильны в четырех восточноазиатских странах — Гонконге, Сингапуре, Южной Корее и Тайване. Исследования данных по семи развитым странам — Канаде, Франции, Германии, Италии, Японии, Нидерландам и Великобритании — показывают, что доли производственных факторов в этих странах близки к соответствующим значениям в США (Cristensen, Cummings, and Jorgenson, 1980, и Dougherty, 1991). Впрочем, в некоторых латиноамериканских странах, рассмотренных Elias (1990), доли капитала стремятся к значениям более высоким, нежели в США.

Заявленный Калдором третий факт относительно стабильности реальных норм доходности, по всей видимости, возник из опыта Великобритании; в этом случае реальная процентная ставка действительно вроде бы не имеет долгосрочного тренда (см. Barro, 1987, рис. 4 и 7). Однако долгосрочные данные для США наводят на мысль о незначительном снижении реальных процентных ставок (Barro, 1997, табл. 11.1). Реальные нормы доходности в некоторых быстроразвивающихся странах, таких как Южная Корея и Сингапур, значительно более высоки, чем в США, но снижались со временем (Young, 1995). Итак, похоже на то, что гипотезу Калдора о примерном постоянстве реальной нормы доходности следует заменить на предположение о том, что доходности снижаются в некоторых границах по мере развития экономики.

Мы можем использовать данные, представленные в гл. 12, для оценки долгосрочных тенденций темпов прироста реального ВВП на душу

услуг. Этот процесс влечет за собой урбанизацию, переход от домашней работы к статусу служащего и растущую роль формального образования. Он также утверждает, что современный рост приводит к усилению роли внешней торговли и что технологический прогресс уменьшает значимость природных ресурсов. И наконец, он обращает внимание на рост значения правительства: «Размах современного экономического роста поставил больший акцент на важности и необходимости организации суверенных национальных структур... Суверенная государственная структура имеет решающее значение как генератор правил ведения экономической деятельности; как рефери... и как поставщик инфраструктуры» (1981, с. 59).

Таблица В.1

Долгосрочные темпы прироста для развитых в настоящее время стран

Период	Темп прироста (% в год)	Число стран
1830–1850	0.9	10
1850–1870	1.2	11
1850–1890	1.2	13
1890–1910	1.5	14
1910–1930	1.3	16
1930–1950	1.4	16
1950–1970	3.7	16
1970–1990	2.2	16

Источник. Таблица 12.10.
Примечание. Здесь темпы прироста – средние арифметические значения по странам с имеющимися данными.

населения. В табл. 12.10 и 12.11 содержатся взятые из Angus Maddison количественные данные для 31 страны за периоды, покрывающие почти два столетия. Эти цифры фактически исчерпывают всю имеющуюся информацию относительно роста за очень длинные интервалы времени.

В табл. 12.10 представлены данные по 16 развитым в настоящее время странам, основным странам Европы плюс США, Канада и Австралия. Из этих данных следует, что средний темп прироста в течение примерно столетия составлял 1,9% в год, со значениями за 20-летние периоды, представленными в табл. В.1. Эти цифры вполне согласуются с заявлением Калдора, что темп роста реального ВВП на душу населения в масштабах столетий не снижается: более того, в периоды после Второй мировой войны темпы прироста поднялись существенно выше долгосрочного среднего. Снижение темпа прироста с 3,7% в год в периоде 1950–1970 гг. до 2.2% в год в периоде 1970–1990 гг. соответствует часто обсуждавшемуся явлению *снижения производительности.* Впрочем, из таблицы видно, что темп прироста за период 1970–1990 гг. все равно весьма высок относительно всей предыдущей истории.

В табл. 12.11 представлены данные по 15 слаборазвитым в настоящее время странам Азии и Латинской Америки. В этом случае среднее значение долгосрочного темпа прироста в период с 1900 по 1987 г. составляет 1,4% в год и имеет представленную в табл. В.2 разбивку значений темпов прироста на четыре субпериода. В период после Второй мировой войны (в данном случае 1950–1987 гг.) темпы прироста были существенно выше долгосрочного среднего.

Таблица В.2

Долгосрочные темпы прироста для слаборазвитых в настоящее время стран

Период	Темп прироста (% в год)	Число стран
1900–1913	1,2	15
1913–1950	0,4	15
1950–1973	2,6	15
1973–1987	2,4	15

Источник. Таблица 12.11.

Примечание. Здесь темпы прироста — средние арифметические значения по странам с имеющимися данными.

На рис. В.1–В.3 информация по динамике реального ВВП на душу населения представлена для более чем 100 стран с 1960 по 2000 г. Используя эти данные, расширим множество специфических фактов, отмеченных Калдором. Одной из закономерностей здесь является существенная некоррелированность темпа прироста ВВП на душу населения в период с 1960 по 2000 г. (см. гл. 12) с уровнем ВВП на душу населения в 1960 г. (см. гл. 12). Используя терминологию, которая будет введена в гл. 1, мы будем называть тенденцию бедных расти быстрее богатых β-сходимостью. Как видим, простое соотнесение темпов роста с начальными состояниями экономик для широкого круга стран не выявляет β-сходимости. Однако такой вид сходимости наблюдается в случае, если мы ограничим свое внимание более однородными экономиками, такими как штаты США, регионы нескольких европейских стран и префектуры Японии (см. Barro and Sala-i-Martin, 1991, 1992a и 1992b, и гл. 11). В этих случаях старт с более бедных позиций приводит к более быстрому росту. Такое поведение экономик также следует и из межстрановых данных, если выборка ограничена относительно однородными, процветающими в настоящее время странами, такими как страны ОЭСР (см. Baumol, 1986; DeLong, 1988).

В гл. 1 утверждается, что *условная β-сходимость* имеет место в случае, если подушевой темп прироста ВВП является убывающей функцией начального уровня подушевого ВВП (при фиксированных других переменных, таких как начальный уровень человеческого капитала, характер правительственной политики, склонности к сбережению и наличию детей, и т. п.). Можно привести пример, представляющий собой выборку из достаточно широкого круга стран (настолько широкого, чтобы абсолютной β-сходимости не наблюдалось), который четко обнаруживает условную β-сходимость (см. Barro, 1991; Barro and Sala-i-Martin, 1992a; and Mankiw, Romer, and Weil, 1992). Впрочем, скорость сходимости в этом примере — всего около 2% в год. Следовательно, потребуется 35 лет для того, чтобы экономика закрыла половину разрыва между своим начальным значением ВВП на душу населения и его долгосрочным или целевым уровнем. (Целевой уровень обычно еще и растет со временем.)

Результаты, представленные в гл. 12, показывают, что ряд переменных существенно связан с темпом прироста ВВП на душу населения, если начальный уровень ВВП на душу населения фиксирован. Так, например, рост зависит положительно от начального количества человеческого капитала, измеряемого уровнем образования и здоровья, положительно от поддержки нормы права и отношения объема инвестиций к ВВП и отрицательно от коэффициентов фертильности и величины отношения правительственных расходов на потребление к ВВП.

Используя долгосрочные данные из Maddison (1992), где для нескольких стран приведены данные по отношению валового внутреннего инвестирования к ВВП и валового национального сбережения к ВВП (сумма внутренних и иностранных инвестиций), мы можем определить закономерности в нормах инвестирования и сбережения. В табл. В.3 приведены средние значения норм инвестирования и сбережения по двадцатилетним интервалам времени для восьми стран, по которым имеется достаточно данных для долгосрочного анализа. Из таблицы видно, что для каждой страны временные траектории внутреннего инвестирования и национального сбережения обычно совпадают. Однако внутреннее инвестирование было существенно больше, чем национальное сбережение (т. е. заимствование за рубежом было бо́льшим) в следующих странах: в Австралии и Канаде в период с 1870 по 1929 гг., в Японии в период с 1890 по 1909 г., в Великобритании в период с 1930 по 1949 г., в Южной Корее в период с 1950 по 1969 г. (в действительности, до начала 1980-х). Национальное сбережение было значительно выше внутреннего инвестирования (т. е. одалживание за границу было значительным) в Великобритании в период с 1870 по 1929 г. и в США в период с 1930 по 1949 г.

Относительно США из таблицы можно сделать примечательное наблюдение о стабильности норм внутреннего инвестирования и национального сбережения во времени. Единственное исключение — относительно низкие значения в период с 1930 по 1949 г. — период Великой депрессии и Второй мировой войны. Впрочем, США вообще стоят особняком в плане стабильности их норм инвестирования и сбережения; данные по остальным семи странам показывают отчетливый рост этих

Таблица В.3

Отношения валового внутреннего инвестирования и валового национального сбережения к ВВП (%)

Период	Австралия	Канада	Франция	Индия	Япония	Южная Корея	Англия	США
				1. Валовое внутреннее инвестирование				
1870–1889	16,5	16,0	12,8	—	—	—	9,3	19,8
1890–1909	13,7	17,2	14,0	—	14,0	-	9,4	17,9
1910–1929	17,4	19,8	·	6,4	16,6	5,1[a]	6,7	17,2
1930–1949	13,3	13,1		8,4	20,5	·	8,1	12,7
1950–1969	26,3	23,8	22,6	14,0	31,8	16,3[b]	17,2	18,9
1970–1989	24,9	22,8	23,2	20,2	31,9	29,1	18,2	18,7
				2. Валовое национальное сбережение				
1870–1889	11,2	9,1	12,8	—		-	13,9	19,1
1890–1909	12,2	11,5	14,9		12,0	·	13,1	18,4
1910–1929	13,6	16,0	—	6,4	17,1	2,38	9,6	18,9
1930–1949	13,0	15,6		7,7	19,8	—	4,8	14,1
1950–1969	24,0	22,3	22,8	12,2	32,1	5,9[b]	17,7	19,6
1970–1989	22,9	22,1	23,4	19,4	33,7	26,2	19,4	18,5

Источник. Maddison (1992).

[a] 1911–1929

[b] 1951–1969

норм со временем. В частности, нормы во всех случаях существенно больше в период 1950–1989 гг., чем до Второй мировой войны. Таким образом, исходя из этих долгосрочных данных, получается, что отношения внутреннего инвестирования и национального дохода к ВВП стремятся расти с развитием экономики, по крайней мере в пределах некоторого диапазона. Эта закономерность в данных будет проигнорирована в модели Солоу–Свэна из гл. 1, в которой норма сбережения предполагается постоянной.

Данные по странам также обнаруживают некоторые закономерности относительно коэффициентов фертильности и, следовательно, темпов роста населения. Для большинства стран коэффициент фертильности склонен к уменьшению по мере роста ВВП на душу населения. Однако для беднейших стран коэффициент фертильности может расти вместе с ВВП на душу населения, как и предсказывал Malthus (1798). Еще более тесная связь существует между уровнем образования и фертильностью. За исключением передовых стран, уровень женского образования и коэффициент фертильности имеют обратную зависимость между собой, в то время как уровень мужского образования связан с коэффициентом фертильности прямым образом. В результате чистое воздействие этих сил на экономику приводит к некоторому падению коэффициента фертильности (и темпа роста населения) по мере развития экономики. Так что предположение об экзогенности и постоянстве темпа роста населения (что имеет место в модели Солоу–Свэна) противоречит эмпирическим данным.

В.4. Краткая история современной теории роста

Классики экономики Adam Smith (1776), David Ricardo (1817) и Thomas Malthus (1798), а также значительно позже Frank Ramsey (1928), Allyn Young (1928), Frank Knight (1944) и Joseph Schumpeter (1934) предложили множество идей, ставших основой современных теорий экономического роста. Среди исследованных ими вопросов можно отметить базовые подходы к изучению поведения в условиях конкуренции и равновесной динамики, роль убывающей отдачи ресурсов и ее связи с накоплением физического и человеческого капиталов, взаимное влияние дохода на душу населения и темпа прироста населения, последствия технологического прогресса в формах роста специализации труда и разработки новых продуктов и методов их производства, а также роль монополистической власти как стимулятора технологического прогресса.

Основная часть нашего исследования начинается именно с этих уже установленных «строительных блоков», а затем фокусируется на дальнейших работах в рамках неоклассического направления, развиваемого с 1950-х гг. Мы используем неоклассическую методологию и язык, опираемся на такие концепции, как агрегированные капиталы, агрегированные производственные функции и функции полезности для репрезентативного потребителя (у которого обычно бесконечные временные горизонты). Мы также используем современные математические методы динамической оптимизации и дифференциальных уравнений. Эти методы, описанные в Приложении в конце книги, в нестоящее время знакомы всем студентам-первокурсникам экономической специализации.

С хронологической точки зрения, отправным пунктом современной теории роста является классическая статья Ramsey (1928) - работа, которая обогнала свое время на несколько десятилетий. Трактовка Рамсеем задачи динамической оптимизации домохозяйства выходит за пределы простого приложения к теории роста; трудно даже обсуждать теорию потребления, ценообразование на рынке ценных бумаг или теорию бизнес-циклов без ссылки на условия оптимальности, которые представил Рамсей (и Fisher, 1930). Межвременная функция полезности Рамсея сегодня также широко используется, как и производственная функция Кобба—Дугласа. Однако до 1960-х гг. в экономической деятельности подход Рамсея не использовался и даже не принимался.

После работ Рамсея до конца 1950-х в рассматриваемой тематике было затишье, и только Harrod (1939) и Domar (1946) попытались совместить кейнсианский анализ с элементами экономического роста. Они использовали производственные функции с небольшой заменяемостью факторов, чтобы утверждать, что капиталистическая система по своей сути нестабильна. Так как они писали свои работы во время или сразу после Великой депрессии, то их доказательства были восприняты одобрительно большинством экономистов. Эти работы положили начало значительному количеству исследований в свое время, но мало что из этого анализа играет роль в сегодняшней научной мысли.

Следующие, и более важные, результаты были получены Solow (1956) и Swan (1956). Ключевым аспектом модели Солоу—Свэна является неоклассическая форма производственной функции, т. е. такая ее форма, которая предполагает постоянную эффективность производства с ростом его масштаба, убывающую отдачу каждого ресурса и положительную и гладкую эластичность замены ресурсов. Эта производственная функция была объединена со стандартным предположением о постоянстве нормы сбережения в целях создания предельно простой модели экономики общего равновесия.

Один важный прогноз, который начали активно использовать в качестве эмпирической гипотезы совсем недавно, – условная сходимость. Чем ниже начальный уровень ВВП на душу населения относительно долгосрочного или стационарного уровня, тем больше темп роста. Это свойство выводится из предположения об убывающей отдаче капитала: экономики, в которых текущий уровень капитала на одного работника недостаточен (относительно долгосрочного уровня), имеют склонность к большим темпам роста и большим нормам прибыли. Сходимость условная, так как стационарные уровни капитала и выпуска на одного работника зависят, согласно модели Солоу–Свэна, от нормы сбережения, темпа роста населения и состояния производственной функции – характеристик, которые могут варьироваться от одной экономики к другой. Недавние эмпирические исследования показывают, что нам следует включить дополнительные факторы, объясняющие межстрановые различия в темпах развития, в особенности обратить внимание на различность правительственных политик и начальных объемов человеческого капитала. Впрочем, важно отметить, что концепция условной сходимости (основное свойство модели Солоу–Свэна) имеет значительную объясняющую силу относительно природы экономического роста среди разных стран и регионов.

Другим следствием модели Солоу—Свэна является то, что в отсутствие продолжающихся улучшений в технологии рост на душу населения должен, в конце концов, прекратиться. Это следствие, которое подобно такому же у Мальтуса и Риккардо, происходит из предположения об убывающей отдаче капитала. Однако мы уже видели, что положительные темпы роста на душу населения могут продолжаться столетиями и что эти темпы роста не имеют четкой тенденции к снижению.

Теоретики неоклассического роста конца 1950–1960-х гг. осознавали этот модельный дефект и обычно исправляли его предположением, что технологический прогресс происходит экзогенным образом. Это позволяет сохранить следствие модели об условной сходимости при наличии положительного, возможно постоянного, долгосрочного темпа роста на душу населения. Однако очевидным недостатком такого подхода является то, что долгосрочный темп роста на душу населения полностью определяется внешним, относительно модели, элементом – коэффициентом технологического прогресса. (Долгосрочный темп роста уровня выпуска зависит также и от темпа роста населения, т. е. еще одного экзогенного в стандартной теории элемента.) В итоге мы имеем модель роста, которая объясняет все, кроме собственно природы долгосрочного роста, что совершенно неудовлетворительно.

Cass (1956) и Koopmans (1965) встроили анализ Рамсея оптимального потребления в неоклассическую модель роста, введя, таким образом, эндогенное детерминирование нормы сбережения. Это расширение модели приводит к более интересной переходной динамике, но сохраняет гипотезу об условной сходимости. Кроме того, эндогенность сбережения не ликвидирует зависимость долгосрочного темпа роста на душу населения от экзогенного технологического прогресса.

В неоклассической модели роста версии Касса–Купманса равновесие может быть поддержано децентрализованной, основанной на конкуренции структурой, в которой факторы производства (труд и капитал) оплачиваются своими предельными продуктами. Валовой доход в таком случае исчерпывает весь валовой продукт в силу предположения, что производственная функция обладает свойством постоянной эффективности с ростом масштаба производства. Более того, децентрализованные решения являются оптимальными по Парето.

Включить теорию технологического прогресса в неоклассическую схему достаточно трудно, так как нельзя сохранить стандартные предположения о конкуренции. Технологический прогресс подразумевает создание новых идей, которые частично открыты и, следовательно, имеют свойства неконкурентных товаров. При заданной технологии (т. е. при заданном состоянии знания) вполне разумно считать, что эффективность стандартных факторов производства, таких как труд, капитал и земля, с ростом масштаба производства постоянна. Другими словами, при заданном уровне знания того, как производить, существует возможность копировать фирму 1 : 1, с тем же объемом труда, капитала и земли и получить вдвое больший выпуск. Но если открытые идеи используются как производственные факторы, то эффективность с ростом масштаба производства растет. Такая растущая эффективность вступает в противоречие с понятием совершенной конкуренции. В частности, компенсация за старые открытые идеи, в соответствии с их текущими предельными затратами на производство (нулевыми), недостаточна для поддержки исследовательских усилий, приводящих к созданию новых идей.

Arrow (1962) и Sheshinski (1967) построили модели, в которых идеи являются незапланированным побочным продуктом производства или инвестирования, т. е. они описали механизм «обучения на собственном опыте». В этих моделях открытие каждого человека немедленно становится доступным всей экономике в рамках мгновенного диффузионного процесса, который технически может быть вполне реализуем в силу открытости знания. Позже Romer (1986) показал, что для определения равновесного темпа технологического прогресса конкурентную структуру модели можно сохранить, но тогда итоговый темп роста, вообще говоря, не будет оптимальным по Парето. То есть, обобщая, если открытия частично зависят от целевых научно-исследовательских усилий и если инновации индивидуумов доходят до других производителей постепенно, то конкурентная структура модели разрушается. При таких реалистичных установках децентрализованная теория технологического прогресса требует фундаментальных изменений в неоклассической модели роста, основанных на включении в исследование описания несовершенной конкуренции[1]. Развитие теории в этом направлении было сделано только в конце 1980-х гг. в работах Romer (1987, 1990).

В работах Cass (1956) и Koopmans (1965) завершено построение базовой неоклассической модели роста[2]. Впоследствии теория роста становилась слишком уж технической и постепенно теряла связь с эмпирическими приложениями. Напротив, экономисты — специалисты по экономическому развитию, которые нуждались в советах относительно слаборазвитых стран, сохранили прикладную направленность своих исследований и стремились использовать модели, которые были технически несложные, но эмпирически полезные. В результате области экономического развития и экономического роста разошлись, так что в итоге стали практически полностью изолированными.

Возможно, именно вследствие этой неудачи относительно эмпирического соответствия накануне революции рациональных ожиданий и нефтяного кризиса в начале 1970-х гг. теория роста как область активных исследований, по существу, умерла. Затем около 15 лет макроэкономические исследования были сфокусированы на краткосрочных колебаниях. Основные результаты здесь – это включение рациональных ожиданий в модели бизнес-циклов, улучшенные подходы к оценке политического влияния, приложение методов общего равновесия к теории реальных бизнес-циклов.

В конце 1980-х гг. благодаря работам Romer (1986) и Lucas (1988) возник новый интерес к исследованию экономического роста. Причиной

[1] В рамках другого подхода предполагается, что все открытые исследования классические неконкурентные товары финансируются правительством через принудительные налоги; см. Shell (1967).

[2] Впрочем, в недавних работах показано, как можно расширить неоклассическую модель роста, допустив возможность однородности домохозяйств (Caselli and Ventura, 2000) и введя изменяющиеся со временем предпочтения (Barro, 1999).

этого послужило наблюдение (точнее, припоминание) того факта, что определение детерминантов долгосрочного экономического роста является гораздо более важной задачей, нежели механика бизнес-циклов или антициклические эффекты монетарной или фискальной политики. Но понимание значимости долгосрочного роста было лишь первым шагом: для того чтобы идти дальше, следовало избавиться от смирительной рубашки неоклассической модели роста, в которой долгосрочный темп роста на душу населения искусственно поддерживался коэффициентом экзогенного технологического прогресса. Таким образом, теми или иными способами в последних работах долгосрочный темп роста определяется внутри самой модели; отсюда и название *«модели эндогенного роста»*.

Первая волна нового исследования - Romer (1986), Lucas (1988), Rebelo (1991) — основывалась на работах Arrow (1962), Sheshinski (1967), и Uzawa (1965) и по сути не представляла собой какую-либо теорию технологического прогресса. В этих моделях рост мог продолжаться безгранично, так как доходность инвестирования в широкий класс капитальных продуктов (включая человеческий капитал) не обязательно уменьшается по мере роста экономики. (Эта идея была выдвинута еще в работе Knight, 1944.) Распространение знаний среди производителей и дополнительная выгода от человеческого капитала - части этого процесса, так как они помогают избежать склонности к убыванию отдачи аккумулирования капитала.

Включение научно-исследовательских теорий и несовершенной конкуренции в структуру моделей роста началось с Romer (1987, 1990) и затем пополнилось значительными результатами благодаря работам Aghion and Howitt (1992) и Grossman and Helpman (1991, гл. 3 и 4). В этих моделях источником технологического прогресса является целевая научно-исследовательская деятельность, и эта деятельность вознаграждается за счет получения монополистических возможностей в некоторой форме. Если тенденции к исчерпанию идей в экономике нет, то темп прироста может оставаться положительным в течение длительного срока. Однако этот темп роста и лежащий в его основе объем инновационной деятельности стремятся к ситуации, неоптимальной по Парето, что связано с искажениями, вносимыми созданием новых продуктов и методов производства. В структурах этих моделей долгосрочный темп роста зависит от действий правительства, таких как налогообложение, поддержка закона и порядка, создание инфраструктур, защита прав на интеллектуальную собственность, регулирование международной торговли, финансовых рынков и других аспектов экономики. Так что правительство имеет большой потенциал влияния на долгосрочный темп роста, причем как в положительном, так и в отрицательном смысле. Эта исследовательская программа проводилась на протяжении 1990-х гг. и использовалась, например, для выявления эффектов масштаба в процессах роста (Jones, 1999), для анализа влияния роста труда или капитала на технологический прогресс (Acemoglu, 2002) и определения роли конкуренции в процессе роста (Aghion et al., 2001, 2002).

В последних работах рассматриваются также и модели диффузии технологий. В то время как анализ влияния открытия на экономику имеет отношение к коэффициенту технологического прогресса в лидирующих экономиках, изучение диффузии основано на представлении, что следующие за лидерами экономики разделяют часть прогресса путем копирования. Так как копирование обычно дешевле, чем инновация, то из диффузионных моделей следует такая же форма условной сходимости, что и в неоклассической модели роста. В некоторых недавних эмпирических работах была подтверждена важность технологической диффузии в процессе сходимости.

Другим ключевым экзогенным параметром в неоклассической модели роста является темп прироста населения. Чем больше темп прироста населения, тем меньше стационарный уровень капитала и выпуска на одного работника, и следовательно, тем меньше темп прироста на душу населения при заданном начальном уровне выпуска на душу населения. Надо сказать, что в стандартной модели не рассматривается влияние доходов на душу населения и ставок заработной платы на рост населения (об этом влиянии упоминал еще Мальтус), а также не учитывается необходимость выделения части ресурсов на воспитание детей. В другом направлении недавних исследований рост населения моделируется эндогенно посредством включения элементов демографического анализа в неоклассическую модель. Выводы, полученные в этих работах, вполне согласуются с эмпирическими наблюдениями, так, например, коэффициенты фертильности имеют склонность к уменьшению при снижении дохода на душу населения для большого числа исследованных регионов, однако могут увеличиваться с ростом дохода на душу населения для беднейших стран. Также есть работы, посвященные моделированию предложения труда эндогенным образом в контексте теории роста, в которых рассматриваются вопросы миграции и выбора между работой и досугом.

Существенное различие между теорией роста в 1960-х и в 1990-х гг. заключается в том, что в последних исследованиях наибольшее внимание уделяется эмпирическим следствиям и соответствию теории реальным данным. Однако в большинстве этих прикладных работ рассматриваются приложения эмпирических гипотез из старой теории, в особенности речь идет о таком следствии неоклассической модели, как условная сходимость. Построение статистических регрессий на базе неоклассических моделей роста для изучения влияния различных макроэкономических показателей на рост несомненно стало неотъемлемой частью исследований в 1990-х гг. Одна достаточно интересная недавняя разработка в этой области, которую мы рассмотрим в гл. 12, имеет отношение к определению робастности оценок такого вида. Другие эмпирические исследования имеют более непосредственное отношение к новейшим теориям эндогенного роста, включая изучение роли возрастающей отдачи, научно-исследовательской деятельности, человеческого капитала, диффузии технологии.

В.5. Особенности второго издания

Второе издание данной книги претерпело существенные изменения по всему своему содержанию. Упомянем несколько наиболее значимых нововведений. В данном введении мы уже описали новые подходы к оценке распределения дохода индивидуумов по всему миру с 1970 по 2000 г.

Глава 1 сделана более легкой и доступной. Мы добавили раздел про рынки в модели Солоу–Свэна. Мы также обсудили природу теоретической неудовлетворенности неоклассической теорией, вызванной опасностью построения моделей эндогенного роста с несовершенной конкуренцией.

В главе 2 рассмотрено расширение подхода, основанного на неоклассической модели роста, в котором учитывается однородность домохозяйств. В главе предложен улучшенный способ исключения траектории «недосбережения», а также вывода и использования условий трансверсальности. Мы также включили в рассмотрение анализ моделей с непостоянными ставками временного предпочтения.

В главе 3 содержатся различные обобщения базовой неоклассической модели роста, включая расширенную трактовку правительственного сектора. Конструкция предусматривает различные формы налоговых ставок, а также четко различает налоги на доход с капитала и налоги на труд или потребление.

В главах 6 и 7 обсуждаются модели эндогенного технологического прогресса. Новый материал содержит исследование роли и происхождения эффектов масштаба в этих моделях. В главе 6 мы касаемся по большей части негативных взглядов Томаса Джефферсона на патентование как механизм мотивации изобретений. В главе 7 представлен усовершенствованный анализ моделей, в которых технологические достижения принимают форму качественных улучшений. В частности, мы улучшили описание взаимодействия между промышленными лидерами и аутсайдерами и, следовательно, усилили понимание роли внешней конкуренции в процессе роста.

В главе 8 описана модель технологической диффузии. Базовая модель улучшена, и теоретические результаты связаны с последними эмпирическими наблюдениями.

В главе 9 представлено расширенное толкование эндогенного роста населения. В главе 10 содержится улучшенный анализ калькуляции роста, включая его связь с теориями эндогенного технологического прогресса. В главе 11, в которой представлены ряды региональных данных, анализ по штатам США продлен до 2000 г.

В главе 12 мы включили обновленные регрессии роста по странам, используя новые ряды данных Саммерса Хестона, Penn World Tables версии 6.1, в которых имеются данные до 2000 г. включительно (см. Heston, Summers, and Aten, 2002). В этой главе мы также обсуждаем различные выводы относительно достоверности оценок, полученных из регрессий для разных стран, включая возможные способы оценки робастности результатов.

1 Модели роста с экзогенной нормой сбережения (модель Солоу—Свэна)

1.1. Базовая структура

Первый вопрос, который мы рассмотрим в этой главе, формулируется следующим образом: возможно ли, чтобы экономика всегда имела положительные темпы прироста просто за счет сбережения и инвестирования в основной капитал? Анализ данных за 1960–2000 гг. по странам показывает, что средний ежегодный темп прироста реального ВВП на душу населения для 112 стран составлял 1,8%, а среднее отношение валового инвестирования к ВВП – 16%[1]. Однако для 38 африканских стран, расположенных южнее Сахары, средний темп прироста был равен только лишь 0,6%, а средняя норма инвестирования – 10%. Девять восточноазиатских экономик имели средний темп прироста 4,9% и среднюю норму инвестирования 25%. Из этих наблюдений вытекает, что между темпом прироста и нормой инвестирования имеет место положительная зависимость. Впрочем, радость по этому поводу преждевременна: следует заметить, что для 23 стран ОЭСР средний темп прироста составил 2,7% — меньше, чем для восточноазиатских экономик – несмотря на то что средняя норма инвестирования была 24%, т. е. примерно такая же, как и в Восточной Азии. Таким образом, хотя склонность к инвестированию не объясняет всего наблюдаемого роста, тем не менее есть смысл в качестве отправной точки попытаться связать темп прироста экономики с ее готовностью сберегать или инвестировать. В этом смысле было бы полезно начать с простой модели, в которой единственно возможной причиной роста на душу населения является накопление физического капитала.

[1] Эти данные (из Penn World Tables версии 6.1) описаны в работах Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002). Они обсуждаются в гл. 12.

Большинство из рассматриваемых в данной книге моделей роста имеют одинаковую структуру общего равновесия. Эта базовая структура описывается следующим образом. Во-первых, домохозяйства (или семьи) владеют ресурсами и активами экономики, включая права собственности в фирмах, и выбирают, какую часть своего дохода потребить, а какую сберечь. Каждое домохозяйство делает выбор, сколько иметь детей, вливаться ли в ряды рабочей силы и как много работать. Во-вторых, фирмы нанимают производственные ресурсы, такие как капитал и труд, и используют их в производстве товаров, которые они продают домохозяйствам или другим фирмам. Фирмы имеют доступ к технологии, которая позволяет им трансформировать затрачиваемые ресурсы в выпуск. В-третьих, существуют рынки, на которых фирмы продают товары домохозяйствам или другим фирмам и на которых домохозяйства продают ресурсы фирмам. Объемы спроса и предложения определяют относительные цены ресурсов и произведенных товаров.

Хотя эта общая структура применима ко всем моделям роста, нам удобнее упростить ее посредством отказа от рассмотрения рынков и фирм. Мы можем представить себе обобщенную единицу — домохозяйство-производитель (как Робинзон Крузо), которая владеет ресурсами, а также управляет технологией, которая трансформирует ресурсы в выпуск. В реальном мире для производства чего-либо требуется множество различных ресурсов, но мы агрегируем их все в три: физический капитал $K(t)$, труд $L(t)$ и знание $T(t)$. Производственная функция принимает вид

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)], \tag{1.1}$$

где $Y(t)$ — поток выпуска продукции, произведенный в период времени t.

Капитал $K(t)$ представляет собой физические ресурсы длительного пользования, такие как машины, строения, карандаши и т. п. Эти товары были произведены когда-то в прошлом посредством производственной функции, задаваемой уравнением (1.1). Важно отметить, что указанные ресурсы не могут использоваться несколькими производителями одновременно. Эта последнее свойство называется *конкурентностью* — товар называется *конкурентным*, если он не может быть использован несколькими потребителями одновременно.

Второй ресурс в производственной функции — труд $L(t)$ — представляет собой ресурсы, ассоциированные с человеческим телом. Этот ресурс состоит из числа работников и количества времени, которое они работают, а также из их физической силы, навыков и здоровья. Труд также является *конкурентным* ресурсом, так как работник не может работать на одной работе, не уменьшив времени, доступного для других работ.

Третий ресурс — это уровень знания или технологии $T(t)$. Работники и машины не могут производить что-либо без *формулы* или *проекта*, в котором указано, как это делается. Этот проект и есть то, что мы называем *знание* или *технология*. Технология может улучшаться со временем — например, одно и то же количество капитала и труда приносит больший объем выпуска в 2000 г., нежели в 1900-м, так как технология, используемая в 2000-м, лучше. Технология может также различаться от страны к стране — например, одно и то же количество капитала и труда приносит больший объем выпуска в Японии, нежели в Замбии, так как технология, доступная в Японии, лучше. Важная отличительная особенность знания — то, что оно является *неконкурентным товаром:* два или более производителей могут использовать одну и ту же формулу одновременно[1]. Следовательно, два производителя, желающие произвести Y единиц выпуска, должны использовать разные количества машин и работников, но они могут использовать одну формулу. Оказывается, это свойство неконкурентности приводит к важным следствиям о взаимосвязи между технологией и экономическим ростом[2].

---

[1]Концепции *неконкурентности* и *общественного товара* обычно путают в литературе. *Общественные товары* являются *неконкурентными* (они могут использоваться многими людьми одновременно), но также и *общедоступными* (т. е. технически или официально невозможно предотвратить использование таких товаров всеми желающими). Ключевой характеристикой знания является именно неконкурентность. Некоторые формулы или проекты являются общедоступными (например, вычислительные формулы, на которые нет прав собственности), в то время как другие являются «исключаемыми», т. е. необщедоступными (например, рецепты, используемые при производстве фармацевтической продукции, пока они защищены патентами).

Эти различия в понятиях хорошо понимал Томас Джефферсон, который писал Исааку Манферсону 13 августа 1813 г.: «Допустим, природа создала некоторую вещь, менее доступную к пониманию, чем иные вещи со свойством необщедоступности, тогда это есть деятельность разумной силы, называемой идеей, которой бы некоторый индивидуум мог бы владеть единолично, поскольку она находится у него; но в момент разглашения она переходит во владение всех и каждого и получатель не может оградить себя от этого владения. Ее особенностью также является то, что никто не владеет ею частично, из-за того что любой другой владеет ею полностью. Тот, кто получает идею от меня, принимает понимание идеи в себя, никак не убавляя моего понимания» (доступна в Интернете в архиве публикаций Томаса Джефферсона в библиотеке Конгресса, по адресу lcweb2.loc.gov/ammem/mtjhtml/mtjhome.html).

[2]Правительственные политики, зависящие от законов и институтов, также влияют на экономику. Так как основные общественные институты являются неконкурентными, то мы можем включить эти факторы в $T(t)$ в производственной функции.

Пусть производственная технология является односекторной и выпуск в ней представляет собой однородный товар, который может быть потреблен $C(t)$ или инвестирован $I(t)$. Инвестирование используется для создания новых единиц физического капитала $K(t)$ или замены старого, выбывшего капитала. Можно думать об односекторной производственной технологии как о животноводческой ферме, на которой животные могут быть либо предназначены в пищу, либо использованы в качестве ресурсов для производства новых животных. В литературе, посвященной экономическому росту, используются более изощренные примеры — с такими терминами, как *шпатлевка* или *эктоплазма*, — отражающие легкость преобразования капитальных товаров в потребительские и обратно.

В данной главе будем считать экономику закрытой: домохозяйства не могут покупать импортные товары или активы и не могут продавать отечественные товары или активы заграницу. (Открытая экономика будет рассмотрена в гл. 3.) Мы также начнем с предположения об отсутствии правительственных закупок товаров и услуг. (Правительственные закупки рассмотрены в гл. 4.) В закрытой экономике без правительственных расходов весь выпуск идет на потребление или валовое инвестирование[1)], так что $Y(t) = C(t) + I(t)$. Вычитая $C(t)$ из обеих частей этого уравнения и вспоминая, что выпуск равен доходу, получаем, что в такой простой экономике объем сбережений, $S(t) \equiv Y(t) - C(t)$, равен инвестированному объему $I(t)$.

Пусть $s(\cdot)$ — доля выпуска, которая сберегается (норма сбережения); $1 - s(\cdot)$ — доля выпуска, которая потребляется. Рациональные домохозяйства выбирают норму сбережения исходя из сравнения затрат и выгод от потребления сегодня, а не завтра; это сравнение базируется на параметрах предпочтения и переменных, которые описывают состояние экономики, таких как уровень благосостояния и процентная ставка. В гл. 2 мы отдельно моделируем принятие такого решения, находим, что $s(\cdot)$ является сложной функцией состояния экономики, функцией, для которой не существует решения в замкнутой форме. Для облегчения анализа в этой, первой главе предположим, что $s(\cdot)$ задана экзогенно.

[1)] В открытой экономике с правительственными расходами условие записывается следующим образом:

$$Y(t) - r \cdot D(t) = C(t) + I(t) + G(t) + NX(t),$$

где $D(t)$ — международный долг; r — международная реальная процентная ставка; $G(t)$ — правительственные расходы; $NX(t)$ — чистый экспорт. В данной главе предполагается отсутствие правительственных расходов, так что $G(t) = 0$ и экономика закрыта, $D(t) = NX(t) = 0$.

Простейшей функцией, которая была предложена Solow (1956) и Swan (1956) в их классических статьях, является константа: $0 \leqslant s(\cdot) = s \leqslant 1$. Мы будем использовать именно эту функцию в данной главе, так как в этом случае весьма простым образом будет получено большое число результатов. Исходя из того, что сбережение должно быть равно инвестированию, $S(t) = I(t)$, получаем, что норма сбережения равна норме инвестирования. Другими словами, норма сбережения закрытой экономики представляет собой долю ВВП, которую экономика жертвует на инвестирование.

Будем считать, что капитал является однородным товаром, который выбывает с постоянным темпом $\delta > 0$; т. е. в каждую единицу времени, некоторая часть основного капитала изнашивается и, следовательно, более не может быть использована в производстве. Однако предполагается, что до своего исчезновения все единицы капитала одинаково производительны, независимо от прошедшего срока их эксплуатации.

Чистый прирост объема физического капитала за единицу времени равен валовому инвестированию за вычетом амортизации:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = s \cdot F[K(t), L(t), T(t)] - \delta K(t), \tag{1.2}$$

где точка над переменной, например $\dot{K}(t)$, обозначает дифференцирование по времени; $\dot{K}(t) \equiv \partial K(t)/\partial t$ (и так во всей книге) и $0 \leqslant s \leqslant 1$. Уравнение (1.2) определяет динамику K при заданной технологии и труде.

Трудовой ресурс L меняется со временем вследствие роста населения, изменения доли экономически активного населения, изменений в объеме времени, которое отрабатывает средний работник, вследствие совершенствования навыков и качества работников. В данной главе мы для простоты будем считать, что все работники отрабатывают одинаковое количество времени и что все имеют одинаковую постоянную квалификацию, которую мы примем за единицу. Таким образом, мы приравниваем трудовой ресурс ко всему населению. В гл. 5 мы проанализируем накопление квалификации или человеческого капитала, а в гл. 9 рассмотрим вопрос выбора между трудом и досугом.

Рост населения отражает динамику фертильности, смертности и миграции, которые мы изучим в гл. 9. В данной же главе мы упростим ситуацию и будем считать, что население растет с постоянным экзогенным темпом прироста $\dot{L}/L = n \geqslant 0$, без использования каких-либо ресурсов. Если мы нормируем число людей в момент времени 0 к единице, а также нормируем интенсивность работы одного человека к единице, то население и рабочая сила в момент времени t описываются уравнением:

$$L(t) = e^{nt}. \tag{1.3}$$

Для того чтобы продемонстрировать значение накопления капитала, мы для начала будем считать, что уровень технологии $T(t)$ постоянен. Это допущение мы позже ослабим.

Если $L(t)$ задается уравнением (1.3) и технологический прогресс отсутствует, то уравнение (1.2) определяет траектории изменения во времени капитала $K(t)$ и выпуска $Y(t)$. Мы знаем, как капитал и ВВП изменяются со временем, это означает, что темпы прироста этих переменных также определены. В следующих разделах мы покажем, что эта динамика существенным образом зависит от свойств производственной функции $F(\cdot)$.

1.2. Неоклассическая модель роста Солоу и Свэна

1.2.1. Неоклассическая производственная функция

Процесс экономического роста зависит от вида производственной функции. Для начала рассмотрим неоклассическую производственную функцию. Производственная функция $F(K, L, T)$ называется *неоклассической*, если она обладает следующими свойствами[1].

1. Постоянная эффективность с ростом масштаба производства. Функция $F(\cdot)$ обладает свойством постоянной эффективности с ростом масштаба производства, если при умножении капитала и труда на одну и ту же положительную константу λ выпуск также увеличивается в λ раз:

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda \cdot F(K, L, T) \quad \text{для всех } \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Это свойство также известно как *однородность функции степени 1 по K и L*. Важно отметить, что в определение масштаба входит только два конкурентных ресурса, капитал и труд, т. е. мы не определяем постоянную эффективность с ростом масштаба производства как

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda T) = \lambda \cdot F(K, L, T).$$

Для прояснения экономического смысла данного предположения приведем следующую *репликационную аргументацию*. Представим себе, что завод 1 производит Y единиц выпуска, для чего он использует производственную функцию F, K и L единиц капитала и труда соответственно, а также использует производственную формулу T. Разумно предположить, что если мы создадим идентичный завод (*скопируем* завод) где-либо еще, то сможем производить точно такой же объем

[1] Для упрощения записи мы не пишем временные индексы.

выпуска. Однако для того чтобы скопировать завод, требуются новые машины и работники, но при этом мы можем на обоих заводах использовать одну и ту же формулу. Суть в том, что капитал и труд являются конкурентными товарами, а производственная формула является неконкурентным товаром, так что может быть использована на обоих заводах одновременно. Следовательно, благодаря тому что технология является неконкурентным ресурсом, наше определение эффективности с ростом масштаба производства имеет смысл.

2. Положительная и убывающая отдача ресурсов. Для всех $K > 0$ и $L > 0$ функция $F(\cdot)$ обладает свойством положительности и убывания предельных продуктов каждого из ресурсов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Таким образом, неоклассическая функция предполагает, что при сохранении постоянных уровней технологии и труда каждая дополнительная единица капитала вырабатывает положительные добавки к выпуску, но эти добавки уменьшаются по мере роста числа машин. Аналогичное свойство предполагается и относительно труда.

3. Условия Инады. Третьей определяющей характеристикой неоклассической производственной функции является то, что предельный продукт капитала (или труда) должен стремиться к бесконечности при стремлении капитала (или труда) к нулю и стремиться к нулю при стремлении капитала (или труда) к бесконечности:

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty; \quad \lim_{K\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = 0. \tag{1.6}$$

Следуя Inada (1963), эти последние свойства названы *условиями Инады.*

4. Существенность. Некоторые экономисты включают в определение неоклассической производственной функции условие *существенности* производственного ресурса. Ресурс является существенным, если для производства положительного объема выпуска требуется положительный объем этого ресурса. В приложении мы продемонстрируем, что из первых трех неоклассических свойств, определяемых формулами (1.4)-(1.6), следует, что каждый ресурс *существенен* для производства, т. е.

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

Из трех свойств неоклассической производственной функции также следует, что выпуск стремится к бесконечности при стремлении любого из ресурсов к бесконечности (доказательство приведено в приложении).

Переменные на душу населения. Когда говорят, что некоторая страна «богатая» или «бедная», то имеют в виду выпуск или потребление на душу населения. Другими словами, мы не считаем, что Индия богаче Нидерландов, хотя Индия производит гораздо больше ВВП, потому что как только мы разделим валовые показатели на число жителей, то обнаружим, например, что доход на одного человека в среднем в Индии гораздо меньше, чем в Нидерландах. Учитывая это, мы будем строить модель в величинах «на душу населения» и изучать в основном динамику величин ВВП, потребления и капитала из расчета на одного человека.

По определению, постоянная эффективность с ростом масштаба производства подразумевает произвольные значения λ, мы можем взять $\lambda = 1/L$. Следовательно, выпуск может быть записан как

$$Y = F(K, L, T) = L \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1, T\right) = L \cdot f(k), \tag{1.7}$$

где $k \equiv K/L$ - капитал на одного работника; $y \equiv Y/L$ - выпуск на одного работника и функция $f(k)$, по определению, равна $F(k, 1, T)$[1]. Этот результат означает, что производственная функция может быть выражена в *интенсивной форме* (т. е. в форме *на одного работника* или *на душу населения*) следующим образом:

$$y = f(k). \tag{1.8}$$

Другими словами, эта производственная функция не имеет «эффекта масштаба»: производство на душу населения определяется объемом физического капитала на человека и, при постоянном k, наличие большего или меньшего числа работников не влияет на валовой выпуск на душу населения. Следовательно, в очень больших экономиках, таких как Китай и Индия, выпуск или доход на душу населения может быть меньше, чем в весьма небольших экономиках, таких как Швейцария или Нидерланды.

Продифференцируем выражение $Y = L \cdot f(k)$ по K при фиксированном L, а затем по L при фиксированном K, в результате чего получаем

[1] Так как величина T предполагается постоянной, то она является одним из параметров, неявно входящих в определение $f(k)$.

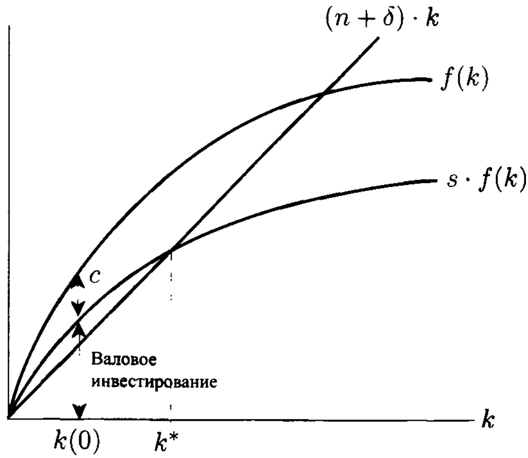


Рис. 1.1. Модель Солоу—Свэна. Кривая валового инвестирования $s \cdot f(k)$ пропорциональна производственной функции $f(k)$. Потребление на человека равно вертикальному расстоянию между $f(k)$ и $s \cdot f(k)$. Эффективная амортизация (для k) задается прямой $(n+\delta)\cdot k$, исходящей из начала координат. Изменение k дается вертикальным расстоянием между $s \cdot f(k)$ и $(n+\delta)\cdot k$. Стационарный уровень капитала k^* определяется в точке пересечения кривой $s \cdot f(k)$ и прямой $(n+\delta)\cdot k$

предельные продукты производственных факторов:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k); \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - k \cdot f'(k). \tag{1.10}$$

Из условий Инады следует

$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty}[f'(k)] = 0.$$

На рис. 1.1 показано неоклассическое производство в подушевых величинах: график выпуска выходит из нуля; вертикален в нуле; имеет наклон вверх, вогнут; при стремлении k к бесконечности его наклон стремится к нулю.

Функция Кобба—Дугласа. Одной из простейших производственных функций, которая, впрочем, считается весьма подходящей для описания реальных экономик, является функция Кобба–Дугласа[1)]

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{1.11}$$

где $A > 0$ – уровень технологии и α – константа, $0 < \alpha < 1$. В интенсивной форме функция Кобба–Дугласа принимает вид

$$y = AK^{\alpha}. \tag{1.12}$$

Заметим, что

$$f'(k) = A\alpha k^{\alpha-1} > 0, \quad f''(k) = -A\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0,$$
$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty}[f'(k)] = 0.$$

Итак, функция Кобба–Дугласа удовлетворяет свойствам неоклассической производственной функции.

Важнейшим свойством производственной функции Кобба–Дугласа является поведение долей факторного дохода. В конкурентной экономике капитал и труд оплачиваются своими предельными продуктами (мы обсудим это в разд. 1.2.3), т. е. предельный продукт капитала равен цене аренды R, а предельный продукт труда равен ставке заработной платы w. Следовательно, каждая единица капитала оплачивается в размере

$$R = f'(k) = \alpha A k^{\alpha-1},$$

а каждая единица труда оплачивается в размере

$$w = f(k) - k \cdot f'(k) = (1-\alpha) \cdot Ak^{\alpha}.$$

В таком случае доля капитала в доходе равна $Rk/f(k) = \alpha$, а доля труда — $w/f(k) = 1 - \alpha$. Таким образом, в условиях конкуренции, в случае производственной функции Кобба–Дугласа, доли факторного дохода постоянны.

[1)] Поль Дуглас (Paul H. Douglas) был специалистом в области экономики труда в Чикагском университете, а позже сенатором США от штата Иллинойс. Чарльз Кобб (Charles W. Cobb) – математик из Амхерста (Amherst). Дуглас утверждает (см. Duglas, 1972, pp. 46–47), что он консультировался с Коббом в 1927 г. по вопросу подбора производственной функции, которая соответствовала бы его эмпирическим уравнениям для производства, занятости и основных фондов в промышленности США. Интересно, что, по словам Дугласа, такая функциональная форма была ранее разработана Филиппом Викстидом (Philip Wicksteed), и, таким образом, мы еще раз убеждаемся в справедливости закона Стиглера (Stigler's Law), согласно которому ничто и никогда не называется в честь человека, действительно это придумавшего.

1.2.2. Фундаментальное уравнение модели Солоу—Свэна

Проанализируем теперь динамическое поведение экономики, описываемой неоклассической производственной функцией. Итоговая модель роста называется моделью Солоу—Свэна (см. работы Solow, 1956 и Swan, 1956).

Изменение в основных фондах с течением времени описывается уравнением (1.2). Если мы разделим обе части уравнения на L, то получим

$$\frac{\dot{K}}{L} = s \cdot f(k) - \delta k.$$

В правой части уравнения содержатся только переменные на душу населения, а в левой части таковых нет. Следовательно, это не обыкновенное дифференциальное уравнение, которое может быть просто решено. В целях преобразования его в дифференциальное уравнение относительно переменной k найдем производную $k \equiv K/L$ по времени, имеем

$$\dot{k} \equiv \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{\dot{K}}{L} - nk,$$

где $n = \dot{L}/L$. Если подставить это выражение в уравнение для $\dot{K}/L$, то получаем

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k. \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) является фундаментальным дифференциальным уравнением модели Солоу—Свэна. Это нелинейное уравнение зависит только от k.

Множитель $n+\delta$ в правой части уравнения (1.13) можно назвать эффективной нормой амортизации отношения капитала к труду $k \equiv K/L$. Если бы норма сбережения s равнялась нулю, то капитал на человека уменьшался бы частично из-за выбытия капитала с темпом δ, а частично из-за роста числа людей с темпом прироста n.

Рис. 1.1 иллюстрирует действие уравнения (1.13). Верхняя кривая — график производственной функции $f(k)$. Член $(n + \delta) \cdot k$ в уравнении (1.13) изображен на рис. 1.1 в виде прямой, исходящей из начала координат и имеющей наклон $n+\delta$. Член $s \cdot f(k)$ в уравнении (1.13) выглядит так же, как и производственная функция $f(k)$, но умноженная на положительную величину s. На рисунке видно, что кривая $s \cdot f(k)$ стартует в начале координат (так как $f(0) = 0$) и имеет положительный наклон (так как $f'(k) > 0$), который убывает к нулю по мере роста k (так как $f''(k) < 0$). Из условий Инады следует, что кривая $s \cdot f(k)$ вертикальна в значении $k = 0$ и становится горизонтальной при стремлении k к бесконечности. Из этих свойств вытекает, что, за исключением начала координат, кривая $s \cdot f(k)$ и прямая $(n+\delta) \cdot k$ пересекаются только в одной точке.

Рассмотрим экономику с начальным значением основных фондов на человека $k(0) > 0$. Валовое инвестирование на человека (см. рис. 1.1) равно высоте кривой $s \cdot f(k)$ в этой точке. Потребление на человека равно вертикальной разности между кривыми $f(k)$ и $s \cdot f(k)$ в этой точке.

1.2.3. Рынки

В этом разделе мы покажем, что фундаментальное уравнение модели Солоу–Свэна может быть получено в рамках конструкции, в которой в явном виде присутствуют рынки. Предположим, что домохозяйства не владеют технологией и сберегают выпуск, произведенный посредством нее, как это было ранее, а владеют финансовыми активами и трудом. Активы вырабатывают норму доходности $r(t)$, а труд оплачивается по ставке заработной платы $w(t)$. Следовательно, общий доход, получаемый домохозяйствами, является суммой дохода от активов и от труда: $r(t) \cdot (\text{Активы}) + w(t) \cdot L(t)$. Домохозяйства используют доход, который они не потребили, для накопления активов:

$$\frac{d(\text{Активы})}{dt} = [r \cdot (\text{Активы}) + w \cdot L] - C, \tag{1.14}$$

где, как и ранее, для упрощения записи временные индексы опущены. Разделим обе части уравнения (1.14) на L, обозначим активы на человека символом a, продифференцируем a по времени:

$$\dot{a} = \frac{1}{L} \cdot \frac{d(\text{Активы})}{dt} - na,$$

в итоге получим, что изменение активов на человека задается уравнением

$$\dot{a} = (r \cdot a + w) - c - na. \tag{1.15}$$

Фирмы нанимают труд и капитал и используют два этих ресурса вместе с производственной технологией в уравнении (1.1) для производства выпуска, который они продают по некоторой цене за единицу. Будем считать, что фирмы арендуют капитальные услуги у домохозяйств, которые владеют капиталом. (При этом ни один результат не изменится, если считать, что фирмы владеют капиталом, а домохозяйства владеют акциями фирм.) Следовательно, капитальные издержки фирм равны арендным платам, которые пропорциональны K. То есть предполагается, что капитальные услуги могут увеличиваться или уменьшаться без каких-либо дополнительных расходов, таких как издержки ввода (установки и настройки) станков.

Пусть R — стоимость сдачи внаем единицы капитальных услуг, и пусть, как и прежде, основной капитал выбывает с постоянным темпом $\delta \geqslant 0$. В таком случае чистая норма доходности домохозяйства, владеющего единицей капитала, равна $R - \delta$. Домохозяйства также получают процентную ставку r от фондов, сданных в аренду другим домохозяйствам. При отсутствии неопределенности капитал и ссуды совершенно взаимозаменяемы как средства сбережения, и, как следствие, они должны иметь одинаковую доходность $r = R - \delta$, что эквивалентно равенству $R = r + \delta$.

Поток чистого дохода или прибыли репрезентативной фирмы задается уравнением

$$\pi = F(K, L, T) - (r + \delta) \cdot K - wL, \tag{1.16}$$

т. е. валовая выручка от продажи выпуска $F(K, L, T)$ минус платежи за использование ресурсов, состоящие из затрат на аренду капитала $(r + \delta) \cdot K$ и заработной платы работникам wL. Предполагается, что технология доступна бесплатно, так что за аренду формулы, используемой в процессе производства, ничего платить не надо. Допустим, фирма максимизирует текущие значения прибылей. В силу того что фирма арендует капитал и нанимает трудовые ресурсы, при отсутствии издержек ввода производственных ресурсов в эксплуатацию имеем отсутствие какой-либо динамики в данной максимизационной задаче фирмы[1]. (Задача станет динамической, когда мы дополним модель издержками ввода в эксплуатацию капитала в гл. 3.)

Рассмотрим фирму произвольного масштаба, скажем, с уровнем трудовых затрат L. Так как производственная функция обладает свойством постоянной эффективности с ростом масштаба производства, то прибыль фирмы, задаваемая уравнением (1.16), может быть записана так

$$\pi = L \cdot [f(k) - (r + \delta) \cdot k - w]. \tag{1.17}$$

---

[1] В гл. 2 мы покажем, что при наличии динамики фирмам следует максимизировать текущее приведенное значение всех будущих прибылей, т. е. величину

$$\int_0^\infty L \cdot [f(k) - (r + \delta) \cdot k - w] \cdot e^{-rt}\, dt.$$

при постоянном r. Так как в задаче отсутствуют динамические ограничения, фирма максимизирует статические прибыли в каждый момент времени. Вообще говоря, динамическая задача в таком виде представляет собой не более чем последовательность статических задач.

Конкурирующая фирма, для которой r и w заданы извне, максимизирует прибыль при заданном L следующим образом:

$$f'(k) = r + \delta, \tag{1.18}$$

т. е. выбирает отношение величины используемого капитала к затрачиваемому труду таким образом, чтобы предельный продукт капитала равнялся цене аренды.

Итоговый уровень прибыли положителен, нулевой или отрицателен в зависимости от значения w. Если прибыль положительна, то фирма могла бы получить бесконечную прибыль, выбрав бесконечный масштаб. Если прибыль отрицательна, то фирма сократила бы свой масштаб до нуля. Следовательно, в условиях полного рыночного равновесия, w должна быть такой, чтобы прибыль равнялась нулю; т. е. совокупные платежи за производственные факторы $(r + \delta) \cdot K + wL$ равны валовой выручке в уравнении (1.17). В этом случае фирме не важен ее масштаб.

Для того чтобы прибыль была нулевой, требуется, чтобы ставка заработной платы, равная предельному продукту труда, соответствовала такому значению k, которое удовлетворяет уравнению (1.18):

$$[f(k) - f \cdot f'(k)] = w. \tag{1.19}$$

Можно легко проверить подстановкой уравнений (1.18) и (1.19) в уравнение (1.17), что итоговое значение прибыли равно нулю для любого значения L. Аналогично, если цены производственных факторов равны их предельным продуктам, то на оплату этих факторов полностью расходуется весь выпуск (этот результат соответствует теореме Эйлера в математике)[1].

В данной модели не определяется масштаб отдельной, конкурирующей фирмы, производственная функция которой имеет постоянную эффективность с ростом масштаба производства. Тем не менее отношение капитала к труду k так же, как и агрегированный объем производства, будут получены благодаря тому что совокупный объем рабочей силы задается уравнением (1.3).

[1] Согласно теореме Эйлера, если функция $F(K, L)$ однородна степени один по K и L, то

$$F(K, L) = F_K \cdot K + F_L \cdot L.$$

Это можно легко доказать, используя уравнения

$$F(K, L) = L \cdot f(k), \quad F_K = f'(k) \quad \text{и} \quad F_L = f(k) - k \cdot f'(k).$$

Дадим теперь определение равновесия в экономике. В закрытой экономике единственным активом, имеющим положительное чистое предложение, является капитал, так как все заимствования внутри экономики должны отсутствовать. Следовательно, равновесие на рынке активов означает $a = k$. Если мы подставим это равенство, а также

$$r = f'(k) - \delta \quad \text{и} \quad w = f'(k) - k \cdot f'(k)$$

в уравнение (1.15), то получим

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta) \cdot k.$$

И наконец, если, следуя Солоу и Свэну, мы будем считать, что домохозяйства потребляют постоянную долю их валового дохода $c = (1 - s) \cdot f(k)$, то получим

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k,$$

что является тем же фундаментальным уравнением модели Солоу—Свэна, что и уравнение (1.13). Таким образом, включение в модель Солоу - Свэна конкурентных рынков не изменило основных результатов модели[1].

1.2.4. Стационарное состояние

Теперь мы имеем все необходимое для анализа поведения модели во времени. Сначала рассмотрим долгосрочное развитие или *стационарное состояние*, а затем опишем краткосрочное поведение или *переходную динамику*. Назовем *стационарным состоянием* ситуацию, в которой различные величины растут с постоянными (возможно нулевыми) темпами прироста[2]. В модели Солоу Свэна стационарное состояние соот-

---

[1] Заметим, что и здесь, как и в предыдущем разделе, мы предполагали, что каждый человек сберегает постоянную долю своего валового дохода. Мы могли бы предположить вместо этого, что каждый человек сберегает постоянную долю своего чистого дохода $f(k) - \delta k$, что при наличии рынков в модели равно $ra + w$. В этом случае фундаментальное уравнение модели Солоу—Свэна приняло бы вид

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (s\delta + n) \cdot k.$$

Это же уравнение имеет место как в случае модели с домохозяйствами-производителями, так и в модели с рынками.

[2] Некоторые экономисты используют выражение «траектория сбалансированного роста» в качестве определения состояния, в котором все переменные растут с постоянным темпом, и используют выражение «стационарное состояние» в том частном случае, когда темп прироста нулевой.

ветствует $\dot{k} = 0$ в уравнении (1.13)[1], т. е. пересечению кривой $s \cdot f(k)$ с прямой $(n + \delta) \cdot k$ на рис. 1.1[2]. Соответствующее значение k обозначено k^*. (Нас интересует только пересечение при $k > 0$.) Алгебраически k^* удовлетворяет условию:

$$s \cdot f(k^*) = (n + \delta) \cdot k^*. \tag{1.20}$$

Так как k постоянно в стационарном состоянии, то y и c также постоянны и равны соответственно:

$$y^* = f(k^*) \quad \text{и} \quad c^* = (1 - s) \cdot f(k^*).$$

Следовательно, в неоклассической модели, величины k, y и c в стационарном состоянии не растут. Постоянство величин на душу населения означает, что переменные K, Y и C в стационарном состоянии растут с темпом прироста, равным темпу прироста населения n.

Изменения в уровне технологии «раз и навсегда» представляются в виде сдвигов производственной функции $f(\cdot)$, т. е. смещений ее графика. Сдвиги в производственной функции, в норме сбережения s, темпе прироста населения n и темпе выбытия δ — все воздействуют на подушевые уровни различных величин в стационарном состоянии. На рис. 1.1, например, пропорциональный сдвиг вверх производственной функции или прирост s смещает кривую $s \cdot f(k)$ вверх и приводит, таким образом, к увеличению k^*. Прирост n или δ сдвигает прямую $(n + \delta) \cdot k$ вверх и приводит к уменьшению k^*.

---

[1] Можно показать, что k должно быть постоянным в стационарном состоянии. Действительно, разделим обе части уравнения (1.13) на k и получим

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s \cdot f(k)}{k} - (n + \delta).$$

В стационарном состоянии левая часть уравнения является константой по определению. Так как s, n и δ — константы, то $f(k)/k$ также должно быть константой в стационарном состоянии. Производная $f(k)/k$ по времени равна

$$-\frac{[f(k) - k \cdot f'(k)]}{k} \cdot \frac{\dot{k}}{k}.$$

Выражение $f(k) - k \cdot f'(k)$ равно предельному продукту труда (как показано в уравнении (1.19)) и положительно. Следовательно, так как k конечно, то $\dot{k}/k$ должно равняться нулю в стационарном состоянии.

[2] Пересечение в области положительного k существует и единственно в силу того что $f(0) = 0$,

$$n + \delta < \lim_{k \to 0} [s \cdot f'(k)] = \infty, \quad n + \delta > \lim_{k \to \infty} [s \cdot f'(k)] = 0$$

и $f''(k) < 0$.

Важно отметить, что кратковременное изменение в уровне технологии, норме сбережения, темпе прироста населения и норме амортизации не влияет на стационарные темпы прироста выпуска, капитала и потребления на душу населения, которые все по-прежнему равны нулю. По этой причине представленная здесь модель не выявляет детерминантов долгосрочного роста на душу населения.

1.2.5. Золотое правило накопления капитала и динамическая неэффективность

При заданном уровне A и заданных значениях n и δ существует единственное стационарное значение $k^* > 0$ для каждого значения нормы сбережения s. Обозначим эту зависимость $k^*(s)$ с $dk^*(s)/ds > 0$. Стационарный уровень потребления на душу населения имеет вид

$$c^* = (1 - s) \cdot f[k^*(s)].$$

Мы знаем из уравнения (1.20), что

$$s \cdot f(k^*) = (n + \delta) \cdot k^*;$$

следовательно, мы можем записать выражение для c^*:

$$c^*(s) = f[k^*(s)] - (n + \delta) \cdot k^*(s). \tag{1.21}$$

На рис. 1.2 показана зависимость c^* от s, согласно уравнению (1.21). Величина c^* растет по s, при малых значениях s и снижается при боль-

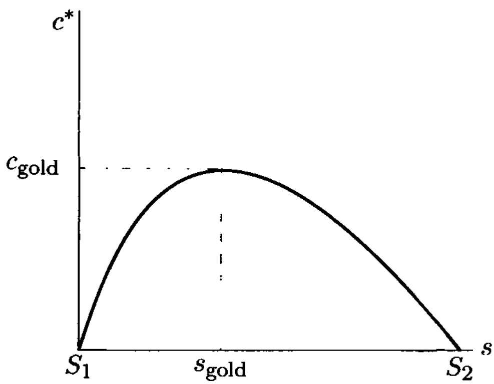


Рис. 1.2. Золотое правило накопления капитала. На вертикальной оси отмечены стационарные значения потребления на человека для каждого значения нормы сбережения. Норма сбережения, максимизирующая стационарное потребление на человека, называется нормой сбережения золотого правила и обозначается s_{gold}

ших значениях s. Величина c^* достигает максимума, когда производная равна нулю, т. е. когда

$$[f'(k^*) - (n + \delta)] \cdot \frac{dk^*}{ds} = 0.$$

Так как $dk^*/ds > 0$, то выражение в скобках должно быть равным 0. Если мы обозначим значение k^*, соответствующее максимальному значению c^*, как k_{gold}, то тогда условие, при котором определяется k_{gold}, имеет вид

$$f'(k_{\text{gold}}) = n + \delta. \tag{1.22}$$

Соответствующее значение нормы сбережения обозначим s_{gold}, а соответствующее стационарное потребление на душу населения определяется так:

$$c_{\text{gold}} = f(k_{\text{gold}}) - (n + \delta) \cdot k_{\text{gold}}.$$

Условие, записанное посредством уравнения (1.22), называется *золотым правилом накопления капитала* (см. Phelps, 1966). Прототипом этого названия послужило библейское «золотое правило»:

> «Делай для других то, что бы ты хотел, чтобы другие делали для тебя».

Экономический смысл золотого правила может быть сформулирован следующим образом:

> «Если мы обеспечим одинаковым объемом потребления членов текущего и будущего поколений, т. е. если мы не обделим будущие поколения относительно себя, то максимальный объем подушевого потребления равен c_{gold}».

Действие «золотого правила» иллюстрирует рис. 1.3. На рисунке отмечены три возможных нормы сбережения s_1, s_{gold} и s_2, где $s_1 < s_{\text{gold}} < s_2$. Потребление c в каждом случае равно вертикальному расстоянию между графиком производственной функции $f(k)$ и соответствующей кривой $s \cdot f(k)$. Для каждого значения s стационарное значение k^* соответствует пересечению кривой $s \cdot f(k)$ и прямой $(n+\delta) \cdot k$. Стационарное потребление c^* максимально при $k^* = k_{\text{gold}}$, потому что касательная к графику производственной функции в этой точке параллельна прямой $(n+\delta) \cdot k$. Значение нормы сбережения, при которой выполнено равенство $k^* = k_{\text{gold}}$, определяется пересечением кривой $s \cdot f(k)$ и прямой $(n + \delta) \cdot k$ в значении k_{gold}. Так как

$$s_1 < s_{\text{gold}} < s_2,$$

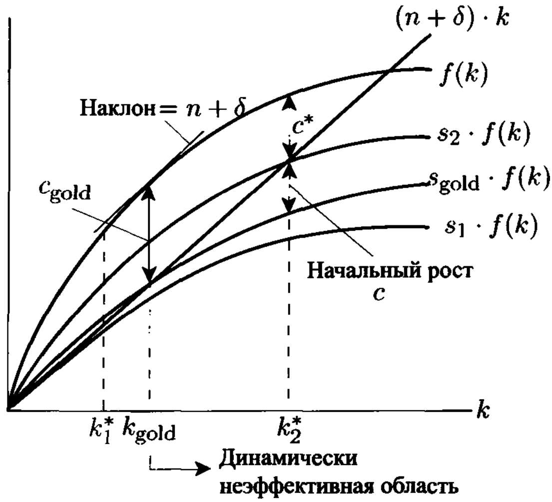


Рис. 1.3. Золотое правило и динамическая неэффективность. Если норма сбережения выше значения золотого правила ($s_2 > s_{\text{gold}}$; см. рис. 1.3), то уменьшение s приводит к увеличению стационарного потребления, а также к увеличению потребления в процессе перехода к новому состоянию. Так как c растет все время, то норма сбережения выше золотого правила динамически неэффективна. Если норма сбережения ниже золотого правила ($s_1 < s_{\text{gold}}$; см. рис. 1.3), то прирост s увеличивает стационарное потребление на человека, но уменьшает потребление на человека во время перехода. То, какое изменение в норме сбережения выбирается, определяется выбором домохозяйств потреблять больше сейчас или в будущем

то, как следует из рисунка, и

$$k_1^* < k_{\text{gold}} < k_2^*.$$

Изучим вопрос о том, какие значения нормы сбережения лучше. Едва ли мы сможем определить лучшую норму сбережения (или, скажем, установить, является ли постоянная норма сбережения желательной), пока не выберем конкретную целевую функцию, как в следующей главе. Впрочем, мы можем сейчас считать, что норма сбережения, постоянно превосходящая s_{gold}, неэффективна в силу того что высокие объемы потребления на душу населения могут быть получены посредством сокращения нормы сбережения на протяжении всего времени.

Рассмотрим экономику, в которой норма сбережения равна s_2, как на рис. 1.3, для которой $s_2 > s_{\text{gold}}$, так что $k_2^* > k_{\text{gold}}$ и $c_2^* < c_{\text{gold}}$. Представим себе, что, начиная со стационарного состояния, норма сбережения уменьшается до s_{gold}. Как следует из рис. 1.3, потребление c, определяемое как расстояние между кривыми $f(k)$ и $s_{\text{gold}} \cdot f(k)$ вначале увеличивается на дискретную величину, а затем уровень c монотонно падает в процессе перехода[1)] до нового стационарного значения c_{gold}. Так как $c_2^* < c_{\text{gold}}$, то мы заключаем, что c больше своего предыдущего значения c_2^*, на протяжении всего перехода, так же как и в новом стационарном состоянии. Следовательно, когда $s > s_{\text{gold}}$, в экономике наблюдается избыточное сбережение (пересбережение) в том смысле, что подушевое потребление в каждый момент времени можно было бы увеличить посредством снижения нормы сбережения. Про экономику с избыточным сбережением говорят, что она *динамически неэффективна*, потому что траектория подушевого потребления все время лежит ниже возможных альтернативных траекторий, где потребление было бы больше.

Если $s < s_{\text{gold}}$ (как в случае нормы сбережения s_1 на рис. 1.3), то стационарный уровень подушевого потребления может быть увеличен посредством увеличения нормы сбережения. Однако увеличение нормы сбережения приводит не только к уменьшению текущего c, но и еще в течение некоторой части переходного периода к пониженному потреблению. Будет ли итоговый результат хорошим или плохим, зависит от того, как домохозяйства оценивают полезность сегодняшнего потребления относительно траектории будущего потребления. Мы не можем судить о необходимости увеличения нормы сбережения в данной ситуации до тех пор, пока не сделаем ряд специфических предположений относительно того, как дисконтировать будущее. Мы сделаем это в следующей главе.

1.2.6. Переходная динамика

Долгосрочные темпы роста в модели Солоу- Свэна полностью детерминированы экзогенными элементами - в стационарном состоянии подушевые величины k, y и c не растут, а агрегированные переменные K, Y и C растут с темпом прироста, равным экзогенному темпу прироста населения n. Поэтому самым важным выводом относительно долгосрочного роста является то, что стационарные темпы прироста не зависят ни от нормы сбережения, ни от уровня технологии. Впрочем, эта модель имеет и более интересные следствия относительно переходной динамики. Сама эта переходная динамика позволяет увидеть, как подушевой доход сходится к своему стационарному значению в рамках данной экономики или к подушевым доходам других экономик.

[1)]В следующем подразделе мы проанализируем переходную динамику этой модели.

Разделим обе части уравнения (1.13) на k, тогда темп прироста k задается уравнением:

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{f(k)}{k - (n+\delta)}. \tag{1.23}$$

где мы здесь и далее будем использовать запись γ_z для обозначения темпа прироста переменной z. Заметим, что в любой момент времени темп прироста некоторой агрегированной переменной равен подушевому темпу прироста плюс экзогенный темп прироста населения n, например $\dot{K}/K = \dot{k}/k+n$. Для удобства в дальнейшем мы будем иметь дело только с темпом прироста k, заданным в уравнении (1.23).

В уравнении (1.23) утверждается, что $\dot{k}/k$ равно разности двух выражений. Первое выражение $s \cdot f(k)/k$ мы назовем *кривой сбережения*, а второе $(n + \delta)$ — *кривой амортизации*. Эти две кривые изображены на рис. 1.4. Кривая сбережения имеет отрицательный наклон[1], стре-

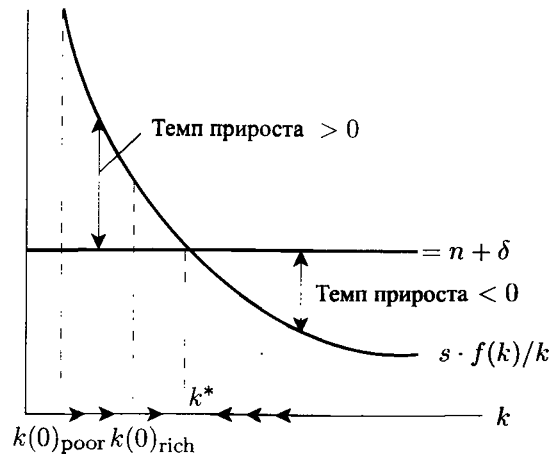


Рис. 1.4. Динамика модели Солоу—Свэна. Темп прироста k равен расстоянию по вертикали между кривой сбережения $s \cdot f(k)/k$ и прямой эффективной амортизации $n + \delta$. Если $k < k^*$, то темп прироста k положителен, и k растет до k^*. Если $k > k^*$, то темп прироста отрицателен и k уменьшается до k^*. Таким образом, стационарное значение капитала k^* устойчиво. Заметим, что в течение перехода из малого начального значения капитала темп прироста k монотонно уменьшается до нуля. Стрелки на горизонтальной оси показывают направление движения k

[1] Производная $f(k)/k$ по k равна $-[f(k)/k - f'(k)]/k$. Выражение в скобках равно предельному продукту труда, который положителен. Следовательно, производная отрицательна.

мится к бесконечности при $k \to 0$ и к 0 при стремлении k к бесконечности[1]. Кривая амортизации представляет собой горизонтальную прямую на уровне $n + \delta$. Вертикально расстояние между кривой сбережения и прямой амортизации равно темпу прироста капитала на человека (из уравнения (1.23)), а точка пересечения соответствует стационарному состоянию. Так как $n+\delta > 0$ и $s \cdot f(k)/k$ снижается монотонно с бесконечности до 0, то кривая сбережения и прямая амортизации пересекаются в единственной точке. Следовательно, стационарное значение отношения капитала к труду $k^* > 0$ существует и единственно.

На рис. 1.4 видно, что слева от стационарного состояния кривая $s \cdot f(k)/k$ лежит выше $n + \delta$. Поэтому темп прироста k остается положительным по мере прироста k. Если k растет, то $\dot{k}/k$ уменьшается и достигает нуля, как только k достигает k^*. (Кривая сбережения приближается к прямой амортизации по мере того, как k приближается к k^*; следовательно, $\dot{k}/k$ уменьшается.) Экономика асимптотически стремится к стационарному состоянию, в котором k (а следовательно, y и c) не изменяется.

Причиной снижения темпов прироста во время перехода является убывающая отдача капитала: когда k относительно мало, средний продукт капитала $f(k)/k$ остается относительно высоким. Согласно предположению, домохозяйства сберегают и инвестируют постоянную долю s этого продукта. Следовательно, когда k относительно мало, валовое инвестирование на единицу капитала $s \cdot f(k)/k$ остается относительно высоким. Капитал на одного работника k эффективно выбывает с постоянным темпом $n+\delta$. В результате темп прироста $\dot{k}/k$ также остается относительно высоким.

Аналогичные рассуждения можно привести для демонстрации того, что если экономика стартует выше стационарного состояния $k(0) > k^*$, то темп прироста k будет отрицательным, а k будет снижаться со временем. (На рис. 1.4 видно, что для $k > k^*$ прямая $n+\delta$ лежит выше кривой

[1] Заметим, что

$$\lim_{k\to 0}\left[s \cdot \frac{f(k)}{k}\right] = \frac{0}{0}.$$

Применяя правило Лопиталя и учитывая условие Инады, имеем

$$\lim_{k\to 0}\left[s \cdot \frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to 0}[s \cdot f'(k)] = \infty.$$

Аналогично, из условия Инады

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = 0 \quad \text{следует} \quad \lim_{k\to\infty}\left[s \cdot \frac{f(k)}{k}\right] = 0.$$

$s \cdot f(k)/k$ и, следовательно, $\dot{k}/k < 0$.) По мере приближения k к k^* темп прироста растет и достигает 0. Так что система глобально устойчива: для любого начального значения $k(0) > 0$ экономика сходится к своему единственному стационарному состоянию, $k^* > 0$.

Мы можем также изучить поведение выпуска во время перехода. Темп прироста выпуска на душу населения задается уравнением

$$\frac{\dot{y}}{y} = f'(k) \cdot \frac{\dot{k}}{f(k)} = \left[k \cdot \frac{f'(k)}{f(k)}\right] \cdot \frac{\dot{k}}{k}. \tag{1.24}$$

Выражение в квадратных скобках правой части уравнения является *капитальной долей*, т. е. долей дохода от сдачи в аренду капитала в общем доходе[1)].

Из уравнения (1.24) видно, что соотношение между $\dot{y}/y$ и $\dot{k}/k$ зависит от динамики капитальной доли. В случае производственной функции Кобба–Дугласа (уравнение (1.11)) капитальная доля равна константе α, а $\dot{y}/y$ является долей α от $\dot{k}/k$. Следовательно, динамика $\dot{y}/y$ повторяет динамику $\dot{k}/k$.

В общем случае мы можем подставить $\dot{k}/k$ из уравнения (1.23) в уравнение (1.24), что даст

$$\frac{\dot{y}}{y} = s \cdot f'(k) - (n + \delta) \cdot \mathrm{Sh}(k), \tag{1.25}$$

где $\mathrm{Sh}(k) \equiv k \cdot f'(k)/f(k)$ — капитальная доля. Если мы продифференцируем это выражение по k и соберем члены, то получим

$$\frac{\partial(\dot{y}/y)}{\partial k} = \left[\frac{f''(k) \cdot k}{f(k)}\right] \cdot \frac{\dot{k}}{k} - \frac{(n+\delta) \cdot f'(k)}{f(k)} \cdot [1 - \mathrm{Sh}(k)].$$

Так как $0 < \mathrm{Sh}(k) < 1$, то последний член в правой части уравнения отрицателен. Если $\dot{k}/k \geqslant 0$, то первый член в правой части уравнения неположителен, а значит, $\partial(\dot{y}/y)/\partial k < 0$. Таким образом, в области $\dot{k}/k \geqslant 0$, т. е. при $k \leqslant k^*$, $\dot{y}/y$ необходимо уменьшается по мере прироста k (и тем более, если y растет). Если $\dot{k}/k < 0$ ($k > k^*$), то знак $\partial(\dot{y}/y)/\partial k$ в общем случае при произвольной производственной функции $f(k)$ не определен. Однако если экономика близка к своему стационарному состоянию, то величина $\dot{k}/k$ будет небольшой и $\partial(\dot{y}/y)/\partial k < 0$ будет выполнено даже при $k > k^*$.

---

1) Ранее мы показали, что в условиях конкурентного рыночного равновесия каждая единица капитала приносит рентный доход, равный его предельному продукту $f'(k)$. Следовательно, $k \cdot f'(k)$ — доход на человека, заработанный владельцами капитала, а $k \cdot f'(k)/f(k)$ выражение в квадратных скобках — доля этого дохода в общем доходе на человека.

В модели Солоу—Свэна, в которой предполагается постоянная норма сбережения, объем потребления на человека дается выражением $c = (1 - s) \cdot y$. Следовательно, темпы прироста потребления и дохода на душу населения идентичны в любой момент времени, $\dot{c}/c = \dot{y}/y$. Потребление, таким образом, имеет такую же динамику, что и выпуск.

1.2.7. Динамика стоимости ресурсов во время перехода

Ранее мы показали, что структура модели Солоу—Свэна согласуется с конкурентной рыночной экономикой, в которой фирмы максимизируют прибыли, а домохозяйства сберегают постоянную долю валового дохода. Было бы интересно изучить поведение заработных плат и процентных ставок во время перехода, при котором основные фонды возрастают в направлении стационарного состояния. Мы показали, что процентная ставка равна предельному продукту капитала минус постоянный темп выбытия, $r = f'(k) - \delta$. Так как процентная ставка зависит от предельного продукта капитала, который зависит от объема основных фондов на человека, то процентная ставка меняется по мере изменения капитала во время перехода. В силу того что отдача капитала в случае неоклассической производственной функции убывает, т. е. $f''(k) < 0$, предельный продукт капитала снижается с ростом уровня капитала. Отсюда следует, что процентная ставка монотонно снижается в направлении своего стационарного значения, задаваемого выражением $r^* = f'(k^*) - \delta$.

Мы также показали, что конкурентная ставка заработной платы задается выражением $w = f(k) - k \cdot f'(k)$. Как и ранее, ставка заработной платы растет по мере роста капитала. Для выяснения динамики этой ставки возьмем производную от w по k:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = f'(k) - f'(k) - k \cdot f''(k) = -k \cdot f''(k) > 0.$$

Стало быть, ставка зарплаты монотонно возрастает по мере роста объема капитала. В стационарном состоянии ставка заработной платы имеет вид $w^* = f(k^*) - k^* \cdot f'(k^*)$.

Динамика зарплат и процентных ставок графически отображена на рис. 1.5. Кривая на рисунке график производственной функции $f(k)$. Доход на одного работника, получаемый отдельным домохозяйством, равен

$$y = w + R \cdot k, \tag{1.26}$$

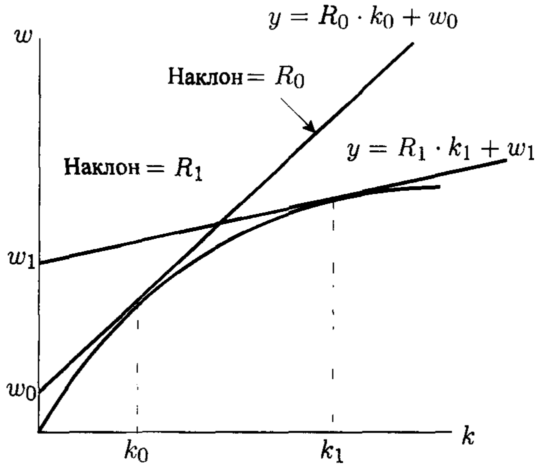


Рис. 1.5. Стоимость ресурсов во время перехода. В точке k_0 прямая, являющаяся касательной к графику производственной функции, имеет наклон, равный цене аренды R_0. Эта прямая пересекает ось ординат в точке, равной ставке заработной платы w_0. При росте k до k_1 цена аренды снижается до R_1, а ставка заработной платы растет до w_1

где $R = r + \delta$ – цена аренды капитала. Так как процентная ставка и ставка заработной платы заданы, то y является линейной функцией k, график которой имеет наклон R и пересекает ось ординат в значении w.

Разумеется, R зависит от k через условие равенства предельной производительности цене аренды капитала $f'(k) = R = r + \delta$, т. е. R, наклон графика функции дохода (1.26) должен равняться наклону $f(k)$ при определенном значении k. На рисунке отмечены два значения k_0 и k_1. Функции дохода в этих двух значениях представляют собой прямые линии, касательные к $f(k)$ в точках k_0 и k_1 соответственно. Если во время перехода k растет, то, как следует из рисунка, наклон касательной прямой линии уменьшается от R_0 до R_1. На рисунке также видно, что пересечение с осью ординат (в значении w) растет от w_0 до w_1.

1.2.8. Политические эксперименты

Предположим, что экономика изначально находится в позиции стационарного состояния с капиталом на человека, равным k_1^*. Представим себе, что норма сбережения перманентно увеличилась со значения s_1 до большего значения s_2, возможно в силу того что домохозяйства изменили свое поведение, или в силу того что правительство представило новую политическую программу, при которой норма сбережения

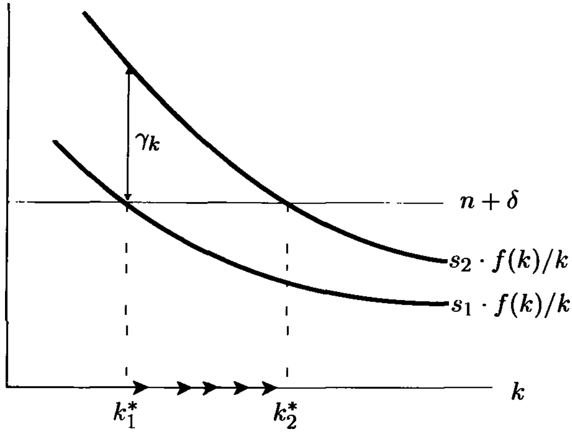


Рис. 1.6. Эффекты роста нормы сбережения. Рост s со значения s_1 до s_2 сдвигает кривую $s \cdot f(k)/k$ вправо. В старом стационарном состоянии k_1^* инвестирование превышает эффективную амортизацию $n + \delta$, так что темп роста k положителен. Капитал растет до тех пор, пока экономика не достигнет своего нового стационарного состояния $k_2^* > k_1^*$

увеличивается. На рис. 1.6 видно, что график $s \cdot f(k)/k$ в этом случае сдвигается вправо. Следовательно, пересечение с прямой $n + \delta$ также сдвигается вправо, а новое стационарное значение объема основных фондов k_2^* превосходит k_1^*.

Каким же образом экономика переберется из k_1^* в k_2^*? При $k = k_1^*$, разрыв между кривой $s_1 \cdot f(k)/k$ и прямой $n+\delta$ положителен, т. е. сбережения более чем достаточно для порождения роста k. По мере того как k растет, его темп прироста падает и достигает 0, когда k достигает k_2^*. Таким образом, можно сделать вывод, что долговременное увеличение нормы сбережения порождает на некоторое время положительные темпы прироста на душу населения. В долгосрочной перспективе уровни k и y становятся перманентно выше, в то время как подушевые темпы прироста через некоторое время возвращаются обратно к нулю.

Положительность темпов прироста во время перехода наводит на мысль, что экономика могла бы расти всегда, если бы увеличение нормы сбережения повторялось снова и снова. Однако есть одна проблема: норма сбережения является долей, т. е. числом от нуля до единицы. Заметим, что даже если бы люди могли сберегать весь свой доход, кривая сбережения все равно пересекала бы прямую амортизации и, как следствие, долгосрочный подушевой рост остановился бы[1]. Причиной этого является убывающая отдача капитала, которая, в конце концов, возвращает экономику в стационарное состояние, где темп прироста нулевой. Таким образом, мы теперь можем ответить на вопрос, поставленный в начале этой главы: «Может ли доход на душу населения расти бесконечно благодаря лишь сбережению и инвестированию физического капитала?» Если производственная функция является неоклассической, то ответ «нет».

Мы можем также оценить эффекты перманентных изменений в темпе прироста населения n. Эти изменения могут отражать сдвиги в поведении домохозяйств или изменения в политике правительства, влияющие на фертильность. Снижение n перемещает прямую амортизации вниз, так что стационарный объем капитала на одного работника увеличивается. Однако долгосрочный темп прироста капитала останется нулевым.

Аналогично перманентное, т. е. раз и навсегда, улучшение технологии имеет кратковременное воздействие на подушевые темпы прироста. Если производственная функция $f(k)$ сдвигается вверх пропорциональным образом, то кривая сбережения также сдвигается вверх, как показано на рис. 1.6. Следовательно, как и в случае перманентного увеличения нормы сбережения, $\dot{k}/k$ становится положительным лишь на время. В долгосрочной перспективе перманентное улучшение технологии порождает более высокие уровни k и y, но при этом никаких изменений в темпах прироста этих величин не происходит. Ключевым различием между улучшениями в знаниях и увеличениями нормы сбережения является то, что увеличение объема знаний не ограничено. То есть производственная функция может смещаться вновь и вновь, потому что, в принципе, никаких ограничений для человеческого знания не существует, в то время как норма сбережения физически ограничена единицей. Отсюда следует, что если мы хотим породить долгосрочный рост подушевых дохода и потребления в рамках неоклассической структуры, то рост должен порождаться технологическим прогрессом, а не накоплением физического капитала.

Ранее мы уже говорили (см. сноску (2) на с. 37), что различия в правительственных политиках и институтах могут привести к отклонениям в уровне технологии. Например, высокие ставки налога на доход с ка-

[1] До достижения $s = 1$ экономика достигла бы s_{gold}, так что дальнейшее увеличение нормы сбережения привело бы экономику в динамически неэффективную область.

питала, плохая защита авторских прав и неспособность правительства регулировать экономику эквивалентны низкому уровню технологии. Однако, скорее всего, невозможно получить бесконечный рост посредством постоянного улучшения политики правительства и правительственных институтов. Так что в долгосрочном плане продолжительный рост, судя по всему, зависит целиком от технологического прогресса.

1.2.9. Пример: технология Кобба—Дугласа

Проиллюстрируем наши выводы на примере производственной функции Кобба--Дугласа (уравнение (1.11)). Стационарное значение k определяется из уравнения (1.20) как

$$k^* = \left[\frac{sA}{n+\delta}\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{1.27}$$

Заметим, что, как мы видели на графике, для более общей производственной функции $f(k)$ величина k^* растет вместе с нормой сбережения s и уровнем технологии A и снижается при увеличении темпа прироста населения n и нормы амортизации δ. Стационарный объем выпуска на душу населения задается уравнением:

$$y^* = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \left[\frac{s}{n+\delta}\right]^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Таким образом, y^* растет с ростом s и A, и y^* убывает с ростом n и δ.

В переходный период темп прироста k получается из уравнения (1.23):

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta). \tag{1.28}$$

Если $k(0) < k^*$, то $\dot{k}/k$ в уравнении (1.28) больше нуля. Этот темп прироста снижается при росте k и стремится к 0 при стремлении k к k^*. Так как из уравнения (1.24) следует

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k},$$

то динамика $\dot{y}/y$ повторяет динамику $\dot{k}/k$. В частности, чем меньше $y(0)$, тем больше $\dot{y}/y$.

Решение в замкнутой форме. Интересно отметить, что когда производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа и норма сбережения постоянна, то можно получить решение в замкнутой форме, т. е. найти траекторию k в явном виде. Уравнение (1.28) может быть записано в виде

$$\dot{k} \cdot k^{-\alpha} + (n+\delta) \cdot k^{1-\alpha} = sA.$$

Если мы обозначим $v \equiv k^{1-\alpha}$, то уравнение примет вид

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot \dot{v} + (n+\delta) \cdot v = sA,$$

что является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно v. Решение этого уравнения имеет вид

$$v \equiv k^{1-\alpha} = \frac{sA}{(n+\delta)} + \left\{ [k(0)]^{1-\alpha} - \frac{sA}{(n+\delta)} \right\} \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot(n+\delta)\cdot t}.$$

Последний множитель является экспоненциальной функцией с показателем $-(1-\alpha) \cdot (n+\delta)$. Следовательно, разрыв между $k^{1-\alpha}$ и его стационарным значением $sA/(n+\delta)$ сокращается с постоянным темпом $(1-\alpha) \cdot (n+\delta)$.

1.2.10. Абсолютная и условная сходимости

Из фундаментального уравнения модели Солоу Свэна (уравнение (1.23)) следует, что производная $\dot{k}/k$ по k отрицательна:

$$\frac{\partial(\dot{k}/k)}{\partial k} = \frac{s \cdot [f'(k) - f(k)/k]}{k} < 0.$$

При прочих равных условиях меньшие значения k связаны с большими значениями $\dot{k}/k$. Возникает важный вопрос: означает ли это, что экономики с более низким объемом подушевого капитала растут в подушевом выражении быстрее? Другими словами, имеет ли место *сходимость* между экономиками?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим группу закрытых экономик (скажем, изолированных регионов или стран), которые структурно похожи друг на друга в том смысле, что они имеют одинаковые значения параметров s, n и δ, а также имеют одинаковую производственную функцию $f(\cdot)$. Таким образом, экономики имеют одинаковые стационарные значения k^* и y^*. Допустим, что единственным различием между экономиками является то, что у них разные начальные объемы капитала $k(0)$. Эти различия в начальных значениях могут отражать произошедшие потрясения, такие как войны или разрушение производств во время переходных периодов. В таком случае из модели следует, что менее развитые экономики с более низкими значениями

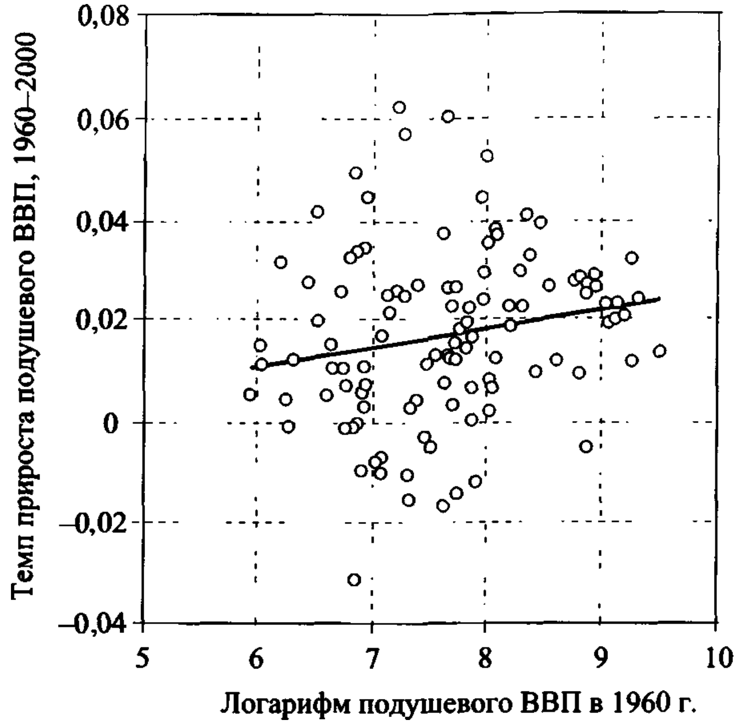


Рис. 1.7. Сходимость ВВП по странам: темп прироста против начального уровня реального ВВП на душу населения для 114 стран. Для 114 стран средний темп прироста ВВП на душу населения с 1960 по 2000 г. (вертикальная ось) имеют некоторую зависимость от уровня реального ВВП на душу населения в 1960 г. (горизонтальная ось). Эта зависимость в действительности хоть и немного, но положительная. Следовательно, для широкого круга стран, абсолютной сходимости не наблюдается

$k(0)$ и $y(0)$ – имеют более высокие темпы прироста k и, как правило, также высокие темпы прироста y[1].

На рис. 1.4 представлены две экономики, в одной — начальное значение $k(0)_{\text{poor}}$ низкое, а в другой — $k(0)_{\text{rich}}$ высокое. Так как в обеих экономиках одинаковые остальные параметры, динамика k в обоих случаях определяется одинаковыми кривыми $s \cdot f(k)/k$ и $n + \delta$. Следовательно, темп прироста $\dot{k}/k$ однозначно выше для экономики с более низким начальным значением $k(0)_{\text{poor}}$. Из этого следует форма сходимости: регионы или страны с более низкими начальными значениями отношения капитала к труду имеют более высокие темпы прироста $\dot{k}/k$ и, таким образом, стремятся догнать тех или сходятся к тем, у кого значения отношения капитала к труду выше.

[1]Это будет однозначно так, если производственная функция имеет вид Кобба–Дугласа, если $k \leqslant k^*$ или если k находится вблизи k^*.

Гипотеза о том, что бедные страны имеют более сильную тенденцию роста показателей на душу населения, чем богатые (без каких-либо дополнительных условий относительно других характеристик модели), называется *абсолютной сходимостью.* Эта гипотеза, в принципе, находит подтверждение для некоторых групп экономик. Рассмотрим в качестве примера рост экономик большой группы стран в период с 1960 по 2000 г. На рис. 1.7 по оси ординат отмечены среднегодовые темпы прироста реального ВВП на душу населения и по оси абсцисс – логарифмы реального ВВП на душу населения в начальный период (1960 г.) для 114 стран. Темпы прироста в действительности положительно коррелированы с начальным значением, т. е. наблюдается некоторая тенденция к тому, чтобы изначально более богатые страны росли быстрее. Так что этот пример отвергает гипотезу абсолютной сходимости.

Гипотеза находит подтверждение, если мы рассмотрим более однородную группу экономик. На рис. 1.8 показаны данные для 18 от-

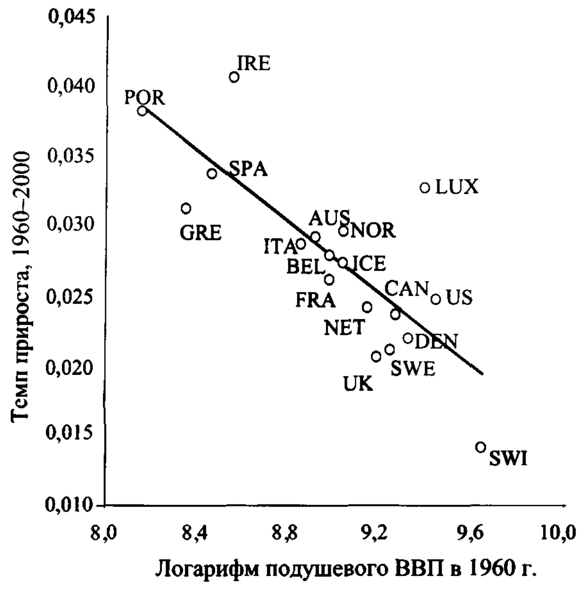


Рис. 1.8. Сходимость ВВП по странам ОЭСР: темп прироста против начального уровня реального ВВП на душу населения для 18 стран ОЭСР. Если ограничить пример 18 первоначальными странами ОЭСР (с 1961 г.), то средний темп прироста реального ВВП на душу населения с 1960 по 2000 г. имеет отрицательную зависимость от уровня реального ВВП на душу населения в 1960 г. Следовательно, для 18 стран ОЭСР абсолютная сходимость наблюдается

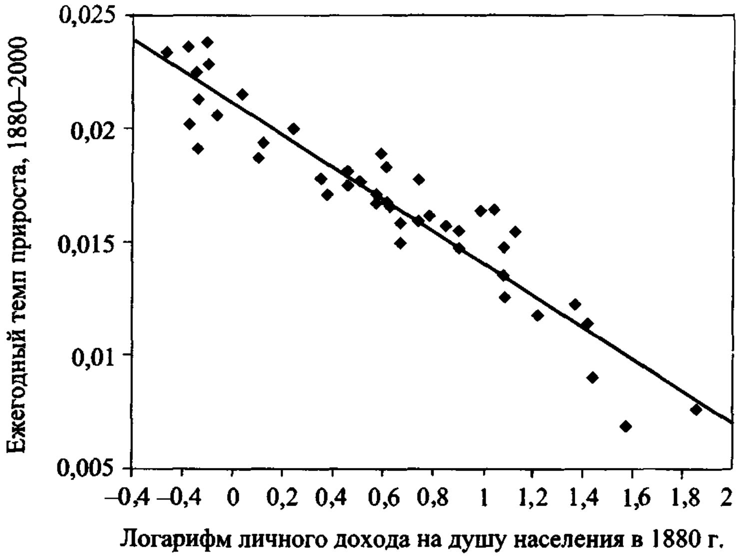


Рис. 1.9. Сходимость личного дохода по штатам США: личный доход в 1880 г. и прирост дохода с 1880 по 2000 г. Зависимость между темпом прироста личного дохода на душу населения в период с 1880 по 2000 г. (вертикальная ось) и уровнем дохода на душу населения в 1880 г. (горизонтальная ось) четко отрицательна. Таким образом, для штатов США имеет место абсолютная сходимость

носительно развитых стран, которые являются членами Организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР) с даты создания этой организации в 1961 г.[1]. В этом случае в изначально более бедных странах наблюдались существенно более высокие подушевые темпы прироста.

Такая закономерность проявится еще больше, если мы рассмотрим еще более однородную группу экономик, например континентальные штаты США. На рис. 1.9 представлен график зависимости темпа прироста личного дохода на душу населения для каждого штата с 1880 по 2000 г. от логарифма личного дохода на душу населения в 1880 г.[2]. На этой диаграмме абсолютная сходимость видна очень отчетливо (изначально более бедные штаты демонстрировали существенно бóльшие темпы прироста).

Мы можем согласовать теорию с эмпирическими наблюдениями относительно сходимости, если введем предположение о неоднородности

[1] Германия не рассматривается из-за отсутствия данных, а Турция в силу того что она не была развитой экономикой в 1960 г.

[2] На диаграмме 47 наблюдений по штатам и территориям США.

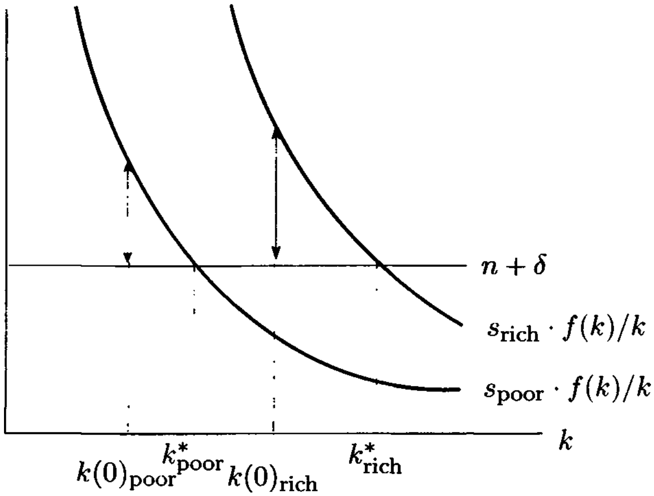


Рис. 1.10. Условная сходимость. Если в богатой экономике норма сбережения больше, чем в бедной, то богатая экономика может быть пропорционально дальше от своего стационарного состояния. В этом случае богатая экономика росла бы быстрее, чем бедная; т. е. абсолютной сходимости здесь нет

экономик, в частности если мы не будем считать, что экономики имеют одинаковые параметры и, следовательно, одинаковые значения стационарных состояний. Если стационарные состояния различаются, то мы должны модифицировать наш анализ и ввести в него понятие *условной сходимости*. Основная идея здесь заключается в том, что экономика растет тем быстрее, чем дальше она находится от собственного стационарного состояния.

Мы проиллюстрируем концепцию условной сходимости на рис. 1.10, рассмотрев две экономики, которые различаются только двумя обстоятельствами: во-первых, у них разные начальные объемы капитала на одного человека, $k(0)_{\text{poor}} < k(0)_{\text{rich}}$, а во-вторых, у них разные нормы сбережения, $s_{\text{poor}} \neq s_{\text{rich}}$. Из нашего предыдущего анализа следует, что различие в нормах сбережения порождает различие в стационарных значениях капитала на человека, т. е. $k^*_{\text{poor}} \neq k^*_{\text{rich}}$. (На рис. 1.10 эти стационарные значения определяются пересечением кривых $s_i \cdot f(k)/k$ с общей прямой $n + \delta$.) Рассмотрим случай, в котором $s_{\text{poor}} < s_{\text{rich}}$ и, следовательно, $k^*_{\text{poor}} < k^*_{\text{rich}}$, так как такое различие в экономиках более правдоподобно объясняет, почему имеет место $k(0)_{\text{poor}} < k(0)_{\text{rich}}$ в начальный период времени. (Из эмпирических наблюдений также известно, и это обсуждалось во введении, что страны с более высоким уровнем реального ВВП на душу населения имеют также и более высокие нормы сбережения.)

Вопрос в следующем: предсказывает ли данная модель более быстрый рост бедной экономики относительно богатой? Если бы они имели одинаковую норму сбережения, то темп роста дохода на душу населения (расстояние между кривой $s \cdot f(k)/k$ и прямой $n + \delta$) был бы больше для бедной экономики и было бы выполнено

$$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_{\text{poor}} > \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_{\text{rich}}.$$

Однако если богатая экономика имеет бóльшую норму сбережения, как на рис. 1.10, то выполнено

$$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_{\text{poor}} < \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_{\text{rich}},$$

так что богатая экономика растет быстрее. Интуитивно ясно, что более низкая норма сбережения бедной экономики нейтрализует влияние ее большего среднего продукта капитала как фактора, определяющего экономический рост. Следовательно, бедная экономика может расти с меньшим темпом, нежели богатая.

Прогноз неоклассической модели состоит в том, что каждая экономика сходится к своему стационарному состоянию и что скорость этой сходимости связана обратным образом с расстоянием до стационарного состояния. Другими словами, модель предсказывает условную сходимость в том смысле, что более низкое стартовое значение реального дохода на душу населения приводит к более высокому темпу его прироста, раз уж мы можем управлять определяющими стационарное состояние параметрами.

Вспомним, что стационарное значение k^* зависит от нормы сбережения s и технологического уровня производственной функции $f(\cdot)$. Мы также упоминали, что правительственные стратегии и институты могут рассматриваться как дополнительные элементы воздействия, способные существенно изменить положение производственной функции. Данные результаты относительно условной сходимости наводят на мысль, что нам следует оставить постоянными эти детерминанты k^*, чтобы свойственная данной модели обратная зависимость между темпами прироста и начальными значениями оставалась в силе.

Для того чтобы алгебраически проиллюстрировать концепцию условной сходимости, вернемся к уравнению (1.23). Одним из определяющих отношение $\dot{k}/k$ параметров является норма сбережения s.

Используем условие стационарности из уравнения (1.20) и выразим s в следующем виде:

$$s = \frac{(n+\delta)\cdot k^*}{f(k^*)}.$$

Если подставить это выражение для s в уравнение (1.23), то $\dot{k}/k$ принимает вид

$$\frac{\dot{k}}{k} = (n+\delta)\cdot\left[\frac{f(k)/k}{f^*(k)/k^*} - 1\right]. \tag{1.29}$$

Уравнение (1.29) согласуется с тем, что $\dot{k}/k = 0$ при $k = k^*$. При заданном k^* из этой формулы следует, что уменьшение k, приводящее к увеличению среднего продукта капитала $f(k)/k$, увеличивает и $\dot{k}/k$. Однако малое значение k соответствует большому значению $\dot{k}/k$, только если речь идет о снижении относительно стационарного значения k^*. В частности, значение $f(k)/k$ должно быть большим относительно стационарного значения $f(k^*)/k^*$. Таким образом, не ожидается, что бедная страна будет быстро расти, если ее стационарное значение k^* так же мало, как и ее текущее значение k.

В случае технологии, задаваемой функцией Кобба—Дугласа, норма сбережения может быть записана в следующем виде:

$$s = \frac{(n+\delta)}{A}\cdot(k^*)^{1-\alpha}.$$

Мы можем подставить это выражение в уравнение (1.23), чтобы получить

$$\frac{\dot{k}}{k} = (n+\delta)\cdot\left[\left(\frac{k}{k^*}\right)^{\alpha-1} - 1\right]. \tag{1.30}$$

Мы видим, что темп прироста капитала k зависит от отношения k/k^*, т. е. зависит от расстояния между текущим и стационарным значениями капитала.

Уравнение (1.29) означает, что если фиксировать переменные, которые отвечают за различия в стационарном состоянии y^*, то далее нам следует эмпирически оценить отношение между темпом прироста дохода на душу населения $\dot{y}/y$ и начальным положением $y(0)$. Для относительно однородной группы экономик, таких как штаты США, различия в стационарных положениях могут быть минимальными, так что мы будем наблюдать такой вид сходимости, какой показан на рис. 1.9. Однако для большой группы из 114 стран (см. рис. 1.7) различия в стационарных положениях похоже весьма существенны. Более того, страны с низкими начальными уровнями $y(0)$, вероятно, так и останутся в этом состоянии, потому что у них очень низкие стационарные значения y^*, возможно, в силу того, что у них хронически низкие нормы сбережения или продолжительно плохие правительственные политики, что существенно снижает уровень производственной функции. Другими словами, подушевой темп прироста может быть весьма слабо коррелирован с $\log[y(0)]$, как это имеет место на рис. 1.7, так как сама величина $\log[y(0)]$ никак не связана с расстоянием до стационарного состояния $\log[y(0)/y^*]$. С точки зрения условной сходимости, получается, что это расстояние является переменной, имеющей значение для последующего подушевого роста.

В гл. 12 мы покажем, что включение переменных, которые отвечают за различия в стационарных положениях, приводит к значительному изменению результатов для широкого круга стран. Когда эти дополнительные переменные постоянны, зависимость между темпом прироста на душу населения и логарифмом начального реального ВВП на душу населения становится заметно обратной, как это и предсказано неоклассической моделью. Другими словами, данные по странам подтверждают гипотезу об условной сходимости.

1.2.11. Сходимость и дисперсия дохода на душу населения

Понятие сходимости, с которым мы имеем дело, заключается в том, что экономики с низкими уровнями дохода на душу населения (относительно их стационарных уровней) склонны к более быстрому росту основных показателей на душу населения. Такую динамику часто путают с другим смыслом сходимости, который заключается в том, что дисперсия реального дохода на душу населения внутри некоторой группы экономик или индивидуумов снижается со временем[1]. Сейчас мы покажем, что если имеет место даже абсолютная сходимость в нашем смысле, то дисперсия дохода на душу населения не обязательно убывает со временем.

Допустим, для группы экономик $i = 1, \ldots, N$ имеет место абсолютная сходимость, N — достаточно велико. В дискретном времени, соответствующем, например, ежегодным данным, реальный доход на душу населения для экономики i можно аппроксимировать процессом

$$\log(y_{it}) = a + (1 - b) \cdot \log(y_{i,t-1}) + u_{it}, \tag{1.31}$$

[1] См. работы Sala-i-Martin (1990) и Barro and Sala-i-Martin (1992a), в которых подробно обсуждаются эти две концепции сходимости.

где a и b константы, $0 < b < 1$; u_{it} — член, обозначающий возмущение. Из того, что $b > 0$, следует абсолютная сходимость, так как годовой темп прироста $\log(y_{it}/y_{i,t-1})$ имеет обратную зависимость от $\log(y_{i,t-1})$. Большее значение b соответствует большей склонности к сходимости[1]. Элемент возмущения включает в себя кратковременные скачки в производственной функции, норме сбережения и т. п. Будем считать, что u_{it} имеют нулевое среднее и одинаковую дисперсию σ_u^2 для всех экономик, а также независимы по времени и по экономикам.

Одной из мер разброса или неравенства доходов на душу населения является простая дисперсия $\log(y_{it})$:

$$D_t \equiv \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} [\log(y_{it}) - \mu_t]^2,$$

где μ_t — выборочное среднее значение $\log(y_{it})$. Если число наблюдений N достаточно велико, то выборочная дисперсия близка к дисперсии генеральной совокупности, так что мы можем использовать уравнение (1.31) для записи эволюции D_t во времени:

$$D_t \approx (1-b)^2 \cdot D_{t-1} + \sigma_u^2.$$

Это разностное уравнение первого порядка для дисперсии имеет стационарное состояние, в котором

$$D^* = \frac{\sigma_u^2}{[1-(1-b)^2]}.$$

Следовательно, стационарная дисперсия является убывающей функцией b (b определяет силу эффекта сходимости), но является возрастающей функцией дисперсии элемента возмущения σ_u^2. В частности, $D^* > 0$ даже если $b > 0$ при $\sigma_u^2 > 0$.

Динамика D_t может быть записана так:

$$D_t = D^* + (1-b)^2 \cdot (D_{t-1} - D^*) = D^* + (1-b)^{2t} \cdot (D_0 - D^*), \quad (1.32)$$

где D_0 — дисперсия в период времени 0. Так как $0 < b < 1$, то D_t монотонно стремится к своему стационарному значению D^*. Из уравнения (1.32) следует, что D_t растет или снижается со временем в зависимости

[1] Условие $b < 1$ исключает эффекты скачков или перескоков, в результате чего экономика, стартующая позади другой экономики, оказывалась бы впереди нее в недалеком будущем. Такие эффекты перепрыгивания невозможны в неоклассической модели, но могут проявиться в некоторых моделях технологической адаптации, которые мы рассмотрим в гл. 8.

от того, больше D_0 стационарного значения или меньше[1]. Отметим, что растущая дисперсия согласуется с абсолютной сходимостью ($b > 0$).

Все эти выводы относительно сходимости и дисперсии похожи на известное заблуждение Гальтона относительно распределения роста среди населения (см. Quah, 1993, и Hart, 1995). Из наблюдения, что рост членов семьи сходится к среднему значению от поколения к поколению (свойство, аналогичное нашей концепции сходимости дохода на душу населения), вовсе не следует, что разброс роста по всему населению (мера, аналогичная разбросу доходов на душу населения по экономикам) имеет тенденцию к сокращению со временем.

1.2.12. Технологический прогресс

Классификация изобретений. До сих пор мы считали, что уровень технологии не меняется со временем. Как результат мы обнаружили, что все переменные на душу населения оказались постоянными в долгосрочной перспективе. Однако очевидно, что такая особенность модели совершенно не реалистична; например, в США средний подушевой темп прироста оставался положительным на протяжении двух столетий. В отсутствие технологического прогресса убывающая отдача сделала бы невозможным поддержание подушевого роста так долго только лишь благодаря накоплению капитала. Экономисты неоклассического направления 1950-1960-х гг. осознали эту проблему и усовершенствовали базовую модель, предположив, что технология улучшается со временем. Эти усовершенствования позволили избежать убывания отдачи и, таким образом, открыли возможность долгосрочного роста подушевых величин. Теперь мы изучим работу этой модели, допустив наличие такого технологического прогресса.

Хотя некоторые открытия и делаются случайно, основная масса технологических усовершенствований осуществляется все же в рамках целенаправленных усилий, таких как научные исследования и опытно-конструкторские работы (НИОКР), которые проводятся в университетах, а также в корпоративных и правительственных лабораториях. Эти исследования частично финансируются частными институтами, а частично правительственными учреждениями, такими как Национальный

[1] Мы можем обобщить модель, допустив возможность кратковременных скачков величины σ_u^2 или более серьезных возмущений, таких как войны или нефтяные кризисы, которые воздействуют на большую подгруппу экономик одинаковым образом. В этой обобщенной модели дисперсия может отходить от определенной нами траектории; например, D_t может расти в некоторые периоды времени, несмотря на то что дисперсия в нулевой период времени D_0 была выше своего стационарного значения.

научный фонд США. Так как объем ресурсов, используемых в НИОКР, зависит от экономических условий, то развитие технологии также зависит от этих условий. Эта зависимость будет подробно исследована нами в гл. 6–8, а сейчас мы остановимся только на простейшем случае, в котором технология улучшается экзогенно.

Первый вопрос как включить экзогенный технологический прогресс в модель. Этот прогресс может принимать различные формы. Изобретения могут позволять производителям выпускать такое же количество продукции либо с меньшим использованием капитала, либо с меньшими затратами труда – эти случаи принято называть *капиталосберегающим* и *трудосберегающим* технологическим прогрессом соответственно. Изобретения, которые не приводят к сбережению относительно большего объема одного из ресурсов, называются *нейтральными* или *несмещенными*.

Определение нейтрального технологического прогресса зависит от смысла понятий «сбережение капитала» и «сбережение труда». Три популярных определения были предложены в работах Hicks (1932), Harrod (1942) и Solow (1969).

Технологическая инновация является нейтральной по Хиксу (Хикс-нейтральной), если отношение предельных продуктов остается неизменным при заданном отношении капитала к труду. Это свойство соответствует перенумерации изоквант, так что Хикс-нейтральные производственные функции имеют вид:

$$Y = T(t) \cdot F(K, L), \tag{1.33}$$

где $T(t)$ — индекс состояния технологии, $\dot{T}(t) \geqslant 0$.

Харрод определяет инновацию как нейтральную (Харрод-нейтральную), если относительные доли ресурсов $(K \cdot F_K)/(L \cdot F_L)$ остаются неизменными при заданном отношении капитала к выпуску. Robinson (1938) и Uzawa (1961) показали, что из этого определения вытекает следующий вид производственной функции:

$$Y = F[K, L \cdot T(t)], \tag{1.34}$$

где $T(t)$ — индекс технологии, $\dot{T}(t) \geqslant 0$. Этот вид называется *трудоинтенсивным* технологическим прогрессом, потому что он увеличивает выпуск таким же образом, как если бы увеличился объем затрачиваемого труда. (Заметим, что технологический множитель $T(t)$ входит в производственную функцию в виде коэффициента при L.)

И наконец, Солоу называет инновацию нейтральной (Солоу-нейтральной), если относительные доли ресурсов $(L \cdot F_L)/(K \cdot F_K)$ остаются неизменными при заданном отношении труда к выпуску. Можно показать, что из этого определения вытекает следующий вид производственной функции:

$$Y = F[K \cdot T(t), L], \tag{1.35}$$

где $T(t)$ – индекс технологии, $\dot{T}(t) \geqslant 0$. Производственные функции такого вида называются *капиталоинтенсивными*, так как технологическое улучшение увеличивает производство таким же образом, как если бы увеличился объем основного капитала.

Почему технологический прогресс должен быть трудоинтенсивным. Рассмотрим только постоянные коэффициенты технологического прогресса. В неоклассической модели роста с постоянным темпом прироста населения только трудоинтенсивный технологический прогресс оказывается совместимым с существованием в модели стационарного состояния, т. е. состояния с постоянными темпами прироста различных величин в течение продолжительного периода времени. Этот результат приводится в приложении к данной главе (разд. 1.5).

Поэтому если мы хотим, чтобы в исследуемых моделях наличествовало стационарное состояние, мы должны предположить, что технологический прогресс имеет трудоинтенсивную форму. Впрочем, можно было бы идти другим путем, существенно более сложным, основанным на рассмотрении моделей, в которых отсутствуют стационарные состояния, т. е. темпы прироста различных переменных не сходятся к константам в долгосрочной перспективе. Одной из причин остановиться на более простой схеме с наличием стационарного состояния является то, что долгосрочный опыт США и других развитых стран обнаруживает, что темпы прироста на душу населения могут быть положительными и с четко выраженным трендом в течение долгого периода времени (см. гл. 12). Наличие такого эмпирического феномена означает, что полезная на практике теория должна выдавать прогноз, согласно которому подушевые темпы прироста различных величин сходятся к некоторым константам в долгосрочной перспективе: т. е. модель в таком случае будет иметь стационарное состояние.

Если в качестве производственной функции взята функция Кобба–Дугласа $Y = A \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, то, как нетрудно проверить, не имеет значения, какую форму имеет технологический прогресс – увеличивает ли он интенсивность использования A, K или L – в любом случае результаты будут одинаковыми (подробности – в приложении). Таким образом, в случае функции Кобба–Дугласа предположение о трудоинтенсивной форме технологического прогресса сохраняется. Вспомним, что ключевым свойством функции Кобба–Дугласа является то, что в условиях конкуренции доли факторного дохода постоянны. Следовательно, если доли факторного дохода приемлемо стабильны — что вроде бы верно для экономики США, но не для некоторых других стран, – то мы вполне можем взять функцию Кобба–Дугласа в качестве хорошего приближения производственной функции и, таким образом, считать, что технологический прогресс является трудоинтенсивным.

Другой подход, использующий производственную функцию не в виде функции Кобба–Дугласа, основан на выводе вида производственной функции из теории технологического прогресса. В рамках этого подхода Acemoglu (2002) использует вариант модели эндогенного технологического прогресса, рассматриваемый нами в гл. 6. Он обнаружил, что при определенных условиях технологических прогресс асимптотически становится трудоинтенсивным.

Модель Солоу—Свэна с технологическим прогрессом в трудоинтенсивной форме. Предположим теперь, что производственная функция включает в себя трудоинтенсивный технологический прогресс, как показано в уравнении (1.34), и что технологический член $T(t)$ растет с постоянным темпом x. Тогда изменение объема основных фондов задается уравнением:

$$\dot{K} = s \cdot F[K, L \cdot T(t)] - \delta K.$$

Если мы разделим обе части этого уравнения на L, то получим выражение для изменения k со временем:

$$\dot{k} = s \cdot F[k, T(t)] - (n + \delta) \cdot k. \tag{1.36}$$

Единственное отличие от уравнения (1.13) — то, что выпуск теперь зависит от уровня технологии $T(t)$.

Разделим обе части уравнения (1.36) на k, получим темп прироста:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s \cdot F[k, \cdot T(t)]}{k - (n + \delta)}. \tag{1.37}$$

Так же как и в уравнении (1.23), $\dot{k}/k$ равняется разности двух членов, первый из которых является произведением s и среднего продукта капитала, а второй – $n + \delta$. Единственным отличием здесь является то, что при заданном k средний продукт капитала $F[k, T(t)]/k$ растет со временем вследствие роста $T(t)$ с темпом x. В терминах рис. 1.4 наклоненная вниз кривая $s \cdot F(\cdot)/k$ смещается непрерывно вправо и, следовательно, уровень k, который соответствует пересечению этой кривой и прямой $n + \delta$, также смещается непрерывно вправо. Найдем теперь темп прироста k в стационарном состоянии.

По определению, стационарный темп прироста $(\dot{k}/k)^*$ постоянен. Так как s, n и δ также постоянны, то из уравнения (1.37) следует, что в стационарном состоянии должен быть постоянным средний продукт капитала $F[k, T(t)]/k$. Вследствие постоянства эффективности с ростом масштаба производства выражение для среднего продукта равно $F[1, T(t)/k]$ и, таким образом, может быть постоянным, только если k и $T(t)$ растут с одинаковым темпом, т. е. $(\dot{k}/k)^* = x$.

Выпуск на человека задается уравнением:

$$y = F[k, T(t)] = k \cdot F\left[\frac{1, T(t)}{k}\right].$$

Так как k и $T(t)$ в стационарном состоянии растут с темпом x, то стационарное значение темпа прироста y также равно x. Более того, так как $c = (1 - s) \cdot y$, то стационарный темп прироста c тоже равен x.

Для того чтобы проанализировать переходную динамику данной модели с технологическим прогрессом, нам будет удобно переписать все уравнения в переменных, которые остаются постоянными в стационарном состоянии. Так как k и $T(t)$ растут в стационарном состоянии с одинаковым темпом, то мы будем в дальнейшем работать с переменной, равной отношению:

$$\hat{k} \equiv \frac{k}{T(t)} = \frac{K}{[L \cdot T(t)]}.$$

Переменная $L \cdot T(t) \equiv \hat{L}$ часто называется *эффективным объемом труда* - физическое количество труда L, умноженное на его эффективность $T(t)$. (Термин *эффективный труд* вполне приемлем, если считать что в данной экономике под трудовым ресурсом понимается $\hat{L}$.) Переменная $\hat{k}$ в таком случае представляет собой объем капитала на единицу эффективного труда.

Объем выпуска на единицу эффективного труда

$$\hat{y} \equiv \frac{Y}{[L \cdot T(t)]}$$

преобразуется к виду

$$\hat{y} = F(\hat{k}, 1) \equiv f(\hat{k}). \tag{1.38}$$

Следовательно, мы, как и раньше, можем записать производственную функцию в интенсивной форме, заменив y и k на $\hat{y}$ и $\hat{k}$ соответственно. Осуществив те же преобразования, что мы делали для получения уравнений (1.13) и (1.23), но с учетом того, что теперь $A(t)$ растет с темпом прироста x, получаем следующее динамическое уравнение для $\hat{k}$:

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = s \cdot \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - (x + n + \delta). \tag{1.39}$$

Единственным отличием уравнения (1.39) от (1.23), помимо шляпок (ˆ) над переменными, является то, что последний член в правой части уравнения содержит параметр x. Член $x + n + \delta$ теперь является эффективной нормой амортизации $\hat{k} \equiv K/\hat{L}$. Если бы норма сбережения s была нулевой, то $\hat{k}$ убывала бы частично из-за выбытия K с темпом δ, частично из-за роста $\hat{L}$ с темпом $x + n$.

Исходя из аргументации, подобной той, что мы приводили в разд. 1.2.3, мы можем доказать, что стационарный темп прироста $\hat{k}$ равен нулю. Стационарное значение $\hat{k}^*$ удовлетворяет условию:

$$s \cdot f(\hat{k}^*) = (x + n + \delta) \cdot \hat{k}^*. \tag{1.40}$$

Переходная динамика $\hat{k}$ качественно такая же, что и динамика k в предыдущей модели. В частности, мы можем нарисовать такую же картинку, как на рис. 1.4, в которой по горизонтальной оси откладываются $\hat{k}$, вниз наклоненная кривая теперь является $s \cdot f(\hat{k})/\hat{k}$, а горизонтальная линия находится на уровне $x+n+\delta$, а не $n+\delta$, как было раньше (см. рис. 1.11). Мы можем воспользоваться этим рисунком, как

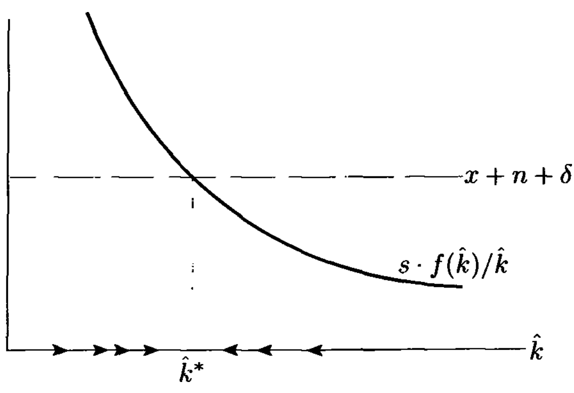


Рис. 1.11. Модель Солоу—Свэна с технологическим прогрессом. Темп прироста капитала на эффективного работника ($\hat{k} \equiv K/LT$) дается расстоянием по вертикали между кривой $s \cdot f(\hat{k})/\hat{k}$ и прямой эффективного выбытия $x + n + \delta$. Экономика находится в стационарном состоянии, когда величина $\hat{k}$ постоянна. Так как T растет с постоянным темпом x, стационарный темп прироста капитала на человека k также равен x

мы использовали ранее рис. 1.4, для того чтобы определить отношение между начальным значением $\hat{k}(0)$ и темпом прироста $\dot{\hat{k}}/\hat{k}$.

В стационарном состоянии, переменные $\hat{k}$, $\hat{y}$ и $\hat{c}$ теперь уже постоянны. Следовательно, подушевые значения переменных k, y и c растут теперь в стационарном состоянии с темпом, равным экзогенно заданному коэффициенту технологического прогресса x[1]. Соответственно переменные K, Y и C растут в стационарном состоянии с темпом $n + x$, т. е. с темпом, равным сумме темпа прироста населения и коэффициента технологического прогресса. Заметим, что так же, как и в предыдущем анализе, в котором не было технологического прогресса, в данном случае сдвиги в норме сбережения или уровне производственной функции влияют на долгосрочные $\hat{k}^*$, $\hat{y}^*$ и $\hat{c}^*$, но не на стационарные темпы прироста. Как и ранее, эти виды возмущений воздействуют на темпы прироста в процессе перехода из начального состояния $\hat{k}(0)$ в стационарное состояние $\hat{k}^*$.

1.2.13. Количественная мера скорости сходимости

Скорость движения во время переходной динамики — достаточно важная информация. Если сходимость быстрая, то мы можем сфокусироваться на динамике стационарного состояния, потому что большинство экономик обычно находится вблизи их стационарных состояний. И наоборот, если сходимость медленная, то экономики будут в основном далеко от своих стационарных состояний, и, следовательно, больший вес приобретает переходная динамика, а не рост.

Сделаем количественную оценку скорости сходимости экономики к своему стационарному состоянию в случае, если производственная функция имеет вид функции Кобба–Дугласа, представленной в уравнении (1.11). (Позже мы обобщим результаты на более широкий класс производственных функций.) Заменим в уравнении (1.39) L на $\hat{L}$, после

[1] У нас есть условие

$$\frac{1}{\hat{k}} \cdot \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\dot{k}}{k} - x.$$

Следовательно, из

$$\frac{1}{\hat{k}} \cdot \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \quad \text{следует} \quad \frac{\dot{k}}{k} = x.$$

Аналогично для $\dot{y}/y$ и $\dot{c}/c$.

чего получаем темп прироста $\hat{k}$ в случае функции Кобба—Дугласа:

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = sA \cdot (\hat{k})^{-(1-\alpha)} - (x + n + \delta). \tag{1.41}$$

Скорость сходимости β измеряется величиной снижения темпа прироста капитала при соразмерном увеличении объема капитала, т. е.

$$\beta \equiv -\frac{\partial(\dot{\hat{k}}/\hat{k})}{\partial \log \hat{k}}. \tag{1.42}$$

Заметим, что мы определили β с отрицательным знаком, потому что производная отрицательна, а мы хотим, чтобы β была положительной.

Для вычисления β нам нужно записать темп прироста в уравнении (1.41) в виде функции $\log(\hat{k})$:

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = sA \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k})} - (x + n + \delta). \tag{1.43}$$

Продифференцируем уравнение (1.43) по $\log(\hat{k})$, получим выражение для β:

$$\beta = (1-\alpha) \cdot sA \cdot (\hat{k})^{-(1-\alpha)}. \tag{1.44}$$

Заметьте, что скорость сходимости здесь не постоянна, а монотонно убывает по мере того, как объем капитала возрастает в направлении своего стационарного значения. В стационарном состоянии выполнено равенство $sA \cdot (\hat{k})^{-(1-\alpha)} = x + n + \delta$. Следовательно, в окрестности стационарного состояния, скорость сходимости равна

$$\beta^* = (1-\alpha) \cdot (x + n + \delta). \tag{1.45}$$

В процессе перехода в стационарное состояние темп сходимости β больше β^*, но уменьшается со временем.

Формулу для β^* можно получить и иначе, рассмотрев лог-линейную аппроксимацию уравнения (1.41) в окрестности стационарного состояния:

$$\frac{\dot{k}}{k} \cong -\beta^* \cdot \left[\log\left(\frac{\hat{k}}{\hat{k}^*}\right)\right], \tag{1.46}$$

где коэффициент β^* получен из лог-линеаризации уравнения (1.41) в окрестности стационарного состояния. Итоговый коэффициент, как нетрудно проверить, равен правой части уравнения (1.45). Более детально метод вывода данной лог-линеаризации описан в приложении в конце данной главы (разд. 1.5).

Перед тем как мы рассмотрим дальнейшие следствия из равенства (1.45), покажем, что данное равенство выполнено также и для темпа прироста $\hat{y}$. Для производственной функции Кобба—Дугласа (1.11) имеем

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \alpha \cdot \left(\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}\right); \quad \log\left(\frac{\hat{y}}{\hat{y}^*}\right) = \alpha \cdot \log\left(\frac{\hat{k}}{\hat{k}^*}\right).$$

Если мы подставим эти выражения в уравнение (1.46), то получим

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} \approx -\beta^* \cdot \left[\log\left(\frac{\hat{y}}{\hat{y}^*}\right)\right]. \tag{1.47}$$

Следовательно, коэффициент сходимости для $\hat{y}$ такой же, как и для $\hat{k}$.

Выражение (1.45) показывает, насколько быстро выпуск на одного эффективного работника $\hat{y}$, стартуя из окрестности стационарного состояния, достигает своего стационарного значения $\hat{y}^*$. Например, если $\beta^* = 0{,}05$ в год, то за 1 год разрыв между $\hat{y}$ и $\hat{y}^*$ будет сокращен только на 5%. Половина начального разрыва в таком случае будет преодолена за 14 лет[1)], три четверти – за 28 лет.

Узнаем теперь, каковы количественные следствия теории относительно коэффициента сходимости $\beta^* = (1-\alpha)\cdot(x+n+\delta)$ из уравнения (1.45). Одним из свойств является то, что норма сбережения s никоим образом не воздействует на β^*. Этот результат отражает взаимную нейтрализацию двух сил, что является следствием того, что в качестве производственной функции была взята функция Кобба–Дугласа. Во-первых, при заданном $\hat{k}$ большое значение нормы сбережения приводит к высокому уровню инвестирования и, как следствие, к высокой скорости сходимости. Во-вторых, увеличение нормы сбережения приводит к росту стационарного значения капиталоемкости $\hat{k}^*$ и, следовательно, снижается средний продукт капитала вблизи стационарного состояния. Этот эффект снижает скорость сходимости. Коэффициент β^* также не зависит от уровня эффективности экономики в целом A. Изменения в A, так же как и изменения в s, приводят к двум противоположным по воздействию на скорость сходимости силам, которые в случае функции Кобба—Дугласа в точности нейтрализуют друг друга.

Для того чтобы сделать количественные выводы относительно параметров, входящих в равенство (1.45), зададимся эталонными значениями

[1)] Уравнение (1.47) является дифференциальным уравнением относительно $\log[\hat{y}(t)]$ с решением

$$\log[\hat{y}(t)] = (1 - e^{-\beta^* t}) \cdot \log(\hat{y}^*) + e^{-\beta^* t} \cdot \log[\hat{y}(0)].$$

Время t, для которого $\log[\hat{y}(t)]$ находится посередине между $\log[\hat{y}(0)]$ и $\log(\hat{y}^*)$, определяется из условия $e^{-\beta^* t} = 1/2$. Отсюда если $\beta^* = 0{,}05$, то половина пути проходится за 14 лет.

$x = 0{,}02$ в год, $n = 0{,}01$ в год и $\delta = 0{,}05$ в год. Эти значения вполне реалистичны, например, для экономики США. Долгосрочный темп прироста реального ВВП, который составляет 2% в год, соответствует в данной теории параметру x. Темп прироста населения в последние декады был равен 1% в год. Оценка темпа выбытия всех строений и оборудования в США составляет примерно 5% в год.

При заданных значениях параметров x, n и δ коэффициент β^* в уравнении (1.45) определяется долевым капитальным параметром α. Обычная доля валового дохода, накапливаемая в физическом капитале, в узком смысле (строения и оборудование) составляет примерно 1/3 (см. Denison, 1962; Maddison, 1982; и Jorgenson, Gallop, and Fraumeni, 1987). Если мы зададимся $\alpha = 1/3$, то из уравнения (1.45) следует $\beta^* = 5{,}6\%$ в год, откуда ясно, что половина пути сходимости в стационарное состояние будет пройдена за 12,5 лет. Другими словами, если доля капитала равна 1/3, то неоклассическая модель прогнозирует относительно короткие переходы.

В гл. 11 и 12 мы покажем, что такая прогнозная скорость сходимости слишком высока в сравнении с эмпирическими наблюдениями. Коэффициент сходимости β гораздо лучше согласуется с данными, если находится в диапазоне от 1,5 до 3,0% в год. Если $\beta^* = 2{,}0\%$ в год, то половина пути проходится за 35 лет, а время, затрачиваемое на преодоление трех четвертей начального разрыва до стационарного состояния, составляет 70 лет. Другими словами, скорости сходимости, согласованные с эмпирическими наблюдениями, столь низки, что существенное сокращение расстояния до стационарного состояния происходит на протяжении жизни нескольких поколений.

Для того чтобы в неоклассической модели наблюдаемый темп сходимости составлял около 2% в год, необходимо брать значительно большие значения коэффициента доли капитала. Например, значение $\alpha = 0{,}75$ совместно с эталонными значениями других параметров дает $\beta^* = 2{,}0\%$ в год. Хотя доля капитала, равная 0,75, слишком велика для физического капитала в узком смысле, такое значение вполне реально, если под капиталом подразумевать капитал в широком смысле, который включает в себя также и человеческий капитал.

Расширенная версия модели Солоу—Свэна с физическим и человеческим капиталами. Одним из способов увеличения доли капитала является добавление человеческого капитала в модель. Рассмотрим производственную функцию Кобба–Дугласа, в качестве производственных факторов в которой используются физический капитал K, человеческий капитал H[1] и неквалифицированный труд L:

$$Y = AK^{\alpha}H^{\eta}[T(t)\cdot L]^{1-\alpha-\eta}, \tag{1.48}$$

где $T(t)$, как и ранее, растет с экзогенно заданным темпом x. Разделим производственную функцию на $T(t)\cdot L$, в результате чего получим выражение для выпуска на единицу эффективного труда:

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}. \tag{1.49}$$

Выпуск расходуется целиком на потребление или инвестиции в любой из двух типов капитала. Следуя Солоу и Свэну, мы по-прежнему считаем, что люди потребляют постоянную долю $1-s$ своего валового дохода, так что уравнение накопления имеет вид

$$\dot{\hat{k}} + \dot{\hat{h}} = sA\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta} - (\delta+n+x)\cdot(\hat{k}+\hat{h}), \tag{1.50}$$

в этом уравнении предполагается, что оба вида капитальных товаров выбывают с одинаковым постоянным темпом.

Здесь возникает ключевой вопрос: каким образом совокупные сбережения будут распределены между физическим и человеческим капиталами? Вполне резонно полагать, что домохозяйства будут инвестировать в те капитальные товары, которые приносят больший доход, так что если обе формы инвестирования имеют место, то их нормы доходности — и, следовательно, предельные продукты капитала — должны быть равны друг другу. Поэтому имеем следующее условие[2]:

$$\alpha\cdot\frac{\hat{y}}{\hat{k}} - \delta = \eta\cdot\frac{\hat{y}}{\hat{h}} - \delta. \tag{1.51}$$

---

[1] Более детально человеческий капитал рассматривается в гл. 4 и 5.

[2] В условиях рынка прибыль равна

$$\pi = AK_t^{\alpha}H_t^{\eta}(T_tL_t)^{1-\alpha-\eta} - R_kK - R_hH - wL,$$

где R_k и R_h — ставки арендной платы за физический и человеческий капиталы соответственно. Из условия первого порядка для фирмы следует, что предельный продукт каждого из капитальных товаров должен быть равен ставке арендной платы, т. е.

$$R_k = \alpha\cdot\frac{\hat{y}}{\hat{k}} \quad \text{и} \quad R_h = \eta\cdot\frac{\hat{y}}{\hat{h}}.$$

При отсутствии неопределенности, что мы, собственно, и предполагаем, физический капитал, человеческий капитал и займы являются совершенными заменителями друг друга как средства накопления, и, как результат, их чистые доходности должны быть одинаковыми. Другими словами, $r = R_k - \delta = R_h - \delta$. Следовательно, оптимизирующие фирмы арендуют физический и человеческий капиталы до тех пор, пока их предельные продукты не сравняются.

Равенство между предельными продуктами означает, что соотношение между физическим и человеческим капиталами имеет вид:

$$\hat{h} = \frac{\eta}{\alpha} \cdot \hat{k}. \tag{1.52}$$

Мы можем воспользоваться этим соотношением для исключения $\hat{h}$ из уравнения (1.50), чтобы получить

$$\dot{\hat{k}} = s\tilde{A}\hat{k}^{\alpha+\eta} - (\delta + n + x) \cdot \hat{k}, \tag{1.53}$$

где $\tilde{A} \equiv \eta^\eta \alpha^{1-\eta}/(\alpha + \eta) \cdot A$ — константа. Обратите внимание, что уравнение накопления здесь такое же, как и уравнение (1.41), за исключением того, что показатель степени капитала теперь равен сумме долей физического и человеческого капиталов $\alpha + \eta$, а не α. Аналогично тому, как мы это делали в предыдущем разделе, мы можем получить выражение для коэффициента сходимости в стационарное состояние:

$$\beta^* = (1 - \alpha - \eta) \cdot (\delta + n + x). \tag{1.54}$$

В работе Jorgenson, Gollop, and Fraumeni (1987) дана оценка значения доли человеческого капитала в диапазоне от 0,4 до 0,5. Если взять $\eta = 0{,}4$ и эталонные остальные параметры из предыдущего раздела, включая $\alpha = 1/3$, то получим прогнозируемую скорость сходимости, равную $\beta^* = 0{,}021$. Таким образом, если интерпретировать капитал в широком смысле, включив в него человеческий капитал, то в модели Солоу–Свэна могут получаться темпы сходимости, согласующиеся с эмпирическими наблюдениями.

В работе Mankiw, Romer, and Weil (1992) использована производственная функция, аналогичная функции (1.48). Однако вместо предположения Солоу–Свэна о том, что норма валового сбережения постоянна и экзогенна, в данной работе предполагается, что нормы инвестирования в два вида капитала постоянны и экзогенны. Тогда темп прироста физического капитала задается уравнением:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}} &= s_k\tilde{A}\hat{k}^{\alpha-1}\hat{h}^\eta - (\delta + n + x) = \\ &= s_k\tilde{A}e^{-(1-\alpha)\ln\hat{k}} \cdot e^{\eta\ln\hat{h}} - (\delta + n + x),\end{aligned} \tag{1.55}$$

где s_k — экзогенная константа. Аналогично темп прироста человеческого капитала:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{h}} &= s_h\tilde{A}\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta-1} - (\delta + n + x) = \\ &= s_h\tilde{A}e^{\alpha\ln\hat{k}} \cdot e^{-(1-\eta)\ln\hat{h}} - (\delta + n + x),\end{aligned} \tag{1.56}$$

где s_h – другая экзогенная константа. Недостатком этого подхода является то, что нормы доходности физического и человеческого капиталов не равны.

Темп прироста $\hat{y}$ является взвешенным средним темпов прироста двух ресурсов:

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \alpha \cdot \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} + \eta \cdot \frac{\dot{\hat{h}}}{\hat{h}}.$$

Используя выражения (1.55) и (1.56), разложим правую часть последнего уравнения в двумерный ряд Тейлора первого порядка, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} &= \big[\alpha s_k \tilde{A} \cdot e^{-(1-\alpha)\ln\hat{k}^*} \cdot e^{\eta \ln \hat{h}^*} \cdot [-(1-\alpha)] + \\ &+ \eta s_h \tilde{A} \cdot e^{\alpha \ln \hat{k}^*} \cdot e^{-(1-\eta)\ln\hat{h}^*} \cdot \alpha\big] \cdot (\ln\hat{k} - \ln\hat{k}^*) + \\ &+ \big[\alpha s_k \tilde{A} \cdot e^{-(1-\alpha)\ln k^*} \cdot e^{\hat{\eta}\ln h^*} + \\ &+ \eta s_h \tilde{A} \cdot e^{\alpha \ln \hat{k}} \cdot e^{-(1-\eta)\ln\hat{h}^*} \cdot [-(1-\eta)]\big] \cdot (\ln\hat{\eta} - \ln\hat{\eta}^*).\end{aligned}$$

Условие стационарности, при котором (1.55) и (1.56) приравнены нулю, дает

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} &= -(1-\alpha-\eta) \cdot (\delta + n + x) \cdot [\alpha \cdot (\ln\hat{k} - \ln\hat{k}^*) + \\ &+ \eta \cdot (\ln\hat{h} - \ln\hat{h}^*)] = -\beta^* \cdot (\ln\hat{y} - \ln\hat{y}^*).\end{aligned} \tag{1.57}$$

Следовательно, в окрестности стационарного состояния, коэффициент сходимости определяется равенством

$$\beta^* = (1-\alpha-\eta) \cdot (\delta + n + x),$$

т. е. в точности (1.54).

1.3. Модели эндогенного роста

1.3.1. Теоретические недостатки неоклассической теории

Начиная с середины 1980-х гг. стало ясно, что стандартная неоклассическая модель роста была неудовлетворительным теоретическим инструментом исследования детерминантов долгосрочного роста. Мы уже видели, что модель без учета технологического прогресса прогнозирует сходимость экономики к стационарному состоянию с нулевым подушевым ростом. Основной причиной этого служит убывающая отдача капитала. Одним из способов решения этой проблемы было расширение концепции капитала за счет включения в него человеческого компонента с последующим предположением, что у этого расширенного капитала отдача не убывает. Этот подход описан в следующем разделе и подробно исследован в гл. 4 и 5. Однако другой подход к решению проблемы был основан на том, что технологический прогресс в виде порождения новых идей является единственным способом избежать в долгосрочной перспективе убывающей отдачи ресурсов в экономике. Таким образом, возникла необходимость отойти от трактовки технологического прогресса как экзогенного явления и объяснить этот прогресс внутри самой модели роста. Однако эндогенные подходы к моделированию технологического прогресса столкнулись с основными проблемами неоклассической модели, наиболее существенной из которых является неконкурентная природа идей, лежащих в основе технологии.

Вспомним, что ключевой характеристикой состояния технологии T является то, что она является неконкурентным ресурсом производственного процесса. Поэтому, повторяя аргументацию, которую мы уже не раз приводили для обоснования предположения о постоянстве эффективности с ростом масштаба производства, будем считать, что правильной мерой масштаба производства являются объемы двух конкурентных ресурсов, капитала и труда. То есть концепция постоянства эффективности с ростом масштаба производства выражалась у нас в однородности степени один по K и L:

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda \cdot F(K, L, T).$$

Вспомним также, что, согласно теореме Эйлера, если функция однородна степени один, то ее можно представить в виде

$$F(K, L, T) = F_K \cdot K + F_L \cdot L. \tag{1.58}$$

До сих пор наш анализ основывался на предположении, что одна и та же технология T бесплатна и доступна для всех фирм. Такая возможность технически осуществима в силу того что T является неконкурентным товаром. Однако возможно, что технология T, по крайней мере частично, не общедоступна — например, защита патентом, секретность и опыт могут позволить некоторым производителям иметь доступ к таким технологиям, которые превосходят технологии, которые доступны всем остальным. Пока что мы оставим в силе предположение, что технология общедоступна, т. е. все производители имеют к ней одинаковый доступ. Это предположение означает также, что любое технологическое улучшение сразу же становится доступно всем производителям.

Из нашего предыдущего анализа нам известно, что для совершенно конкурентной фирмы, для которой цены на ресурсы $F_K = R$ и $F_L = w$

где s_h — другая экзогенная константа. Недостатком этого подхода является то, что нормы доходности физического и человеческого капиталов не равны.

Темп прироста $\hat{y}$ является взвешенным средним темпов прироста двух ресурсов:

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \alpha \cdot \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} + \eta \cdot \frac{\dot{\hat{h}}}{\hat{h}}.$$

Используя выражения (1.55) и (1.56), разложим правую часть последнего уравнения в двумерный ряд Тейлора первого порядка, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = &\Big[\alpha s_k \tilde{A} \cdot e^{-(1-\alpha)\ln \hat{k}^*} \cdot e^{\eta \ln \hat{h}^*} \cdot [-(1-\alpha)] + \\ &+ \eta s_h \tilde{A} \cdot e^{\alpha \ln \hat{k}^*} \cdot e^{-(1-\eta)\ln \hat{h}^*} \cdot \alpha\Big] \cdot (\ln \hat{k} - \ln \hat{k}^*) + \\ &+ \Big[\alpha s_k \tilde{A} \cdot e^{-(1-\alpha)\ln k^*} \cdot e^{\hat{\eta} \ln h^*} + \\ &+ \eta s_h \tilde{A} \cdot e^{\alpha \ln \hat{k}} \cdot e^{-(1-\eta)\ln \hat{h}^*} \cdot [-(1-\eta)]\Big] \cdot (\ln \hat{\eta} - \ln \hat{\eta}^*).\end{aligned}$$

Условие стационарности, при котором (1.55) и (1.56) приравнены нулю, дает

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = &-(1-\alpha-\eta) \cdot (\delta + n + x) \cdot [\alpha \cdot (\ln \hat{k} - \ln \hat{k}^*) + \\ &+ \eta \cdot (\ln \hat{h} - \ln \hat{h}^*)] = -\beta^* \cdot (\ln \hat{y} - \ln \hat{y}^*).\end{aligned} \tag{1.57}$$

Следовательно, в окрестности стационарного состояния, коэффициент сходимости определяется равенством

$$\beta^* = (1-\alpha-\eta) \cdot (\delta + n + x),$$

т. е. в точности (1.54).

1.3. Модели эндогенного роста

1.3.1. Теоретические недостатки неоклассической теории

Начиная с середины 1980-х гг. стало ясно, что стандартная неоклассическая модель роста была неудовлетворительным теоретическим инструментом исследования детерминантов долгосрочного роста. Мы уже видели, что модель без учета технологического прогресса прогнозирует сходимость экономики к стационарному состоянию с нулевым подушевым ростом. Основной причиной этого служит убывающая отдача капитала. Одним из способов решения этой проблемы было расширение концепции капитала за счет включения в него человеческого компонента с последующим предположением, что у этого расширенного капитала отдача не убывает. Этот подход описан в следующем разделе и подробно исследован в гл. 4 и 5. Однако другой подход к решению проблемы был основан на том, что технологический прогресс в виде порождения новых идей является единственным способом избежать в долгосрочной перспективе убывающей отдачи ресурсов в экономике. Таким образом, возникла необходимость отойти от трактовки технологического прогресса как экзогенного явления и объяснить этот прогресс внутри самой модели роста. Однако эндогенные подходы к моделированию технологического прогресса столкнулись с основными проблемами неоклассической модели, наиболее существенной из которых является неконкурентная природа идей, лежащих в основе технологии.

Вспомним, что ключевой характеристикой состояния технологии T является то, что она является неконкурентным ресурсом производственного процесса. Поэтому, повторяя аргументацию, которую мы уже не раз приводили для обоснования предположения о постоянстве эффективности с ростом масштаба производства, будем считать, что правильной мерой масштаба производства являются объемы двух конкурентных ресурсов, капитала и труда. То есть концепция постоянства эффективности с ростом масштаба производства выражалась у нас в однородности степени один по K и L:

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda \cdot F(K, L, T).$$

Вспомним также, что, согласно теореме Эйлера, если функция однородна степени один, то ее можно представить в виде

$$F(K, L, T) = F_K \cdot K + F_L \cdot L. \tag{1.58}$$

До сих пор наш анализ основывался на предположении, что одна и та же технология T бесплатна и доступна для всех фирм. Такая возможность технически осуществима в силу того что T является неконкурентным товаром. Однако возможно, что технология T, по крайней мере частично, не общедоступна — например, защита патентом, секретность и опыт могут позволить некоторым производителям иметь доступ к таким технологиям, которые превосходят технологии, которые доступны всем остальным. Пока что мы оставим в силе предположение, что технология общедоступна, т. е. все производители имеют к ней одинаковый доступ. Это предположение означает также, что любое технологическое улучшение сразу же становится доступно всем производителям.

Из нашего предыдущего анализа нам известно, что для совершенно конкурентной фирмы, для которой цены на ресурсы $F_K = R$ и $F_L = w$

заданы извне, предельные продукты равны соответствующим ценам ресурсов, т. е. $F_K = R$ и $F_L = w$. Из уравнения (1.58) следует, что весь выпуск расходуется на оплату производственных факторов, так что прибыль каждой фирмы равна нулю в любой момент времени.

Предположим, что фирма имеет право улучшить свою технологию с T до T', заплатив фиксированную стоимость κ. Так как, согласно нашему предположению, новая технология становится бесплатно доступной всем остальным производителям тоже, то, как мы уже знаем, равновесные значения R и w таковы, что прибыль каждой фирмы равна 0. Следовательно, фирма, которая заплатила стоимость κ за новую технологию, просто потеряла деньги, так как данные фиксированные расходы не будут возмещены какой-либо дополнительной прибылью в будущем. Отсюда вытекает, что если технология общедоступна (или неконкурентна), то конкурентная неоклассическая модель не может поддерживать целенаправленное инвестирование в технологический прогресс.

Ясно, что следующим нашим шагом должно стать допущение, что технология может быть хотя бы частично необщедоступной. Чтобы выявить возникающие при таком расширении проблемы, рассмотрим крайний случай полной необщедоступности, т. е. технология каждой фирмы полностью частная и только ею используемая. Допустим, что существует бесконечно много способов, посредством которых фирма может улучшить свою технологию с T до T', только лишь заплатив фиксированную стоимость κ, другими словами, вход в бизнес создания формул бесплатен. Предположим, что в начале у всех фирм технология T. Будет ли в таком случае фирма иметь стимул к тому, чтобы, заплатив κ, улучшить технологию до T'? В самом деле, этот стимул должен быть огромным. Ведь при заданных ценах на ресурсы R и w неоклассическая фирма с лучшей технологией получит чистую прибыль на каждую произведенную единицу выпуска. Согласно нашему предположению о постоянстве эффективности, с ростом масштаба производства фирма будет стремиться нанять все имеющиеся в экономике ресурсы капитала и труда. В этом случае фирма приобретает большую монополистическую силу и далее уже не будет вести себя как совершенный конкурент на рынках товаров и ресурсов. В результате предположения конкурентной модели не выполнятся.

Другая возникающая в этом случае проблема заключается в том, что другие фирмы, увидев эту же возможность получить прибыль, тоже начнут платить стоимость κ за приобретение улучшенной технологии T'. Однако, когда многие фирмы улучшают свои технологии на одну и ту же величину, из-за конкуренции повышаются цены на ресурсы R и w, так что поток прибыли вновь обнуляется. В этом случае ни одна из фирм не может покрыть свои издержки κ, так же как и в модели с общедоступной технологией. Следовательно, равновесия здесь нет как в случае возникновения технологического улучшения (потому что все инноваторы несут потери), так и в случае отсутствия такового (потому что потенциальная прибыль одного инноватора огромна).

Эти концептуальные трудности заставили исследователей ввести в рассмотрение ряд положений несовершенной конкуренции с целью построить более подходящие модели, в которых уровень технологии может быть улучшен посредством целенаправленной активности, такой, например, как расходы на НИОКР. Такая возможность эндогенного технологического прогресса и, следовательно, *эндогенного роста* позволяет исключить эффект убывающей отдачи ресурсов на агрегированном уровне. Модели такого типа были впервые представлены в работах Romer (1990) и Aghion and Howitt (1992); мы их рассматриваем в гл. 6–8. Пока что мы имеем дело лишь с моделями, в которых технология либо постоянна, либо меняется экзогенным образом.

1.3.2. *AK*-модель

Ключевым свойством данного класса моделей эндогенного роста является отсутствие убывающей отдачи капитала. Простейшей версией производственной функции без убывающей отдачи является AK-функция[1]:

$$Y = AK, \tag{1.59}$$

где A положительная константа, которая отражает уровень технологии. Полное отсутствие убывающей отдачи капитала может показаться нереалистичным, но эта идея становится более правдоподобной, если мы будем считать K капиталом в широком смысле, включающим человеческий капитал[2]. Выпуск на человека y здесь равен Ak, а средний предельный продукт капитала постоянен и равен $A > 0$.

Если мы подставим $f(k)/k = A$ в уравнение (1.13), то получим

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - (n + \delta).$$

[1] Мы полагаем, что первым экономистом, который использовал производственную функцию типа AK, был von Newmann (1937).

[2] Knight (1944) отстаивает идею, что эффект убывающей доходности может отсутствовать, если капитал рассматривается в широком смысле.

Сейчас мы вернемся к случаю нулевого технологического прогресса $x = 0$, так как хотим показать. что долгосрочный рост на душу населения в данной модели может происходить и без экзогенного технологического прогресса. Отличием графического изображения, в данном случае от рис. 1.4, является замена наклоненной вниз кривой сбережения $s \cdot f(k)/k$ на горизонтальную прямую на уровне sA (рис. 1.12). Кривая выбытия капитала не меняется – это горизонтальная прямая на уровне $n + \delta$. Следовательно, отношение $\dot{k}/k$ равно вертикальному расстоянию между двумя прямыми sA и $n + \delta$. Мы отметили случай $sA > n + \delta$, так что $\dot{k}/k > 0$. Так как обе прямые параллельны, то $\dot{k}/k$ является константой и, в частности, не зависит от k. Это означает, что k всегда растет со стационарным темпом

$$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^* = sA - (n + \delta).$$

Так как $y = sA$, то выполнено $\dot{y}/y = \dot{k}/k$ для всех t. Более того, так как $c = (1 - s) \cdot y$, то выполнено также и $\dot{c}/c = \dot{k}/k$. Следовательно, все подушевые переменные в модели всегда растут с одним и тем же постоянным темпом

$$\gamma^* = sA - (n + \delta). \tag{1.60}$$

Отметим, что экономика, описываемая AK-технологией, может демонстрировать положительный долгосрочный подушевой рост в отсутствие всякого технологического прогресса. Кроме того, подушевой темп прироста, задаваемый уравнением (1.60), зависит от таких параметров модели, как s, A и n. Например, в отличие от неоклассической модели, большее значение s приводит к большему значению долгосрочного подушевого прироста γ^*[1]. Аналогично, если уровень технологии A возрастет раз и навсегда (например, за счет исключения правительственного вмешательства в экономику), то долгосрочный темп прироста также возрастет. Изменения в норме амортизации δ и темпе прироста населения n также имеют перманентное воздействие на подушевой темп прироста.

[1] С AK-производственной функцией мы никогда не получим того неэффективного избыточного сбережения, которое возможно в неоклассической модели. Перманентное изменение в некоторый момент времени величины s в сторону большего значения означает снижение уровня c в этот момент времени, но подушевой темп прироста γ^* при этом перманентно увеличивается и, следовательно, через некоторое время c тоже достигает высоких уровней. Такое изменение не может быть названо неэффективным, так как оно может быть желательным или нежелательным в зависимости от того, как домохозяйства дисконтируют будущие уровни потребления.

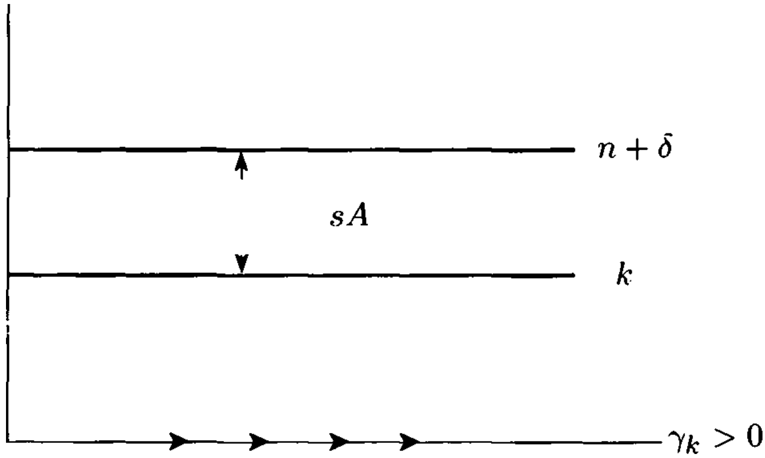


Рис. 1.12. *AK*-модель. Если технология имеет вид AK, то кривая сбережения $s \cdot f(k)/k$ является горизонтальной прямой на уровне sA. Если $sA > n + \delta$, то имеет место неограниченный рост k, даже без технологического прогресса

В отличие от неоклассической модели AK-модель не предсказывает абсолютной или относительной сходимости, т. е. $\partial(\dot{y}/y)/\partial y = 0$ выполнено для всех y. Рассмотрим группу структурно похожих экономик, т. е. с одинаковыми параметрами s, A, n и δ. Экономики различны только по начальным значениям $k(0)$ и, следовательно, $y(0)$ и $c(0)$. Согласно модели, каждая экономика растет с одним и тем же темпом γ^* независимо от ее начального положения, из чего следует, что все экономики растут с одинаковым темпом. Такой вывод является отражением отсутствия убывающей отдачи капитала. Или же, по-другому, можно было бы получить этот результат, заметив, что AK-модель является, по сути, моделью Кобба Дугласа с единичной долей капитала, $\alpha = 1$. Анализ сходимости в предыдущем разделе показал, что скорость сходимости вычисляется по формуле $\beta^* = (1-\alpha)\cdot(x+n+\delta)$, см. (1.45); следовательно, если $\alpha = 1$, то $\beta^* = 0$. Такой прогноз модели является существенным ее недостатком, в силу того что условная сходимость считается эмпирической закономерностью. Более подробно это обсуждается в гл. 11 и 12.

Мы уже упомянули, что одним из способов обоснования отсутствия убывающей отдачи капитала в AK-производственной функции является представление концепции капитала в широком смысле, который состоит из физической и человеческой компонент. Модели, в которых учитываются эти два типа капитала, мы рассмотрим более детально в гл. 4 и 5.

В других подходах прорабатываются способы исключения убывающей отдачи капитала в рамках неоклассической модели. В гл. 4 исследуется понятие обучения на собственном опыте, которое было предложено Эрроу (Arrow, 1962) и использовано Ромером (Romer, 1986). В этих моделях опыт производства или инвестиций способствует росту производительности. Более того, обучение одного производителя может увеличить производительность других благодаря распространению знаний от одного производителя к другому. Таким образом, чем больше объем капитала во всей экономике (или чем больше накопление совокупности прошлого производства), тем выше уровень технологии для каждого производителя. Вследствие этого, на агрегированном уровне уменьшения отдачи капитала может не наблюдаться, и даже напротив, возможно увеличение отдачи. В случае возникновения ситуации с увеличивающейся отдачей средний продукт капитала каждого производителя $f(k)/k$ стремится вырасти по мере роста значения k в расширенной экономике. Отсюда следует, что кривая $s \cdot f(k)/k$ на рис. 1.4 поднимается вверх, по крайней мере на некотором отрезке области определения, и темп прироста $\dot{k}/k$ на этом отрезке растет по k. Таким образом, в этих типах моделей присутствуют некоторые диапазоны значений дохода на душу населения, в которых экономики расходятся. Впрочем, неясно, можно ли наблюдать эти диапазоны расходимости в реальных данных.

1.3.3. Эндогенный рост с переходной динамикой

В AK-модели рост получается эндогенным благодаря нейтрализации убывающей отдачи капитала в долгосрочном плане. Однако при использовании производственной функции такого вида предельный и средний продукты капитала всегда постоянны, и, следовательно, темпы прироста не обладают свойством сходимости. Возможность сохранить такую особенность модели, как постоянная отдача капитала в долгосрочной перспективе, одновременно вернув свойство сходимости, существует — соответствующая идея предложена в работе Jones and Manuelli (1990)[1].

Вновь рассмотрим выражение для темпа прироста k в уравнении (1.13):

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{f(k)}{k} - (n + \delta). \tag{1.61}$$

Если стационарное состояние существует, то связанный с ним темп прироста $(\dot{k}/k)^*$ постоянен по определению. Положительное значение $(\dot{k}/k)^*$ означает, что k неограниченно возрастает. Из уравнения (1.13) следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы $(\dot{k}/k)^*$ было положительным, является превышение средним продуктом капитала $f(k)/k$ значения $(n + \delta)/s$ при стремлении k к бесконечности. Другими

[1] Более подробно эта тема представлена в работе Kurz (1968).

словами, если средний продукт стремится к некоторому пределу, то

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] > \frac{n+\delta}{s}$$

является необходимым и достаточным условием для эндогенного стационарного роста.

Если $f(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, то после применения правила Лопиталя получаем, что при стремлении k к бесконечности пределы среднего продукта $f(k)/k$ и предельного продукта $f'(k)$ равны. (Подразумевается, что $\lim\limits_{k\to\infty}[f'(k)]$ существует.) Следовательно, ключевое условие эндогенного стационарного роста состоит в том, чтобы величина $f'(k)$ при любом k была существенно больше нуля:

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to\infty}[f'(k)] > \frac{n+\delta}{s} > 0.$$

Это неравенство нарушает стандартное условие Инады неоклассической модели $\lim\limits_{k\to\infty}[f'(k)] = 0$. Экономический смысл нарушения данного условия заключается в том, что склонность к убыванию доходности капитала исчезает. Другими словами, производственная функция обладает свойством убывания или возрастания отдачи k при малых k, но предельный продукт капитала должен быть ограничен снизу, когда значения k становятся большими. Приведем простой пример, в котором производственная функция асимптотически сходится к виду AK:

$$Y = F(K, L) = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{1.62}$$

где $A > 0$, $B > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Как нетрудно заметить, эта производственная функция является комбинацией функций AK и Кобба–Дугласа. Она обладает свойством постоянной эффективности с ростом масштаба и положительными убывающими отдачами труда и капитала. Однако одно из условий Инады нарушено, ибо $\lim\limits_{K\to\infty}(F_K) = A > 0$.

Мы можем переписать данную функцию в величинах на душу населения:

$$y = f(k) = Ak + Bk^{\alpha}.$$

Средний продукт капитала, задаваемый уравнением

$$\frac{f(k)}{k} = A + Bk^{-(1-\alpha)},$$

является убывающей функцией k, но стремится к A при стремлении k к бесконечности.

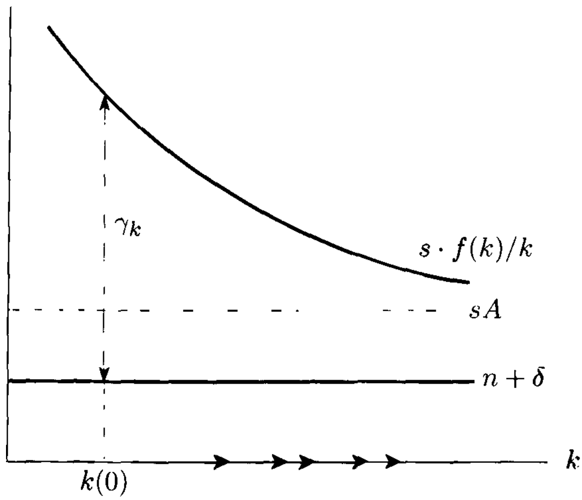


Рис. 1.13. Эндогенный рост с переходной динамикой. Если производственная технология задается функцией $F(K, L) = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, то темп прироста k уменьшается для всех k. Если $sA > n + \delta$, то темп прироста k асимптотически стремится к положительной константе, равной $sA - n - \delta$. Следовательно, эндогенный рост сосуществует с переходным движением, во время которого темп прироста уменьшается по мере развития экономики

Динамика этой модели может быть проанализирована на основе обычного выражения, полученного из уравнения (1.13):

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \left[A + Bk^{-(1-\alpha)}\right] - (n + \delta). \tag{1.63}$$

На рис. 1.13 показано, что кривая сбережения имеет наклон вниз, а прямая $n + \delta$ является горизонтальной линией. Отличием от рис. 1.4 является то, что при стремлении k к бесконечности кривая сбережения на рис. 1.13 сходится к положительной величине sA, а не к 0. Если $sA > n + \delta$, как и предполагается на рисунке, то стационарный темп прироста $(\dot{k}/k)^*$ положителен.

Таким образом, эта модель приводит к эндогенному стационарному росту, а также прогнозирует условную сходимость, как и в неоклассической модели. Причиной этого является то, что свойство сходимости выводится из обратной зависимости между $f(k)/k$ и k, которая сохраняется и в этой модели. Если две экономики (см. рис. 1.13) различаются только их начальными значениями $k(0)$, то та экономика, у которой объем капитала на человека меньше, будет расти быстрее в подушевом смысле.

1.3.4. Производственная функция с постоянной эластичностью замены

Рассмотрим другой пример производственной функции (см. Arrow et al., 1961) со свойством постоянной эластичности замены производственных факторов труда и капитала (constant elasticity of substitution, CES-функция):

$$Y = F(K, L) = A \cdot \{a \cdot (bK)^{\psi} + (1 - a) \cdot [(1 - b) \cdot L]^{\psi}\}^{1/\psi}, \qquad (1.64)$$

где $0 < a < 1$, $0 < b < 1$[1], и $\psi < 1$. Заметьте, эта производственная функция обладает свойством постоянной эффективности с ростом масштаба производства при любых значениях ψ. Эластичность замены между капиталом и трудом равна $1/(1 - \psi)$ (см. приложение, разд. 1.5.4). При $\psi \to -\infty$ производственная функция стремится к технологии с фиксированными пропорциями (обсуждаемой в следующем разделе),

$$Y = \min[bK, (1 - b)L],$$

где эластичность замены равна 0. При $\psi \to 0$ производственная функция приобретает вид функции Кобба -Дугласа

$$Y = (\text{константа}) \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

а эластичность замены равна 1 (см. приложение, разд. 1.5.4). При $\psi = 1$ производственная функция становится линейной,

$$Y = A \cdot [abK + (1 - a) \cdot (1 - b) \cdot L],$$

так что K и L становятся совершенными заменителями друг друга (бесконечная эластичность замены).

Разделим обе части уравнения (1.64) на L и получим выражение, определяющее выпуск на человека:

$$y = f(k) = A \cdot [a \cdot (bk)^{\psi} + (1 - a) \cdot (1 - b)^{\psi}]^{1/\psi}.$$

Предельный и средний продукты капитала даются, соответственно, уравнениями:

$$f'(k) = Aab^{\psi}\left[ab^{\psi} + (1 - a)(1 - b)^{\psi}k^{-\psi}\right]^{(1-\psi)/\psi};$$

$$\frac{f(k)}{k} = A \cdot \left[ab^{\psi} + (1 - a)(1 - b)^{\psi}k^{-\psi}\right]^{1/\psi}.$$

[1] В стандартную формулировку не входят коэффициенты b и $1 - b$. Смысл при этом такой: обе доли K и L в общем продукте стремятся к S при $\psi \to -\infty$. В нашей формулировке, при $\psi \to -\infty$ доли K и L стремятся к b и $1 - b$ соответственно.

Таким образом, $f'(k)$ и $f(k)/k$ положительны и уменьшаются по мере роста k при любых значениях ψ.

Изучим динамику CES-экономики, вернувшись к выражению из уравнения (1.13):

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{f(k)}{k} - (n + \delta). \tag{1.65}$$

На графическом отображении этого уравнения, как и ранее, кривая $s \cdot f(k)/k$ имеет наклон вниз, $n + \delta$ является горизонтальной прямой, а отношение $\dot{k}/k$ равно вертикальному расстоянию между указанными кривой и прямой. Однако теперь динамика темпа прироста зависит от параметра ψ, который определяет эластичность замены между L и K.

Рассмотрим первый случай $0 < \psi < 1$, т. е. высокую степень заменяемости между L и K. Пределы среднего и предельного продуктов капитала в данном случае следующие:

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = Ab \cdot a^{1/\psi} > 0;$$
$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}.\right] = \infty.$$

Следовательно, предельный и средний продукты при стремлении k к бесконечности стремятся к положительной константе, а не к 0. В этом смысле CES-производственная функция с высокой взаимозаменяемостью факторов ($0 < \psi < 1$) выглядит как тот пример, приведенный в уравнении (1.62), в котором убывающая отдача асимптотически сходится к нулю. Поэтому мы ожидаем, что CES-модель может генерировать эндогенный стационарный рост.

Полученные результаты изображены графически на рис. 1.14. Кривая $s \cdot f(k)/k$ имеет наклон вниз и асимптотически сходится к положительной константе $sAb{\cdot}a^{1/\psi}$. Если норма сбережения достаточно высока, так что

$$sAb \cdot a^{1/\psi} > n + \delta$$

(как и предполагается на рисунке), то кривая $s \cdot f(k)/k$ всегда лежит выше прямой $n + \delta$. В данном случае темп прироста на одного человека всегда положителен, так что модель генерирует эндогенный стационарный рост с темпом

$$\gamma^* = sAb \cdot a^{1/\psi} - (n + \delta).$$

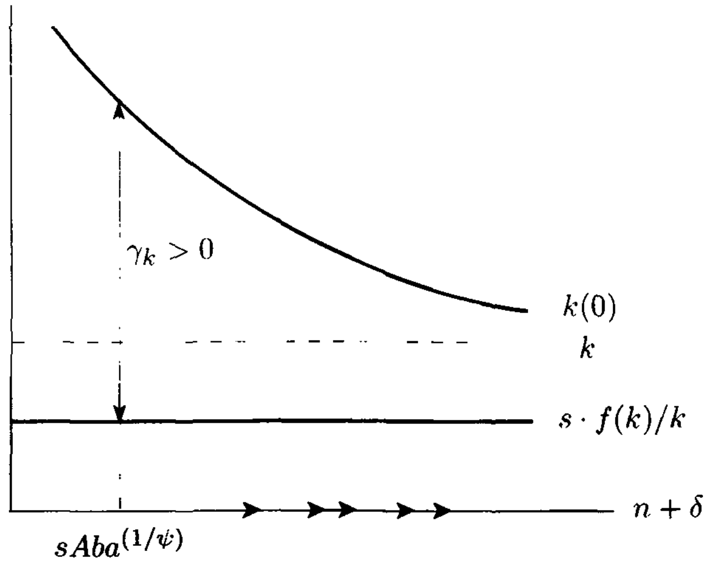


Рис. 1.14. CES-модель с $0 < \psi < 1$ и $sAb \cdot a^{1/\psi} > n + \delta$. Если эластичность замены производственных факторов в CES-технологии положительна ($0 < \psi < 1$), то эндогенный рост имеет место в случае, если параметры функции удовлетворяют неравенству $sAb \cdot a^{1/\psi} > n + \delta$. Во время перехода темп прироста k уменьшается

Динамика этой модели аналогична динамике, которая описана на рис. 1.13[1)].

Пусть теперь $\psi < 0$, т. е. имеет место низкая степень взаимозаменяемости L и K. Пределы среднего и предельного продуктов капитала в данном случае имеют вид:

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = 0;$$

$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = Ab \cdot a^{1/\psi} < \infty.$$

Так как предельный и средний продукты стремятся к 0 при стремлении k к бесконечности, то ключевое условие Инады выполнено, в результате чего модель не генерирует эндогенного роста. Однако в данном случае нарушение условия Инады при стремлении k к 0 может вызвать проблемы. Предположим, что норма сбережения достаточно низка, так что $sAb \cdot a^{1/\psi} < n + \delta$. В этом случае кривая $s \cdot f(k)/k$ стартует

[1)]Если $0 < \psi < 1$ и $sAb \cdot a^{1/\psi} < n + \delta$, то кривая $s \cdot f(k)/k$ пересекает $n + \delta$ в стационарном значении k^*, так же как и в стандартной неоклассической модели из рис. 1.4. Эндогенный рост в таком случае отсутствует.

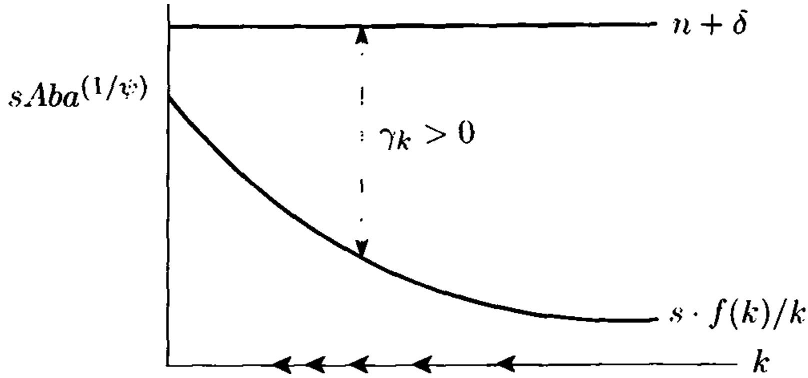


Рис. 1.15. CES-модель с $\psi < 0$ и $sAb \cdot a^{1/\psi} < n + \delta$. Если эластичность замены в CES-технологии отрицательна ($\psi < 0$), то темп прироста k будет отрицательным для всех k в случае, если $sAb \cdot a^{1/\psi} < n + \delta$

в точке ниже $n + \delta$ и сходится к 0 при стремлении k к бесконечности. На рис. 1.15 видно, что данная кривая не пересекается с прямой $n + \delta$ и, следовательно, при положительных значениях k стационарного состояния не существует. Так как темп прироста $\dot{k}/k$ всегда положителен, то экономика сжимается со временем, а k, y и c - все снижаются до 0[1].

В силу того что средний продукт капитала $f(k)/k$ является убывающей функцией k при любых значениях ψ, темп прироста $\dot{k}/k$ также убывает по k. Следовательно, CES-модель всегда обладает свойством сходимости: для двух экономик с идентичными параметрами и различными начальными значениями $k(0)$, та из них, у которой более низкое значение $k(0)$, имеет большее значение $\dot{k}/k$. Если параметры у разных экономик различаются, то данная модель прогнозирует условную сходимость, как описано выше.

Применим метод, разработанный ранее для случая производственной функции Кобба- Дугласа, для вывода формулы коэффициента сходимости в окрестности стационарного состояния. В итоге, для CES-производственной функции, имеем[2]

$$\beta^* = -(x + n + \delta) \cdot \left[1 - a \cdot \left(\frac{bsA}{x + n + \delta}\right)^{\psi}\right]. \qquad (1.66)$$

Это уравнение обобщает формулу (1.45), так как для модели Кобба Дугласа $\psi = 0$ и $a = \alpha$, так что, подставив эти значения в (1.66),

[1] Если $\psi < 0$ и $sAb \cdot a^{1/\psi} > n + \delta$, то кривая $s \cdot f(k)/k$ вновь пересекает прямую $n + \delta$ в стационарном значении k^*.

[2] См. Chua (1993) в качестве дополнения. Формула (1.66) для β верна только в случае, если стационарное значение k^* существует. Если $0 < \psi < 1$, то она верна при $bsA \cdot a^{1/\psi} < x + n + \delta$. Если $\psi < 0$, то формула верна при $bsA \cdot a^{1/\psi} > x + n + \delta$.

получаем (1.45). Если $\psi \neq 0$, то новый результат состоит в том, что β^*, согласно (1.66), зависит от s и A. Если $\psi > 0$ (высокая заменяемость между L и K), то β^* снижается вместе с sA, и наоборот, если $\psi < 0$. Коэффициент β^* не зависит от s и A только в случае $\psi = 0$, который соответствует функции Кобба—Дугласа.

1.4. Другие производственные функции... Другие теории роста

1.4.1. Производственная функция Леонтьева и полемика Харрода—Домара

До неоклассической производственной функции использовалась функция Леонтьева (Leontief, 1941) или функция с фиксированными пропорциями

$$Y = F(K, L) = \min(AK, BL), \tag{1.67}$$

где $A > 0$ и $B > 0$ – константы. Эта спецификация, которая соответствует случаю $\psi \to -\infty$ в CES-функции (1.64), использовалась в работах Harrod (1939) и Domar (1946). При фиксированных пропорциях, если произойдет так, что доступные объемы капитала и труда таковы, что $AK = BL$, то все работники и машины полностью загружены. Если K и L таковы, что $AK > BL$, то используется только капитал в объеме $(B/A) \cdot L$, а оставшийся не востребован. И наоборот, если $AK < BL$, то используется только объем труда $(A/B) \cdot K$, а остальной остается безработным. Предположение об отсутствии заменяемости между капиталом и трудом привело Харрода и Домара к выводу, что в капиталистических экономиках будут присутствовать такие нежелательные явления, как бесконечный рост безработицы или невостребованных машин. Сейчас мы произведем небольшой анализ модели Харрода–Домара, используя средства, разработанные ранее в данной главе.

Разделим обе части уравнения (1.67) на L, получим выпуск на человека:

$$y = \min(Ak, B).$$

При $k < B/A$ капитал полностью загружен и $y = Ak$. Следовательно, как ясно из рис. 1.16, график производственной функции в указанной области значений k представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат и имеющую наклон A. При $k > B/A$ объем используемого капитала постоянен, и выпуск Y равен произведению константы B на труд L. Следовательно, выпуск на человека y равен

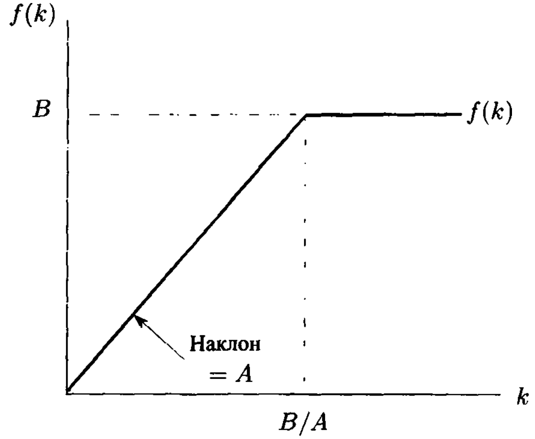


Рис. 1.16. Производственная функция Леонтьева. В подушевых величинах производственная функция Леонтьева может быть записана в виде $y = \min(Ak, B)$. При $k < B/A$ это уравнение имеет вид $y = Ak$. При $k > B/A$ уравнение задает прямую $y = B$

константе B, что изображено на рисунке в виде горизонтальной части графика $f(k)$. Заметим, что при стремлении k к бесконечности предельный продукт капитала $f'(k)$ равен нулю. Следовательно, ключевое условие Инады выполнено, так что эта производственная функция не генерирует эндогенный стационарный рост.

Используя выражение из уравнения (1.13), имеем

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{\min(Ak, B)]}{k} - (n + \delta). \tag{1.68}$$

Из рис. 1.17, *а* и *б* следует, что первый член

$$\frac{s \cdot [\min(Ak, B)]}{k}$$

является горизонтальной прямой на уровне sA при $k \leqslant B/A$. При $k > B/A$ этот член становится кривой с наклоном вниз, которая стремится к 0 при стремлении k к бесконечности. Второй член в уравнении (1.68) задает обычную горизонтальную прямую на уровне $n + \delta$.

Сначала предположим, что норма сбережения достаточно низка, так что

$$sA < n + \delta,$$

как показано на рис. 1.17. Кривая сбережения $s \cdot f(k)/k$ в таком случае не пересекает прямую $n + \delta$, так что в этом случае положительного

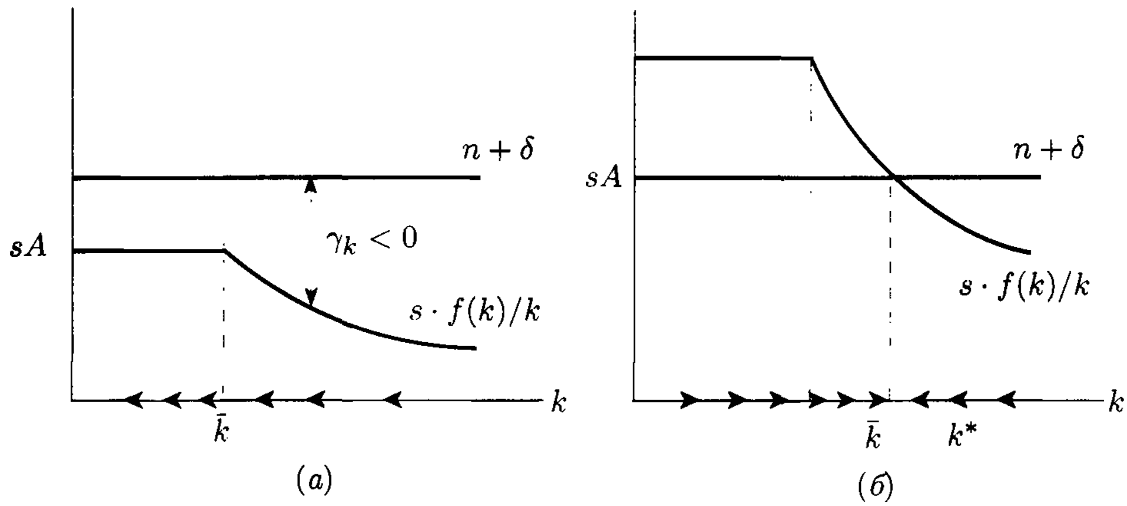


Рис. 1.17. Модель Харрода—Домара. На графике (*а*) $sA < n + \delta$, темп прироста k отрицателен для всех k. Следовательно, экономика стремится к $k = 0$. На графике (*б*) $sA > n + \delta$, темп прироста k положителен при $k < k^*$ и отрицателен при $k > k^*$, где k^* – устойчивое стационарное значение. Так как k^* превосходит B/A, то часть капитала всегда остается невостребованной. Более того, количество невостребованного капитала монотонно растет (наряду с K и L)

стационарного состояния k^* не наблюдается. Более того, темп прироста капитала $\dot{k}/k$ всегда отрицателен, в результате чего экономика сжимается, и k, y, c — все стремятся к нулю. Следовательно, экономика заканчивает свой путь слева от B/A, и в ней имеет место постоянно растущая безработица.

Допустим теперь, что норма сбережения достаточно высока, так что

$$sA > n + \delta,$$

как показано на рис. 1.17, *б*. В силу того что кривая $s \cdot f(k)/k$ приближается к 0 при стремлении k к бесконечности, данная кривая в конце концов пересечет прямую $n + \delta$ в точке $k^* > B/A$. Следовательно, если экономика начинает движение из $k(0) < k^*$, то отношение $\dot{k}/k$ равно константе

$$sA - n - \delta > 0$$

до тех пор, пока k не достигнет значения B/A. В достигнутой точке $\dot{k}/k$ начинает снижаться, пока не достигнет 0 при $k = k^*$. Если экономика стартует из $k(0) > k^*$, то $\dot{k}/k$ сначала отрицательно и затем сходится к 0, по мере того как k сходится к k^*.

Для $k^* > B/A$ в стационарном состоянии простаивают машины, но зато нет незанятых работников. Так как k является константой в стационарном состоянии, то K растет с тем же темпом, что и L, т. е. с темпом n. Доля загруженных машин постоянна, количество невостребованных машин также растет с темпом n (несмотря на это, предполагается, что домохозяйства сохраняют норму сбережения на уровне s).

Единственный способ получить стационарное состояние, в котором капитал и труд полностью востребованы в производстве, заключается в том, чтобы наложить на параметры модели условие

$$sA = n + \delta.$$

Все четыре параметра, входящие в это условие, экзогенны, поэтому выполнение данного условия весьма сомнительно. Следовательно, согласно заключению Харрода и Домара, экономика, по всей вероятности, достигнет одного из двух нежелательных состояний: вечного роста безработицы или вечного роста невостребованных машин.

Теперь мы знаем, что в доводах Харрода и Домара присутствует ряд нереалистичных предположений. Во-первых, в модели Солоу–Свэна показано, что параметр A Харрода и Домара - средний продукт капитала -- обычно зависит от k, и значение k в стационарном состоянии удовлетворяет уравнению

$$s \cdot \frac{f(k)}{k} = n + \delta.$$

Во-вторых, норма сбережения может быть изменена таким образом, чтобы ее значение удовлетворяло этому условию. В частности, если экономические агенты максимизирует полезность (мы это будем предполагать в следующей главе), то сохранять норму сбережения на постоянном уровне s, когда предельный продукт капитала равен нулю, для них будет не оптимально. Такая коррекция нормы сбережения исключает равновесие, в котором постоянно простаивает машинное оборудование.

1.4.2. Модели роста с капканами бедности

В литературе, посвященной экономическому развитию, часто затрагивается тема так называемых *капканов бедности*[1]. Мы можем представлять себе капкан бедности как стационарное состояние с низкими уровнями подушевого выпуска и объема капитала. Такой исход является капканом, потому что если экономические агенты пытаются выбраться

---

[1] Здесь стоит обратить особое внимание на модель *большого толчка* Левиса (Lewis, 1954). Более современная формулировка этой идеи представлена в работе Murphy, Shleifer, and Vishny (1989).

из него, то экономика возвращает их обратно в низкоуровневое устойчивое стационарное состояние.

Мы установили, что средний продукт капитала $f(k)/k$ в неоклассической модели уменьшается по мере роста k. Но мы также заметили, что этот средний продукт может расти вместе с k в некоторых моделях, отличительным признаком которых является растущая отдача, например в моделях, учитывающих обучение на собственном опыте и распространение знаний. Одной из причин возникновения капкана бедности является наличие в экономике диапазона (значений k) убывания среднего продукта капитала, который следует сразу за диапазоном растущего среднего продукта. (Капканы бедности возникают в ряде моделей с непостоянными нормами сбережения; см. Galor and Ryder, 1989.)

Мы можем получить диапазон растущей отдачи, предположив, что страна имеет доступ как к традиционной, так и к современной технологии[1]. Представим себе, что производители могут использовать примитивную производственную функцию, такую как обычная функция Кобба—Дугласа:

$$Y_A = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}. \tag{1.69}$$

Страна также имеет доступ к современной, высокопродуктивной технологии[2]:

$$Y_B = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{1.70}$$

где $B > A$. Однако для того, чтобы воспользоваться этой лучшей технологией, стране в целом следует оплачивать определенные структурные издержки в каждый момент времени; возможно, это расходы на общественную инфраструктуру или правовую систему. Допустим, что эти издержки пропорциональны трудовому ресурсу и равны bL, где $b > 0$. В дальнейшем будем считать, что эти издержки оплачиваются правительством и финансируются посредством налога в размере b на каждого работника. Результаты не зависят от того, платят налоги производители или же работники (все равно это одни и те же люди в экономике с домохозяйствами-производителями).

В подушевых величинах первая производственная функция приобретает вид

$$y_A = Ak^{\alpha}. \tag{1.71}$$

[1] Этот раздел является переработкой статьи Galor and Zeira (1993), в которой используются две технологии в контексте образования.

[2] В общем случае у продвинутой технологии и у более примитивной должны различаться интенсивности капитала. Но тогда усложнится вывод формул, а никаких существенных отличий не возникнет.

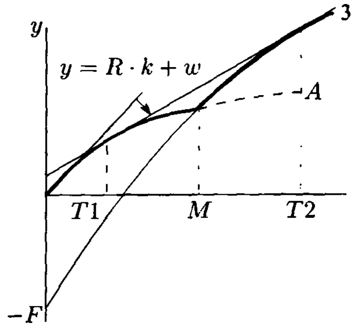


Рис. 1.18. Традиционная и современная производственные функции. У традиционной производственной функции A относительно низкая производительность. У современной производственной функции B производительность высокая, но для ее работы требуется дополнительный фиксированный объем структурных издержек

Вторая производственная функция в подушевых величинах и за вычетом структурных издержек имеет вид

$$y_B = Bk^\alpha - b. \tag{1.72}$$

Обе производственные функции изображены на рис. 1.18.

Если правительство решило оплачивать структурные издержки, которые равны b на одного работника, то все производители будут использовать современную технологию (потому что в любом случае налог b платится каждым работником, так что он имеет право воспользоваться оплаченной им технологией). Если правительство не оплачивает структурные издержки, то все производители должны использовать примитивную технологию. Благоразумное правительство будет оплачивать структурные издержки, если сдвиг технологии в сторону модернизации приведет к приросту выпуска на одного работника при фиксированном текущем значении k и при наличии структурных издержек. В данных условиях, сдвиг будет оправдан, если k превышает критический уровень

$$\tilde{k} = \left[\frac{b}{B - A}\right]^{1/\alpha}.$$

Таким образом, критическое значение k растет вместе с ростом параметра структурных издержек b и снижается по мере роста разности параметров производительности $B - A$. Мы будем считать, что правительство оплачивает структурные издержки, если $k \geqslant \tilde{k}$, и не оплачивает их, если $k < \tilde{k}$.

Темп прироста капитала на одного работника по-прежнему задается фундаментальным уравнением модели Солоу—Свэна (1.23):

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{f(k)}{k} - (n + \delta),$$

где

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \qquad \text{если} \quad k < \tilde{k}$$

$$\text{и} \quad f(k) = Bk^{\alpha} - b, \quad \text{если} \quad k \geqslant \tilde{k}.$$

Средний продукт капитала $f(k)/k$ может быть измерен графически (см. рис. 1.18) как тангенс угла наклона отрезка, соединяющего начало координат и соответствующую точку графика эффективной производственной функции. Мы видим, что средний продукт возрастает при $k \geqslant \tilde{k}$. Следовательно, кривая сбережения выглядит примерно так, как изображено на рис. 1.19: она имеет знакомый нам отрицательный угол наклона при малых значениях k, затем в определенном диапазоне имеет

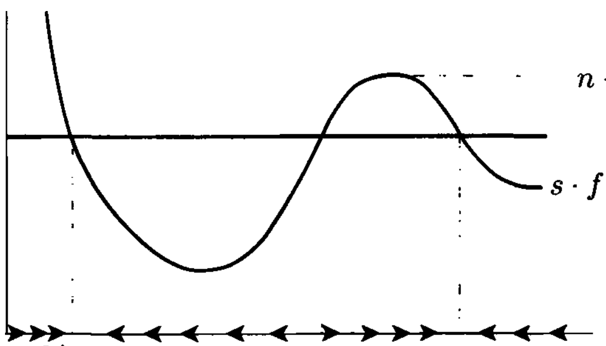


Рис. 1.19. Капкан бедности. Предполагается, что производственной функции свойственна убывающая отдача капитала k при малых значениях k, возрастающая отдача при значениях k из среднего диапазона значений и постоянная или убывающая отдача при больших значениях k. В силу этого кривая $s \cdot f(k)/k$ наклонена вниз при малых значениях k, вверх при значениях k из среднего диапазона и горизонтальна или наклонена вниз при больших значениях k. Стационарное значение k^*_{low} устойчиво и, следовательно, представляет собой капкан бедности для стран, которые начинают развитие со значений k в диапазоне между 0 и k^*_{middle}. Если страна стартует с $k > k^*_{\text{middle}}$, то в случае, если, в конце концов, устанавливается убывающая отдача k, имеет место сходимость к значению k^*_{high}. Если же отдача капитала при больших значениях k постоянна (в этом случае соответствующая часть графика отмечена горизонтальной пунктирной линией), то страна сходится к положительному долгосрочному темпу прироста k

положительный угол наклона, и затем при очень больших уровнях k угол наклона вновь становится отрицательным.

На рис. 1.19 показано, что кривая $s \cdot f(k)/k$ сначала пересекает прямую $n + \delta$ в нижнем стационарном значении k^*_{low}. Будем считать, что

$$k^*_{\text{low}} < \tilde{k}.$$

Это стационарное состояние имеет свойства, знакомые нам по неоклассической модели. В частности,

$$\frac{\dot{k}}{k} > 0 \quad \text{при} \quad k < k^*_{\text{low}} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{k}}{k} < 0 \quad \text{при} \quad k > k^*_{\text{low}}.$$

Следовательно, k^*_{low} является устойчивым стационарным состоянием: это и есть «капкан бедности» в указанном выше смысле.

Возрастающая отдача в среднем диапазоне значений k предполагается достаточно строгой, так что кривая $s \cdot f(k)/k$ в конце концов дорастает до пересечения с прямой $n + \delta$ еще раз, теперь в стационарном значении k^*_{middle}. Однако это стационарное значение неустойчиво, потому что слева выполнено $\dot{k}/k < 0$, а справа $\dot{k}/k > 0$. Поэтому если экономика стартует со значения

$$k^*_{\text{low}} < k(0) < k^*_{\text{middle}},$$

то ее затянет обратно в капкан k^*_{low}, если же ей удастся как-нибудь оказаться в начальном значении

$$k(0) > k^*_{\text{middle}},$$

то далее экономика будет расти, пока не достигнет еще более высокого уровня k.

В диапазоне $k > k^*_{\text{middle}}$ склонность экономики к возникновению в ней убывающей отдачи капитала, в конце концов, опускает значение величины $s \cdot f(k)/k$ до уровня $n+\delta$, который достигается в стационарном значении k^*_{high}. Это стационарное значение, соответствующее высокому уровню подушевого дохода, но при этом нулевому долгосрочному подушевому приросту, знакомо нам по неоклассической модели. Ключевой задачей слаборазвитой экономики, находящейся в капкане k^*_{low}, является преодоление этого барьера и, следовательно, выход на более высокий долгосрочный уровень подушевого дохода.

Одним из эмпирически важных результатов данной модели, которой соответствует рис. 1.19, является наличие среднего диапазона значений k — вокруг k^*_{middle}, для которого темп прироста $\dot{k}/k$ является возрастающей функцией k и, следовательно, возрастающей функцией y.

Таким образом, в этом диапазоне наблюдается неустойчивая динамика. Однако наши эмпирические наблюдения по разным странам (см. гл. 12) не подтверждают наличие такой динамики. Впрочем, данные результаты спорны (см., например, Quah (1996)).

1.5. *Приложение.* Доказательства различных утверждений

1.5.1. Доказательство того, что каждый ресурс существенен для производства с неоклассической производственной функцией

В основном тексте данной главы мы отмечали, что из неоклассических свойств производственной функции следует, что оба фактора K и L существенны для производства. Для проверки данного утверждения заметим, что $Y \to \infty$ при $K \to \infty$, тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Y}{K} = \lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = 0,$$

где первое равенство получено посредством применения правила Лопиталя, а второе – из условия Инады. Если значение Y ограничено при стремлении K к бесконечности, то отсюда следует

$$\lim_{K\to\infty} \left(\frac{Y}{K}\right) = 0.$$

Мы также знаем, что из постоянства эффективности с ростом масштаба для любого конечного L вытекает

$$\lim_{K\to\infty} \left(\frac{Y}{K}\right) = \lim_{K\to\infty} \left[F\left(1, \frac{L}{K}\right)\right] = F(1,0),$$

так что $F(1,0) = 0$. Из условия постоянной эффективности с ростом масштаба также следует

$$F(K,0) = K \cdot F(1,0) = 0$$

для любого конечного K. Аналогично мы можем показать, что $F(0, L) = 0$ для любого конечного L. Эти результаты как раз и означают, что каждый из ресурсов существенен для производства.

Для демонстрации того, что выпуск стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности любого из ресурсов, заметим, что

$$F(K, L) = L \cdot f(k) = K \cdot \left[\frac{f(k)}{k}\right].$$

Отсюда следует, что для любого конечного K

$$\lim_{L\to\infty}[F(K,L)] = K\cdot\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = K\cdot\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \infty,$$

где последние равенства следуют из правила Лопиталя (потому что существенность влечет $f[0] = 0$) и условия Инады. Аналогично можно показать, что

$$\lim_{K\to\infty}[F(K,L)] = \infty.$$

Таким образом, выпуск стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности любого из ресурсов.

1.5.2. Свойства коэффициента сходимости в модели Солоу—Свэна

Уравнение (1.46) является лог-линеаризацией уравнения (1.41) в окрестности стационарного состояния. Для получения уравнения (1.46) перепишем уравнение (1.41) относительно $\log(\hat{k})$. Заметим, что $\dot{\hat{k}}/\hat{k}$ является производной $\log(\hat{k})$ по времени, а выражение $(\hat{k})^{-(1-\alpha)}$ эквивалентно $e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k})}$. Стационарное значение $sA\cdot(\hat{k})^{-(1-\alpha)}$ равно $x+n+\delta$. Теперь для получения уравнения (1.46) осталось только разложить $\log(\hat{k})$ в ряд Тейлора в окрестности $\log(\hat{k}^*)$ до членов первого порядка включительно. Подробности данного процесса описаны в математическом приложении в конце книги. Этот результат впервые представлен в работах Sala-i-Martin (1990) и Mankiw, Romer, and Weil (1992).

На самом деле, скорость сходимости $\hat{k}$ и $\hat{y}$ не постоянна; она зависит от расстояния до стационарного состояния. Темп прироста $\hat{y}$ может быть записан в виде

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \alpha\cdot\left[s\cdot A^{1/\alpha}\cdot(\hat{y})^{-(1-\alpha)/\alpha} - (x+n+\delta)\right].$$

Если мы используем условие

$$\hat{y}^* = A\cdot\left[\frac{sA}{x+n+\delta}\right]^{\alpha/(1-\alpha)},$$

то получим выражение для темпа прироста

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \alpha\cdot(x+n+\delta)\cdot\left[\left(\frac{\hat{y}}{\hat{y}^*}\right)^{-(1-\alpha)/\alpha} - 1\right].$$

Коэффициент сходимости определяется так:

$$\beta = -\frac{d\left(\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}\right)}{d[\log(\hat{y})]} = (1-\alpha)\cdot(x+n+\delta)\cdot\left(\frac{\hat{y}}{\hat{y}^*}\right)^{-(1-\alpha)/\alpha}.$$

В стационарном состоянии

$$\hat{y} = \hat{y}^* \quad \text{и} \quad \beta = (1-\alpha)\cdot(x+n+\delta),$$

как и в (1.45). В общем случае β уменьшается по мере роста $\hat{y}/\hat{y}^*$.

1.5.3. Доказательство того, что технологический прогресс должен быть трудоинтенсивным

Мы говорили в основном тексте главы, что для существования в модели стационарного состояния с постоянными темпами прироста необходимо, чтобы технологический прогресс принял трудоинтенсивную форму, как показано в уравнении (1.34). Докажем этот результат. Рассмотрим производственную функцию с трудоинтенсивным и капиталоинтенсивным технологическим прогрессом:

$$Y = F[K\cdot B(t), L\cdot A(t)], \tag{1.73}$$

если $B(t) = A(t)$, то технологический прогресс нейтрален по Хиксу.

Предположим, что $A(t) = e^{xt}$ и $t()$, где $x \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$ - константы. Если мы разделим обе части уравнения (1.73) на K, то получим выражение для выпуска на единицу капитала вида

$$\frac{Y}{K} = e^{zt}\cdot\left\{F\left[1, \frac{L\cdot A(t)}{B\cdot B(t)}\right]\right\} = e^{zt}\cdot\varphi\left[\left(\frac{L}{K}\right)\cdot e^{(x-z)\cdot t}\right],$$

где

$$\varphi(\cdot) \equiv F\left[1, \frac{L\cdot A(t)}{B\cdot B(t)}\right].$$

Население L растет с постоянным темпом n. Пусть γ_K^* постоянный темп прироста K в стационарном состоянии, тогда выражение для Y/K можно записать в виде

$$\frac{Y}{K} = e^{zt}\cdot\varphi[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)\cdot t}]. \tag{1.74}$$

Вспомним, что темп прироста K дается уравнением

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\cdot\frac{Y}{K} - \delta.$$

В стационарном состоянии отношение $\dot{K}/K$ равно константе γ_K^*, и, следовательно, Y/K тоже должно быть постоянным. Правая часть уравнения (1.74) может стать константой только двумя способами. Первый из них: $z = 0$ и $\gamma_K^* = n + x$, т. е. технологический прогресс исключительно трудоинтенсивный, и стационарный темп прироста капитала равен $n + x$. В этом случае производственная функция может быть записана в виде (1.34).

Второй способ сделать правую часть уравнения (1.74) константой состоит в том, чтобы при $z \neq 0$ членом

$$\varphi[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)\cdot t}]$$

в точности компенсировать член e^{zt}. В этом случае производная Y/K (в предполагаемом стационарном состоянии) по времени должна быть равна 0. Если мы продифференцируем уравнение (1.74), приравняем нулю и переставим члены, то получим

$$\frac{\varphi'(\chi)\cdot\chi}{\varphi(\chi)} = -\frac{z}{n+x-z-\gamma_K^*},$$

где $\chi \equiv e^{(n+x-z-\gamma_K^*)\cdot t}$, а правая часть уравнения – константа. Если мы теперь проинтегрируем это уравнение, то решение примет вид

$$\varphi(\chi) = (\text{Константа})\cdot\chi^{1-\alpha},$$

где α – константа. Отсюда следует, что производственная функция может быть записана в виде

$$Y = (\text{Константа})\cdot(Ke^{zt})^{\alpha}\cdot(Le^{xt})^{1-\alpha} = (\text{Константа})\cdot(K)^{\alpha}\cdot(Le^{\nu t})^{1-\alpha},$$

где

$$\nu = \frac{z\alpha + x\cdot(1-\alpha)}{1-\alpha}.$$

Другими словами, если темп трудоинтенсивного технологического прогресса z не равен нулю, и стационарное состояние существует, то производственная функция должна иметь вид функции Кобба -Дугласа. Более того, если производственная функция имеет вид функции Кобба - Дугласа, то мы всегда можем выразить технологический прогресс как чисто трудоинтенсивный (с темпом ν). Итог таков: из существования стационарного состояния следует, что технологический прогресс может быть записан в трудоинтенсивной форме.

Другой подход к моделированию технологического прогресса основан на предположении, что капитальные товары, произведенные позже (недавний *винтаж*, т. е. недавняя дата производства), имеют более высокое качество при той же стоимости. Если качество улучшается в соответствии с $T(t)$, то уравнение накопления капитала в этой винтажной модели имеет вид

$$(\dot{K}) = s\cdot T(t)\cdot F(K, L) - \delta K, \tag{1.75}$$

где K измеряется в единицах неизменного качества. Это уравнение соответствует Хикс-нейтральному технологическому прогрессу, который представлен множителем $T(t)$ в производственной функции. Единственное отличие от стандартной спецификации здесь заключается в том, что выпуск здесь $Y = F(K, L)$, а не $T(t) \cdot F(K, L)$.

Если нам нужна модель, которая обладает стационарным состоянием, то мы все равно должны считать, что $F(K, L)$ имеет вид функции Кобба Дугласа. В этом случае основные свойства данной винтажной модели оказываются неотличимыми от свойств модели, которую рассматривали в основном тексте главы и в которой технологический прогресс является трудоинтенсивным (см. Phelps, 1962, и Solow, 1969, где эти вопросы обсуждаются подробно). Одно отличие в винтажной модели все-таки имеется: хотя K и Y в стационарном состоянии растут с постоянными темпами, темп прироста K (в единицах неизменного качества) больше темпа прироста Y. Следовательно, прогноз модели — K/Y монотонно растет в долгосрочном плане.

1.5.4. Свойства CES-производственной функции

Эластичность замены — это мера кривизны изоквант. Тангенс угла наклона изокванты равен

$$\left.\frac{dL}{dK}\right|_{\text{isoquant}} = -\frac{\partial F(\cdot)/\partial K}{\partial F(\cdot)/\partial L}.$$

Эластичность же задается выражением

$$\left[\frac{\partial(\text{Угол наклона})}{\partial(L/K)} \cdot \frac{L/K}{\text{Угол наклона}}\right]^{-1}.$$

Для CES-производственной функции, представленной уравнением (1.64), тангенс угла наклона изокванты равен

$$-\frac{(L/K)^{1-\psi} \cdot a \cdot b}{[(1-a) \cdot (1-b)^{\psi}]},$$

а эластичность равна $1/(1-\psi)$ и постоянна.

Для того чтобы вычислить предел производственной функции при стремлении ψ к 0, воспользуемся уравнением (1.64), имеем

$$\lim_{\psi \to 0}[\log(Y)] = \log(A) + \frac{0}{0},$$

т. е. формула содержит неопределенность, от которой мы избавляемся посредством правила Лопиталя. В итоге имеем:

$$\lim_{\psi \to 0}[\log(Y)] =$$
$$= \log(A) + \left[\frac{a(bK)^{\psi} \cdot \log(bK) + (1-a) \cdot [(1-b) \cdot L]^{\psi} \cdot \log[(1-b) \cdot L]}{a(bK)^{\psi} + (1-a) \cdot [(1-b) \cdot L]^{\psi}}\right]_{\psi=0} =$$
$$= \log(A) + a \cdot \log(bK) + (1-a) \cdot \log[(1-b) \cdot L].$$

Отсюда следует, что

$$Y = \tilde{A}K^{a}L^{1-a}, \quad \text{где} \quad \tilde{A} = Ab^{a} \cdot (1-b)^{1-a}.$$

То есть CES-производственная функция сходится к функции Кобба–Дугласа при стремлении ψ к нулю.

1.6. Задачи

1.1. Сходимость.

a. Объясните разницу между абсолютной сходимостью, условной сходимостью и снижением дисперсии реального дохода на душу населения внутри групп.

b. При каких условиях из абсолютной сходимости следует снижение дисперсии дохода на душу населения?

1.2. Формы технологического прогресса. Будем считать, что коэффициент экзогенного технологического прогресса постоянен.

a. Докажите, что стационарное состояние может существовать одновременно с технологическим прогрессом только в случае, если этот прогресс имеет трудоинтенсивную форму. В чем смысл такого результата?

b. Предположим, что производственная функция имеет вид $Y = F[B(t) \cdot K, A(t) \cdot L]$, где $B(t) = e^{zt}$ и $A(t) = e^{xt}$, $z \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Докажите, что если $z > 0$ и стационарное состояние существует, то производственная функция должна принять вид функции Кобба–Дугласа.

1.3. Зависимость нормы сбережения, темпа роста населения, и нормы амортизации от интенсивности использования капитала. Предположим, что производственная функция обладает неоклассическими свойствами.

a. Почему норма сбережения s в общем случае зависит от k? (Приведите интуитивное объяснение: точный ответ будет дан в гл. 2.)

b. Как изменится скорость сходимости, если $s(k)$ — возрастающая функция k? Что если $s(k)$ — убывающая функция k?

Рассмотрим теперь AK-технологию.

c. Почему s зависит от k в данном контексте?
d. Как темп роста k меняется со временем в зависимости от того, является $s(k)$ возрастающей функцией k или убывающей?
e. Предположим, что темп прироста населения n зависит от k. В рамках AK-технологии, каким должно быть соотношение между n и k, для того чтобы модель прогнозировала сходимость? Можете ли вы представить себе причины, благодаря которым n связано с k таким образом? (Мы изучим детерминанты n в гл. 9.)
f. Тот же вопрос пункта e, но относительно нормы выбытия δ. Почему возможна зависимость δ от k?

1.4. Эффекты повышения нормы сбережения. Прочитайте следующее утверждение:

> «Направление большей части национального продукта на инвестирование может помочь восстановить быстрый рост производительности и повышает уровень жизни».

При каких условиях это утверждение верно?

1.5. Доли производственных факторов. Для неоклассической производственной функции докажите, что каждый производственный фактор зарабатывает свой предельный продукт. Докажите, что если владельцы капитала сберегают свой доход, а работники потребляют весь свой доход, то экономика достигает золотого правила накопления капитала. Поясните, почему это так.

1.6. Некоторые модификации модели Солоу—Свэна (см. Easterly, 1993). Предположим, что конечный продукт производится посредством CES-функции:

$$Y = \left[(a_F K_F^{\eta} + a_I K_I^{\eta})^{\psi/\eta} + a_G K_G^{\psi}\right]^{1/\psi},$$

где Y — выпуск; K_F — налогооблагаемый официальный капитал; K_I — неофициальный капитал, скрытый от налогообложения; K_G — общественный капитал, предоставляемый правительством и свободно используемый всеми производителями; $a_F, a_I, a_G > 0$; $\eta < 1$; и $\psi < 1$. Загруженные официальный и неофициальный капиталы различаются своим местоположением и формой владения и, кроме того, производительностью.

Выпуск может полностью расходоваться на потребление или валовое инвестирование во все три типа капитала. Все эти капиталы выбывают с одинаковым темпом δ. Население постоянно, и технологический прогресс отсутствует.

Официальный капитал облагается налогом по ставке τ в момент ввода его в эксплуатацию. Таким образом, цена официального капитала (в единицах выпуска) равна $1+\tau$. Цена единицы неофициального капитала равна 1. Валовое инвестирование в общественный капитал равно фиксированной доле s_G налоговых доходов. Любые неиспользованные налоговые поступления возвращаются домохозяйствам в виде единого платежа. Сумма инвестиций в два вида частного капитала равна доле s дохода за вычетом налогов и трансфертов. Существующий частный капитал может быть конвертирован 1:1 в любой из двух капиталов, официальный и неофициальный.

a. Для прибыль-максимизирующего производителя найдите отношение его неофициального капитала к официальному.
b. В стационарном состоянии все три вида капитала растут с одинаковым темпом. Какова пропорция между выпуском и официальным капиталом в стационарном состоянии?
c. Найдите стационарный темп прироста экономики.
d. Численное моделирование показывает, что при разумных значениях параметров график зависимости темпа прироста от налоговой ставки, τ, сначала быстро растет, а затем, достигнув пика, стабильно снижается. Объясните эту немонотонность отношения темпа прироста к ставке налога.

1.7. Линейная производственная функция. Рассмотрим производственную функцию вида $Y = AK + BL$, где A и B - положительные константы.

a. Является ли эта производственная функция неоклассической? Каким неоклассическим условиям она удовлетворяет, а каким нет?
b. Выразите выпуск на человека в виде функции капитала на человека, т. е. выпишите функцию $y(k)$. Чему равен предельный продукт k? Чему равен средний продукт k?

Далее мы будем предполагать, что население растет с постоянным темпом n, а капитал выбывает с постоянным темпом δ.

c. Напишите фундаментальное уравнение модели Солоу -Свэна.

d. При каких условиях в данной модели существует стационарное состояние с нулевым темпом прироста капитала на человека и при каких условиях данная модель генерирует эндогенный рост?

e. Какова динамика темпа прироста капитала (т. е. растет он или снижается со временем), если рост является эндогенным? Тот же вопрос относительно темпов прироста выпуска и потребления.

f. Если $s = 0{,}4$; $A = 1$; $B = 2$; $\delta = 0{,}08$ и $n = 0{,}02$, то чему тогда равен долгосрочный темп прироста экономики? То же, если $B = 5$. Объясните получившиеся различия.

1.8. Формы технологического прогресса и стационарный рост. Рассмотрим экономику с CES-производственной функцией:

$$Y = D(t) \cdot \left\{[B(t) \cdot K]^{\psi} + [A(t) \cdot L]^{\psi}\right\}^{1/\psi},$$

где ψ — постоянный параметр, отличный от 0. Множители $D(t)$, $B(t)$ и $A(t)$ представляют собой различные формы технологического прогресса. Темпы прироста всех этих трех членов постоянны, обозначим их x_D, x_B и x_A соответственно. Предположим, что население постоянно, нормировано, $L = 1$, и мы также нормируем к единице начальные уровни всех трех технологий, так что $D(0) = B(0) = A(0) = 1$. В такой экономике капитал накапливается обычным образом:

$$\dot{K} = Y - C - \delta K.$$

a. Докажите, что в стационарном состоянии (которое определяется как ситуация, в которой все переменные растут с постоянными, возможно различными, темпами) темпы прироста Y, K и C одинаковы.

b. Допустим, что $x_B = x_A = 0$ и $x_D > 0$. Докажите, что в стационарном состоянии $\gamma_K = 0$ (и, следовательно, $\gamma_Y = \gamma_C > 0$).

Указание. Сначала нужно получить выражение

$$\gamma_Y = x_D + \frac{[K_0 e^{\gamma_K t}]^{\psi}}{1 + [K_0 e^{\gamma_K t}]^{\psi}} \cdot \gamma_K.$$

c. На основании результатов пунктов a и b найдите единственно возможное значение темпа прироста $D(t)$, при котором существует стационарное состояние. Каков в таком случае единственно возможный стационарный темп прироста Y?

d. Допустим теперь, что $x_D = x_A = 0$ и $x_B > 0$. Докажите, что в стационарном состоянии $\gamma_K = -x_B$.

Указание. Сначала получите выражение

$$\gamma_Y = (x_B + \gamma_K) \cdot \frac{[K_t \cdot B_t]^\psi}{1 + [K_t \cdot B_t]^\psi}.$$

e. Используя результаты пунктов a и d, докажите, что единственным значением темпа прироста B, при котором возможно стационарное состояние, является $x_B = 0$.

f. Пусть $x_D = x_B = 0$ и $x_A > 0$. Докажите, что в стационарном состоянии для темпов прироста выполнено $\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = x_D$.

Указание. Сначала нужно вывести

$$\gamma_Y = \frac{K_t^\psi \cdot \gamma_K + A_t^\psi \cdot x_A}{K_t^\psi + A_t^\psi}.$$

g. Каким будет стационарный темп прироста в пункте f, если население не постоянно и растет с темпом прироста $n > 0$?

2 Модели роста с оптимизацией поведения потребителя (модель Рамсея)

Одним из недостатков моделей, которые мы исследовали в гл. 1, является то, что норма сбережения – и, следовательно, отношение потребления к доходу — экзогенны и постоянны. Раз мы не предполагали, что потребители ведут себя оптимально, то в исследование не входило обсуждение того, как соответствующие оптимальному поведению стимулы воздействуют на динамику экономики. В частности, мы не думали о том, как экономика будет реагировать на изменения в процентных ставках, ставках налога и других переменных. В гл. 1 мы показали, что если допустить оптимальное поведение фирм, то не происходит никаких изменений в результатах модели Солоу—Свэна. Основной причиной этого было то, что общий объем инвестиций в экономику все еще определялся сбережениями семей и что совокупное сбережение оставалось экзогенным.

Для того чтобы нарисовать более полную картину процесса экономического роста, нам необходимо ввести в модель траекторию сбережения, и в таком случае норма сбережения будет определяться как оптимальное решение домохозяйств и фирм, взаимодействующих на конкурентных рынках. Здесь мы имеем дело с бесконечно живущими домохозяйствами, которые выбирают потребление и сбережение таким образом, чтобы оптимизировать свои динамические полезности при наличии динамического бюджетного ограничения. Эта спецификация поведения потребителя — ключевой элемент модели роста Рамсея, как было это представлено в работе Ramsey (1928), а также усовершенствовано в работах Cass (1956) и Koopmans (1965).

Одним из свойств этой модели является то, что норма сбережения, вообще говоря, уже не будет постоянной величиной, а будет функцией капитала k. Итак, мы модифицируем модель Солоу–Свэна в двух направлениях: во-первых, мы точно определим средний уровень нормы сбережения, а во-вторых, мы установим, растет или падает норма сбережения по мере развития экономики. Мы также узнаем, как норма сбережения зависит от процентных ставок и благосостояния и от ставок налогов и субсидий (это рассматривается уже в следующей главе).

Средний уровень нормы сбережения имеет особую важность при определении значений переменных в стационарном состоянии. В частности, условия оптимальности в модели Рамсея предотвращают тот вид неэффективного пересбережения, который имел место в модели Солоу–Свэна.

Тенденция норм сбережения к росту или снижению по мере экономического развития влияет на переходную динамику, например на скорость сходимости к стационарному состоянию. Если норма сбережения растет по мере роста k, то скорость сходимости получается меньше, чем в модели Солоу–Свэна, и наоборот. Однако мы обнаружим, что даже если норма сбережения растет, свойство сходимости все еще сохраняется при явно более общих условиях модели Рамсея. То есть экономика все еще стремится расти тем быстрее, чем дальше она от своего собственного стационарного состояния.

Мы покажем, что модель Солоу–Свэна с постоянной нормой сбережения является частным случаем модели Рамсея; более того, этот случай соответствует рациональным значениям параметров. Так что было вполне разумным начать данную книгу с рассмотрения модели Солоу–Свэна в качестве поддающейся простому анализу аппроксимации оптимизационной схемы. Отметим, впрочем, что, исходя из эмпирических наблюдений, нормы сбережения обычно растут по мере роста подушевого дохода на протяжении перехода в стационарное состояние. Модель Рамсея согласуется с этими наблюдениями и позволяет нам оценить последствия такого поведения норм сбережения для переходной динамики. Более того, эта модель в оптимизационной форме будет нужна в последующих главах, когда мы расширим модель Рамсея в разных направлениях и рассмотрим, в частности, влияние на рост различных правительственных политик. Эти политики, в общем случае, будут непосредственно влиять на стимулирование сбережений.

2.1. Домохозяйства

2.1.1. Описание модели

Домохозяйства предоставляют трудовые ресурсы в обмен на зарплату, получают процентный доход от активов, закупают товары для потребления и сберегают путем накопления активов. В простейшем случае предполагается, что домохозяйства идентичны – они имеют одни и те же параметры предпочтений, ставка заработной платы для всех одинакова (потому что все работники одинаково продуктивны), начинают свою жизнедеятельность с одинаковыми активами на человека, имеют одинаковый темп роста населения. При этих предположениях, анализ может быть построен на обычной репрезентативной схеме, в которой равновесие выводится исходя из поведения одного домохозяйства. Позже мы обсудим, как обобщить эти результаты при различных предположениях относительно неоднородности домохозяйств.

Каждое домохозяйство состоит из одного (или более) взрослого, который является работающим представителем текущего поколения. При построении планов на будущее эти взрослые принимают во внимание необходимость обеспечения благосостоянием и ресурсами своих будущих потомков. Для моделирования этого взаимодействия между поколениями будем считать, что текущее поколение максимизирует полезность с учетом бюджетного ограничения на протяжении бесконечного временного горизонта. Хотя жизни индивидуумов конечны, мы будем считать, что имеем дело с бессмертными расширяющимися семьями. Такое предположение оправдано в случае, если альтруистически настроенные родители передают что-либо своим детям, которые в свою очередь дают что-то своим детям и т. д. Бессмертная семья соответствует конечно-живущим индивидуумам, которые связаны друг с другом посредством физических трансфертов между поколениями, основанных на альтруизме[1].

Взрослые текущего поколения ожидают, что размер их расширяющейся семьи будет расти с темпом прироста n, что является чистым итогом рождаемости и смертности. В гл. 9 мы изучим, как рациональные личности сами выбирают уровень своей рождаемости, взвешивая издержки и выгоды от выращивания детей. Но сейчас мы продолжим упрощать ситуацию, считая величину n экзогенной и постоянной. Мы

---

[1] См. Barro (1974). Мы абстрагируемся от брачных союзов, которые приводят к взаимодействиям между семейными линиями. См. Bernheim and Bagwell (1988), где это обсуждается.

также пренебрегаем миграцией людей, что также будет обсуждаться в гл. 9. Если мы нормируем число взрослых в период 0 к единице, то размер семьи в период времени t, который соответствует взрослому населению, равен

$$L(t) = e^{nt}.$$

Если $C(t)$ -- валовое потребление в период t, то $c(t) \equiv C(t)/L(t)$ -- потребление на одного взрослого.

Каждое домохозяйство желает максимизировать полную полезность U, которая может быть задана как

$$U = \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t}\, dt. \qquad (2.1)$$

Здесь предполагается, что полезность домохозяйства в период времени 0 является взвешенной суммой всех будущих потоков полезности $u(c)$. Функция $u(c)$, обычно называемая функцией полезности, соотносит поток полезности на человека с объемом потребления на человека c. Будем считать, что $u(c)$ является возрастающей функцией c и вогнутой, т. е. $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$[1]. Предположение вогнутости означает желание сглаживать потребление по времени: домохозяйства предпочитают относительно равномерную модель потребления, а не такую, в которой в некоторые периоды времени потребление мало, а в другие — велико. Это желание сгладить потребление влияет на динамику потребления домохозяйства, так как оно будет стремиться брать в долг тогда, когда доходы относительно низки, и сберегать, когда доходы относительно высоки. Мы также будем считать, что $u(c)$ удовлетворяет условиям Инады: $u'(c) \to \infty$ при $c \to 0$; $u'(c) \to 0$ при $c \to \infty$.

Умножение $u(c)$ на размер семьи $L(t) = e^{nt}$ в формуле (2.1) означает суммирование полезности по всем живым на момент t членам семьи. Другой множитель ($e^{-\rho t}$) содержит ставку временного предпочтения $\rho > 0$. Положительное значение ρ означает, что полезность тем меньше, чем позже она получена[2]. Будем считать, что $\rho > n$, откуда следует, что

---

[1] Данные результаты будут верны также и при положительных линейных преобразованиях функции полезности, но не при произвольных положительных монотонных преобразованиях. Так что наш анализ зависит от конечного вида преобразованной полезности. Обсуждение этого см. в работе Koopmans (1965).

[2] В работе Ramsey (1928) предполагается $\rho = 0$. Дело в том, что Рамсей интерпретирует оптимизирующего экономического агента как социального управляющего, а не как конкурентное домохозяйство, а для такого управляющего потребление-сбережение сегодняшнего поколения столь же значимо, сколь и будущих. Дис-

если U не меняется со временем, то интеграл в выражении (2.1) конечен и полезность c ограничена.

Смысл положительности ρ в том, что полезность в далеком будущем соответствует потреблению последующих поколений. Пусть уровни потребления на человека в каждом поколении одинаковы, и допустим, что родители предпочитают единицу своего собственного потребления единице потребления детьми. Родительский «эгоизм» соответствует $\rho > 0$ в (2.1). В более полной спецификации нам надо было бы также различать ставку дисконтирования индивидуумами своего собственного потока полезности в различные моменты времени (в этом случае вполне может быть $\rho = 0$) и ставку, которая применяется для дисконтирования полезности различных поколений. В выражении (2.1) предполагается, исключительно для удобства, что ставка дисконта на протяжении жизни одного человека такая же, как и между поколениями.

Также выглядит вполне правдоподобно предположение, что родители должны иметь убывающую предельную полезность количества детей. Мы могли бы смоделировать этот эффект, предположив, что ставка временного предпочтения ρ растет с темпом роста населения n[1]. Вследствие того что мы считаем n экзогенно заданным, эта зависимость ρ от n не окажет принципиального влияния на дальнейший анализ в данной главе. Однако мы вернемся к этому вопросу в гл. 9, где будут рассмотрены эндогенные факторы роста населения.

Домохозяйства владеют активами в виде прав собственности на капитал (отдельно этот вид активов мы рассмотрим позже в разд. 2.2 «Фирмы», где фирмы арендуют капитал у домохозяйств, которые им владеют, см. обсуждение после формулы (2.19)) или в виде денежных ссуд. Отрицательные ссуды суть долги. Далее, будем считать, что экономика закрыта, т. е. никакие активы не могут быть проданы или куплены на международном рынке. Домохозяйства могут давать и брать взаймы у других домохозяйств, но в равновесии репрезентативное домохозяйство завершает свое существование с нулевыми чистыми

контирование полезности для будущих поколений ($\rho > 0$) было бы, по мнению Рамсея, «этически непростительно». Пример с $\rho = 0$ можно найти в математическом приложении в конце книги.

[1] В литературе достаточно часто рассматривается случай, в котором ρ растет 1 : 1 вместе с n; т. е. $\rho = \rho^* + n$, где ρ^* — положительная ставка временного предпочтения, которая остается при нулевом темпе роста населения. В этом случае полезность в момент времени t входит в уравнение (2.1) в виде $u(c) \cdot e^{-\rho^* t}$. Эта величина зависит от подушевой полезности, но не зависит от размера семьи в момент времени t. Такая спецификация используется, например, в работах Sidrauski (1967) и Blanchard and Fischer (1989, гл. 2).

долговыми активами. Поскольку два вида активов, капитал и ссуды, согласно нашему предположению, совершенно заменимы друг другом как средства сбережения, то они должны иметь одинаковую норму доходности $r(t)$. Обозначим имеющиеся у домохозяйства чистые активы на человека через $a(t)$, где $a(t)$ измеряется в реальном выражении, т. е. в единицах потребительских товаров.

Домохозяйства конкурентны, так что каждое из них считает для себя заданными извне процентную ставку $r(t)$ и ставку заработной платы $w(t)$, которая выплачивается единице трудового ресурса. Будем считать, что каждый взрослый создает неэластичное предложение одной единицы трудового ресурса в единицу времени. (В гл. 9 мы рассмотрим также возможность выбора между работой и досугом.) Когда рынок труда находится в равновесии, каждое домохозяйство достигает желаемой занятости. Таким образом, модель абстрагируется от «вынужденной безработицы».

Поскольку каждый человек создает одну единицу трудового ресурса в единицу времени, то заработная плата одного человека равна $w(t)$. Тогда общий доход, который получает агрегированная совокупность домохозяйств, равен сумме трудового дохода $w(t)\cdot L(t)$ и имущественного дохода $r(t)\cdot$(Активы). Домохозяйства используют оставшийся непотребленным доход для накопления большего количества активов:

$$\frac{d(\text{Активы})}{dt} = r\cdot(\text{Активы}) + wL - C, \tag{2.2}$$

где для упрощения записи мы не указываем индексы времени; поскольку a – подушевые активы, то

$$\dot{a} = \left(\frac{1}{L}\right)\cdot\left[\frac{d(\text{Активы})}{dt}\right] - na.$$

Следовательно, если разделить уравнение (2.2) на L, то можно получить бюджетное ограничение в подушевых величинах:

$$\dot{a} = w + ra - c - na. \tag{2.3}$$

Если каждое домохозяйство может неограниченно заимствовать по обычной процентной ставке $r(t)$, то у них появляется интерес к тому, чтобы заняться заимствованиями по схеме «цепных писем» («писем счастья», или «игры Понци»), т. е. сыграть в финансовую пирамиду. Суть бесконечного цепного заимствования состоит в том, что домохозяйства могут занимать деньги для финансирования текущего потребления, а затем использовать будущие заимствования для рефинансирования как основной суммы, так и всех процентов. В этом случае долг домохозяйства растет бесконечно с темпом, равным процентной ставке $r(t)$. Основную сумму займа в таком случае никогда не нужно возвращать, поэтому сегодняшнее добавочное потребление является в сущности бесплатным. Таким образом, домохозяйство, которое может занимать в такой манере, сможет профинансировать произвольно высокий уровень потребления в течение своей жизни.

Для того чтобы исключить такую возможность цепного заимствования, предположим, что на кредитном рынке присутствует ограничение на объем заимствований. Подходящее ограничение заключается в том, чтобы текущая стоимость активов была асимптотически неотрицательна, т. е.

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left[\int\limits_0^t[r(v)-n]\,dv\right]\right\}\leqslant 0. \tag{2.4}$$

Это ограничение означает, что долгосрочно долг домохозяйства на человека (отрицательные значения $a[t]$) не может расти со скоростью большей, чем $r(t)-n$, так что объем долга не может расти со скоростью большей, чем $r(t)$. Это ограничение исключает цепные заимствования. Позже мы покажем, как ограничение кредитного рынка (2.4) возникает естественным путем из рыночного равновесия.

Оптимизационная задача домохозяйства заключается в максимизации U из уравнения (2.1) при бюджетном ограничении (2.3), начальном значении активов $a(0)$ и ограничении на заимствования (2.3). Также имеются ограничения в виде неравенств $c(t)\geqslant 0$. Однако при стремлении $c(t)$ к нулю из условия Инады следует, что предельная полезность потребления стремится к бесконечности. В результате ограничения в виде неравенств никогда не оказываются связывающими, так что мы можем их спокойно игнорировать.

2.1.2. Условия первого порядка

Математические методы решения динамических оптимизационных задач такого типа описаны в математическом приложении в конце данной книги. Полученные там результаты мы будем использовать здесь без объяснений, как они получены. Запишем приведенный к текущему времени гамильтониан:

$$J=u[c(t)\cdot e^{\cdot\,(\rho-n)t}+\nu(t)\cdot\{w(t)+[r(t)-n]\cdot a(t)-c(t)\}. \tag{2.5}$$

где выражение в фигурных скобках равно $\dot{a}$ из (2.3). Переменная $\nu(t)$ — это приведенное значение теневой цены дохода. Она представляет собой стоимость прироста дохода, полученного в период времени t в единицах полезности времени 0[1]. Заметьте, что эта теневая цена зависит от времени, потому что каждому «ограничению» соответствует своя цена, а домохозяйство имеет континуум ограничений, по одному на каждый момент времени. Условия первого порядка для максимума U имеют вид:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nu = u'(c)e^{-(\rho-n)t}; \tag{2.6}$$

$$\dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial a} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\nu} = -(r-n)\cdot\nu. \tag{2.7}$$

Условие трансверсальности:

$$\lim_{t\to\infty}[\nu(t)\cdot a(t)] = 0. \tag{2.8}$$

Уравнение Эйлера. Если продифференцировать уравнение (2.6) по времени и подставить в него выражения для ν из (2.6) и для $\dot{\nu}$ из (2.7), то можно получить основное динамическое уравнение, определяющее уровень потребления с течением времени:

$$r = \rho - \left(\frac{du'/dt}{u'}\right) = \rho - \left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\cdot\frac{\dot{c}}{c}. \tag{2.9}$$

Согласно этому уравнению, домохозяйства определяют для себя уровень потребления таким образом, чтобы норма доходности r была равна сумме ставки временного предпочтения ρ и темпа снижения предельной полезности потребления u', которая снижается в силу роста потребления c.

Процентная ставка r в левой части уравнения (2.9) является нормой доходности сбережений. Правая часть этого уравнения может рассматриваться как норма доходности потребления. Экономические агенты предпочитают сегодняшнее потребление завтрашнему по следующим двум причинам. Во-первых, домохозяйства дисконтируют будущую полезность по ставке ρ, а эта ставка является частью нормы доходности сегодняшнего потребления. Во-вторых, если $\dot{c}/c > 0$, то c сегодня меньше, чем завтра. Поскольку экономические агенты предпочитают сглаживать уровни потребления в разное время, то в силу того, что $u''(c) < 0$,

[1] Можно было бы также иметь дело с теневой ценой $\nu e^{(\rho-n)t}$. В таком виде теневая цена измеряет стоимость прироста дохода в период времени t в единицах полезности времени t. (Подробнее об этом см. в математическом приложении в конце книги.)

они будут выравнивать потребление посредством переноса некоторой его части из будущего в настоящее. Второй член в правой части уравнения (2.9) отражает именно этот эффект. Если экономические агенты оптимизируют свое поведение, то уравнение (2.9) означает для них, что две нормы доходности должны быть равны и, следовательно, им безразлично потреблять или сберегать.

С другой стороны, уравнение (2.9) можно рассматривать в том плане, что при $r = \rho$ домохозяйства выбирают горизонтальную стратегию потребления с $\dot{c}/c = 0$. Домохозяйства захотят отклониться от этого горизонтального поведения и пожертвовать частью сегодняшнего потребления ради большего потребления завтра (т. е. допускается $\dot{c}/c > 0$), только если это будет компенсировано процентной ставкой r, которая должна быть существенно выше ρ. Член

$$\left[\frac{-u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\cdot\frac{\dot{c}}{c}$$

в правой части уравнения (2.9) как раз и дает необходимую величину компенсации. Отметим, что выражение в квадратных скобках является эластичностью $u'(c)$ по c. Эта эластичность, является мерой вогнутости $u(c)$ и определяет значение, на которое величина r должна быть больше ρ. Чем больше эластичность, тем больше должно быть превышение процентной ставкой r ставки временного предпочтения ρ при заданном $\dot{c}/c$.

Величина эластичности предельной полезности $\{[-u''(c)\cdot c]/[u'(c)]\}$ иногда называется величиной, обратной эластичности межвременного замещения[1]. Из уравнения (2.9) следует, что в стационарном состоянии, в котором r и $\dot{c}/c$ константы, эта эластичность должна быть константой хотя бы асимптотически. В таком случае, следуя общепринятой прак-

[1]Эластичность межвременного замещения между потреблением в момент времени t_1 и потреблением в момент времени t_2 дается величиной, которая обратна пропорциональному изменению амплитуды угла наклона кривой безразличия в ответ на пропорциональное изменение отношения $c(t_1)/c(t_2)$. Если обозначить эту эластичность как σ, то можно записать

$$\sigma = \left[\frac{c(t_1)/c(t_2)}{-u'[c(t_1)]/u'[c(t_2)]}\cdot\frac{d\{u'[c(t_1)]/u'[c(t_2)]\}}{d[c(t_1)/c(t_2)]}\right]^{-1},$$

где $-u'[c(t_1)]/u'[c(t_2)]$ амплитуда угла наклона кривой безразличия. Если устремить t_2 к t_1, то получим мгновенную эластичность $\sigma = -u'(c)/[c\cdot u''(c)]$, которая обратна величине эластичности предельной полезности.

тике, будем считать, что функция полезности имеет вид

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \tag{2.10}$$

где $\theta > 0$. Тогда эластичность предельной полезности равна константе $-\theta$, а эластичность замещения для такой функции полезности равна константе $\sigma = 1/\theta$[1]. Поэтому этот вид функции полезности называется *функцией полезности с постоянной межвременной эластичностью замещения.* Чем больше θ, тем быстрее происходит пропорциональное снижение $u'(c)$ в ответ на прирост c и, следовательно, тем менее домохозяйства склонны к отклонению от равномерно распределенных во времени уровней c. При стремлении θ к 0 функция полезности приближается к линейной функции c; линейность же означает, что при $r = \rho$ домохозяйства безразличны относительно времени потребления.

Из вида функции полезности (2.10) следует, что условие оптимальности (2.9) сводится к

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho). \tag{2.11}$$

Таким образом, отношение между r и ρ определяет, какую модель потребления выберут домохозяйства: рост подушевого потребления, неизменность или снижение его. Меньшая склонность к межвременному замещению (большие значения θ) приводит к меньшей реакции $\dot{c}/c$ на разрыв между r и ρ.

Условие трансверсальности. Условие трансверсальности (2.8) означает, что стоимость активов домохозяйства на человека, т. е. произведение $a(t)$ на теневую цену $\nu(t)$, должна стремиться к 0 при стремлении времени к бесконечности. Если огрубленно считать бесконечность концом горизонта планирования, то интуитивно ясно, что оптимизирующие экономические агенты не захотят, чтобы у них к этому концу остались какие-либо значимые активы[2]. Полезность определенно

---

[1] В числитель входит -1, благодаря чему $u(c)$ стремится к $\log(c)$ при $\theta \to 1$ (это можно доказать, применив правило Лопиталя). Впрочем, член $-1/(1-\theta)$ может быть опущен без каких-либо последствий для последующих выводов, так как выбор домохозяйств инвариантен относительно линейных преобразований функции полезности (см. сноску (1) на с. 118).

[2] Интерпретировать условие трансверсальности в задаче с бесконечным горизонтом планирования как предел соответствующего условия в конечном случае не всегда корректно. Объяснения приведены в математическом приложении в конце данной книги.

возросла бы, если бы активы, вместо того чтобы, по сути, быть выброшенными, повысили уровень потребления в некоторые конечные периоды времени.

Теневая цена ν эволюционирует со временем в соответствии с уравнением (2.7). После интегрирования этого уравнения по времени получаем

$$\nu(t) = \nu(0) \cdot \exp\left\{ - \int_0^t [r(v) - n]\, dv \right\}.$$

Множитель $\nu(0)$ равен $u'(c(0))$ и положителен в силу того что начальное значение $c(0)$ конечно (если U конечна), и $u'(c)$ предполагается положительной при конечных c.

Подставим теперь выражение для $\nu(t)$ в уравнение (2.8), тогда условие трансверсальности преобразуется к виду

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot \exp\left[- \int_0^t [r(v) - n]\, dv \right] \right\} = 0. \tag{2.12}$$

Из этого уравнения следует, что количество активов на человека a не растет асимптотически с таким высоким темпом, как уровня $r - n$, или, что эквивалентно, общий объем активов не растет с темпом уровня r. Бесконечно долгое аккумулирование положительных активов с темпом их роста r и более было бы квазиоптимальным решением для домохозяйств, потому что полезность увеличится, если эти активы вместо накопления потребить за конечное время.

В случае допущения заимствований, благодаря которым величина $a(t)$ может быть отрицательной, бесконечно живущие домохозяйства будут занимать средства и никогда не будут выплачивать ни сумму долга, ни проценты, так что уравнение (2.12) не будет выполняться. Однако неравенство (2.4) исключает возможность такого цепного заимствования, т. е. запрещает такую схему, при которой долг домохозяйства растет бесконечно с темпом r или выше. Чтобы осуществлять такие бесконечные заимствования, домохозяйствам нужно найти подходящих кредиторов, т. е. найти другие домохозяйства, которые согласились бы владеть положительным количеством активов, растущих с темпом не менее r. Но мы уже знаем, что, согласно условию трансверсальности, эти домохозяйства не могут асимптотически иметь активы с таким высоким темпом роста. Следовательно, в равновесии ни одно домохозяйство не сможет осуществлять займы цепным образом. Другими словами, ограничение в виде неравенства (2.4) нужно именно для исключения цепных заимствований, и в действительности оно возникает в равновесии благодаря кредитному рынку. При таком ограничении лучшее, что могут сделать оптимизирующие свое поведение домохозяйства, т. е. максимизирующие функцию полезности (2.1), – это подчиниться уравнению (2.12). Таким образом, это равенство должно быть выполнено независимо от того, положительно значение $a(t)$ или отрицательно.

Функция потребления. Выражение

$$\exp\left[-\int\limits_0^t r(v)\,dv\right],$$

присутствующее в уравнении (2.12), является приведенным к текущему времени значением коэффициента, который конвертирует единицу дохода времени t в эквивалентную единицу дохода времени 0. Если $r(v)$ взять равной константе r, то приведенный коэффициент упрощается до e^{-rt}. Или мы можем рассмотреть среднюю процентную ставку в промежутке времени между 0 и t, которая определяется как

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\cdot\int\limits_0^t r(v)\,dv. \tag{2.13}$$

Тогда приведенное значение коэффициента равно $e^{-\bar{r}(t)\cdot t}$.

Уравнение (2.11) определяет темп роста c. Для определения уровня c, т. е. функции потребления, нужно использовать бюджетное ограничение (2.3), из которого выводится межвременное бюджетное ограничение домохозяйства. Мы можем решить уравнение (2.3), так как оно является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно a, после чего получаем межвременное бюджетное ограничение, выполненное для любого $T \geqslant 0$[1]:

$$a(T)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]\cdot T} + \int\limits_0^T c(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]\cdot t}\,dt = a(0) + \int\limits_0^T w(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]\cdot t}\,dt,$$

где $\bar{r}(t)$ определено в уравнении (2.13). Это межвременное бюджетное ограничение означает, что все доходы в период времени от 0 до T, приведенные к текущему времени, плюс начальный, уже имеющийся в распоряжении капитал, должны равняться сумме текущей приведенной

[1] Методы решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приведены в математическом приложении в конце книги.

величины всего будущего потребления и текущей стоимости активов, оставшихся на момент времени T. Если T устремить к бесконечности, то самое левое слагаемое исчезнет (в силу условия трансверсальности (2.12)), так что межвременное бюджетное ограничение примет вид

$$\int_0^\infty c(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]\cdot t}\,dt = a(0) + \int_0^\infty w(t)\cdot e^{-[\bar{r}(t)-n]\cdot t}\,dt = a(0) + \tilde{w}(0). \quad (2.14)$$

Следовательно, текущая приведенная величина потребления равна личному капиталу за всю жизнь, который определяется как сумма начальных активов $a(0)$ и приведенной к начальному моменту времени величины будущих трудовых доходов $\tilde{w}(0)$.

Если проинтегрировать уравнение (2.11) на интервале от 0 до t, а также использовать определение (2.13) для $\bar{r}(t)$, то получается выражение для уровня потребления

$$c(t) = c(0)\cdot e^{(1/\theta)\cdot[\bar{r}(t)-\rho]\cdot t}.$$

Теперь подставим этот результат для $c(t)$ в выражение (2.14), получим

$$c(0) = \mu(0)\cdot[a(0) + \tilde{w}(0)], \quad (2.15)$$

где $\mu(0)$ — склонность к растрачиванию личного капитала на потребление, определяется из

$$\left[\frac{1}{\mu(0)}\right] = \int_0^\infty e^{-[\bar{r}(t)\cdot(1-\theta)/\theta-\rho/\theta+n]\cdot t}\,dt. \quad (2.16)$$

Прирост средней процентной ставки $\bar{r}(t)$ при заданном значении личного капитала имеет два пути воздействия на предельную склонность к потреблению (2.16). Во-первых, более высокие процентные ставки увеличивают стоимость текущего потребления относительно будущего потребления, что является эффектом межвременного замещения, который мотивирует домохозяйства откладывать потребление с текущего времени на будущее. Во-вторых, более высокие процентные ставки дают эффект дохода, который приводит к увеличению потребления вообще, в течение всего времени. Чистое воздействие прироста $\bar{r}(t)$ на $\mu(0)$ зависит от того, какая из этих двух сил доминирует.

Если $\theta < 1$, то $\mu(0)$ снижается по мере роста $\bar{r}(t)$, потому что доминирует эффект замещения. Интуитивно ясно, что если параметр θ мал, то домохозяйства не очень-то заботятся о сглаживании потребления, так что эффект межвременного замещения велик. И наоборот, если $\theta > 1$, то $\mu(0)$ растет по мере роста $\bar{r}(t)$, так как эффект замещения в этом случае относительно слабый. И наконец, если $\theta = 1$ (логарифмическая полезность), то оба эффекта в точности нейтрализуют друг друга, а $\mu(0)$ упрощается до константы $\rho - n$, которая не зависит от $\bar{r}(t)$. Вспомним, что мы предположили $\rho - n > 0$.

Если личный капитал $a(0) + \tilde{w}(0)$ постоянен, то эффекты $\bar{r}(t)$ на $\mu(0)$ переносятся и на $c(0)$. Однако в действительности $\tilde{w}(0)$ снижается по мере роста $\bar{r}(t)$ при заданной траектории $w(t)$. Этот третий эффект усиливает упомянутый выше эффект замещения.

2.2. Фирмы

Фирмы производят товары, оплачивают трудовой ресурс заработной платой и платят ренту за использование капитального ресурса. Каждая фирма имеет доступ к производственной технологии

$$Y(t) = F(K(t), L(t), T(t)),$$

где Y — поток выпуска; K — капитальный ресурс (в единицах товаров); L Э трудовой ресурс (в человеко-часах в год); $T(t)$ – уровень технологии, который предполагается растущим с темпом $x \geqslant 0$. Следовательно, $T(t) = e^{xt}$ (мы нормировали начальный уровень технологии $T(0)$ к 1). Функция $F(\cdot)$ удовлетворяет неоклассическим свойствам, которые обсуждались в гл. 1. В частности, имеет место постоянство эффективности с ростом масштаба производства по K и L, а предельный продукт каждого из этих двух ресурсов положителен и убывает.

Как мы установили в гл. 1, стационарное состояние в этом случае существует, только если технологический прогресс принимает трудоинтенсивную форму:

$$Y(t) = F(K(t), L(t) \cdot T(t)).$$

Определим, как и ранее, «эффективный труд» как произведение неквалифицированного труда на уровень технологии $\hat{L} \equiv L \cdot T(t)$, тогда производственная функция принимает вид:

$$Y(t) = F(K, \hat{L}). \tag{2.17}$$

Впредь нам будет удобно работать с переменными, которые окажутся постоянными в стационарном состоянии. В гл. 1 мы показали, что в стационарном состоянии в модели с экзогенным технологическим прогрессом подушевые переменные росли с постоянным темпом технологического прогресса x. Это верно и сейчас. Следовательно, как и ранее, нам следует перейти к величинам на единицу эффективного труда:

$$\hat{y} \equiv \frac{Y}{\hat{L}} \quad \text{и} \quad \hat{k} \equiv \frac{K}{\hat{L}}.$$

Тогда, как это уже было сделано в уравнении (1.38), производственную функцию можно переписать в интенсивном виде:

$$\hat{y} = f(\hat{k}), \tag{2.18}$$

где $f(0) = 0$. Нетрудно проверить, что предельные продукты производственных факторов даются уравнениями[1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= f'(\hat{k}); \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= [f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})] \cdot e^{xt}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из условий Инады, рассмотренных в гл. 1, следует $f'(\hat{k}) \to \infty$ при $\hat{k} \to 0$ и $f'(\hat{k}) \to 0$ при $\hat{k} \to \infty$.

Мы будем считать, что фирмы арендуют капитал у домохозяйств, которые этим капиталом владеют. (Эквивалентно можно считать, что фирмы владеют капиталом, а домохозяйства владеют долями в капитале или акциями фирм.) Пусть $R(t)$ — ставка арендной платы за единицу капитала, тогда общие расходы фирмы на аренду капитала равны $R \cdot K$, т. е. пропорциональны K. Предположим, что использование капитальных ресурсов может быть увеличено или уменьшено без каких-либо дополнительных расходов, таких как издержки на установку и настройку машин и т. п. Такого типа издержки, связанные с вводом капитала в эксплуатацию, мы рассмотрим позднее, в гл. 3.

Так же как и в гл. 1, предположим, что наша модель односекторная, так что одна единица выпуска может быть использована либо для создания домохозяйством одной дополнительной единицы капитала K, либо для реализации одной единицы потребления C. Таким образом, если экономика не находится в каком-либо угловом решении, в котором весь текущий выпуск расходуется либо на потребление, либо на новый капитал, то цена K в единицах C равна 1. В силу того что в равновесии C

[1] Запишем $Y = \hat{L} \cdot f(\hat{k})$. Дифференцирование Y по K при фиксированных L и t приводит к уравнению $\partial Y/\partial K = f'(\hat{k})$. Дифференцирование Y по L при фиксированных K и t приводит к уравнению

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = [f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})] \cdot e^{xt}.$$

не равно 0, нам остается рассмотреть лишь случай, когда выпуск совсем не расходуется на новый капитал, т. е. валовое инвестирование равно 0. Но и в такой ситуации цена K в единицах C осталась бы равной 1, если бы капитал был обратим в том смысле, что существующий его объем мог бы пойти на потребление один к одному (единица капитала — единица потребления). Если капитал обратим, то инвестирование может быть отрицательным и цена K в единицах C остается равной 1. Хотя такая ситуация и может иметь место в фермерском хозяйстве, где капиталом являются животные, которых можно употребить в пищу, тем не менее экономисты обычно считают, что инвестиции необратимы. В таком случае цена K в единицах C равна 1, только если ограничение неотрицательности агрегированного валового инвестирования не является связывающим в равновесии. Мы придерживаемся этого предположения в последующем анализе, а также считаем инвестирование неотрицательным в приложении 2В (разд. 2.9).

Так как капиталы выбывают с постоянным темпом $\delta \geqslant 0$, то чистая норма доходности домохозяйства, владеющего единицей капитала, равна $R - \delta$[1]. Вспомним, что домохозяйства могут также получать процентную ставку r с тех фондов, которые они сдали в аренду другим домохозяйствам. Так как капитал и займы являются совершенными заменителями друг друга как средства накопления, то должно быть выполнено $r = R - \delta$ или, что эквивалентно, $R = r + \delta$.

Поток чистой выручки или прибыли репрезентативной фирмы в некоторый момент времени задается уравнением

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta) \cdot K - wL. \tag{2.20}$$

Так же как и в гл. 1, задача максимизации приведенной к текущему времени прибыли сводится к задаче максимизации прибыли в каждый период времени без связи с результатами оптимизации в другие периоды. Прибыль можно записать в виде:

$$\pi = \hat{L} \cdot [f(\hat{k}) - (r + \delta) \cdot \hat{k} - we^{-xt}]. \tag{2.21}$$

Конкурентная фирма, для которой r и w заданы, максимизирует прибыль при заданном $\hat{L}$ посредством уравнения

$$f'(\hat{k}) = r + \delta. \tag{2.22}$$

[1] В более общем случае, если цена капитала меняется со временем, реальная норма доходности для владельцев капитала равна $R/\phi - \delta + \dot{\phi}/\phi$, где ϕ - цена капитала в единицах потребительских товаров. В нашем же случае, когда $\phi = 1$, величина капитального дохода $\dot{\phi}/\phi$ равна нулю, так что норма доходности упрощается до константы $R - \delta$.

Как и ранее, при полном равновесии на рынке ставка заработной платы w равна предельному продукту труда, соответствующему такому значению $\hat{k}$, которое удовлетворяет уравнению (2.22):

$$[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})]e^{xt} = w. \tag{2.23}$$

Это условие гарантирует, что прибыль равна нулю при любых значениях $\hat{L}$.

2.3. Равновесие

Мы начали главу с изучения поведения конкурентного домохозяйства, для которого процентная ставка r и ставка заработной платы w заданы извне. Затем представили конкурентные фирмы, для которых значения r и w также заданы извне. Теперь же мы объединим поведение домохозяйств и фирм, чтобы проанализировать структуру конкурентного рыночного равновесия.

Так как мы имеем дело с закрытой экономикой, то все займы внутри этой экономики нужно отменить. Тогда активы на одного взрослого человека a равны капиталу на одного работника k. Равенство между k и a вытекает из того, что весь капитал в экономике без остатка должен кому-нибудь принадлежать, в частности в данной модели закрытой экономики всем внутренним капиталом должны владеть постоянные жители (резиденты). Если бы экономика была открытой для международных рынков капитала, то разрыв между k и a соответствовал бы чистому долгу своей страны перед иностранцами. В гл. 3 рассмотрена открытая экономика, в которой чистый внешний долг может быть равен нулю.

Значение $\dot{a}$ определяется из ограничения бюджетного потока домохозяйства (2.3). Используя $a = k$, $\hat{k} = ke^{-xt}$ и выражения (2.2) и (2.23) для r и w соответственно, получаем

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}, \tag{2.24}$$

где $\hat{c} \equiv C/\hat{L} = ce^{-xt}$ и $\hat{k}(0)$ заданы. Уравнение (2.24) является ресурсным ограничением для всей экономики: изменение в объеме капитала равно выпуску минус потребление и амортизация, и, кроме того, раз речь идет об изменении $\hat{k} \equiv K/\hat{L}$, то также нужно учесть рост $\hat{L}$ с темпом $x + n$.

Дифференциальное уравнение (2.24) является ключевой динамической связью между переменными, которая определяет эволюцию $\hat{k}$ и, следовательно, $\hat{y} = f(\hat{k})$ во времени. Однако пока отсутствует уравнение, определяющее $\hat{c}$. Если бы у нас было соотношение между $\hat{c}$ и $\hat{k}$

(или $\hat{y}$) или если бы у нас было другое дифференциальное уравнение, которое бы определяло эволюцию $\hat{c}$, то тогда мы смогли бы изучить всю динамику экономики.

В модели Солоу--Свэна из гл. 1 отсутствующее соотношение было получено посредством предположения, что норма сбережения постоянна. Такое предположение влекло за собой линейную функцию потребления $\hat{c} = (1 - s) \cdot f(\hat{k})$. В текущих же условиях динамика нормы сбережения не так проста, но рассмотренная нами выше оптимизация поведения домохозяйства дала нам уравнение (2.11) прироста c. Тогда, воспользовавшись уравнениями $r = f'(\hat{k}) - \delta$ и $\hat{c} = ce^{-xt}$, получаем

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]. \tag{2.25}$$

Это уравнение и уравнение (2.24) формируют систему двух дифференциальных уравнений относительно $\hat{c}$ и $\hat{k}$. Из этой системы, включающей начальное условие $\hat{k}(0)$ и условие трансверсальности, определяются траектории $\hat{c}$ и $\hat{k}$.

Условие трансверсальности можно записать через переменную $\hat{k}$, произведя замены $a = k$ и $\hat{k} = ke^{-xt}$ в уравнении (2.12), имеем

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \hat{k} \cdot \exp\left(- \int_0^t [f'(\hat{k}) - \delta - x - n]\, dv \right) \right\} = 0. \tag{2.26}$$

Забегая вперед, скажем, что $\hat{k}$ асимптотически сходится к некоторому постоянному стационарному значению $\hat{k}^*$, так же как и в модели Солоу--Свэна. Тогда это условие трансверсальности (2.26) можно интерпретировать так: стационарная норма доходности $f'(\hat{k}^*) - \delta$ должна быть больше $x + n$, стационарного темпа роста K.

2.4. Возможные варианты модели

До сих пор предполагалось, что экономика децентрализована и в ней имеются конкурентные домохозяйства и фирмы. Впрочем, исходя из структуры модели, можно понять, что те же самые уравнения -- и, следовательно, такие же результаты -- будут получаться и при некоторых других предположениях относительно структуры экономики. Во-первых, домохозяйства могут играть роль фирм, нанимая взрослых членов семьи в качестве работников, в соответствии с производственным процессом $f(\hat{k})$[1]. Ресурсное ограничение (2.24) в этом случае получа-

[1] Такая структура рассматривалась в гл. 1.

ется сразу (совокупный выпуск должен быть израсходован либо на потребление, либо на валовое инвестирование, которое равно чистому инвестированию плюс амортизация). Если домохозяйства максимизируют функции полезности из уравнений (2.1) и (2.10) при ограничении (2.24), то уравнения (2.25) и (2.26) именно в таком же виде являются условиями первого порядка. В итоге ясно, что совершенно неважно, каким образом распределены функции между фирмами и домохозяйствами.

Мы могли бы также предположить, что экономикой управляет великодушный *социальный управляющий*, который диктует выбор уровней потребления с течением времени и который максимизирует полезность репрезентативной семьи. Введение в модель социального управляющего будет полезно в ряде случаев для определения наилучших результатов, которых теоретически может достигнуть экономика. Предполагается, что управляющий имеет те же предпочтения, которые мы упоминали ранее — в частности, ту же ставку временного предпочтения ρ и ту же функцию полезности $u(c)$. Управляющий также ограничен агрегированным ресурсным ограничением (2.24). Следовательно, решение для управляющего будет точно таким же, что и для децентрализованной экономики[1]. Так как решение для великодушного социального управляющего с полномочиями диктатора является оптимальным по Парето, а решение для децентрализованной экономики совпадает с решением управляющего, то и децентрализованный оптимум является оптимальным по Парето.

2.5. Стационарное состояние

Выясним теперь, как согласуются условия равновесия (уравнения (2.24)–(2.26)) со стационарным состоянием, в котором различные величины растут с постоянными (возможно, нулевыми) темпами. Сначала мы покажем, что стационарные темпы прироста $\hat{k}$ и $\hat{c}$ должны быть равны 0, как и в модели Солоу — Свэна гл. 1.

---

[1] Задача управляющего состоит в том, чтобы выбрать такую траекторию c, которая максимизировала бы U из уравнения (2.1) при наличии в экономике бюджетного ограничения (2.24), неравенств $c \geqslant 0$ и $\hat{k} \geqslant 0$ и при заданном начальном значении $\hat{k}(0)$. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$J = u(c)e^{-\rho t} + \nu\left[f(\hat{k}) - ce^{-xt} - (x + n + \delta)\cdot\hat{k}\right].$$

Обычные условия первого порядка приводят к уравнению (2.25), а условие трансверсальности — к уравнению (2.26).

Пусть $(\gamma_{\hat{k}})^*$ — стационарный темп роста $\hat{k}$, а $(\gamma_{\hat{c}})^*$ — стационарный темп роста $\hat{c}$. В стационарном состоянии, из уравнения (2.25) вытекает

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} - \hat{k} \cdot (\gamma_{\hat{k}})^*. \tag{2.27}$$

Если это уравнение продифференцировать по времени, получим

$$\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}} \cdot \{f'(\hat{k}) - [x + n + \delta + (\gamma_{\hat{k}})^*]\}. \tag{2.28}$$

Выражение в фигурных скобках положительно, что следует из условия трансверсальности (2.26). Следовательно, стационарные темпы роста $(\gamma_{\hat{k}})^*$ и $(\gamma_{\hat{c}})^*$ либо оба положительны, либо оба отрицательны.

Если $(\gamma_{\hat{k}})^* > 0$, то $\hat{k} \to \infty$ и $f'(\hat{k}) \to 0$. Но из (2.25) следует $(\gamma_{\hat{c}}) < 0$, что противоречит нашему результату, согласно которому $(\gamma_{\hat{k}})^*$ и $(\gamma_{\hat{c}})^*$ имеют одинаковые знаки. Если $(\gamma_{\hat{k}})^* < 0$, то $\hat{k} \to 0$ и $f'(\hat{k}) \to \infty$. Но тогда из (2.25) следует, что $(\gamma_{\hat{c}}) > 0$, а это опять противоречит тому, что $(\gamma_{\hat{k}})^*$ и $(\gamma_{\hat{c}})^*$ имеют одинаковые знаки. Следовательно, единственная оставшаяся возможность — это равенство обоих темпов нулю:

$$(\gamma_{\hat{k}})^* = (\gamma_{\hat{c}})^* = 0.$$

Из $(\gamma_{\hat{k}})^* = 0$ следует $(\gamma_{\hat{y}})^* = 0$. Таким образом, величины на единицу эффективного труда $\hat{k}$, $\hat{c}$ и $\hat{y}$ постоянны в стационарном состоянии. Из такой их динамики следует, что подушевые величины k, c и y растут в стационарном состоянии с темпом прироста x, а переменные K, C и Y растут в стационарном состоянии с темпом прироста $x + n$. Эти результаты в точности такие же, что и в модели Солоу–Свэна, в которой норма сбережения была экзогенной и постоянной.

Приравняв правые части уравнений (2.24) и (2.25) нулю, получаем стационарные значения $\hat{c}$ и $\hat{k}$. Сплошная (без стрелочек) кривая на рис. 2.1, которая задается уравнением $\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}$, является геометрическим местом точек $(\hat{k}, \hat{c})$, удовлетворяющих $\dot{\hat{k}} = 0$ в уравнении (2.24). Заметьте, что пик этой кривой достигается при $f'(\hat{k}) = (x+n+\delta)$, так что процентная ставка $f'(\hat{k}) - \delta$ равна стационарному темпу прироста выпуска $x+n$. Равенство между процентной ставкой и этим темпом прироста соответствует уровню $\hat{k}$ золотого правила (см. гл. 1)[1)], потому что при выполнении этого равенства достигается

[1)] В гл. 1 мы определили уровень k, соответствующий золотому правилу, как объем капитала на человека, при котором стационарное подушевое потребление максимально. Было показано, что этот уровень капитала удовлетворяет уравнению $f'(k_{\text{gold}}) = \delta + n$ (см. уравнение (1.22)). При наличии экзогенного технологического прогресса, уровень $\hat{k}$ золотого правила определяется как такой уровень,

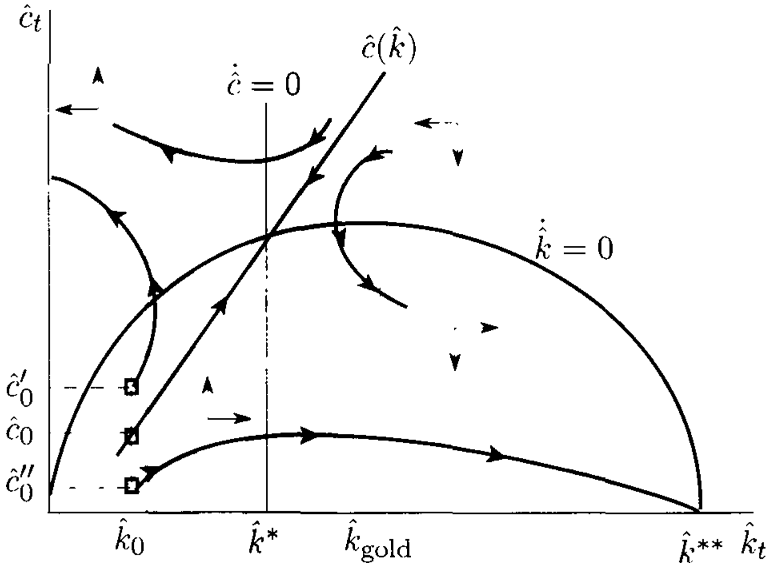


Рис. 2.1. Фазовая диаграмма модели Рамсея. На рисунке показана переходная динамика модели Рамсея. Графики $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ и $\dot{\hat{k}} = 0$ делят пространство на четыре области, стрелки показывают направление движения в каждой области. В модели имеет место устойчивость седлового типа. Устойчивая ветвь является кривой с наклоном вверх, проходящей через начало координат и стационарное состояние. При старте с низкого уровня $\hat{k}$ оптимальное начальное значение $\hat{c}$ также мало. Далее, в процессе перехода в стационарное состояние, $\hat{c}$ и $\hat{k}$ растут

максимум $\hat{c}$ в стационарном состоянии. Значение $\hat{k}$, соответствующее золотому правилу, мы обозначаем $\hat{k}_{\text{gold}}$.

Из уравнения (2.25) и $\dot{\hat{c}} = 0$ получаем

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x. \tag{2.29}$$

Это уравнение означает, что стационарная процентная ставка $f'(\hat{k}) - \delta$ равна эффективной дисконтирующей ставке $\rho + \theta x$[1]. Вертикальная прямая в значении $\hat{k}^*$ на рис. 2.1 соответствует этому условию: заметим, что $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ при таком значении $\hat{k}$ независимо от значения $\hat{c}$[2]. Ключом к определению $\hat{k}^*$ посредством уравнения (2.29) является убывающая доходность капитала, наличие которой приводит к тому, что $f'(\hat{k}^*)$ является монотонно убывающей функцией $\hat{k}^*$. Более того, условия

который максимизирует стационарное потребление на единицу эффективного труда $\hat{c}=f(\hat{k})-(x+n+\delta)\cdot\hat{k}$. Заметим, что максимум достигается, когда $f'(\hat{k}_{\text{gold}})=(x+n+\delta)$.

[1] Слагаемое θx эффективной дисконтной ставки учитывает эффект убывающей предельной полезности потребления, что связано с ростом c с темпом x. См. уравнение (2.9).

[2] Из уравнения (2.25) следует, что $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ выполнено, если $\hat{c} = 0$, т. е. вдоль горизонтальной оси координат на рис. 2.1.

Инады – $f'(0) = \infty$ и $f'(\infty) = 0$ – гарантируют, что уравнению (2.29) удовлетворяет единственное значение $\hat{k}^*$.

На рис. 2.1 показано, как определяются стационарные значения $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$, которые определяются точкой пересечения вертикальной прямой и той кривой, на которой нет стрелок. В частности, при известном $\hat{k}^*$, найденном из уравнения (2.29), значение $\hat{c}^*$ получается из уравнения (2.24) после приравнивания правой его части к 0:

$$\hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}^*. \tag{2.30}$$

Заметим, что $\hat{y}^* = f(\hat{k}^*)$ – стационарное значение $\hat{y}$.

Рассмотрим условие трансверсальности (2.26). Так как $\hat{k}$ является константой в стационарном состоянии, то это условие выполнено, если стационарная норма доходности $r^* = f'(\hat{k}^*) - \delta$ превышает стационарный темп роста $x + n$. Из уравнения (2.29) следует, что это условие можно переписать в виде

$$\rho > n + (1 - \theta)x. \tag{2.31}$$

Если ρ не настолько велико, чтобы неравенство (2.31) было выполнено, то оптимизационная задача домохозяйства является некорректно поставленной, так как при росте c с темпом x будет достигаться бесконечная полезность[1]. Поэтому будем считать, что параметры удовлетворяют неравенству (2.31).

На рис. 2.1 стационарное значение $\hat{k}^*$ отмечено слева от $\hat{k}_{\text{gold}}$. Это всегда будет так, если выполнено условие трансверсальности (2.31). Это стационарное значение найдено из уравнения $f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x$[2], в то время как значение золотого правила получено из уравнения

$$f'(\hat{k}_{\text{gold}}) = \delta + x + n.$$

Из неравенства (2.31) вытекает неравенство $\rho + \theta x > x + n$ и, следовательно,

$$f'(\hat{k}^*) > f'(\hat{k}_{\text{gold}}).$$

Неравенство $\hat{k}^* < \hat{k}_{\text{gold}}$ следует из $f'(\hat{k}) < 0$.

Вывод, который мы из всего этого делаем, состоит в том, что неэффективное пересбережение не может возникнуть при решении оптимизационной задачи, в то время как оно может возникнуть в модели Солоу–Свэна с произвольной постоянной нормой сбережения. Если бы домохозяйство с конечным временем жизни имело избыточные сбережения, то оно обнаружило бы, что это неоптимальное поведение, так как

[1] В математическом приложении в конце книги рассмотрены некоторые случаи, в которых бесконечная полезность может иметь место.

[2] Это уравнение иногда называют *модифицированным золотым правилом*.

не выполняется условие трансверсальности, и немедленно бы снизило уровень сбережения. Заметьте, что уровень сбережения домохозяйства с оптимальным поведением недостаточен для достижения значения, соответствующего золотому правилу $\hat{k}_{\text{gold}}$. Причиной этого является то, что в стационарном состоянии уровень нетерпения, отраженный в эффективной ставке дисконта $\rho + \theta x$, делает невыгодной экономию на сегодняшнем потреблении ради достижения максимума $\hat{c}$ (уровня золотого правила $\hat{c}_{\text{gold}}$).

Стационарные темпы прироста не зависят ни от параметров, входящих в производственную функцию $f(\cdot)$, ни от параметров предпочтения ρ и θ, характеризующих отношение домохозяйств к потреблению и сбережению. Эти параметры не влияют в долгосрочной перспективе и на уровни переменных.

На рис. 2.1 возрастающая склонность к сбережению, проявляющаяся в виде уменьшения ρ или θ, сдвигает график $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ вправо, а график $\dot{\hat{k}} = 0$ при этом остается на месте. Такие изменения приводят, соответственно, к увеличению значений $\hat{c}^*$ и $\hat{k}^*$ и, следовательно, к увеличению значения $\hat{y}^*$. Аналогично, пропорциональный сдвиг вверх производственной функции или сокращение величины нормы амортизации δ сдвигает кривую $\dot{\hat{k}} = 0$ вверх, а кривую $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ вправо. В результате такой сдвиг приводит к увеличению значений $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$. Прирост x увеличивает эффективную ставку временного предпочтения $\rho + \theta x$ в уравнении (2.30), в результате чего снижается значение $\hat{c}^*$, соответствующее фиксированному $\hat{k}^*$. На рис. 2.1 такие изменения приводят к сдвигу графика $\dot{\hat{k}} = 0$ вниз, а графика $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ влево, так что $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$ уменьшаются. (Несмотря на то что $\hat{c}$ снижается, полезность все равно растет, потому что прирост x увеличивает темп прироста c относительно темпа роста $\hat{c}$.) И наконец, эффект n на $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$ нулевой при фиксированном ρ. Из уравнения (2.30) следует, что $\hat{c}^*$ убывает. Поскольку большее значение n приводит к большей ставке временного предпочтения (по причине, которую мы указывали ранее), то прирост n должен снизить $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$.

2.6. Переходная динамика

2.6.1. Фазовая диаграмма

Модель Рамсея, так же как и модель Солоу Свэна, наиболее примечательна своими прогнозами относительно динамики темпов прироста и других переменных в процессе перехода из начального значения $\hat{k}(0)$ в стационарное значение $\hat{k}^*$. При заданном $\hat{k}(0)$ траектории $\hat{k}$ и $\hat{c}$ определяются из уравнений (2.24), (2.25) и (2.26). Характер этой динамики показан посредством фазовой диаграммы на рис. 2.1[1].

Сначала строится график $\dot{\hat{c}} = 0$. Так как

$$\dot{\hat{c}} = \hat{c} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x],$$

то производная $\dot{\hat{c}}$ может быть равна нулю в двух случаях: $\hat{c} = 0$, что соответствует на рис. 2.1 горизонтальной оси координат, и $f'(\hat{k}) = \delta + \rho + \theta x$, что соответствует вертикальной прямой в значении $\hat{k}^*$, которое определено в уравнении (2.29). Отмечаем, что $\hat{c}$ растет при $\hat{k} < \hat{k}^*$ (так что в этой области стрелки направлены вверх) и снижается при $\hat{k} > \hat{k}^*$ (в этой области стрелки направлены вниз).

Вспомним, что кривая, обозначенная на рис. 2.1 сплошной линией (без стрелок на ней), представляет собой соотношение между $\hat{k}$ и $\hat{c}$, которое удовлетворяет $\dot{\hat{k}} = 0$ в уравнении (2.24). Из этого уравнения также следует, что $\hat{k}$ уменьшается при значениях $\hat{c}$ выше этой кривой (так что стрелки направлены влево в этой области) и увеличивается при значениях $\hat{c}$ ниже кривой (где стрелки направлены вправо).

Так как графики $\dot{\hat{c}} = 0$ и $\dot{\hat{k}} = 0$ пересекаются трижды, то мы имеем три стационарных состояния: первое из них является началом координат ($\hat{c} = \hat{k} = 0$), второе соответствует $\hat{k}^*$ и $\hat{c}^*$, и в третьем стационарном состоянии объем капитала положителен $\hat{k}^{**} > 0$, но потребление нулевое. Решение в начале координат мы отбрасываем, так как оно совершенно неинтересное.

Второе стационарное состояние обладает свойством седловой устойчивости. В самом деле, конфигурация стрелок на рис. 2.1 такова, что экономика может сходиться к этому стационарному состоянию, только если она начинает движение из двух квадрантов из тех четырех, на которые указанные два графика делят пространство. Свойство седловой устойчивости также может быть установлено посредством линеаризации системы динамических уравнений в окрестности стационарного состояния с последующим обнаружением, что детерминант характеристической матрицы отрицателен (подробнее об этом рассказано в приложении 2А, разд. 2.8). Такой знак детерминанта означает, что два собственных значения имеют разные знаки, откуда следует, что система локально устойчива и тип этой устойчивости – «седло».

[1] Что такое фазовые диаграммы, рассказано в математическом приложении.

Система находится в динамическом равновесии только на устойчивой седловой траектории, обозначенной на рисунке сплошной кривой со стрелками, направленными в точку пересечения двух графиков. Предположим, например, что начальное значение отношения производственных факторов (капитала к эффективному труду) удовлетворяет неравенству $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, как показано на рис. 2.1. Если начальное значение отношения потребления к эффективному труду такое, как отмечено на рисунке $\hat{c}(0)$, то экономика идет по устойчивой траектории в направлении стационарной пары значений $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$. Как мы уже показали в предыдущем разделе, эта траектория удовлетворяет всем условиям первого порядка, включая условие трансверсальности.

Две другие возможности заключаются в том, что начальное значение отношения потребления к эффективному труду больше или меньше $\hat{c}(0)$. Если больше, то начальная норма сбережения слишком мала для того, чтобы экономика смогла остаться на устойчивой траектории. В этом случае траектория движения экономики, в конце концов, пересекает кривую $\dot{\hat{k}} = 0$. После этого пересечения $\hat{c}$ продолжает расти, в то время как $\hat{k}$ начинает снижаться, в результате чего за конечное время траектория упрется в вертикальную ось координат, где $\hat{k} = 0$[1]. Из условия $f(0) = 0$ следует $\hat{y} = 0$, поэтому в этой точке $\hat{c}$ должно «прыгнуть» в ноль. Такой прыжок противоречит условию первого порядка, лежащему в основе уравнения (2.25), все такие траектории, — начинающиеся со значения отношения потребления к эффективному труду, которое больше $\hat{c}(0)$, — не являются равновесиями[2].

Рассмотрим последнюю возможность, когда начальное значение отношения потребления к эффективному труду ниже $\hat{c}(0)$. В этом случае начальная норма сбережения слишком велика, чтобы оставаться на седловой траектории, так что экономика, в конце концов, пересекает график $\dot{\hat{c}} = 0$. После этого пересечения $\hat{c}$ убывает, а $\hat{k}$ продолжает расти.

---

[1] Можно убедиться, используя уравнение (2.24), что в этой области производная $\dot{\hat{k}}$ становится все более и более отрицательной. Следовательно, за конечное время $\hat{k}$ должно достигнуть нуля.

[2] Все это верно и для случая возвратных инвестиций. Если инвестиции можно вернуть, то ограничение $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$ становится связывающим до того, как указанная траектория упрется в вертикальную ось координат. То есть траектории, начинающиеся с точек, подобных $\hat{c}'_0$ на рис. 2.1, в конце концов упрутся в производственную функцию $\hat{c} = f(\hat{k})$, которая расположена выше графика $\dot{\hat{k}} = 0$. Затем такая траектория будет следовать вдоль графика производственной функции вниз до начала координат. В приложении 2В (разд. 2.9) показано, почему такие траектории не являются равновесиями.

В результате экономика сходится к точке $\hat{k}^{**}$ пересечения графика $\dot{\hat{k}} = 0$ и горизонтальной оси координат. Отметим, в частности, что в этом случае $\hat{k}$ уходит выше значения золотого правила $\hat{k}_{\text{gold}}$ и асимптотически также сходится к большему значению. Следовательно, асимптотически $f'(\hat{k}) - \delta$ оказывается ниже уровня $x + n$, так что на этой траектории нарушается условие трансверсальности (2.26). Это нарушение условия трансверсальности означает, что домохозяйства пересберегают: полезность возросла бы, если бы потребление было увеличено в ранние периоды времени. Соответственно, траектории, для которых начальное значение отношения потребления к эффективному труду меньше $\hat{c}(0)$, не являются равновесиями. В итоге имеем единственную равновесную траекторию, являющуюся устойчивой седловой траекторией, ведущей в положительное стационарное состояние $\hat{k}^*$[1].

2.6.2. Важность условия трансверсальности

В этом разделе мы объясним, какую роль играет условие трансверсальности при определении единственного равновесия. Рассмотрим нереалистичный вариант модели Рамсея, в котором всем известно, что мир закончит свое существование в определенную дату $T > 0$. Тогда функция полезности (2.1) принимает вид

$$U = \int_0^T u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t}\, dt,$$

а условие исключения цепных заимствований задается неравенством

$$a(T) \cdot \exp\left[\int_0^T [r(v) - n]\, dv\right] \geqslant 0.$$

Бюджетное ограничение по-прежнему дается уравнением (2.3). Так как здесь единственное отличие от модели предыдущего раздела заключается в наличии терминальной даты, то единственное условие оптимизации, которое меняется, — это условие трансверсальности, ко-

[1]Аналогичные результаты получаются, если экономика стартует с $\hat{k}(0) > \hat{k}^*$. Единственной сложностью здесь будет то, что если инвестиции возвратны, то ограничение $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$ может быть связывающим в этой области. Подробнее этот случай рассмотрен в приложении 2В (разд. 2.9).

торое теперь имеет вид

$$a(T) \cdot \exp\left[\int_{0}^{T} [r(v) - n]\, dv\right] = 0.$$

Так как экспоненциальный член этого выражения не может стать нулевым за конечное время, то из этого условия вытекает, что нулю должны быть равны активы, оставшиеся в конце горизонта планирования:

$$a(T) = 0. \tag{2.32}$$

Другими словами, в силу того что теневая стоимость активов в период T положительна, домохозяйства будут считать оптимальным для себя не оставлять никаких активов на дату своей «смерти».

Поведение фирм такое же, как и ранее, а для равновесия на рынках активов вновь требуется выполнение равенства $a(t) = k(t)$. Следовательно, условия общего равновесия по-прежнему задаются уравнениями (2.24) и (2.25), а графики $\dot{\hat{k}} = 0$ и $\dot{\hat{c}} = 0$ такие же, что и на рис. 2.1. Стрелки, дающие представление о динамике системы, также не меняются.

Поскольку $a(t) = k(t)$, условие трансверсальности (2.32) может быть переписано в виде

$$\hat{k}(T) = 0. \tag{2.33}$$

Как видно из рис. 2.1, это новое условие трансверсальности означает, что начальное значение $\hat{c}(0)$ должно быть таким, чтобы в терминальный момент времени T оставшийся объем капитала был равен нулю. Другими словами, из соображений оптимальности, теперь требуется, чтобы траектория движения экономики уперлась в вертикальную ось координат в точности в момент T. Отсюда следует, что устойчивая ветвь больше не является равновесием, так как на этой ветви объем капитала в экономике не становится нулевым в момент времени T. То же самое верно и при любом другом выборе начального значения потребления ниже устойчивой ветви. Следовательно, для равновесия в этом случае требуется, чтобы начальное значение потребления $\hat{c}(0)$ находилось выше устойчивой ветви.

Существует возможность того, что в течение некоторого времени обе переменные $\hat{c}$ и $\hat{k}$ могут расти. В самом деле, если T достаточно велико, то траектория перехода будет вначале достаточно близка (чуть выше) к устойчивой ветви, показанной на рис. 2.1. Однако в конце концов траектория движения экономики пересечет график $\dot{\hat{k}} = 0$. Затем $\hat{c}$ и $\hat{k}$ снижаются, так что экономика завершает свой путь в момент T

с нулевым капиталом. Таким образом, мы видим, что одна и та же система дифференциальных уравнений может иметь разные равновесия в зависимости только лишь от условия трансверсальности: в одном случае это устойчивая ветвь, а в другом - траектория, упирающаяся в вертикальную ось координат в момент T.

2.6.3. Форма устойчивой ветви

Устойчивая ветвь, показанная на рис. 2.1, отображает функциональную зависимость $\hat{c}$ от $\hat{k}$[1]. Такая зависимость в динамическом программировании называется *функцией стратегии*: она связывает оптимальное значение переменной управления $\hat{c}$ с переменной состояния $\hat{k}$. График функции стратегии представляет собой кривую с наклоном вверх, которая проходит через начало координат и стационарное состояние. Точная форма этой кривой зависит от параметров модели.

Рассмотрим в качестве примера влияние параметра θ на форму устойчивой ветви. Предположим, что экономика стартует с $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, так что будущие значения $\hat{c}$ будут больше $\hat{c}(0)$. Высокие значения θ означают, что у домохозяйств имеется довольно сильное стремление к сглаживанию потребления с течением времени; следовательно, они сделают все возможное, чтобы перенести потребление из будущего в настоящее. Поэтому при больших θ устойчивая ветвь будет лежать ближе к графику $\dot{\hat{k}} = 0$, как показано на рис. 2.2. Так как норма инвестирования в этом случае низка, то процесс перехода будет происходить долго.

Верно и обратное: если значение параметра θ мало, то домохозяйства более склонны к отложенному потреблению, поскольку высоки нормы доходности. В этом случае при малых значениях $\hat{k}$ устойчивая ветвь уплощается и приближается к горизонтальной оси координат (рис. 2.2). Высокий уровень инвестирования приводит к тому, что процесс перехода в стационарное состояние осуществляется относительно быстро, и при приближении $\hat{k}$ к $\hat{k}^*$ домохозяйства резко увеличивают $\hat{c}$. Из диаграммы ясно, что использование линейной аппроксимации в окрестности стационарного состояния для описания такой динамики не очень-то подходит.

В приложении 2С (разд. 2.10) мы покажем, что в случае производственной технологии Кобба- Дугласа $\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}$ отношение $\hat{c}/\hat{k}$ растет постоянно или падает в процессе перехода в стационарное состояние из $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$ в зависимости от того, больше, равен или меньше параметр θ

[1] Соответствующая зависимость в модели Солоу -Свэна $\hat{c} = (1 - s) \cdot f(\hat{k})$ обеспечивалась предположением о постоянстве нормы сбережения.

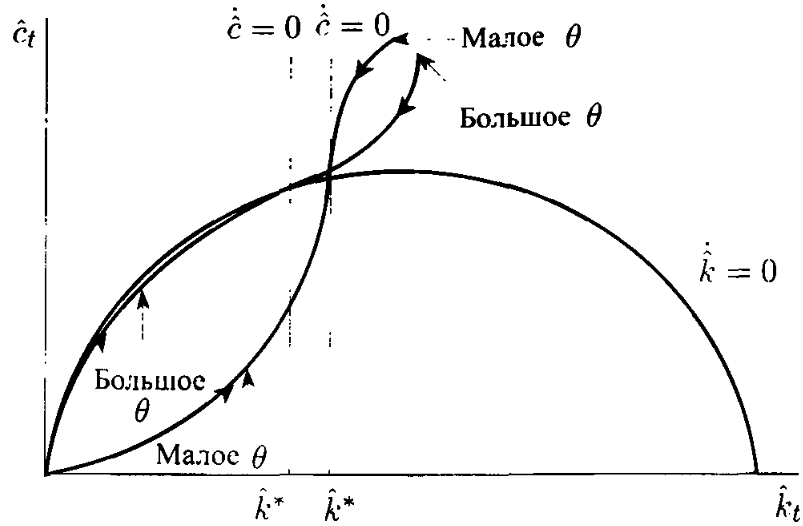


Рис. 2.2. Наклон седловой траектории. При малых значениях θ потребители не имеют ничего против больших колебаний потребления во времени. Следовательно, их уровень потребления относительно мал при низком объеме капитала (и высоком значении процентной ставки). В этом случае норма инвестирования вначале высока, так что экономика быстрыми темпами сходится к своему стационарному состоянию. В противоположность этому, при больших значениях θ потребители имеют сильную мотивацию сглаживать потребление во времени. Следовательно, изначально они расходуют большую часть своих ресурсов на потребление (устойчивая ветвь в этом случае подходит вплотную к графику $\dot{\hat{k}} = 0$), а на инвестирование совсем немного. В этом случае экономика сходится к своему стационарному состоянию медленно

доли капитала α. Отсюда следует, что устойчивая ветвь выпукла, линейна или вогнута в зависимости от того, меньше, равен или больше параметр θ параметра α. (Позже мы объясним, почему случай $\theta > \alpha$ вполне возможен.) Если $\theta = \alpha$, так что отношение $\hat{c}/\hat{k}$ неизменно в процессе перехода, то функция стратегии имеет замкнутое решение $\hat{c} = (\text{Константа}) \cdot \hat{k}$, где константа оказывается равной

$$\frac{\delta + \rho}{\theta} - (\delta + n).$$

2.6.4. Динамика нормы сбережения

Норма валового сбережения s равна $1 - \hat{c}/f(\hat{k})$. В модели Солоу—Свэна, рассмотренной в гл. 1, предполагается, что s является произвольной константой. В модели Рамсея с оптимизирующими потребителями траектория s может быть сложной, включающей участки роста и падения по мере движения экономики в направлении стационарного состояния.

Вообще говоря, динамика нормы сбережения весьма неоднозначна в силу того что она меняется под воздействием эффекта замещения и эффекта дохода. Если $\hat{k}$ растет, то уменьшение $f'(\hat{k})$ приводит к снижению нормы доходности r сбережений. Снижение же привлекательности сбережений -- эффект межвременного замещения -- приводит к снижению нормы сбережения по мере развития экономики. Далее, пусть доход на одного эффективного работника в бедной экономике $f(\hat{k})$ намного ниже долгосрочного или установившегося дохода в этой экономике. Так как домохозяйства планируют сглаживать потребление, то они предпочтут потреблять относительно большую часть своего дохода, когда они бедны, т. е. норма сбережения будет низкой, когда $\hat{k}$ мало. По мере роста $\hat{k}$ разрыв между текущим и перманентным доходами сокращается, поэтому потребление относительно текущего дохода начинает снижаться, а норма сбережения -- расти. Эта сила -- эффект дохода -- заставляет норму сбережения расти по мере развития экономики.

Переходная динамика нормы сбережения зависит от того, насколько существенен эффект замещения или дохода. Чистый эффект, вообще говоря, неоднозначен, и траектория нормы сбережения в процессе перехода может иметь сложный вид. Однако ситуация упрощается, если мы имеем дело с производственной функцией Кобба - Дугласа. В этом случае, как показано в приложении 2С, в зависимости от значений параметров норма сбережения может расти монотонно, монотонно снижаться или оставаться неизменной по мере роста $\hat{k}$.

В приложении 2С для функции Кобба - Дугласа мы покажем, что стационарная норма сбережения s^* дается выражением:

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\delta + \rho + \theta x}. \tag{2.34}$$

Заметим, что из условия трансверсальности, которое трансформировалось в уравнение (2.31), и уравнения (2.34) вытекает неравенство $s^* < \alpha$, так что стационарная норма валового сбережения меньше доли валового капитала.

Используем фазовую диаграмму для анализа переходной динамики нормы сбережения в случае производственной функции Кобба - Дугласа. Данная методология интересна и сама по себе, поскольку она позволяет изучить поведение таких переменных, как норма сбережения, которая не входит в явном виде в условия первого порядка модели. Метод включает в себя преобразование переменных, которые входят в условия первого порядка. Динамические связи, которые мы использовали ранее, были записаны в переменных $\hat{c}$ и $\hat{k}$. Для изучения переходной динамики нормы сбережения $s = 1 - \hat{c}/\hat{y}$ нам нужно переписать эти уравнения в переменных $\hat{c}/\hat{y}$ и $\hat{k}$. После этого мы сможем построить фазовую диаграмму для $\hat{c}/\hat{y}$ и $\hat{k}$. Устойчивая ветвь на такой диаграмме будет изображать изменение $\hat{c}/\hat{y}$ и, следовательно, $s = 1 - \hat{c}/\hat{y}$ — по мере роста $\hat{k}$.

Заметим вначале, что темп прироста $\hat{c}/\hat{y}$ равен темпу прироста $\hat{c}$ минус темп прироста $\hat{y}$. Если мы имеем дело с производственной функцией Кобба–Дугласа, то темп прироста $\hat{y}$ пропорционален темпу прироста $\hat{k}$, т. е.

$$\frac{1}{\hat{c}/\hat{y}} \cdot \frac{d(\hat{c}/\hat{y})}{dt} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \alpha \cdot \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}.$$

Теперь мы можем использовать условия равновесия (2.24) и (2.25), чтобы получить

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{c}/\hat{y}} \cdot \frac{d(\hat{c}/\hat{y})}{dt} &= \left[\frac{1}{\theta} \cdot (\alpha A\hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \theta x)\right] - \\ &- \alpha \cdot \left[A\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{k}}{\hat{y}} \cdot A\hat{k}^{\alpha-1} - (x + n + \delta)\right],\end{aligned} \tag{2.35}$$

где мы использовали равенство

$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} = \frac{\hat{c}}{\hat{y}} \cdot A\hat{k}^{\alpha-1}.$$

Темп прироста $\hat{k}$ равен

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \left[A\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{\hat{k}}{\hat{y}} \cdot A\hat{k}^{\alpha-1} - (x + n + \delta)\right]. \tag{2.36}$$

Заметьте, что уравнения (2.35) и (2.36) составляют систему дифференциальных уравнений относительно переменных $\hat{c}/\hat{y}$ и $\hat{k}$. Следовательно, для этих двух переменных можно изобразить обычную фазовую диаграмму.

Начнем с того, что приравняем уравнение (2.35) нулю, благодаря чему получим график $d(\hat{c}/\hat{y})/dt = 0$:

$$\frac{\hat{c}}{\hat{y}} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) + \psi \cdot \frac{\hat{k}^{1-\alpha}}{\alpha A}, \tag{2.37}$$

где

$$\psi \equiv \frac{\delta + \rho + \theta x}{\theta} - \alpha \cdot (x + n + \delta)$$

есть константа. Этот график имеет наклон вверх, вниз или горизонтален в зависимости от того, положителен коэффициент ψ, отрицателен или равен нулю. На рис. 2.3 изображены эти три случая.

Независимо от значения ψ, стрелки выше графика $d(\hat{c}/\hat{y})/dt = 0$ направлены на север (вверх), а стрелки ниже – на юг (вниз).

Для построения графика $\dot{\hat{k}} = 0$ приравняем нулю уравнение (2.35), имеем

$$\frac{\hat{c}}{\hat{y}} = 1 - \frac{x + n + \delta}{A} \cdot \hat{k}^{1-\alpha}. \tag{2.38}$$

Этот график имеет наклон вниз в любом случае[1]. Стрелки над графиком направлены на запад (влево), а стрелки под графиком направлены на восток (вправо).

Из рис. 2.3 ясно, что стационарное состояние устойчиво независимо от значения ψ, и тип этой устойчивости вновь «седло». Однако устойчивая ветвь имеет наклон вверх при $\psi > 0$, вниз – при $\psi < 0$ и горизонтальна при $\psi = 0$. Из предыдущего раздела мы знаем, что экономика с бесконечным горизонтом планирования всегда находится на устойчивой ветви. Таким образом, в зависимости от значений параметров, по мере роста $\hat{k}$ удельное потребление либо монотонно снижается, либо постоянно, либо монотонно возрастает. Соответственно норма сбережения ведет себя с точностью до наоборот. Большое значение θ, которое соответствует слабой склонности к межвременному замещению потребления, делает более вероятным выполнение неравенства $\psi < 0$, а в этом случае норма сбережения растет в процессе перехода. Такой результат получается в силу того что большое значение θ ослабляет эффект замещения от процентной ставки.

В случае $\psi = 0$ норма сбережения в процессе перехода постоянна и равна своему стационарному значению $s^* = 1/\theta$. При такой комбинации параметров эффекты замещения и дохода уравновешивают друг друга, в результате чего норма сбережения не меняется, в то время как объем капитала возрастает в направлении своего стационарного значения. Таким образом, модель Солоу - Свэна с постоянной нормой сбережения является частным случаем модели Рамсея. Однако даже в этом случае между этими двумя моделями имеется существенное различие. Уровень s в модели Рамсея определяется параметрами модели и не может быть выбран произвольным образом, в то время как произвольный выбор s в модели Солоу - Свэна может привести к результатам, которые динамически неэффективны, например если экономика сойдется к стационарному состоянию, в котором объем капитала больше уровня золотого правила. Такой исход невозможен в модели Рамсея.

---

[1] При $\psi < 0$ график $d\hat{k}/dt = 0$ также имеет более крутой наклон, чем график $d(\hat{c}/\hat{y})/dt = 0$.

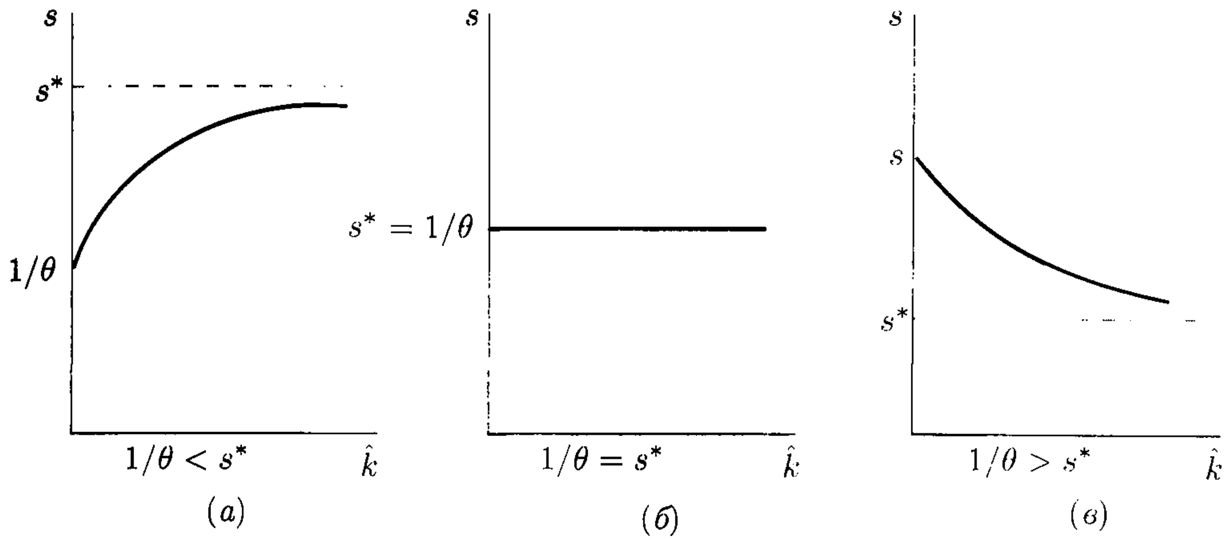


Рис. 2.3. Фазовая диаграмма динамики нормы сбережения (в случае функции Кобба—Дугласа). В случае производственной функции Кобба—Дугласа норма сбережения имеет монотонную динамику. На левой части рисунка показана фазовая диаграмма для $\hat{c}/\hat{y}$ и $\hat{k}$ в случае, если параметры удовлетворяют условию

$$\frac{\delta + \rho + \theta x}{\theta} > \alpha \cdot (x + n + \delta).$$

Так как устойчивая ветвь имеет наклон вверх, то удельное потребление возрастает по мере роста экономики в направлении своего стационарного состояния. Следовательно, в этом случае норма сбережения (единица минус норма потребления) монотонно убывает в процессе перехода. Правая часть рисунка соответствует случаю

$$\frac{\delta + \rho + \theta x}{\theta} < \alpha \cdot (x + n + \delta).$$

Здесь устойчивая ветвь имеет наклон вниз и, следовательно, норма сбережения монотонно возрастает в процессе перехода. На средней части рисунка показан случай

$$\frac{\delta + \rho + \theta x}{\theta} = \alpha \cdot (x + n + \delta).$$

Здесь устойчивая ветвь горизонтальна, что означает постоянство нормы сбережения в процессе перехода

Далее мы возьмем стандартные значения параметров: $\rho = 0{,}02$ в год, $\delta = 0{,}05$ в год; $n = 0{,}01$ в год и $x = 0{,}02$ в год. Если взять обычное значение доли капитала $\alpha = 0{,}3$, то значение θ, генерирующее постоянную норму сбережения, равно 17; это слишком большое значение, а так как у нас θ меньше, то выполнено неравенство $s^* < 1/\theta$ и норма сбережения уменьшается (что противоречит действительности) по мере развития экономики.

Как мы уже отмечали при анализе модели Солоу - Свэна, теория не может соответствовать эмпирическим наблюдениям относительно скоростей сходимости при таких больших значениях α, как 0,3. Эмпирическим наблюдениям больше соответствуют значения α в районе 0,75, но такое большое значение этого параметра имеет смысл, только если мы интерпретируем капитал в широком смысле, с учетом человеческого капитала. В следующем разделе мы покажем, что эти соображения относительно значений α верны и для модели роста Рамсея, в которой норма сбережения меняется с течением времени. Если мы положим $\alpha = 0{,}75$, то при эталонных значениях остальных параметров значение θ, генерирующее постоянную норму сбережения, равно 1,75. Если θ больше (или меньше) 1,75, то норма валового сбережения растет (или падает) по мере развития экономики. Если $\theta = 1{,}75$, то норма валового сбережения является константой, равной 0,57. Для интерпретации такого высокого значения нормы валового сбережения нам придется включить в валовое сбережение различные расходы на увеличение объема или поддержку человеческого капитала; помимо затрат на образование и обучение, это валовое сбережение может еще включать в себя некоторую часть расходов на еду, здоровье и т. п.

Согласно нашему толкованию эмпирических данных по странам, в процессе перехода в стационарное состояние норма сбережения немного растет вместе с подушевым доходом. Модель Рамсея может соответствовать такому поведению экономик и демонстрировать эмпирически наблюдаемые скорости сходимости, если взять значение θ, равным 0,75, значение α порядка 2 и наши эталонные значения для остальных параметров. Значение θ не может слишком сильно превышать 2, иначе значение стационарной нормы сбережения s^* из уравнения (2.34) станет слишком низким. Например, при $\theta = 10$ стационарная норма сбережения s^* равна 0,22, что слишком мало с точки зрения того широкого смысла, который включает валовое сбережение в форме человеческого капитала.

2.6.5. Траектории капитала и выпуска

Из вида устойчивой ветви на рис. 2.1 следует, что если $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, то $\hat{k}$ и $\hat{c}$ монотонно возрастают по мере приближения к своим стационарным значениям. Рост $\hat{k}$ означает, что норма доходности r монотонно убывает от своего начального значения $f'[\hat{k}(0)] - \delta$ до своего стационарного значения $\rho + \theta x$. Из уравнения (2.25) и факта убывания $\dot{c}/c$ следует, что темп прироста подушевого потребления $\dot{c}/c$ монотонно снижается.

Таким образом, чем меньше $\hat{k}(0)$ (и, следовательно, $\hat{y}(0)$), тем больше начальный темп $\dot{c}/c$.

Нам также понадобится связать начальные значения подушевых темпов прироста капитала γ_k и выпуска γ_y с начальным значением $\hat{k}(0)$. В гл. 1 мы называли обратные зависимости между $\dot{k}/k$ и $\hat{k}(0)$ и между $\dot{y}/y$ и $\hat{y}(0)$ эффектами сходимости. В приложении 2D (разд. 2.11) мы покажем, используя функцию потребления (2.15) и (2.16), что $\dot{k}/k$ монотонно убывает по мере развития экономики и достигает стационарного состояния. Другими словами, хотя норма сбережения может расти в процессе перехода, этот рост не настолько силен, чтобы зависимость между $\dot{k}/k$ и $\hat{k}$ перестала быть обратной. Итак, несмотря на то что норма сбережения определяется эндогенным образом, свойство сходимости для $\hat{k}$ сохранилось.

Прологарифмировав и продифференцировав производственную функцию (2.18), получаем темп прироста выпуска на эффективного работника:

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \left[\frac{\hat{k}\cdot f'(\hat{k})}{f(\hat{k})}\right]\cdot\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}, \tag{2.39}$$

т. е. темп прироста $\hat{k}$ умножается на долю валового дохода от капитала в валовом продукте. Для производственной функции Кобба–Дугласа доля дохода от капитала равна константе α. Поэтому все свойства $\dot{k}/k$ немедленно переносятся на $\dot{y}/y$. Эти результаты верны не только в случае функции Кобба–Дугласа, но и в любом другом, лишь бы доля дохода от капитала росла по мере развития экономики достаточно быстро, точнее, настолько быстро, чтобы компенсировать снижение $\dot{k}/k$.

2.6.6. Скорости сходимости

Лог-линейные аппроксимации в окрестности стационарного состояния. Теперь мы бы хотели дать количественную оценку скорости сходимости в модели Рамсея. Начнем с лог-линеаризованной версии динамической системы уравнений (2.24) и (2.25). Данный подход является обобщением метода, использованного в гл. 1 для модели Солоу—Свэна; единственным отличием здесь является то, что система содержит две переменные, $\hat{k}$ и $\hat{c}$, а не одну. Преимущество метода лог-линеаризации состоит в том, что он дает решение для коэффициента сходимости в замкнутом виде. Недостатком же этого метода является его применимость в виде аппроксимации только в окрестности стационарного состояния.

В приложении 2А исследуется лог-линеаризованная версия уравнений (2.24) и (2.25) в окрестности стационарного состояния. Результаты могут быть записаны в виде

$$\log[\hat{y}(t)] = e^{-\beta t} \cdot \log[\hat{y}(0)] + (1 - e^{-\beta t}) \cdot \log(\hat{y}^*), \tag{2.40}$$

где $\beta > 0$. Таким образом, для любого $t \geqslant 0$ величина $\log[\hat{y}(t)]$ равна взвешенному среднему начального $\log[\hat{y}(0)]$ и стационарного $\log[\hat{y}^*]$ с весом начального значения, экспоненциально убывающим с темпом β. Скорость сходимости β зависит от параметров производственной технологии и параметров предпочтений. В случае технологии Кобба -Дугласа формула для коэффициента сходимости (которая получается в результате лог-линеаризации в окрестности стационарного состояния) имеет вид:

$$2\beta = \left\{\zeta^2 + 4\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\cdot(\rho+\delta+\theta x)\cdot\left[\frac{\rho+\delta+\theta x}{\alpha} - (n+x+\delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta, \tag{2.41}$$

где $\zeta = \rho - n - (1-\theta)\cdot x > 0$. Ниже мы проанализируем эту формулу относительно того, каким образом в нее входят различные параметры.

Из уравнения (2.40) следует, что средний за период времени от начального момента времени 0 до некоторого будущего $T \geqslant 0$ темп прироста подушевого выпуска y равен

$$\frac{1}{T}\cdot\log\left[\frac{y(T)}{y(0)}\right] = x + \frac{1-e^{-\beta T}}{T}\cdot\log\left[\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}(0)}\right]. \tag{2.42}$$

Допустим, что стационарный темп прироста x, скорость сходимости β и величина интервала T, по которому производится усреднение, фиксированы. Тогда уравнение (2.42) означает, что средний темп прироста выпуска имеет обратную зависимость от отношения $\hat{y}(0)$ к $\hat{y}^*$. Таким образом, так же, как и в модели Солоу- Свэна, эффект начального состояния $\hat{y}(0)$ обусловлен стационарным состоянием $\hat{y}^*$. Другими словами, в модели Рамсея сходимость тоже условная, а не абсолютная.

Коэффициент $(1 - e^{-\beta T})/T$, связывающий темп прироста y с $\log[\hat{y}^*/\hat{y}(0)]$ в уравнении (2.42), убывает по T при заданной скорости сходимости β. Если $\hat{y}(0) < \hat{y}^*$, так что темпы прироста убывают со временем, то рост T означает, что большее количество будущих более низких темпов прироста усредняется с более высокими ближайшими темпами роста. Следовательно, средний темп прироста (в левой части уравнения (2.42)) снижается по мере роста T. При $T \to \infty$ стационарный темп прироста x доминирует над средним: следовательно, коэффициент $(1 - e^{-\beta T})/T$ сходится к 0, а средний темп прироста y в уравнении (2.42) стремится к x.

При заданном T, чем больше β, тем больше коэффициент $(1 - e^{-\beta T})/T$ (при $T \to 0$ этот коэффициент стремится к β). Уравнение (2.41) выражает зависимость β от параметров модели. Для начала рассмотрим случай, соответствующий модели Солоу–Свэна, в которой норма сбережения постоянна. Как уже отмечалось ранее, такая ситуация имеет место при равенстве стационарной нормы сбережения s^* из уравнения (2.34) величине $1/\theta$ или, что эквивалентно, при равенстве нулю следующей комбинации параметров:

$$\alpha \cdot (\delta + n) - \frac{(\delta + \rho)}{\theta} - x(1 - \alpha).$$

Предположим, что параметры принимают эталонные значения, которые мы использовали в гл. 1: $\delta = 0{,}05$ в год; $n = 0{,}01$ в год и $x = 0{,}02$ в год. Мы также возьмем $\rho = 0{,}02$ в год, так чтобы значение стационарной процентной ставки $\rho + \theta x$ оказалось в разумных пределах. Как уже говорилось в предыдущем разделе, при таких значениях параметров норма сбережения будет постоянной, если $\alpha = 0{,}3$ при $\theta = 17$ и если $\alpha = 0{,}75$ при $\theta = 1{,}75$.

При постоянной норме сбережения формула (2.41) для скорости сходимости β упрощается до формулы (1.45), полученной в модели Солоу–Свэна:

$$\beta^* = (1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta).$$

В гл. 1 было отмечено, что для соответствия эмпирической оценке β, равной примерно 0,02 в год, требуется, чтобы значение α было на уровне 0,75, т. е. находилось в таком диапазоне, при котором широкая интерпретация капитала постепенно приводит к возникновению убывающей отдачи капитала. Чем меньше $(x + n + \delta)$, тем меньше требуемое значение α; однако более или менее реалистичные значения α находятся существенно выше значений порядка 0,3, которые имеют место в случае, если капитал рассматривается в узком смысле.

Если норма сбережения не постоянна, то благодаря уравнению (2.41) мы можем определить полное воздействие различных параметров на скорость сходимости. Новым элементом здесь будет то, что траектория нормы сбережения теперь имеет наклон в процессе перехода. Если норма сбережения снижается по мере роста $\hat{k}$, то скорость сходимости будет больше, чем при любом другом поведении нормы сбережения, и наоборот. Например, как мы установили ранее, при большем значении параметра межвременного замещения θ более вероятно, что норма сбережения будет расти при возрастании $\hat{k}$. Таким образом, высокие значения θ снижают скорость сходимости β в уравнении (2.41).

При возрастании параметра временного предпочтения ρ норма сбережения склонна к снижению (см. уравнение (2.34)). Однако результат воздействия такой зависимости на скорость сходимости зависит не от уровня нормы сбережения, а от склонности нормы сбережения к возрастанию или снижению по мере развития экономики. При больших значениях ρ траектория нормы сбережения наклонена вниз. Эффективная ставка временного предпочтения равна

$$\rho + \theta \cdot \frac{\dot{c}}{c}.$$

Поскольку $\dot{c}/c$ имеет обратную зависимость от $\hat{k}$, то воздействие ρ на эффективную ставку временного предпочтения тем менее существенно, чем меньше $\hat{k}$. Отсюда получаем, что норма сбережения склонна к снижению, за исключением того отрезка времени, когда значения $\hat{k}$ малы, и, следовательно, траектория нормы сбережения наклонена вниз. Большое значение ρ увеличивает, соответственно, величину β в уравнении (2.41).

Оказывается, что в случае переменной нормы сбережения параметры δ и x увеличивают β точно так же, как и в модели Солоу- Свэна. Совокупный эффект от параметра n неоднозначен, но оказывается незначительным, если данный параметр находится в разумных пределах[1].

Основной результат, который имеет место как в случае постоянной нормы сбережения, так и в случае переменной нормы сбережения, заключается в том, что при приемлемых значениях остальных параметров, для соответствия эмпирическим оценкам скорости сходимости β, в модели требуется, чтобы значение α было большим - около 0.75. Мы можем понизить требуемое значение α до 0.5-0.6, если положим θ очень большим (больше 10), а параметр δ - близким к 0. Однако ранее мы уже установили, что большие значения θ приводят к слишком низкой стационарной норме сбережения, а значения δ, близкие к нулю, вообще далеки от реальности. Вдобавок к этому, мы чуть позже обнаружим, что α, значения которых существенно ниже 0.75, приводят к противоречащим действительности прогнозам модели относительно переходной динамики процентной ставки и отношения капитала к выпуску. В гл. 3 мы исследуем, как издержки ввода инвестиций могут понизить темп сходимости, однако это обобщение не изменит основных заключений текущего раздела.

---

[1] Из уравнения (2.41) следует, что α влияет на β отрицательным образом (т. е. чем больше α, тем меньше β), а δ на β - положительным. Наши численные расчеты показали, что если остальные параметры находятся в разумных пределах, то эффекты от них будут именно такими, какими мы их описали в тексте.

Численные решения нелинейных систем. Оценим теперь свойства сходимости в данной модели посредством численных методов решения нелинейных систем дифференциальных уравнений. Такой подход избавлен от присущих методу линеаризации модели ошибок аппроксимации и выдает точные результаты при заданных параметрах модели. Недостатком же этого метода является отсутствие решения в замкнутой форме. Но зато мы получим новые результаты при определенных наборах значений параметров.

Применим численные методы для получения общего решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. В случае производственной функции Кобба–Дугласа темпы прироста $\hat{k}$ и $\hat{c}$ даются уравнениями (2.24) и (2.25):

$$\gamma_{\hat{k}} \equiv \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = A \cdot (\hat{k})^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (x + n + \delta); \tag{2.43}$$

$$\gamma_{\hat{c}} \equiv \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \alpha A \cdot (\hat{k})^{\alpha-1} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (x + n + \delta). \tag{2.44}$$

Если бы мы задались значениями параметров $(A, \alpha, n, x, \delta, \rho, \theta)$ и если бы у нас была зависимость $\hat{c}$ от $\hat{k}$ в виде траектории, т. е. если бы мы знали функцию стратегии $\hat{c}(\hat{k})$, то тогда, используя стандартные численные методы решения дифференциальных уравнений, мы нашли бы полное решение системы в виде траекторий времени $\hat{k}$ и $\hat{c}$. В математическом приложении рассказано, как применить процедуру под названием *метод исключения времени* для того, чтобы получить численно функцию стратегии (см. также Mulligan and Sala-i-Martin, 1991). Будем считать, что у нас есть решение этой задачи.

Зная функцию стратегии, мы можем определить траектории всех интересующих нас переменных, включая коэффициент сходимости, который определяется как

$$\beta = -\frac{d(\gamma_{\hat{k}})}{d[\log(\hat{k})]}.$$

(В случае функции Кобба–Дугласа коэффициент сходимости для $\hat{y}$ такой же, как и для $\hat{k}$.) На рис. 2.4 показана зависимость между β и $\hat{k}/\hat{k}^*$ при наших стандартных значениях параметров ($\delta = 0{,}05$; $x = 0{,}02$; $n = 0{,}01$; $\rho = 0{,}02$), при $\theta = 3$ и $\alpha = 0{,}3$ или 0,75[1]). При любых α коэффициент сходимости β является убывающей функцией

[1]) В случае технологии Кобба–Дугласа при заданном значении $\hat{k}/\hat{k}^*$ параметр A не влияет на β.

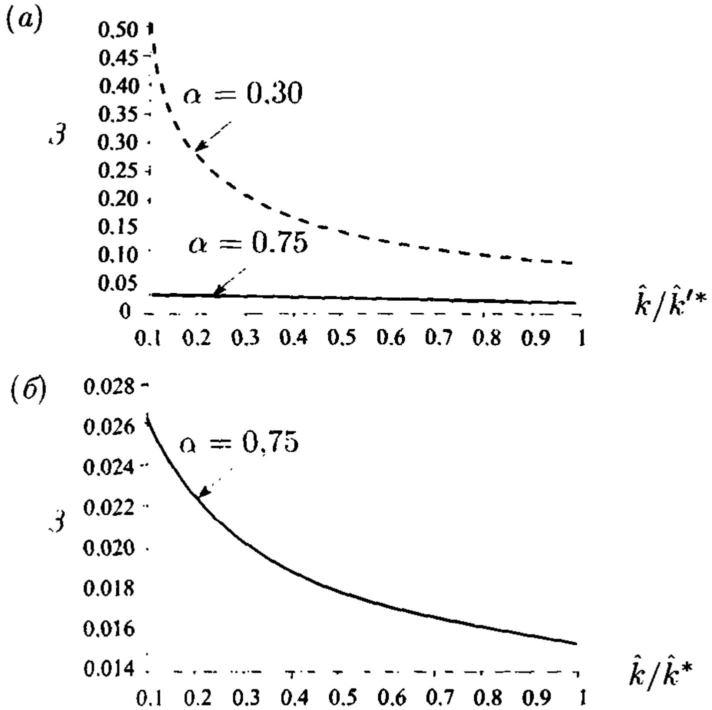


Рис. 2.4. Численные оценки скорости сходимости в модели Рамсея. Точная скорость сходимости (отмечаемая по вертикальной оси) является убывающей функцией $\hat{k}/\hat{k}^*$, т. е. величины разрыва между текущим и стационарным состояниями (отмечена по горизонтальной оси). Анализ проводился в предположении, что в качестве производственной функции взята функция Кобба–Дугласа, и результаты здесь приведены для $\alpha = 0{,}3$ и $\alpha = 0{,}75$. Изменение скорости сходимости в процессе перехода более отчетливо видно при малых значениях доли капитала α. Значение скорости сходимости β в стационарном состоянии ($\hat{k}/\hat{k}^* = 1$) совпадает со значением, найденным нами аналитически посредством лог-линейной аппроксимации в окрестности стационарного состояния (уравнение (2.41))

$\hat{k}/\hat{k}^*$, т. е. скорость сходимости падает при приближении экономики к стационарному состоянию[1]. В стационарном состоянии, где $\hat{k}/\hat{k}^* = 1$, значения β (0.082 при $\alpha = 0{,}3$ и 0.015 при $\alpha = 0{,}75$) совпадают с теми значениями, которые получаются из уравнения (2.41), полученного посредством лог-линеаризации в окрестности стационарного состояния.

Если $\hat{k}/\hat{k}^* < 1$, то, как видно на рис. 2.4, значения β превосходят получаемые из уравнения (2.41) значения. Например, если $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}5$, то $\beta = 0{,}141$ при $\alpha = 0.3$ и 0,018 при $\alpha = 0{,}75$. Если $\hat{k}/\hat{k}^* = 0.1$, то $\beta = 0{,}474$

[1] В общем случае такой зависимости не наблюдается. В частности, β может расти вместе с $\hat{k}/\hat{k}^*$, если значение параметра θ очень мало, а α очень велико, например если $\theta = 0{,}5$ и $\alpha = 0{,}95$.

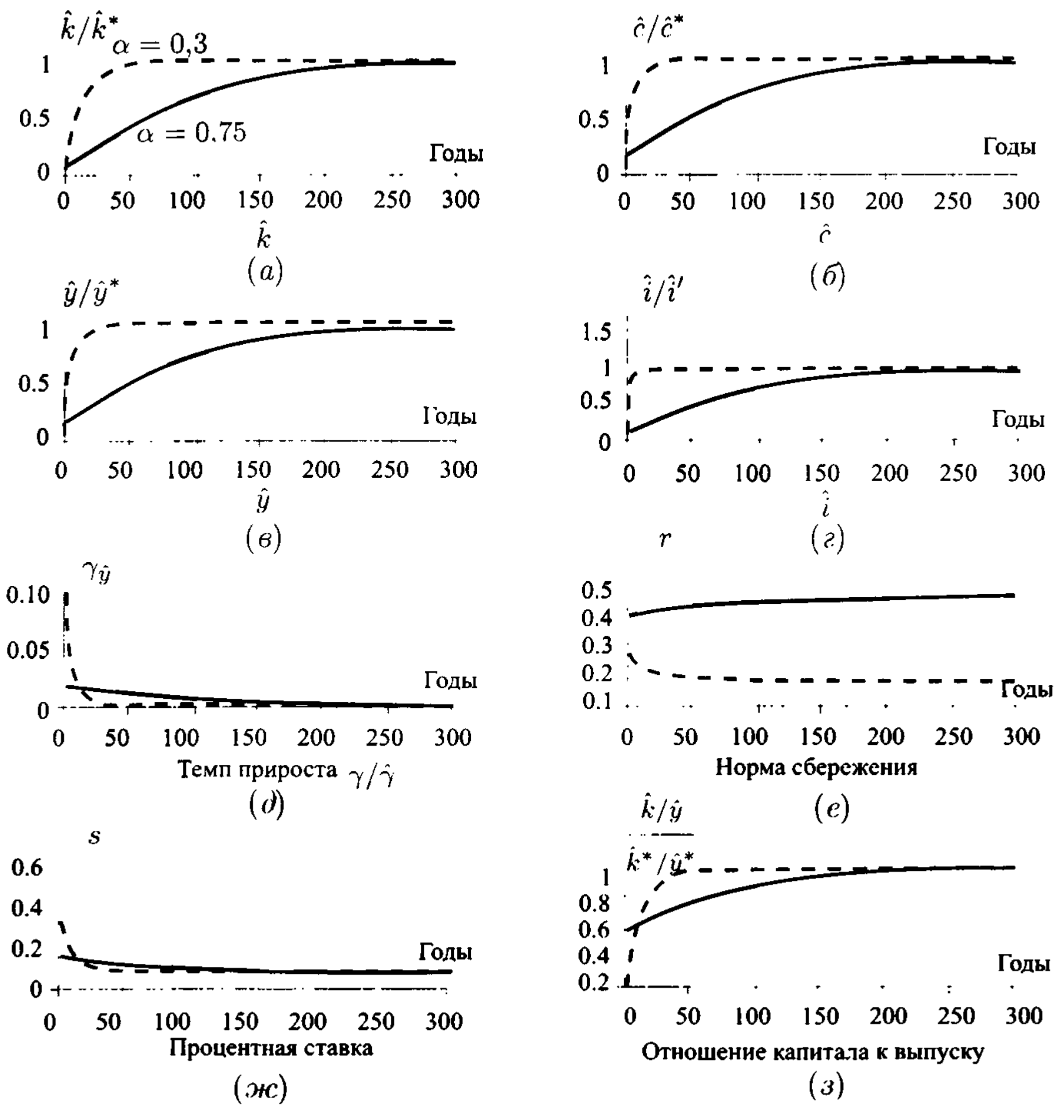


Рис. 2.5. Численные оценки динамических траекторий в модели Рамсея. Восемь частей рисунка демонстрируют точные динамические траектории восьми ключевых переменных: значения на единицу эффективного труда объема капитала, потребления, выпуска и инвестирования, затем темп прироста выпуска на одного эффективного работника, норма сбережения, процентная ставка и отношение капитала к выпуску. Первые четыре и последняя переменные выражены через отношения к своим стационарным значениям, в силу чего каждая из них сходится асимптотически к 1. Анализ произведен в предположении производственной технологии Кобба Дугласа. Пунктирная линия на каждой части рисунка соответствует динамике переменных при $\alpha = 0{,}3$, а сплошная линия при $\alpha = 0.75$. Значения остальных параметров приведены в тексте. Начальное значение капитала на одного эффективного работника предполагается в каждом случае равным одной десятой его стационарного значения

при $\alpha = 0{,}3$ и 0,026 при $\alpha = 0{,}75$. Таким образом, при использовании высокого значения коэффициента доли капитала $\alpha = 0{,}75$, которое для нас наиболее предпочтительно, коэффициент сходимости β находится в диапазоне от 1,5 до 3% для широкого диапазона значений $\hat{k}/\hat{k}^*$. Такая динамика согласуется с эмпирическими наблюдениями, которым посвящены гл. 11 и 12; в частности, в этих главах установлено, что реальные коэффициенты сходимости, по всей видимости, не выходят за пределы указанного диапазона даже для экономик, весьма далеких от своих стационарных состояний. В противоположность этому, если мы положим $\alpha = 0{,}3$, то при существенном разрыве между $\hat{k}$ и $\hat{k}^*$ модель спрогнозирует экстремально высокие темпы сходимости, что противоречит действительности.

Скорости сходимости тем больше, чем больше дистанция между начальным состоянием и стационарным, поэтому длина переходов получается короче, нежели в линеаризованной модели. Используя известную нам траекторию $\hat{k}(t)$, мы можем вычислить точное время, которое потребуется для преодоления изначального отрыва от $\hat{k}^*$. На рис. 2.5, *а* показано, как сокращается со временем разрыв между $\hat{k}$ и $\hat{k}^*$, при условии что экономика стартовала с $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}1$ и при $\alpha = 0{,}3$ или 0,75. Так, например, если $\alpha = 0{,}75$, то для закрытия 50%-го разрыва (начальное значение вдвое меньше стационарного) потребуется 38 лет, в то время как при линейной аппроксимации получается 45 лет.

На рис. 2.5, *б* через отношение $\hat{c}/\hat{c}^*$ показана динамика уровня потребления, на рис. 2.5, *в* уровня выпуска $\hat{y}/\hat{y}^*$, на рис. 2.5, *г* уровня валового инвестирования $\hat{i}/\hat{i}^*$. Заметим, что при $\alpha = 0{,}75$ траектории $\hat{c}/\hat{c}^*$ и $\hat{y}/\hat{y}^*$ похожи, потому что норма валового сбережения и, следовательно, $\hat{c}/\hat{y}$ изменяются в этом случае незначительно (обсудим это позже).

На рис. 2.5, *д* показана динамика $\gamma_{\hat{y}}$, темпа прироста $\hat{y}$. При $\alpha = 0{,}3$ из модели следует, что начальное значение $\gamma_{\hat{y}}$ (соответствующее $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}1$) нереалистично велико, около 15% в год, из чего следует, что темп прироста γ_y равен примерно 17% в год. Именно такой результат заставил King and Rebelo (1993) отвергнуть переходную динамику модели Рамсея в качестве инструмента для аппроксимации наблюдавшегося экономического роста. Однако, как мы видим, при $\alpha = 0{,}75$ модель генерирует более разумную динамику, исходя из которой начальный темп $\gamma_{\hat{y}}$ равен примерно 3,5% в год, так что γ_y равен примерно 5,5% в год.

На рис. 2.5, *е* показана норма валового сбережения $s(t)$. Ранее мы уже получили аналитические выражения для этой величины в случае функции Кобба–Дугласа. и нам теперь известно, что $s(t)$ монотонно снижается при $\alpha = 0{,}3$ и монотонно растет при $\alpha = 0{,}75$, при заданных значениях остальных параметров. При $\alpha = 0{,}3$ результаты противоречивы в том смысле, что модель прогнозирует падение $s(t)$ с 0,28 при $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}1$ до 0,22 при $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}5$ и 0.18 при $\hat{k}/\hat{k}^* = 1$. Такие прогнозируемые уровни нормы накопления слишком уж низки для капитала в широком смысле. В противоположность этому, при $\alpha = 0{,}75$ в модели наблюдается умеренный рост нормы сбережения по мере развития экономики, что хорошо согласуется с реальными данными. Норма сбережения растет в этом случае с уровня 0,41 при $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}1$ до 0,44 при $\hat{k}/\hat{k}^* = 0{,}5$ и 0,46 при $\hat{k}/\hat{k}^* = 1$. Такой предсказанный уровень нормы сбережения вполне разумен, если мы рассматриваем капитал в широком смысле.

На рис. 2.5, *ж* показана динамика процентной ставки r. Заметим, что стационарная процентная ставка равна $r^* = \rho + \theta x = 0{,}08$, а соответствующий предельный продукт равен $f'(\hat{k}^*) = r^* + \delta = 0{,}13$. Пусть начальное состояние таково, что $\hat{k}(0)/\hat{k}^* = 0{,}1$, тогда для производственной функции Кобба–Дугласа выполнено

$$\frac{f'[\hat{k}(0)]}{f'(\hat{k}^*)} = \left[\frac{\hat{k}(0)}{\hat{k}^*}\right]^{\alpha-1} = (10)^{1-\alpha}.$$

Отсюда при $\alpha = 0{,}3$ получаем

$$f'[\hat{k}(0)] = 5 \cdot f'(\hat{k}^*) = 0{,}55.$$

Другими словами, при значении α порядка 0,3 начальная процентная ставка (с учетом $\hat{k}(0)/\hat{k}^* = 0.1$) принимает нереалистично высокое значение, равное 60%. Такой противоречащий реальному положению дел прогноз относительно процентных ставок стал вторым поводом для King and Rebelo (1993) для того, чтобы отвергнуть переходную динамику модели Рамсея как несостоятельную. Однако если мы возьмем другое наше любимое значение доли капитала $\alpha = 0.75$, то получим

$$f'[\hat{k}(0)] = 1{,}8 \cdot f'(\hat{k}^*) = 0{,}23,$$

так что $r(0)$ принимает более разумное значение, равное 18%.

На последней части рисунка (см. рис. 2.5, *з*) показана динамика отношения капитала к выпуску $(\hat{k}/\hat{y})$, выраженная через отношение к $(\hat{k}^*/\hat{y}^*)$. Kaldor (1963) утверждает, что это отношение изменяется относительно слабо в процессе экономического развития, и Maddison (1982, гл. 3) придерживается того же мнения. Впрочем, их рассуждения относятся к узкой концепции человеческого капитала, в то время как в нашей модели капитал берется в широком смысле, с учетом человеческого капитала. Эмпирические данные по ряду стран показывают, что страны с более высокими значениями реального ВВП на душу населения, как правило, имеют и более высокие значения отношения человеческого капитала в форме уровня образования к физическому капиталу (см. Judson, 1998). Согласно этому наблюдению, отношение человеческого капитала к физическому имеет тенденцию к росту в процессе перехода к более высоким уровням реального ВВП на душу населения (см. гл. 5, где приводится детальное теоретическое обоснование такого поведения). В то время как отношение физического капитала к выпуску остается относительно стабильным, отношение капитала в широком смысле к выпуску растет в процессе перехода.

В случае производственной функции Кобба–Дугласа отношение капитала к выпуску равно

$$\frac{\hat{k}}{\hat{y}} = \frac{1}{A} \cdot (\hat{k})^{1-\alpha}.$$

Если $\alpha = 0{,}3$, то увеличение $\hat{k}$ в 10 раз увеличит $\hat{k}/\hat{y}$ в 5 раз, что очень много и совсем непохоже на наблюдаемые в действительности вариации величины $\hat{k}/\hat{y}$ на протяжении длительных периодов развития экономики. В противоположность этому, при $\alpha = 0{,}75$ увеличение $\hat{k}$ в 10 раз приводит к увеличению $\hat{k}/\hat{y}$ всего в 1,8 раз, что вполне приемлемо, если капитал рассматривается в широком смысле.

Главный итог, который вытекает из анализа графиков (рис. 2.5), заключается в том, что переходная динамика модели Рамсея с обычным значением параметра доли капитала α, равным примерно 0,3, не дает адекватного описания различных аспектов экономического развития. Для экономики, стартующей с состояния существенно ниже ее стационарного состояния, некорректный прогноз модели Рамсея дает слишком большую скорость сходимости, нереалистично быстрый рост и высокие процентные ставки, слишком быстро убывающую норму сбережения и избыточное увеличение со временем отношения капитала к выпуску. Все эти проблемы исключаются, если капитал рассматривается в широком смысле, так что, соответственно, значение доли капитала α высоко, примерно 0,75. При таком значении α и приемлемых значениях остальных параметров прогноз модели вполне соответствует эмпирическим данным по экономическому росту, которые мы исследуем в гл. 11 и 12.

2.6.7. Неоднородность домохозяйств

До сих пор мы имели дело с одним домохозяйством, которое представляло всю экономику в целом. Решения о потреблении или сбережении репрезентативного экономического агента принимались исходя из поведения среднего агента в экономике, состоящей из множества семей. Вопрос в том, является ли поведение такого «репрезентативного» или «среднего» домохозяйства действительно эквивалентным тому, что бы мы получили, если бы усреднили поведение множества неоднородных семей.

Caselli and Ventura (2000) обобщили модель Рамсея, допустив неоднородность домохозяйств в различных формах[1]. Следуя их работе, будем считать, что экономика состоит из J домохозяйств одинакового размера, каждое из которых является бесконечно живущей династией. Население каждого домохозяйства и, следовательно, всего населения растет с постоянным темпом прироста n. Предпочтения каждого домохозяйства задаются теми же уравнениями (2.1) и (2.10), что и раньше, с одинаковыми для всех параметрами предпочтений ρ и θ. В итоге будем считать, что различия между домохозяйствами сводятся к различиям в начальных активах и производительности труда.

Пусть $a_j(t)$ и π_j обозначают подушевые активы и уровень производительности j-го домохозяйства. Ставка заработной платы, которая выплачивается j-му домохозяйству равна $\pi_j w$, где w средняя по всей экономике заработная плата: π_j — константа, и мы ее нормируем так, чтобы среднее значение π_j равнялось 1.

Бюджетное ограничение каждого домохозяйства принимает такой же вид, как в уравнении (2.3):

$$\dot{a}_j = \pi_j \cdot w + r a_j - c_j - n a_j. \tag{2.45}$$

В таком представлении каждое домохозяйство может иметь свое собственное, отличное от других, значение начальных активов $a_j(0)$. Оптимальный темп прироста подушевого потребления каждого домохозяйства удовлетворяет обычному условию первого порядка (2.9):

$$\frac{\dot{c}_j}{c_j} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho). \tag{2.46}$$

Уровень подушевого потребления домохозяйства может быть найден так же, как в первом разделе данной главы, посредством решения дифференциального уравнения относительно c_j и использования условия трансверсальности (в форме уравнения (2.12)). Результат аналогичен уравнению (2.15):

$$c_j = \mu \cdot (a_j + \pi_j \tilde{w}). \tag{2.47}$$

[1] Stiglitz (1969) разработал модель с неоднородными домохозяйствами со множеством неоптимизируемых функций сбережения.

где μ – склонность к растрате активов на потребление (дается уравнением (2.16)) и $\tilde{w}$ – приведенное значение средней по всей экономике заработной платы.

Общее для всей экономики значение подушевых активов

$$a = \frac{1}{J} \cdot \sum\nolimits_1^J a_j,$$

а общеэкономическое значение подушевого потребления

$$c = \frac{1}{J} \cdot \sum\nolimits_1^J c_j.$$

Поскольку темп прироста населения одинаков для всех домохозяйств, то агрегирование становится тривиальным: сумма уравнений (2.45) по J домохозяйствам, деленная на J, в результате чего имеем общеэкономическое бюджетное ограничение:

$$\dot{a} = w + ra - c - na. \tag{2.48}$$

Это бюджетное ограничение такое же, как уравнение (2.3).

После агрегирования функции потребления (2.47) по всем домохозяйствам получаем общеэкономическое значение потребления на человека:

$$c = \mu \cdot (a_j + \tilde{w}). \tag{2.49}$$

Это уравнение такое же, как и уравнение (2.15).

И наконец, используем уравнения (2.48) и (2.49), чтобы получить

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho). \tag{2.50}$$

Это не что иное как стандартное общеэкономическое уравнение роста потребления. Если мы применим обычный анализ для конкурентных фирм к данному описанию поведения агрегированного домохозяйства (уравнения (2.48) и (2.50)), то получим стандартную модель Рамсея. Следовательно, модель с представленной формой неоднородности в начальных активах и производительности работников имеет такие же макроэкономические последствия, что и обычная модель репрезентативного экономического агента. Другими словами, если домохозяйства в экономике различаются только по их уровням начальных активов или по производительности и если их предпочтения соответствуют постоянной межвременной эластичности замещения с одинаковыми параметрами и дисконтными ставками, то средние значения потребления, активов, дохода и капитала для этих семей ведут себя точно так же, как и в модели с единственным репрезентативным домохозяйством. Отсюда следует, что модель с репрезентативным экономическим агентом дает вполне корректное описание средних переменных в экономике, населенной неоднородными в указанном выше смысле агентами.

Помимо поддержки целесообразности использования схемы репрезентативного агента, данное обобщение модели на основе неоднородности позволяет также изучить динамику неравенства между домохозяйствами. Из уравнения (2.46) следует, что домохозяйства выбирают уровень потребления таким образом, что темп его прироста у всех домохозяйств одинаков. Следовательно, относительное потребление c_j/c не варьируется с течением времени.

Зато в модели обнаруживается некоторая динамика относительных активов a_j/a. Из уравнений (2.45), (2.47), (2.48) и (2.49) следует, что относительные активы изменяются согласно уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a_j}{a}\right) = \frac{w - \mu\tilde{w}}{a} \cdot \left(\pi_j - \frac{a_j}{a}\right). \tag{2.51}$$

Нетрудно проверить, что в стационарном состоянии (где w растет с темпом прироста x и $r = \rho + \theta x$) выполнено равенство $w = \mu\tilde{w}$. Таким образом, относительные активы в стационарном состоянии неизменны. Вне стационарного состояния, согласно уравнению (2.51), относительные активы не меняются со временем, только если относительная производительность труда домохозяйства π_j в точности равна его относительным активам a_j/a. Для всех остальных домохозяйств поведение их относительных активов зависит от знака величины $w - \mu\tilde{w}$. Пусть $w > \mu\tilde{w}$. Грубо говоря, это условие означает избыточную склонность к сбережению (постоянного) трудового дохода. В этом случае из уравнения (2.51) следует, что a_j/a растет или падает со временем в зависимости от того, больше относительная производительность труда или меньше относительных активов, т. е. $\pi_j >$ (или $<$)a_j/a. Таким образом, структура сходимости сохраняется, благодаря чему относительные активы движутся в направлении относительной производительности. Впрочем, при $w < \mu\tilde{w}$ наблюдается противоположная динамика. Вне стационарного состояния знак $w - \mu\tilde{w}$ зависит от отношения процентных ставок к темпам прироста заработных плат и потому однозначно не определяется. Следовательно, модель не дает ясных прогнозов относительно пути, по которому движется a_j/a в процессе перехода в стационарное состояние.

В работе Caselli and Ventura (2000) рассматривается вариант модели с неоднородностью предпочтений домохозяйств. В этой работе предпочтения включают в себя функцию полезности $u(c + \beta_j g)$, где g интерпретируется как общественная услуга. Параметр $\beta_j > 0$ символизирует значение, которое j-е домохозяйство придает этой общественной услуге. Переменная g может также интерпретироваться как услуги, которые домохозяйства получают бесплатно от окружающей среды, например от солнечного света. Основной результат данного обобщения состоит в том, что агрегирование индивидуального поведения соответствует модели с репрезентативным экономическим агентом, в том смысле что общеэкономические средние переменные a и c эволюционируют так же, как и в модели с единственным агентом со средними значениями начальных активов, производительности труда и предпочтений. В этом случае результаты модели Рамсея оказываются устойчивыми относительно расширения модели в сторону неоднородности предпочтений.

2.7. Непостоянные ставки временного предпочтения

Многие простые макроэкономические модели, включая уже проанализированную нами неоклассическую модель роста, содержат предположение, что ставка временного предпочтения домохозяйства ρ постоянна во времени. Однако объяснить, откуда вдруг берется такое предположение, не просто[1]. Возможно, эта сложность связана с тем, что неясно даже, с какой стати индивидуумы должны считать эту величину хотя бы положительной.

Ramsey (1928, с. 543) предпочитал использовать нулевую ставку временного предпочтения. Он объяснял этот выбор в нормативном контексте следующим образом: «Мы не дисконтируем более поздние удовольствия относительно более ранних, и эта практика не имеет этического оправдания». Аналогично, Fisher (1930, гл. 3) привел аргументы в пользу того, что временное предпочтение – или нетерпеливость, как он предпочитал называть это, – отражает преимущественно отсутствие у индивидуума дальновидности и самоконтроля. Одной из причин, из-за которой экономисты не принимают нулевую ставку временного предпочтения, является проблема с долгосрочным равновесием, в частности из условия трансверсальности в исследованной нами выше модели следовало неравенство $\rho > x \cdot (1 - \theta) + n$, которое положительно при $\theta < 1 + (n/x)$. Таким образом, в большинстве исследований ставка временного предпочтения предполагается положительной, но постоянной.

[1] См. работы Koopmans (1960) и Fishburn and Rubinstein (1982), где постоянная ставка временного предпочтения получена посредством аксиоматических выводов.

Как стало известно благодаря работам Strotz (1956), Pollak (1968) и Goldman (1980) – на самом деле это понимал еще Ramsey (1928)[1], – непостоянство ставки временного предпочтения может создать проблему временного согласования. Эта проблема возникает из-за того, что относительная оценка потоков полезности в разные периоды времени меняется по мере течения этого самого времени. То есть, более конкретно, заранее определенные уровни потребления на будущее с обязательством их придерживаться обычно отличаются от уровней, которые определяются последовательно, с учетом уже пройденных уровней потребления. Следовательно, технология расчетов с обязательством придерживаться этих расчетов в дальнейшем существенно влияет на результаты модели.

Laibson (1997a, 1997b) частично умозрительно, а частично на основании экспериментальных данных, сделал весьма убедительный обзор возможных вариаций ставок временного предпочтения[2]. Он утверждает, что индивидуумы очень нетерпеливы при выборе времени потребления «сегодня» или «завтра», но более терпеливы относительно далекого будущего, например они достаточно безразличны относительно выбора даты потребления спустя 365 или 366 дней, начиная с сегодняшнего дня. Следовательно, ставки временного предпочтения будут очень большими в краткосрочной перспективе, но существенно меньшими в долгосрочной, как это видится с позиции сегодняшнего дня. С учетом этих наблюдений важно понять, могут ли экономисты все еще полагаться на стандартную версию неоклассической модели роста, рассмотренную в данной главе, как на рабочую лошадку описания макроэкономической динамики.

---

[1] В той части исследований Рамсея, где вводится в рассмотрение временное предпочтение (см. Ramsey (1928, с. 439)), говорится:

> «Своим предположением о постоянстве дисконтной ставки я имею в виду, что приведенное значение удовольствия когда-либо в будущем может быть получено посредством дисконтирования его по ставке ρ... Это единственное предположение, которое мы можем сделать так, чтобы не возникало противоречия с нашей основной гипотезой о том, что все последующие поколения обладают той же системой предпочтений, что и предыдущие. Ибо если у нас варьирующаяся ставка дисконтирования (например, она больше в первые 50 лет), то наши преференции относительно удовольствий 2000 г. будут рассчитываться по более низкой ставке, чем удовольствий 2050-го, в то время как для людей, живущих в 2000 г., этот расчет будет осуществляться по более высокой ставке».

[2] Анализ экспериментальных данных можно найти в работах Thaler (1981), Ainslie (1992) и Loewenstein and Prelec (1992).

Чтобы выяснить это, следуя подходу Barro (1999), модифицируем функцию полезности (2.1) следующим образом:

$$U(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} u[c(t)] \cdot e^{-[\rho \cdot (t-\tau)+\phi(t-\tau)]} dt, \qquad (2.52)$$

где τ теперь представляет собой текущий момент времени; $\phi(t-\tau)$ - функция, благодаря которой учитываются те аспекты временного предпочтения, которые не могут быть описаны стандартным экспоненциальным коэффициентом $e^{-\rho \cdot (t-\tau)}$. Для удобства рассмотрим сначала случай нулевого темпа прироста населения, $n = 0$, так что множитель $e^{-\rho(t-\tau)}$ отсутствует в уравнении (2.52). Будем считать, что функция полезности имеет обычный вид, как и в (2.10):

$$u(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)}.$$

Будем считать, что новый член $\phi(t-\tau)$ зависит только от расстояния между двумя моментами времени $t-\tau$, так же как и обычный коэффициент временного предпочтения[1]. Мы можем нормировать его, так что $\phi(0) = 0$. Мы также будем считать, что функция $\phi(\cdot)$ непрерывна и дважды дифференцируема. Выражение $\rho + \phi'(v)$ представляет собой мгновенную ставку временного предпочтения в отдаленный момент времени $v = t - \tau \geqslant 0$. Свойства, которыми, согласно Laibson (1997a), должна обладать эта функция, следующие: $\phi'(v) \geqslant 0$, $\phi''(v) \leqslant 0$ и $\phi'(v)$ стремится к нулю при стремлении v к бесконечности. Из этих свойств следует, что ставка временного предпочтения $\rho + \phi'(t-\tau)$ высока в ближайшее время, но низка и примерно постоянна в отдаленном будущем. Потребители с такими предпочтениями нетерпеливо хотят потреблять прямо сейчас, но при этом они не обязаны быть настолько близорукими, чтобы не принимать во внимание долгосрочных последствий. Дальнейший анализ предполагает отсутствие такого рода близорукости при принятии решений.

За исключением модификации нормы временного предпочтения, во всем остальном модель точно такая же, что и ранее, включая спецификацию производственной функции и поведение фирм. Нам будет удобнее

[1] Выражение для функции полезности может быть расширено за счет введения в нее хронологической даты t без какого-либо влияния на основные результаты модели, аналогично можно включить в нее возраст домохозяйства и другие характеристики жизненного цикла.

начать наш анализ с рассмотрения случая нулевого технологического прогресса, т. е. $x = 0$.

2.7.1. Результаты с обязательством

Если полная траектория текущего и будущего потребления может быть выбрана в настоящий момент времени τ с обязательством ее придерживаться, то условия первого порядка для оптимальной траектории потребления домохозяйства $c(t)$ получаются непосредственно из уравнения (2.11):

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [r(t) - \rho - \phi'(t - \tau)] \tag{2.53}$$

при $t > \tau$. Новый элемент здесь — добавка $\phi'(t - \tau)$ к ρ. Уравнение (2.53) можно рассматривать как уравнение с обыкновенным элементом возмущения, который увеличивает потребление в некоторый момент времени и снижает в другой момент (возможно, даже непосредственно в следующее мгновение), при этом остальные значения потребления остаются постоянными.

При упомянутых выше свойствах $\phi(\cdot)$ величина $\rho + \phi'(t - \tau)$ стартует с высокого значения и затем убывает по направлению к ρ по мере стремления $t - \tau$ к бесконечности. Таким образом, стационарная ставка временного предпочтения равна ρ, а стационарное состояние модели совпадает с тем, которое было в предыдущем нашем исследовании. Однако новые результаты могут касаться переходной динамики, во время которой ставки временного предпочтения больше ρ, но снижаются со временем.

Но с этим решением связана одна проблема, состоящая в том, что текущее время τ произвольно, а возможности выполнить предписанное решение внезапно в данный момент времени, как правило, нет. Скорее, если бы была возможность придерживаться предписанных уровней потребления, то она, вероятно, была бы и в прошлом, возможно, даже в бесконечном прошлом. А в таком случае текущие и будущие значения потребления были бы определены ранее, так что в действительности τ равнялось бы минус бесконечности, а величина $\phi'(t - \tau)$ была бы нулевой при всех $t \geqslant 0$. Следовательно, ставка временного предпочтения равнялась бы ρ при всех $t \geqslant 0$, и далее применимы все стандартные результаты модели Рамсея, причем не только для стационарного состояния.

Другой трудностью здесь является то, что придерживаться выбора уровней будущего потребления $c(t)$ весьма проблематично. Посему в следующем разделе получено решение в отсутствие какого-либо обязательства относительно схемы будущего потребления. При таких предположениях домохозяйства могут определить в момент времени τ только лишь мгновенное потребление $c(\tau)$.

2.7.2. Результаты без обязательства при лог-полезности

Условия первого порядка (2.53) без обязательства, вообще говоря, не верны, так как домохозяйство не в состоянии исполнить те флуктуации, которые лежат в основе этого условия. А именно, домохозяйство не в состоянии выполнить обязательства по снижению $c(\tau)$ в момент времени τ и увеличению $c(t)$ в некоторый момент времени в будущем при фиксированном потреблении в остальное время. Вместо этого домохозяйство будет вычислять, каким образом его выбор $c(\tau)$ в момент времени τ изменит объем его активов и как это изменение в активах повлияет на выбор уровней потребления в дальнейшем.

Полное решение без обязательства получено, прежде всего в случае логарифмической полезности, т. е. при $\theta = 1$. Результаты, касающиеся стационарного состояния, в общем случае при произвольном θ рассматриваются в следующем разделе. Результаты, связанные с переходной динамикой, в общем случае слишком сложны, но некоторый их набросок мы чуть позже все-таки приведем.

Представим себе, что выбранный уровень $c(t)$ в момент времени τ представляет собой постоянный поток $c(\tau)$ в течение короткого дискретного промежутка времени $[\tau, \tau + \epsilon]$. Длина интервала ϵ устремляется к нулю, и, таким образом, мы получаем результаты в непрерывном времени. Полный интеграл потоков полезности из уравнения (2.52) может быть разбит на две части:

$$\begin{aligned} U(\tau) = &\int\limits_{\tau}^{\tau+\epsilon} \log[c(t)] \cdot e^{-[\rho\cdot(t-\tau)+\phi(t-\tau)]}\, dt + \\ &+ \int\limits_{\tau+\epsilon}^{\infty} \log[c(t)] \cdot e^{-[\rho\cdot(t-\tau)+\phi(t-\tau)]}\, dt \approx \\ &\approx \epsilon \cdot \log[c(t)] + \int\limits_{\tau+\epsilon}^{\infty} \log[c(t)] \cdot e^{-[\rho\cdot(t-\tau)+\phi(t-\tau)]}\, dt, \end{aligned} \tag{2.54}$$

где аппроксимация была сделана посредством приравнивания $e^{-[\rho\cdot(t-\tau)+\phi(t-\tau)]}$ единице на интервале $[\tau, \tau+\epsilon]$. Эта аппроксимация становится точной в равновесии, когда ϵ стремится к нулю. Потребитель может выбрать $c(\tau)$ в качестве своего уровня потребления в момент времени τ. Этот выбор влияет на $c(t)$ при $t > \tau + \epsilon$ косвенно, через воздействие на объем активов $k(\tau+\epsilon)$, имеющихся в распоряжении в момент $\tau + \epsilon$. (Исключительно для упрощения изложения мы уже сделали предположение о том, что подушевые активы $a(t)$ и подушевой объем капитала $k(t)$ равны.) Для определения оптимального уровня $c(\tau)$ домохозяйству нужно знать, во-первых, отношение между $c(\tau)$ и $k(\tau+\epsilon)$, а во-вторых, отношение между $k(\tau+\epsilon)$ и выбранными уровнями $c(t)$ при $t \geqslant \tau + \epsilon$.

Первый вопрос разрешается просто. Бюджетное ограничение домохозяйства имеет вид:

$$\dot{k}(t) = r(t)\cdot k(t) + w(t) - c(t). \tag{2.55}$$

При заданном стартовом объеме активов $k(\tau)$ этот объем в момент $\tau+\epsilon$ определяется следующим образом:

$$k(\tau+\epsilon) \approx k(\tau)\cdot[1+\epsilon\cdot r(\tau)] + \epsilon\cdot w(\tau) - \epsilon\cdot c(\tau). \tag{2.56}$$

Аппроксимация здесь получается в результате игнорирования членов порядка ϵ^2, измеряющих процентное наращивание капитала за промежуток времени $(\tau, \tau+\epsilon)$, и, кроме того, переменные $r(t)$ и $w(t)$ считаются постоянными в этом промежутке времени. Эти предположения станут удовлетворительными в равновесии, когда ε стремится к 0. Важным результатом, вытекающим из приблизительного равенства (2.56), является то, что

$$\frac{d[k(\tau+\epsilon)]}{d[c(\tau)]} \approx -\epsilon. \tag{2.57}$$

Следовательно, большее потребление сейчас означает меньший объем активов в следующий момент времени.

Второй вопрос относительно связи между $k(\tau+\epsilon)$ и $c(t)$ при $t \geqslant \tau+\epsilon$, т. е. относительно склонности к растрате активов на потребление, решается куда как труднее. В стандартной модели с логарифмической функцией полезности из уравнений (2.15) и (2.16) следовало (благодаря сведению на нет эффектов дохода и замещения, связанных с траекторией процентных ставок), что потребление составляет постоянную долю личного капитала

$$c(t) = \rho\cdot[k(t) + \tilde{w}(t)].$$

где $\tilde{w}(t)$ — приведенный по времени t поток заработных плат. На этом фоне разумно выдвинуть гипотезу, что эффекты дохода и замещения, связанные с процентными ставками, по-прежнему будут аннулироваться и при логарифмической полезности, даже несмотря на переменность временного предпочтения и в отсутствие обязательства придерживаться решения. Однако константа пропорциональности, обозначим ее λ, не обязана равняться ρ. Таким образом, наша гипотеза - а она на самом деле верна — состоит в том, что потребление задается уравнением

$$c(t) = \lambda \cdot [k(t) + \tilde{w}(t)] \tag{2.58}$$

при $t \geqslant \tau + \epsilon$ и где $\lambda > 0$ - некоторая константа[1].

Пусть эта гипотеза верна, тогда нетрудно проверить, что $c(t)$ растет с темпом прироста $r(t) - \lambda$ при $t \geqslant \tau + \epsilon$. Следовательно, для всех $t \geqslant \tau + \epsilon$ потребление определяется из

$$\log[c(t)] = \log[c(\tau + \epsilon)] + \int_{\tau+\epsilon}^{t} r(v)\,dv - \lambda \cdot (t - \tau - \epsilon).$$

Поэтому выражение для полезности (2.54) можно переписать в виде

$$U(\tau) \approx \epsilon \cdot \log[c(\tau)] + \log[c(\tau + \epsilon)] \cdot \int_{\tau+\epsilon}^{\infty} e^{-[\rho\cdot(t-\tau)+\phi(t-\tau)]}\,dt + R(\tau), \tag{2.59}$$

где $R(\tau)$ — члены, не зависящие от $c(t)$.

Определим интеграл:

$$\Omega(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-[\rho v+\phi(v)]}\,dv. \tag{2.60}$$

Предельный эффект $c(\tau)$ на $U(\tau)$ может быть найден из

$$\frac{d[U(\tau)]}{d[c(\tau)]} \approx \frac{\epsilon}{c(\tau)} + \frac{\Omega(\epsilon)}{c(\tau+\epsilon)} \cdot \frac{d[c(\tau+\epsilon)]}{d[k(\tau+\epsilon)]} \cdot \frac{d[k(\tau+\epsilon)]}{d[c(\tau)]}.$$

[1] Phelps and Pollak (1968, разд. 4) использовали аналогичную гипотезу для получения равновесия по Курно–Нэшу в их задаче. В их предположениях функция полезности изоэластична, а технология линейна, так что норма доходности постоянна. Последнее свойство критично, так как если норма доходности меняется со временем, то потребление уже не будет равно постоянной доле личного капитала (за исключением случая $\theta = 1$). Кроме того, из-за линейности технологии отсутствует какая-либо переходная динамика, так что экономика всегда находится в стационарном состоянии.

Последний множитель в этом выражении равен $-\epsilon$ в силу (2.57), а предыдущий множитель равен λ, что следует из уравнения (2.58). Следовательно, положив

$$\frac{d[U(\tau)]}{d[c(\tau)]} = 0,$$

имеем

$$c(\tau) = \frac{c(\tau+\epsilon)}{\lambda \cdot \Omega(\epsilon)}.$$

Если это гипотетическое решение верно, то величина $c(\tau+\epsilon)$ должна стремиться к $c(\tau)$ при стремлении ϵ к нулю. В противном случае $c(t)$ будет иметь разрывы в каждый момент времени, а гипотетическое решение будет ложным. Единственное значение λ, которое удовлетворяет необходимому условию, дается выражением

$$\lambda = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\int\limits_0^\infty e^{-[\rho v+\phi(v)]}\,dv}, \tag{2.61}$$

где мы использовали обозначение $\Omega \equiv \Omega(0)$.

Подводя итог, заключаем, что решением потребительской задачи домохозяйства при логарифмической полезности является равенство $c(t)$ доле λ личного капитала в каждый момент времени, где λ - константа, определенная в уравнении (2.61). Это решение однородно во времени в том смысле, что если $c(t)$ выбирается этим способом во все будущие периоды времени, то и в текущий период времени оптимальный уровень потребления будет определяться этим же способом[1].

---

[1] В данном подходе уравнение (2.61) выводится как равновесие Курно—Нэша, но при этом не доказывается, что это равновесие единственно. Единственность легко показать в аналогичной дискретной модели с конечным горизонтом, как это сделано в работе Laibson (1996). В последний период времени домохозяйство потребляет все свои активы, и единственное решение для каждого более раннего периода может быть найдено построением траектории потребления в обратной последовательности, последовательно от конечной точки. Такой результат имеет место вследствие вогнутости $u(c)$, а не просто из-за изоэластичной полезности. Единственность решения также имеет место при стремлении к нулю длины периода (т. е. в непрерывном случае) или если длина горизонта планирования произвольно велика. Однако Laibson (1994), используя в явном виде теоретико-игровой подход, демонстрирует возможность существования нескольких равновесий в случае бесконечного горизонта. Возможность существования нескольких равновесий зависит от наказаний, которые применяются в случае отклонения уровней потребления от планируемых значений, причем такого типа равновесия обнаруживаются и в случае конечного горизонта. Наш анализ модели с бесконечным горизонтом планирования не затрагивает такого типа равновесий.

Анализ уравнения (2.61) показывает, что $\lambda = \rho$ в случае стандартной модели Рамсея, в которой $\phi(v) = 0$ при всех v. Для того чтобы оценить общие последствия наличия члена $\phi(v)$ для λ, перепишем уравнение (2.61) в виде

$$\lambda = \frac{\int\limits_0^\infty e^{-[\rho v+\phi(v)]}\cdot[\rho+\phi'(v)]\,dv}{\int\limits_0^\infty e^{-[\rho v+\phi(v)]}\,dv}. \tag{2.62}$$

Так как числитель уравнения (2.62) равен единице[1], то это уравнение совпадает с уравнением (2.61).

Польза от уравнения (2.62) в таком виде состоит в том, что, как из него видно, λ является не зависящим от времени взвешенным средним мгновенных ставок временного предпочтения $\rho + \phi'(v)$. Поскольку $\phi'(v) \geqslant 0$, $\phi''(v) \leqslant 0$ и $\phi'(v) \to 0$ при $v \to \infty$, то отсюда следует, что

$$\rho \leqslant \lambda \leqslant \rho + \phi'(0). \tag{2.63}$$

То есть λ находится между долгосрочной ставкой временного предпочтения ρ и краткосрочной мгновенной ставкой $\rho + \phi'(0)$.

В итоге определение эффективной ставки временного предпочтения λ сводится к выбору вида функции $\phi(v)$. Laibson (1997a) предлагает использовать дискретную «квази-гиперболу» в качестве такой функции, так что $\phi(v) = 0$ в текущий период и $e^{-\phi(v)} = \beta$ во все последующие периоды времени, где $0 < \beta \leqslant 1$. (Phelps and Pollak,1968, использовали функцию такого же вида.) При таком выборе функции дисконтирующий коэффициент между текущим периодом и следующим содержит множитель $\beta \leqslant 1$. Причем этот множитель не входит в дисконт между любыми двумя смежными будущими периодами времени. Laibson утверждает, что β должен быть существенно меньше единицы в ежегодном исчислении, возможно, где-то между одной второй и одной третьей.

Этот квази-гиперболический вариант может быть использован также и в непрерывном времени в следующем виде:

$$\phi(v) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant v \leqslant V, \quad e^{-\phi(v)} = \beta \quad \text{при} \quad v > V, \tag{2.64}$$

при некотором $V > 0$, где $0 < \beta \leqslant 1$. (При такой спецификации производная $\phi'(v)$ бесконечна в точке $v = V$ и равна нулю во всей остальной области определения.) Laibson считает, что V должно быть невелико, так чтобы выполнялось $\rho V \ll 1$.

[1] Легко понять, если произвести замену переменной $z = e^{-[\rho v+\phi(v)]}$.

Подстановка уравнения (2.64) в определение Ω в уравнении (2.60) при $\epsilon = 0$ дает

$$\Omega = \frac{1}{\rho} \cdot [1 - (1 - \beta) \cdot e^{-\rho V}].$$

При стремлении V к бесконечности Ω стремится к $1/\rho$, что соответствует случаю модели Рамсея. Из условия $\rho V \ll 1$ следует, что выражение для Ω упрощается приблизительно до β/ρ, так что

$$\lambda \approx \frac{\rho}{\beta}. \tag{2.65}$$

Если значение β находится между одной второй и одной третьей, то значение λ будет находиться между $1{,}5\rho$ и 2ρ. Следовательно, если ставка ρ равна 0,02 в год, то такое дисконтирование будущей полезности (с большим весом полезности в ближайшие периоды) конвертирует модель Рамсея в такую, в которой эффективная ставка временного предпочтения λ равна 0,03–0,04 в год.

Такой выбор функции, как (2.64), дает нам результат в простой замкнутой форме, но ее функциональная форма означает наличие совершенно не нужного дискретного скачка величины $e^{-\phi(v)}$ в момент времени V в будущем. И вообще, в литературе краткосрочная нетерпеливость рассматривается обычно таким образом, что значение $\rho + \phi'(v)$ велико, когда v мало и далее убывает, скажем, к ρ по мере роста v. Простейшей функциональной формой, обладающей таким свойством в гладкой манере, является

$$\phi'(v) = be^{-\gamma v}, \tag{2.66}$$

где $b = \phi'(0) \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Параметр γ определяет постоянный темп, с которым $\phi'(v)$ убывает от $\phi'(0)$ до нуля.

Интегрирование уравнения (2.66) при граничном условии $\phi(0) = 0$ дает нам выражение для $\phi(v)$[1]:

$$\phi(v) = \frac{b}{\gamma} \cdot (1 - e^{-\gamma v}). \tag{2.67}$$

[1] Выражение (2.67) похоже на «обобщенную гиперболу», представленную в работе Loewenstein and Prelec (1992, с. 580). Их выражение может быть записано в виде

$$\phi(v) = \frac{b}{\gamma} \cdot \log(1 + \gamma v).$$

Подставим этот результат в формулу (2.60), получим выражение для Ω:

$$\Omega = e^{-(b/\gamma)} \cdot \int_0^\infty e^{[-\rho v + (b/\gamma)\cdot e^{-\gamma v}]}\, dv.$$

Этот интеграл не берется в замкнутом виде, но его можно найти численно, если заданы значения параметров ρ, b и γ.

Чтобы наши результаты согласовывались с наблюдениями в работе Laibson (1997a), параметр $b = \phi'(0)$ должен быть равным 0.50 в год, параметр γ должен быть равен по крайней мере 0.50 в год, так чтобы значение $\phi'(v)$ получилось близким к нулю в течение нескольких будущих лет. При $\rho = 0.02$, $b = 0{,}50$ и $\gamma = 0{,}50$ значение Ω оказывается равным 19,3, так что

$$\lambda = \frac{1}{\Omega} = 0{,}052.$$

Если $b = 0{,}25$ при тех же остальных параметрах, то $\Omega = 31{,}0$ и $\lambda = 0{,}032$. Таким образом, более привлекательная функциональная форма (2.57) имеет такие же последствия, что и (2.64).

Введение члена $\phi(\cdot)$ в функцию полезности (2.52) и последовавшее за этим смещение результатов в сторону дисбаланса вылились (с учетом лог-полезности) в рост ставки временного предпочтения выше ρ. В силу того что эффективная ставка временного предпочтения λ - константа, динамика стационарного состояния модели принимает в точности такую же форму, как и в стандартной модели Рамсея, которую мы проанализировали ранее. Более высокая ставка временного предпочтения соответствует более высокой стационарной процентной ставке

$$r^* = \lambda \tag{2.68}$$

и, следовательно, более низкой стационарной интенсивности использования капитала k^*, которая определяется из

$$f'(k^*) = \lambda + \delta.$$

Поскольку эффективная ставка временного предпочтения λ постоянна, модель с лог-полезностью и отсутствием обязательства, судя по всему, эквивалентна обычной неоклассической модели роста. То есть равновесие здесь будет такое же, что и в стандартной модели с подходящим значением ρ. Так как параметр ρ непосредственно в реальных данных не наблюдаем, то имеется отдельная задача анализа данных на предмет выявления в мгновенной ставке временного предпочтения непостоянного члена $\phi'(v)$.

2.7.3. Рост населения и технологический прогресс

Учесть рост населения в модели довольно просто, через уравнение (2.1) например. Решение в случае логарифмической полезности аналогично предыдущему, за исключением того что интеграл Ω теперь определяется так:

$$\Omega \equiv \int_0^\infty e^{-[(\rho-n)\cdot v+\phi(v)]}\,dv. \tag{2.69}$$

Зависимость между склонностью к растрачиванию личного капитала на потребление λ и модифицированным Ω теперь такая:

$$\lambda = n + \frac{1}{\Omega}, \tag{2.70}$$

и, как и ранее, выполнено равенство $r^* = \lambda$, где r^* – стационарная процентная ставка. Оставим вывод этих результатов в качестве упражнения.

В модели Рамсея, в которой $\phi(v) = 0$ при всех v, выполнено равенство $\Omega = 1/(\rho - n)$ в силу (2.69) и $\lambda = \rho$ в силу (2.70). В квазигиперболическом случае Лейбсона (2.64) эти величины приблизительно равны

$$\Omega \approx \frac{\beta}{(\rho - n)} \quad \text{и} \quad \lambda \approx \frac{\rho}{\beta} - \frac{n\cdot(1-\beta)}{\beta}. \tag{2.71}$$

Если $0 < \beta < 1$, то возрастание n приводит к снижению λ и, следовательно, к снижению стационарной процентной ставки $r^* = \lambda$.

Помимо роста населения, достаточно просто ввести в модель экзогенный трудоинтенсивный технологический прогресс с темпом $x \geqslant 0$. Решение для λ остается таким же, оно дано в уравнениях (2.69) и (2.70). Однако в силу того что потребление на человека растет в стационарном состоянии с темпом x, величина стационарной процентной ставки меняется на

$$r^* = \lambda + x.$$

Отсюда видно, что, как это обычно и происходит в случае логарифмической полезности, r^* реагирует на технологический прогресс x в режиме один к одному.

2.7.4. Результаты при изоэластичной полезности

В стандартном исследовании, когда $\phi(t-\tau) = 0$ при всех t, потребление равно постоянной доле личного капитала, только если $\theta = 1$. Однако, как мы уже знаем, для произвольного θ условие первого порядка для роста потребления в момент времени τ задается уравнением (2.11):

$$\frac{\dot{c}}{c}(\tau) = \frac{1}{\theta} \cdot [r(t) - \rho]. \tag{2.72}$$

Мы выдвинули вполне разумную гипотезу, что вид уравнения (2.72) сохранится, если $\phi(t - \tau) \neq 0$, но при этом константа ρ будет заменена на некоторую другую константу, которая представляет собой эффективную ставку временного предпочтения. Эта гипотеза неверна. Причина в том, что эффективная ставка временного предпочтения в момент времени τ определяется пересечением траектории будущих значений $\phi'(t - \tau)$ с будущими процентными ставками и поэтому не будет константой, если процентные ставки меняются (за исключением случая $\theta = 1$).

Хотя переходная динамика здесь достаточно сложна, характеристику стационарного состояния получить нетрудно. Важным пунктом здесь является то, что в стационарном состоянии увеличение активов домохозяйства будет равномерно использовано для повышения уровня потребления в будущие периоды. Это свойство упрощает вычисление склонности к сбережению в будущие периоды при заданных текущих активах и поэтому упрощает процесс нахождения условий оптимальности первого порядка для текущего потребления. Здесь мы рассмотрим только стационарное состояние.

В стационарном состоянии процентная ставка дается равенством

$$r^* = x + n + \frac{1}{\Omega}, \tag{2.73}$$

где интеграл Ω теперь определен так:

$$\Omega \equiv \int_0^\infty e^{-\{[\rho - x\cdot(1-\theta) - n]\cdot v + \phi(v)\}}\, dv. \tag{2.74}$$

Таким образом, если $\phi(v) = 0$, то мы получаем стандартный результат:

$$r^* = \rho + \theta x.$$

В случае квазигиперболической функции полезности Лейбсона (2.64) этот результат будет иметь вид

$$r^* \approx \frac{\rho}{\beta} - n \cdot \frac{1-\beta}{\beta} + x \cdot \frac{\beta + \theta - 1}{\beta}, \tag{2.75}$$

где $0 < \beta < 1$. Таким образом, в том случае, который соответствует лог-полезности ($\theta = 1$), воздействие x на r^* — один к одному. В более общем случае воздействие x на r^* сильнее или слабее, чем один к одному, в зависимости от того, больше ли θ единицы или меньше.

Вернемся к вопросу о переходной динамике. Barro (1999) показал, что рост потребления в любой момент времени τ удовлетворяет условию

$$\frac{\dot{c}}{c}(\tau) = \frac{1}{\theta} \cdot [r(t) - \lambda(\tau)]. \tag{2.76}$$

Член $\lambda(\tau)$ здесь является эффективной ставкой временного предпочтения и дается выражением

$$\lambda(\tau) = \frac{\int\limits_{\tau}^{\infty} \omega(t, \tau) \cdot [\rho + \phi'(t - \tau)]\, dt}{\int\limits_{\tau}^{\infty} \omega(t - \tau)\, dt}, \tag{2.77}$$

где $\omega(t, \tau) > 0$. Таким образом, $\lambda(\tau)$ опять равна взвешенному среднему будущих мгновенных ставок предпочтения $\rho + \phi'(t - \tau)$. Отличие от уравнения (2.62) в том, что здесь коэффициент веса $\omega(t, \tau)$ меняется со временем при $\theta \neq 1$.

Barro (1999) показал, что если $\theta > 1$, то $\omega(t, \tau)$ убывает вместе со средней за промежуток времени от τ до t процентной ставкой. Если экономика стартует с начальной интенсивностью капитала ниже ее стационарного значения, то $r(\tau)$, стартовав на высоком уровне, затем снижается по направлению к своему стационарному значению. Тогда веса $\omega(t, \tau)$ будут особенно малы для t в далеком будущем. Так как в эти далекие времена t еще и значения $\rho + \phi'(t - \tau)$ относительно низки, то начальное значение $\lambda(\tau)$ высоко. Однако если процентные ставки снижаются, то веса $\omega(t, \tau)$ становятся более равномерными, так что $\lambda(\tau)$ убывает. Такая нисходящая траектория $\lambda(\tau)$ означает, что домохозяйства в эффективном смысле становятся более терпеливыми со временем. Впрочем, все эти эффекты обращаются, если $\theta < 1$. В случае $\theta = 1$, который мы уже рассмотрели ранее, все веса постоянны в процессе перехода. Следовательно, в этом случае эффективная ставка временного предпочтения не меняется во время перехода.

2.7.5. Степень обязательности

До сих пор в нашем анализе фигурировала либо полная обязательность исполнения предписанной в начальный период времени стратегии потребления, как в уравнении (2.53), либо, один раз, обязательство отсутствовало, как в уравнении (2.76). Barro (1999) рассматривает также промежуточные варианты, в которых обязательство возможно в течение промежутка времени T, где $0 \leqslant T \leqslant \infty$. Увеличение промежутка обязательства, т. е. увеличение T, приводит в долгосрочном плане к снижению эффективной ставки временного предпочтения и, следовательно, к снижению процентных ставок и увеличению капиталоемкости. Впрочем, изменения в T также дают и переходные эффекты вначале увеличение T приводит к тому, что домохозяйства становятся *менее* терпеливыми, потому что они внезапно получают возможность заставить «будущих себя» сберегать больше. Таким образом, из этого исследования вытекает, что рост T сначала снижает норму сбережения, но в долгосрочном плане повышает склонность к сбережению.

Если параметр T ассоциировать с какими-нибудь наблюдаемыми переменными – такими как структура правовых или финансовых институтов или характеристика культуры, которые влияют на уровень дисциплины индивидуума, – то эти новые теоретические результаты могли бы, в конечном счете, иметь какое-нибудь практическое применение. В действительности же, с практической точки зрения, основной смысл этой усовершенствованной модели состоит в том, что он выявляет связь между степенью обязательности исполнения полученных решений и такими переменными, как процентные ставки и нормы сбережения. При заданной степени обязательности основной результат следующий: непостоянство ставки временного предпочтения не меняет основных следствий неоклассической модели роста.

2.8. *Приложение 2А*. Лог-линеаризация модели Рамсея

Система дифференциальных уравнений модели Рамсея дается уравнениями (2.24) и (2.25):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}} &= f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}; \\ \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} &= \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Сейчас мы лог-линеаризуем эту систему в случае производственной функции Кобба–Дугласа, $f(\hat{k}) = A \cdot \hat{k}^{\alpha}$.

Начнем с того, что запишем систему (2.78) через логарифмы $\hat{c}$ и $\hat{k}$:

$$\begin{aligned} \frac{d[\log(\hat{k})]}{dt} &= A \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k})} - e^{\log(\hat{c}/\hat{k})} - (x + n + \delta); \\ \frac{d[\log(\hat{c})]}{dt} &= \frac{1}{\theta} \cdot [\alpha A \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k})} - (\rho + \theta x + \delta)]. \end{aligned} \tag{2.79}$$

В стационарном состоянии, в котором

$$\frac{d[\log(\hat{k})]}{dt} = \frac{d[\log(\hat{c})]}{dt} = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} A \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k}^*)} - e^{\log(\hat{c}^*/\hat{k}^*)} &= (x + n + \delta); \\ \alpha A \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\log(\hat{k}^*)} &= (\rho + \theta x + \delta). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Разложим уравнение (2.79) в ряд Тейлора первого порядка в окрестности стационарных значений, определенных в (2.80):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d[\log(\hat{k})]}{dt} \\ \dfrac{d[\log(\hat{c})]}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & x + n + \delta - \dfrac{\rho + \theta x + \delta}{\alpha} \\ -(1-\alpha)\cdot\dfrac{\rho + \theta x + \delta}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \log(\hat{k}/\hat{k}^*) \\ \log(\hat{c}/\hat{c}^*) \end{bmatrix}, \tag{2.81}$$

где $\zeta \equiv \rho - n - (1-\theta)\cdot x$. Детерминант характеристической матрицы равен

$$-\left[\frac{(\rho + \theta x + \delta)}{\alpha} - (x + n + \delta)\right]\cdot(\rho + \theta x + \delta)\cdot\frac{1-\alpha}{\theta}.$$

Так как $\rho + \theta x > x + n$ (из условия трансверсальности (2.31)) и $\alpha < 1$, то этот детерминант имеет отрицательный знак. Из этого следует, что два собственных значения данной системы имеют противоположные знаки, откуда следует седловая устойчивость (почему так — рассказано в математическом приложении в конце книги).

Для определения собственных значений (обозначим их ϵ) используем условие

$$\det\begin{bmatrix} \zeta - \epsilon & x + n + \delta - \dfrac{\rho + \theta x + \delta}{\alpha} \\ -(1-\alpha)\cdot\dfrac{\rho + \theta x + \delta}{\theta} & -\epsilon \end{bmatrix} = 0. \tag{2.82}$$

Этому условию соответствует квадратное уравнение относительно переменной ϵ:

$$\epsilon^2 - \zeta\cdot\epsilon - \left[\frac{\rho + \theta x + \delta}{\alpha} - (x + n + \delta)\right]\cdot\left[\frac{(\rho + \theta x + \delta)\cdot(1-\alpha)}{\theta}\right] = 0. \tag{2.83}$$

Это уравнение имеет два решения:

$$2\epsilon = \zeta \pm \left[\zeta^2 + 4\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\cdot(\rho + \theta x + \delta)\cdot\left[\frac{(\rho + \theta x + \delta)}{\alpha} - (x + n + \delta)\right]\right]^{1/2}, \tag{2.84}$$

где ϵ_1 корень со знаком плюс, является положительным собственным значением; ϵ_2 - корень со знаком минус, отрицательным. Заметим, что ϵ_2 соответствует $-\beta$ в уравнении (2.41).

Тогда лог-линеаризованное решение для $\log(\hat{k})$ принимает вид

$$\log[\hat{k}(t)] = \log(\hat{k}^*) + \psi_1 e^{\epsilon_1 t} + \psi_2 e^{\epsilon_2 t}, \tag{2.85}$$

где ψ_1, ψ_2 - произвольные константы интегрирования. Так как $\epsilon_1 > 0$, то для того, чтобы $\log[\hat{k}(t)]$ асимптотически сходился к $\log[\hat{k}^*]$, требуется равенство нулю константы ψ_1. (Неравенство $\psi_1 > 0$ нарушает условие трансверсальности, а $\psi_1 < 0$ приводит к $\hat{k} \to 0$, что соответствует случаю, когда система упирается в вертикальную ось координат на рис. 2.1.) Вторая константа ψ_2 определяется из начального условия

$$\psi_2 = \log[\hat{k}(0)] - \log(\hat{k}^*). \tag{2.86}$$

Если мы подставим $\psi_1 = 0$, значение ψ_2 из уравнения (2.86) и $\epsilon_2 = -\beta$ в уравнение (2.85), то получим траекторию $\log[\hat{k}(t)]$:

$$\log[\hat{k}(t)] = (1 - e^{-\beta t}) \cdot \log(\hat{k}^*) + e^{-\beta t} \cdot \log[\hat{k}(0)]. \tag{2.87}$$

Так как

$$\log[\hat{y}(t)] = \log(A) + \alpha \cdot \log[\hat{k}(t)],$$

то траектория $\log[\hat{y}(t)]$ задается уравнением

$$\log[\hat{y}(t)] = (1 - e^{-\beta t}) \cdot \log(\hat{y}^*) + e^{-\beta t} \cdot \log[\hat{y}(0)], \tag{2.88}$$

которое соответствует уравнению (2.40).

2.9. *Приложение 2В.* Невозвратное инвестирование

Предположим, что инвестирование невозвратно, так что выполнено неравенство $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$. Выясним, что произойдет в этом случае с динамической траекторией, которая стартует в области $\hat{k} < \hat{k}^*$ со значения, такого как $\hat{c}_0'$ на рис. 2.1. Эти траектории в конечном итоге достигнут графика производственной функции $\hat{c} = f(\hat{k})$, после чего ограничение невозвратности инвестиций становится связывающим. После этого траектории будут продолжать движение вдоль производственной функции, так что будет выполнено $\hat{c} = f(\hat{k})$. Следовательно, интенсивность капитала убывает в соответствии с уравнением $\dot{\hat{k}} = -(x + n + \delta) \cdot \hat{k}$. Затем $\hat{k}$ (и $\hat{c}$) будут асимптотически сходиться к нулю, но не достигнут нуля за конечное время. Докажем, что такие траектории не могут быть равновесиями.

Когда ограничение $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$ связывает, так что весь выпуск расходуется на потребление и ничего не остается на валовое инвестирование, тогда цена капитала, обозначенная ϕ, может упасть ниже 1. Норма доходности для владельцев капитала в таком случае удовлетворяет уравнению (см. сноску (1) на с. 130):

$$r = \frac{R}{\phi} - \delta + \frac{\dot{\phi}}{\phi}. \tag{2.89}$$

Максимизация прибыли конкурентных фирм, как всегда, означает равенство $R = f'(\hat{k})$, которое можно подставить в формулу для r.

Задача оптимизации потребления приводит, как обычно, к уравнению

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho).$$

Следовательно, после подстановки r из уравнения (2.89) в формулу для темпа прироста $\hat{c}$ получаем

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta\phi} \cdot [f'(\hat{k}) + \dot{\phi} - \phi \cdot (\delta + \rho + \theta x)]. \tag{2.90}$$

Из условий $\hat{c} = f(\hat{k})$ и $\dot{\hat{k}} = -(x + n + \delta) \cdot \hat{k}$ вытекает другое уравнение для темпа прироста $\hat{c}$:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = -\alpha(\hat{k}) \cdot (x + n + \delta), \tag{2.91}$$

где

$$\alpha(\hat{k}) \equiv \frac{\hat{k} \cdot f'(\hat{k})}{f(\hat{k})}$$

— капитальная доля дохода (которая постоянна в случае производственной функции Кобба–Дугласа). Отсюда из уравнений (2.90) и (2.91) вытекает уравнение для $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = -f'(\hat{k}) + \phi \cdot [\delta + \rho + \theta x - \alpha(\hat{k}) \cdot \theta \cdot (x + n + \delta)]. \tag{2.92}$$

Допустим, что ограничение $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$ впервые становится связывающим в некоторый момент времени T, и в этот момент $\hat{k}(T) < \hat{k}^*$. В той точке $f'(\hat{k}) - \delta > \rho + \theta x$. Тогда при $\phi = 1$ (как раз в момент T) из уравнения (2.92) следует, что $\dot{\phi} < 0$. Со временем рост R и снижение ϕ приводят к повышению r в соответствии с уравнением (2.81). Тем не менее домохозяйства удовлетворены отрицательным темпом прироста $\hat{c}$ (уравнение (2.91)), потому что темп потерь в цене капитала $\dot{\phi}/\phi$ растет по модулю в достаточной мере, чтобы поддержать низкую норму доходности r. Однако из уравнения (2.92) следует, что по мере того, как $\hat{k}$ снижается, а $f'(\hat{k})$ растет, $\dot{\phi}$ в конечном итоге растет по модулю до бесконечности (независимо от того, что происходит с $a(\hat{k})$ в интервале между 0 и 1). Следовательно, ϕ достигнет нуля за конечное время, а затем станет отрицательной. А это уже противоречит возможности бесплатной ликвидации прав собственности на капитал. Следовательно, траектории, на которых ограничение невозвратности $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$ оказывается связывающим, не могут существовать в области $\hat{k} < \hat{k}^*$.

В итоге, ограничение $\hat{c} \leqslant f(\hat{k})$ может быть связывающим только в области $\hat{k} > \hat{k}^*$. Этот случай был рассмотрен Arrow and Kurz (1970).

2.10. *Приложение 2С.* Динамика нормы сбережения

В данном разделе представлена алгебраическая трактовка переходной динамики и нормы сбережения. Здесь мы имеем дело с таким переходом, в котором $\hat{k}$ и $\hat{c}$ растут со временем, и предполагается, что производственная функция имеет вид функции Кобба–Дугласа, т. е. $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$.

Норма валового сбережения s равна $1 - \hat{c}/f(\hat{k})$. В стационарном состоянии величины $\dot{\hat{k}}$ из уравнения (2.24) и $\dot{\hat{c}}/\hat{c}$ из (2.25) обе равны нулю. С учетом этого, а также уравнения

$$\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} = \frac{f'(\hat{k})}{\alpha},$$

которое имеет место в случае Кобба–Дугласа, стационарная норма сбережения есть

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\rho + \theta x + \delta}. \tag{2.93}$$

Из условия трансверсальности (2.31) следует, что $\rho + \theta x > x + n$ и, следовательно, $s^* < \alpha$.

Так как

$$s = 1 - \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})},$$

то s движется в направлении, обратном тому, в котором изменяется относительное потребление $\hat{c}/f(\hat{k})$. Введем обозначение $z \equiv \hat{c}/f(\hat{k})$ и продифференцируем логарифм z по времени, получим

$$\gamma_z \equiv \frac{\dot{z}}{z} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \frac{f'(\hat{k}) \cdot \dot{\hat{k}}}{f(\hat{k})} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} - \alpha \cdot \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}, \tag{2.94}$$

где последний член в правой части имеет такой вид только в случае Кобба–Дугласа. Подставив уравнения (2.24) и (2.25) в уравнение (2.94), получим

$$\gamma_z = f'(\hat{k}) \cdot \left[z(t) - \frac{\theta - 1}{\theta}\right] + (\delta + \rho + \theta x) \cdot \left(s^* - \frac{1}{\theta}\right), \tag{2.95}$$

где мы использовали условие

$$\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} = \frac{f'(\hat{k})}{\alpha},$$

которое выполнено в случае Кобба–Дугласа.

Динамика z зависит от того, больше ли параметр s^*, равен или меньше, чем $1/\theta$. Сначала пусть $s^* = 1/\theta$. Тогда, исходя из уравнения (2.95), $z(t) = (\theta - 1)/\theta$ влечет $\gamma_z = 0$, и наоборот, из последнего равенства вытекает первое. Если $z(t) > (\theta - 1)/\theta$ для некоторого t, то будет выполнено $\gamma_z > 0$ для всех t; этот результат не согласуется с тем, что z стремится к своему стационарному состоянию. Аналогично, случай $z(t) < (\theta - 1)/\theta$ можно исключить, так как из него следует $\gamma_z < 0$ для всех t. В итоге, если $s^* = 1/\theta$, то значение z равно константе $(\theta - 1)/\theta$ и, следовательно, норма сбережения s равна константе $1/\theta$. Аналогично рассуждая, находим, что из $s^* > 1/\theta$ вытекает $z(t) < (\theta - 1)/\theta$ для всех t, а из $s^* < 1/\theta$ следует $z(t) > (\theta - 1)/\theta$ для всех t.

Продифференцировав уравнение (2.95) по времени, получим

$$\dot{\gamma}_z = f''(\hat{k}) \cdot (\dot{\hat{k}}) \left[z(t) - \frac{\theta - 1}{\theta}\right] + f'(\hat{k}) \cdot \gamma_z \cdot z(t). \tag{2.96}$$

Предположим теперь, что $s^* > 1/\theta$, так что при всех t выполнено неравенство

$$z(t) < \frac{(\theta - 1)}{\theta}.$$

Тогда, если $\gamma_z > 0$ для некоторого t, то будет выполнено $\dot{\gamma}_z > 0$ в уравнении (2.96), так как $f''(\hat{k}) < 0$, $f'(\hat{k}) > 0$ и $\dot{\hat{k}} > 0$. Следовательно, $\gamma_z > 0$ будет выполнено для всех t, а это несовместимо с тем, что экономика должна сходиться к стационарному состоянию. Отсюда если $s^* > 1/\theta$, то $\gamma_z < 0$, и, следовательно, $\dot{s} > 0$. Аналогично рассуждая, можно показать, что при $s^* < 1/\theta$ выполнены неравенства $\gamma_z > 0$ и $\dot{s} < 0$.

Подведем итог:

- из $s^* = 1/\theta$ следует $s(t) = 1/\theta$, константа;
- из $s^* > 1/\theta$ следует $s(t) > 1/\theta$ и $\dot{s}(t) > 0$;
- из $s^* < 1/\theta$ следует $s(t) < 1/\theta$ и $\dot{s}(t) < 0$.

Эти результаты соответствуют графическому представлению на рис. 2.3.

Если воспользоваться выражением (2.93) для s^*, то можно установить, что для того, чтобы $s^* \geqslant 1/\theta$, требуется, чтобы

$$\theta \geqslant \frac{(\rho + \theta x + \delta)}{[\alpha \cdot (x + n + \delta)]} > \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, если $\theta \leqslant 1/\alpha$, то все параметры должны находиться в таком диапазоне, чтобы было выполнено $\dot{s} < 0$. Другими словами, если $\theta \leqslant 1/\alpha$, то эффект межвременного замещения достаточно силен, чтобы гарантировать падение нормы сбережения в процессе перехода. Однако для нашего предпочтительного значения α порядка 0,75 это неравенство выполнено при $\theta \leqslant 1{,}33$, что едва ли возможно.

Анализ динамики отношения потребления к капиталу $\hat{c}/\hat{k}$ проводится аналогичным образом. Результаты здесь следующие:

- из $\theta = \alpha$ следует
$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} = \frac{(\delta + \rho)}{\theta} - (\delta + n),$$
константа;
- из $\theta < \alpha$ следует
$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} < \frac{(\delta + \rho)}{\theta} - (\delta + n)$$
и $\hat{c}/\hat{k}$ растет со временем;
- из $\theta > \alpha$ следует
$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} > \frac{(\delta + \rho)}{\theta} - (\delta + n)$$
и $\hat{c}/\hat{k}$ снижается со временем.

2.11. *Приложение 2D.* Доказательство того, что $\gamma_{\hat{k}}$ монотонно убывает, если экономика стартует из $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$

Сначала нам нужно доказать следующее: $\hat{c}(0)$ убывает, если $r(v)$ непрерывно возрастает в течение некоторого промежутка времени[1]. Из уравнений (2.15) и (2.16) следует

$$\hat{c}(0) = \frac{\hat{k}(0) + \int_0^\infty \hat{w}(t) e^{-[\bar{r}(t) - n - x]t} dt}{\int_0^\infty e^{[\bar{r}(t) \cdot (1-\theta)/\theta - \rho/\theta + n]t} dt}, \tag{2.97}$$

[1]Мы благодарим Оливье Бланшарда за доказательство этого утверждения.

где $\bar{r}(t)$ — средняя процентная ставка за промежуток времени между 0 и t, определение которой дано в уравнении (2.13). Высокие значения $r(v)$ при всех $0 \leqslant v \leqslant t$ поднимают $\bar{r}(t)$ и, соответственно, уменьшают числитель в уравнении (2.97). Высокие значения $r(v)$ увеличивают также и знаменатель при $\theta \leqslant 1$, поэтому искомый результат получается сразу же, если $\theta \leqslant 1$. Но предположим, что $\theta > 1$, так что знаменатель убывает по мере роста $r(v)$. Мы знаем, что

$$r(v) \cdot \frac{(1-\theta)}{\theta} - \frac{\rho}{\theta} + n < 0,$$

если $\theta > 1$, потому что $r(v)$ больше $\rho + \theta x$, стационарной процентной ставки, которая больше $x+n$, что следует из условия трансверсальности (неравенство (2.31)). Следовательно, числитель правой части уравнения (2.97) становится пропорционально тем более чувствительным к $r(v)$ (с обратной зависимостью), чем больше значение θ. Поэтому если мы докажем этот результат для $\theta \to \infty$, то он будет верен и для всех $\theta > 0$. При $\theta \to \infty$ уравнение (2.97) упрощается до

$$\hat{c}(0) = \frac{\hat{k}(0) + \int\limits_0^\infty \hat{w}(t) e^{-[r(t)-x-n]t}\, dt}{\int\limits_0^\infty e^{-[\bar{r}(t)-n]t}\, dt}. \tag{2.98}$$

Выражение (2.98) можно переписать в виде

$$\hat{c}(0) = \frac{\int\limits_0^\infty \psi(t) e^{-[\bar{r}(t)-n-x]t}\, dt}{\int\limits_0^\infty \phi(t) e^{-[\bar{r}(t)-n-x]t}\, dt}, \tag{2.99}$$

где

$$\psi(t) = \hat{k}(0) \cdot [r(t) - n - x] + \hat{w}(t) \quad \text{и} \quad \phi(t) = e^{-xt}.$$

Отсюда $\dot{\phi} < 0$ следует непосредственно, а то, что $\dot{\psi} > 0$, можно проверить, используя условия

$$r(t) = f'[\hat{k}(t)] - \delta,$$

$$\hat{w}(t) = f[\hat{k}(t)] - \hat{k}(t) \cdot f'[\hat{k}(t)],$$

$$\hat{k}(t) > \hat{k}(0) \quad \text{и} \quad \dot{\hat{k}} > 0.$$

Следовательно, увеличение $r(v)$ при $0 \leqslant v \leqslant t$, которое повышает $\bar{r}(t)$, имеет пропорционально большее негативное воздействие на числитель уравнения (2.99), нежели на знаменатель. Отсюда следует, что чистый эффект роста $r(v)$ на $\hat{c}(0)$ отрицателен, что и требовалось доказать.

Используем теперь этот результат для получения нижней границы для $\hat{c}(0)$. Так как $r(0) > \bar{r}(t)$, то если мы подставим $r(0)$ вместо $\bar{r}(t)$, и $\hat{w}(0)$ вместо $\hat{w}(t)$ в уравнение (2.97), то $\hat{c}(0)$ уменьшится. Следовательно[1],

$$\frac{\hat{c}(0)}{\hat{k}(0)} > \left[r(0)\cdot\frac{1-\theta}{\theta}+\frac{\rho}{\theta}-n\right]\cdot\left[1+\frac{\hat{w}(0)}{\hat{k}\cdot[r(0)-n-x]}\right]. \tag{2.100}$$

Мы воспользуемся этим уравнением чуть позже.

Темп прироста $\hat{k}$ получаем из уравнения (2.24):

$$\gamma_{\hat{k}} = \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (x+n+\delta), \tag{2.101}$$

здесь мы опускаем индексы времени. Дифференцирование по времени уравнения (2.101) дает

$$\dot{\gamma}_{\hat{k}} = -\frac{\hat{w}}{\hat{k}}\cdot\gamma_{\hat{k}} - \frac{d(\hat{c}/\hat{k})}{dt},$$

где мы воспользовались условием $\hat{w} = f(\hat{k}) - \hat{k}\cdot f'(\hat{k})$. Мы хотим показать, что в процессе перехода, во время которого $\hat{k}$ и $\hat{c}$ растут, выполнено неравенство $\dot{\gamma}_{\hat{k}} < 0$. Используя формулы (2.25) для $\dot{\hat{c}}/\hat{c}$ и (2.24) для $\dot{\hat{k}}$, получаем

$$\dot{\gamma}_{\hat{k}} = -\left(\frac{\hat{w}}{\hat{k}}\right)\cdot\gamma_{\hat{k}} + \frac{\hat{c}}{\hat{k}}\cdot\left[\frac{\hat{w}}{\hat{k}} + [f'(\hat{k})-\delta]\cdot\frac{\theta-1}{\theta}+\frac{\rho}{\theta}-n-\frac{\hat{c}}{\hat{k}}\right]. \tag{2.102}$$

Следовательно, если

$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} \geqslant \frac{\hat{w}}{\hat{k}} + [f'(\hat{k})-\delta]\cdot\frac{\theta-1}{\theta}+\frac{\rho}{\theta}-n,$$

тогда из $\gamma_{\hat{k}} > 0$ следует $\dot{\gamma}_{\hat{k}} < 0$, что и требовалось доказать. Соответственно, будем считать теперь, что

$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} < \frac{\hat{w}}{\hat{k}} + [f'(\hat{k})-\delta]\cdot\frac{\theta-1}{\theta}+\frac{\rho}{\theta}-n. \tag{2.103}$$

---

[1] Этот результат получается после интегрирования правой части уравнения (2.97), если

$$\left[r(0)\cdot\frac{(1-\theta)}{\theta}+\frac{\rho}{\theta}-n\right] > 0.$$

Если последнее выражение неположительно, то неравенство (2.100) выполнено тривиальным образом.

Если заменить множитель $\hat{c}/\hat{k}$ перед выражением в квадратных скобках в уравнении (2.103) на выражение в правой части неравенства (2.103), использовать формулу (2.101) для $\gamma_{\hat{k}}$ и заменить $f(\hat{k})/\hat{k}$ на $(\hat{w}/\hat{k}) + f'(\hat{k})$, то в итоге получится следующее неравенство:

$$\gamma_{\hat{k}} < -\frac{\hat{w}}{\hat{k}} \cdot \frac{[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]}{\theta} + \left[\frac{\rho}{\theta} - n + [f'(\hat{k}) - \delta] \cdot \frac{\theta - 1}{\theta}\right] \cdot \frac{\hat{w} - \hat{c}}{\hat{k}}. \quad (2.104)$$

Отсюда если

$$\frac{\rho}{\theta} - n + [f'(\hat{k}) - \delta] \cdot \frac{\theta - 1}{\theta} \leqslant 0,$$

то, используя неравенство (2.103), нетрудно убедиться в том, что $\dot{\gamma}_{\hat{k}} < 0$, что и требовалось доказать. Поэтому теперь считаем, что

$$\frac{\rho}{\theta} - n + [f'(\hat{k}) - \delta] \cdot \frac{\theta - 1}{\theta} > 0. \quad (2.105)$$

При заданном неравенстве (2.105) мы можем использовать нижнюю границу для $\hat{c}/\hat{k}$ из неравенства (2.100) в неравенстве (2.104) и получить после определенных манипуляций

$$\dot{\gamma}_{\hat{k}} < -\frac{(\hat{w}/\hat{k}) \cdot [f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x]^2}{[f'(\hat{k}) - \delta - n - x] \cdot \theta^2} < 0, \quad (2.106)$$

где мы воспользовались условием $r = f'(\hat{k}) - \delta$. Выражения в квадратных скобках здесь оба положительны, так как $f'(\hat{k}) - \delta$ больше $\rho + \theta x$, стационарной процентной ставки, которая в свою очередь больше $n + x$ в силу условия трансверсальности. Следовательно, $\dot{\gamma}_{\hat{k}} < 0$, что и требовалось доказать.

2.12. Задачи

2.1. Предотвращение заимствований в модели Рамсея. Рассмотрим задачу оптимизации ведения домохозяйства в модели Рамсея. Как изменятся результаты, если потребителям не разрешено заимствовать, а можно только сберегать?

2.2. Невозвратность инвестиций в модели Рамсея. Предположим, что экономика стартует с $\hat{k}(0) > \hat{k}^*$. В чем отличие траектории перехода в случае, если допускается возвратность капитала (т. е. его можно конвертировать обратно в потребительские товары без потерь) от траектории, соответствующей невозвратному капиталу?

2.3. Экспоненциальная полезность. Предположим, что домохозяйства с бесконечным горизонтом планирования максимизируют функцию полезности вида (2.1), где $u(c)$ теперь задается экспоненциальной функцией

$$u(c) = -\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\theta c},$$

где $\theta > 0$. Поведение фирм такое же, что и в модели Рамсея с нулевым технологическим прогрессом.

a. Как параметр θ влияет на вогнутость функции полезности и на желание сглаживать потребление во времени? Чему равна межвременная эластичность замещения в этом случае? Как она связана с уровнем подушевого потребления c?

b. Найдите условия первого порядка для репрезентативного домохозяйства с предпочтениями, задаваемые такой функцией $u(c)$.

c. Объедините условия первого порядка для репрезентативного домохозяйства с условиями первого порядка для фирм и опишите поведение $\hat{c}$ и $\hat{k}$ во времени. (Пусть $\hat{k}(0)$ будет ниже его стационарного значения.)

d. Как переходная динамика зависит от параметра θ? Сравните эти результаты с теми, что были в тексте главы.

2.4. Предпочтения по Стоуну–Гиэри. Рассмотрим модификацию стандартной модели Рамсея за счет изменения функции мгновенной полезности репрезентативного домохозяйства, т. е. заменим функцию (2.10) на функцию Стоуна–Гиэри:

$$u(c) = \frac{(c - \bar{c})^{1-\theta} - 1}{1 - \theta},$$

где $\bar{c} \geqslant 0$ представляет собой уровень потребления прожиточного минимума.

a. Чему равна межвременная эластичность замещения при такой функции полезности? Если $\bar{c} > 0$, то как меняется эластичность по мере роста c?

b. Как при такой функции полезности меняется уравнение прироста потребления (2.9)? Объясните, в чем смысл такого результата.

c. Как данная модификация функции полезности влияет на стационарные значения $\hat{k}^*$ и $\hat{c}^*$?

d. Какого типа изменения произойдут (вероятно) в переходной динамике $\hat{c}$ и $\hat{k}$ и, следовательно, в скорости сходимости? (При такой функции полезности для получения точных результатов потребуется применение численных методов.)

2.5. Модель конца света. Предположим, что всем известно, что мир совершенно точно прекратит свое существование в момент времени $T > 0$. Мы уже исследовали эту задачу в тексте главы, когда обсуждали важность условия трансверсальности. Еще раз повторите этот анализ, отвечая на следующие вопросы.

a. Как такая модификация влияет на переходные уравнения (2.24) для $\hat{k}$ и (2.25) для $\hat{c}$?

b. Как эта модификация влияет на условие трансверсальности?

c. Используя рис. 2.1, опишите новую переходную траекторию экономики.

d. Если T увеличить, то как новая переходная траектория будет связана с той, что изображена на рис. 2.1? Что будет, если T устремить к бесконечности?

2.6. Земля в модели Рамсея. Предположим, что в производстве используются труд L, капитал K и земля Λ и производственная технология задается CES-функцией с постоянным эффектом масштаба:

$$Y = A \cdot \left[a \cdot (K^{\alpha} L^{1-\alpha})^{\psi} + (1-a) \cdot \Lambda^{\psi}\right]^{1/\psi},$$

где $A > 0$, $a > 0$, $0 < a < 1$ и $\psi < 1$. Технологический прогресс отсутствует, а L растет с постоянным темпом прироста $n > 0$. Земные ресурсы Λ фиксированы. Амортизация равна 0. Доход теперь состоит еще и из ренты за землю, помимо платежей за капитал и труд.

a. Покажите, что, как и в обычной модели, конкурентные платежи за использование производственных факторов полностью исчерпывают весь валовой выпуск.

b. Каким условиям должен удовлетворять параметр ψ, чтобы уровень подушевого выпуска y был постоянен в стационарном состоянии? При каких условиях y монотонно убывает в долгосрочной перспективе? Какой вывод можно сделать из этих результатов относительно роли такого фиксированного фактора, как земля в процессе роста?

2.7. Альтернативная институциональная среда. Мы детально разработали модель Рамсея в предположении, что институциональная среда состоит из конкурентных домохозяйств и фирм.

a. Докажите, что результаты модели не изменятся, если домохозяйства осуществляют производство сами, используя при этом членов семьи в качестве работников.

b. Предположим, что предпочтения социального управляющего такие же, как и у репрезентативного домохозяйства в разработанной нами модели. Докажите, что если социальный управляющий может диктовать выбор уровня потребления во времени, то результаты будут такими же, что и в модели с конкурентными домохозяйствами и фирмами. Какой вывод можно сделать из этого результата относительно оптимальности по Парето децентрализованных решений?

2.8. Деньги и инфляция в модели Рамсея (основано на работах Sidrauski, 1967; Brock, 1975; Fischer, 1979). Предположим, что правительство выпускает бумажные деньги. Объем денежной массы M номинирован в долларах и прирастает с темпом μ, который может меняться со временем. Новые деньги прибывают в виде единых трансфертов домохозяйствам. Домохозяйства могут теперь держать активы в виде прав на капитал, деньги и внутренние займы. Полезность домохозяйства по-прежнему задается функцией (2.1), за исключением того что $u(c)$ меняется на $u(c, m)$, где $m \equiv M/(PL)$ - реальные кассовые остатки на человека, P - уровень цен (в долларах на единицу товаров). Частные производные функции полезности положительны, $u_c > 0$ и $u_m > 0$. Инфляцию, т. е. темп прироста цен, обозначим $\pi \equiv (\dot{P}/P)$. Население прирастает с темпом n. Производственная сторона экономики такая же, как и в стандартной модели Рамсея, без технологического прогресса.

a. Как выглядит бюджетное ограничение репрезентативного домохозяйства?

b. Как выглядят условия первого порядка, связанные с выбором c и m?

c. Пусть темп μ постоянен в долгосрочной перспективе, а остатки m постоянны в стационарном состоянии. Как изменение долгосрочного значения μ повлияет на стационарные значения c, k и y? Как это изменение повлияет на стационарные значения π и m? Как оно повлияет на полученную в стационарном состоянии полезность $u(c, m)$? Каково долгосрочное оптимальное значение μ в данной модели?

d. Предположим теперь, что $u(c, m)$ является сепарабельной функцией c и m. Как в этом случае траектория μ влияет на переходные траектории c, k и y?

2.9. Фискальная политика в модели Рамсея (основано на работах Barro, 1974 и McCallum, 1984). Рассмотрим стандартную модель Рамсея, в которой домохозяйства имеют бесконечные горизонты планирования, предпочтения задаются уравнениями (2.1) и (2.10), население прирастает с темпом n, производственная функция неоклассическая, а темп технологического прогресса равен x. Пусть правительство.

закупающее товары и услуги в количестве G, установило единые налоги в объеме T и выпустило в обращение правительственные долговые обязательства в объеме B. Величины G, T и B, которые могут меняться со временем, все измеряются в единицах товаров, и еще B стартует с заданного значения $B(0)$. Долговые обязательства имеют бесконечно малый срок платежа, выплачивают процентную ставку r и рассматриваются индивидуальными домохозяйствами как совершенные заменители прав на капитал или внутренние займы. (Будем считать, что правительство никогда не откажется платить по своим долгам.) Правительство может предоставлять общественные услуги, которые, вообще говоря, влияют на траекторию G, но мы будем считать сейчас, что траектория G фиксирована.

a. Как выглядит бюджетное ограничение правительства?
b. Как выглядит бюджетное ограничение домохозяйства?
c. Придерживается ли по-прежнему домохозяйство условия оптимальности первого порядка для темпа прироста c, заданного в уравнении (2.9)?
d. Что представляет собой условие трансверсальности и как оно связано с долгосрочным поведением B? Что означает это условие?
e. Как вариации $B(0)$ или траекторий B и T влияют на переходную динамику и стационарные значения переменных c, k, y и r? (Если никаких эффектов нет, то говорят, что модель обладает свойством *эквивалентности по Рикардо.*)

3 Некоторые обобщения модели роста Рамсея

В этой главе мы обобщим модель Рамсея в нескольких направлениях. Во-первых, рассмотрим правительственные расходы и различные типы налогов. Во-вторых, учтем издержки ввода в эксплуатацию основных фондов в процессе инвестирования в физический капитал. В-третьих, сделаем экономику открытой, чтобы учесть возможность международного кредитования. Наконец, изучим эффекты ограниченности времени жизни.

3.1. Правительство

3.1.1. Модификации структуры модели роста Рамсея

Модифицировать модель Рамсея в целях включения в нее функций правительства достаточно просто. Пусть правительство закупает товары и услуги в совокупном количестве G. Предположим сейчас, что эти закупки не влияют на функцию полезности домохозяйств и производственную функцию фирм. Позже мы рассмотрим это влияние. Правительство также осуществляет трансфертные платежи (социальные выплаты и др.) домохозяйствам в реальном совокупном количестве V. Эти трансферты представляют собой единую сумму в том смысле, что количество трансфертов, получаемое отдельным домохозяйством, не зависит от дохода домохозяйства или иных характеристик.

Предполагается, что правительство имеет сбалансированный бюджет, в котором оно финансирует свои валовые расходы $G + V$ посредством различных налогов. Рассматриваемые здесь налоги пропорциональны трудовым доходам τ_w, доходам от частных активов τ_a, потреблению τ_c, и прибыли фирм τ_f. Таким образом, правительственное бюджетное ограничение имеет вид:

$$G + V = \tau_w wL + \tau_a r \cdot (\text{Активы}) + \tau_c C + \tau_f \cdot (\text{Прибыль фирм}). \qquad (3.1)$$

Как и прежде, w ставка заработной платы и r норма доходности активов. Переменные L и C — агрегаты труда и потребления соответственно. Как определяются доходы фирм, мы рассмотрим позже. Ставка налога на доходы активов τ_a одинакова, независимо от того, получены эти доходы от внутренних займов или от владения капиталом. Предположим также, что ставки налога постоянны во времени.

Наличие налогов и трансфертных платежей видоизменяет типичное бюджетное ограничение домохозяйства с уравнения (2.2) на

$$\dot{a} = (1 - \tau_w) \cdot w + (1 - \tau_a) \cdot ra - (1 + \tau_c) \cdot c - na + v, \qquad (3.2)$$

где a, c, v объемы активов, потребления и трансфертных платежей на человека соответственно. Мы по-прежнему предполагаем, что объем работ, выполняемый каждым домохозяйством, фиксирован, т. е. каждый работающий член домохозяйства предлагает экономике одну единицу трудового ресурса в единицу времени, и n темп прироста населения и рабочей силы.

Так же как и в гл. 2, мы можем вывести условие первого порядка домохозяйства для определения величины потребления. Для случая функции полезности с постоянной межвременной эластичностью замены, как предполагалось в уравнении (2.9), $u(c) = (c^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta)$, результат для темпа прироста подушевого потребления меняется с (2.10) на[1])

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[(1 - \tau_a) \cdot r - \rho\right]. \qquad (3.3)$$

---

[1])Для того чтобы найти уравнение Эйлера, запишем гамильтониан:

$$J = e^{-(\rho-n)t} \cdot \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} + \nu \cdot \left[(1 - \tau_w) \cdot w + (1 - \tau_a) \cdot ra - (1 + \tau_c) \cdot c - na + v\right].$$

Условия первого порядка относительно c и a следующие:

(i) $e^{-(\rho-n)\cdot t} \cdot c^{-\theta} = \nu \cdot (1 + \tau_c)$;

(ii) $-\dot{\nu} = \nu \cdot [(1 - \tau_a) \cdot r - n]$.

Возьмем логарифмы и производные по времени от (i) и подставим в (ii), тогда получим

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \left[(1 - \tau_a) \cdot r - \frac{\dot{\tau}_c}{1 + \tau_c} - \rho\right].$$

Если ставка налога на потребление постоянна во времени, то $\dot{\tau}_c$ равно нулю и уравнение Эйлера становится уравнением (3.3).

Следовательно, решение домохозяйства отсрочить потребление зависит от чистой ставки доходности $(1-\tau_a)\cdot r$. Заметим, что ставки налога на потребление τ_c нет в условии первого порядка, так как она постоянна во времени. Если бы эта налоговая ставка менялась со временем, то она бы влияла на выбор времени потребления и входила соответствующим образом в уравнение (3.3). Чистая ставка доходности $(1-\tau_a)\cdot r$ также появляется в условии трансверсальности, которое меняется с уравнения (2.11) на

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot \exp\left[-\int\limits_0^t [(1-\tau_a)\cdot r(v)-n]\,dv\right]\right\}=0. \tag{3.4}$$

Производственная функция фирм, как и ранее, описывается уравнением (2.16),

$$Y=F(K,\hat{L}),$$

где K – капитальные затраты и $\hat{L}=Le^{xt}$ – затраты эффективного труда. Как и ранее, фирмы платят ставку заработной платы w за единицу трудового ресурса L и ставку арендной платы $R=r+\delta$ за единицу капитального ресурса K, где δ – норма выбытия капитала. Предположим, что правительство считает налогооблагаемую прибыль фирм равной выпуску минус заработная плата и выбытие капитала[1]:

$$\text{Прибыль до уплаты налогов} = F(K,\hat{L})-wL-\delta K. \tag{3.5}$$

Тогда прибыль фирмы после уплаты налогов может быть записана следующим образом:

$$\text{Чистая прибыль} = (1-\tau_f)\cdot[F(K,\hat{L})-wL-\delta K]-rK. \tag{3.6}$$

Условие первого порядка фирмы для определения $\hat{k}\equiv K/\hat{L}$, максимизирующего чистую прибыль, является модификацией уравнения (2.21):

$$f'(\hat{k})=\frac{r}{1-\tau_f}+\delta. \tag{3.7}$$

Таким образом, чем больше τ_f, тем больше предельный продукт капитала $f'(\hat{k})$ при заданном r. Такой результат получается благодаря тому, что платежи за аренду капитала (за вычетом выбытия) не вычитаются из налогооблагаемой базы, определенной в уравнении (3.5).

[1] Заметим, что хотя амортизация капитала вычитается из налогооблагаемой базы, плата за аренду капитала, соответствующая процентной ставке r, из нее не вычитается. Если бы речь шла о долговом финансировании фирмы, то, как это обычно принято, процентные платежи вычитались бы из налогооблагаемой базы.

Также можно проверить, повторив выкладки гл. 2, что репрезентативная фирма имеет в итоге нулевую чистую прибыль в уравнении (3.6). Соответственно, в уравнении фирмы предельный продукт труда равен ставке заработной платы:

$$w = e^{xt} \cdot [f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})]. \tag{3.8}$$

Если использовать условие равновесия на рынке активов $\hat{a} = \hat{k}$ совместно с условиями первого порядка (3.7) и (3.8), а также правительственное бюджетное ограничение (3.1), тогда условие изменения $\hat{k}$ во времени, соответствующее уравнению (2.23), выглядит следующим образом:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} - \hat{g}, \tag{3.9}$$

где $\hat{g} \equiv G/\hat{L}$. Это уравнение по-прежнему представляет собой бюджетное ограничение для экономики: изменение объема капитала равно выпуску минус потребление, минус выбытие основного капитала, минус правительственные закупки товаров и услуг. Заметим, что ни налоги, ни трансфертные платежи не входят явно в это общеэкономическое бюджетное ограничение.

Условие (2.24) изменения $\hat{c}$ во времени преобразуется с учетом (3.3) и (3.7) к виду:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \{(1 - \tau_a) \cdot (1 - \tau_f) \cdot [f'(\hat{k}) - \delta] - \rho - \theta x\}. \tag{3.10}$$

Таким образом, чистый предельный продукт капитала $f'(\hat{k}) - \delta$ уменьшается из-за налогов на доход активов τ_a и на прибыль фирмы τ_f. В модели доход с капитала имеет двойное налогообложение: первый раз на уровне фирмы по ставке τ_f, когда доход накапливается фирмой, и второй раз на уровне домохозяйств по ставке τ_a, когда доход получен в виде арендной платы. Аналогично, условие трансверсальности с учетом налогообложения преобразуется из уравнения (2.25) в

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ \hat{k} \cdot \exp\left(- \int\limits_0^t [(1 - \tau_a) \cdot (1 - \tau_f) \cdot [f'(\hat{k}) - \delta] - x - n]\, dv \right) \right\} = 0. \tag{3.11}$$

Следовательно, в стационарном состоянии, когда $\hat{k} = \hat{k}^*$, чистый предельный продукт капитала $f'(\hat{k}^*) - \delta$ должен быть больше

$$\frac{(x + n)}{(1 - \tau_a) \cdot (1 - \tau_f)}.$$

3.1.2. Эффекты налоговых ставок

Налоги на заработную плату и потребление. Ставка налога на трудовой доход (доход, получаемый в форме заработной платы) τ_w не входит ни в одно из условий равновесия. Это следует из нашего предположения о том, что домохозяйства выполняют фиксированный объем работ. В этом случае налог на заработную плату эквивалентен единому, неизменному налогу. Если же есть возможность выбора между работой и досугом (мы исследуем эту возможность в гл. 9), то τ_w уже не будет эквивалентна единой сумме налога и будет влиять на равновесие.

Ранее было отмечено, что ставка налога на потребление τ_c не влияет на выбор потребления во времени - и, следовательно, не входит в уравнение (3.10), - так как τ_c постоянна. В противном случае предполагаемые изменения в τ_c повлияли бы на уравнение (3.10) сейчас и в будущем. Например, если бы ожидалось, что ставка налога на потребление вырастет в будущем ($\dot{\tau}_c > 0$), то индивидуумы захотели бы потребить больше сейчас и меньше в будущем, но тогда рост потребления замедлился бы. И наоборот, рост потребления усилился бы, если бы ожидалось снижение ставки налога на потребление в будущем.

При наличии возможности выбора между работой и досугом даже постоянная τ_c имела бы воздействие на равновесие через влияние на предложение труда. Однако, так как сейчас мы предполагаем, что домохозяйства выполняют фиксированный объем работ, этого эффекта не наблюдается. Таким образом, τ_c не влияет на равновесие и действует подобно единому налогу.

Если предположить, что

$$\hat{g} = \tau_a = \tau_f = 0,$$

то фазовая диаграмма в пространстве $(\hat{k}, \hat{c})$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2.1. Если же мы предположим, что $\hat{g}$ является положительной константой, то $\dot{\hat{k}}$ смещается вниз, в соответствии с уравнением (3.9). Соответствующий уровень правительственных закупок G финансируется некоторой комбинацией τ_w и τ_c с учетом трансфертов V. Точная комбинация τ_w, τ_c и V не имеет значения в силу того что в рамках рассматриваемой модели эти переменные равны единым налогам или трансфертам. Таким образом, фазовая диаграмма для этой модели соответствует сплошным линиям, изображенным на рис. 3.1.

Налоги на доход активов и прибыль фирмы. Пусть, как и ранее, $\hat{g}$ - положительная константа. Предположим теперь, что $\tau_a > 0$ и $\tau_f > 0$. При фиксированном $\hat{g}$ предположим, что правительственное

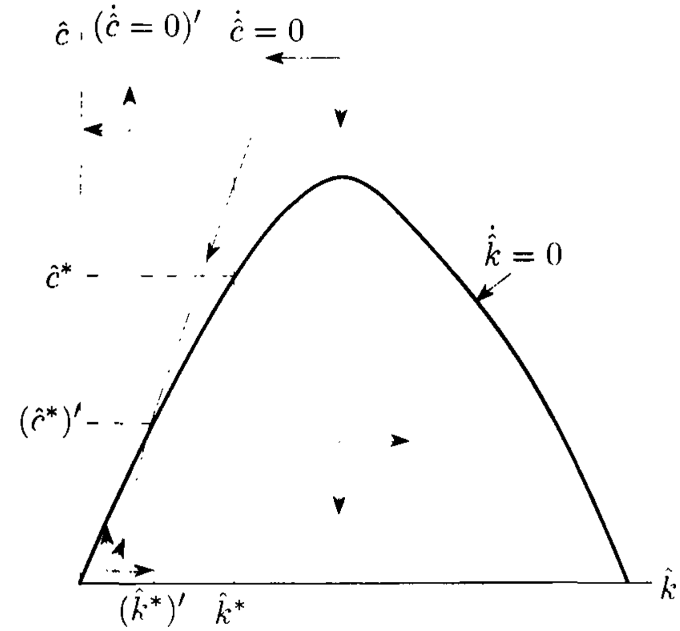


Рис. 3.1. Налоги на доход с активов. Сплошные линии соответствуют $\tau_a = \tau_f = 0$. Если $\tau_a > 0$ или $\tau_f > 0$, то кривая $\dot{\hat{c}} = 0$ сдвигается влево до штриховой линии, обозначенной $(\dot{\hat{c}} = 0)'$. Кривая $\dot{\hat{k}} = 0$ неизменна в обоих случаях. Поэтому $\hat{k}^*$ и $\hat{c}^*$ уменьшаются

бюджетное ограничение в уравнении (3.1) остается в силе в каждый период времени благодаря осуществленной некоторым образом коррекции τ_w, τ_c и V. Точная комбинация этих величин по-прежнему несущественна для равновесия.

Положительные значения τ_a и τ_f влияют на модель только через выражение для $\dot{\hat{c}}$ в уравнении (3.10). В частности, увеличение τ_a и τ_f сдвигает кривую $\dot{\hat{c}} = 0$ влево, как показано пунктирной линией, обозначенной $(\dot{\hat{c}} = 0)'$ на рис. 3.1. При заданном $\hat{g}$ увеличение τ_a и τ_f не имеет никакого воздействия на положение кривой $\dot{\hat{k}} = 0$ (см. уравнение (3.9)).

Как показано на диаграмме, обложение налогами дохода с капитала ведет к долгосрочному уменьшению $\hat{k}^*$ и $\hat{c}^*$. Эти эффекты возникают благодаря тому, что налоги снижают привлекательность сбережения. Условие трансверсальности гарантирует, что после начального увеличения ставки налога в нулевой момент времени, экономика мгновенно переместится на новую устойчивую ветвь. Поскольку уровень капитала не может резко измениться в нулевой момент времени, увеличивается начальный уровень потребления. Обосновать это можно так: увеличение налогов уменьшает чистую (после уплаты налогов) норму доходности, побуждая, таким образом, людей потреблять сейчас.

3.1.3. Эффекты правительственных закупок

Рассмотрим теперь эффекты неожиданного, но перманентного увеличения правительственных закупок. Эти эффекты можно оценить по рис. 3.2 путем сравнения случая $\hat{g} > 0$ со случаем $\hat{g} = 0$. Налоговые ставки τ_a и τ_f предполагаем одинаковыми в обоих случаях, т. е. считаем, что правительственные закупки финансируются налогами на заработную плату или потребление либо изменениями единых трансфертов. Следовательно, мы рассматриваем эффекты от более высоких уровней правительственных закупок, которые финансируются некоторым эквивалентом единого налога. Для изучения эффектов правительственных закупок, финансируемых посредством сложной схемы налогообложения, мы можем объединить рассуждения текущего раздела и предыдущего.

При нашем предположении относительно схемы финансирования кривая $\dot{\hat{c}} = 0$ одинакова для двух значений $\hat{g}$. Однако кривая $\dot{\hat{k}} = 0$ в случае $\hat{g} > 0$ расположена ниже, чем в случае $\hat{g} = 0$. Стационарное

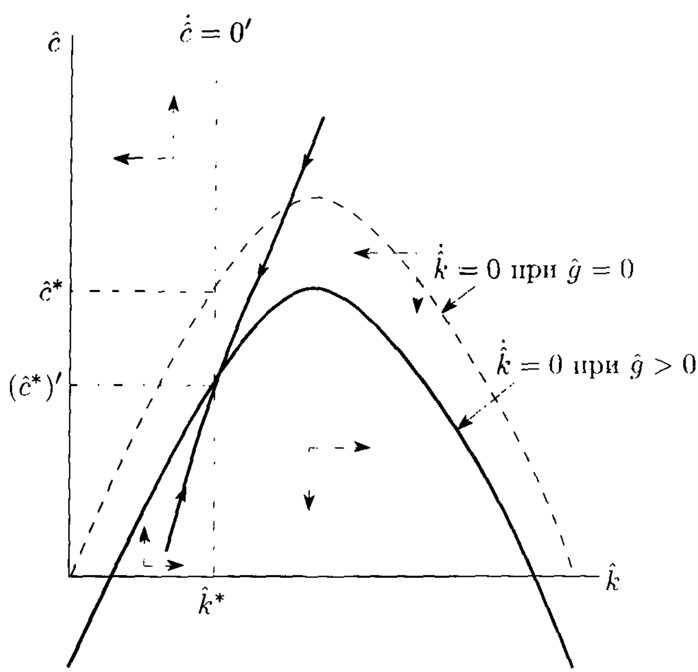


Рис. 3.2. Эффекты правительственных закупок. Сплошная кривая $\dot{\hat{k}} = 0$ соответствует $\hat{g} > 0$, а расположенная выше кривая соответствует $\hat{g} = 0$. Кривая $\dot{\hat{c}} = 0$ одинакова в обоих случаях. Следовательно, более высокое значение $\hat{g}$ соответствует меньшему значению $\hat{c}^*$

значение $\hat{k}^*$ одинаково в обоих случаях, но $\hat{c}^*$ меньше при $\hat{g} > 0$. Таким образом, в долгосрочном плане каждая единица правительственных закупок вытесняет единицу потребления. Долгосрочного эффекта на капитал нет, так как финансирование эквивалентом единого налога означает отсутствие изменчивости. Вдобавок мы предположили, что общественные расходы не имеют прямого воздействия на производство.

Динамические эффекты от увеличения правительственных закупок будут проще, если вместо предположения о постоянстве $\hat{g}$, мы будем считать, что отношение $\lambda \equiv G/C$ постоянно. Уравнение для $\dot{\hat{k}}$ в этом случае преобразуется из (3.9) в

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - (1+\lambda)\cdot\hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k}. \tag{3.12}$$

Как следует из уравнений (3.10) и (3.12), траектории переменных $(1+\lambda)\cdot\hat{c}$ и $\hat{k}$ на всем промежутке времени неизменны при различных значениях λ, т. е. увеличение значения λ не приводит к каким-либо изменениям всей траектории $\hat{k}$. Но большее значение λ означает вытеснение G равным объемом потребления C на протяжении всей траектории.

Правительственные закупки в функции полезности. До сих пор мы предполагали, что домохозяйства не получают никакой пользы от правительственных услуг. Допустим теперь, что функция полезности типичного домохозяйства имеет вид $u(c,\tilde{g})$. Детализация $\tilde{g}$ зависит от того, каким образом общественные услуги влияют на домохозяйства. Если правительственные закупки осуществляются в целях создания продуктов, эквивалентных частным продуктам (например, бесплатные школьные обеды), то $\tilde{g} = g$. Если же правительственные закупки осуществляются в целях создания неконкурентных общественных продуктов, таких как, например, монумент Вашингтона, то $\tilde{g} = G$. Наверное, самым важным примером общедоступных продуктов являются базовые идеи и знания, создаваемые в процессе исследований и опыта.

Другим примером могут служить правительственные закупки, осуществляемые с конечной целью произвести неконкурентные общественные продукты, которые в процессе эксплуатации подвергаются перегрузке. В этом случае услуги домохозяйствам будут иметь вид:

$$\tilde{g} = g\cdot\Psi\left(\frac{G}{C}\right), \tag{3.13}$$

где

$$\Psi(\cdot) > 0,\quad \Psi'(\cdot) > 0,\quad \Psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(\infty) = 1.$$

Идея здесь состоит в том, что $\Psi(G/C)$ оценивает степень перегрузки общественных услуг. При заданном G/C услуги, предоставленные каждому домохозяйству $\tilde{g}$, пропорциональны g. Однако, как только G снижается относительно C, перегрузка усиливается, и каждое домохозяйство получает меньше эффективных услуг на каждую единицу произведенного g. Эта спецификация может хорошо работать в случае, если услуги предоставляются такими общественными продуктами, как шоссе, парки, и т. д. В иных случаях перегрузка может больше влиять на выпуск Y или на частный капитал K, нежели на C.

Условие первого порядка для c типичного домохозяйства определяется обычным образом. Допустим, $\tilde{g}$ изменяется экзогенно и $u(c, \tilde{g})$ – функция полезности домохозяйства, тогда условие первого порядка имеет вид:

$$r \cdot (1 - \tau_a) = \rho - \left(\frac{u_{cc}c}{u_c}\right) \cdot \left(\frac{\dot{c}}{c}\right) - \left(\frac{u_{c\tilde{g}}\tilde{g}}{u_c}\right) \cdot \left(\frac{d\tilde{g}/dt}{\tilde{g}}\right). \tag{3.14}$$

Таким образом, стандартное условие для $\dot{c}/c$ получается при

$$\left(\frac{u_{cc}c}{u_c}\right) = -\theta \quad \text{и} \quad \left(\frac{u_{c\tilde{g}}\tilde{g}}{u_c}\right) = 0.$$

В данном же случае стандартное условие модифицируется с учетом динамики $\tilde{g}$ и вида коэффициента взаимосвязи

$$\left(\frac{u_{c\tilde{g}}\tilde{g}}{u_c}\right).$$

Предположим, что теперь функция полезности обобщает нашу предыдущую спецификацию, в которой межвременная эластичность замены была постоянной:

$$u(c, \tilde{g}) = \frac{\{[h(c, \tilde{g})]^{1-\theta} - 1\}}{1 - \theta}, \tag{3.15}$$

где функция $h(c, \tilde{g})$ однородна степени один относительно c и $\tilde{g}$ и $h_c > 0$, $h_{\tilde{g}} > 0$. В этом случае, используя уравнение (3.14), можно показать, что стандартное условие первого порядка для $\dot{c}/c$, как показано в уравнении (3.3), выполнено до тех пор, пока отношение c к $\tilde{g}$ остается постоянным во времени. Например, если $\tilde{g} = g$ (общественно предоставляемые частные продукты) и отношение $\lambda = g/c$ неизменно во времени, то динамика системы описывается уравнениями (3.3) и (3.12). Следовательно, мы получили те же результаты, что и ранее, когда считали λ константой, т. е. при увеличении λ траектория $\hat{k}$ не меняется, а большее значение g вытесняет равный объем c в каждый момент времени. Такие же результаты верны и в случае, если λ — константа и общественно предоставляемые продукты подвержены перезагрузке, описываемой уравнением (3.13).

Если $\tilde{g} = G$ (чисто общественный продукт), условие (3.3) для $\dot{c}/c$ выполнено, если отношение G/c постоянно, а это означает, что $\lambda = g/c$ уменьшается, как e^{-nt}. В уравнении (3.12) снижение λ со временем непрерывно смещает вверх кривую $\dot{\hat{k}} = 0$. Такое смещение происходит из-за увеличения населения с темпом n, что означает обесценивание со временем данного количества общественных услуг $\tilde{g}$ на человека. В стационарном состоянии общественные услуги эффективно бесплатны (так как население бесконечно), и положение $\dot{\hat{k}} = 0$ соответствует сплошной кривой, изображенной на рис. 3.2. Однако эти выводы верны лишь в случае, если общественные услуги всецело неконкурентны. На самом деле продуктов, действительно подпадающих под эту категорию, крайне мало.

Социальное планирование. Мы можем использовать подход социального планирования для определения оптимального обеспечения общественными услугами в различных случаях. Задача социального планирования заключается в максимизации функции полезности

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \cdot u(c, \tilde{g})\, dt$$

при наличии бюджетного ограничения (3.9). Гамильтониан в этом случае записывается следующим образом:

$$J = u(c, \tilde{g}) \cdot e^{-(\rho-n)t} + v \cdot [f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} - \hat{g}]. \tag{3.16}$$

Одно условие первого порядка для этой задачи имеет вид:

$$f'(\hat{k}) - \delta = \rho \left(\frac{u_{cc}c}{u_c}\right) \cdot \left(\frac{\dot{c}}{c}\right) - \left(\frac{u_{c\tilde{g}}\tilde{g}}{u_c}\right) \cdot \left(\frac{d\tilde{g}/dt}{\tilde{g}}\right). \tag{3.17}$$

Из уравнения (3.14) совместно с условием для фирмы (3.7) можно получить уравнение (3.17) при $\tau_a = \tau_f = 0$, так что основные рекомендации не меняются.

Другое условие первого порядка зависит от спецификации $\tilde{g}$. Если $\tilde{g} = g$, то условие таково:

$$\frac{u_c}{u_{\tilde{g}}} = 1. \tag{3.18}$$

Предельная норма замены между $\tilde{g}$ и c равна единице, потому что для общества стоимость производства обоих этих продуктов одинакова.

Если $\tilde{g} = G$, то условие первого порядка принимает вид

$$\frac{u_c}{u_{\tilde{g}}} = e^{nt}. \tag{3.19}$$

В этом случае благодаря росту населения с темпом прироста n общественные товары со временем становятся эффективно дешевле. Следовательно, предельная норма замены между $\tilde{g}$ и c растет со временем с темпом прироста n. Эти асимптотические выводы не имеют особого смысла, так как совершенной общедоступности общественных услуг быть не может.

Если общественные услуги подвержены перегрузке в форме уравнения (3.13), то уравнение первого порядка имеет вид

$$\frac{u_c}{u_{\tilde{g}}} = \Psi\left(\frac{g}{c}\right) + \left(\frac{g}{c}\right) \cdot \Psi'\left(\frac{g}{c}\right). \tag{3.20}$$

Этот результат соответствует уравнению (3.18) при $\Psi(g/c) = 1$ и $\Psi'(g/c) = 0$. В противном случае условие первого порядка учитывает тот факт, что общественные услуги перегружены ($\Psi[g/c] < 1$) и что прирост g/c ослабляет перегрузку ($\Psi'[g/c] > 0$).

Правительственные закупки в производственной функции. Некоторые общественные услуги могут быть смоделированы более естественно, путем включения их в производственную функцию

$$\hat{y} = f(\hat{k}, \tilde{g}). \tag{3.21}$$

Поток общественных услуг $\tilde{g}$ может быть вновь смоделирован как общественно предоставляемые частные продукты, так что $\tilde{g} = g$, или как общедоступные общественные продукты, так что $\tilde{g} = G$. Мы можем также смоделировать эти услуги как общедоступные общественные продукты, которые подвержены перегрузке, например, в форме

$$\tilde{g} = g \cdot \Psi \cdot \frac{G}{Y},$$

если будем считать перегрузку G относительно валового выпуска Y. Результаты во всех этих случаях аналогичны тем, в которых общественные услуги входят непосредственно в функции полезности домохозяйства. В последнем случае общественные услуги влияют на полезность напрямую, тогда как в предыдущем случае общественные услуги сначала влияют на выпуск и лишь затем опосредованно на полезность.

Одним из результатов для общественно предоставляемых частных продуктов или чисто общественных продуктов является то, что в случае социального планирования следует выбирать уровень общественных затрат, удовлетворяющий условию $\partial Y/\partial G = 1$. Это условие означает, что выпуск, полученный от дополнительной единицы общественных услуг, в пределе должен быть равен единице. В случае общественно предоставляемых частных продуктов производственная функция Кобба–Дугласа записывается следующим образом:

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}\hat{g}^{\beta}, \tag{3.22}$$

где $0 < \beta < 1$. Можно показать, что условие $\partial Y/\partial G = 1$ в этом случае влечет $Y/G = \beta$. То есть общественные услуги должны составлять постоянную часть выпуска на протяжении всей траектории.

Для общественных продуктов производственная функция вида Кобба—Дугласа имеет вид

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}G^{\beta}. \tag{3.23}$$

Можно показать, что условие социального планирования $Y/G = \beta$ здесь также выполнено.

Другой важной возможностью является то, что общественные услуги, такие как принятие и поддержка законов об авторских правах, другие законы и поддержание порядка, увеличивают вероятность того, что индивидуальные домохозяйства или фирмы смогут сохранить свои права собственности на накопленные активы (капитал). Для домохозяйств совершенствование прав собственности эффективно увеличивает норму доходности активов. В этом смысле более совершенное право подобно уменьшению налоговых ставок τ_a и τ_f в уравнении (3.10). Следовательно, совершенствование прав собственности способствует накоплению капитала.

3.2. Издержки ввода инвестиций

В гл. 2 мы упоминали о том, что скорость сходимости в строгой версии неоклассической модели роста больше, чем скорость, заложенная в исходных данных. Мы также упомянули, что одним из способов уменьшить скорость в этой модели является рассмотрение издержек ввода инвестиций. Издержки ввода — это издержки, связанные с вводом капитала в эксплуатацию. В этом разделе мы проанализируем неоклассическую модель, в которой учтены установочные издержки.

3.2.1. Функционирование фирм

Полагаем так же, как и в гл. 2, что производственная функция неоклассическая:

$$Y = F(K, \hat{L}), \tag{3.24}$$

где $F(\cdot)$ – неоклассическая функция (удовлетворяет уравнениям (1.4-1.6)) и $\hat{L} = Le^{xt}$ – эффективный объем трудового ресурса. Каждая фирма i имеет доступ к технологии, описываемой уравнением (3.24); для удобства мы опустим нижний индекс i.

Мы также для удобства будем считать, что фирмы владеют своим основным капиталом K, а не арендуют его у домохозяйств. В свою очередь домохозяйства имеют право на потоки чистой денежной наличности фирм.

Изменение основного капитала фирм дается уравнением:

$$\dot{K}I - \delta K, \tag{3.25}$$

где I – валовое инвестирование. Считаем, что стоимость каждой единицы инвестиций в единицах выпуска равна 1 плюс стоимость ввода, которая является возрастающей функцией I относительно K, т. е.

$$\text{Стоимость инвестиций} = I \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{I}{K}\right)\right], \tag{3.26}$$

где $\phi(0) = 0$, $\phi' > 0$, и $\phi'' \geqslant 0$. Также предполагаем, что издержки ввода зависят от валового инвестирования I, а не от чистого объема инвестиций $I - \delta K$.

Как и ранее, фирмы платят ставку w на каждую единицу труда L, и мы пренебрегаем издержками ввода, связанными с изменениями L. Соответственно, чистый поток наличности фирмы имеет вид

$$\text{Чистый поток наличности} = F(K, \hat{L}) - wL - I \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{I}{K}\right)\right]. \tag{3.27}$$

Фирма имеет определенное число акций в обращении, стоимость которых в момент времени 0 определяется на рынке акций в размере $V(0)$. (Если нормализовать количество акций до единицы, то $V(0)$ – цена одной акции в момент времени 0.) Предположим, что чистый поток наличности, описываемый уравнением (3.27), выплачивается в виде дивидендов акционерам[1]. Следовательно, $V(0)$ равняется приведенному

[1] Эти предположения хороши, если допускать отрицательные дивиденды – пропорционально распределенные по акционерам – для финансирования отрицательного чистого потока наличности. Вместо этого мы могли бы разрешить фирмам осуществлять займы по процентной ставке $r(t)$. Результат был бы таким же, как и в тексте, если бы мы ввели заемное ограничение, которое бы предотвратило цепное финансирование долга. (Это такое же ограничение, какое мы уже накладывали на домохозяйства.) Мы могли бы также разрешить фирмам финансировать отрицательные чистые потоки наличности эмиссией новых акций. В этом случае результат не изменится, если мы будем считать, что цель фирмы – максимизация стоимости каждой акции в обращении.

значению чистого потока наличности между нулевым моментом времени и бесконечностью, дисконтированному в соответствии с рыночной нормой доходности $r(t)$. [Тогда норма доходности для акционеров окажется равной $r(t)$ в любое время.] Фирма принимает решения в целях содействия интересам акционеров и, следовательно, стремится максимизировать $V(0)$.

Пусть, как и в уравнении (2.12), $\bar{r}(t)$ – средняя процентная ставка за временной промежуток $[0, t]$:

$$\bar{r}(t) \equiv \frac{1}{r} \cdot \int_0^t r(v)\, dv.$$

Цель фирмы – определить в каждый момент времени L и I, максимизирующие

$$V(0) = \int_0^\infty e^{-\bar{r}(t)\cdot t} \cdot \left\{ F(K, \hat{L}) - wL - I \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{I}{K}\right) \right] \right\} dt \qquad (3.28)$$

при ограничении (3.25) и начальном значении $K(0)$. Мы можем проанализировать эту оптимизационную задачу с помощью гамильтониана

$$J = e^{-\bar{r}(t)\cdot t} \cdot \left\{ F(K, \hat{L}) - wL - I \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{I}{K}\right) \right] + q \cdot (I - \delta K) \right\} dt, \quad (3.29)$$

где q – теневая цена, ассоциированная с $\dot{K} = I - \delta K$. Гамильтониан записан таким образом, чтобы q измерялся в единицах товаров на единицу капитала в момент времени t, т. е. q представляет собой текущее значение теневой цены введенных основных фондов в единицах производимого в это же время выпуска. Текущее значение теневой цены тогда равно

$$v = q \cdot e^{-\bar{r}(t)\cdot t}.$$

Максимизация приводит, как обычно, к условиям первого порядка $\partial J/\partial L = \partial J/\partial I = 0$ и $\dot{v} = -\partial J/\partial K$ и к условию трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} (vK) = 0.$$

Условия первого порядка имеют вид:

$$[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})] \cdot e^{xt} = w; \qquad (3.30)$$

$$q = 1 + \phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) + \left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) \cdot \phi'\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right); \qquad (3.31)$$

$$\dot{q} = (r + \delta) \cdot q - \left[f'(\hat{k}) + \left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right)^2 \cdot \phi'\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) \right], \qquad (3.32)$$

где мы использовали интенсивную форму производственной функции $f(\cdot)$, а капитал и валовое инвестирование выражены в величинах на единицу эффективного труда, т. е. $\hat{k}$ и $\hat{\imath}$ соответственно[1)].

Уравнение (3.30) является обычным равенством предельного продукта труда ставке зарплаты; здесь ничего не меняется, потому что для изменений в трудовом ресурсе никаких издержек ввода не требуется. Уравнение (3.31) означает, что теневая цена введенного капитала q больше единицы, если $\hat{\imath} > 0$, в силу наличия издержек ввода. Отношение между q и $\hat{\imath}/\hat{k}$ монотонно возрастает, так как $\phi'(\hat{\imath}/\hat{k}) > 0$ и $\phi''(\hat{\imath}/\hat{k}) \geqslant 0$[2)].

Уравнение (3.32) может быть переписано так:

$$r = \frac{1}{q} \cdot \left[f'(\hat{k}) + \left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right)^2 \cdot \phi'\left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right) \right] - \delta + \frac{\dot{q}}{q}.$$

Это уравнение означает, что рыночная норма доходности r приравнена к общей норме доходности от уплаты q за владение единицей капитала. Эта доходность капитала равна предельному продукту $f'(\hat{k})$ плюс предельное сокращение издержек ввода (когда K растет при заданном I), причем все дефлировано стоимостью капитала q, минус выбытие введенного капитала с темпом δ, плюс норма прибыли капитала $\dot{q}/q$. Если издержки ввода отсутствуют, так что

$$\phi\left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right) = \phi'\left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right) = 0 \quad \text{и} \quad q = 1,$$

то уравнение (3.32) вырождается к традиционному $r = f'(\hat{k}) - \delta$.

Условие трансверсальности может быть записано так:

$$\lim_{t\to\infty} \left[q\hat{k} \cdot e^{-[\bar{r}(t)-n-x]\cdot t}\right] = 0. \tag{3.33}$$

Следовательно, если q и $\hat{k}$ асимптотически сходятся к константам (что они и делают), то в стационарном состоянии процентная ставка r^* должна, как обычно, быть больше темпа прироста, $n + x$.

[1)] При заданных w, r, q и $\dot{q}$ из уравнений (3.30) -(3.32) следует, что все фирмы имеют одни и те же значения $\hat{k}$ и $\hat{\imath}$. Относительный размер каждой фирмы $\hat{L}_i(t)/\hat{L}(t)$ точно определяется начальным значением $\hat{L}_i(0)/\hat{L}(0)$; в частности, изменений в относительном размере не происходит со временем из-за наличия издержек ввода в эксплуатацию при вводе капитала (если мы допустим, что эти издержки должны быть уплачены даже в случае, когда фирма продает или покупает бывший в употреблении капитал).

[2)] Этот результат верен и при более слабом условии

$$2 \cdot \phi'\left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right) + \left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right) \cdot \phi''\left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right) > 0.$$

Так как отношение между q и $\hat{i}/\hat{k}$, как следует из уравнения (3.31), является монотонно возрастающим, мы можем обратить это отношение так, чтобы выразить $\hat{i}/\hat{k}$ как монотонно возрастающую функцию q:

$$\frac{\hat{i}}{\hat{k}} = \psi(q), \tag{3.34}$$

где $\psi'(q) > 0$. Зависимости в форме уравнения (3.34) часто оцениваются эмпирически[1]. Для получения оценок эмпирически используется предложение Brainard and Tobin (1968) рассматривать отношение рыночной стоимости фирмы к стоимости ее капитала V/K как замену для q. Отношение V/K теперь называется *средней* q, в то время как теневая цена введенного капитала, которая существует только в теории, называется *предельной* q. Обе концепции q в нашей модели совпадают.

Для того чтобы продемонстрировать соответствие между предельной и средней q, используем уравнения (3.31), (3.32), (3.25) и получим (после некоторых преобразований)

$$\frac{d(qK)}{dt} = \dot{q}K + q\dot{K} = rqK - \hat{L} \cdot \left\{ f(\hat{k}) - we^{-xt} - \hat{i} \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right)\right] \right\}.$$

Это отношение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка по qK и может быть решено с помощью интегрирующего множителя $e^{-r(t) \cdot t}$. Если мы используем условие трансверсальности (3.33) и определение V из уравнения (3.28), то получим

$$qK = V,$$

так что V/K (или средняя q) равно q (предельная q). Hayashi (1982) показал, что этот результат получается до тех пор, пока производственная функция обладает свойством постоянной отдачи к масштабу и фондовый рынок эффективен[2].

---

[1] См., например, von Fustenberg (1977), Summers (1981), и Blanchard, Rhee and Summers (1993). Barro (1990a), например, для получения этих оценок использует разности первого порядка, так что изменение в $\hat{i}/\hat{k}$ связано с изменением рыночной стоимости фирмы. Это изменение в рыночной стоимости затем аппроксимируется нормой доходности на фондовом рынке.

[2] Еще два требования, необходимые для теоремы Hayashi: капитальные товары должны быть однородными (это требование мы предполагали все время), и зависимость совокупных издержек ввода от K и I должна обладать свойством однородности степени 1, мы это предполагали с тех пор, как начали считать, что валовые издержки имеют вид

$$I \cdot \left[1 + \varphi\left(\frac{I}{K}\right)\right].$$

3.2.2. Равновесие при заданной процентной ставке

Теперь проанализируем стационарное состояние и переходную динамику, когда процентная ставка $r(t)$ задана экзогенно. Это предположение применяется либо к отдельной фирме, которая в качестве экзогенной ставки берет общеэкономическую процентную ставку, либо к небольшой открытой экономике, в которой считается заданной мировая процентная ставка. Последний контекст соответствует расширенной версии модели Рамсея, которую мы рассмотрим позже в данной главе. В этом расширении – в котором нет издержек ввода инвестиций – сходимость $\hat{k}$ и $\hat{y}$ к их стационарным значениям оказывается мгновенной. Однако сейчас мы продемонстрируем, что издержки ввода приводят к конечной скорости сходимости даже при наличии совершенных мировых кредитных рынков.

Упростим ситуацию, считая процентную ставку r константой и $r > x + n$. Мы также ограничимся случаем пропорциональности издержек ввода отношению $\hat{i}/\hat{k}$, т. е.

$$\phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) = \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right), \tag{3.35}$$

так что

$$\phi'\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) = \frac{b}{2} > 0.$$

Параметр b отражает чувствительность издержек ввода к общему инвестированному объему. Чем выше значения b, тем большие издержки ввода на единицу $\hat{i}/\hat{k}$. Такой линейный вид $\phi(\cdot)$ не обязателен для получения основных результатов, но упрощает описание. Если мы подставим $\phi(\cdot)$ в таком виде в уравнение (3.31), то мы получим линейную связь между $\hat{i}/\hat{k}$ и q:

$$\frac{\hat{i}}{\hat{k}} = \psi(q) = \frac{q-1}{b}. \tag{3.36}$$

Из уравнений (3.25) и (3.36) следует, что изменение $\hat{k}$ может быть выражено функцией от q:

$$\dot{\hat{k}} = \hat{i} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} = \left[\frac{q-1}{b} - (x + n + \delta)\right] \cdot \hat{k}. \tag{3.37}$$

Если мы подставим $\hat{i}/\hat{k}$ из уравнений (3.35) и (3.36) в уравнение (3.32), мы можем связать $\dot{q}$ с q и $\hat{k}$:

$$\dot{q} = (r + \delta) \cdot q - \left[f'(\hat{k}) + \frac{(q-1)^2}{2b}\right]. \tag{3.38}$$

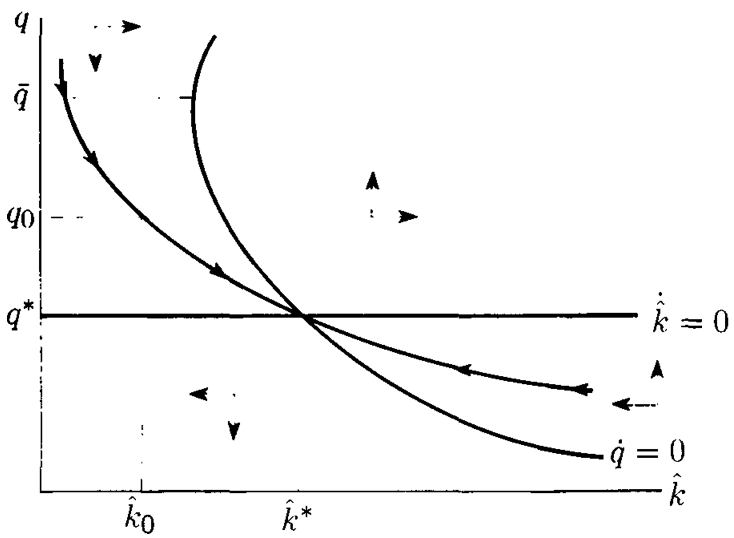


Рис. 3.3. Фазовая диаграмма модели с издержками ввода (в предположении постоянства процентной ставки). Фазовая диаграмма построена в пространстве $(q, \hat{k})$, где q — рыночная стоимость единицы введенного капитала. Кривая $\dot{\hat{k}} = 0$ оказывается горизонтальной прямой на уровне q^*. Кривая $\dot{q} = 0$ имеет отрицательный наклон вблизи стационарного состояния. По мере роста q отрицательный наклон графика усиливается и становится положительным при $q > 1 + b \cdot (r + \delta) > \bar{q}$. Устойчивая ветвь имеет отрицательный наклон целиком. Таким образом. малым значениям $\hat{k}$ соответствует $q > q^*$. В этом случае переход из одного состояния в другое означает монотонное увеличение $\hat{k}$ и монотонное уменьшение q

Уравнения (3.37) и (3.38) составляют двумерную систему дифференциальных уравнений с переменной состояния $\hat{k}$ и теневой ценой q. Для анализа стационарного состояния и переходной динамики системы используем фазовую диаграмму. Диаграмма в пространстве $(\hat{k}, q)$ изображена на рис. 3.3.

Из условия $\dot{\hat{k}} = 0$ и уравнения (3.37) следует (при $\hat{k} \neq 0$)

$$q = q^* = 1 + b \cdot (x + n + \delta). \tag{3.39}$$

Стационарное значение q больше 1, так как в стационарном состоянии издержки ввода идут на валовое инвестирование, которое заменяет изнашивающийся с темпом δ капитал. Кроме того, имеет место дополнительное обесценение капитала в эффективных единицах из-за того. что $\hat{L}$ растет с темпом $x + n$. Уравнение (3.39) проявляется как горизонтальная линия $q = q^*$ на рис. 3.3. Из уравнения (3.37) следует, что $\dot{\hat{k}} > 0$ для $q > q^*$ и $\dot{\hat{k}} < 0$ для $q < q^*$, как и показано на рисунке стрелками.

Уравнение (3.38) при условии $\dot{q} = 0$ преобразуется к виду

$$(q-1)^2 - 2b \cdot (r+\delta) \cdot q + 2b \cdot f'(\hat{k}) = 0. \tag{3.40}$$

Если мы подставим сюда $q = q^*$ из уравнения (3.39), то стационарное значение $\hat{k}^*$ удовлетворяет условию

$$f'(\hat{k}^*) = r + \delta + b \cdot (x + n + \delta) \cdot \left[r + \delta - \frac{1}{2} \cdot (x + n + \delta)\right]. \tag{3.41}$$

Так как $r > x + n$, то из уравнения (3.41) видно, что из-за издержек ввода $b > 0$, величина $f(\hat{k}^*)$ больше $r+\delta$. Следовательно, $\hat{k}^*$ уменьшается издержками ввода.

Угловой коэффициент отношения q и $\hat{k}$ вдоль кривой $\dot{q} = 0$ получается из уравнения (3.40):

$$\frac{dq}{d\hat{k}} = \frac{-b \cdot f''(\hat{k})}{(q-1) - b \cdot (r+\delta)}.$$

Числитель положителен, а знаменатель отрицателен при $q < 1 + b \cdot (r + \delta)$. Это неравенство должно быть выполнено для стационарного значения q^*, так как $r > x + n$ (см. уравнение (3.39)).

Таким образом, кривая $\dot{q} = 0$ имеет отрицательный наклон, как показано на рис. 3.3, при $q \leqslant q^*$[1]. Наклон положителен при

$$q > 1 + b \cdot (r + \delta) > \bar{q}.$$

Из уравнения (3.39) следует $\dot{q} < 0$ при значениях $\hat{k}$ слева от кривой $\dot{q} = 0$ и $\dot{q} > 0$ при значениях $\hat{k}$ справа. На рисунке стрелками показаны эти движения q.

Система кривых, изображенная на рис. 3.3, означает седловую устойчивость. Кривая устойчивого состояния (сплошная линия со стрелками) имеет отрицательный наклон. Следовательно, если экономика начинает развитие при $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, то $q(0) > q^*$. Высокая рыночная стоимость введенного капитала приводит к значительному (но не бесконечному) уровню инвестирования, т. е. $\hat{i}/\hat{k}$ будет больше при больших q, в соответствии уравнением (3.36). Рост $\hat{k}$ со временем приводит к снижению q, и, следовательно, к уменьшению $\hat{i}/\hat{k}$. В итоге q стремится к q^*, $\hat{i}/\hat{k}$ – к $x + n + \delta$, а $\hat{k}$ – к $\hat{k}^*$.

[1] Можно показать, что это свойство сохраняется для любой функции издержек ввода $\phi(\cdot)$, удовлетворяющей неравенству

$$2 \cdot \phi'\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) + \frac{\hat{i}}{\hat{k}} \cdot \phi''\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right) > 0.$$

Таким образом, согласно теории получается, что бедная экономика (с $\hat{k}(0)$, существенно меньшим $\hat{k}^*$) с доступом к мировому рынку кредитов будет иметь высокую стоимость введенного капитала q и высокий темп прироста объема капитала. Теперь произведем количественный анализ результатов теории о скорости сходимости капитала и выпуска.

Мы можем аппроксимировать уравнения (3.37) и (3.38) в окрестности стационарного состояния линейной системой с $\log(\hat{k})$ и q. Предположим, что производственная функция имеет вид функции Кобба—Дугласа $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$, и используем уже знакомые нам значения параметров: $\alpha = 0{,}75$, $x = 0{,}02$, $n = 0{,}01$ и $\delta = 0{,}05$. Мы также предположим, что мировая процентная ставка $r = 0{,}06$ (т. е. 6% годовых), впрочем, результаты в сущности будут такими же, если, например, $r = 0{,}08$/год.

При заданных значениях этих параметров коэффициент сходимости β для $\hat{k}$ и $\hat{y}$ зависит от параметра b из функции издержек ввода (3.35). Размышляя о каком-либо разумном значении этого параметра, заметим, что в стационарном состоянии, когда

$$\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right)^* = x + n + \delta = 0{,}08,$$

стоимость единицы капитала равна $1+0{,}04\cdot b$. Также из уравнения (3.39) следует $q^* = 1 + 0{,}08 \cdot b$. Отсюда, если $b = 1$, то $q^* = 1{,}08$, так что на стационарном состоянии плата за дополнительную единицу капитала равна 1,04, в то время как $b = 10$ приводит к $q^* = 1{,}8$ и плата за дополнительный капитал составляет 1,40. Значение $q^* = 1{,}8$ слишком высокое в сравнении с оценками q, сделанными в работе Blanchard, Rhee, Summers (1993); их оценки не превышают 1,5. Таким образом, для физического капитала такие высокие значения b, как 10, приводят к чрезмерно высоким издержкам ввода и, следовательно, нереалистично высоким значениям q^*. Так как $q > q^*$ при $k < k^*$, то в модели требуется, чтобы b было много меньше 10 для гарантирования $q \leqslant 1{,}5$ на протяжении всего перехода в стационарное состояние.

Проблема в том, что значения b, много меньшие 10, означают нереалистично большой коэффициент сходимости β. При вышеуказанных значениях параметров значение β снижается от ∞ при $b = 0$ до 0,16 при $b = 1$, до 0,11 при $b = 2$ и до 0,09 при $b = 3$. Далее коэффициент β не меньше 0,05, если b больше 6, и не меньше 0,03, если b больше 12[1)].

[1)] При стремлении b к бесконечности β стремится к 0,025, т. е. скорость сходимости не стремится к нулю, по мере того как параметр издержек ввода становится сколь угодно большим. Однако при стремлении b к бесконечности экономика сходится к стационарному значению $\hat{k}^*$, т. е. к нулю.

Для того чтобы значение β упало до 0,03 при низком значении b, мы должны предположить, что степенной параметр α больше 0,75. Например, если $\alpha = 0.09$, то при $b = 6$ коэффициент β падает до 0,03.

Мы видим два возможных пути преодоления этой трудности. Первый путь заключается в предположении, что капитал включает в себя также и человеческий капитал, тогда издержки ввода, связанные с человеческим капиталом, столь велики, что b, равное 10 и более, – и соответственно более высокие значения q – это вполне реалистично[1]. Мы не знаем, как проверить эту гипотезу исходя из доступной к настоящему времени информации относительно отдачи человеческого капитала. Вторая возможность заключается в отказе от предположения, что экономика может финансировать все свои инвестиции по фиксированной процентной ставке r. Для этого можно вернуться к схеме закрытой экономики гл. 1 и 2, где r определяется таким образом, чтобы уравнять потребность в национальных сбережениях и спросе на инвестиции. Другой путь – оставить экономику открытой, но наложить некоторые ограничения на размеры заимствований, которые может осуществить отдельная экономика на международных кредитных рынках. В следующем параграфе мы получим результаты для случая, в котором издержки ввода инвестиций добавлены в версию неоклассической модели роста с закрытой экономикой. В последующем параграфе мы рассмотрим издержки ввода в открытой экономике.

3.2.3. Равновесие в закрытой экономике с постоянной нормой сбережения

Валовые инвестиционные расходы, включая издержки ввода, на эффективного работника имеют вид:

$$\hat{i} \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right)\right].$$

В закрытой экономике эти затраты равны валовому сбережению на эффективного работника. Если мы предположим, что эти сбережения являются постоянной частью s валового выпуска на одного работника $f(\hat{k})$, то имеем

$$s \cdot \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} = \frac{\hat{i}}{\hat{k}} \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right)\right].$$

---

[1] В работе Kremer and Thomson (1998) использовалась схема пересекающихся поколений, в которой молодые работники получают выгоду от взаимодействия со старыми, получая опыт как подмастерья. Из их схемы действительно следует наличие высоких издержек ввода для быстрого роста человеческого капитала.

Если мы воспользуемся линейным выражением для $\phi(\hat{i}/\hat{k})$ из уравнения (3.35) и соответствующим выражением $\hat{i}/\hat{k}$ из (3.36), то уравнение примет вид

$$s \cdot \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} = \frac{1}{2b} \cdot (q^2 - 1). \qquad (3.42)$$

Если мы возьмем в качестве производственной функции функцию Кобба–Дугласа $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$, выразим q через $\hat{k}$ из уравнения (3.42) и подставим полученное выражение в уравнение (3.37) для $\hat{k}$, то получим дифференциальное уравнение относительно $\hat{k}$:

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{1}{b} \cdot \left\{\left[1 + 2bsA \cdot \hat{k}^{\alpha-1}\right]^{1/2} - 1\right\} - (x + n + \delta). \qquad (3.43)$$

Этот результат обобщает формулу (1.30) модели Солоу–Свэна на случай наличия издержек ввода. При $b = 0$ имеем прежний результат Солоу–Свэна[1].

Мы можем, как обычно, рассчитать коэффициент сходимости β с помощью логарифмической линеаризации уравнения (3.43) в окрестности стационарного состояния. Результирующее выражение для β имеет вид:

$$\beta = (1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta) \cdot \left[\frac{1 + (1/2) \cdot b \cdot (x + n + \delta)}{1 + b \cdot (x + n + \delta)}\right]. \qquad (3.44)$$

Следовательно, если издержек ввода нет ($b = 0$), то формула для β редуцируется к виду (1.31) модели Солоу–Свэна: $(1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta)$. Если $b > 0$, то из уравнения (3.44) вытекает, что в модели с издержками ввода β меньше, чем в модели Солоу–Свэна, и является убывающей функцией b. При $b \to \infty$ β стремится к $(1/2) \cdot (1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta)$, т. е. к одной второй значения, предписанного моделью Солоу–Свэна.

Если мы возьмем те же значения параметров, что и ранее ($\alpha = 0.75$, $x = 0{,}02$, $n = 0{,}01$, $\delta = 0{,}05$), и рассмотрим значения коэффициента издержек ввода b много меньше 10, то главный результат заключается в том, что издержки ввода не влияют особо на скорость сходимости. Например, если $b = 0$ (случай Солоу–Свэна), то $\beta = 0.02$/год. Для $b = 2$ имеем $\beta = 0{,}019$ и для $b = 10$ имеем $\beta = 0{,}016$. Итак, хотя наличие издержек ввода замедляет сходимость, степень воздействия мала. Как мы упоминали ранее, для получения более значимого эффекта необходимо считать коэффициент издержек ввода столь большим, что получаемое

[1] Для того чтобы показать, что при $b \to 0$ формула (3.43) преобразуется в формулу (1.30), следует воспользоваться правилом Лопиталя.

значение q^* - и, более того, переходные значения q - превосходит эмпирически наблюдаемые значения (по крайней мере для физического капитала).

Аналогичным образом мы можем учесть издержки ввода в модели Рамсея[1]. Вместо предположения о постоянстве нормы валового сбережения мы воспользуемся знакомым условием из задачи оптимизации для домохозяйства

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho).$$

Дальнейший анализ достаточно прост, хотя и громоздок, оказывается, приводит к нескольким новым интересным наблюдениям. В частности, мы находим, что наличие издержек ввода уменьшает скорость сходимости относительно скорости сходимости в модели Рамсея (уравнение (2.34)). Но так же как и в модели Солоу -Свэна, если взять коэффициент издержек ввода b соответствующим «разумному» поведению теневой цены q, то количественный эффект будет несущественным.

3.3. Модель Рамсея открытой экономики

В моделях с закрытой экономикой, рассмотренных в гл. 1 и 2, всеми основными фондами владели резиденты. Следовательно, для страны i капитал на одного работника k_i равнялся активам на человека a_i. Теперь расширим модель, позволив экономике быть открытой. Начнем с модификации модели Рамсея, в которой разрешены движения товаров через национальные границы и разрешены международные заимствования. Мы обнаружим, что открытость экономики приводит к ряду парадоксальных заключений. Мы также рассмотрим, могут ли дальнейшие расширения - несовершенство мирового рынка кредитов, непостоянные параметры предпочтения, конечный горизонт и издержки ввода инвестиций привести к каким-либо рациональным ответам.

3.3.1. Описание модели

Пусть в мире имеется множество стран. Для удобства будем считать, что одна из этих стран, страна i, отечественная (а ее экономика - внутренняя), а все остальные - зарубежные (иностранные экономики). Внутри любой страны домохозяйства и фирмы имеют такие же целевые функции и ограничения, как в модели Рамсея в гл. 2.

[1]См. Abel and Blanchard (1983) и задачу 3.5 для анализа этой модели.

Предположим, внутренние (отечественные) и иностранные права на владение капиталом обладают свойством совершенной взаимозаменяемости как средства сбережения и поэтому имеют одинаковую норму доходности r. Так как ссуды и права на владение капиталом в любой стране совершенно взаимозаменяемы как средства сбережения, то переменная r будет единой мировой процентной ставкой.

Пусть отечественный производитель имеет активы на человека a_i и капитал на человека k_i. Если k_i превосходит a_i, то разность $k_i - a_i$ должна соответствовать чистым правам иностранцев на отечественную экономику. И наоборот, если a_i превосходит k_i, то $a_i - k_i$ — чистые права резидентов на иностранные экономики. Пусть d_i – чистый долг отечественной экономики перед зарубежными (иностранные права на отечественную экономику минус отечественные права на остальные страны), тогда

$$d_i = k_i - a_i. \tag{3.45}$$

И наконец, внутренние активы равны внутреннему капиталу минус иностранный долг: $a_i = k_i - d_i$. Баланс текущего счета – величина, противоположная по знаку величине изменения совокупного внешнего долга $D_i = L_i d_i$, где L_i – население и трудовой ресурс i-й страны. Таким образом, если L_i растет с темпом n_i, то баланс текущего счета на душу населения страны i равен $-(\dot{d}_i + n_i d_i)$[1].

Несмотря на то что присутствует только один физический вид товара, будем считать, что иностранцы могут покупать отечественный продукт (ВВП), а резиденты могут покупать иностранный продукт. Единственная функция международной торговли в данной модели состоит в том, чтобы позволить объему внутреннего производства отличаться от внутренних расходов на потребление и инвестиции. Другими словами, мы рассматриваем межвременные аспекты международной торговли, но не затрагиваем вопросы, связанные с возможной специализацией производства.

Продолжаем считать, что трудовой ресурс неподвижен, т. е. резиденты отечественной страны не могут работать за границей (или эмигрировать) и иностранцы не могут работать в отечественной стране (или иммигрировать). Допущение миграции будет сделано в гл. 9.

---

[1] Так как D_i – совокупный внешний долг страны, то баланс текущего счета равен $-\dot{D}_i$. По определению, $d_i \equiv D_i/L_i$, а $\dot{L}_i/L_i = n_i$, отсюда

$$-\dot{D}_i/L_i = -(\dot{d}_i + n_i d_i).$$

Бюджетное ограничение типичного домохозяйства в стране i такое же, как и задаваемое уравнением (2.2):

$$\dot{a} = w_i + (r - n_i) \cdot a_i - c_i. \tag{3.46}$$

Единственный новый элемент здесь r — мировая процентная ставка.

Будем считать, что форма предпочтения домохозяйств такая же, что и в гл. 2 (уравнения (2.1) и (2.9)), и что каждая страна имеет свою собственную дисконтирующую ставку ρ_i и эластичность межвременного замещения, θ_i. Так как цель и ограничения такие же, как и в гл. 2, то условия первого порядка для потребления остаются такими же, как и в уравнении (2.10):

$$\frac{\dot{c}_i}{c_i} = \frac{1}{\theta_i} \cdot (r - \rho_i),$$

или, для потребления на эффективного работника,

$$\frac{1}{\hat{c}_i} \frac{\hat{c}_i}{dt} = \frac{1}{\theta_i} \cdot (r - \rho_i - \theta_i x_i). \tag{3.47}$$

Условие трансверсальности вновь означает, что $a_i(t)$ растет асимптотически с темпом меньшим $r - n_i$, как в уравнении (2.11).

Условия оптимизации, как и прежде, приводят к равенству между предельным продуктами и ценами факторов производства (уравнения (2.21) и (2.22)):

$$f'(\hat{k}_i) = r + \delta_i; \tag{3.48}$$

$$[f(\hat{k}_i) - \hat{k}_i \cdot f'(\hat{k}_i)] \cdot e^{x_i t} = w_i. \tag{3.49}$$

Если мы подставим w_i из уравнения (3.49) в уравнение (3.46), то с учетом (3.48) изменение в активах на эффективного работника определяются так:

$$\frac{d\hat{a}_i}{dt} = f(\hat{k}_i) - (r + \delta_i) \cdot (\hat{k}_i - \hat{a}_i) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i. \tag{3.50}$$

Заметим, что из уравнения (3.45) имеем $(\hat{k}_i - \hat{a}_i) = \hat{d}_i$, что равно нулю для закрытой экономики. Уравнение (3.50) обобщает уравнение (2.23) на случай $\hat{d}_i \neq 0$.

3.3.2. Динамика основных фондов и выпуска небольшой экономики

Если экономика i-й страны невелика относительно мировой экономики, то накопления активов и основных фондов этой страны имеют незначительное влияние на динамику мировой процентной ставки $r(t)$. Поэтому можно рассматривать траекторию $r(t)$ как экзогенную для страны i.

При этой заданной траектории уравнения (3.48) и (3.49) определяют траектории $\hat{k}_i(t)$ и $w_i(t)$, причем вопрос о выборе между потреблением и сбережением отечественными домохозяйствами остается без рассмотрения. При заданной траектории $w_i(t)$ уравнения (3.47) и (3.50), с учетом условия трансверсальности, определяют траектории $\hat{c}_i(t)$ и $\hat{a}_i(t)$. И наконец, траектории $\hat{k}_i(t)$ и $\hat{a}_i(t)$ определяют динамику чистого внешнего долга $\hat{d}_i(t)$ согласно (3.45).

Предположим для простоты, что мировая процентная ставка постоянна и равна r. На самом деле мировая экономика находится в своеобразном стационарном состоянии, которое мы рассмотрели ранее для отдельно взятой экономики. Если бы экономика в стране i была закрытой, то ее стационарная процентная ставка равнялась бы $\rho_i+\theta_i x_i$ (как в гл. 2). Будем считать, что выполнено $r \leqslant \rho_i + \theta_i x_i$, так как если $r > \rho_i + \theta_i x_i$, то внутренняя экономика в конце концов аккумулирует достаточное количество активов, чтобы нарушить наше предположение о небольшой экономике. Мы также предположим, что $r > x_i + n_i$, т. е. мировая процентная ставка больше стационарного темпа прироста страны i, если бы ее экономика была закрытой. В противном случае текущее значение заработной платы окажется бесконечным и, следовательно, достигаемая полезность будет неограниченной.

Если r константа, то из уравнения (3.48) следует, что $\hat{k}_i(t)$ тоже константа $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}$, которая удовлетворяет условию

$$f'[(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}] = r + \delta_i.$$

Другими словами, скорость сходимости из любого начального значения $\hat{k}_i(0)$ к $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}$ бесконечна. Избыток $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}$ относительно $\hat{k}_i(0)$ приводит к тому, что капитал притекает из остального мира так быстро (с бесконечным темпом), что разность мгновенно падает в ноль. Аналогично избыток $\hat{k}_i(0)$ относительно $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}$ приводит к массовому оттоку капитала. Этот нереалистичный прогноз бесконечной скорости сходимости $\hat{k}_i$ является одним из наиболее проблематичных результатов версии модели Рамсея с открытой экономикой.

Вспомним, что $\hat{k}_i^*(t)$ (стационарное значение в модели с закрытой экономикой из гл. 2) удовлетворяет условию $f'(\hat{k}_i^*) - \delta = \rho_i + \theta_i x_i$. Из условия $r \leqslant \rho_i + \theta_i x_i$ следует $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}} \geqslant \hat{k}_i^*$, т. е. стационарная интенсивность использования капитала в открытой экономике не меньше, чем в закрытой экономике.

Так как $\hat{k}_i(t)$ постоянна, то $\hat{y}_i(t)$ тоже постоянна, т. е. скорость сходимости из $\hat{y}_i(0)$ в $(\hat{y}_i^*)_{\text{open}}$ бесконечна, и $y_i(t)$ растет с постоянным темпом x_i. Из уравнения (3.49) следует, что $w_i(t)$ также растет с постоянным темпом x_i. Таким образом, ставка заработной платы на единицу эффективного труда

$$\hat{w}_i(t) = w_i(t) \cdot e^{-x_i t}$$

постоянна, обозначим ее $(\hat{w}_i^*)_{\text{open}}$.

3.3.3. Динамика потребления и активов небольшой экономики

Из уравнения (3.47) следует, что потребление на эффективного работника $\hat{c}_i(t)$ прирастает с постоянным темпом

$$\frac{(r - \rho_i - \theta_i x_i)}{\theta_i} \leqslant 0.$$

Если мы воспользуемся формой функции потребления, полученной нами в гл. 2 (уравнения (2.14) и (2.15)), то $\hat{c}_i(t)$ может быть записано следующим образом:

$$\hat{c}_i = \frac{1}{\theta_i} \cdot [\rho_i - r \cdot (1 - \theta_i) - n_i \theta_i] \cdot \left[\hat{a}_i(0) + \frac{(\hat{w}_i^*)_{\text{open}}}{r - x_i - n_i}\right] \cdot e^{[(r - \rho_i - \theta_i x_i)/\theta_i] \cdot t}. \quad (3.51)$$

Выражение в первых скобках правой части уравнения положительно в силу условий

$$\rho_i + \theta_i x_i \geqslant r \quad \text{и} \quad r > x_i + n_i.$$

Если $r = \rho_i + \theta_i x_i$, то $\hat{c}_i(t)$ константа, а если $r < \rho_i + \theta_i x_i$, то $\hat{c}_i(t)$ асимптотически стремится к нулю. Отечественная страна заимствует, чтобы пораньше получить удовольствие от высокого уровня потребления, - потому что она нетерпелива в том смысле, что $\rho_i + \theta_i x_i > r$, - но она заплатит за это потом низкими темпами роста потребления в будущем. Вспомним, что в случае закрытой экономики $\hat{c}_i(t)$ асимптотически постоянно. Вывод о том, что $\hat{c}_i$ стремится к нулю, если $r < \rho_i + \theta_i x_i$, представляет другую проблемную особенность модели Рамсея с открытой экономикой.

Уравнение (3.50) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительной неизвестной функции $\hat{a}_i(t)$. Из этого уравнения с учетом выражения (3.51) для $\hat{c}_i(t)$ и при заданном начальном значении активов $\hat{a}_i(0)$ имеем

$$\hat{a}_i(t) = \left[\hat{a}_i(0) + \frac{(\hat{w}_i^*)_{\text{open}}}{r - x_i - n_i}\right] \cdot e^{[(r - \rho_i - \theta_i x_i)/\theta_i] \cdot t} - \frac{(\hat{w}_i^*)_{\text{open}}}{r - x_i - n_i}. \quad (3.52)$$

Последний член в правой части уравнения является приведенным значением заработной платы (на единицу эффективного труда), причем $r - x_i - n_i > 0$ в силу условия $r > x_i + n_i$.

Если $r = \rho_i + \theta_i x_i$, то $\hat{a}_i(t)$ константа. Иначе (если $r < \rho_i + \theta_i x_i$) экспоненциальный член в уравнении (3.52)

$$e^{(r-\rho_i-\theta_i x_i)/\theta_i \cdot t}$$

уменьшается со временем до нуля. Таким образом, если $\hat{a}_i(0) > 0$, то $\hat{a}_i(t)$ в конце концов падает до 0, так что $\hat{d}_i(t)$ из уравнения (3.45) равняется $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}$. Затем величина $\hat{a}_i(t)$ становится отрицательной, т. е. отечественная страна становится дебитором не только в смысле невладения своими основными фондами, но и в смысле заимствования под залог приведенной стоимости ее трудовых доходов. Асимптотически $\hat{a}_i(t)$ стремится к последнему члену в уравнении (3.52),

$$-\frac{(\hat{w}_i^*)_{\text{open}}}{(r - x_i - n_i)},$$

так что $\hat{d}_i(t)$ стремится к положительной константе

$$(\hat{k}_i^*)_{\text{open}} - \frac{(\hat{w}_i^*)_{\text{open}}}{(r - x_i - n_i)}.$$

Другими словами, нетерпеливая страна асимптотически закладывает весь свой капитал и весь свой трудовой доход. Такая нереалистичная динамика активов является еще одной проблемой этой модели.

3.3.4. Мировое равновесие

Допустим, мир состоит из множества стран, пронумерованных $i = 1, \ldots, M$. Предположим, что темп прироста населения n_i и темп технологического прогресса x_i равны одним и тем же значениям n и x для всех стран. В этом случае доля выпуска каждой страны Y_i в общемировом выпуске не меняется со временем.

Будем считать, что страны упорядочены по их эффективным ставкам временных предпочтений $\rho_i + \theta_i x$, так что страна 1 имеет наименьшее значение. Мы уже показали, что $\hat{c}_i(t)$ стремится к нулю, а $\hat{a}_i(t)$ стремится к отрицательному значению, если

$$\rho_i + \theta_i x > r.$$

И наоборот, если

$$\rho_i + \theta_i x < r,$$

то $\hat{c}_i(t)$ и $\hat{a}_i(t)$ будут все время расти, так что в результате потребление i-й страны превзойдет мировой выпуск. Но перед тем как это произойдет, мировая процентная ставка должна скорректироваться вниз;

3.4.1. Описание модели с физическим и человеческим капиталами

Воспользуемся следующим удобным способом построения модели. Разделим капитал на два типа: первый будет служить хорошим средством обеспечения под иностранные кредиты, а второй таким свойством обладать не будет. Предположим, например, что человеческий капитал является неприемлемой для залога по займам ценностью, в то время как, по крайней мере, некоторые формы физического капитала доступны в качестве обеспечения по займам, так как кредиторы могут объявить о праве собственности на эти объекты в случае дефолта.

Предположим теперь, что производственная функция содержит два типа капитала:

$$\hat{y} = f(\hat{k}, \hat{h}) = A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta}, \tag{3.53}$$

где $\hat{k}$ – физический капитал на единицу эффективного труда и $\hat{h}$ – человеческий капитал на единицу эффективного труда[1]. Производственная функция имеет вид функции Кобба–Дугласа, где α – доля физического капитала, η – доля человеческого капитала, и

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < \alpha + \eta < 1.$$

Условие $0 < \alpha + \eta < 1$ гарантирует убывающую отдачу в процессе накопления капитала в широком смысле, т. е. для пропорциональных изменений в физическом и человеческом капиталах.

Сохраним предположение односекторной производственной технологии: единицы выпуска полностью расходуются один к одному на потребление, на увеличение объема физического капитала и на увеличение объема человеческого капитала. (В гл. 4 продолжается рассмотрение этой модели, а в гл. 5 представлен отдельный сектор образования, который производит новый человеческий капитал.) Бюджетное ограничение, обобщающее уравнение (3.50), имеет вид

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} + \frac{d\hat{h}}{dt} - \frac{d\hat{d}}{dt} =$$

$$= A\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta} - (r+\delta)\cdot(\hat{k}+\hat{h}-\hat{a}) - (x+n+\delta)\cdot\hat{a} - \hat{c}, \tag{3.54}$$

где $\hat{a} = \hat{k}+\hat{h}-\hat{d}$, для удобства мы опустили нижний индекс страны i. Мы также считаем, что темп выбытия δ одинаков для обоих видов капитала.

[1] Здесь мы следуем работе Barro, Mankiw, and Sala-i-Martin (1995). Альтернативная модель, предложенная в работе Cohen and Sachs (1986), имеет один тип капитала k, но предполагается, что только часть v (где $0 \leqslant v \leqslant 1$) этого капитала может пойти в залог. Выводы в этой альтернативной модели аналогичны выводам в модели с двумя видами капитала, однако последняя проще.

3.4.2. Закрытая экономика

Вернемся на время к закрытой экономике, тогда $d = 0$ и $a = k+h$. В этом случае результаты относительно процесса роста такие же, что и разработанные в гл. 2, за исключением того, что мы теперь рассматриваем капитал в более широком смысле, включая физическую и человеческую компоненты. Инвесторы приравнивают предельный продукт капитала каждого типа к $r + \delta$, где r внутренняя процентная ставка. При заданной в уравнении (3.53) производственной функции Кобба–Дугласа это условие означает, что отношение k/h зафиксировано на уровне α/η[1]. В стационарном состоянии величины каждого из двух типов капитала на единицу эффективного труда постоянны при значениях $\hat{k}^*$ и $\hat{h}^*$ соответственно, где $\hat{k}^*/\hat{h}^* = \alpha/\eta$. Если $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$ и $\hat{h}(0) < \hat{h}^*$, то переходная динамика заключается в росте $\hat{k}$, $\hat{h}$ и $\hat{y}$. Так же как и в нашем предыдущем анализе, темпы этого роста падают в процессе перехода.

В модели Рамсея, гл. 2, скорость сходимости к стационарному состоянию зависит от доли капитала. Эта доля равнялась α в версии модели Кобба–Дугласа с одним типом капитала, но теперь, в модели с двумя типами капитала, она равна $\alpha + \eta$. За исключением замены α на $\alpha + \eta$, остальные результаты идентичны полученным в гл. 2. В частности, формула для коэффициента сходимости β из уравнения (2.34) в лог-линеризованной модели остается в силе с заменой α на $\alpha + \eta$:

$$2\beta = \left\{\zeta^2 + 4 \cdot \left(\frac{1-\alpha-\eta}{\theta}\right) \cdot (\rho + \delta + \theta x) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\rho + \delta + \theta x}{\alpha + \eta} - (n + x + \delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta, \qquad (3.55)$$

где

$$\zeta = \rho - n - (1 - \theta) \cdot x > 0.$$

Предположим, например, что $\alpha = 0{,}30$ и $\eta = 0{,}45$, тогда выводы о скорости сходимости будут такими же, что и в гл. 2 при $\alpha = 0{,}75$. Если мы возьмем наши обычные эталонные значения для остальных параметров — $n = 0{,}01$ в год, $x = 0{,}02$ в год, $\rho = 0{,}02$ в год и $\delta = 0{,}05$ в год — и возьмем $\theta = 3$, то коэффициент сходимости $\beta = 0{,}015$ в год.

[1] Экономика может сразу прыгнуть от начального значения $k(0)/h(0)$ до α/η, только если мы допустим, что оба вида капитала обратимы, так что единицы k могут быть немедленно конвертированы в единицы h и наоборот. Если мы будем считать, что валовое инвестирование в каждый из видов капитала не может быть отрицательным, то переходная динамика будет более сложной. Мы исследуем этот вопрос в гл. 5.

3.4.3. Открытая экономика

Разделение капитала на два типа становится еще интереснее, если рассмотреть открытую экономику с ограничением в возможности получения кредита. Предположим, что объем внешнего долга d может быть положительным, но не может превосходить размер физического капитала k. Физический капитал может использоваться в качестве обеспечивающего внешнее заимствование залога, а человеческий капитал и неквалифицированный труд - не могут.

Неявно мы предполагаем, что физическим капиталом владеют постоянные жители страны, но они могут получить частичное или полное финансирование этого капитала посредством выпуска облигаций для иностранцев. Результат будет тем же, если мы допустим прямые иностранные инвестиции, которые позволят иностранцам владеть частью основных фондов, а не облигациями. Но самое существенное предположение здесь заключается в том, что резиденты не могут занимать средства под залог человеческого капитала или неквалифицированного труда, а иностранцы не могут владеть отечественным человеческим капиталом и неквалифицированным трудом.

Существует несколько способов объяснить это ограничение на заимствования. Физический капитал проще изъять за неплатеж, чем человеческий капитал, и, следовательно, его с большей готовностью профинансируют долговым обязательством. Физический капитал также более пригоден для прямых иностранных инвестиций: можно владеть заводом, но не чьим-либо (кроме своего) потоком трудового дохода. В конце концов, можно отказаться от терминов «физический капитал» и «человеческий капитал» и признать, что не все инвестиции могут быть профинансированы на совершенных рынках капитала. Ключевое различие между k и h в данном контексте заключается не в физической природе капитала, а в том, могут ли какие-либо накопленные продукты идти в залог при заимствованиях на мировых рынках.

Считаем, как и прежде, что мировая процентная ставка r постоянна. Пусть теперь

$$r = \rho + \theta x,$$

т. е. равна стационарному значению процентной ставки в случае, если бы экономика была закрытой. Это означает, что отечественная экономика ни более, ни менее нетерпелива, нежели мир в целом. (Этот случай достаточно просто обобщить на случай $r < \rho + \theta x$.)

Начальное значение активов на эффективного работника равно

$$\hat{k}(0) + \hat{h}(0) + \hat{d}(0),$$

и ключевой вопрос здесь состоит в том, больше или меньше это значение стационарного объема человеческого капитала $\hat{h}^*$. Если

$$\hat{k}(0) + \hat{h}(0) + \hat{d}(0) \geqslant \hat{h}^*,$$

то ограничения на заимствования нет, так что экономика мгновенно переходит в стационарное состояние. Если же

$$\hat{k}(0) + \hat{h}(0) + \hat{d}(0) < \hat{h}^*,$$

то ограничение накладывается — т. е. $d = k$ — и мы получим ряд новых результатов. Так что остановимся на последнем случае[1].

Так как физический капитал идет в залог, то чистая отдача этого капитала $f_k - \delta$, где f_k - предельный продукт капитала, равна мировой процентной ставке r в каждый момент времени. Производственная функция для f_k имеет вид (3.53), поэтому

$$\hat{k}\,\frac{\alpha\hat{y}}{r+\delta}. \tag{3.56}$$

Уравнение (3.56) гарантирует, что отношение физического капитала к ВВП k/y остается постоянным в течение перехода в стационарное состояние. В случае закрытой экономики k/y, напротив, монотонно растет во время перехода. В работе Keldor (1963) жесткое постоянство k/y во времени является отличительной особенностью экономического развития (см. рассуждения во вводной главе). Так что согласованность модели с открытой экономикой и кредитным ограничением с этой «особенностью» весьма примечательна[2].

Выражение (3.56) для $\hat{k}$ можно подставить в уравнение (3.53), чтобы выразить $\hat{y}$ через $\hat{h}$:

$$\hat{y} = \tilde{A}\hat{h}^{\epsilon}, \tag{3.57}$$

[1]Если $r < \rho + \theta x$, то отечественная экономика в конечном итоге подвергнется ограничению на мировом кредитном рынке. Следовательно, наш анализ экономики с наличием ограничения на заимствования применим если не к начальной дате, то, по крайней мере, к определенному времени в будущем. Если $r > \rho + \theta x$, то в итоге будет нарушено наше предположение о малости экономики, так что r в этом случае изменится.

[2]То, насколько отношение k/y в данной модели постоянно, зависит от фиксированности мировой процентной ставки r и от предположения, что производственная технология задана функцией Кобба–Дугласа. Такой вид производственной функции приводит к тому, что усредненный продукт капитала y/k пропорционален предельному продукту. Поскольку предельный продукт капитала, за вычетом выбытия, равен фиксированной мировой процентной ставке r, то средний продукт y/k должен быть константой.

где

$$\tilde{A} \equiv A^{1/(1-\alpha)} \cdot \left[\frac{\alpha}{(r+\delta)}\right]^{\alpha/(1-\alpha)} \quad \text{и} \quad \epsilon \equiv \frac{\eta}{1-\alpha}.$$

Из условия $0 < \alpha + \eta < 1$ вытекает $0 < \epsilon < \alpha + \eta < 1$. Таким образом, производственная функция в сокращенной форме (3.57) выражает $\hat{y}$ как функцию $\hat{h}$ с положительным и убывающим предельным продуктом. Следовательно, результаты относительно сходимости в этой модели аналогичны случаю закрытой экономики - в обеих моделях происходит накопление основных фондов в условиях убывающей отдачи капиталов.

Для получения нового вида бюджетного ограничения объединим бюджетное ограничение из уравнения (3.54) с производственной функцией в упрощенной форме (3.57), с ограничением на заимствования $d = k$ (из которого следует $a = h$) и с условием $(r+\delta) \cdot \hat{k} = \alpha\hat{y}$ из уравнения (3.56):

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = (1-\alpha) \cdot \tilde{A}\hat{h}^{\epsilon} - (\delta + n + x) \cdot \hat{h} - \hat{c}. \tag{3.58}$$

Заметим, что член $\alpha\tilde{A}\hat{h}^{\epsilon}$, который вычитается из $\tilde{A}\hat{h}^{\epsilon}$ в этом уравнении, соответствует потоку платежей за аренду физического капитала $(r+\delta)\hat{k}$ (см. уравнение (3.56)). Так как $d = k$, этот член соответствует чистым платежам за производственный фактор иностранцам и, следовательно, равен разности (на единицу эффективного труда) между ВНП и ВВП. При этом ВВП больше ВНП, так как страна ограничена в возможности получения кредитов на международном кредитном рынке и в силу этого имеет положительный внешний долг $d = k$.

Если мы используем предположения, согласно которым домохозяйства непосредственно производят товары, то в этом случае они будут максимизировать полезность (заданную уравнениями (2.1) и (2.9)) при бюджетном ограничении (3.58) и заданном начальном значении резерва человеческого капитала $\hat{h}(0) > 0$ ($\hat{h}(0)$ равен заданному объему начальных активов, который, по предположению, меньше $\hat{h}^*$). Условие оптимальности для потребления со временем имеет вид

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[(1-\tau_a) \cdot \tilde{A}\epsilon\hat{h}^{\epsilon-1} - (\delta + \rho + \theta x)\right], \tag{3.59}$$

где

$$(1-\alpha)\tilde{A}\epsilon\hat{h}^{\epsilon-1} = \tilde{A}\eta\hat{h}^{\epsilon-1} = f_h$$

– предельный продукт человеческого капитала. Уравнение (3.59) соответствует обычной формуле (3.47), если считать r в этой формуле внутренней процентной ставкой, которая равна $f_h - \delta$. Уравнения (3.58) и (3.59) и, как обычно, условие трансверсальности полностью описывают переходную динамику модели.

Мы предположили, что $r = \rho + \theta x$, поэтому стационарное состояние здесь будет таким же, как и в закрытой экономике, имеющей физический и человеческий капиталы. Поэтому возможность брать кредиты на мировом кредитном рынке не влияет на стационарное состояние, но, как мы потом увидим, влияет на скорость сходимости[1].

Система, описанная уравнениями (3.58) и (3.59) и условием трансверсальности, имеет обычную переходную динамику. Мы можем сравнить эти результаты с результатами для модели закрытой экономики с капитальными продуктами k и h, в которой общий объем капитала в широком смысле на одного работника равен $k+h$ и показатель степени над переменной капитала равен $\alpha + \eta$. Немногие отличия заключаются в следующем: уравнение (3.58) содержит $(1-\alpha) \cdot \tilde{A}$ в качестве постоянного коэффициента пропорциональности в производственной функции; переменная, отвечающая за объем капитала, — это h, а не $k + h$; и наконец, капитал возводится в степень $\epsilon \equiv \eta/(1-\alpha)$, а не $\alpha + \eta$. В силу того что ϵ и $\alpha + \eta$ положительны и меньше 1, т. е. в обеих моделях имеет место убывающая отдача, динамика моделей по существу одинакова.

Выражение для коэффициента сходимости β совпадает с аналогичным выражением для закрытой экономики, представленным уравнением (3.55), за исключением того, что параметр доли капитала $\alpha + \eta$ заменен на $\epsilon \equiv \eta/(1-\alpha)$. (Вспомним, что уровень производственной технологии не влияет на темп сходимости.) Следовательно, коэффициент сходимости для ограниченной в кредитах открытой экономики дается уравнением

$$2\beta = \left\{\zeta^2 + 4 \cdot \left(\frac{1-\epsilon}{\theta}\right) \cdot (\delta + \rho + \theta x) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\delta + \rho + \theta x}{\epsilon} - (\delta + n + x)\right]\right\}^{1/2} - \zeta, \qquad (3.60)$$

где

$$\zeta = \rho - n - (1-\theta) \cdot x > 0.$$

Коэффициент, определяемый из уравнения (3.60), имеет такую же величину, какая получается в закрытой экономике, у которой доля капитала

[1] Если мы предположим, что $r < \rho + \theta x$ — так что отечественная экономика более нетерпелива, чем экономика остального мира (см. сноску (1) на с. 136), — то возможность внешнего заимствования также повлияет на значение стационарного состояния. Открытая экономика будет иметь бóльшие стационарные интенсивности использования капиталов $\hat{h}^*$ и $\hat{k}^*$, нежели закрытая экономика.

в широком смысле равна ϵ вместо $\alpha + \eta$. Поскольку

$$\epsilon \equiv \frac{\eta}{1-\alpha},$$

постольку из этого следует, что $\epsilon < \alpha + \eta$ (мы использовали условие $\alpha + \eta < 1$). *Таким образом, открытая экономика с кредитным ограничением развивается так же, как и закрытая экономика с долей капитала*, в широком смысле меньшей, чем $\alpha + \eta$. Вспомним, что темп сходимости тем больше, чем меньше доля капитала (так как меньшее значение доли капитала означает, что убывающая отдача устанавливается быстрее). Это означает, что открытая экономика с кредитным ограничением имеет больший темп сходимости, нежели закрытая экономика. Отметим, однако, что из $\alpha+\eta \to 1$ следует $\epsilon \to 1$ и, следовательно, $\beta \to 0$ в уравнении (3.60). Таким образом, если убывающей отдачи капитала в широком смысле нет ($\alpha + \eta = 1$), то модель все еще не обладает свойством сходимости[1].

Для того чтобы понять, почему частично открытая экономика сходится быстрее закрытой, достаточно иметь в виду, что по мере накопления человеческого капитала $\hat{h}$ усиливается убывающая отдача. При заданных показателях производственной функции α и η ключевым вопросом является переходная динамика отношения k/h. В закрытой экономике отношение k/h постоянно (на уровне α/η), в то время как в открытой экономике k/h падает в процессе перехода (см. ниже). Это означает, что вначале значение $\hat{k}$ относительно велико в открытой экономике, так как доступность внешнего финансирования позволяет легко и быстро приобрести физический капитал. Снижение k/h со временем приводит к более быстрой установке убывающей отдачи $\hat{h}$, нежели в противном случае; следовательно, скорость сходимости больше в открытой экономике, чем в закрытой.

Хотя открытая экономика сходится быстрее, чем закрытая экономика, скорость сходимости для открытой экономики конечна. Если мы возьмем значения

$$\alpha = 0{,}30 \quad \text{и} \quad \eta = 0{,}45$$

[1] Если $\alpha = 0$, так что нет никакого обеспечивающего капитала, то $\epsilon = \eta$ и β из уравнения (3.60) имеет значение, соответствующее значению из уравнения (3.55) для закрытой экономики (с долей капитала, равной η). Если же $\eta = 0$, так что весь капитал представлен как обеспечивающий, то $\epsilon = 0$ и β из уравнения (3.60) становится бесконечным, как и в открытой экономике с совершенной мобильностью капитала.

вместе с эталонными значениями, упомянутыми ранее, для других параметров, то, как следует из уравнения (3.60), коэффициент сходимости равен 0,025, в то время как для закрытой экономики он равнялся 0,015. Значение 0,025 хорошо согласовано с эмпирическими оценками коэффициентов сходимости.

Вспомним, что открытая экономика с совершенной мобильностью капитала сходится с бесконечным темпом. Следовательно, наш основной результат заключается в том, что открытая экономика с частичной мобильностью капитала выглядит значительно более похожей на закрытую экономику, нежели полностью открытая экономика. Хотя мы вывели этот результат пока что только для частного набора значений α и η, основной результат является более общим. Если мы увеличим α/η при заданном $\alpha + \eta$, то мы увеличим и степень мобильности капитала, и, как следствие, увеличим коэффициент сходимости β. При эталонных значениях остальных параметров (включая $\alpha + \eta = 0{,}75$) β растет

с	0,015	при	$\alpha/\eta = 0$	до	0,030	при	$\alpha/\eta = 1$,
до	0,042	при	$\alpha/\eta = 2$	и до	0,053	при	$\alpha/\eta = 3$.

Таким образом, если мы возьмем эталонные значения остальных параметров и предположим, что не более чем половина общего резерва капитала составляет обеспечение внешнего заимствования ($\alpha/\eta < 1$), то спрогнозированный коэффициент сходимости попадает в диапазон 0,015–0,030 в год. Этот диапазон хорошо соответствует эмпирическим оценкам[1].

Переход в стационарное состояние сопровождается, в частности, монотонным ростом человеческого капитала на эффективного работника $\hat{h}$ из начального значения $\hat{h}(0)$ в стационарное значение $\hat{h}^*$. Из уравнения (3.57) следует, что темп прироста $\hat{y}$ равен произведению ϵ на $\hat{h}$, где $\epsilon \in [0, 1]$. Отношение h/y, таким образом, неуклонно растет на протяжении перехода. Вспомним, однако, что из уравнения (3.56) вытекает постоянство отношения h/y. Следовательно, $\hat{k}$ растет с таким же темпом, что и $\hat{y}$, и отношение человеческого капитала к физическому h/k также растет в процессе перехода. Отметим, что хотя физиче-

[1] Barro, Mankiw и Sala-i-Martin (1995) обобщили производственную функцию в уравнении (3.53) от вида Кобба—Дугласа до функции с постоянной эластичностью замены ресурсов (CES). Степень способности к замене влияет на β: оказывается, что β больше, если $\hat{k}$ и $\hat{h}$ плохо взаимозаменяемы в производстве. Однако основной вывод состоит в том, что β заключен в узком диапазоне (0,014, 0,035) при обычных эталонных параметрах и при $\alpha/\eta \leqslant 1$. Таким образом, теоретические прогнозы хорошо соответствуют эмпирическим оценкам β, даже в этом, более общем, случае.

ский капитал служит обеспечением кредитов, тем не менее $\hat{k}$ растет постепенно к своему стационарному значению $\hat{k}^*$. Это связано с расходами внутренних сбережений на накопление человеческого капитала, и взаимодополняемостью $\hat{h}$ и $\hat{k}$ в производственной функции. Когда $\hat{h}$ мало, график предельного продукта физического капитала также низок; следовательно, неравенство $\hat{k} < \hat{k}^*$ выполнено, даже несмотря на то, что отечественные производители могут финансировать все приобретения физического капитала посредством внешнего заимствования. Постепенный рост человеческого капитала положительно влияет на предельный продукт физического капитала и ведет, таким образом, к увеличению $\hat{k}$.

Внешнее заимствование происходит только за счет ссуд, обеспеченных физическим капиталом, а процентная ставка по этим ссудам поддерживается на уровне мировой ставки r. Допустим также наличие внутреннего кредитного рынка, несмотря на то что наши предположения относительно параметров резидентов приводят к тому, что в равновесии никто не будет заимствовать. Для займов, обеспеченных физическим капиталом, теневая процентная ставка на внутреннем рынке также должна быть r. Если мы предположим, что человеческий капитал и неквалифицированный трудовой ресурс не могут идти в обеспечение займов, то теневая процентная ставка на внутреннем рынке с такими формами обеспечения равна бесконечности (или, по крайней мере, будет достаточно большой, чтобы привести к нулевым займам), так же как это имеет место быть на мировом рынке.

Мы могли бы вместо этого предположить, что человеческий капитал и неквалифицированный труд могут идти в залог при внутреннем заимствовании, но не при внешнем заимствовании. Такая ситуация может иметь место в случае, если правовая система предусматривает долговые контракты, базирующиеся на трудовом доходе, причем кредитор может быть внутренним, но не внешним. В этом случае теневая процентная ставка на внутреннее заимствование, обеспеченное трудовым доходом, равна чистому предельному продукту человеческого капитала. Этот чистый предельный продукт сначала имеет достаточно большое значение (соответствующее малому начальному уровню $\hat{h}(0)$) и затем постепенно падает до стационарного значения r. Таким образом, во время переходной динамики разница между этим видом внутренней процентной ставки и мировой ставкой r снижается. В качестве примера можно привести неофициальный рынок неформального кредитования в Южной Корее (см. Collins and Park, 1989, p. 353). Разница между процентными ставками на этом рынке и мировыми процентными ставками была от 30 до 40 процентных пунктов в 1960-х и 1970-х, но упала к 1980-м гг. до примерно 15 процентных пунктов.

Другим выводом модели является то, что, несмотря на наличие международного заимствования, свойства сходимости ВНП и ВВП одинаковы. Как отмечено ранее, чистый доход фактора из-за границы (на единицу эффективного труда) равен

$$-(r+\delta)\cdot\hat{k} = -\alpha\hat{y}.$$

Следовательно,

$$\text{ВНП (на единицу эффективного труда)} = \hat{y} - \alpha\hat{y} = \hat{y}\cdot(1-\alpha). \quad (3.61)$$

Так как ВНП пропорционален ВВП, который соответствует $\hat{y}$, то темпы сходимости ВНП и ВВП одинаковы. Это говорит о том, что данные по ВВП, вероятно, будут генерировать те же темпы сходимости, что и данные по ВНП, или иные, измеряющие национальный доход. Некоторое подтверждение этого прогноза можно найти в работе Barro and Sala-i-Martin (1991), в которой проведено исследование по США: темпы сходимости почти идентичны, как для валового продукта штата на душу населения, так и для подушевого дохода штата.

Согласно модели, разрыв между ВВП и ВНП в кредитно-ограниченной открытой экономике больше: около 20–25% ВВП при принятых ранее значениях параметров. Дефицит текущего баланса, который равен изменению физического капитала, соответственно тоже велик. Среди развивающихся стран достаточно сложно найти такую, для которой значения разрыва между ВВП и ВНП и дефицит торгового баланса были бы такими большими[1]. Мы можем согласовать теорию с такими наблюдениями, заметив, во-первых, что многие развивающиеся страны недостаточно продуктивны, чтобы быть ограниченными в кредитах, и, во-вторых, что обеспечение международных долговых обязательств может быть весьма незначительным по сравнению с физическим капиталом. Если бы коэффициент α был меньше, чем 0,3, то предсказанное теорией соотношение между ВВП ВНП разрывом и дефицитом текущего баланса было бы соответственно меньше.

Введение кредитного ограничения уничтожило некоторые противоречащие действительности выводы модели с открытой экономикой и совершенной мобильностью капитала; в частности, скорости

[1]Одним из контрпримеров является Сингапур: дефицит его торгового баланса был в районе 10 20% ВВП на протяжении 1970-х гг. (International Monetary Fund, 1991).

сходимости основных фондов и выпуска более не бесконечны. Рассмотрим, тем не менее, что произойдет, если страны различаются по степени нетерпеливости, которая представлена комбинацией параметров предпочтения $\rho_i + \theta_i x$. В случае совершенных рынков капитала мы ранее обнаружили, что все, кроме самой терпеливой страны, развиваются по траектории, на которой $\hat{c}$ стремится к 0. В модели с кредитным ограничением прогноз иной: все, кроме самой терпеливой страны, в конце концов, достигнут ситуации, в которой резиденты эффективно ограничены на международном кредитном рынке. Это кредитное ограничение означает, что $\hat{c}$ стремится к положительной константе, более привлекательной асимптоте, нежели 0. Однако есть и беспокоящий результат: все страны, кроме самой терпеливой, должны быть, в конце концов, ограничены в кредитовании. Для того чтобы избежать такого результата, нам следует рассмотреть модели, в которых эффективная ставка временного предпочтения $\rho_i + \theta_i x$ является переменной величиной. В следующем разделе рассмотрены модели этого типа.

Издержки ввода при накоплении человеческого капитала. Одной из потенциальных проблем с моделью, представленной в данном разделе, является бесконечность скорости сходимости для экономик, которые не имеют ограничений на международном рынке кредитов. Duczynski (2000) рассчитал чистые внешние активы 113 стран и 50 штатов США и нашел, что 21 страна и около половины штатов США имеют положительные значения этих величин, так что едва ли они имеют ограничения на заимствования. Однако скорость сходимости этих экономик не бесконечна. Этот факт наводит на мысль, что описанного в предыдущем разделе механизма кредитного ограничения недостаточно для объяснения такой медленной сходимости, какая обнаруживается в реальных данных.

Потенциальной альтернативой или дополняющим решением является наличие издержек ввода, которые мы обсуждали ранее для закрытой экономики. Если мы снова будем различать капиталы человеческий и физический, то можно ожидать, что издержки ввода могли бы быть особенно значимы для прироста человеческого капитала в процессе получения образования. Получение образования вообще-то требует значительных затрат времени, а ускорение учебного процесса аналогично быстрому убыванию норм доходности. Для учета этих эффектов мы сейчас построим модель с совершенной международной мобильностью капитала, в которой издержки ввода воздействуют только на накопление человеческого капитала.

Фирмы и индивидуумы имеют совершенный доступ к мировым финансовым рынкам, и процентная ставка равна константе r. Рост потребления, как и ранее, определяется следующим уравнением:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho).$$

Допустим, что производственная функция имеет вид функции Кобба–Дугласа с физическим и человеческим капиталами:

$$Y = AK^{\alpha}H^{\eta}\hat{L}^{1-\alpha-\eta}. \tag{3.62}$$

Предположим, что в физический капитал можно инвестировать без издержек ввода и что на каждую единицу инвестиций в человеческий капитал фирмам следует платить $\phi(I_h/H)$ единиц выпуска. Следуя предположениям разд. 3.2, имеем:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(\cdot) > 0 \quad \text{и} \quad 2\phi'(\cdot) + \frac{I_h}{H} \cdot \phi''(\cdot) > 0.$$

Фирмы максимизируют текущую дисконтированную стоимость будущих чистых денежных потоков:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-r(t)\cdot t} \cdot \left\{ AK^{\alpha}H^{\eta}\hat{L}^{1-\alpha-\eta} - wL - I_k - I_h \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{I_h}{H}\right)\right]\right\} dt \tag{3.63}$$

при двух ограничениях накопления:

$$\dot{K} = I_k - \delta K \tag{3.64}$$

и

$$\dot{H} = I_h - \delta H. \tag{3.65}$$

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$J = e^{-r(t)\cdot t} \cdot \left\{ AK^{\alpha}H^{\eta}\hat{L}^{1-\alpha-\eta} - wL - I_k - I_h \cdot \left[1 + \phi\left(\frac{I_h}{H}\right)\right]\right\} +$$
$$+ v_k \cdot (I_k - \delta K) + v_h \cdot (I_h - \delta H), \tag{3.66}$$

где v_k – теневая цена, связанная с физическим капиталом, и v_h — теневая цена, связанная с человеческим капиталом. Повторяя анализ разд. 2.3, мы можем записать приведенные к текущему времени теневые цены

$$q_k = e^{rt} \cdot v_k \quad \text{и} \quad q_h = e^{rt} \cdot v_h.$$

После определения условий первого порядка[1)] и, используя приведенные теневые цены, находим, что $q_k = 1$ в каждый момент времени, что влечет

$$\alpha \cdot \left(\frac{\hat{y}}{\hat{k}}\right) = r + \delta. \tag{3.67}$$

Другими словами, предельный продукт физического капитала (который суть капитальный товар, не обремененный издержками ввода) равен процентной ставке плюс амортизация. Из этого равенства следует взаимно-однозначное отношение между $\hat{k}$ и $\hat{h}$, задаваемое уравнением

$$\hat{k} = (\hat{h})^{\eta/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\alpha A}{r+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.68}$$

Условие первого порядка относительно I_h влечет

$$q_h = 1 + \phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{h}}\right) + \frac{\hat{i}}{\hat{h}} \cdot \phi'\left(\frac{\hat{i}}{\hat{h}}\right), \tag{3.69}$$

где $\hat{i}_h = I_h/\hat{L}$ — инвестиции в человеческий капитал на единицу эффективного труда. Это выражение можно обратить, для того чтобы выразить норму инвестирования в человеческий капитал как монотонную функцию теневой цены человеческого капитала q_h:

$$\frac{\hat{i}}{\hat{h}} = \psi(q_h) \tag{3.70}$$

с $\psi'(\cdot) > 0$. Мы можем подставить этот результат в уравнение накопления человеческого капитала и получить

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{i}_h - (\delta + n + x) \cdot \hat{h} = \psi(q_h) \cdot \hat{h} - (\delta + n + x) \cdot \hat{h}. \tag{3.71}$$

Из уравнения первого порядка относительно $\hat{h}$ имеем динамическое уравнение для q_h:

$$\dot{q}_h = (r + \delta) \cdot q_h - \eta \cdot \frac{\hat{y}}{\hat{h}} - [\psi(q_h)]^2 \cdot \phi'[\psi(q_h)]. \tag{3.72}$$

[1)] Условия первого порядка относительно I_k, K, I_h и H имеют вид, соответственно:
(i) $\nu_k = e^{-\bar{r}(t)t}$;
(ii) $-\dot{\nu}_k = e^{-\bar{r}(t)t} \cdot \alpha \cdot (\hat{y}/\hat{k}) - \nu_k\delta$;
(iii) $e^{-\bar{r}(t)t} \cdot \left(1 + \phi(\cdot) + \frac{\hat{i}_h}{\hat{h}} \cdot \phi'(\cdot)\right) = \nu_h$;
(iv) $-\dot{\nu}_h = e^{-\bar{r}(t)t} \cdot \eta \cdot (\hat{y}/\hat{h}) - \nu_h\delta$.
Заметим, что из (i) следует $q_k = 1$ и, следовательно, $\dot{q}_k = 0$. Используя этот результат и уравнение (ii), получаем $\alpha \cdot (\hat{y}/\hat{k}) = r + \delta$.

Используя уравнение (3.68), получаем

$$\dot{q}_h = (r+\delta)\cdot q_h - \tilde{A}\cdot h^{-(1-\alpha-\eta)/(1-\alpha)} - [\psi(q_h)]^2\cdot\phi'[\psi(q_h)], \qquad (3.73)$$

где $\tilde{A}$ — функция констант.

Уравнения (3.71) и (3.73) составляют систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Фазовая диаграмма изображена на рис. 3.4. Заметим, что $\dfrac{d\hat{h}}{dt} = 0$ задает горизонтальную прямую на уровне

$$q_h^* = 1 + \phi(\delta+n+x) + (\delta+n+x)\cdot\phi'(\delta+n+x).$$

Стрелки выше этой прямой направлены на восток, а стрелки ниже — на запад. Кривая $\dot{q}_h$ имеет наклон вверх при больших значениях q_h, но после пересечения линии $d\hat{h}/dt = 0$ наклоняется вниз. Система имеет седловую устойчивость, причем устойчивая ветвь наклонена вниз. Если экономика начинает развитие со слишком малым резервом человеческого капитала (т. е. слева от стационарного состояния), то система не сместится мгновенно в стационарное состояние, т. е. скорость сходимости не равна бесконечности. Вместо этого экономика медленно сходится

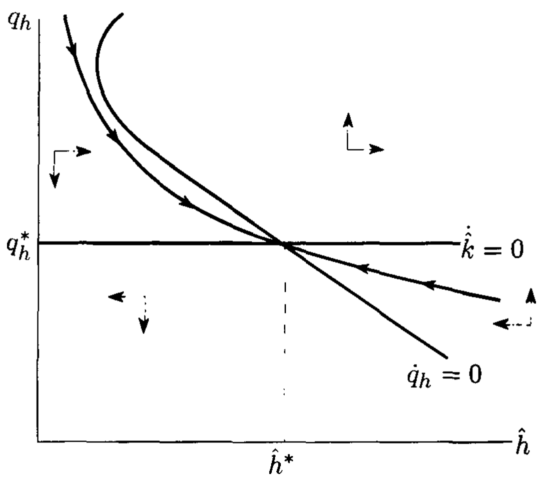


Рис. 3.4. Фазовая диаграмма для модели с физическим и человеческим капиталами, издержками ввода при накоплении человеческого капитала. Фазовая диаграмма представлена в пространстве $(q_h, \hat{h})$. График $\dot{\hat{h}} = 0$ является горизонтальной прямой на уровне $1+\phi(\delta+n+x)+(\delta+n+x)\cdot\phi'(\delta+n+x)$. Кривая $\dot{q}_h = 0$ имеет наклон вниз вблизи стационарного состояния. Система имеет седловую устойчивость, и устойчивая ветвь имеет нисходящий наклон

к стационарному состоянию по устойчивой ветви. Мгновенное перемещение в стационарное состояние потребовало бы бесконечного объема инвестиций в человеческий капитал. Соответствующие издержки ввода были бы невероятно большими и, следовательно, неоптимальными. Итак, накопление человеческого капитала происходит постепенно, а экономика сходится медленно к стационарному состоянию. При увеличении h резерв физического капитала растет согласно (3.68). Из этого следует, что уровень ВВП также сходится медленно.

Kremer and Thompson (1998) проанализировали аналогичную модель, в которой производственная функция зависела от человеческого капитала молодых и старых. Они показали, что эти два человеческих фактора дополняют друг друга (представьте себе футбольную команду, в которой человеческий капитал «стариков», тренеров, дополняет человеческий капитал «молодых» игроков). В этом контексте, если человеческий капитал первого поколения невелик, то даже если капитал совершенно мобилен, молодые люди не будут заимствовать в целях увеличения своего резерва человеческого капитала до стационарного уровня, потому что производительность молодых не будет достаточно высокой, если у стариков человеческого капитала мало. Следовательно, процесс накопления человеческого капитала постепенен. Механизм, предложенный Kremer and Thompson (1998), важен тем, что представляет издержки ввода при накоплении человеческого капитала.

3.5. Вариации параметров предпочтения

Теперь рассмотрим, насколько возможно исключить проблемные следствия модели Рамсея открытой экономики, если допустить варьирование параметров предпочтения p_i и θ_i. Идея, которая берет начало еще от Uzawa (1968), состоит в том, что ставка временного предпочтения и склонность к межвременному замещению потребления могут зависеть от уровня благосостояния домохозяйства или уровня потребления, и, таким образом, могут изменяться по мере изменения a_i и c_i.

Вернемся к модели с открытой экономикой без ограничений на кредиты. Ключевым свойством этой модели является то, что страны с более высокими значениями членов временного предпочтения $\rho_i + \theta_i x > r$ развиваются по траектории, на которой $\hat{a}_i(t)$ становится отрицательным, а $\hat{c}_i(t)$ падает до нуля. Для того чтобы избежать такого нехорошего результата, можно допустить, что $\rho_i + \theta_i x$ уменьшается при снижении $\hat{a}_i(t)$ и $\hat{c}_i(t)$. Другими словами, странам или индивидуумам следует становиться более терпеливыми, по мере того как они беднеют.

Uzawa (1968) получает искомый результат путем допущения, что ρ_i — возрастающая функция $c_i(t)$. Однако этот способ не очень привлекателен, так как непонятно, почему люди должны поднимать свои ставки временного предпочтения при росте уровня потребления[1].

Мы могли бы также получить искомый результат, допустив, что люди становятся менее склонными к межвременному замещению (т. е. θ_i увеличивается) по мере роста уровня потребления. Впрочем, обычно допущение как раз противоположно. Мы показали в уравнении (2.8), что эффективный член временного предпочтения содержит эластичность предельной полезности со знаком минус, т. е.

$$-\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}.$$

В описании, которое мы использовали до сих пор, величина эластичности постоянна и равна θ_i. Однако иногда вид функции полезности модифицируется так, чтобы эластичность была переменной, путем введения минимального уровня потребления:

$$u(c_i) = \frac{(c_i - \bar{c}_i)^{1-\theta_i} - 1}{1 - \theta_i}, \tag{3.74}$$

где $\bar{c}_i > 0$ — константа прожиточного минимума (этот вид функции полезности называется функцией Стоуна—Гиэри, в честь авторов соответствующих работ Stone, 1954, и Geary, 1950–1951). Из уравнения (3.74) следует, что величина эластичности предельной полезности равна

$$\frac{\theta_i c_i}{(c_i - \bar{c}_i)},$$

что равно θ_i при $\bar{c}_i = 0$, но при $\bar{c}_i > 0$ уменьшается по мере роста c_i. Видоизменение функции полезности приводит к тому, что значение эффективного временного предпочтения уменьшается при уменьшении $c_i(t)$, т. е. это значение изменяется в неверном направлении относительно перспективы разрешения проблем, возникающих в модели открытой экономики.

Более реалистичные результаты получаются в модели, в которой параметры ρ_i, и θ_i предполагаются постоянными для каждой страны

[1] Mulligan (1993) показал, что если степень альтруизма зависит от количества времени, которое родители проводят со своими детьми, то люди с высокими доходами будут менее альтруистичны, потому что альтернативная стоимость траты времени на детей высока. Отсюда следует, что богатые люди будут иметь высокие дисконтирующие ставки.

(или семьи), но в которой допускаются эффекты конечных горизонтов. В первых моделях этого типа, предложенных в работах Samuelson (1958) и Diamond (1956), предполагается, что люди живут фиксированное количество дискретных периодов, таких как детство и зрелость. Период зрелости для одного поколения пересекается с периодом детства следующего; следовательно, мы имеем дело с обычной схемой модели пересекающихся поколений (ПП-модель). Индивидуумы в этих моделях имеют конечные горизонты планирования (потому что они живут на протяжении только двух периодов и, согласно предположению, не беспокоятся о благосостоянии своих потомков), но экономика существует бесконечно. Хотя схема ПП-модели охватывает все эффекты конечных горизонтов, один недостаток схемы все-таки имеется - условия равновесия оказываются слишком громоздкими для получения аналитических решений в тех случаях, которые мы бы хотели рассмотреть для сравнения с другими моделями.

В работе Blanchard (1985) идея конечного горизонта поддерживается в рамках более удобной модели, в которой люди вымирают случайным образом согласно закону Пуассона. Основной вывод этой модели заключается в том, что совокупное потребление изменяется со временем таким образом, как если бы временное предпочтение каждого индивидуума имело положительную зависимость от $a_i(t)$. Впрочем, этот результат получен путем агрегирования по всем индивидуумам, которые однородны по возрасту (и, следовательно, по активам и потреблению), а не путем изменений параметров предпочтения индивидуумов. Для того чтобы получить эти результаты, мы сначала опишем структуру модели Бланшарда, затем применим модель к закрытой экономике, а затем расширим наш анализ на открытую экономику. В приложении (разд. 3.8) содержится анализ соответствующих моделей пересекающихся поколений.

3.6. Экономический рост в модели с конечным временным горизонтом

3.6.1. Предпочтения в модели с конечным временным горизонтом

В предыдущем исследовании мы предполагали, что семейные династии живут вечно и что домохозяйства спланированы с учетом бесконечного временного горизонта. Теперь мы хотим допустить возможность завершения существования династий в конечное время. Это завершение существования может заключаться в смерти тех взрослых, которые не оставили потомков и, таким образом, не заботятся ни о чем, что может быть после их смерти. Или же можно считать, что конечно-живущие родители имеют шанс достичь такого положения в обществе, в котором они не связаны со своими детьми посредством каких-либо действенных трансфертов между поколениями.

Мы считаем, что «смерть» — это завершение семейной династии, хотя эта смерть не обязательно соответствует чьей-либо смерти буквально. Пусть p будет вероятностью смерти в единицу времени, так что индивидуум (или домохозяйство) рождается в момент времени j и доживает до момента времени $t \geqslant j$ с вероятностью $e^{-p\cdot(t-j)}$. Ключевое предположение, которое делает агрегирование приемлемым для последующего анализа, заключается в том, что p не зависит от возраста. Если думать о буквальной смерти индивидуума, то это предположение нереалистично, но в случае прекращения династии вполне приемлемо.

Вероятность смерти в момент времени t равна $1 - e^{-p\cdot(t-j)}$, так что плотность вероятности смерти в момент t есть производная этого выражения, равная $pe^{-p\cdot(t-j)}$. Ожидаемую продолжительность жизни можно рассчитать, используя эту плотность распределения, и она равна $1/p$. Таким образом, чем больше p, тем меньше ожидаемая продолжительность жизни, что делает эффект конечного временного горизонта более сильным.

Предположим, как и ранее, что население растет с постоянным темпом прироста n, так что $L(t) = e^{nt}$ - совокупное население. Тогда размер группы, родившейся в момент времени t, должен быть равен $(p+n)\cdot e^{nt}$; т. е. рождается достаточное количество людей или домохозяйств, чтобы покрыть число умерших pe^{nt} и обеспечить чистый рост ne^{nt}.

Как и ранее, безрисковая процентная ставка на активы равна $r(t)$. Теперь нам нужно рассмотреть вопрос о распределении активов тех людей и домохозяйств, которые умерли. В модели с бесконечным временным горизонтом эти активы полностью переходили потомкам в форме трансфертов между поколениями. Эти трансферты мотивированы альтруистическими связями, которые достаточно сильны, чтобы люди не реализовывали углового решения в виде нулевых трансфертов. Но полная идея «смерти» в модели с конечным временным горизонтом заключается в том, что эти связи не работают. Мы могли бы предположить, что активы переходят детям в виде неожиданных наследств или неожиданных трансфертов обществу в целом. Однако если люди действительно не заинтересованы в том, что будет после их смерти, — что является центральной идеей моделей с конечным временным горизонтом, — то они могли бы поступить проще, использовав рынки периодических выплат. Кроме того, если мы допустим, что люди могут умирать с долгами и без потомков, берущих на себя обязательства по долгу, то кредиторы будут требовать повышения процентной ставки r, чтобы покрыть возможность смерти заемщика.

Следуя Yaari (1965) и Blanchard (1985), предположим, что все займы застрахованы методами страхования жизни. Если индивидуум жив, то он платит процентную ставку r плюс страховую премию по займу, рассчитанную исходя из страхования жизни индивидуума. Если индивидуум умирает, имея долг, то страховка оплачивает заём. В силу того что вероятность смерти в единицу времени — это p, необходимая премия как раз и равна p. То есть совокупная ставка оплаты займа в процессе жизни равна $r + p$. С точки зрения компании, страхующей жизнь, премия по ставке p, как раз покрывает ожидаемые выплаты по полисам заемщиков, которые скончались. Подобным же образом кредиторы могут получать ежегодные платежи в размере $r+p$, если индивидуум жив, и ноль, если индивидуум умер. С точки зрения компании, получающей ежегодные платежи, дополнительный платеж по ставке p просто уравновешивает ожидаемые нулевые поступления от людей, которые умерли. С точки же зрения индивидуумов с конечными временными горизонтами, норма доходности ежегодных выплат (при условии дожития) $r + p$ более привлекательна, нежели безрисковая норма доходности r. Таким образом, все активы можно было бы перевести в форму периодических платежей[1].

Так как страхование жизни и рынки ренты в полной мере используются в странах с большим населением, то совокупность активов $p \cdot a(t)$, высвобожденных умершими людьми, совпадает с дополнительной доходностью (вдобавок к безрисковой ставке r) для живущих людей. Следовательно, страховые и рентные компании безубыточны, так что мы полностью учли распределение активов после смерти. Отсюда также следует, что обоснованная ставка доходности для живущих индивидуумов (как для заемщиков, так и для кредиторов) равна $r + p$, а не r.

[1] Экономисты зачастую отклоняют такую возможность, считая, что периодические выплаты количественно не играют особой роли в реальном мире, в отличие от частных и правительственных пенсий, являющихся социальным страхованием. В любом случае такое ограниченное использование периодических платежей может быть индикатором того, что модель с конечным временным горизонтом, в которой предполагается альтруистическая взаимосвязь между поколениями, является вполне удовлетворительной. В этой модели спрос на периодические платежи мал, так что и наблюдаемый совокупный объем этих платежей также будет незначительным.

Пусть $c(j, v)$ — потребление и $a(j, v)$ — активы в момент времени v индивидуума, родившегося в момент времени $j \leqslant v$. Мы предполагаем, что производительность не зависит от возраста, так что ставка заработной платы $w(v)$ одинакова для всех $j \leqslant v$. Начиная с текущего момента времени t, домохозяйства максимизируют ожидаемую полезность, задаваемую уравнением

$$E_t U = E_t \left[\int_t^\infty \log[c(j, v)] \cdot e^{-\rho(v-t)}\, dv \right], \tag{3.75}$$

где мы предположили $u(c) = \log(c)$, что соответствует $\theta = 1$ в уравнении (2.9). Конечно, логарифмическая полезность весьма удобна, но мы можем также легко обобщить результаты относительно стационарного состояния на случай $\theta \neq 1$. (Анализ переходной динамики также возможен, но при $\theta \neq 1$ слишком громоздок.)

Уравнение (3.75) отличается от уравнения (2.1) модели Рамсея тем, что отсутствует коэффициент e^{nt}, отвечающий за рост населения и умножающий подушевую полезность. Допущением в данной модели с конечным временным горизонтом является то, что люди не имеют никакого веса в функции полезности своих потомков или в бюджетном ограничении, которое мы рассмотрим в следующем параграфе. Поскольку $e^{-p(v-t)}$ вероятность дожития до момента времени v, при условии нахождения среди живых в более ранний момент времени t, то ожидаемая полезность принимает вид

$$E_t U = \int_t^\infty \log[c(j, v)] \cdot e^{-(\rho-p)(v-t)}\, dv. \tag{3.76}$$

Таким образом, $\rho + p$ эффективная ставка временного предпочтения в контексте неопределенного времени жизни.

Ограничение на бюджетный поток для домохозяйства теперь имеет вид

$$\frac{da(j, v)}{dv} = [r(v) + p] \cdot a(j, v) + w(v) - c(j, v). \tag{3.77}$$

Каждое домохозяйство максимизирует ожидаемую полезность (3.76) при ограничении (3.77) и объеме начальных активов $a(j, j)$. Условие первого порядка для потребления такое же, как и ранее (уравнение (2.10) с $\theta = 1$):

$$\frac{dc(j, t)/dt}{c(j, t)} = r - \rho. \tag{3.78}$$

Заметим, что вероятность смерти p сведена на нет, так как она воздействует одинаково как на эффективную ставку временного предпочтения $\rho + p$, так и на ставку доходности $r + p$.

Условие трансверсальности теперь имеет вид

$$\lim_{v\to\infty}\left[e^{-[r(t,v)+p]\cdot(v-t)}\cdot a(j,v)\right] = 0, \tag{3.79}$$

где $\bar{r}(t,v)$ – «средняя» процентная ставка между моментами времени t и v (см. уравнение (2.12), которое соответствует промежутку времени от 0 до t). Из уравнений (3.77) и (3.79) вытекает следующий вид пожизненного бюджетного ограничения домохозяйства:

$$\int_t^\infty c(j,v)\cdot e^{-[\bar{r}(t,v)+p]\cdot(v-t)}\,dv = a(j,v) + \tilde{w}(t), \tag{3.80}$$

где

$$\tilde{w}(t) = \int_t^\infty w(v)\cdot e^{-[\bar{r}(t,v)+p]\cdot(v-t)}\,dv$$

– приведенное значение трудового дохода. Уравнение (3.80) соответствует уравнению (2.13) в модели с бесконечным временным горизонтом.

Мы можем также использовать уравнения (3.78) и (3.80), для того чтобы определить потребление как функцию «богатства»:

$$c(j,t) = (\rho + p)\cdot[a(j,t) + \tilde{w}(t)], \tag{3.81}$$

которая соответствует уравнениям (2.14) и (2.15) (с $\theta = 1$) в модели с бесконечным временным горизонтом. Упрощение по сравнению с логарифмической полезностью здесь в том, что предельная склонность к растрачиванию на потребление личного капитала постоянна и равна $\rho + p$.

Агрегированные переменные $C(t)$, $A(t)$ и $\tilde{W}(t)$ получаются суммированием по группам, проиндексированным временем рождения $j \leqslant t$. Каждая группа взвешена по своему размеру, который равен начальному размеру $(p+n)\cdot e^{nj}$, умноженному на долю $e^{-p\cdot(t-j)}$ оставшихся в живых на момент $t \geqslant j$[1]. Следовательно, агрегированные потребление

[1] Мы все время предполагаем, что возрастная структура населения сохраняется такой же, что и в стационарном состоянии. Однако в данном контексте возрастная структура не существенна, потому что вероятность смерти p и ставка заработной платы w не зависят от возраста.

и активы задаются выражениями:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} c(j,t) \cdot (p+n) \cdot e^{nj} e^{-p(t-j)} dj; \tag{3.82}$$

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} a(j,t) \cdot (p+n) \cdot e^{nj} e^{-p(t-j)} dj. \tag{3.83}$$

Так как ставки заработной платы не зависят от возраста, агрегат текущего значения ставки заработной платы имеет вид

$$\tilde{W} = \tilde{w}(t) \cdot e^{nt} = e^{nt} \cdot \int_{t}^{\infty} w(v) \cdot e^{-[r(t,v)+p]\cdot(v-t)}\, dv. \tag{3.84}$$

Поскольку склонность к растрачиванию на потребление личного капитала в уравнении (3.81) равна $\rho + p$, т. е. не зависит от возраста j, агрегированное соотношение получается таким же, как и для индивидуума:

$$C(t) = (\rho + p) \cdot [A(t) + \tilde{W}(t)]. \tag{3.85}$$

Мы хотим использовать уравнение (3.82) для вычисления агрегированного аналога уравнения (3.78), которое определяет изменение со временем индивидуального потребления. Изменение со временем агрегированного потребления $\dot{C}$ зависит от изменения со временем агрегированного личного капитала $\dot{A} + (d\tilde{W}/dt)$.

Мы можем вычислить $\dot{A}$ дифференцированием уравнения (3.83) по t. В результате имеем

$$\dot{A} = r(t) \cdot A(t) + w(t) \cdot e^{nt} - C(t), \tag{3.86}$$

где $w(t) \cdot e^{nt}$ совокупный заработок, который платится в момент времени t. При выводе уравнения (3.86) использовано бюджетное ограничение индивидуума (3.77) и условие $a(j,j) = 0$, т. е. индивидуумы рождаются с нулевыми активами. Заметим, что агрегированное уравнение соответствует уравнению для индивидуума (3.77), за исключением того, что ставка доходности всех активов равна r, в то время как для активов индивидуума (живого) ставка доходности равна $r + p$.

Мы можем также вычислить изменение в $\tilde{W}$ дифференцированием уравнения (3.84) по t. Результат таков:

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} = [r(t) + p + n] \cdot \tilde{W} - w(t) \cdot e^{nt}. \tag{3.87}$$

Последний член в правой части уравнения равен агрегированной заработной плате, которая, по сути, является дивидендом на совокупность активов $\tilde{W}(t)$. Первый член в правой части уравнения отражает дисконтирование индивидуальной заработной платы по ставке $r(t)+p$ (так как заработанные доходы исчезают, когда индивидуум умирает) и рост населения с темпом прироста n.

Мы можем использовать уравнения (3.81)–(3.87) для определения изменения со временем агрегированного потребления $\dot{C}$. В результате для темпа прироста потребления на душу имеем[1)]

$$\frac{\dot{c}}{c}=r(t)-\rho-(p+n)(\rho+p)\cdot\frac{a(t)}{c(t)}. \tag{3.88}$$

Заметим, что $c(t)$ относится к совокупному потреблению, деленному на совокупное население, а не к потреблению живущего индивидуума. Изменение потребления живущего индивидуума $c(j,t)$ дается уравнением (3.78).

Новый ключевой элемент в уравнении (3.88) — это последний член в правой части.

$$\frac{(p+n)\cdot(\rho+p)\cdot a(t)}{c(t)}.$$

Так как $\rho+p$ — склонность к растрачиванию на потребление личного капитала, то $(\rho+p)\cdot a(t)$ — растрата активов $a(t)$ на потребление одним индивидуумом. Новые люди появляются в экономике с темпом прироста $\rho+n$. В силу того что эти новые люди прибывают с нулевыми активами, вливание этих людей снижает среднее потребление на душу на величину $(p+n)\cdot(\rho+p)\cdot a(t)$. В итоге, деление на $c(t)$ дает нам вклад этого члена в снижение темпа прироста подушевого потребления $\dot{c}/c$.

Еще раз заметим, что ключевой особенностью здесь является прибытие новых индивидуумов (с нулевыми активами), а не уход старых индивидуумов. Так что, как отмечается в работе Weil (1989), основные результаты получаются в предположении бесконечного времени жизни ($p=0$) и рождения новых людей ($n>0$). Однако достаточно существенным является то, что старые люди не заботятся о молодых в смысле альтруистической взаимосвязи, предполагавшейся в моделях с бесконечным временным горизонтом гл. 2. Таким образом, мы можем

---

1) Для $\theta\neq 1$ этот результат можно обобщить, если $r(t)$ постоянна и равна r:

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\cdot(r-\rho)-\frac{1}{\theta}\cdot[\rho+\theta p-(1-\theta)\cdot r]\cdot(p+n)\cdot\frac{a(t)}{c(t)}.$$

рассматривать новых людей как нелюбимых детей и иммигрантов (см. Weil, 1989). Иммигрантов мы рассмотрим отдельно в гл. 9.

3.6.2. Модель закрытой экономики с конечным временным горизонтом

Вернемся к модели с одним типом капитала k. Для закрытой экономики $\hat{a} = \hat{k}$, $f'(\hat{k}) = r + \delta$, и $\hat{w} = f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})$. Тогда формула, из которой определяется $\dot{\hat{k}}$, такая же, что и в модели с бесконечным временным горизонтом (см. уравнение (2.23)):

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}. \tag{3.89}$$

Уравнение (3.88) с учетом того, что $\hat{a} = \hat{k}$ и $r = f'(\hat{k}) - \delta$, преобразуется к виду

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = f'(\hat{k}) - (\delta + \rho + x) - (p + n) \cdot (\rho + p) \cdot \frac{\hat{k}}{\hat{c}}. \tag{3.90}$$

На рис. 3.5 представлена фазовая диаграмма в пространстве $\hat{k}$ и $\hat{c}$. Вогнутая сплошная кривая, которая соответствует $\dot{\hat{k}} = 0$, такая же, как и в случае модели с бесконечным временным горизонтом (см. рис. 2.1). Вертикальная прямая в значении $\hat{k}^*$, где $\hat{k}^*$ определяется из

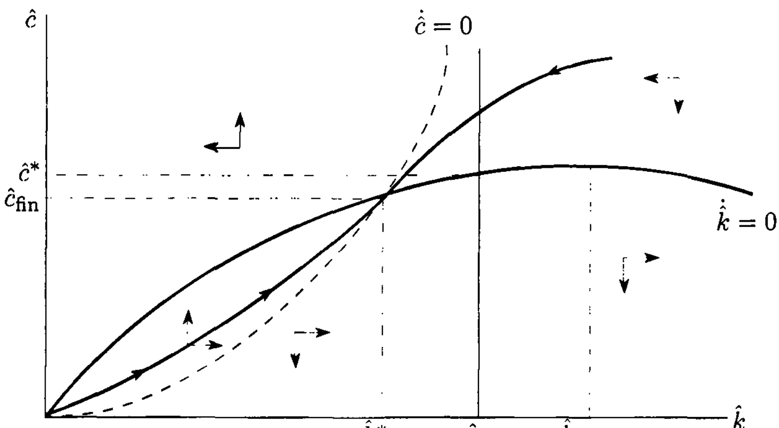


Рис. 3.5. Динамика в закрытой экономике с конечным временным горизонтом. Кривая $\dot{\hat{k}} = 0$ имеет форму холма. Кривая $\dot{\hat{c}} = 0$ проходит через начало координат, имеет наклон вверх и вертикальную асимптоту $\hat{k} = \hat{k}^*$. Форма устойчивой ветви и, следовательно, переходная динамика данной модели такая же, как и в модели Рамсея

уравнения $f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + x$, это стационарное значение в модели с бесконечным временным горизонтом (если $\theta = 1$). Член, содержащий $\hat{k}/\hat{c}$ в уравнении (3.90), эффективно добавляется к ставке временного предпочтения ρ, если $p+n > 0$. Пунктирная кривая на рис. 3.5, соответствующая $\dot{\hat{c}} = 0$, лежит строго слева от вертикальной прямой. По мере того как отношение $\hat{c}$ к $\hat{k}$ растет вдоль пунктирной кривой, величина того члена в выражении, который содержит $\hat{k}/\hat{c}$, уменьшается до 0, так что пунктирная кривая асимптотически приближается к вертикальной прямой.

Равновесные значения для модели закрытой экономики с конечным временным горизонтом, определяемые как пересечение сплошной и пунктирной кривых, на рис. 3.5 обозначены $\hat{k}^*_{\text{fin}}$ и $\hat{c}^*_{\text{fin}}$. Важным наблюдением здесь является то, что более высокое значение эффективной ставки временного предпочтения приводит в более высокому значению предельного продукта капитала и, следовательно, к меньшему значению отношения капитала к эффективному труду, т. е. $\hat{k}^*_{\text{fin}} < \hat{k}^*$. Соответственно, здесь равновесная процентная ставка более высока, чем для экономики с бесконечным временным горизонтом $r^*_{\text{fin}} > r^* = \rho + x$[1], и потребление на эффективного работника меньше $\hat{c}^*_{\text{fin}} < \hat{c}^*$.

Переход из начального значения $\hat{k}(0)$ в $\hat{k}^*_{\text{fin}}$ такой же, как и в модели с бесконечным временным горизонтом. Если $\hat{k}(0) < \hat{k}^*_{\text{fin}}$, то $\hat{k}$ растет монотонно вдоль сплошной кривой, отмеченной стрелками на рис. 3.5. Динамика других переменных — $\hat{c}$, r и темпов прироста $\hat{k}$, $\hat{y}$ и $\hat{c}$ — такая же, что и в модели с бесконечным временным горизонтом.

Так как $\hat{k}^*_{\text{fin}} < \hat{k}^*$, то $\hat{k}^*_{\text{fin}} < \hat{k}_{\text{gold}}$ – см. рис. 3.5[2]. Следовательно, асимптотическое поведение $\hat{k}$ в модели закрытой экономики с бесконечным временным горизонтом не проявляет того неэффективного избыточного сбережения, которое может возникнуть в модели Солоу—Свэна с произвольной нормой сбережения. В работе Diamond (1965) показано, что пересбережение может возникнуть в двухпериодной модели пересекающихся поколений закрытой экономики. Как показывают наши результаты (основанные на работе Blanchard, 1985), конечность временных горизонтов индивидуумов не является той особенностью модели Даймонда, которая приводит к возможности пересбережения. Более

[1] Мы можем использовать формулу из сноски (1) на с. 242 и показать, что этот результат остается в силе при $\theta \neq 1$, причем в этом случае $r^* = \rho + \theta x$. Также можно показать, что $r^*_{\text{fin}} = \rho + \theta x + p + n$.

[2] В модели с бесконечным временным горизонтом мы использовали условие $\rho > n$ для того, чтобы гарантировать $\hat{k}^* < \hat{k}_{\text{gold}}$. В случае конечного временного горизонта мы все равно считаем, что $\rho > n$.

того, ключевым отличием от модели, которую мы только что проанализировали, является принятая там схема трудовых доходов в течение жизненного цикла. В версии Даймонда ПП-модели заработки положительны в первый (рабочий) период и нулевые во второй (пенсионный) период. Таким образом, в этой модели предполагается, что трудовой доход уменьшается резко на протяжении жизненного цикла, в то время как в рассматриваемой нами модели с конечным временным горизонтом предполагается, что трудовой доход не меняется с возрастом. Схема с уменьшающимся с возрастом трудовым доходом стимулирует дополнительное сбережение; так что при наличии такого эффекта возникновение избыточного сбережения весьма вероятно.

Мы можем расширить модель с конечным временным горизонтом, которую только что проанализировали, посредством допущения возможности уменьшения производительности труда на протяжении жизненного цикла (см. Blanchard, 1985, где приведен анализ этой ситуации). Если производительность труда и, как следствие, ставки заработной платы уменьшаются с возрастом с темпом ω, то уравнение (3.90) принимает вид[1)]

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = f'(\hat{k}) - (\delta + \rho + x - \omega) - (p + n + \omega) \cdot (\rho + p) \cdot \frac{\hat{k}(t)}{\hat{c}(t)}. \tag{3.91}$$

Прямое воздействие величины ω в уравнении (3.91) заключается в вычитании ее из β и, таким образом, в эффективном снижении ставки временного предпочтения. Благодаря такому поощрению, сбережения может быть выполнено $\hat{k}^*_{\text{fin}} > \hat{k}^*$, если ω достаточно велико. Более того, для еще больших значений ω равновесие обладает свойством неэффективного пересбережения: $\hat{k}^*_{\text{fin}} > \hat{k}_{\text{gold}}$.

Хотя неэффективное избыточное сбережение было возможно в экономике с конечным временным горизонтом, в случае если трудовой доход уменьшается на протяжении жизненного цикла (т. е. для достаточно большого ω), на практике не очевидно даже, что мы можем считать ω хотя бы положительной величиной. Если начать рассмотрение индивидуума со времени его первой работы — когда ему, скажем, лет

[1)] Мы, как и ранее, предполагаем, что возрастная структура населения соответствует стационарному распределению. В контексте данной модели, выбор распределения населения по возрастам существенен, так как он влияет на распределение производительностей труда и ставок заработных плат. При указанном распределении возрастов и, следовательно, производительностей труда, совокупный объем эффективного трудового ресурса будет пропорционален $e^{(n+x)t}$ так же, как и в других наших моделях. Так что мерой $\hat{k}$ может быть $Ke^{-(n+x)t}$.

18–21 · то трудовой доход существенно растет с возрастом (и опытом) на протяжении примерно 25 лет, а затем практически неизменен на протяжении следующих 20–25 лет (см. Murphy and Welch, 1990, с. 207). Трудовой доход затем стремительно уменьшается в пенсионный период на протяжении примерно 10–15 лет. Следовательно, в двухпериодной модели пересекающихся поколений игнорируется период роста трудовых доходов, присутствует неверная посылка, что пенсионный период такой же продолжительный, как и рабочий. Обе эти ошибки приводят к завышению склонности к сбережению на протяжении всего жизненного цикла.

Для получения полной картины мы должны решить, как трактовать первые 18 21 лет жизни, которые соответствуют детству и обучению. Если мы будет считать детей независимыми домохозяйствами, то эти 18-21 лет дадут нам трудовые доходы, которые чересчур низки по сравнению со средней величиной на протяжении жизни. Недостача текущего трудового дохода относительно ожидаемого будущего имеет негативное влияние на агрегированную склонность к сбережению: по-видимому, именно этот эффект проявляет себя, когда дети занимают деньги у своих родителей для финансирования потребления.

Мы можем, по здравому размышлению, утверждать, что несовершеннолетних детей не следует рассматривать как отдельные домохозяйства[1]. Но тогда период невысокого трудового дохода детей до 18 21 года приводит при заданном родительском трудовом доходе к низкому трудовому доходу на человека в семье, содержащей зависимых детей. Поэтому низкий уровень детского трудового дохода побуждает родителей сберегать меньше, чем сберегают люди родительского (т. е. среднего) возраста, не имеющие детей. Таким образом, этот эффект совместно с растущим трудовым доходом взрослых в течение большей части их трудового стажа компенсируют положительный эффект на сбережение от наличия пенсионного периода.

В конце этого обсуждения отметим, что $\omega \approx 0$ (плоский профиль трудового дохода семьи на человека) может быть неплохим первым приближением для определения агрегированной склонности к сбережению. В таком случае наш анализ исключает возможность избыточного

[1]Впрочем, это утверждение является более непреодолимым в модели с бесконечным горизонтом, в которой родительские альтруистические мотивы ведут их к обеспечению своих детей потреблением. В модели с конечным горизонтом, в которой родители, очевидно, не заботятся о своих детях, целесообразность родительской поддержки несовершеннолетних детей понять труднее.

сбережения в модели закрытой экономики с конечным временным горизонтом.

3.6.3. Модель открытой экономики с конечным временным горизонтом

Рассмотрим теперь модель открытой экономики с конечным временным горизонтом, с одним типом капитала k и без ограничений на заимствования. Для удобства мы опустим индекс страны i в обозначениях. Если мировая процентная ставка $r(t)$ равна константе r, то отношение капитала к эффективному труду в отечественной экономике равно константе $(\hat{k}^*)_{\text{open}}$, где

$$f'[(\hat{k}^*)_{\text{open}}] = r + \delta.$$

Следовательно, из этой модели все еще вытекает бесконечная скорость сходимости $\hat{k}$ и $\hat{y}$. Впрочем, поведение $\hat{c}$ и $\hat{a}$ будет более здравым, чем ранее.

Уравнение (3.50) дает изменение в активах:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= f[(\hat{k})_{\text{open}}] - (r+\delta)\cdot[(\hat{k})_{\text{open}} - \hat{a}] - (x+n+\delta)\cdot\hat{a} - \hat{c} = \\ &= (\hat{w}^*)_{\text{open}} + (r-x-n)\cdot\hat{a} - \hat{c},\end{aligned} \tag{3.92}$$

где мы использовали условие

$$f'\left[(\hat{k}^*)_{\text{open}}\right] = (\hat{w}^*)_{\text{open}} + (r+\delta)\cdot(\hat{k}^*)_{\text{open}}.$$

Из уравнения динамики потребления домохозяйства (3.88) следует

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = r - \rho - x - (p+n)\cdot(\rho+p)\cdot\frac{\hat{a}}{\hat{c}}. \tag{3.93}$$

На рис. 3.6 показана фазовая диаграмма в пространстве $(\hat{a},\hat{c})$, соответствующая уравнениям (3.92) и (3.93). Заметим, что эта диаграмма построена при постоянной ставке r; т. е. мы рассматриваем динамику малой открытой экономики, когда мировая экономика находится в стационарном состоянии. Прямая $\dot{\hat{a}} = 0$, задаваемая уравнением (3.92), пересекает вертикальную ось координат в положительном значении (равном $(\hat{w}^*)_{\text{open}}$) и имеет положительный угол наклона, равный $r-x-n$. Прямая $\dot{\hat{c}} = 0$, задаваемая уравнением (3.93), проходит через начало координат, а угол ее наклона определяется знаком $r-\rho-x$. Последнее выражение положительно в модели закрытой экономики с конечным временным горизонтом, которую мы рассматривали в предыдущем разделе. Теперь же это выражение будет положительным для любой страны, которая владеет положительным объемом активов в стационарном состоянии.

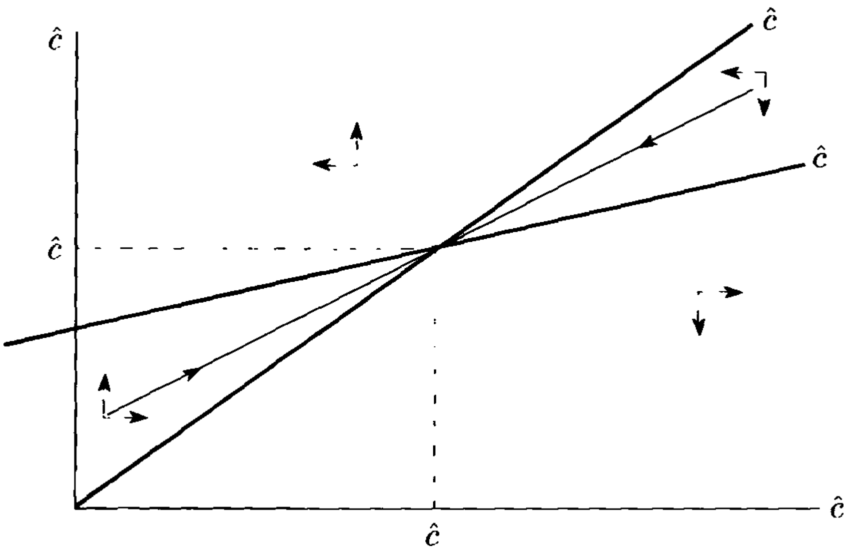


Рис. 3.6. Фазовая диаграмма для открытой экономики с конечным временным горизонтом (при фиксированной процентной ставке). Диаграмма представляет малую открытую экономику, для которой фиксированная процентная ставка задана на мировых рынках капитала. В этом случае две линии являются прямыми, и стационарное состояние в модели имеет седловую устойчивость. Если экономика стартует с низким уровнем активов на эффективного работника, то дальнейшее движение связано с монотонным ростом уровней потребления и активов на эффективного работника

На рис. 3.6 показана прямая $\dot{\hat c} = 0$ с положительным углом наклона, который больше угла наклона прямой $\dot{\hat a} = 0$[1].

На рис. 3.6 отмечены равновесные значения $\hat c$ и $\hat a$ в модели открытой экономики с конечным временным горизонтом. В противоположность модели с бесконечным временным горизонтом, эти равновесные значения положительны и конечны. Этот результат согласуется с $\dot{\hat c} = 0$ в уравнении (3.39), потому что отношение $\hat a/\hat c$ устанавливается таким, что все выражение временного предпочтения $\rho + x + (p + n)\cdot(\rho + p)\cdot \hat a/\hat c$ равно r. Другими словами, ключевым свойством здесь является то, что эффективная ставка временного предпочтения - возрастающая функция аргумента $\hat a/\hat c$.

[1] Если угол наклона кривой $d\hat c/dt = 0$ положителен, но не больше угла наклона кривой $d\hat a/dt = 0$, то можно показать, что $\hat c$ всегда растет. Однако это несовместимо с предположением о постоянстве мировой процентной ставки r.

Бо́льшее значение ρ делает наклон прямой $\dot{\hat{c}} = 0$ на рис. 3.6 более крутым (см. уравнение (3.93)). То есть прямая вращается вокруг начала координат против часовой стрелки. Тогда из рисунка следует, что менее терпеливые страны — с большим значением ρ — имеют меньшие равновесные значения $\hat{a}$ и $\hat{c}$. Из рисунка можно понять также, что равновесные значения $\hat{a}$ и $\hat{c}$ снижаются при возрастании x, p и n. (Они также снижаются при возрастании θ, если $\theta \neq 1$.)

Стационарное значение $\hat{a}$ положительно при различных значениях параметров; т. е. величина долга $\hat{d}$ меньше объема капитала $\hat{k}$. Однако достаточно большое значение ρ (или x, или θ) делает угол наклона прямой $\dot{\hat{c}} = 0$ отрицательным, так что равновесное значение $\hat{a}$ становится отрицательным. Другими словами, для достаточно нетерпеливых экономик имеет место $\hat{d} > \hat{k}$. В такой ситуации заемщик использует часть приведенного значения трудового дохода в качестве кредитного обеспечения.

При заданном r и заданном множестве значений параметров для стран $i = 1, \ldots, M$ мы можем определить соответствующее множество $\hat{a}_i$ из рис. 3.6. Мы можем также определить множество $\hat{k}_i$ из условия $f'(\hat{k}_i) = r + \delta_i$. При полном равновесии в стационарном состоянии значение мировой процентной ставки r равно сумме $\hat{a}_i$ (взвешенных по эффективному трудовому ресурсу каждой страны), деленной на сумму $\hat{k}_i$ (также взвешенных).

Структура модели с конечно-временным горизонтом привлекательна тем, что экономики с различными параметрами могут участвовать на общем рынке капитала без опасения, что $\hat{c}_i$, будет сходиться к нулю для всех стран, кроме наиболее терпеливой. Однако из модели следует, что темпы сходимости $\hat{k}_i$ и $\hat{y}_i$ должны быть бесконечными. Для того чтобы исключить такое следствие модели, мы можем объединить модель с конечным временным горизонтом с анализом кредитных ограничений, который мы рассмотрели в предыдущем разделе. Необходимые результаты можно легко получить, если в модели с кредитными ограничениями заменить $\hat{k}_i$ на капитал в широком смысле $\hat{k}_i + \hat{h}_i$.

При заданном $(\hat{k}_i^*)_{\text{open}}$ страны, которые имеют большие стационарные значения $\hat{a}_i$ (рис. 3.6), приходят к тому, что ограничений на кредитном рынке у них нет, в то время как для стран с малыми значениями $\hat{a}_i$ (особенно для тех, у которых значения отрицательны) ограничения сохраняются. Таким образом, страны с относительно высокими значениями ρ_i, x_i, p_i, n_i и θ_i стремятся к тому, чтобы стать кредитно-ограниченными. Вдобавок к нетерпеливым странам с большими значениями ρ_i и θ_i, кандидатами на кредитную ограниченность являются и страны, которые растут быстрее в стационарном состоянии (большие x_i, и n_i), и страны, в которых высокая смертность (большие p_i).

Из модели открытой экономики с конечным временным горизонтом и с кредитными ограничениями вытекает, что $\hat{c}_i$ и $\hat{a}_i$ остаются положительными для всех стран. К тому же только некоторые страны имеют кредитные ограничения в стационарном состоянии. Как показано в предыдущем разделе, для этих стран, имеющих ограничения, скорости сходимости $\hat{k}_i$ и $\hat{y}_i$ в окрестности стационарного состояния конечны. Для стран, не имеющих ограничений, тем не менее, скорости сходимости $\hat{k}_i$ и $\hat{y}_i$ все еще бесконечны. Для того чтобы исключить такой результат, мы можем вновь рассмотреть издержки ввода, как мы это делали ранее.

3.7. Заключения и выводы

Мы начали с расширения модели Рамсея путем включения в нее налогообложения и правительственных расходов. Налогообложение дохода с капитала привело к снижению прироста основного капитала, а правительственные закупки товаров и услуг привели к вытеснению частного потребления.

Затем мы представили издержки ввода инвестиций, издержки, которые, как мы полагали, могли бы быть особенно важны для аккумулирования человеческого капитала. Эти издержки приводят к конечным скоростям сходимости капитала и конечного продукта, в случае если мировые рынки совершенны и временные горизонты бесконечны. Впрочем, следует согласиться, что издержки ввода не могут сами по себе объяснить ту медленную сходимость, которая наблюдается эмпирически, потому что получающиеся при этом значения q Брейнарда и Тобина нереалистично велики. Более того, модель с издержками ввода не устраняет того загадочного поведения потребления и активов, которое возникает при рассмотрении открытой экономики.

Затем мы взялись за задачу расширения модели Рамсея на открытую экономику, разрешив международные заимствования. Однако такое расширение привело к некоторым нереалистичным результатам: скорости сходимости капитала и конечного продукта были бесконечны и, за исключением самой терпеливой страны, потребление (на единицу эффективного труда) стремилось к нулю, а активы становились отрицательными. Самая же терпеливая страна асимптотически овладевала всем и потребляла почти весь мировой конечный продукт.

Мы рассмотрели несколько модификаций модели Рамсея, чтобы исключить эти парадоксальные результаты. В случае несовершенных международных кредитных рынков бесконечные скорости сходимости капитала и конечного продукта не свойственны странам, которые имеют эффективные ограничения на возможность заимствовать. Более того, активы оставались положительными, а потребление на единицу эффективного труда в этих странах не стремилось к нулю. Однако та модель, которую мы рассматривали, имела нереалистичное следствие, что все, кроме самой терпеливой страны, в конце концов, становятся кредитно-ограниченными.

Далее мы продолжили наш анализ рассмотрением модели, в которой индивидуумы имели конечные временные горизонты и в которой новые индивидуумы приходят в экономику. Аккумулирование активов эффективно поднимало ставку временного предпочтения страны. (Параметры предпочтения для индивидуумов были постоянными; результат был получен путем агрегирования по индивидуумам, которые различались по уровням активов и потребления.) Таким образом, даже без ограничений на кредитном рынке, изменение в эффективной ставке временного предпочтения побуждало самую терпеливую страну не аккумулировать все мировое богатство. Аналогично, относительно нетерпеливые страны не сходились к нулевому потреблению на эффективного работника.

Когда мы объединили структуру с конечным горизонтом с моделью несовершенных кредитных рынков, мы обнаружили, что в долгосрочном равновесии имеется ряд стран, которые не имеют эффективных ограничений на их возможность заимствовать, и имеется другой ряд стран, которые такие ограничения имеют. Эти результаты интересны тем, что многие страны с различными параметрами предпочтений не имели ограничений на международном кредитном рынке. Вдобавок, страны с кредитными ограничениями имели конечные скорости сходимости капитала и конечного продукта. Однако одна проблема осталась — эти скорости сходимости все еще бесконечны для стран без кредитных ограничений. Это последнее нереалистичное следствие может быть исключено, если мы рассмотрим издержки ввода инвестиций, особенно инвестиций в человеческий капитал.

Мы не можем утверждать на данном этапе, что экономисты в достаточной степени удовлетворены моделью Рамсея, чтобы применять ее к открытой экономике. Но тот анализ, который мы привели в данной главе, дает вполне ясное представление обо всех особенностях модели такого типа. В частности, дано объяснение наблюдаемой медленной сходимости капитала и конечного продукта и одновременно удалось избежать нереалистичных выводов относительно поведения потребления и активов.

3.8. *Приложение*. Модели пересекающихся поколений

В основном тексте данной главы мы рассматривали предложенную в работе Blanchard (1985) модель домохозяйств с конечными временными горизонтами. Эта модель, по сути, является простой версией моделей пересекающихся поколений (ПП-модели), которые были впервые предложены в работах Samuelson (1958) и Diamond (1965). В данном приложении описывается структура ПП-моделей и выводятся некоторые следствия из них.

3.8.1. Домохозяйства

В наиболее популярной схеме ПП-модели предполагается, что каждый индивидуум живет только два периода. В первый период люди работают, пока молодые, во второй период люди отдыхают, будучи старыми, затем умирают. Для того чтобы связать это предположение с реальным миром, мы будем подразумевать под периодом (допустим, 30-летним) поколение. Так как люди потребляют в оба периода жизни, им приходится расплачиваться за потребление во втором периоде сбережением в первом периоде (если мы не допускаем трансферты от правительства или от членов других поколений).

Назовем группу людей, родившуюся в период времени t, поколением t. Члены этого поколения молоды в период t и стары в период $t+1$. Следовательно, в течение периода t, молодежь поколения t пересекается со стариками поколения $t-1$. В каждый момент времени живут члены только двух поколений. Основное оправдание за рассмотрение только двух периодов заключается в том, что это упрощает агрегирование потребления и других переменных[1].

Каждый индивидуум максимизирует полезность жизненного цикла, которая зависит от потребления в два периода жизни. Сделаем ключевое предположение, что люди не заботятся о том, что будет после их смерти; в частности, они не альтруистично настроены в отношении своих детей, т. е. не оставляют наследство и не осуществляют иных трансфертов в пользу членов следующих поколений. Допустим, что

---

[1] В работе Blanchard (1985) агрегированная функция потребления достаточно проста, так как индивидуумы всех возрастов имеют одинаковую склонность к растрате богатства на потребление. Агрегированное потребление, таким образом, является простой функцией агрегированного богатства. В ПП-модели индивидуумы разных поколений имеют разные склонности к потреблению и разные уровни богатства. Процедура агрегирования здесь достаточно проста, но лишь за счет того, что только два поколения живут в каждый момент времени.

функция полезности жизненного цикла является дискретным аналогом используемой в модели Рамсея функции:

$$U_t = \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \cdot \left(\frac{c_{2t+1}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right), \tag{3.94}$$

где $\theta > 0$, $\rho > 0$, c_{1t} – потребление поколения t в молодости (т.е. в период t), а c_{2t+1} — потребление поколения t в старости (т. е. в период $t+1$).

Рассмотрим жизненный цикл индивидуума, родившегося в период t. Так как мы считаем, что члены предыдущих поколений не заботятся об этом индивидууме, то от рождения у него нет никаких активов. На протяжении молодости он предлагает одну единицу труда неэластичным образом и получает трудовой доход w_t. Он не работает в старости. Если обозначить s_t объем сбережений в период t, то бюджетное ограничение для периода t имеет вид

$$c_{1t} + s_t = w_t. \tag{3.95}$$

В период $t+1$ индивидуум потребляет предыдущие сбережения плюс приобретенный процент:

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1}) \cdot s_t, \tag{3.96}$$

где r_{t+1} процентная ставка на однопериодовые займы между периодами t и $t+1$.

Уравнение (3.96) реализует идею, что, в силу отсутствия заботы о своих потомках, все предпочитают завершать свою жизнь с нулевыми активами. Если мы разрешаем заимствование $s_t < 0$, то нам также нужно предположить, что люди не могут умереть, будучи должниками.

Каждый индивидуум считает w_t и r_{t+1} заданными, а c_{1t} и s_t (и, следовательно, c_{2t+1}) выбирает таким образом, чтобы максимизировать полезность (3.94) при ограничениях (3.95) и (3.96). Выразим c_{1t} и c_{2t+1} из уравнений (3.95) и (3.96) и подставим их в функцию полезности (3.94), затем найдем условие первого порядка относительно s_t, $\partial U/\partial s_t$, в итоге имеем

$$(s_t)^{-\theta} \cdot (1 + r_{t+1})^{1-\theta} = (1+\rho) \cdot (w_t - s_t)^{-\theta}. \tag{3.97}$$

С учетом уравнений (3.95) и (3.96), из равнения (3.97) имеем

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = \left[\frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho}\right]^{1/\theta}. \tag{3.98}$$

Это выражение является дискретной копией уже встречавшегося нам в уравнении (2.24) модели Рамсея отношения

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{1}{c} \cdot (r - \rho).$$

Из уравнения (3.97) следует, что норма сбережения может быть записана как

$$s_t = \frac{w_t}{\psi_{t+1}}, \tag{3.99}$$

где

$$\psi_{t+1} \equiv \left[1 + (1+\rho)^{1/\theta} \cdot (1+r_{t+1})^{-(1-\theta)/\theta}\right] > 1.$$

Зависимость s_t от w_t и r_{t+1} может быть описана так:

$$s_w \equiv \frac{\partial s_t}{\partial w_t} = \frac{1}{\psi_{t+1}};$$

$$s_r \equiv \frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) \cdot \left[\frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}\right]^{1/\theta} \cdot \frac{s_t}{\psi_{t+1}}.$$

Отметим, что $0 < s_w < 1$; $s_r > 0$, если $\theta < 1$; $s_r < 0$, если $s_r < 0$; и $s_r = 0$, если $\theta = 1$.

3.8.2. Фирмы

Производственная функция фирм обычная, неоклассическая:

$$y_t = f(k_t), \tag{3.100}$$

где $y_t \equiv Y_t/L_t$ и $k_t \equiv K_t/L_t$ – конечный продукт и капитал на одного работника. (Мы упрощаем, игнорируя технологический прогресс, т. е. $x = 0$, так как он не влияет на основные положения данного анализа.) Поскольку каждый молодой индивидуум работает одну единицу времени, то переменная L_t представляет собой общее число молодых людей в экономике. Отметим, что капитал периода t производит в тот же самый период, т. е. нет лага между началом производства и вводом капитала в эксплуатацию. Стандартная максимизация прибыли конкурентными фирмами приводит так же, как и в гл. 2, к равенству чистых предельных продуктов ценам производственных факторов:

$$w_t = f(k_t) - k_t \cdot f'(\hat{k}); \tag{3.101}$$

$$r_t = f'(\hat{k}) - \delta, \tag{3.102}$$

где δ – норма амортизации капитала.

3.8.3. Равновесие

Считаем, что экономика закрыта, так что активы домохозяйств, которыми в начале периода владеют члены старого поколения, равны капиталу. Совокупные чистые инвестиции равны валовому доходу минус валовое потребление:

$$K_{t+1} - K_t = w_t L_t + r_t K_t - c_{1t} L_t - c_{2t} L_{t-1}, \tag{3.103}$$

где L_{t-1} — число людей, родившихся в период $t-1$, которые в период t становятся старыми. Если мы подставим w_t и r_t из уравнений (3.101) и (3.102) в уравнение (3.103), то получим ресурсное ограничение экономики:

$$K_{t+1} - K_t = F(K_t, L_t) - C_t - \delta K_t, \tag{3.104}$$

где $C_t = c_{1t}L_t + c_{2t}L_{t-1}$ — агрегированное потребление, которое является суммой потребления молодыми ($c_{1t}L_t$) и старыми ($c_{2t}L_{t-1}$) людьми.

Если мы в уравнении (3.103) выразим c_{1t} и c_{2t} из уравнений (3.95) и (3.96), то получим[1)]

$$K_{t+1} = s_t L_t, \tag{3.105}$$

т. е. сбережения молодых равны капиталу следующего периода. Такой результат имеет место вследствие того, что старые хотят умереть, не оставив активов (так как они не заботятся о своих потомках); следовательно, они продают весь свой капитал молодым следующего поколения. Таким образом, весь капитал старых плюс какой-либо чистый прирост капитала должны быть куплены молодыми посредством их сбережений.

Отметим, что сбережения периода t становятся капиталом периода $t+1$. Если мы считаем, что период имеет длину 30 лет, то уравнение (3.105) означает, что конечный продукт, который не потреблен, становится продуктивным 30 лет спустя. Такая нереалистичная структура с лагом является неудачным побочным продуктом ПП-моделей, у которых только два периода жизни. Эта структура также означает, что нам нужно интерпретировать различные ставки и темпы – такие, как r_t и δ — как величины на одно поколение. Например, процентная ставка 6% в год соответствует значению r_t, равному 0.5, а норма амортизации 5% в год соответствует значению δ, равному 0,78.

Будем считать темп прироста населения постоянным, так что $L_{t+1}/L_t = 1 + n$. (Темп прироста населения в 1% в год соответствует значению n, равному 0,35.) Мы можем выразить уравнение (3.105) в величинах на душу населения следующим образом:

$$k_{t+1} \equiv \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{s_t}{(1+n)}.$$

[1)]Подстановка уравнений (3.95) и (3.96) в уравнение (3.103) приводит к разностному уравнению

$$K_{t+1} = s_t L_t + (1 + r_t) \cdot (K_t - s_{t-1}L_{t-1}).$$

Далее экономику следует стартовать, например задав начальный капитал K_1, которым владеет L_0 старых в первый период времени людей. Объем потребления этих старых людей равен $c_{21}L_0 = (1 + r_1) \cdot K_1$. Это уравнение совместно с (3.95) и (3.103) приводит к равенству $K_2 = s_1 L_1$. Тогда из вышеуказанного разностного уравнения следует $K_{t+1} = s_t L_t$ для всех $t \geqslant 2$.

Подстановка s_t из уравнения (3.99) в последнее выражение дает

$$k_{t+1} \cdot (1+n) = \frac{w_t}{\psi_{t+1}}. \tag{3.106}$$

Если мы заменим ψ_{t+1} на выражение, которое следует за уравнением (3.99), то получим

$$k_{t+1} \cdot (1+n) \cdot \left\{1 + (1+\rho)^{1/\theta} \cdot [1 + r(k_{t+1})]^{(\theta-1)/\theta}\right\} = w(k_t), \tag{3.107}$$

где ставка $r(k_{t+1})$ дана в уравнении (3.102), а ставка $w(k_t)$ дана в уравнении (3.101).

Уравнение (3.107) является нелинейным разностным уравнением по k_t; для каждого значения k_t уравнение неявно определяет равновесное значение k_{t+1}[1]. Таким образом, при заданном начальном значении k_t уравнение (3.107) предопределяет последующую траекторию основных фондов.

Уравнение (3.107) может быть решено в замкнутой форме только для специальных случаев производственной функции и функции полезности. Например, если полезность логарифмическая ($\theta = 1$), то выражение в скобках в левой части уравнения (3.107) принимает значение $2 + \rho$. Разностное уравнение в этом случае принимает вид

$$k_{t+1} = \frac{f(k_t) - k_t \cdot f'(k_t)}{(1+n) \cdot (2+\rho)}. \tag{3.108}$$

Стационарное состояние. Для того чтобы вычислить значение капитала на душу населения (капиталоинтенсивность) в стационарном состоянии, положим $k_{t+1} = k_t = k^*$ в уравнении (3.107), тогда имеем

$$(1+n) \cdot \left\{1 + (1+\rho)^{1/\theta} \cdot [1 + f'(k^*) - \delta]^{(\theta-1)/\theta}\right\} = \frac{f(k^*)}{k^*} - f'(k^*). \tag{3.109}$$

Мы можем понять, как определять k^*, взяв в качестве производственной функции функцию Кобба–Дугласа $f(k_t) = Ak_t^\alpha$. Уравнение (3.109) сводится в этом случае к уравнению

$$(1+n) \cdot \left\{1+(1+\rho)^{1/\theta} \cdot [1+\alpha A(k^*)^{\alpha-1} - \delta]^{(\theta-1)/\theta}\right\} = (1-\alpha) \cdot A(k^*)^{\alpha-1}. \tag{3.110}$$

Если мы обозначим через z^* валовой средний продукт капитала - т. е. $z^* \equiv A \cdot (k^*)^{\alpha-1}$, - то уравнение (3.110) может быть записано в виде

$$(1+n) \cdot \left\{1 + (1+\rho)^{1/\theta} \cdot [1 + \alpha z^* - \delta]^{(\theta-1)/\theta}\right\} = (1-\alpha) \cdot z^*. \tag{3.111}$$

---

[1] Это равновесное значение может быть, а может и не быть единственным; см. следующий подраздел.

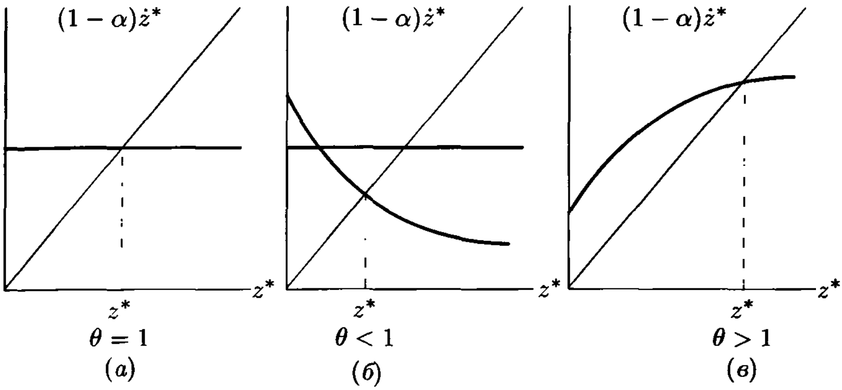


Рис. 3.7. Определение стационарного состояния в ПП-модели. Уравнение (3.111) определяет стационарный валовой средний продукт капитала z^* в ПП-модели с технологией Кобба—Дугласа. На рисунке прямая линия из начала координат отображает правую часть уравнения. Кривые на рис. 3.7, *а*, *б*, *в* соответствуют левой части уравнения при $\theta = 1$, $\theta < 1$, и $\theta > 1$. В каждом случае стационарное состояние существует и единственно

Определим z^* графически из рис. 3.7 построением графиков функций z^*, задаваемых левой и правой частями уравнения (3.111). График правой части уравнения является прямой, проходящей через начало координат и тангенс угла наклона которой равен $1 - \alpha$. Форма графика левой части зависит от того, больше, равно или меньше единицы значение θ . Эти три случая отмечены на рис. 3.7, *а*, *б*, *в*.

Если полезность логарифмическая, так что $\theta = 1$, то левая часть уравнения (3.111) является горизонтальной прямой на уровне $(1 + n)\cdot(2 + \rho) > 0$, как изображено на рис. 3.7, *а*. Эта прямая пересекает прямую $(1 - \alpha)z^*$ в положительном значении z^*, равном

$$\frac{(1 + n)\cdot(2 + \rho)}{1 - \alpha};$$

следовательно, стационарное значение капиталоинтенсивности существует и единственно, оно равно

$$k^* = \left[\frac{A\cdot(1 - \alpha)}{(1 + n)\cdot(2 + \rho)}\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.112}$$

Ситуация, изображенная на рис. 3.7, *в*, соответствует значению $\theta < 1$. Левая часть уравнения (3.111) как функция z^* имеет обратную зависимость от z^*. Эта функция пересекает ось координат в положительном значении и далее асимптотически сходится к $1 + n$ при стремлении z^*

к бесконечности. Таким образом, мы имеем единственную точку $z^* > 0$ пересечения прямой $(1-\alpha)z^*$ и графика функции, задаваемой левой частью уравнения (3.111). Следовательно, в этом случае стационарное значение капитала существует и единственно.

Ситуация, изображенная на рис. 3.7, *в*, имеет место при $\theta > 1$. Левая часть уравнения (3.111) является возрастающей функцией z^*. Пересечение с осью координат — в положительном значении, далее угол наклона графика этой функции монотонно убывает к 0 по мере стремления z^* к бесконечности. Пересечение с правой частью уравнения, т. е. с прямой $(1-\alpha)z^*$, происходит в единственной, положительной точке z^*.

Золотое правило и динамическая эффективность. Рассмотрим теперь вопрос о том, может ли экономика пересекающихся поколений привести к такому типу избыточного сбережения, какой может иметь место в модели Солоу—Свэна (гл. 1). Вспомним, что пересбережение могло возникнуть в модели Солоу - Свэна только лишь благодаря предположению произвольности нормы сбережения; пересбережения не может возникнуть в модели Рамсея (гл. 2), в которой бесконечно живущие домохозяйства выбирают оптимальное сбережение. Поразительный вывод ПП-модели состоит в том, что пересбережение может произойти даже несмотря на то, что домохозяйства осуществляют сбережения оптимально. Такая возможность существует из-за того, что домохозяйства имеют конечный временной горизонт, соответствующий двухпериодной длине жизни, в то время как экономика развивается бесконечно.

Для того чтобы оценить возможность пересбережения, мы сначала вычислим значение капиталоинтенсивности, которое приводит к максимальному значению стационарного потребления на душу населения. В период времени t совокупное потребление равно

$$C_t \equiv c_{1t}L_t + c_{2t}L_{t-1}.$$

Так как общая численность населения равна $L_t + L_{t-1}$, то потребление на душу населения равно $C_t/(L_t + L_{t-1})$. Поскольку $L_{t-1} = L_t/(1+n)$, то это выражение для потребления на душу населения является кратным $(1+n)/(2+n)$ потребления на одного работника $c_t \equiv C_t/L_t$. Следовательно, максимизация подушевого потребления эквивалентна максимизации потребления на одного работника.

Чтобы найти стационарный уровень потребления на одного работника, мы можем разделить обе части уравнения (3.111) на L_t и получить

$$k_{t+1} \cdot (1+n) - k_t = f(k_t) - c_t - \delta k_t. \tag{3.113}$$

В стационарном состоянии $k_{t+1} = k_t = k^*$, а стационарное потребление на одного работника c^* дается уравнением:

$$c^* = f(k^*) - (n + \delta) \cdot k^*. \tag{3.114}$$

Максимизация c^*, таким образом, происходит в значении $k^* = k_{\text{gold}}$, которое удовлетворяет условию $f'(k_{\text{gold}}) = n+\delta$, т. е. в значении золотого правила, определенного в гл. 1. Нетрудно показать, что даже для простых функций полезности и производства стационарное значение k^* в экономике может оказаться в динамически неэффективной области, где $k^* > k_{\text{gold}}$.

Рассмотрим случай логарифмической полезности ($\theta = 1$) и технологию Кобба—Дугласа. Из уравнения (3.112) следует, что стационарное значение капиталоинтенсивности задается в этом случае выражением

$$k^* = \left[\frac{\left\{A \cdot (1 - \alpha)\right\}}{\left\{(1 + n) \cdot (2 + \rho)\right\}}\right]^{1/(1-\alpha)},$$

в то время как значение золотого правила

$$k_{\text{gold}} = \left[\frac{\alpha A}{(n + \delta)}\right]^{1/(1-\alpha)}.$$

Тогда условие того, чтобы значение капиталоинтенсивности в стационарном состоянии было больше значения золотого правила (и, следовательно, чтобы экономика была в динамически неэффективной области), имеет вид

$$\frac{1 - \alpha}{(1 + n) \cdot (2 + \rho)} > \frac{\alpha}{n + \delta}. \tag{3.115}$$

Итак, пересбережение случается чаще, если ставка временного предпочтения ρ и темп прироста населения n малы, если норма амортизации δ велика и если доля капитала α мала.

Пересбережения не происходит, если α близка к 1 (потому что заработная плата тогда близка к 0, и молодым людям в таком случае трудно осуществлять накопления).

Если мы возьмем обычные значения параметров такие, как $n = 0{,}35$, $\rho = 0{,}82$, и $\delta = 0{,}78$ (которые соответствуют годовым ставкам 0,01, 0,02, и 0,05), то условие, задаваемое уравнением (3.115), принимает вид $\alpha < 0{,}35$. То есть неэффективное избыточное сбережение происходит, только если доля капитала меньше одной трети. Ранее мы приводили аргументы в пользу того, что большее значение доли капитала рационально, если в него включен человеческий капитал. Например, если

$\alpha = 0{,}75$, то пересбережения не возникает при разумных значениях параметров в данной ПП-модели.

Динамика. Динамику ПП-экономики описывает уравнение (3.107). Для начала рассмотрим случай логарифмической полезности ($\theta = 1$), представленной уравнением (3.108). Если мы также возьмем производственную функцию Кобба–Дугласа $f(k) = Ak^{\alpha}$, то уравнение (3.108) принимает вид

$$k_{t+1} = (1-\alpha)\cdot\frac{Ak_t^{\alpha}}{(1+n)\cdot(2+\rho)}. \tag{3.116}$$

На рис. 3.8 показана связь между k_{t+1} и k_t, которую мы обозначили $\Omega(k_t)$. Наклон $\Omega(k_t)$ бесконечен в точке k_0 и далее уменьшается к 0 при стремлении k_t к бесконечности. Функция $\Omega(k_t)$ пересекает прямую (45°) в стационарной точке k^*. В данном случае капитал с течением времени монотонно движется к своему единственному стационарному значению. Другими словами, стационарное состояние устойчиво. Дело в том, что кривая $\Omega(k_t)$ всегда имеет наклон вверх, так что она пересекает прямую (45°) снизу вверх.

В общем случае для произвольной производственной функции и функции полезности, динамика ПП-экономики может быть сложной.

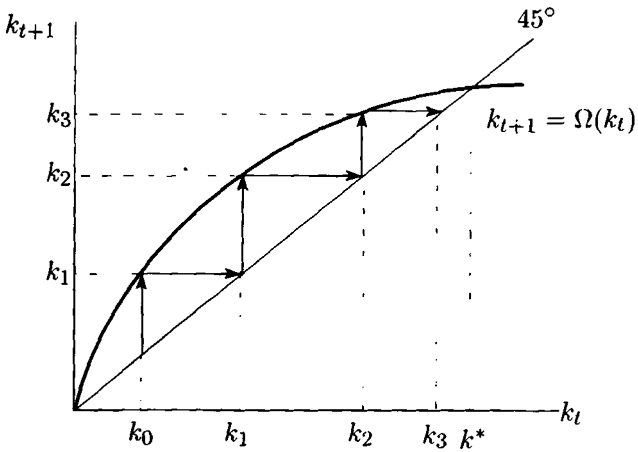


Рис. 3.8. Динамика в ПП-модели. Уравнение (3.116) описывает динамику в ПП-модели для случая логарифмической полезности и технологии Кобба–Дугласа. Функция $\Omega(k_t)$, задаваемая уравнением (3.116) и график которой показан на рисунке, определяет значение k_{t+1} для каждого значения k_t. Если экономика начинает свое развитие с k_0, то она движется далее по последовательности $k_1, k_2, \ldots$, как показано на рисунке

Можно привести примеры, в которых кривая $\Omega(k_t)$ имеет наклон вниз при пересечении прямой (45°). В этом случае в экономике могут наблюдаться циклы[1]. Устойчивость стационарного состояния при этом не гарантируется.

Альтруизм, наследства и бесконечные горизонты. Ключевым предположением в ПП-модели является то, что индивидуумы имеют конечные временные горизонты в том смысле, что они не заботятся о своих потомках. Теперь предположим, что люди дорожат счастьем своих детей (см. Barro, 1974). Если альтруистическая связь родителей с детьми достаточно сильна для того, чтобы создавать трансферты между поколениями (т. е. если типичный индивидуум не скатывается до углового решения, в котором эти трансферты нулевые), то оказывается, что эффект конечного горизонта исчезает. В частности, если альтруизм между поколениями силен, то мы фактически возвращаемся к модели Рамсея гл. 2, в которой временные горизонты бесконечны.

Одним из способов ввести альтруистические связи между поколениями является предположение, что индивидуум, рожденный в период t, получает полезность как от собственного потребления в течение жизни, так и от полезности, получаемой детьми в перспективе. Например, мы могли бы записать:

$$U_t = \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \cdot \left(\frac{c_{2t+1}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right) + \left(\frac{1+n}{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}\right) \cdot U_{t+1}. \quad (3.117)$$

Первые два слагаемых в правой части уравнения те же, что и в уравнении (3.94); они представляют собой полезность, полученную от потребления в течение двух периодов жизни. Третье слагаемое включает в себя будущую полезность U_{t+1} каждого непосредственного потомка. Эта полезность будет зависеть как от потребления самого этого потомка в оба периода его жизни, так и от полезности уже его потомков в следующем поколении.

Полезность U_{t+1} в уравнении (3.117) умножается на число потомков $(1+n)$ и дважды дисконтируется. Первый дисконтирующий множитель $1+\rho$ применяется потому, что будущая полезность возникает на поколение позже и является в этом смысле сравнимой с собственным

[1] Вообще говоря, возможность возникновения циклов связана с дискретностью времени. Для отдельной семьи эту дискретность можно связать с длиной поколения. Однако на агрегированном уровне дискретность будет сглажена суммированием по семьям, которые различаются своим расположением в жизненном цикле. Если в агрегированной модели имеется единственная переменная состояния, такая как агрегированный капитал, циклы не возникнут.

потреблением в старости c_{2t+1}. Второй дисконт $1+\phi$ возникает в силу того что люди могут не суметь оценить ожидаемую полезность своих детей (которая частично состоит из полезности будущего потребления их детей) так же, как, впрочем, и свое собственное будущее потребление. В частности, если $\phi > 0$, т. е. родители эгоистичны в том смысле, что если родительское потребление в старости равно потреблению детей в молодости, то родители предпочтут дополнительную единицу собственного потребления в старости дополнительной единице потребления детей в молодости.

Если мы многократно воспользуемся уравнением (3.117), подставляя в него выражения для $U_{t+1}, U_{t+2}, \ldots$ и т. д., то полезность может быть записана как прямая взвешенная сумма потребления каждого поколения в старости и молодости

$$U_t = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1+n}{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}\right)^i \cdot \left[\frac{c_{1t+i}^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\cdot\left(\frac{c_{2t+1+i}^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)\right]. \quad (3.118)$$

Для ограничения величины полезности, когда c_{1t+i} и c_{2t+i} постоянны во времени, введем условие

$$1+n < (1+\rho)\cdot(1+\phi).$$

Пусть b_t – трансферт между поколениями, полученный каждым потомком, родившимся в период t. Тогда объем отчислений каждого старого индивидуума в периоде t равен $(1+n)\cdot b_t$. Бюджетные ограничения для двух периодов жизни видоизменяются соответственно из уравнений (3.95) и (3.96) в уравнения:

$$c_{1t} + s_t = w_t + b_t; \quad (3.119)$$

$$c_{2t+1} + (1+n)\cdot b_{t+1} = (1+r_{t+1})\cdot s_t. \quad (3.120)$$

Заметьте, что мы определили трансферты таким образом, что они происходят в то время, как более старое поколение все еще живо, и, таким образом, доступны для финансирования потребления в период молодости следующего поколения. Здесь есть один новый элемент – люди имеют два источника дохода в молодости: трудовой доход и трансферты, которыми их снабжают родители (если $b_t > 0$). Кроме того, люди имеют две возможности расходовать свои ресурсы в старости: потребление и трансферты детям.

Молодой индивидуум максимизирует полезность (3.118) при заданном трансферте b_t и при заданных ограничениях на каждое поколение (3.119) и (3.120).

Предположим, что ограничение $b_{t+i} \geqslant 0$ выполнено для каждого $i \geqslant 0$, т. е. родители не могут требовать трансфертов от детей. Если ограничение $b_{t+i} \geqslant 0$ несвязывающее при всех $i \geqslant 0$, то задача достаточно проста; мы здесь рассматриваем только этот случай (см. работы Weil, 1987, и Kimball, 1987, где рассматриваются эти ограничения и анализируются обратные трансферты от детей к родителям).

Из рассмотренной нами спецификации функции полезности (3.118) вытекает, что вид оптимизационной задачи не меняется по мере умирания старых поколений и рождения новых. То есть относительный вес потребления в различные периоды не меняется по мере возникновения новых поколений. Так что мы можем считать, что члены поколения t могут в период времени t следовать тем же рекомендациям относительно выбора уровней потребления и сбережения, что и их потомки.

Простой способ получить условия первого порядка — это использовать уравнения (3.119) и (3.120) для исключения переменных $c_{1t}, c_{2t+1}, c_{1t+1}$ и т. д. в уравнении (3.118), а затем максимизировать по s_t и b_{t+1}. Итоговые условия можно записать в следующем виде

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = \left(\frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\theta}; \tag{3.121}$$

$$\frac{c_{2t}}{c_{1t}} = (1+\phi)^{1/\theta}. \tag{3.122}$$

Уравнение (3.121) ограничивает распределение потребления на протяжении жизни индивидуума и имеет такую же форму, что и уравнение (3.98). Уравнение (3.122) определяет зависимость между потреблением родителей в период t и потреблением детей в этот же период. Эти уровни потребления изменяются только в случае, если параметр самолюбия ϕ не равен нулю. В частности, если же, например, $\phi > 0$, то дети потребляют меньше в молодости, нежели родители в старости.

Для определения эволюции со временем потребления на работника c_t объединим уравнения (3.121) и (3.122)[1]:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{c_{1t+1}}{c_{1t}} = \frac{c_{2t+1}}{c_{2t}}\left(\frac{1 + r_{t+1}}{(1+\phi)\cdot(1+\rho)}\right)^{1/\theta}. \tag{3.123}$$

[1] Для c_{1t} и c_{2t} уравнение (3.123) получается непосредственно из уравнений (3.121) и (3.122). Для c_t данный результат получен с использованием выражения

$$c_t = \frac{(1+n)c_{1t} + c_{2t}}{(1+n)}$$

и с учетом того, что отношение c_{2t} к c_{1t} постоянно и равно константе из правой части уравнения (3.122).

Этот результат является дискретно-временной копией стандартного решения для динамики c_t в модели Рамсея. Единственное отличие — дисконт теперь состоит из чистого временного предпочтения ρ и параметра самолюбия ϕ. Чистый фактор времени теперь может быть нулевым (т. е. $\rho = 0$ является вполне приемлемым), а дисконт в таком случае отражает только лишь степень самолюбия родителей ($\phi > 0$).

Уравнение (3.123) можно объединить с бюджетным ограничением экономики (3.113) и определить динамику k_t и c_t. Впрочем, если внимательно присмотреться к этой системе, то становится ясно, что она есть аналог модели Рамсея в дискретном времени. Так как динамические уравнения для k_t и c_t такие же, как и в модели Рамсея, за исключением поправки на дискретное время, то и результаты будут такими же. В частности, система имеет хорошую динамику, устойчивое стационарное состояние, а равновесие не может быть динамически неэффективным. Итак, если альтруизм достаточно силен для того, чтобы гарантировать внутреннее решение для трансфертов между поколениями, то структура ПП-модели и конечность времени жизни не дают нам никакого нового понимания относительно развития экономики.

3.9. Задачи

3.1. Ставки потребительских налогов, меняющиеся со временем. Для начала рассмотрим ситуацию, в которой правительство не облагает налогом доход с капитала и не закупает товары и услуги, т. е. $\tau_a = \tau_f = G = 0$, и ставка налога на потребление τ_c постоянна. Допустим, правительство решило повысить τ_c при неизменных $\tau_a = \tau_f = G = 0$. Как это изменение повлияет на условие первого порядка домохозяйств? Как это повлияет на равновесие в экономики? И вообще, насколько это хорошая идея менять ставку потребительского налога?

3.2. Общественные услуги в производственной функции. Пусть производственная функция имеет вид

$$\hat{y} = f(\hat{k}, \tilde{g}),$$

где $\tilde{g}$ — поток общественных услуг. Проанализируйте воздействие траектории $\tilde{g}$ на экономику в следующих случаях:

a) $\tilde{g} = \hat{g}$ и G/Y – константа.

b) $\tilde{g} = G$ и G/Y – константа.

3.3. Международная специализация и диверсификация (см. Ventura, 1997). Каждая малая экономика может производить промежуточные товары X_1, X_2 и конечный продукт Y, который можно использовать для потребления и инвестирования. Производственные функции имеют вид

$$X_1 = (K_1)^{\alpha_1}(L_1)^{1-\alpha_1}, \tag{3.124}$$

$$X_2 = (K_2)^{\alpha_2}(L_2)^{1-\alpha_2}, \tag{3.125}$$

$$Y = (X_1)^{\alpha_3}(X_2)^{1-\alpha_3}, \tag{3.126}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$; K_1 и L_1 объемы внутреннего капитала и труда, используемые в секторе, производящем X_1, K_2 и L_2 – объемы, используемые в секторе, производящем X_2, $K_1+K_2 = K$ и $L_1+L_2 = L$. Конечный продукт Y может быть использован, как обычно, для C или для наращивания K. Суммарный труд L постоянен. Промежуточные продукты торгуются на мировых рынках по постоянной цене p (измеряемой в единицах X_1 на единицу X_2). Конечные товары Y, а также единицы C и K не торгуются на международных рынках. Мирового кредитного рынка здесь нет, так что закупки или продажи X_1 каждой страны должны равняться закупкам и продажам X_2. В уравнении (3.126) X_1 и X_2, используемые для производства Y, – это объемы, произведенные внутри страны (уравнения (3.124) и (3.125)), плюс чистый объем, закупленный заграницей.

a. В каких пределах должна находиться величина $k \equiv K/L$, чтобы экономика оставалась в «диверсифицированном диапазоне», в котором она производит оба вида промежуточного продукта? Выведите выражение для рентной ставки капитала R и ставки заработной платы w, когда k лежит в диверсифицированном диапазоне. (Заметьте, что при отсутствии движения факторов производства, уравнивание цен производственных факторов достигается через движение товаров.)

b. Предположим, что k возрастает, но не настолько, чтобы вывести экономику за пределы диверсифицированного диапазона. Почему рост k не приводит к убыванию отдачи? (Примечание: этот факт вытекает непосредственно из теоремы Rybczinski, 1955.)

c. Допустим, что потребители с конечными временными горизонтами решают обычную оптимизационную задачу Рамсея. Выведите закон движения c и k в предположении, что p – константа.

d. Допустим, что мир состоит из большого числа малых стран, в целом идентичных, за исключением $k(0)$. Более того, допустим, что

4 Односекторные модели эндогенного роста

В модели Рамсея, как и в модели Солоу–Свэна, стационарный темп прироста на душу населения равен темпу технологического прогресса x, который берется экзогенным. Таким образом, хотя эти модели интересны для изучения переходной динамики, они не дают никакого понимания относительно источников долгосрочного роста дохода на душу населения.

В гл. 1 мы упомянули, что одним из способов построения теории эндогенного роста является исключение долгосрочной тенденции к убыванию отдачи капитала. В качестве простого примера мы рассмотрели AK-модель, в которой отдача капитала всегда постоянна, и мы учитывали технологический прогресс таким образом, что отдача капитала убывала, но асимптотически сходилась к положительной константе.

В данной главе мы начнем с того, что объединим AK-технологию со стремлением домохозяйств и фирм к оптимизации своей деятельности. Такая структура генерирует эндогенный рост, а результаты оптимальны по Парето, как и в модели Рамсея. Однако проблема в том, что такого типа модели не согласуются с эмпирически наблюдаемой сходимостью.

Одной из интерпретаций AK-модели является рассмотрение капитала в широком смысле как совокупности физического и человеческого капиталов. В разд. 4.2 мы строим простую модель с человеческим капиталом, в которой эта интерпретация рассматривается в явном виде.

Мы уже отмечали в гл. 1, что производственная функция с постоянной эффективностью отдачи факторов на агрегированном уровне может отражать обучение на собственном опыте и распространение знаний. Хотя технология в таком виде может обеспечить эндогенный рост, результаты не будут Парето-оптимальными в силу того что распространение знаний представляет собой разновидность внешнего воздействия. Следовательно, эти модели могут иметь смысл для определения желаемой политики правительства. Мы также рассматриваем модели, в которых присутствуют создаваемые правительством общественные товары и показываем, что они имеют аналогичное значение для экономического роста и правительственной политики.

В конце главы мы проанализируем переходную динамику моделей с оптимизирующими свое поведение экономическими агентами в случае, когда производственная технология обладает свойством убывающей отдачи капитала, но эта отдача асимптотически сходится к положительной константе. Эти модели обладают как свойством эндогенного роста, имеющего место в *AK*-модели, так и свойством динамической сходимости, которым обладает модель Рамсея. Таким образом, эмпирически наблюдаемая сходимость согласуется со свойствами этих видов моделей эндогенного роста.

4.1. *AK*-модель

4.1.1. Поведение домохозяйств

Возьмем модельную схему из гл. 2, в которой бесконечно живущие домохозяйства максимизируют полезность

$$U = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \cdot \left[\frac{c^{(1-\theta)}-1}{1-\theta}\right] dt \tag{4.1}$$

при ограничении

$$\dot{a} = (r-n)\cdot a + w - c, \tag{4.2}$$

где a — активы на человека, r — процентная ставка, w — ставка заработной платы, n — темп прироста населения. Как и ранее, мы вводим ограничение, исключающее возможность цепного финансирования долга:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]\,dv\right]\right\} \leqslant 0. \tag{4.3}$$

Условия для оптимизации имеют прежний вид

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\cdot(r-\rho), \tag{4.4}$$

и условие трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left[-\int\limits_0^t [r(v)-n]\,dv\right]\right\}=0. \tag{4.5}$$

4.1.2. Поведение фирм

Здесь единственное отступление от гл. 2 состоит в том, что фирмы обладают линейной производственной технологией:

$$y = f(k) = Ak, \tag{4.6}$$

где $A > 0$. Уравнение (4.6) отличается от неоклассической производственной функции тем, что предельный продукт капитала не является убывающим ($f'' = 0$) и условия Инады не выполнены. В частности, $f'(k) = A$ при стремлении k к нулю или бесконечности. В приложении к данной главе (разд. 4.7) тот факт, что невыполнение условия Инады

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = 0$$

является ключевым моментом эндогенного роста, обосновывается более строго.

Мы отмечали в гл. 1, что глобальное отсутствие убывающей отдачи капитала в уравнении (4.6) может показаться нереалистичным, но эта идея становится более правдоподобной, если толковать капитал K более широко, включая человеческий капитал, знание, общественную инфраструктуру и т. д. В последующих разделах данной главы эти интерпретации капитала исследуются более детально.

Как и ранее, условия для задачи максимизации прибыли приводят к тому, что предельный продукт капитала должен быть равен цене его аренды $R = r + \delta$. Единственное отличие здесь – предельный продукт капитала постоянен и равен A, следовательно,

$$r = A - \delta. \tag{4.7}$$

Так как предельный продукт труда равен нулю, то ставка заработной платы w также равна нулю. (Мы можем считать, что эта нулевая ставка заработной платы применима к неквалифицированному труду, интенсивность использования которого не усиливается человеческим капиталом.)

4.1.3. Равновесие

В гл. 2 мы предположили, что экономика является закрытой, так что выполнено $a = k$. Если мы подставим $a = k$, $r = A - \delta$ и $w = 0$

в уравнения (4.2), (4.4) и (4.5), то получим

$$\dot{k} = (A - \delta - n) \cdot k - c; \tag{4.8}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (A - \delta - \rho); \tag{4.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{k(t) \cdot e^{-(A-\delta-n)\cdot t}\right\} = 0. \tag{4.10}$$

Отличительной особенностью уравнения (4.9) является то, что рост потребления не зависит от капитала k. Другими словами, если уровень потребления на человека в момент времени 0 равен $c(0)$, то в момент времени t этот уровень определяется по формуле

$$c(t) = c(0) \cdot e^{1/\theta\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t}, \tag{4.11}$$

где начальный уровень потребления $c(0)$ должен быть еще определен.

Считаем, что производственная функция достаточно продуктивна, чтобы гарантировать рост c, но не настолько, чтобы привести к неограниченной полезности:

$$A > \rho + \delta > (A - \delta) \cdot (1 - \theta) + \theta n + \delta. \tag{4.12}$$

Из первой части этого неравенства следует $\dot{c}/c > 0$. Вторая часть, которая аналогична неравенству

$$\rho + \theta x > x + n$$

в модели гл. 2, гарантирует, что достигаемая полезность ограничена[1] и что условие трансверсальности выполнено.

---

[1] Для проверки этого результата, подставим выражение для $c(t)$ из уравнения (4.11) в функцию полезности, получим

$$U = \left[\frac{1}{(1-\theta)}\right] \cdot \int_0^\infty e^{-(\rho-n)\cdot t} \cdot \left[c(0)^{1-\theta} \cdot e^{[(1-\theta)/\theta]\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t} - 1\right] dt.$$

Для того чтобы этот интеграл не сходился к бесконечности, потребуем

$$\rho - n > \left[\frac{1-\theta}{\theta}\right] \cdot (A - \delta - \rho).$$

Добавим δ к обеим частям и после перестановки членов получим вторую часть неравенства (4.12). По-другому это выражение можно записать в виде $(A - \delta - \rho) > \gamma$, где γ — темп роста потребления на человека из уравнения (4.9). Относительно рассматриваемого выражения в математическом приложении данной книги рассмотрен ряд случаев, когда может возникать неограниченная полезность.

Для того чтобы найти темп прироста капитала и выпуска на одного работника, разделим уравнение (4.8) на k и будем иметь

$$\frac{c}{k} = (A - \delta - n) - \frac{\dot{k}}{k}\,.$$

В стационарном состоянии (в котором, по определению, все переменные растут с постоянными темпами) темп прироста капитала на человека постоянен. Следовательно, правая часть выражения для c/k является константой. Поэтому c/k является константой и темп прироста капитала на человека (и, следовательно, темп прироста выпуска на человека y) равен темпу прироста потребления на человека, который дается уравнением (4.9). Но это верно только для стационарного состояния: в принципе, темп прироста капитала вне стационарного состояния может не быть постоянным. Тогда бы и отношение c/k не было постоянным. Однако в действительности — и мы это сейчас покажем — потребление и капитал (и, следовательно, выпуск) растут все время с одинаковым темпом. Другими словами, в данной модели нет переходной динамики.

4.1.4. Переходная динамика

Найдем темп прироста капитала вне стационарного состояния. Для этого начнем с того, что подставим выражение (4.11) для $c(t)$ в уравнение (4.8), имеем уравнение

$$\dot{k} = (A - \delta - n)\cdot k - c(0)\cdot e^{(1/\theta)\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно k. Общее решение этого уравнение имеет вид[1)]

$$k(t) = (\text{Константа})\cdot e^{(A-\delta-\rho)\cdot t} + \frac{c(0)}{\varphi}\cdot e^{(1/\theta)\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t}, \tag{4.13}$$

где

$$\varphi \equiv (A-\delta)\cdot\frac{\theta-1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n. \tag{4.14}$$

По-другому эту комбинацию параметров можно записать в виде

$$\varphi \equiv (A - \delta - n) - \gamma.$$

где γ — постоянный темп прироста потребления на человека из уравнения (4.9). Из условия (4.12) следует $\varphi > 0$.

[1)]См. математическое приложение, раздел по линейным дифференциальным уравнениям первого порядка.

Если мы подставим выражение для $k(t)$ из (4.13) в условие трансверсальности (4.10), то получим

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\text{Константа} + \frac{c(0)}{\varphi}\cdot e^{-\varphi t}\right\} = 0.$$

Так как $c(0)$ конечно и $\varphi > 0$, то второе слагаемое в квадратных скобках сходится к нулю. Следовательно, константа в этом условии трансверсальности также должна быть нулевой. В таком случае из уравнений (4.11) и (4.13) следует[1)]

$$c(t) = \varphi\cdot k(t); \tag{4.15}$$

$$\frac{\dot k}{k} = \frac{\dot c}{c} = \frac{1}{\theta}\cdot(A-\delta-\rho). \tag{4.16}$$

Учитывая, что $y = Ak$, получаем

$$\frac{\dot y}{y} = \frac{\dot k}{k} = \frac{\dot c}{c}.$$

Таким образом, в данной модели нет переходной динамики: переменные $k(t)$, $c(t)$ и $y(t)$, начиная свой путь со значений $k(0)$, $c(0) = \varphi\cdot k(0)$ и $y(0) = A\cdot k(0)$ соответственно, далее все три растут с одинаковым темпом

$$\frac{1}{\theta}\cdot(A-\delta-\rho).$$

В *AK*-модели изменения в параметрах модели могут повлиять на уровни и темпы прироста переменных. Например, перманентный прирост в темпе прироста населения n никак не влияет на подушевые темпы прироста, указанные в уравнении (4.16), но снижает уровень потребления на человека (что следует из (4.14) и (4.15)). Изменения в A, ρ и θ влияют на уровни и темпы прироста c и k.

Норма валового сбережения дается уравнением

$$s = \frac{\dot K+\delta K}{Y} = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\dot k}{k}+n+\delta\right) = \left[\frac{A-\rho+\theta n+(\theta-1)\cdot\delta}{\theta A}\right], \tag{4.17}$$

где

$$\frac{\dot k}{k} = \frac{1}{\theta}\cdot(A-\delta-\rho).$$

Таким образом, норма валового сбережения постоянна и, за исключением n, зависит от тех же параметров, которые воздействуют и на подушевой темп прироста.

[1)] Заметим, что функция стратегии для c в данной модели имеет замкнутую форму.

4.1.5. Фазовая диаграмма

Мы можем проанализировать динамическое поведение экономики посредством построения фазовой диаграммы в плоскости k и c. Заметим, что так как $A > \rho + \delta$, прирост потребления всегда положителен, поэтому графика $\dot{c} = 0$ не существует. Отсюда следует, что стрелки на фазовой диаграмме (см. рис. 4.1) направлены на север. Из уравнения (4.8) следует, что график $\dot{k} = 0$ является прямой линией, проходящей через начало координат и имеющей наклон $(A - \delta - n)$. Стрелки справа от этой прямой направлены на восток, а слева верно обратное. Из уравнения (4.15) следует, что траектория, по которой движется экономика («седловая траектория»), также представляет собой прямую линию с наклоном φ. Заметим, что так как

$$\varphi = (A - \delta - n) - \gamma,$$

то наклон устойчивой ветви меньше, чем наклон графика $\dot{k} = 0$. При заданном $k(0)$, если начальное значение потребления лежит в области выше седловой траектории, то, стартуя из него, экономика упрется в вертикальную ось. Однако такой исход предотвращает уравнение Эй-

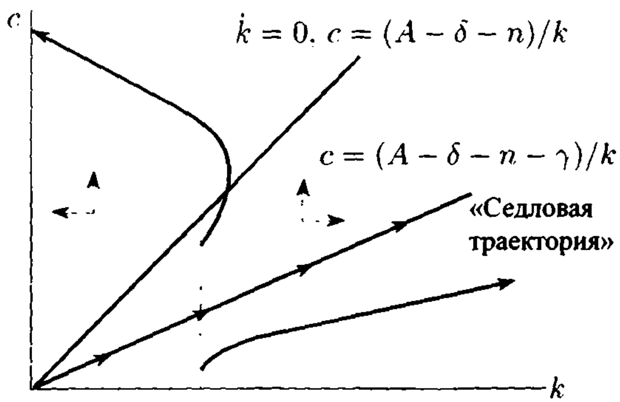


Рис. 4.1. Фазовая диаграмма для AK-модели. График $\dot{k} = 0$ является прямой линией, проходящей через начало координат и имеющей наклон $A - \delta - n > 0$. Стрелки справа от этой прямой направлены на восток, а с противоположной стороны, слева, — на запад. В силу того что $A > \rho + \delta$, рост потребления всегда положителен, так что графика $\dot{c} = 0$ не существует, и поэтому стрелки везде направлены на север. Из уравнения (4.15) следует, что седловая траектория также является прямой линией с наклоном $\varphi = (A - \delta - n) - \gamma$, который меньше, чем наклон графика $\dot{k} = 0$. Условие трансверсальности и уравнение Эйлера гарантируют, что экономика всегда находится на седловой траектории, так что отношение потребление к капиталу всегда постоянно

лера (мы уже обсуждали аналогичный пример в гл. 2 для неоклассической модели). Если начальное потребление выбрано ниже седловой траектории, то c и k неограниченно растут. Вдоль этой траектории капитал k растет быстрее, чем c, поэтому условие трансверсальности не выполнено. Единственный выбор, который удовлетворяет всем условиям первого порядка (включая условие трансверсальности), — седловая траектория, на которой значение c/k постоянно.

4.1.6. Факторы, определяющие темп роста

Существенное различие между AK-моделью и неоклассической моделью гл. 2 связано с определением долгосрочного подушевого темпа прироста. В AK-модели долгосрочный темп прироста (который, кстати, равен и краткосрочному темпу прироста) зависит, согласно (4.16), от параметров, которые определяют склонность к сбережению и производительность капитала. Снижение значений ρ и θ, увеличивая склонность к сбережению, приводит к более высоким значениям подушевого темпа прироста в уравнении (4.16) и к более высокой норме сбережения в уравнении (4.17). Улучшение в уровне технологии A увеличивает средний и предельный продукты капитала, а также поднимает темп прироста и изменяет норму сбережения. Позже в одном из разделов данной главы мы покажем, что изменения в разного рода правительственных стратегиях эквивалентны изменениям в A, т. е. мы можем обобщить интерпретацию параметра A за пределы простого различия в уровне производственной функции.

В противоположность эффектам долгосрочного роста, в AK-модели из модели Рамсея гл. 2 следует, что долгосрочный подушевой темп прироста искусственно поддерживается на уровне значения x, которое является экзогенным темпом технологического прогресса. Бо́льшая склонность к сбережению или улучшение в уровне технологии проявляются в долгосрочной перспективе в виде бо́льших уровней капитала и выпуска на эффективного работника, но подушевой темп прироста остается при этом неизменным.

Это различие в результатах отражает работу убывающей отдачи капитала в неоклассической модели и отсутствие убывающей отдачи в случае AK-модели. Количественно масштаб различия зависит от того, насколько быстро убывающая отдача устанавливается, что в случае неоклассической модели является определяющей характеристикой того, насколько быстро экономика сходится к стационарному состоянию. Если убывающая отдача устанавливается медленно, то период сходимости долог. В случае неоклассической модели сдвиги в склонности к сбережению или в уровне технологии оказывают влияние на темп прироста на протяжении продолжительного периода времени, хотя, возможно, и не навсегда. Таким образом, различие между неоклассической моделью и AK-моделью существенно, если сходимость происходит быстро, но оно становится менее значимым, если сходимость происходит медленно. Если сходимость экстремально медленна, то эффекты роста, которые возникают в AK-модели, дают вполне удовлетворительную аппроксимацию длительным воздействиям на темп роста в неоклассической модели.

В гл. 2 мы показали, что результаты модели Рамсея оптимальны по Парето. Мы сделали это заключение, доказав, что результаты оптимизации совпадают с результатами, которые были бы получены гипотетическим социальным управляющим, у которого такая же целевая функция, что и у типичного домохозяйства. Применив ту же процедуру в данном случае, легко доказать, что равновесие в AK-модели тоже оптимально по Парето[1]. Этот результат имеет смысл, так как он означает, что исключение убывающей отдачи в производственной функции, т. е. замена неоклассической производственной функции на AK, не привносит в модель источников каких-либо рыночных сбоев.

4.2. Односекторная модель с физическим и человеческим капиталами

Как мы упоминали ранее, одной из интерпретаций AK-модели является представление капитала в широком смысле, т. е. капитал включает в себя как физическую, так и человеческую компоненты. Сейчас мы построим простую модель с человеческим капиталом, благодаря которой эта интерпретация станет более понятной.

Предположим, что ресурсами в производственной функции являются физический и человеческий капиталы, K и H:

$$Y = F(K, H), \tag{4.18}$$

где $F(\cdot)$ обладает стандартными неклассическими свойствами, включая постоянную эффективность с ростом масштаба производства относительно K и H. Эта производственная функция похожа на ту, что мы использовали в гл. 3, за исключением того, что там она имела вид функции Кобба - Дугласа с убывающей эффективностью производства

[1] Управляющий выбирает траекторию c таким образом, чтобы оптимизировать U из (4.1), при ограничениях (4.8), $c(t) \geqslant 0$ и при заданном начальном значении $k(0)$.

с ростом его масштаба по K и H. Используем это свойство постоянной эффективности с ростом масштаба производства для того, чтобы записать производственную функцию в интенсивной форме:

$$Y = K \cdot f\left(\frac{H}{K}\right), \tag{4.19}$$

где $f'(H/K) > 0$.

Выпуск полностью расходуется на потребление, инвестирование в физический капитал и инвестирование в человеческий капитал. В силу этого, будем считать, что данная односекторная технология применяется и в производстве человеческого капитала (т. е. в секторе образования), так же как и в производстве потребительских товаров и физического капитала (отдельный сектор образования мы представим в гл. 5). Объемы физического и человеческого капиталов выбывают с темпами δ_K и δ_H соответственно. Будем считать, что труд L постоянен, так что изменения в H соответствуют совокупному объему чистых инвестиций в человеческий капитал.

Пусть R_K и R_H — цены, по которым конкурентные фирмы арендуют соответствующие два типа капитала. В отсутствие препятствий для входа на рынок конкуренция среди фирм ведет к снижению прибылей до нуля. Тогда из стремления максимизировать прибыль и одновременно условия нулевой прибыли следует (как уже было сказано в гл. 2), что предельный продукт каждого ресурса равен цене его аренды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= f\left(\frac{H}{K}\right) - \frac{H}{K} \cdot f'\left(\frac{H}{K}\right) = R_K, \\ \frac{\partial Y}{\partial H} &= f'\left(\frac{H}{K}\right) = R_H. \end{aligned} \tag{4.20}$$

В силу того что оба типа капитала совершенно взаимозаменяемы друг с другом и с потребительскими товарами на стороне производства, цена каждого типа капитала должна быть равна единице[1]. Следовательно, нормы доходности владельцев капитала равны $R_K - \delta_K$ и $R_H - \delta_H$ соответственно, и в равновесии каждая норма доходности должна равняться процентной ставке r. Возьмем вторые части уравнений (4.20), вычтем

[1] Этот результат имеем место в случае, если ограничение неотрицательности валового инвестирования в каждый тип капитала не является связывающим или если единицы старого капитала могут быть совершенно нереалистичным образом потреблены или конвертированы в другие типы капитала. Мы уделим внимание этим ограничениям в гл. 5.

одно из другого, переставим члены и получим

$$f\left(\frac{H}{K}\right) - f'\left(\frac{H}{K}\right) \cdot \left(1 + \frac{H}{K}\right) = \delta_K - \delta_H. \tag{4.21}$$

Это условие определяет единственное, постоянное значение H/K[1].

Введем обозначение $A \equiv f(H/K)$, тогда уравнение (4.19) примет вид $Y = AK$. Таким образом, данная модель с двумя типами капитала является по существу той же самой AK-моделью, которую мы проанализировали в предыдущей главе. В таком случае мы знаем, что в равновесии имеет место постоянство и равенство темпов прироста C, K и Y (эти темпы прироста равны подушевым темпам прироста, потому что величина L постоянна). Так как H/K не меняется, то H растет с тем же темпом, что и остальные переменные.

Главный вывод из вышеописанной простой модели заключается в том, что мы можем считать K олицетворением совокупности капитальных продуктов, которые включают физическую и человеческую компоненты. Если мы считаем, что постоянство отдачи капиталов обоих видов – это приемлемо, то AK-модель вполне может быть подходящим представителем модели с капиталом в широком смысле. В гл. 5 мы рассмотрим ряд дополнительных эффектов, которые возникают при отбрасывании допущений односекторной модели, т. е. при предположении, что функции для производства образования и производства товаров различны.

4.3. Модели с обучением на собственном опыте и распространением знаний

4.3.1. Технология

Причиной наличия эндогенного роста в AK-модели является отсутствие убывающей отдачи факторов, которые могут быть накоплены. Ряд авторов – включая Frankel (1962), Griliches (1979), Romer (1986) и Lucas (1988) – построили модели эндогенного роста, в которых центральную роль играют эффекты распространения знаний (опыта). Возможно, вследствие удачного опубликования исследование Ромера ока-

[1] Выражение в левой части уравнения (4.21), как нетрудно проверить, является монотонно возрастающей по H/K функцией. Более того, это выражение пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$ по мере изменения значений H/K от 0 до ∞. Это означает, что решение для H/K существует и оно единственно.

зало огромное влияние на экономическую мысль[1]. Ромер использовал схему исключения склонности к убыванию отдачи накопленного капитала Arrow (1962), в которой предполагается, что создание знаний является побочным продуктом инвестиций. Фирма, увеличивающая объем своего физического капитала, одновременно узнает, как производить более эффективно. Это положительное воздействие опыта на производительность называется обучением на собственном опыте или, в данном случае, обучением на собственных инвестициях.

Проиллюстрируем эти новые элементы модели на примере неоклассической производственной функции с трудоинтенсивной технологией для фирмы i:

$$Y_i = F(K_i, A_i L_i), \tag{4.22}$$

где L_i и K_i — обычные ресурсы; A_i — индекс знаний, доступных данной фирме. Функция $F(\cdot)$ удовлетворяет неоклассическим свойствам, которые мы уже описали в гл. 1 (формулы (1.4)–(1.6)): положительные и убывающие предельные продукты каждого из ресурсов, постоянная эффективность с ростом масштаба, условия Инады. Технология предполагается трудоинтенсивной, так что стационарное состояние существует, и A_i растет с постоянным темпом. В отличие от гл. 2 здесь мы не предполагаем, что A_i растет с экзогенно заданным темпом x. Далее, по причине, которая станет ясна позже, мы будем считать, что агрегированная рабочая сила L постоянна.

Следуя Arrow (1982), Sheshinski (1967) и Romer (1986), сделаем два предположения относительно роста производительности. Во-первых, обучение на собственном опыте происходит через чистые инвестиции каждой фирмы. Таким образом, прирост капитала фирмы ведет к параллельному приросту у нее объема знаний A_i. Этот процесс отражает ту идею Эрроу, согласно которой источником знаний и повышения производительности является инвестиционный процесс и само производство, что подтверждается эмпирическим наблюдением значительного положительного влияния опыта на производительность в авиастроении, кораблестроении и других областях (см. Wright, 1936; Searle, 1946; Asher, 1956; Rapping, 1965). Эта идея была поддержана в работе Schmookler (1966), в которой указывается, что патенты — показатели уровня знаний и опыта — тесно связаны с инвестициями в физический капитал.

---

[1] Cannon (2000) сказал по этому поводу: «Frankel (1962) предвосхитил идеи, которые используются в современной литературе, и он заслуживает более широкого признания. Почему его работа была проигнорирована в то время, остается загадкой и даже может рассматриваться в качестве демонстрации роли случая в процессах научного исследования и роста».

Второе ключевое предположение заключается в том, что знание каждой фирмы является общественным товаром, который любая другая фирма может получить по нулевой цене. Другими словами, однажды открытое знание немедленно распространяется по всей экономике. Из этого предположения следует, что изменение технологического множителя каждой фирмы $\dot{A}_i$ соответствует приобретению нового знания во всей экономике, поэтому оно пропорционально изменению в объеме агрегированного капитала $\dot{K}$.

Если мы объединим предположения об обучении на собственном опыте и о распространении знаний, то мы можем заменить A_i на K в (4.22) и записать производственную функцию фирмы i в виде[1)]

$$Y_i = F(K_i, KL_i). \tag{4.23}$$

Если K и A_i постоянны, то каждая фирма сталкивается с убывающей отдачей капитала K_i так же, как и в неоклассической модели гл. 2. Однако если каждый производитель увеличивает объем K_i, то K, соответственно, растет и распространяется, обеспечивая рост производительности всех фирм. Более того, функция (4.23) однородна степени один относительно K_i и K при заданном L, т. е. имеет место постоянная отдача капитала на социальном уровне (когда K_i и K увеличиваются в объеме вместе с L). Это постоянство социальной отдачи капитала приведет к эндогенному росту.

По существу, исследование Ромера сводится к предложению использовать в качестве производственной технологии функцию (4.23), которая впервые появилась в работе Frankel (1962). В работе Фрэнкеля предполагается, что расширяющий экономику производственный фактор (который он называл «модификатор развития») равен сумме объемов капитала, используемых каждой фирмой.

Однако Фрэнкель не объяснил природу процесса улучшения технологии; в частности, не выделил роль знаний в этом процессе.

В работе Griliches (1979) другая версия функции (4.23): K_i представляет собой специфический капитал знаний фирмы i, в то время как K (который в этой модели также равен сумме K_i) является агрегированным уровнем знания во всей промышленности. Единственным существенным отличием данной модели от модели Ромера (Romer, 1986) является то, что, согласно Грилихесу, к увеличению объема знаний имеют отношение только инвестиции в НИОКР, а согласно Ромеру - все чистые инвестиции.

[1)] Мы не учитываем здесь возможность наличия некоего базисного знания, которое есть у производителей, в то время как никакого капитала еще не произведено.

В работе Lucas (1988) считается, что знание создается и передается посредством человеческого капитала. Следовательно, K_i относится к нанятому фирмой человеческому капиталу, а K к агрегированному уровню человеческого капитала в промышленности или в стране. В этом случае эффекты распространения включают в себя взаимодействие с умными людьми. Тогда возникает важный вопрос, основаны ли эффекты распространения в данном случае на общем или среднем уровне человеческого капитала (мы обсудим это позже).

С одной стороны, предположение распространения знаний вполне естественно, так как знание имеет неконкурентный характер: если одна фирма использует некоторую идею, то она не может воспрепятствовать другой фирме использовать ее. С другой стороны, у фирм есть стимул держать в секрете свои открытия или официально защищать свои изобретения патентами. В таком случае знания о способах повышения производительности будут просачиваться постепенно, а изобретатели будут пользоваться конкурентными преимуществами некоторое время. В самом деле, в децентрализованной экономике такое индивидуальное преимущество является крайне важным для мотивации инвестиционных процессов, в особенности для таких, например, как описанные в работе Griliches (1979) расходы на НИОКР, направляемые непосредственно на получение конкретных положительных результатов. Однако тот вид взаимодействия между фирмами, который возникает в данной схеме, не может быть адекватно описан стандартными моделями совершенной конкуренции, а рассмотрение альтернативных подходов мы отложим до глав 6 и 7. В данном же разделе мы сделаем экстремальное предположение, что все открытия являются непреднамеренными побочными продуктами инвестиций и что эти открытия немедленно становятся общим знанием. Такая спецификация позволяет нам сохранить структуру совершенной конкуренции, хотя результаты окажутся не оптимальными по Парето.

Одним из предположений в данной модели является то, что распространение знаний осуществляется на уровне всей экономики. Альтернативные предположения здесь могут заключаться в том, что это распространение остается в рамках промышленности, ограничено некоторым географическим регионом, со своей политической юрисдикцией, и т. д. Определение границ распространения знаний крайне важно для дальнейшего практического применения данной модели.

Прибыль фирмы может быть записана в виде

$$L_i \cdot [F(k_i, K) - (r + \delta) \cdot k_i - w], \tag{4.24}$$

где $r + \delta$ – цена аренды капитала, w – заработная плата. Как обычно, предполагаем, что для каждой конкурентной фирмы эти цены на ресурсы заданы извне. Теперь сделаем параллельное предположение, что фирмы достаточно малы, так что влияние каждой из них на агрегированный объем капитала ничтожно и, следовательно, K также задано извне. Исходя из задачи максимизации прибыли и условия нулевой прибыли (детали – в гл. 2), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial k_i} &= F_1(k_i, K) = r + \delta, \\ \frac{\partial Y_i}{\partial L_i} &= F(k_i, K) - k_i \cdot F_1(k_i, K) = w, \end{aligned} \tag{4.25}$$

где $F_1(\cdot)$ – частная производная $F(k_i, K)$ по первому аргументу, k_i – *частный* предельный продукт капитала. В частности, в этом предельном продукте не учитывается вклад k_i в K и, следовательно, в агрегированное знание.

В равновесии все фирмы находятся в одинаковых условиях, так что имеет место $k_i = k$ и $K = kL$. Поскольку $F(k_i, K)$ однородна степени один относительно k_i и K, то мы можем записать средний продукт капитала в виде

$$\frac{F(k_i, K)}{k_i} = f\left(\frac{K}{k_i}\right) = f(L), \tag{4.26}$$

где $f(L)$ – функция среднего продукта капитала, удовлетворяющая условиям $f'(L) > 0$ и $f''(L) < 0$. Заметьте, что средний продукт здесь не зависит от k, потому что обучение на собственном опыте и эффекты распространения исключают возможность убывания отдачи. Зато средний продукт в данном случае является возрастающей функцией трудового ресурса L. Это свойство достаточно необычно для рассматриваемых в данной книге моделей и приводит к эффекту масштаба, который мы обсудим позже.

Частный предельный продукт капитала может быть выражен из уравнения (4.26) в виде

$$F_1(k_i, K) = f(L) - L \cdot f'(L). \tag{4.27}$$

Следовательно, частный предельный продукт капитала меньше среднего продукта $f(L)$ и не зависит от k. Из уравнения (4.27) следует также, что частный предельный продукт капитала является возрастающей функцией L (потому что $f''(L) < 0$).

4.3.2. Равновесие

Мы по-прежнему будем считать, что экономика закрыта и что в ней бесконечно живущие домохозяйства максимизируют полезность обычным образом. Тогда бюджетное ограничение задается посредством равенства (4.2), темп прироста подушевого потребления задается уравнением (4.4) и условие трансверсальности — равенством (4.5). Используя условие $r = F_1(k_i, K)$ и формулу для частного предельного продукта капитала (4.27), получаем из (4.4) выражение вида

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f(L) - L \cdot f'(L) - \delta - \rho]. \tag{4.28}$$

Так же как и в AK-модели, этот темп прироста постоянен (поскольку L константа). Предположим, что параметры в этом выражении таковы, что темп прироста подушевого потребления положителен, но не настолько велик, чтобы привести к бесконечной полезности:

$$f(L) - L \cdot f'(L) > \rho + \delta > (1 - \theta) \cdot \frac{f(L) - L \cdot f'(L) - \delta - \rho}{\theta} + \delta. \tag{4.29}$$

Это условие соответствует неравенству (4.12) в AK-модели.

Если мы подставим $a = k$ и условия первого порядка из уравнений (4.25) в бюджетное ограничение (4.2), то получим уравнение накопления k:

$$\dot{k} = f(L) \cdot k - c - \delta k. \tag{4.30}$$

Нетрудно проверить, что с этим уравнением и условием трансверсальности в данной модели отсутствует переходная динамика: переменные k и y растут всегда с постоянным темпом, равным темпу $\dot{c}/c$ в уравнении (4.28). В силу того что дальнейший анализ по существу такой же, что и для AK-модели, оставим его в качестве упражнения.

4.3.3. Парето-неоптимальность и выводы для экономической политики

Для определения того, являются ли полученные результаты оптимальными по Парето, будем следовать нашей обычной практике сравнения децентрализованного решения с результатом оптимизации социальным управляющим. Управляющий максимизирует полезность (4.1) (сейчас темп n равен нулю) при наличии накопительного ограничения (4.30). Ключевым моментом данной оптимизации является то, что, в отличие от индивидуального производителя, социальный управляющий осознает, что каждый прирост объема капитала фирмы добавляет столько же в агрегированный капитал и, следовательно, вносит вклад в производительность всех остальных фирм в экономике. Другими словами, социальный управляющий *интернализирует* распространение знаний среди фирм (т. е. считает, что фирмы все новые знания сразу усвоили).

Для того чтобы найти оптимальные траектории c и k, выпишем гамильтониан:

$$J = e^{-\rho t} \cdot \frac{(c^{1-\theta} - 1)}{(1-\theta)} + \nu \cdot [f(L) \cdot k - c - \delta k].$$

Оптимизация включает в себя выполнение стандартных условий

$$J_c = 0, \quad \dot{\nu} = -J_k$$

и условия трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} \nu k = 0.$$

Манипулируя условиями первого порядка, как это обычно делается, можно получить условие для темпа прироста c:

$$\frac{\dot{c}}{c}\,(\text{Социальное планирование}) = \frac{1}{\theta} \cdot [f(L - \delta - \rho]. \tag{4.31}$$

Отсюда видно, что социальный управляющий устанавливает темп прироста потребления в соответствии со значением среднего продукта капитала $f(L)$, в то время как децентрализованное решение, представленное уравнением (4.28), соотносит темп прироста с частным предельным продуктом капитала

$$f(L) - L \cdot f'(L).$$

Как видим, этот частный предельный продукт не дотягивает до среднего продукта, так что в децентрализованном равновесии рост получается чересчур медленным.

В данной модели эффекты обучения на собственном опыте и распространения знаний в точности компенсируют убывающую отдачу, с которой сталкивается индивидуальный производитель. Следовательно, отдача капитала постоянна на социальном уровне, а социальный предельный продукт капитала равен среднему продукту $f(L)$. Так как социальный управляющий усваивает распространенные знания, то этот социальный предельный продукт появляется в качестве фактора роста в уравнении (4.31). В децентрализованном решении (4.28) темп прироста получается меньше из-за того, что индивидуальные производители не усваивают распространенные знания; т. е. они принимают решение, исходя из значения частного предельного продукта $f(L) - L \cdot f'(L)$, которое меньше значения социального предельного продукта.

В децентрализованной экономике социальный оптимум может быть достигнут посредством субсидирования закупки капитальных товаров (инвестиционный налоговый кредит). Другой способ — правительство может субсидировать производство и таким образом породить оптимум. Эти субсидии дают требуемый эффект в данной модели в силу того что они увеличивают частную норму доходности инвестиций и, следовательно, заставляют сокращать разрыв между социальной доходностью и частной (которая меньше социальной). Разумеется, для того чтобы избежать различных других несовпадений социального и частного планирования, субсидирование капитала или производства должно финансироваться посредством единого налога. Обычно размер такого рода налога весьма трудно определить, но в данной модели, в которой нет возможности выбора между работой и досугом, единому налогу эквивалентен потребительский налог с фиксированной ставкой. Такой тип налога был изучен в гл. 3.

4.3.4. Пример с функцией Кобба—Дугласа

Если в качестве производственной функции (4.23) взять функцию Кобба—Дугласа, то выпуск i-й фирмы будет задаваться уравнением

$$Y_i A \cdot (K_i)^{\alpha} \cdot (KL_i)^{1-\alpha}, \tag{4.32}$$

где $0 < \alpha < 1$. Если мы произведем замену переменных

$$y_i = \frac{Y_i}{L_i}, \quad k_i = \frac{K_i}{L_i} \quad \text{и} \quad k = \frac{K}{L}$$

и затем приравняем $y_i = y$ и $k_i = k$, то средний продукт капитала примет вид

$$\frac{y}{k} = f(L) = AL^{1-\alpha}, \tag{4.33}$$

что является частным случаем уравнения (4.26). Заметим, что в уравнении (4.33) y/k не зависит от k и является возрастающей функцией L.

Для получения частного предельного продукта продифференцируем уравнение (4.32) по K_i при фиксированных K и L, затем подставим $k_i = k$, получим

$$\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} = A\alpha L^{1-\alpha}, \tag{4.34}$$

что является частным случаем уравнения (4.27). В соответствии с упомянутыми выше общими свойствами, частный предельный продукт капитала в уравнении (4.34) не зависит от k и является возрастающей функцией L, а также меньше, чем средний продукт из уравнения (4.33) (потому что $0 < \alpha < 1$).

Если мы подставим выражение для частного предельного продукта капитала (4.34) в уравнение (4.28), то получим децентрализованный темп прироста[1)]

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (A\alpha L^{1-\alpha} - \delta - \rho). \tag{4.35}$$

Подстановка выражения для среднего продукта капитала (4.33) в уравнение (4.31) дает темп прироста в случае социального планирования

$$\frac{\dot{c}}{c}\,(\text{Социальное планирование}) = \frac{1}{\theta} \cdot (AL^{1-\alpha} - \delta - \rho). \tag{4.36}$$

Так как $\alpha < 1$, то децентрализованный темп прироста меньше социально управляемого.

Социальный оптимум в децентрализованной экономике может быть достигнут посредством введения инвестиционного налогового кредита по ставке $1 - \alpha$, предоставляемой в виде возврата части единого налога. Если покупатели капитала платят за него только долю α цены, то частная доходность капитала равна социальной доходности. В таком случае легко показать, что и полное оптимальное решение для децентрализованной экономики совпадает с решением социального управляющего. Другой способ совмещения социального и децентрализованного оптимумов — субсидирование производства по ставке $(1 - \alpha)/\alpha$.

4.3.5. Эффекты масштаба

Из данной модели вытекает эффект масштаба, который заключается в том, что увеличение агрегированной рабочей силы L поднимает подушевой темп роста как в децентрализованной экономике, исходя из уравнения (4.28), так и в экономике с социальным управляющим согласно (4.31). Эти результаты отражают положительное воздействие (эффект) L на частный предельный продукт капитала $f(L) - L \cdot f'(L)$ в уравнении (4.27) и на средний продукт $f(L)$ в уравнении (4.26).

[1)]Параметры предполагаются таковыми, чтобы положительный рост был возможен, а полезность была конечной, т. е.

$$A\alpha L^{1-\alpha} > \rho + \delta > (1-\theta) \cdot \frac{(A\alpha L^{1-\alpha} - \delta - \rho)}{\theta} + \delta.$$

Это частный случай неравенства (8.23).

Более того, если рабочая сила растет со временем, то подушевые темпы прироста также будут возрастать со временем[1].

Если мы отождествим L с агрегированной рабочей силой страны, то прогноз модели состоит в том, что в странах с большим числом рабочих подушевые величины будут расти быстрее. Эмпирические результаты, которые обсуждаются в гл. 12 на примере большого числа стран в период, начинающийся после Второй мировой войны, показывают, что темп прироста ВВП на человека весьма слабо связан с численностью населения. (Эти результаты верны при постоянстве начального уровня ВВП на человека, уровня образования среднего человека и некоторых других переменных.) Таким образом, реальные данные не подтверждают эффект масштаба для экономики размера страны.

Возможно, что переменная масштаба распространения знаний L не имеет особо тесной связи с агрегатами на уровне страны. Например, подходящий масштаб может быть больше, чем размер внутренней экономики, если производители получают выгоду от знаний, накопленных в других странах. Kremer (1993) утверждает, что корректной переменной масштаба вполне может быть мировое население, и он приводит ряд подтверждающих его точку зрения исторических данных за длительный период, согласно которым численность мирового населения положительно коррелирована с ростом производительности. Альтернатива заключается в том, что если свобода перемещения идей распространяется только на ближайших соседей (в рамках географических границ, например, или в промышленности), то подходящий масштаб может быть меньше, чем внутренняя экономика. Эти соображения снижают прикладное значение моделей с распространением знаний, а их тестирование на реальных макроэкономических данных весьма затруднительно.

Мы получили эффект масштаба в модели, в которой учитываются обучение на собственном опыте и распространение знаний. Эти элементы генерируют положительное воздействие роста масштаба производства на темпы роста, потому что их наличие приводит к постоянной отдаче K и возрастающей отдаче K и L на социальном уровне. Аналогичный эффект масштаба наблюдался бы и в случае, если бы такая же структура отдачи факторов возникла и по другим причинам. Однако модель с обучением на собственном опыте и распространением

---

[1] Этот результат верен непосредственно для $\dot{c}/c$, но $\dot{k}/k$ и $\dot{y}/y$ уже не будут совпадать с $\dot{c}/c$ при условии роста L. Кроме того, если L растет достаточно быстро, то при $\theta < 1$ условие ограничения полезности (8.23) будет в конце концов нарушено.

знаний имеет свою специфику, которая заключается в том, что из нее также вытекает постоянная эффективность с ростом масштаба факторов K_i и L_i, уровень которых определяется фирмой i по своему выбору. Если возрастающая отдача имеет место на уровне фирмы, то модель не будет удовлетворять условиям совершенной конкуренции, так как в этом случае фирмы заинтересованы в неограниченном росте для того, чтобы получить выгоду от масштаба экономики. Мы избежим такого исхода, если предположим, что технология фирмы зависит от агрегированного капитала K и что каждая фирма не обращает никакого внимания на свой собственный вклад в этот общий агрегат. В этом случае предположение совершенной конкуренции не нарушается, но при этом конкурентное равновесие получается не оптимальным по Парето.

Один из способов исключения эффекта масштаба заключается в подборе каких-нибудь аргументов в пользу того, что множитель A_i в функции (4.22) должен зависеть от среднего капитала на одного работника K/L, а не от агрегированного капитала K. Эта альтернативная спецификация была предложена в работе Frankel (1962), и хотя это главный труд данного автора, в нем отсутствуют достаточные объяснения происходящего. В работе Lucas (1988) также использована данная спецификация, так как Лукас считает, что в процессы обучения и распространения знаний вовлечен человеческий капитал и что каждый производитель получает выгоду от *среднего* уровня человеческого капитала в экономике, а не от *агрегированного*. Таким образом, вместо того чтобы учитывать аккумулирование знания или опыта других производителей, Лукас концентрирует внимание на выгоде от взаимодействия (бесплатного) со средним человеком, который обладает средним уровнем навыков и знаний. Формулировка Лукаса может пройти, если мы будем мыслить в таком ключе, что наличие глупых людей затрудняет идентификацию и использование хороших идей, генерируемых умными людьми.

Для того чтобы исследовать эту модель, положим $A_i = K/L$ в функции (4.22) и затем проведем тот же анализ, что и ранее. Единственным отличием в результатах здесь будет то, что средний продукт капитала и частный предельный продукт капитала больше не зависят от L. Например, в случае функции Кобба–Дугласа средний продукт в уравнении (4.33) становится равным A, а не $AL^{1-\alpha}$, частный предельный продукт в (4.34) становится равным $A\alpha$, а не $A\alpha L^{1-\alpha}$. Так как формальный анализ данной модели аналогичен проведенному ранее, оставим доказательство этих утверждений в качестве упражнения.

4.4. Общественные услуги и эндогенный рост

В AK-модели все, что изменяет уровень базовой технологии A, влияет на долгосрочный подушевой темп роста. В модели с обучением на собственном опыте и распространением знаний неконкурентность идей способна исключить склонность к убыванию отдачи накопления капитала и, следовательно, сгенерировать модель AK-типа. В данном разделе мы покажем, что учет правительственных общественных услуг также может привести к модели AK-типа. В этом случае правительственные предпочтения относительно общественных услуг определяют коэффициент A и, следовательно, влияют на долгосрочный темп роста экономики.

4.4.1. Модель с общественными благами

В данном разделе мы расширяем модель из гл. 3, в которой правительственные закупки товаров и услуг G входят в производственную функцию в виде чистых общественных благ. Если производственная функция принимает вид функции Кобба Дугласа, то спецификация для фирмы i имеет вид (согласно Barro, 1990b)

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot K_i^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha}, \qquad (4.37)$$

где $0 < \alpha < 1$. Из этого уравнения следует, что производство для каждой фирмы обладает свойством постоянной эффективности с ростом масштаба используемых частных ресурсов L_i и K_i. Предположим, что агрегированная рабочая сила L постоянна. При фиксированном G экономика столкнется с убывающей отдачей аккумулирования агрегированного капитала K, как это было в модели Рамсея в гл. 2. Однако если G растет по мере роста K, то из уравнения (4.37) следует, что убывающей отдачи не возникает, т. е. производственная функция обладает свойством постоянной отдачи K_i и G при фиксированном L_i. Поэтому экономика способна на эндогенный рост, как и AK-модель, изученная в начале данной главы. Также следует отметить, что из вида производственной функции следует, что общественные услуги дополняют частные ресурсы в том смысле, что прирост G увеличивает предельные продукты L_i и K_i.

Если бы показатель степени G в уравнении (4.37) был меньше $1-\alpha$, то возникла бы убывающая отдача K_i и G, и эта убывающая отдача воспрепятствовала бы возникновению эндогенного роста. И наоборот, если бы показатель степени был больше $1-\alpha$, то у темпов роста появилась бы тенденция расти со временем. В силу сказанного, мы сфокусируемся на специальном случае, когда показатель степени G равен $1-\alpha$, так что из постоянства отдачи K_i и G следует, что в экономике возможен эндогенный рост. При таких предположениях данная функция становится похожей на производственную функцию (4.23) в модели с обучением на собственном опыте и распространением знаний, за исключением того, что агрегированный капитал K, заменен на количество общественных благ G.

Предположим, что правительство финансирует свои закупки товаров и услуг едиными налогами (которые в отсутствие выбора работа/досуг могут иметь вид ставок налога на потребление или трудовой доход, как это обсуждалось в гл. 3). При заданном G каждая фирма, максимизирующая прибыль, приравнивает предельный продукт капитала к цене аренды $r + \delta$. Тогда из (4.37) следует

$$\alpha A \cdot k_i^{-(1-\alpha)} \cdot G^{1-\alpha} = r + \delta. \tag{4.38}$$

Следовательно, все фирмы выбирают одно и то же значение отношения капитала к труду $k_i = k$. Производственная функция (4.37) в таком случае может быть агрегирована, в результате чего будем иметь

$$Y = ALk^{\alpha}G^{1-\alpha}. \tag{4.39}$$

Из (4.39) следует

$$G = \left(\frac{G}{Y}\right)^{1/\alpha} (AL)^{1/\alpha} \cdot k. \tag{4.40}$$

Предположим теперь, что правительство выбирает отношение закупок к ВВП G/Y таким образом, чтобы оно было постоянным. Если мы подставим G из уравнения (4.40) в уравнение (4.38), то получим

$$r + \delta = \alpha A^{1/\alpha}\left(\frac{G}{Y}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot L^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{4.41}$$

Если G/Y и L постоянны, то предельный продукт капитала не зависит от k и, следовательно, постоянен во времени. Уровень предельного продукта возрастает по L, так что в модели наблюдаются эффекты масштаба. Эти результаты аналогичны тем, что были получены в модели с обучением на собственном опыте и распространением знаний (см. уравнение (4.27)).

Постоянный предельный продукт капитала в (4.41) играет ту же роль в процессе роста, какую играла константа A в AK-модели. Здесь также отсутствует переходная динамика и темпы прироста c, k и y все равны одной константе. Мы можем определить этот общий темп прироста из выражения для роста потребления (4.4)[1]:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\alpha A^{1/\alpha} \left(\frac{G}{Y}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot L^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho\right]. \tag{4.42}$$

Темп прироста является растущей функцией G/Y, потому что мы предположили, что расходы на общественные блага G финансируются посредством единого налога.

Мы можем предположить, что расходы G частично профинансированы сложной системой налогообложения — в данной модели это могли бы быть налоги на капитал τ_a и τ_f, которые мы рассматривали в гл. 3. Тогда выражение для предельного продукта капитала (4.42),

$$\alpha A^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{G}{Y}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot L^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta$$

будет иметь дополнительный множитель $(1 - \tau_a) \cdot (1 - \tau_f)$ и будет представлять собой предельный продукт капитала за вычетом налогов. Далее, если τ_a и τ_f растут по мере роста G/Y, то прямое положительное воздействие G/Y на темп прироста в уравнении (4.42) будет нейтрализовано негативным эффектом от высоких налоговых ставок. Отношение этого темпа прироста к G/Y, как правило, немонотонно — сначала оно растет, но затем, когда ставка налога начинает доминировать, оно падает. Точнее про это отношение сказать нельзя, так как оно зависит от того, как τ_a и τ_f связаны с G/Y. Оставим дальнейшее исследование этого вопроса в качестве упражнения.

Теперь вернемся к случаю единых налогов, как предполагается в (4.42). Мы можем, как обычно, определить оптимальные результаты в данной модели на основании задачи, которую решает великодушный социальный управляющий, максимизирующий полезность репрезентативного домохозяйства. Из этой максимизационной задачи вытекает

---

[1] Так же как в моделях AK и распространения знаний, для того чтобы темп прироста был положительным, а полезность ограниченной, следует наложить дополнительные ограничения-неравенства:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} - \delta > \rho$$

$$\text{и} \quad \left[\frac{(\theta - 1)}{\theta}\right] \cdot \left(\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} - \delta\right) + \rho/\theta > 0$$

(последнее неравенство соответствует условию трансверсальности). Значение для $\partial Y_i/\partial K_i$ дается в правой части уравнения (4.41).

естественное условие эффективности $\partial Y/\partial G = 1$[1]. Из частного вида производственной функции (4.39) следует, что это условие соответствует следующему:

$$\frac{G}{Y} = 1 - \alpha. \tag{4.43}$$

Следовательно, оптимальное отношение правительственных закупок к ВВП в данной модели, как и ожидалось, постоянно.

Если G/Y определено из (4.43), то децентрализованный темп прироста, определяемый как решение из (4.42), совпадает с выбором социального управляющего[2]. Этот децентрализованный результат будет оптимальным в силу предположения, что G финансируется едиными налогами. Подстановка (4.43) в выражение для темпа прироста (4.42) дает

$$\begin{gathered}\frac{\dot{c}}{c}\,(\text{Социальное планирование}) = \\ = \frac{1}{\theta}\cdot\left[\alpha A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}\cdot L^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho\right].\end{gathered} \tag{4.44}$$

Прирост масштаба, который в данном случае представлен G, увеличивает предельный продукт капитала в уравнении (4.41) и, соответственно, исходя из уравнения (4.44), увеличивает темп прироста.

---

[1] Управляющий выбирает c, k и G таким образом, чтобы максимизировать

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\cdot\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}\,dt$$

при условии

$$\dot{k} = Ak^\alpha G^{1-\alpha} - c - \delta k - \frac{G}{L}.$$

Гамильтониан здесь:

$$J = e^{-\rho t}\cdot\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \nu\cdot\left(Ak^\alpha G^{1-\alpha} - c - \delta k - \frac{G}{L}\right).$$

Условия первого порядка:

$$\text{(i) } e^{-\rho t}\cdot c^{-\theta} = \nu,$$

$$\text{(ii) } A\cdot(1-\alpha)\cdot k^\alpha G^{-\alpha} = \frac{1}{L},$$

$$\text{(iii) } -\dot{\nu} = \nu\cdot(A\alpha k^{\alpha-1}G^{1-\alpha} - \delta)$$

плюс обычное условие трансверсальности. Заметьте, что (ii) эквивалентно $\partial Y/\partial G = 1$.

[2] Следует взять логарифм и производную условия первого порядка (i) из предыдущей сноски, подставить результат в (iii) и, использовав (ii), получить (4.44).

Следовательно, модель с общественными благами прогнозирует эффекты масштаба, похожие на те, что мы видели в модели с обучением на собственном опыте и распространением знаний (см. уравнения (4.35) и (4.36)). В данном контексте экономика получает выгоду от большего масштаба, потому что правительственные услуги предполагаются неконкурентными и, следовательно, могут распространяться по новым их потребителям бесплатно. Рост A, связанный с ростом населения, влечет за собой увеличение подушевых темпов прироста. Таким образом, так же как и в модели с обучением на собственном опыте и распространением знаний, следует положить темп прироста населения равным нулю, чтобы существовали стационарные состояния.

Как мы уже говорили, анализ данных по странам показывает, что темп прироста ВВП на душу населения мало связан с размером страны, измеряемым численностью населения. (Страны являются естественными единицами наблюдения в данном случае, если считать, что выгода от создаваемых правительством общественных благ распространяется только на подконтрольный данному правительству региону, т. е. на страну.) Отсутствие более важных эффектов масштаба означает, вероятно, что большинство правительственных услуг не обладают тем свойством неконкурентности, которое предполагается в модели. Поэтому мы сейчас рассмотрим альтернативную модель, в которой на правительственные услуги налагаются ограничения. Мы покажем, что для этой модели характерны самые разнообразные следствия, связанные как с эффектами масштаба, так и с планированием правительственного бюджета.

4.4.2. Модель перегрузки

Как сказано в гл. 3, многие продукты правительственной деятельности такие, как дороги, водопровод, полицейские и пожарные услуги, суды, подвергаются перегрузке. При заданном агрегированном объеме услуг G количество услуг, доступное одному индивидууму, снижается по мере того, как другие потребители этих услуг перегружают общественную инфраструктуру. Для той части правительственной деятельности, которая служит ресурсом в частном производстве, мы можем смоделировать перегрузку (следуя Barro and Sala-i-Martin, 1992c), записав производственную функцию для i-го производителя в виде

$$Y_i = AK_i \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right), \tag{4.45}$$

где $f' > 0$ и $f'' < 0$. Производственный процесс имеет вид AK, но модифицирован посредством множителя, который содержит общественные услуги: прирост G *относительно* агрегированного выпуска Y увеличивает Y_i при заданном K_i. В силу перегрузки прирост Y при заданном G снижает количество общественных услуг, доступных каждому производителю и, следовательно, сокращает Y_i. В данной формулировке предполагается, что для того, чтобы спектр общественных услуг, доступных каждому потребителю, расширялся, необходимо, чтобы величина G росла относительно валового выпуска Y. Мы могли бы вместо этого предположить, что величина G должна расти относительно агрегированного частного капитала K, для того чтобы увеличилось число услуг. Но результаты в этом случае, по существу, будут такими же.

При заданных G и Y производство фирмы обладает свойством постоянной отдачи используемого капитала K_i. Если G растет с тем же темпом, что и Y, G/Y постоянно и имеет место постоянная отдача K_i, то такая экономика генерирует эндогенный рост, как и AK-модель.

Условие для предельного продукта капитала преобразуется из (4.41) в следующее:

$$r + \delta = A \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right). \tag{4.46}$$

Заметим, что здесь, в отличие от модели с общественными товарами и услугами из гл. 3, предельный продукт и, следовательно, норма доходности не зависят от переменной масштаба L. Темпы прироста c, k и y – все равны одной константе, из правой части уравнения (4.4), а в данном случае

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right) - \delta - \rho\right]. \tag{4.47}$$

Этот темп прироста является возрастающей функцией G/Y и не зависит от L. Независимость от L означает, что эффекты масштаба в данной модели не проявляются.

Теперь нам вновь следует решать задачу социального управляющего для установления возможной оптимальности по Парето децентрализованного решения. Управляющий максимизирует обычную функцию полезности при ресурсном ограничении (которое записано в подушевых величинах),

$$\dot{k} = Ak \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right) - c - \delta k - \frac{G}{L}, \tag{4.48}$$

где, согласно нашему предположению, темп прироста населения равен 0. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$J = e^{-\rho t} \cdot \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + v \cdot \left[Ak \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right) - c - \delta k - \frac{G}{L} \right]. \tag{4.49}$$

Перед тем как мы найдем производные по c, k и G, заметим, что взять производную производственной функции по k и G не так уж и просто. Дело в том, что агрегированный выпуск появляется внутри выражения для самого агрегированного выпуска. Следовательно, при взятии производной y по k нам следует учитывать, что Y зависит от Y через член $f(G/Y)$. Для решения этой задачи запишем производную по k в виде

$$\frac{\partial y}{\partial k} = A \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right) + Ak \cdot f'\left(\frac{G}{Y}\right)\left(\frac{-G/L}{y^2}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial k}, \tag{4.50}$$

откуда получаем $\partial y/\partial k$:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{A \cdot f(G/Y)}{1 + (G/Y) \cdot f'(G/Y)/f(G/Y)}. \tag{4.51}$$

Аналогично, производная y по G имеет вид

$$\frac{\partial y}{\partial G} = L \cdot \frac{f'(G/Y)/f(G/Y)}{1 + (G/Y) \cdot f'(G/Y)/f(G/Y)}. \tag{4.52}$$

Теперь все готово для получения условий первого порядка для социального управляющего. Условие первого порядка относительно потребления в данном случае — обычное уравнение роста потребления

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(-\frac{\dot{v}}{v} - \rho \right).$$

Условие первого порядка относительно G имеет вид $\partial Y/\partial G = 1$. И это не удивительно, что социальный управляющий стремится выполнить это условие: из соображений эффективности следует необходимость использовать G в качестве ресурса, до тех пор пока предельный продукт этого ресурса не будет равен предельной единице самого G. Используя уравнение (4.52), запишем это условие эффективности в виде

$$\frac{f'(G/Y)}{f(G/Y)} = \frac{1}{1 - (G/Y)}. \tag{4.53}$$

Пусть отношение $(G/Y)^*$ удовлетворяет этому условию. Условие первого порядка относительно капитала в данном случае принимает вид

$$-\dot{v} = v \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial k} - \delta \right). \tag{4.54}$$

Подставляя уравнения (4.54), (4.51), и (4.52) в уравнение роста потребления, получаем искомый темп прироста с точки зрения социального управляющего:

$$\frac{\dot{c}}{c}\,(\text{Социальное планирование}) = \\ = \frac{1}{\theta}\cdot\left\{\left[1-\left(\frac{G}{Y}\right)^*\right]\cdot A\cdot f\left[\left(\frac{G}{Y}\right)^*\right]-\delta-\rho\right\}. \tag{4.55}$$

Таким образом, новым результатом здесь является то, что темп прироста, полученный социальным управляющим, не совпадает с децентрализованным темпом прироста, который дается уравнением (4.47) даже при

$$\frac{G}{Y} = \left(\frac{G}{Y}\right)^*.$$

Причиной этому служит то, что децентрализованный результат получен при едином налоге, а такая схема налогообложения не очень-то хороша в условиях, когда общественные услуги подвергаются перегрузке. Смысл уравнения (4.55) в следующем. Решение индивидуального производителя увеличить капитал K_i и, следовательно, выпуск Y_i, вносит определенный вклад в объем общего выпуска Y и, следовательно, увеличивает нагрузку на заданный агрегированный объем общественных услуг G. При едином налоге, индивидуальный производитель игнорирует эти неблагоприятные внешние эффекты и в результате имеет излишне большое стремление к увеличению K_i и Y_i. Чтобы этого не происходило, производитель, который увеличивает Y_i, должен представить достаточное количество дополнительных ресурсов для поддержания общественных услуг, доступных всем остальным, т. е. для сохранения отношения G/Y постоянным. Требуемая компенсация равна добавке к G/Y, умноженной на Y. Вот откуда берется множитель $[1-(G/Y)^*]$ у валового предельного продукта капитала $A\cdot f[(G/Y)^*]$ в уравнении (4.55). Интересно отметить, что если бы выпуск облагался налогом пропорционально ставке $(G/Y)^*$, то децентрализованное решение соответствовало бы результату социального управляющего. Тогда бы эта ставка налога - фактически плата пользователя за предоставленные общественные услуги - снизила бы предельный продукт капитала за вычетом налога до

$$\left[1-\left(\frac{G}{Y}\right)^*\right]\cdot A\cdot f\left[\left(\frac{G}{Y}\right)^*\right].$$

а это и есть выражение, которое присутствует в уравнении (4.55).

4.5. Переходная динамика, эндогенный рост

В моделях, которые мы до сих пор рассматривали в данной главе, отсутствовала переходная динамика. В частности, в этих моделях подушевые темпы прироста не зависели от начальных значений k и y. В силу этого данные модели не согласуются с эмпирическими наблюдениями относительно сходимости, обсуждаемыми в гл. 11 и 12.

Как мы показали в гл. 1, в моделях с постоянной нормой сбережения, вполне возможно построить модель эндогенного роста, в которой присутствует переходная динамика, так что свойство сходимости сохранено. Такие же результаты имеют место, если производственная технология модифицирована таким образом, чтобы образовалась убывающая отдача капитала, и, кроме того, предполагается, что предельный продукт капитала ограничен снизу при стремлении капитала к бесконечности (так что условие Инады на бесконечности нарушено). В данном разделе мы показываем, как этот вид технологии можно объединить с оптимизацией домохозяйства, применяемой в модели Рамсея.

Рассматриваемые в данной главе технологии имеют вид, предложенный в работе Jones and Manuelli (1990),

$$Y = F(K, L) = AK + \Omega(K, L), \tag{4.56}$$

где $\Omega(K, L)$ обладает свойствами неоклассической производственной функции: положительный и убывающий предельный продукт, постоянная эффективность с ростом масштаба производства, условия Инады (уравнения (1.4)-(1.6)). Производственные функции в виде (4.56) не являются неоклассическими в силу того что они не удовлетворяют одному из условий Инады,

$$\lim_{K\to\infty}\left[\frac{\partial Y}{\partial K}\right] = A > 0.$$

AK-слагаемое производственной функции доставляет эндогенный рост, в то время как слагаемое $\Omega(K, L)$ генерирует процесс сходимости. Для упрощения дальнейшего анализа ограничимся выбором некоторых частных функциональных форм для $\Omega(K, L)$.

4.5.1. Пример с функцией Кобба—Дугласа

Рассмотрим производственную функцию, представленную в гл. 1 (уравнение (1.35)):

$$Y = F(K, L) = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

где $A > 0$, $B > 0$ и $0 < \alpha < 1$[1]. Или в подушевых величинах:

$$y = f(k) = Ak + Bk^{\alpha}. \tag{4.57}$$

Заметим, что

$$\lim_{k \to \infty} [f'(k)] = A > 0.$$

Уравнения динамики для k и c те же, что и в модели Рамсея гл. 2 (уравнения (2.23) и (2.23) с $x = 0$):

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{f(k)}{k} - \frac{c}{k} - (n+\delta) = A + B \cdot k^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (n+\delta); \tag{4.58}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(k) - \delta - \rho] = \frac{1}{\theta} \cdot [A + B\alpha \cdot k^{\alpha-1} - \delta - \rho]. \tag{4.59}$$

Если модель генерирует эндогенный рост, т. е. $(\dot{k}/k)^* > 0$, то $k \to \infty$ при $t \to \infty$, так что члены, содержащие $k^{\alpha-1}$ в обоих уравнениях, асимптотически приближаются к нулю. Следовательно, стационарное состояние имеет в точности такой же вид, что и в AK-модели, стационарные темпы прироста c, k и y равны меду собой и величине (из уравнения (4.16))

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta} \cdot (A - \delta - \rho). \tag{4.60}$$

Будем считать, что $A > \delta + \rho$, так что $\gamma^* > 0$[2]. (Если $A \leqslant \delta + \rho$, то $\gamma^* = 0$, так же как и в стандартной модели Рамсея, описанной в гл. 2.)

Мы могли бы, следуя процедуре рис. 2.1, построить фазовую диаграмму в пространстве (k, c). Однако этот метод не срабатывает в данном случае из-за того, что k и c всегда растут при $\gamma^* > 0$. Для разрешения этой проблемы произведем замену переменных таким образом, чтобы новые переменные были постоянны в стационарном состоянии. В качестве новых переменных возьмем средний продукт капитала $z \equiv f(k)/k$ и отношение потребления к капиталу $\chi \equiv c/k$. Отметим, что z является переменной, *похожей на переменную состояния* в том смысле, что подобно k ее значение в некоторый момент времени определяется прошлыми инвестициями и эволюцией L. Соответственно, если

---

[1] Все полученные в данном разделе результаты остаются в силе при замене L на $\hat{L}$, где $\hat{L} = Le^{xt}$; т. е. мы можем учесть экзогенный технологический прогресс в той части производственной функции, которая подвержена убывающей отдаче. Вот если бы параметр A монотонно рос со временем, то стационарное состояние в данной модели отсутствовало бы совсем.

[2] Мы также продолжаем считать, что $\rho > n$, так что из $A > \delta + \rho$ следует $A > \delta + n$. Если бы последнее неравенство не было выполнено, то при постоянном по времени c полезность оказалась бы неограниченной.

совокупный объем инвестиций конечен и значение L не изменяется скачком, то z и k также не могут «подпрыгнуть» в какой-либо момент времени. Напротив, переменная χ *похожа на переменную управления* в том смысле, что подобно c ее значение может скачкообразным образом измениться в некоторый момент времени. (Впрочем, такие прыжки не будут оптимальными в изучаемом нами равновесии.) В отличие от k и c, две новые переменные z и χ являются константами в стационарном состоянии.

Используем уравнения (4.58) и (4.59) для получения динамической системы в новых переменных z и χ. После изрядного количества алгебраических преобразований, получаем:

$$\dot{z} = -(1-\alpha)\cdot(z-A)\cdot(z-\chi-n-\delta); \tag{4.61}$$

$$\dot{\chi} = \chi\cdot\left[(\chi-\phi) - \frac{\theta-\alpha}{\theta}\cdot(z-A)\right], \tag{4.62}$$

где

$$\varphi \equiv (A-\delta)\cdot\frac{\theta-1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n.$$

Для выполнения условия трансверсальности требуем $\varphi > 0$. Это условие гарантирует также, что полезность будет конечной при росте c с темпом γ^* из (4.60). Из уравнений (4.61) и (4.62) следует, что $\dot{z} = \dot{\chi} = 0$ согласуется с $z = A$ и $\chi = \varphi$, которые оказываются стационарными значениями z и χ. (Заметим, что из $z = A$ следует, что асимптотически AK-часть производственной функции мажорирует $BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$-часть.)

На рис. 4.2 показана фазовая диаграмма в пространстве (z, χ). Из уравнения (4.62) следует, что график $\dot{\chi} = 0$ представляет собой (помимо $\chi = 0$) прямую линию

$$\chi = \varphi - A\cdot\frac{\theta-\alpha}{\theta} + z\cdot\frac{\theta-\alpha}{\theta}.$$

Тангенс угла ее наклона меньше 1 и положителен, как показано на диаграмме для случая $\theta > \alpha$. Если $\theta < \alpha$, то данная прямая будет иметь отрицательный угол наклона. В этом случае в силу того что θ значительно меньше единицы, степень межвременного замещения становится нереалистично высокой.

Из уравнения (4.61) следует, что $\dot{z} = 0$, если $z = A$ или если $\chi = z - n - \delta$. Первое из этих двух условий соответствует вертикальной линии в значении $z = A$ на рис. 4.2. Последнее условие представлено прямой линией с тангенсом угла наклона 1 и пересечением с осью χ в отрицательной области. Заметим, что наклон прямой $\dot{z} = 0$ должен

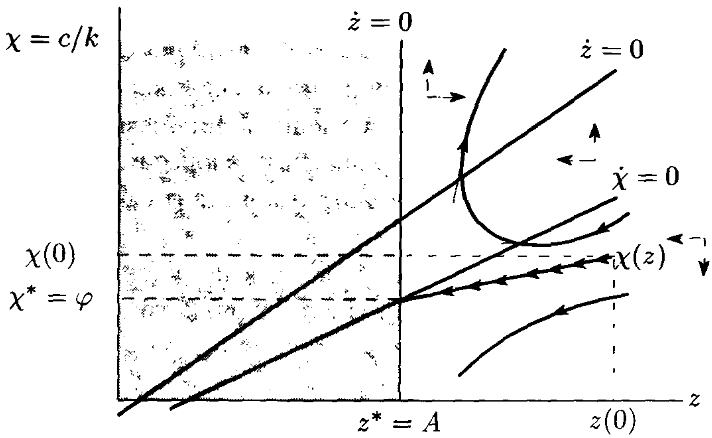


Рис. 4.2. Переходная динамика в модели эндогенного роста (в случае $F[K, L] = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$). Фазовая диаграмма в пространстве (z, χ), где $z \equiv f(k)/k$ — валовой средний продукт капитала и $\chi \equiv c/k$. График $\dot{\chi} = 0$ есть прямая линия с положительным тангенсом угла наклона, меньшим единицы (на диаграмме эта прямая показана в случае $\theta > \alpha$). Существует два условия, которые удовлетворяют $\dot{z} = 0$. Одно из них — вертикальная прямая $z = A$, а другое — прямая с единичным тангенсом угла наклона. Эта последняя прямая должна пересечь вертикальную прямую $z = A$ в значении χ, которое больше χ^*. Так как

$$z \equiv \frac{f(k)}{k} = A + Bk^{\alpha-1} > A,$$

то единственным стационарным состоянием здесь является точка, в которой график $\dot{\chi} = 0$ пересекается с вертикальной прямой $z = A$. Так как в начальный момент времени $z > z^*$, то z и χ монотонно убывают в процессе перехода. (Отметим, что этот результат относительно траектории χ зависит от предположения, что $\theta > \alpha$.)

быть круче наклона прямой $\dot{\chi} = 0$, у которой тангенс угла наклона меньше 1. (Из неравенства $A > \rho + \delta$ следует, что прямая $\dot{z} = 0$ пересекает вертикальную линию $z = A$ в значении χ, которое больше φ, как показано на рисунке.)

В силу того что $z = A + B \cdot k^{\alpha-1} > A$, область на рис. 4.2, в которой $z < A$, не представляет для нас никакого интереса и мы ограничим наш анализ областью $z \geqslant A$. Из рисунка видно, что прямые $\dot{z} = 0$ и $\dot{\chi} = 0$ пересекаются в этой области в единственной точке $z^* = A$ и $\chi^* = \varphi$, которая есть стационарное состояние.

Рассмотрим теперь переходную динамику, начальная позиция которой $z(0) > A$. На рисунке показана устойчивая ветвь, которая соответствует подходящим образом выбранному начальному значению $\chi(0)$. Вдоль этой ветви средний продукт капитала z и отношение потребления к капиталу χ монотонно убывают[1]. Монотонное убывание z соответствует монотонному росту k. Монотонное снижение χ связано с предположением, что $\theta > \alpha$[2]. Если бы мы предположили, что $\theta < \alpha$, то тогда переменная χ монотонно возрастала бы в процессе перехода. (Если $\theta = \alpha$, то в течение всего перехода $\chi = \varphi$, стационарному значению.)

Доля капитала в конечном продукте дается выражением

$$\frac{k \cdot f'(k)}{f(k)} = \frac{Ak + \alpha Bk^{\alpha}}{Ak + Bk^{\alpha}},$$

которое равно α, если $A = 0$, и равно 1, если $B = 0$. Если $A > 0$ и $B > 0$, то при неограниченном возрастании k доля капитала растет к 1, а доля труда снижается к 0. Это следствие модели противоречило бы реальным данным, если бы мы интерпретировали капитал в узком смысле как здания и оборудование, но мы поступим разумнее — добавим человеческий капитал. В этом случае из модели следует, что доля неквалифицированного труда в общем продукте снижается до 0 по мере развития экономики.

Наиболее важным аспектом данной расширенной версии модели является то, что в ней восстанавливается переходная динамика, в процессе которой средний и предельный продукты капитала постепенно убывают в направлении стационарного значения A. Падение производительности капитала заставляет со временем убывать подушевые темпы роста; т. е. модель снова обладает свойством сходимости, которое имеет место в модели Рамсея.

В приложении 2C показано, что в модели Рамсея во время перехода темп прироста капитала на человека $\dot{k}/k$ монотонно убывает[3].

---

[1]Мы можем исключить из рассмотрения неустойчивые траектории. Траектории, сходящиеся к $\chi = 0$ и $z = A$, нарушают условие трансверсальности. Те же, для которых $\chi \to \infty$ и $z \to \infty$, приводят к тому, что за конечное время иссякает весь капитал и, в конце концов, происходит дискретный скачок потребления в ноль.

[2]В приложении 2B отмечено, что c/k монотонно уменьшается в модели Рамсея с технологией Кобба—Дугласа, если $\theta > \alpha$. Этот результат верен также и в случае, если производственная функция имеет вид $f(k) = Ak + Bk^{\alpha}$, т. е. в случае, который как раз здесь и рассматривается.

[3]Этот результат в модели Рамсея имеет место в случае, если экономика стартует с $k(0) < k^*$. Но у нас здесь величина k^* фактически бесконечна, так что это неравенство не возникает в качестве ограничения.

При доказательстве используется факт убывания предельного продукта капитала, $f''(k) < 0$, но не используется условие Инады, $\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = 0$. Следовательно, свойство сходимости убывающих темпов прироста капитала на человека автоматически имеет место и в настоящей модели, в которой производственная функция задается уравнением (4.57) или, в более общем виде, уравнением (4.56). Таким образом, данная модель обладает как свойством долгосрочного роста AK-модели, так и динамикой сходимости, присущей модели Рамсея.

4.5.2. Пример с CES-производственной функцией

Покажем теперь, как можно получить аналогичные результаты относительно эндогенного роста и переходной динамики в случае, если в качестве производственной функции взята функция с постоянной эластичностью замены (*constant elasticity of substitution*, CES) ресурсов. В гл. 1 мы показали, что эндогенный рост возможен в случае CES-производственной функции, если эластичность замены ресурсов K и L высока. Более конкретно, предположим сейчас, что технология имеет вид

$$Y = F(K,L) = B\{a \cdot (bK)^{\psi} + (1-a) \cdot [(1-b) \cdot L]^{\psi}\}^{1/\psi}, \qquad (4.63)$$

где $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ и $0 < \psi < 1$, так что эластичность замены $1/(1-\psi)$ больше 1.

Производственную функцию можно записать в подушевых величинах в следующем виде:

$$y = f(k) = B \cdot [a \cdot (bk)^{\psi} + (1-a) \cdot (1-b)^{\psi}]^{1/\psi}. \qquad (4.64)$$

В гл. 1 мы показали, что средний и предельный продукты капитала положительны и убывают, а в пределе стремятся к

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = Bba^{1/\psi};$$

$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \infty.$$

В частности, так как $f'(k)$ стремится к некоторой положительной константе при стремлении k к бесконечности, то ключевое условие Инады не выполнено, так что модель может сгенерировать эндогенный рост.

Для того чтобы дальнейший анализ модели был сопоставим с анализом, сделанным в предыдущей главе, введем обозначение:

$$A \equiv Bba^{1/\psi}. \tag{4.65}$$

В таком виде CES-производственная функция (с $0 < \psi < 1$) является частным случаем функции (4.56). Если мы обозначим $\Omega(K,L) \equiv F(K,L) - AK$, где $F(K,L)$ — CES-производственная функция из (4.63) и A из (4.65), то функция $\Omega(K,L)$ обладает всеми неоклассическими свойствами (1.4)-(1.6), включая условия Инады.

Так как A является предельным значением $f'(k)$, то из предыдущего анализа получается, что для возникновения в данной модели эндогенного роста требуется, чтобы параметры модели удовлетворяли условию $A > \delta + \rho$. Это неравенство выполняется при высоком уровне технологии B, при большом значении эластичности замены (которая равна ψ) и при больших значениях параметров a и b (чем больше a и b, тем более важен капитал в производственном процессе).

Динамические уравнения для k и c те же, что и в модели Рамсея гл. 2 (уравнения (2.23) и (2.24) с $x = 0$):

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{f(k)}{k} - \frac{c}{k} - (n+\delta); \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(k) - \delta - \rho].$$

Обозначим $z \equiv f(k)/k$ и $\chi \equiv c/k$, как и в предыдущем разделе. Тогда уравнения динамики для z и χ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{z}}{z} &= \left[\left(\frac{z}{A}\right)^{-\psi} - 1\right] \cdot (z - \chi - n - \delta); \\ \frac{\dot{\chi}}{\chi} &= \frac{A}{\theta} \cdot \left[\left(\frac{z}{A}\right)^{-\psi} - 1\right] - (z - A) + (\chi - \varphi), \end{aligned} \tag{4.66}$$

где, как и ранее,

$$\varphi \equiv (A - \delta) \cdot \frac{\theta - 1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n > 0.$$

Анализ также применяется только для области $z \geqslant A$, так как $f(k)/k$ не может быть меньше A. Стационарное состояние опять $z^* = A$ и $\chi^* = \varphi$.

Для изучения динамики модели, построим фазовую диаграмму в пространстве (z, χ) (рис. 4.3). У нас есть две прямые (помимо $z = 0$), которые соответствуют $\dot{z} = 0$: вертикальная прямая $z = A$ и наклоненная вверх прямая с единичным тангенсом угла наклона и пересечением

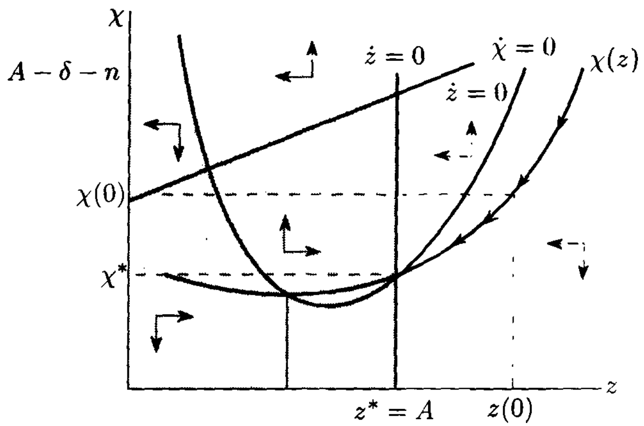


Рис. 4.3. Переходная динамика в модели эндогенного роста с CES-производственной функцией (с $0<\psi<1$). Фазовая диаграмма представлена в пространстве (z,χ), как и на рис. 4.2. Считаем, что $\theta>1-\psi$. Тогда график $\dot{\chi}=0$ имеет U-образную форму с минимумом слева от A. Две прямые, представляющие график $\dot{z}=0$, пересекаются в $\chi=A-\delta-n$ и $z=A$. График $\dot{\chi}=0$ пересекает вертикальную прямую $z=A$ в точке, которая ниже $A-\delta-n$. Соответственно, стационарное состояние дается пересечением кривой $\dot{\chi}=0$ и прямой $z=A$. Так как экономика стартует с $z>z^*$, то в процессе перехода значения z и χ монотонно убывают. (Отметим, что результат относительно траектории χ зависит от предположения, что $\theta>1-\psi$.)

оси координат в значении $-(n+\delta)$. Обе прямые пересекаются в сточке $z=A$ и $\chi=A-\delta-n$.

График $\dot{\chi}=0$ (та его часть, которая не $\chi=0$) представляет собой кривую

$$\chi=\varphi+(z-A)-\frac{A}{\theta}\cdot\left[\left(\frac{z}{A}\right)^{1-\psi}-1\right].$$

Эта кривая имеет наклон вниз при малых значениях z и достигает минимума при

$$z=A\cdot\left[\frac{1-\psi}{\theta}\right]^{1/\psi}.$$

Если $\theta>1-\psi$, то этот минимум лежит слева от A. Так как $0<\psi<1$, то это условие будет выполнено, если $\theta\geqslant 1$. (Случай $\theta\leqslant 1-\psi$ оставим в качестве упражнения.) При стремлении z к бесконечности тангенс угла наклона графика $\dot{\chi}=0$ стремится к 1. Эта кривая пересекает вертикальную прямую $z=A$ ниже точки $A-\delta-n$ (если $A>\rho+\delta>n+\delta$, согласно нашему предположению).

На рис. 4.3 показана устойчивая седловая траектория, выходящая из начального значения $z(0) > A$. Переменные z и χ монотонно убывают в процессе перехода, так же как и в модели из предыдущего раздела. Таким образом, в данном случае переходная динамика тоже обладает свойством сходимости, благодаря которому $\dot{k}/k$ убывает по мере роста k (а z сходится к A).

4.6. Заключения и выводы

В данной главе показано, что эндогенный рост может возникнуть в случае, если в долгосрочной перспективе отдача капитала не падает ниже некоторого положительного значения. Тогда долгосрочный темп роста зависит от уровня технологии и склонности к сбережению. В некоторых моделях эффекты уровня технологии могут включать масштабы распространения знаний среди производителей, эффекты масштаба производства и общественных услуг.

Простейший вид моделей эндогенного роста - AK-подобные модели - не согласуются с эмпирическими наблюдениями относительно сходимости. Однако расширенные версии моделей эндогенного роста соединяют в себе как присущую неоклассической модели роста динамику сходимости, так и свойство долгосрочного роста AK-модели. Последние модели более согласованы с эмпирическими наблюдениями относительно сходимости.

4.7. *Приложение*. Эндогенный рост в односекторной модели

В данной главе мы изучили несколько моделей, которые могут генерировать эндогенный рост. Ключевым свойством этих примеров является отсутствие убывающей отдачи капитала, по крайней мере асимптотически, в том смысле, что средний и предельный продукты капитала имеют положительные нижние границы. В частности, не выполняется условие Инады

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = 0.$$

Теперь более подробно изучим роль этого условия в односекторных моделях эндогенного роста.

Рассмотрим модель без экзогенного технологического прогресса, в которой уравнения динамики те же, что и в модели Рамсея гл. 2

(уравнения (2.23) и (2.24)):

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = \frac{f(k)}{k} - \frac{c}{k} - (n + \delta); \tag{4.67}$$

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot [f'(k) - \delta - \rho]. \tag{4.68}$$

Если $f'(k)$ и γ_k асимптотически сходятся к конечным пределам, то условие трансверсальности (2.25) может быть выражено в виде

$$\lim_{t \to \infty} [f'(k) - \delta] > \lim_{t \to \infty} (\gamma_k + n), \tag{4.69}$$

т. е. асимптотическая норма доходности капитала (выражение в левой части данного уравнения) превосходит асимптотический темп прироста капитала (в правой части уравнения).

Как обычно, определим стационарное состояние как ситуацию, в которой темпы прироста K, Y и C постоянны. В стационарных состояниях, которые мы изучали в гл. 2, темпы прироста различных величин на единицу эффективного труда, таких как $\gamma_{\hat{k}}$ и $\gamma_{\hat{c}}$, были равны 0, так что подушевые темпы прироста γ_k и γ_c равнялись x, а темпы прироста γ_K и γ_C равнялись $n + x$. Так как мы сейчас считаем $x = 0$, то подушевые темпы прироста в стационарных состояниях, рассмотренных в гл. 2, равны 0. Поэтому мы хотим выяснить, как нужно модифицировать технологию, чтобы в модели имелись стационарные состояния и подушевые темпы прироста в них были положительными константами, а не 0, когда $x = 0$.

Допустим, что стационарный подушевой темп прироста положителен, так что

$$\lim_{t \to \infty} (\gamma_k) \equiv \gamma_k^* > 0.$$

Тогда k растет в долгосрочной перспективе с положительным темпом, поэтому $\lim\limits_{t \to \infty} (k) = \infty$, т. е. k растет неограниченно. Условие трансверсальности (4.69) означает, что

$$\lim_{k \to \infty} [f'(k)] > \gamma_k^* + n + \delta > n + \delta > 0. \tag{4.70}$$

Заметим, что предел в левой части (4.70) берется при $k \to \infty$, а это так в силу того что $t \to \infty$ и k растет в долгосрочной перспективе с постоянным положительным темпом.

Стандартное условие Инады

$$\lim_{k \to \infty} [f'(k)] = 0$$

противоречит неравенству в выражении (4.70); в этом и заключается причина, из-за которой эндогенного роста не может быть в случае использования неоклассической производственной функции. Однако данная модель все равно способна сгенерировать положительный долгосрочный рост k, в случае если предельный продукт капитала имеет положительную нижнюю границу. Обозначим этот асимптотический предельный продукт через $A > 0$, тогда условие имеет вид

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = A > 0. \tag{4.71}$$

Из неравенства (4.70) следует, что $A > 0$ не является достаточным условием для роста k в стационарном состоянии. Необходимое условие для положительности γ_k^*:

$$A > n + \delta. \tag{4.72}$$

Следовательно, асимптотическая норма доходности капитала $A - \delta$ должна быть больше темпа прироста капитала n, который был бы таким, если бы в стационарном состоянии величина k была константой (так же, как и в модели Рамсея с $x = 0$).

Если $\gamma_k^* > 0$, так что $\lim\limits_{t\to\infty}(k) = \infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}[f'(k)] = A$, то из уравнения (4.68) следует

$$\gamma_c^* = \frac{1}{\theta}\cdot(A - \delta - \rho). \tag{4.73}$$

Следовательно, в силу того что $\gamma_c^* > 0$, имеем

$$A > \delta + \rho. \tag{4.74}$$

В гл. 2 мы показали, что при $x = 0$ условие трансверсальности влечет неравенство $\rho > n$. Если это последнее неравенство все еще выполнено, что мы и предположим, то из неравенства (4.74) следует неравенство (4.72). Если же неравенство (4.74) не выполнено, то весь анализ гл. 2 остается в силе и в данном случае, включая результат $\gamma_k^* = 0$, даже несмотря на то, что технология здесь могла бы физически поддерживать постоянный рост k. Асимптотическая норма доходности капитала $A - \delta$ в данном случае слишком мала, для того чтобы значение $\gamma_k^* > 0$ было оптимальным. Далее считаем, что неравенство (4.74) выполнено.

Мы хотим показать, что $\gamma_k^* = \gamma_c^*$. Из уравнения (4.67) следует

$$\gamma_k^* = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] - \lim_{k\to\infty}\left(\frac{c}{k}\right) - (n + \delta).$$

Мы знаем, исходя из правила Лопиталя (если $f(k)$ стремится к бесконечности при стремлении k к бесконечности), что

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to\infty}[f'(k)] = A.$$

Следовательно,

$$\gamma_k^* = A - n - \delta - \lim_{k\to\infty} \frac{c}{k}. \tag{4.75}$$

Если $\gamma_c^* > \gamma_k^*$, то

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{c}{k}\right) = \infty,$$

что, очевидно, несовместимо с $\gamma_k^* > 0$ в уравнении (4.75). Если $\gamma_c^* < \gamma_k^*$, то

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{c}{k}\right) = 0,$$

откуда следует $\gamma_k^* = A - n - \delta$. Отсюда $A - \delta = \gamma_k^* + n$, т. е. имеет место нарушение условия трансверсальности (4.69). Так что мы исключаем из рассмотрения случай $\gamma_c^* < \gamma_k^*$.

Единственная оставшаяся возможность - это

$$\gamma_k^* = \gamma_c^* = \frac{1}{\theta}\cdot(A - \delta - \rho), \tag{4.76}$$

где мы использовали формулу для γ_c^* из уравнения (4.73). Это решение подходит нам, если оно удовлетворяет условию трансверсальности (4.69), т. е. если $A - \delta$ больше $\gamma_k^* + n$. Из формулы для γ_k^* (4.76) следует, что условие трансверсальности может быть записано в виде

$$\varphi \equiv (A - \delta)\cdot\frac{\theta - 1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n > 0. \tag{4.77}$$

Это условие соответствует выражению (4.12). Тогда из (4.75)-(4.77) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c}{k} = \varphi > 0. \tag{4.78}$$

Если интерпретировать A как асимптотическое значение $f'(k)$, то условия, выведенные в данном приложении, выполняются во всех моделях данной главы. В частности, стационарный подушевой темп прироста дается уравнением (4.76), а стационарный уровень c/k определяется в (4.78).

4.8. Задачи

4.1. ***AK*-модель как предел неоклассической модели.** Рассмотрим неоклассическую модель роста, представленную в гл. 2. В качестве производственной функции возьмем функцию Кобба-Дугласа $y = A\hat{k}^{\alpha}$.

а. Как увеличение α повлияет на уравнения перехода для $\hat{k}$ и $\hat{c}$ ((2.23) и (2.24) соответственно)? Как в таком случае увеличение α

повлияет на графики $\dot{\hat{c}} = 0$ и $\dot{\hat{k}} = 0$ на рис. 2.1? Как это повлияет на стационарные значения $\hat{k}^*$ и $\hat{c}^*$?

b. Что происходит с $\hat{k}^*$, если α приближается к 1? Как этот результат связан с AK-моделью, которую мы рассматривали в данной главе?

4.2. Пересбережение в AK-модели (на основе работы Saint–Paul, 1992). Из гл. 1 мы знаем, что в экономике происходит пересбережение при приближении к стационарному состоянию, в котором норма доходности r меньше темпа прироста. Предположим, что технология имеет вид $Y = AK$, и отношение c/k сходится к константе $(c/k)^*$ стационарному значению.

a. Используя уравнение (4.8), определите стационарный темп прироста K (и, следовательно, Y и C). Может ли этот стационарный темп прироста превосходить процентную ставку r из равенства (4.7)? Возможно ли получить пересбережение, если экономика сходится к стационарному состоянию и технология имеет вид $Y = AK$?

b. Пусть мы объединили AK-технологию с моделью потребителя с конечным горизонтом (модель Blanchard, 1985), как описано в разд. 3.7. Возможно ли получить пересбережение в этой модели? Что будет, если мы объединим AK-технологию и модель пересекающихся поколений, как описано в приложении к гл. 3?

4.3. Переходная динамика. Докажите, что в модели с обучением на собственном опыте и с распространением знаний, представленной в разд. 4.3, отсутствует переходная динамика, т. е. выпуск и капитал всегда растут с постоянным темпом прироста потребления, который дается уравнением (4.28).

4.4. Распространение знаний от среднего капитала на одного работника. В модели, представленной в разд. 4.3, предположим, что параметр производительности фирмы A_i зависит от среднего по экономике капитала на одного работника K/L, а не от среднего капитала K. Функция Кобба -Дугласа взята в качестве производственной технологии:

$$Y_i = A \cdot (K_i)^\alpha \cdot \left[\left(\frac{K}{L}\right) \cdot L_i\right]^{1-\alpha}.$$

Выведете формулы темпов прироста для децентрализованной экономики и для социального управляющего. Объясните, почему эффект масштаба, обсуждаемый в разд. 4.3, не проявляется в данном случае.

4.5. Сложная схема налогообложения в модели с общественными благами. Предположим, что в модели разд. 4.4.1 общественные расходы G финансируются налогом на доход с активов домохозяйства τ_a. Как такое изменение повлияет на отношение между темпом прироста и G/Y, т. е. как изменится уравнение (4.42)?

4.6. Перегрузка общественных услуг (на основе работы Barro and Sala-i-Martin, 1992c). Предположим, что в модели перегрузки, рассмотренной в разд. 4.4.2, выпуск фирмы i задается уравнением

$$Y_i = AK_i \cdot f\left(\frac{G}{K}\right),$$

т. е. перегрузка общественных услуг теперь определяется отношением G к K, а не к Y. Как изменятся результаты модели при таком изменении? Сравните, в частности, темпы прироста, которые получаются в задаче, которую решает социальный управляющий и темпы прироста в децентрализованной экономике.

4.7. Издержки ввода и AK-технология (на основе работы Barro and Sala-i-Martin, 1992c). Представим себе, что фирмы имеют дело с AK-технологией, но инвестиции в капитал подразумевают издержки ввода этого капитала в эксплуатацию, как описано в разд. 3.3. Функция единицы издержек ввода имеет вид

$$\phi\left(\frac{i}{k}\right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{i}{k},$$

так что общая стоимость закупки и инвестирования в единицу капитала равна

$$1 + \frac{b}{2} \cdot \frac{i}{k}.$$

Производитель максимизирует текущее значение денежных потоков,

$$\int_0^\infty \left\{AK - I \cdot \left[1 + \frac{b}{2} \cdot \frac{I}{K}\right]\right\} \cdot e^{-rt}\, dt,$$

где $r = A - \delta$. Максимизация осуществляется при ограничении $\dot{K} = I - \delta K$.

a. Выпишите гамильтониан и получите условия первого порядка для типичной фирмы. Найдите отношение между процентной ставкой и темпом прироста капитала. Это отношение монотонно? Объясните.

b. Предположим, что потребители решают обычную задачу Рамсея с бесконечным горизонтом, так что темп прироста потребления имеет положительную зависимость от процентной ставки. Предположим, что темп прироста потребления равен темпу прироста капитала. Однозначно ли определяется темп прироста при таком условии? Если нет, то можно ли одно из решений исключить посредством условия трансверсальности?

c. Покажите, что темп прироста потребления равен темпу прироста капитала. Что из этого следует относительно переходной динамики в данной модели? Объясните почему.

4.8. Рост в модели с распространением знаний (на основе работы Romer, 1986). Предположим, что производственная функция для фирмы i имеет вид

$$Y_i = AK_i^{\alpha} \cdot L_i^{1-\alpha} \cdot K^{\lambda},$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$ и K — агрегированный объем капитала.

a. Покажите, что если $\lambda < 1 - \alpha$ и L — константа, то в модели присутствует переходная динамика, аналогичная той, что имеется в модели Рамсея. Чему равен стационарный темп прироста Y, K и C в этом случае?

b. Если $\lambda < 1 - \alpha$ и L растет с постоянным темпом $n > 0$, то чему равен стационарный темп прироста Y, K и C в таком случае?

c. Покажите, что если $\lambda = 1 - \alpha$ и L — константа, то стационарное состояние и переходная динамика такие же, что и в AK-модели.

d. Что будет, если $\lambda = 1 - \alpha$ и L растет с темпом $n > 0$?

5 Двухсекторные модели эндогенного роста (с выделением роли человеческого капитала)

Без экзогенного технологического прогресса долгосрочный подушевой рост может быть достигнут в случае, если отдача капитала асимптотически постоянна. Это один из уроков, который мы усвоили в гл. 4. В этой же главе мы привели доводы в пользу того, что убывающая доходность может отсутствовать, если мы рассматриваем капитал в широком смысле, который включает как человеческую, так и физическую компоненты. В текущей же главе будут представлены модели, в которых физический и человеческий капиталы разделены. В более общем случае такая структура может быть применена к различным типам капитала, включая различные виды накопленного знания, которые мы будем рассматривать в гл. 6 и 7.

Начнем с модели, подобной той, которую мы использовали для изучения открытой экономики в гл. 3 и в которой физический и человеческий капиталы производятся идентичными производственными функциями. В этой модели выпуск посредством обычной односекторной технологии полностью расходуется на потребление, инвестирование в физический капитал и инвестирование в человеческий капитал. Впрочем, если мы введем ограничения неотрицательности валового инвестирования в физический и человеческий капиталы, то возникают и некоторые новые результаты. Эти ограничения приводят к появлению влияющих на процесс роста эффектов дисбаланса между уровнями физического и человеческого капиталов: темп роста выпуска тем больше, чем больше величина разрыва между текущим отношением физического капитала к человеческому капиталу и стационарным значением этого отношения.

Далее мы будем считать, что физический и человеческий капиталы производятся посредством двух различных технологий. В частности, мы сфокусируем внимание на эмпирически значимом случае, в котором образование - производство нового человеческого капитала - относительно интенсивнее использует человеческий капитал в качестве ресурса. Таким свойством обладает, например, модель, разработанная Uzawa (1965) и использованная Лукасом (Lucas, 1988), в которой весь имеющийся человеческий капитал используется исключительно в качестве ресурса в секторе образования. Данная модификация производственной структуры приводит к возникновению асимметрии в воздействии дисбаланса между физическим и человеческим капиталами на темп роста. Источником этой асимметрии является положительное влияние отношения физического капитала к человеческому на ставку реальной заработной платы (на единицу человеческого капитала) и, следовательно, на альтернативную стоимость человеческого капитала, используемого в образовании. В таких условиях, если человеческий капитал в относительном избытке, то темп прироста выпуска в широком смысле возрастает по мере роста дисбаланса между физическим и человеческим капиталами, а если человеческий капитал в относительном дефиците, то темп прироста выпуска склонен к снижению по мере роста этого дисбаланса.

Наличие человеческого капитала может ослабить ограничение постоянства или убывания доходности капитала в широком смысле и поэтому может привести к долгосрочному подушевому росту в отсутствие экзогенного технологического прогресса. Следовательно, производство человеческого капитала может стать альтернативой улучшениям в технологии в качестве механизма генерирования долгосрочного роста. Однако нам следует обратить внимание на некоторые моменты, по которым накопление человеческого капитала отличается от созидания знаний в форме технологического прогресса. Если мы считаем, что человеческий капитал представляет собой навыки, воплощенные в работнике, то использование этих навыков в одном виде деятельности исключает возможность их использования в другом виде деятельности; следовательно, человеческий капитал является конкурентным товаром. В силу того что у людей имеются права собственности на их собственные навыки так же, как и на их неквалифицированный труд, человеческий капитал является также и необщедоступным товаром. Напротив, идеи или знания могут быть неконкурентными - в том смысле, что они могут свободно растекаться по видам деятельности произвольного масштаба и могут быть при определенных обстоятельствах общедоступными. Это различие означает, что теории технологического прогресса представленные в гл. 6–8, принципиально отличаются от моделей накопления человеческого капитала, которые мы рассмотрим в данной главе.

5.1. Односекторная модель с физическим и человеческим капиталами

5.1.1. Базис модели

Начнем с рассмотрения производственной функции Кобба–Дугласа, которая обладает свойством постоянной отдачи физического и человеческого капиталов K и H:

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}, \tag{5.1}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Мы можем интерпретировать человеческий капитал H как число работников L, умноженное на человеческий капитал типичного работника h. Мы здесь предполагаем, что количество работников L и качество работников h являются совершенными заменителями друг друга в производстве в том смысле, что только величина Lh существенна для выпуска. Такая спецификация модели означает, что фиксированное число людей L не будет источником убывающей доходности, потому что удвоение K и h при фиксированном L приводит к увеличению Y. Предположим для удобства, что общий объем рабочей силы L фиксирован и, следовательно, H растет только благодаря улучшению среднего качества h. Мы также не будем пока рассматривать технологический прогресс (т. е. считаем, что A – константа).

Выпуск может быть использован для потребления или инвестирования в физический или человеческий капиталы. Предположим, что объемы физического и человеческого капиталов обесцениваются или выбывают с одинаковым темпом δ. Выбытие человеческого капитала включает потери от ухудшения навыков и смертность, за вычетом пользы от приобретаемого опыта. (Можно ввести различные нормы амортизации физического и человеческого капиталов, но это усложнит алгебраические выкладки, не привнеся в модель никаких дополнительных особенностей.)

Ресурсное ограничение экономики имеет вид

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = C + I_K + I_H, \tag{5.2}$$

где I_K и I_H – валовое инвестирование в физический и человеческий капиталы соответственно. Изменения в двух видах капитала описываются

уравнениями:
$$\dot{K} = I_K - \delta K, \quad \dot{H} = I_H - \delta H. \tag{5.3}$$

В гл. 2 мы показали, что модель с отдельно выделенными домохозяйствами и фирмами эквивалентна модели, в которой домохозяйства занимаются производством непосредственно. Эта эквивалентность сохраняется и сейчас, для текущей модели. Так что мы воспользуемся той формулировкой, в которой домохозяйства являются производителями товаров. При отсутствии роста населения, домохозяйства максимизируют обычную функцию полезности
$$U = \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{-\rho t}\, dt \tag{5.4}$$
при условии ограничений (5.3) и при условии общеэкономического ресурсного ограничения (5.2). Гамильтониан в данном случае имеет вид:
$$\begin{aligned} J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot (I_K - \delta K) + \mu \cdot (I_H - \delta H) + \\ + \omega \cdot (AK^\alpha H^{1-\alpha} - C - I_K - I_H), \end{aligned} \tag{5.5}$$
где ν и μ — теневые цены, связанные с $\dot{K}$ и $\dot{H}$ соответственно, а ω — множитель Лагранжа, связанный с уравнением (5.2)[1]. Функция полезности имеет обычный вид
$$u(C) = \frac{(C^{1-\theta} - 1)}{(1 - \theta.)}.$$

Условия первого порядка могут быть получены обычным образом, путем приравнивания производных J по C, I_K и I_H нулю, а частных производных $\partial J/\partial K$ и $\partial J/\partial H$ производным $\dot{\nu}$ и $\dot{\mu}$ соответственно, плюс бюджетное ограничение (5.2)[2]. Если мы упростим эти условия, то получим знакомое выражение для темпа прироста потребления:
$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A\alpha \cdot \left(\frac{K}{H}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right], \tag{5.6}$$
где $A\alpha \cdot (K/H)^{-(1-\alpha)} - \delta$ — чистый предельный продукт физического капитала.

[1] Эквивалентная запись этого гамильтониана:
$$J = u(C)e^{-\rho t} + \nu \cdot (AK^\alpha H^{1-\alpha} - C - \delta K - I_H) + \mu \cdot (I_H - \delta H),$$
но при этом дополнительно должно быть выполнено условие
$$I_K = AK^\alpha H^{1-\alpha} - C - I_H,$$
которое связано с множителем Лагранжа ω в выражении (5.5).

[2] Еще есть ограничения $I_K \geqslant 0$ и $I_H \geqslant 0$, но мы пока не будем их учитывать.

Второе условие – это равенство чистого предельного продукта физического капитала чистому предельному продукту человеческого капитала:

$$A\alpha \cdot \left(\frac{K}{H}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta = A \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} - \delta.$$

Из этого условия следует, что отношение объемов капитала двух видов дается уравнением[1]:

$$\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{5.7}$$

Из этого результата для K/H следует, что чистая норма доходности физического и человеческого капиталов равна[2]

$$r^* = A\alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta. \tag{5.8}$$

Эта норма доходности постоянна, потому что производственной функции (5.1) свойственна постоянная отдача относительно капитала в широком смысле, K и H. Следовательно, когда отношение K/H из (5.7) постоянно, т. е. K и H растут с одинаковым темпом, тогда убывания отдачи не возникает.

Если K/H постоянно, то из уравнения (5.6) следует, что отношение $\dot{C}/C$ тоже постоянно, и после подстановки K/H из (5.7) в (5.6) находим, что оно равно

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A\alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right]. \tag{5.9}$$

Предполагаем, что параметры таковы, что $\gamma^* > 0$.

Для того чтобы продемонстрировать, как эта модель соотносится с некоторыми представленными в предыдущих главах результатами, подставим выражение (5.7) в производственную функцию (5.1), получим

$$Y = AK \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha},$$

т. е. мы видим, что эта модель эквивалентна AK-модели из гл. 4. Мы можем применить методы анализа из той главы и показать, что если условие трансверсальности выполнено, то темпы прироста Y, K и H

[1] Равенство между предельными продуктами будет выполнено также и в случае, если нормы выбытия обоих видов капитала различны. Тогда из этого равенства опять же определяется отношение K/H, однако в общем случае это решение не может быть записано в замкнутой форме, в виде функции параметров.

[2] Эта же норма доходности r была бы и на конкурентном кредитном рынке, если бы мы учли наличие такого рынка в данной модели.

должны быть равны темпу прироста C[1]. То есть все величины растут с постоянным темпом γ^*, значение которого определено равенством (5.9).

Выражения (5.8) и (5.9), в которых определены значения r^* и γ^*, по существу совпадают с теми, что мы получили для AK-модели, представленной в гл. 4. То есть мы до сих пор так и не сделали четкого разделения между моделью с двумя видами капитала K и H и моделью с единым капиталом в широком смысле.

5.1.2. Ограничение в виде неотрицательности валового инвестирования

Предположим, что экономика стартует с двумя объемами капитала $K(0)$ и $H(0)$. Если отношение $K(0)/H(0)$ отклоняется от значения $\alpha/(1-\alpha)$, предписанного уравнением (5.7), то решение, которое мы только что определили, диктует необходимость дискретного скачка в этих двух объемах, так чтобы немедленно было достигнуто значение $\alpha/(1-\alpha)$. Для этого необходимо, чтобы увеличение одного из этих двух объемов сопровождалось уменьшением второго ровно на ту же величину, так чтобы сумма $K+H$ мгновенно не изменилась.

Таким образом, основной трудностью, связанной с данным решением, является то, что оно зависит от возможности бесконечной положительной нормы инвестирования в один вид капитала и бесконечной отрицательной нормы инвестирования в другой вид. Другими словами, мы должны предположить, что инвестиции обратимы, так что старые единицы физического капитала могут быть конвертированы в человеческий капитал и наоборот. Но это предположение не очень-то реалистично. Инвесторы могут выбирать, куда инвестировать, в человеческий капитал или физический, но если уж решение принято, то оно необратимо. Математически эти условия необратимости принимают вид ограничений в виде неравенств: $I_K \geqslant 0$ и $I_H \geqslant 0$. Другими словами, нельзя деинвестировать человеческий или физический капитал. Можно сделать выбор: не инвестировать вообще в один из видов капитала; т. е. можно положить $I_K = 0$, что приведет к непрерывному снижению K с темпом $\dot{K}/K = -\delta$, но вывести средства из K невозможно. Заметим, что в предыдущем решении, если значение $K(0)/H(0)$ отлично от $\alpha/(1-\alpha)$, то дискретный сдвиг в составе капитала в нулевой момент времени требует отрицательного валового инвестирования

[1] Условие трансверсальности есть $r^* > \gamma^*$. Из равенств (5.8) и (5.9) следует, что это условие можно переписать в виде $\rho > (1-\theta) \cdot [A\alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^(1-\alpha) - \delta]$.

(с бесконечной нормой) в один из видов капитала, так что одно из ограничений необратимости необходимым образом нарушено. В силу вышесказанного, мы будем рассматривать решение модели при наличии указанных неравенств-ограничений. Некоторые детали в дальнейших рассуждениях мы опустим, но они появятся в приложении 5А разд. 5.5.

Если $K(0)/H(0) < \alpha/(1-\alpha)$, т. е. если H изначально имеется в изобилии относительно K, то предыдущее решение диктует убывание H и прирост K в нулевой момент времени. Желание уменьшить H на дискретную величину приводит к тому, что неравенство $I_H \geqslant 0$ становится связывающим в нулевой момент времени (и в течение некоторого конечного интервала времени далее). Когда это неравенство связывает, домохозяйство выбирает $I_H = 0$; следовательно, темп прироста H задается уравнением $\dot{H}/H = -\delta$, так что траектория H определяется уравнением:

$$H(t) = H(0) \cdot e^{-\delta t}, \quad \text{при} \quad t = 0, \ldots . \tag{5.10}$$

Экономические агенты понимают, что у них в наличии слишком много H относительно K, но в силу невозможности отрицательного инвестирования в H им приходится ждать, пока H сокращается за счет выбытия с экзогенно заданным темпом δ.

Если $I_H = 0$, то оптимизационная задача домохозяйства может быть записана в виде упрощенного гамильтониана:

$$J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot (AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C - \delta K), \tag{5.11}$$

где ν умножается на выражение для $\dot{K}$ (при $I_H = 0$)[1]. Итак, данная модель эквивалентна стандартной неоклассической модели роста, в которой домохозяйства выбирают между потреблением и инвестированием в один вид капитала K при наличии экзогенного технологического прогресса, который увеличивает интенсивность использования другого ресурса, в данном случае H. В стандартной модели этот другой ресурс, эффективный труд, растет с постоянным темпом x (при нулевом темпе прироста населения), в то время как в текущей модели второй ресурс H растет с отрицательным темпом $-\delta$.

Ключевым отличием от стандартной неоклассической модели здесь является то, что K/H растет со временем и достигает значения $\alpha/(1-\alpha)$ за конечное время. В этой точке предельные продукты человеческого

[1] Мы могли бы записать эквивалентное выражение гамильтониана в виде (5.5) с учетом $I_H = 0$:

$$J = u(C)e^{-\rho t} + \nu \cdot (I_K - \delta K) + \omega \cdot (AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C - I_K).$$

Условие $I_K = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C$ уже включено в уравнение (5.11).

и физического капиталов равны. И следовательно, ограничение неотрицательности валового инвестирования в человеческий капитал перестает быть связывающим. Тогда оба вида капитала растут с общим темпом γ^*, который определяется равенством (5.9). Мы уже предположили, что параметры таковы, что $\gamma^* > 0$. Следовательно, переходная динамика неоклассической модели роста имеет место и в данном случае, однако долгосрочный темп прироста здесь положителен (даже без экзогенного технологического прогресса) в силу отсутствия убывающей отдачи капитала в широком смысле.

Некоторые подробности относительно переходной динамики содержатся в приложении. Здесь же мы приведем ее эвристическую трактовку. Мы знаем, что темпы прироста K, H и Y в стационарном состоянии равны $\gamma^* > 0$, где $K/H = \alpha/(1-\alpha)$. До прихода в стационарное состояние $K/H < \alpha/(1-\alpha)$ и $I_H = 0$. Мы уже показали, что в данной ситуации динамика K и Y согласуется с обычной моделью движения из неоклассической модели роста (с производственной функцией Кобба–Дугласа). Следовательно, из анализа гл. 2 вытекает, что решение обладает свойством сходимости в том смысле, что темпы прироста

$$\gamma_K \equiv \frac{\dot{K}}{K} \quad \text{и} \quad \gamma_Y \equiv \frac{\dot{Y}}{Y}$$

монотонно снижаются со временем. Так как эти два темпа прироста монотонно убывают до значения $\gamma^* > 0$, то они должны быть положительны. Таким образом, K/H монотонно растет со временем, частично из-за снижения H (с темпом δ), а частично из-за роста K (с темпом, который уменьшается до γ^*). Из роста K/H следует, что чистый предельный продукт физического капитала и следовательно, норма доходности — монотонно снижается[1]. Эта снижающаяся траектория нормы доходности соответствует, как обычно, ниспадающей траектории γ_C.

Из вышеприведенного анализа следует, что зависимость темпа прироста выпуска γ_Y от величины отношения K/H обратная до тех пор,

[1] Из роста K/H следует, что чистый предельный продукт H также растет со временем. Однако уровень этого чистого предельного продукта ниже уровня чистого предельного продукта физического капитала. Поэтому валовое инвестирование в H остается на своем минимальном уровне, т. е. на нуле. Если бы нам была известна рыночная цена имеющихся единиц H, то мы обнаружили бы, что эта цена ниже стоимости замещения 1, но возрастает к 1 по мере того как K/H сходится к $\alpha/(1-\alpha)$. Общая норма доходности от владения капиталом H — от дохода с капитала и «дивидендов» — в таком случае в каждый момент времени равнялась бы чистому предельному продукту K. Отсюда, чистый предельный продукт K был бы равен единой норме доходности, наблюдаемой на кредитном рынке.

пока K/H меньше стационарного значения $\alpha/(1-\alpha)$. Зависимость γ_Y от K/H мы называем *эффектом дисбаланса.* Чем больше дисбаланс (т. е. чем дальше (снизу) K/H от своего стационарного значения), тем больше темп прироста.

Одной из причин, из-за которой отношение K/H может снизиться, является война, во время которой разрушается значительная часть физического капитала, но человеческий капитал более или менее сохраняется. Ситуация в Японии и Германии после Второй мировой войны тому пример. Согласно прогнозу теории, выпуск в такой ситуации будет расти высоким темпом, значительно выше стационарного значения γ^*.

Аналогичные результаты получаются в случае, если экономика начинает развитие в условиях относительного избытка физического капитала

$$\frac{K(0)}{H(0)} > \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Такая ситуация возможна в случае эпидемии, такой, например, как эпидемия чумы в средневековой Европе, которая убила большое число людей, но не разрушила физический капитал. В этом случае ограничение $I_K \geqslant 0$ связывающее. Следовательно, $I_K = 0$ и K растет с темпом $-\delta$. Выбор C и H в таком случае определяется условиями обычной неоклассической модели, за исключением того, что инвестиции здесь направляются в H, а не в K. В частности, γ_H и γ_Y монотонно убывают в направлении стационарного значения γ^*. Уменьшение K (с темпом δ) и рост H (с темпом, который снижается и сходится к γ^*) влекут за собой снижение K/H со временем. Снижение K/H влечет сокращение чистого предельного продукта H, и, в силу этого, уменьшается норма доходности и темп прироста потребления[1)].

Из этих результатов следует, что K/H и γ_Y в области $K/H > \alpha/(1-\alpha)$ положительно связаны. Таким образом, здесь вновь обнаруживается эффект дисбаланса — чем больше дисбаланс в смысле превышения K/H своего стационарного значения, тем больше темп прироста.

[1)]Поведение норм доходности здесь аналогично случаю относительной избыточности H. Уменьшение K/H приводит к тому, что чистый предельный продукт K растет. Впрочем, чистый предельный продукт K меньше чистого предельного продукта H, а валовое инвестирование в K остается на своем минимальном уровне, равном 0. Цена присутствующих на рынке единиц K меньше стоимости замещения, равной 1, но растет к 1 по мере приближения K/H к $\alpha/(1-\alpha)$. Общая норма доходности от владения капиталом K — доход с капитала и дивидендов — равна чистому предельному продукту H в каждый момент времени. Отсюда этот чистый предельный продукт равен единой норме доходности, наблюдаемой на кредитном рынке.

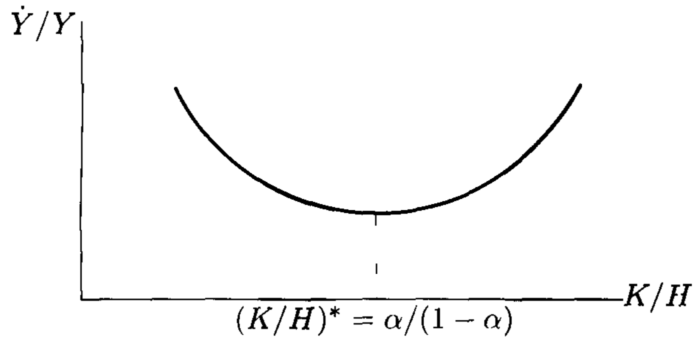


Рис. 5.1. Эффект дисбаланса в односекторной модели. Темп прироста выпуска зависит от отношения двух объемов капитала, K/H. Минимальный темп прироста соответствует стационарному значению $(K/H)^* = \alpha/(1-\alpha)$. Слева и справа от этого стационарного состояния темп прироста выпуска симметрично одинаков и тем больше, чем больше разрыв между K/H и $(K/H)^*$

На рис. 5.1 изображена зависимость γ_Y от K/H. Минимальный темп прироста γ^* соответствует значению данного отношения в стационарном состоянии $\alpha/(1-\alpha)$. Слева или справа от стационарного состояния, темп прироста γ_Y увеличивается по мере роста отклонения K/H от его стационарного значения.

В теории кратковременное падение объема физического капитала (например, если в результате войны капитал K, но не H, разрушен) не должно приводить к существенному влиянию на темп прироста, в отличие от соответствующего кратковременного падения человеческого капитала, вызванного, например, эпидемией, которая сокращает H, но не K. В работе Hirsheifer (1987, гл. 1 и 2) проведено небольшое эмпирическое исследование, в котором изучалось влияние на экономический рост внезапного уменьшения человеческого капитала в результате эпидемии чумы в средневековой Европе, но никакого быстрого роста после эпидемии обнаружено не было. Таким образом, похоже, что в действительности превышение величиной K/H своего стационарного значения либо имеет незначительное воздействие на темп роста, либо возможен даже отрицательный эффект.

Одним из способов обобщить данную теорию таким образом, чтобы возникла асимметричность эффектов от того, находится K/H выше или ниже своего стационарного значения, является учет издержек ввода в процессе накопления капитала, которые мы рассматривали в гл. 3. Вполне разумно считать, что эти издержки ввода должны быть значительно бо́льшими для человеческого капитала, нежели для физического, имея в виду, что образовательный процесс не может быть в достаточной

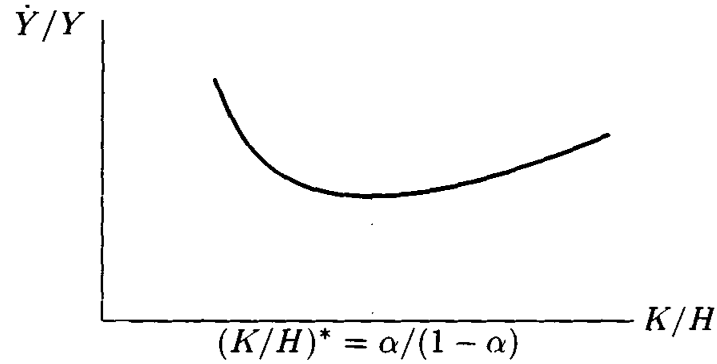


Рис. 5.2. Эффект дисбаланса с издержками ввода для человеческого капитала. Здесь мы предполагаем, что издержки ввода для человеческого капитала больше, чем для физического капитала. В этом случае чувствительность темпа прироста к величине K/H больше в области $K/H < (K/H)^*$ (физический капитал в относительном дефиците), чем в области $K/H > (K/H)^*$ (человеческий капитал в относительном дефиците)

мере ускорен без возникновения существенного снижения нормы доходности инвестиций. В этом случае относительный избыток H приведет к значительному увеличению объема инвестиций в K и, соответственно, к повышению темпа прироста выпуска. Однако соответствующий относительный избыток K будет иметь существенно меньшее воздействие на поток инвестиций в H и, следовательно, на темп прироста выпуска. На рис. 5.2 показан случай, в котором минимальный темп прироста по-прежнему имеет место при равенстве K/H своему стационарному значению $\alpha/(1-\alpha)$[1], но наклон графика в области $K/H < \alpha/(1-\alpha)$ круче, чем в области $K/H > \alpha/(1-\alpha)$. Таким образом, прогнозом модели является более быстрое восстановление экономики после войны, которая разрушает преимущественно K, нежели после эпидемии, которая разрушает в основном H.

Другим следствием наличия издержек ввода инвестиций является то, что при отклонении K/H от своего стационарного значения $\alpha/(1-\alpha)$ валовое инвестирование в оба типа капитала может быть положительным. Это случается, если нормы доходности инвестирования в капитал каждого вида высоки при низких нормах инвестирования и низки при высоких нормах инвестирования. Возможность положительного валового инвестирования в оба вида капитала вне стационарного состояния возникает также в моделях, в которых технология производства C и $\dot{K}$

[1] При одних способах учета издержек ввода эти издержки имеют влияние на стационарное значение отношения K к H, а при других — нет. Подробнее это рассматривалось в гл. 3.

отличается от технологии производства $\dot{H}$. Мы исследуем эту идею в следующем разделе.

5.2. Различные технологии для производства и образования

5.2.1. Модель с двумя секторами производства

До сих пор мы предполагали, что физические товары и образование генерируются одинаковыми производственными функциями. Но при такой спецификации игнорируется ключевой аспект образования: основным производственным ресурсом в образовании являются образованные люди. Поэтому нам следует модифицировать модель таким образом, чтобы в производстве человеческого капитала этот же самый человеческий капитал использовался интенсивнее остальных ресурсов. Такое изменение в спецификации модели приведет к изменениям в ряде заключений относительно влияния на рост дисбалансов между физическим и человеческим капиталами.

Следуя Rebelo (1991), используем для описания двух секторов экономики две производственные функции Кобба–Дугласа[1]:

$$Y = C + \dot{K} + \delta K = A \cdot (vK)^{\alpha} \cdot (uH)^{1-\alpha}; \tag{5.12}$$

$$\dot{H} + \delta H = B \cdot [(1 - v) \cdot K]^{\eta} \cdot [(1 - u) \cdot H]^{1-\eta}, \tag{5.13}$$

где Y – выпуск товаров (потребительских и инвестиционных); $A, B > 0$ – технологические параметры; $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ и $\eta(0 \leqslant \eta \leqslant 1)$ – доли физического капитала в выпусках соответствующего сектора; $v(0 \leqslant v \leqslant 1)$ и $u(0 \leqslant u \leqslant 1)$ – части физического и человеческого капиталов соответственно, используемые в производстве. Соответственно, $1 - v$ и $1 - u$ – части физического и человеческого капиталов, используемые в образовании.

Уравнение (5.12) означает, что потребительские товары C и инвестиции в физический капитал

$$I_K = \dot{K} + \delta K$$

по-прежнему являются совершенными заменителями друг друга в левой части уравнения. Другими словами, C и I_K происходят из единого

[1] В работах Bond, Wang, and Yip (1996) и Mino (1996) эта модель исследована с неоклассическими производственными функциями в общем виде.

выходного потока товаров[1]. Если $\eta \neq \alpha$, то из уравнения (5.13) следует, что человеческий капитал генерируется посредством технологии, которая отлична от технологии производства товаров. (Если $\eta = \alpha$, то данная модель эквивалентна модели с одним производственным сектором, которую мы рассматривали в предыдущем разделе; см. сноску (1) на с. 325.) Как уже упоминалось ранее, мы рассмотрим согласующийся с эмпирическими наблюдениями случай $\eta < \alpha$, т. е. сектор образования относительно интенсивнее использует человеческий капитал в качестве производственного ресурса, а сектор производства товаров более интенсивен в использовании физического капитала[2]. На самом деле, то, что «H» ассоциируется именно с человеческим капиталом в реальном мире, является специфической чертой конкретно этой модели.

Из вида уравнений (5.12) и (5.13) вытекает, что оба производственных вида деятельности проявляют постоянную эффективность с ростом масштаба обоих затрачиваемых капитальных ресурсов. По этой причине в модели имеется эндогенный стационарный рост того же типа, что мы нашли в гл. 4 в односекторной модели. В стационарном состоянии v и u постоянны, а C, K, H и Y растут с общим темпом γ^*.

Измеряемая величина выпуска может быть расширена путем включения в нее валового инвестирования в человеческий капитал $\dot{H} + \delta H$, умноженного на подходящую теневую цену человеческого капитала. (Об этой теневой цене поговорим позже.) Эта мера выпуска в широком смысле будет расти в стационарном состоянии с тем же темпом γ^*. Валовой выпуск, как он определен в национальных счетах, лежит где-то между «узким» и «широким» определениями выпуска, так как этот показатель объема выпуска включает в себя некоторую часть валового инвестирования, направляемого в человеческий капитал. Например, в валовой продукт входят учительские зарплаты, но не входит стоимость времени, затрачиваемого студентами на обучение в институтах или по месту работы. Согласно грубой оценке Kendrick (1976, табл. A-1 и B-2), в США только половина валового инвестирования в человеческий капитал учитывается в официально измеряемом выпуске.

---

[1]Если идти дальше, то можно допустить различные интенсивности использования факторов при производстве потребительских и капитальных товаров (такая двухсекторная модель использовалась Uzawa, 1964, и Srinivasan, 1964) или при производстве различных типов конечных продуктов (Ventura, 1997).

[2]Мы можем интерпретировать K и H более широко как два различных типа капитальных продуктов, не обязательно физический и человеческий капиталы. Правдоподобность предположения о том, что производство H относительно более интенсивно в использовании H, зависит от того, как интерпретируется H.

Мы можем встроить технологии (5.12) и (5.13) в рассмотренную ранее стандартную модель оптимизации домохозяйства. Тогда выражение гамильтониана записывается в виде[1]

$$\begin{aligned} J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot [A \cdot (vK)^{\alpha} \cdot (uH)^{1-\alpha} - \delta K - C] + \\ + \mu\{B \cdot [(1-v) \cdot K]^{\eta} \cdot [(1-u) \cdot H]^{1-\eta} - \delta H\}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где ν умножается на выражение для $\dot{K}$ и μ умножается на выражение для $\dot{H}$. Если ограничения неотрицательности валового инвестирования не являются связывающими, то решение удовлетворяет обычным условиям первого порядка, которые получаются путем приравнивания производных J по C, v и u нулю, а также из условий

$$\dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial K} \quad \text{и} \quad \dot{\mu} = -\frac{\partial J}{\partial H}.$$

После некоторой манипуляции условиями первого порядка получаем знакомое выражение для темпа прироста потребления

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A\alpha \cdot \left(\frac{vK}{uH}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]. \tag{5.15}$$

Член

$$A\alpha \cdot \left(\frac{vK}{uH}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta$$

есть чистый предельный продукт физического капитала в секторе производства товаров, он равен норме доходности r в данной модели.

Физический капитал должен иметь одинаковую норму доходности, будучи размещенным в любом из секторов производства, и то же верно для человеческого капитала. Из этих условий вытекает следующее соотношение между v и u:

$$\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)\left(\frac{v}{1-v}\right) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{u}{1-u}\right). \tag{5.16}$$

---

[1] Эквивалентным образом можно записать так, что $I_K - \delta K$ умножается на ν и $I_H - \delta H$ умножается на μ, а затем ввести два множителя Лагранжа, соответствующих двум ограничениям в виде равенств:

$$A \cdot (vK)^{\alpha} \cdot (uH)^{1-\alpha} = C + I_K$$
$$\text{и} \quad B \cdot [(1-v) \cdot K]^{\eta} \cdot [(1-u) \cdot H]^{1-\eta} = I_H.$$

Запись (5.14) уже учитывает эти равенственные ограничения.

Из уравнения (5.16) следует, что v и u положительно связаны, так что $v = 1$ при $u = 1$, и $v = 0$ при $u = 0$[1]. Другими словами, при заданных значениях α и η расширение товарного производства происходит через одновременное увеличение тех частей ресурсов K и H, которые используются в товарном секторе.

Пусть $p \equiv \mu/\nu$ будет теневой ценой человеческого капитала в единицах товаров. Тогда из уравнения (5.16) и из условия, что нормы доходности K и H должны быть равны, следует формула для p[2]:

$$p \equiv \frac{\mu}{\nu} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\eta} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{1-\eta}\right)^{1-\eta} \cdot \left(\frac{vK}{uH}\right)^{\alpha-\eta}. \tag{5.17}$$

Теневая цена p равна отношению предельного продукта H в товарном секторе (т. е. ставки заработной платы) к предельному продукту H в секторе образования. Из уравнения (5.17) видно, что эта цена зависит только от отношения физического капитала, загруженного в товарный сектор vK к человеческому капиталу, загруженному в товарный сектор uH.

Формула для p дает нам возможность вычислить упомянутый выше валовой выпуск в широком смысле:

$$Q = Y + pB \cdot [(1-v) \cdot K]^{\eta} \cdot [(1-u) \cdot H]^{1-\eta}. \tag{5.18}$$

---

[1]Если $\alpha = \eta$, то из уравнения (5.16) следует $v = u$. Если мы подставим этот результат в уравнения (5.12) и (5.13), то производственные функции примут вид

$$Y = AuK^{\alpha}H^{1-\alpha}; \quad \dot{H} + \delta H = B \cdot (1-u) \cdot K^{\alpha}H^{1-\alpha}.$$

Выпуск в широком смысле (Q) можно определить как

$$Q = Y + \frac{A}{B} \cdot (\dot{H} + \delta H) = AK^{\alpha}H^{1-\alpha},$$

где A/B – постоянная цена H в единицах Y; в принципе, можно определить единицы H так, что $A/B = 1$. При таком определении выпуска в широком смысле бюджетное ограничение экономики выглядит так:

$$Q = C + \dot{K} + \delta K + \dot{H} + \delta H.$$

В таком случае данная модель эквивалентна односекторной версии, изученной ранее в данной главе.

[2]Хотя p и является подходящей теневой ценой, она не является единственной равновесной рыночной ценой на рынке человеческого капитала, если мы допустим наличие такового. Причина этого в том, что в данной модели человеческий капитал и товары не могут трансформироваться друг в друга, в результате чего равновесие является угловым решением. Quah (2002) доказал, что равновесная цена лежит в интервале $(0, \mu/\nu]$. Мы благодарны Danny Quah за то, что он указал нам на этот факт.

Обратим внимание на то, что выпуск в широком смысле Q является суммой выпуска в узком смысле Y и валового инвестирования в человеческий капитал в единицах товаров

$$pB \cdot [(1-v) \cdot K]^{\eta} \cdot [(1-u) \cdot H]^{1-\eta}.$$

Из уравнения (5.17) и условий первого порядка для $\dot{\mu}$ и $\dot{\nu}$ после достаточно сложных преобразований получаем выражение для p:

$$\frac{\dot{p}}{p} = A\phi^{\alpha/(\eta-\alpha)} \cdot \left[\alpha\phi^{1/(\alpha-\eta)} \cdot p^{(1-\alpha)/(\eta-\alpha)} - (1-\alpha) \cdot p^{\eta/(\alpha-\eta)}\right], \qquad (5.19)$$

где

$$\phi \equiv \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\eta} \cdot \left[\frac{1-\alpha}{1-\eta}\right]^{1-\eta}.$$

Наиболее важным результатом здесь является то, что темп прироста p зависит только от p и ни от каких других переменных.

Если $\alpha \neq \eta$, то уравнение (5.17) определяет взаимно однозначное соответствие между p и vK/uH. Тогда из уравнения (5.19) следует, что темп прироста отношения vK/uH зависит только от величины самого этого отношения и ни от каких других переменных.

Уравнение для темпа прироста vK/uH (полученное из уравнений (5.17) и (5.19)), уравнение (5.15) для $\dot{C}/C$, отношение между u и v определяемое (5.16), и условия для $\dot{K}$ и $\dot{H}$ из бюджетных ограничений совместно определяют динамику переменных u, v, C, K и H. Переменная v может быть исключена с помощью уравнения (5.16). Так как производственные функции (5.1) и (5.13) обладают свойством постоянной эффективности с ростом масштаба производства, абсолютные значения K, H и C не влияют на динамику, так что система может быть записана через отношения этих величин. Таким образом, можно выразить всю модель через переменные u, C/K и K/H. В стационарном состоянии данной системы значения u, C/K и K/H постоянны. Следовательно, темпы прироста C, K и H, а также и Y с Q равны в стационарном состоянии.

Из вида уравнения (5.19) можно сразу сделать определенные выводы относительно характера соответствующей динамики. Это уравнение является дифференциальным уравнением относительно единственной переменной p. Нетрудно проверить, что уравнение

- устойчиво (т. е. $\partial[\dot{p}/p]/\partial p < 0$), если $\alpha > \eta$,
- и неустойчиво (т. е. $\partial[\dot{p}/p]/\partial p > 0$), если $\alpha < \eta$.

(Если $\alpha = \eta$, то эта модель эквивалентна односекторной модели; см. сноску (1) на с. 325.) Таким образом, если $\alpha > \eta$ (это как раз тот случай, который мы рассматриваем как согласующийся с эмпирическими наблюдениями), то p монотонно сходится к своему стационарному значению.

Так как уравнение (5.17) взаимно однозначно связывает p с величиной vK/uH, то из монотонной сходимости p при $\alpha > \eta$ следует, что vK/uH также сходится монотонно к своему стационарному значению. Отношение vK/uH определяет предельный продукт физического капитала в секторе производства товаров. Следовательно, норма доходности r, равная чистому предельному продукту капитала в секторе производства товаров, а также отношение $\dot{C}/C$, определяемое из уравнения (5.15), тоже сходятся монотонно к своим стационарным значениям.

Дальнейший анализ модели в общем случае, при $\alpha > \eta \geqslant 0$, оказывается весьма сложным. Поэтому мы начнем его со специального случая $\eta = 0$, при котором возможно полное аналитическое описание переходной динамики. Затем мы получим ряд результатов в более общем случае, когда $\alpha > \eta > 0$. В заключение, рассматривая случай $\alpha < \eta$, придем к выводу, что такая конфигурация параметров невозможна.

5.2.2. Модель Узавы–Лукаса

Основная структура. В данном разделе мы рассмотрим специальную модель, которая исследована в работах Uzawa (1965) и Lucas (1988) и в которой при производстве человеческого капитала не используется физический капитал, т. е. $\eta = 0$ в уравнении (5.13). Такая спецификация является предельным случаем относительно большей интенсивности использования человеческого капитала в секторе образования ($\eta < \alpha$). Таким образом, сравнивая модель Узавы–Лукаса с односекторной моделью, в которой относительные интенсивности физического и человеческого капиталов одинаковы в каждом секторе, мы можем выявить наиболее важные последствия предположения об относительных интенсивностях производственных факторов. В деталях модель Узавы–Лукаса изложена в приложении 5В (разд. 5.6). Здесь мы приведем набросок полученных там результатов, а начнем мы со случая, в котором ограничения неотрицательности валового инвестирования в K и H являются несвязывающими.

Из того, что $\eta = 0$ следует $v = 1$, т. е. в силу того что физический капитал K не эффективен в образовательном секторе, весь он используется в товарном секторе. Тогда производственные функции (5.1) и (5.13) принимают вид[1]:

$$Y = C + \dot{K} + \delta K = AK^{\alpha} \cdot (uH)^{1-\alpha}; \tag{5.20}$$

$$\dot{H} + \delta H = B \cdot (1 - u) \cdot H. \tag{5.21}$$

Так же как и в гл. 4, будет полезно выразить эту систему через переменные, которые будут константами в стационарном состоянии. Замена переменных, которая облегчит нам дальнейший анализ динамики, следующая: $\omega \equiv K/H$ и $\chi \equiv C/K$. Теперь, подставив эти новые переменные уравнения (5.20) и (5.21), получим

$$\frac{\dot{K}}{K} = A \cdot u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \chi - \delta; \tag{5.22}$$

$$\frac{\dot{H}}{H} = B \cdot (1 - u) - \delta. \tag{5.23}$$

Следовательно, темп прироста ω задается уравнением:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H} = A \cdot u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - B \cdot (1 - u) - \chi. \tag{5.24}$$

Из условий первого порядка получаем, что темп прироста потребления задается знакомой формулой

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho),$$

где r равна чистому предельному продукту физического капитала в товарном производстве $\alpha A u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \delta$. Тогда темп прироста потребления дается уравнением

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\alpha A u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]. \tag{5.25}$$

Выражение для темпа прироста χ, как следует из уравнений (5.25) и (5.22), имеет вид

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{K}}{K} = \left(\frac{\alpha - \theta}{\theta}\right) \cdot A u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} + \chi - \frac{1}{\theta} \cdot [\delta \cdot (1 - \theta) + \rho]. \tag{5.26}$$

И наконец, в приложении 5В показано, что из уравнений (5.19) и (5.17) следует выражение для темпа прироста u:

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{B \cdot (1 - \alpha)}{\alpha} + Bu - \chi. \tag{5.27}$$

[1] Arnold (1997) обобщил данную модель, заменив уравнение (5.20) на неоклассическую производственную функцию в общем виде.

Анализ стационарного состояния. В приложении 5В доказано, что переменные u, ω и χ постоянны в стационарном состоянии. Обозначим

$$\varphi \equiv \frac{\rho + \delta \cdot (1-\theta)}{B\theta}, \tag{5.28}$$

тогда стационарные значения, соответствующие $\dot{u} = \dot{\omega} = \dot{\chi} = 0$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega^* &= \left(\frac{\alpha A}{B}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \left[\varphi + \frac{\theta-1}{\theta}\right]; \\ \chi^* &= B \cdot \left(\varphi + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta}\right); \\ u^* &= \varphi + \frac{\theta - 1}{\theta}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Норма доходности и общий темп прироста переменных C, K, H, Y и Q в стационарном состоянии определяются так:

$$r^* = B - \delta; \tag{5.30}$$

$$\gamma^* = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot (B - \delta - \rho). \tag{5.31}$$

Традиционное условие трансверсальности $r^* > \gamma^*$ гарантирует, что значения ω^*, χ^* и u^*, определяемые в (5.29), все положительны. Условие $u^* < 1$ выполнено, если $\gamma^* > 0$, т. е. правая часть равенства (5.31) больше 0.

Переходная динамика. Динамическая система для ω, χ и u состоит из уравнений (5.24), (5.26) и (5.27). Для удобства произведем замену ω на валовой средний продукт физического капитала в секторе производства товаров, который мы обозначим z[1]:

$$z \equiv Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)}. \tag{5.32}$$

Валовой *предельный* продукт физического капитала равен αz, а норма доходности $r = \alpha z - \delta$. Хотя переменная z является комбинацией переменной состояния ω и переменной управления u, мы далее покажем, что в равновесии между z и ω имеет место весьма простое соотношение. В частности, мы можем определить начальное значение $z(0)$, зная начальное значение $\omega(0)$.

[1] Можно было бы производить замену не на z, а на отношение vK/uH, которое равно $(A\alpha/z)^{1/(1-\alpha)}$.

В новых переменных система (5.24), (5.26) и (5.27) преобразуется к виду

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha)\cdot(z-z^*); \tag{5.33}$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \left(\frac{\alpha-\theta}{\theta}\right)\cdot(z-z^*) + (\chi-\chi^*); \tag{5.34}$$

$$\frac{\dot{u}}{u} = B\cdot(u-u^*) - (\chi-\chi^*), \tag{5.35}$$

где z^* — стационарное значение z. Из уравнения (5.29) и определения z в (5.32) следует, что это стационарное значение определяется выражением

$$z^* = \frac{B}{\alpha}. \tag{5.36}$$

Динамика среднего продукта капитала, нормы доходности и ставки заработной платы. Уравнение (5.33) является дифференциальным уравнением одной переменной, из которого определяется траектория z валового среднего продукта капитала. Это уравнение может быть решено в замкнутом виде:

$$\left(\frac{z-z^*}{z}\right) = \left[\frac{z(0)-z^*}{z(0)}\right]\cdot e^{-(1-\alpha)\cdot z^* t}, \tag{5.37}$$

где $z(0)$ – начальное значение z. Из этого уравнения видно, что z перемещается монотонно из начального значения $z(0)$ в стационарное значение z^*. На рис. 5.3 это свойство устойчивости представлено графически.

В силу того что норма доходности $r = \alpha z - \delta$, динамика z определяет динамику r. В частности, если $z(0) < z^*$, то $r(0) < r^*$ и r монотонно растет со временем в направлении своего стационарного значения. При $z(0) > z^*$ ситуация симметрична.

Ставка заработной платы w равна предельному продукту человеческого капитала uH, задействованного в товарном производстве. Из уравнения производственной функции (5.20) и определения z в (5.32) следует, что этот предельный продукт может быть записан в виде

$$w = A\cdot(1-\alpha)\cdot u^{-\alpha}\omega^{\alpha} = A^{1/(1-\alpha)}\cdot(1-\alpha)\cdot z^{-\alpha/(1-\alpha)}. \tag{5.38}$$

Следовательно, если $z(0) < z^*$, то $w(0) > w^*$ и w монотонно снижается со временем по направлению к своему стационарному значению, при $z(0) > z^*$ – наоборот.

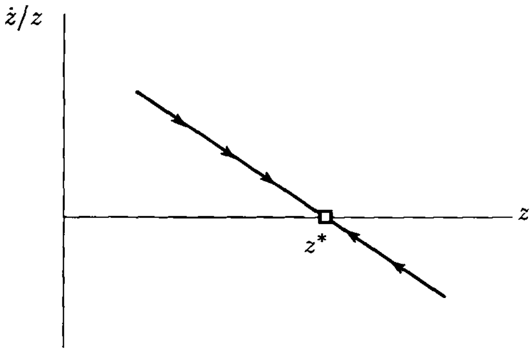


Рис. 5.3. Устойчивость z, валового среднего продукта капитала. Уравнение (5.33) модели Узавы- Лукаса является линейным дифференциальным уравнением относительно z. При $z < z^*$ темп прироста z положителен и z возрастает в направлении своего стационарного значения. При $z > z^*$ динамика симметрична относительно z^*. Следовательно, стационарное значение z^* устойчиво

Динамика $\chi \equiv C/K$. Эволюция во времени χ зависит от комбинации параметров α и θ, от которых зависит $\dot{\chi}/\chi$ в уравнении (5.34). Так как $\alpha \leqslant 1$, а $\theta > 1$, как мы обычно предполагаем, то неравенство $\alpha < \theta$, по всей вероятности, на практике будет выполнено. Так что будем считать, что $\alpha < \theta$.

Мы можем рассматривать уравнения (5.33) и (5.34) как двумерную систему относительно переменных z и χ и построить обычную фазовую диаграмму в плоскости (z, χ). (Отметим, что переменная u не присутствует в этих уравнениях.) Вертикальная прямая в значении z^* в правой части рис. 5.4 соответствует $\dot{z} = 0$ в уравнении (5.33). Кроме того, из этого уравнения следует, что z убывает при $z > z^*$ и возрастает при $z < z^*$. Таким образом, график $\dot{z} = 0$ является устойчивым, как показано на рисунке.

Из уравнения (5.34) следует, что график $\dot{\chi} = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\chi = \chi^* + \left(\frac{\theta - \alpha}{\theta}\right) \cdot (z - z^*). \tag{5.39}$$

Так как $\theta > \alpha$, то этот график является прямой линией с положительным углом наклона, как показано в правой части рис. 5.4. Кроме того, тангенс этого угла наклона меньше 1, этим мы воспользуемся позже. Из уравнения (5.34) следует, что χ растет в области выше графика $\dot{\chi} = 0$ и снижается в противном случае, т. е. этот график неустойчив, как показано на рисунке.

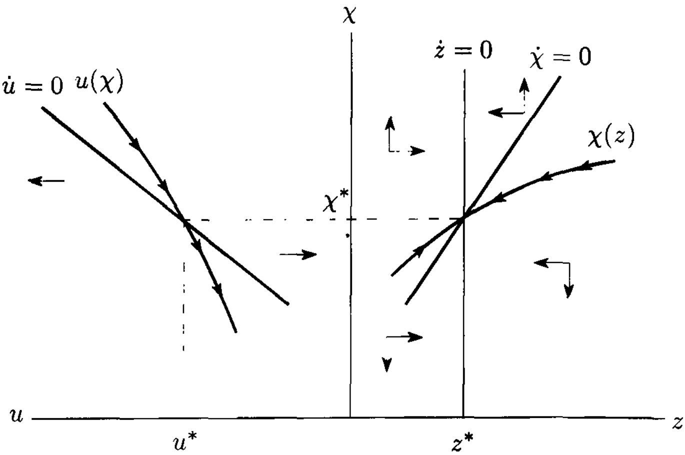


Рис. 5.4. Динамика z, χ и u в модели Узавы—Лукаса (при $\alpha < \theta$). В правой части в пространстве (z, χ) изображены графики $\dot{z} = 0$, $\dot{\chi} = 0$ и динамика z и χ. Устойчивая ветвь $\chi(z)$ имеет наклон вверх. В левой части, в пространстве (u, χ), изображены график $\dot{u} = 0$ и динамика u и χ (движение налево здесь соответствует большим значениям u). Устойчивая ветвь $u(\chi)$ имеет наклон вверх. Если $z(0) > z^*$, то $\chi(0) > \chi^*$ (следует из правой части) и $u(0) > u^*$ (следует из левой части). В процессе перехода z, χ и u монотонно снижаются. (Отметим, что эти результаты получены при условии $\alpha < \theta$.)

Исходя из конфигурации двух графиков в правой части рис. 5.4, заключаем, что устойчивая, седловая траектория, обозначенная $\chi(z)$, имеет наклон вверх. Таким образом, если $z(0) > z^*$, то $\chi(0) > \chi^*$, и z с χ монотонно убывают со временем по направлению к своим стационарным значениям.

Динамика u (часть человеческого капитала, используемого в производстве). Для определения динамики u воспользуемся уравнением (5.35), из которого следует, что график $\dot{u} = 0$ задается уравнением

$$u = u^* + \frac{\chi - \chi^*}{B}. \tag{5.40}$$

Этот график представляет собой прямую линию с наклоном вверх в пространстве (u, χ), как показано в левой части рис. 5.4. (Движение налево соответствует большим значениям u.) Устойчивая седловая траектория для u обозначена $u(\chi)$. Заметим, что если $z(0) > z^*$, так что $\chi(0) > \chi^*$, то $u(0) > u^*$. (На рисунке видно, что если $u(0) \leqslant u^*$ или $u(0)$ лежит слева от графика $\dot{u} = 0$, то u удаляется со временем от u^*.)

Итак, мы показали, что если $\alpha < \theta$, то из $z(0) > z^*$ вытекает $\chi(0) > \chi^*$ и $u(0) > u^*$, при этом z, χ и u монотонно убывают в направлении своих стационарных значений. И наоборот, если $z(0) < z^*$, то $\chi(0) < \chi^*$ и $u(0) < u^*$, при этом z, χ и u монотонно возрастают в направлении своих стационарных значений.

Динамика при $\alpha \geqslant \theta$. Можно провести точно такой же анализ и в случае $\alpha \geqslant \theta$. Однако мы не рассматриваем этот случай как приемлемый с эмпирической точки зрения, поэтому мы просто выпишем итоговые результаты, а вывод их оставим в качестве упражнений. Если $\alpha > \theta$, то результаты для χ и u обратны найденным ранее. Например, если $z(0) > z^*$, то $\chi(0) < \chi^*$ и $u(0) < u^*$. Монотонное убывание со временем z связано с монотонным возрастанием χ и u.

Если $\alpha = \theta$, то $\chi(0) = \chi^*$ и $u(0) = u^*$, т. е. в этом случае переменные χ и u остаются неизменными на уровне своих стационарных значений на протяжении всего времени перехода из $z(0)$ в z^*.

Связь между z, валовым средним продуктом физического капитала и переменной состояния $\omega \equiv K/H$. Вернемся к случаю $\alpha < \theta$. Для завершения анализа динамики мы должны связать поведение z (а следовательно, χ и u) с поведением переменной состояния ω. В частности, мы бы хотели воспользоваться начальным условием $\omega(0)$.

В приложении 5В показано, что между $z(0)$ и $\omega(0)$ имеет место обратная зависимость, с $z(0) \gtreqless z^*$ при $\omega(0) \lesseqgtr \omega^*$. Другими словами, валовой средний продукт физического капитала z изначально больше, если ω, отношение K к H, изначально меньше, и наоборот.

Приведем пример. Если ω стартует выше своего стационарного значения (ситуация, в которой человеческого капитала недостаточно относительно физического капитала), то z, средний продукт физического капитала, и r, норма доходности, стартуют с низких значений и затем монотонно возрастают по направлению к своим стационарным позициям. Нам также известно, что в данной ситуации ставка заработной платы w стартует выше своего стационарного значения и затем снижается, в то время как χ и u стартуют ниже своих стационарных значений и затем возрастают. Такое поведение u означает, что изначально человеческого капитала относительно мало в товарном производстве и относительно много в образовании. Со временем человеческий капитал перемещается из образования в производство. Если ω начинает движение со значения ниже стационарного, то все эти результаты остаются в силе, но в противоположных направлениях.

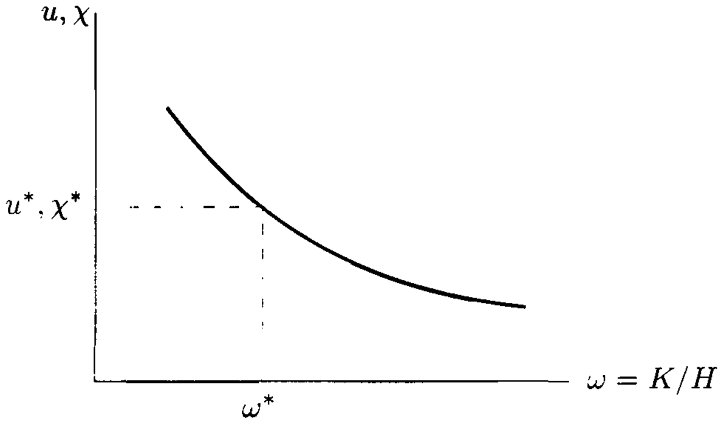


Рис. 5.5. Стратегии для u и χ (при $\alpha < \theta$). Стратегии — это функции, которые связывают оптимальные значения переменных управления u и $\chi \equiv C/K$ с переменной состояния, $\omega \equiv K/H$. При $\alpha < \theta$ графики обеих стратегий имеют наклон вниз. (Для простоты на рисунке показана только одна кривая.) Если $\alpha = \theta$, то графики стратегий будут горизонтальными прямыми, если $\alpha > \theta$, то будут иметь наклон вверх

Функции стратегий для χ и u. Полученные результаты для χ и u можно выразить в терминах стратегий. На рис. 5.5 показано, что переменные χ и u в обоих случаях являются убывающими функциями ω[1]. (Для простоты на рисунке показана только одна кривая для обеих переменных.) Таким образом, если мы опять рассмотрим страну, которая стартует с относительным недостатком человеческого капитала, $\omega > \omega^*$, то ω снижается со временем, в то время как χ и u растут. В итоге в этой стране относительно мало ресурсов потребляется ($\chi \equiv C/K$ мало), но много расходуется на образование (величина $1 - u$ велика).

Переходная динамика темпов прироста. Рассмотрим теперь динамику ω, χ, z и u, точнее, их темпов прироста в процессе перехода в стационарное состояние. В частности, нас интересует вопрос, приводит ли дисбаланс между K и H (т. е. ω находится выше или ниже ω^*) к высоким или низким темпам роста различных величин в модели.

Темп прироста потребления. Если экономика стартует с относительно малым объемом физического капитала $\omega < \omega^*$, то процентная ставка r монотонно убывает в направлении своего стационарного значения $B - \delta$. Это снижение r приводит к снижению $\dot{C}/C$. И наоборот, если

[1] На рис. 5.5 показан случай $\alpha < \theta$. Стратегии будут иметь положительный угол наклона при $\alpha > \theta$, а при $\alpha = \theta$ будут горизонтальными прямыми.

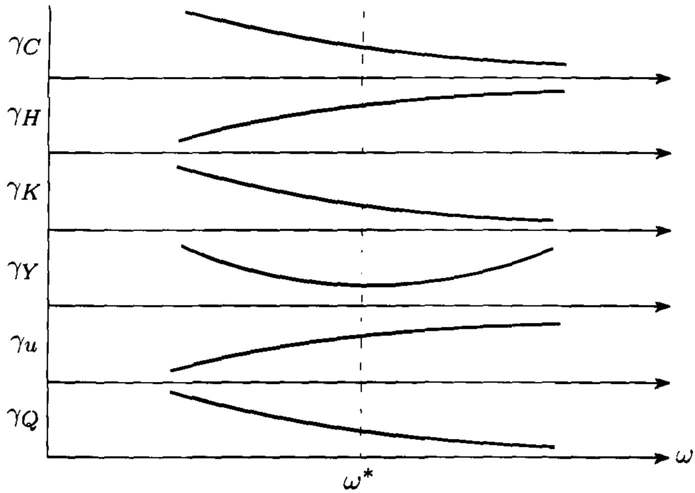


Рис. 5.6. Шаблоны для темпов прироста в модели Узавы—Лукаса. На рисунке показана динамика темпов прироста потребления, человеческого капитала, выпуска товаров (Y), части капитала, используемого в секторе производства товаров (u), и выпуска в широком смысле (Q). Все эти переменные зависят от $\omega \equiv K/H$. (Примечание: минимальное значение $\dot{Y}/Y$ может быть и слева, и справа от стационарного значения ω^*.)

$\omega > \omega^*$, то r и $\dot{C}/C$ неуклонно возрастают в процессе перехода. Если мы построим график зависимости $\dot{C}/C$ от ω, то обнаружим, что кривая имеет наклон вниз, как показано в самой верхней части рис. 5.6.

Вспомним, что в односекторной модели с ограничениями в виде неравенств на валовое инвестирование соотношение между $\dot{C}/C$ и ω описывалось U-образной кривой, изображенной на рис. 5.1. Разбалансировка между K и H в любом направлении приводила к более высокому темпу прироста потребления. Однако в модели Узавы—Лукаса, в которой ограничения в виде неравенств на валовое инвестирование в K и H не связывающие, дисбаланс, связанный с нехваткой K ($\omega < \omega^*$), приводит к более высокому значению $\dot{C}/C$, в то время как дисбаланс, связанный с нехваткой H ($\omega > \omega^*$), приводит к более низкому значению $\dot{C}/C$.

Темпы прироста человеческого и физического капиталов. Переходная динамика темпов прироста остальных переменных сложнее. В приложении 5В показано, как, используя выражения (5.33) (5.35) для $\dot{z}/z$, $\dot{\chi}/\chi$ и $\dot{u}/u$, а также условие (5.25) для $\dot{C}/C$, получить выражения для темпов прироста H и K:

$$\frac{\dot{H}}{H} = \gamma^* - B \cdot (u - u^*); \tag{5.41}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \gamma^* + (z - z^*) - (\chi - \chi^*), \tag{5.42}$$

где γ^* - стационарный темп прироста $(1/\theta) \cdot (B - \delta - \rho)$ из уравнения (5.31).

В случае $\alpha < \theta$, что мы и предполагаем, $u - u^*$ монотонно убывает по ω, что показано на рис. 5.5. Поэтому из уравнения (5.41) следует монотонное возрастание $\dot{H}/H$ по ω. Рост относительного количества физического капитала приводит к увеличению темпа прироста человеческого капитала. Этот факт показан на второй сверху части рис. 5.6.

Вспомним, что $z - z^*$ — отклонение среднего продукта капитала от своего стационарного значения является монотонной функцией ω. Исходя из уравнения (5.42), это означает снижение $\dot{K}/K$ при уменьшении ω. Однако, как видно на рис. 5.5, $\chi - \chi^*$ монотонно убывает по ω, и этот эффект компенсирует тенденцию $\dot{K}/K$ к снижению[1)].

На рис. 5.7 представлен графический способ определения $\dot{K}/K$. Для начала скопируем из правой части рис. 5.4 седловую траекторию, обозначенную как $\chi(z)$. Отметим, что эта кривая имеет положительный угол наклона, но меньший, чем у графика $\dot{\chi} = 0$, по крайней мере в окрестности стационарного состояния. Вспомним также, что из уравнения (5.39) угол наклона графика $\dot{\chi} = 0$ положителен, но его тангенс меньше 1. Следовательно, в окрестности стационарного состояния тангенс угла наклона $\chi(z)$ также должен быть меньше 1.

Используем уравнение (5.42) для построения линий постоянного темпа прироста, т. е. таких кривых в пространстве z и χ, каждой из которых соответствует некоторое фиксированное значение $\dot{K}/K$. Из уравнения следует, что эти кривые являются прямыми линиями с тангенсом угла наклона, равным 1. На рис. 5.7 изображено несколько таких линий; те, что правее (с большими значениями z), соответствуют большим значениям $\dot{K}/K$. Нам также известно, что угол наклона этих линий превосходит угол наклона кривой $\chi(z)$, по крайней мере в окрестности стационарного состояния [в силу того что в этой области тангенс угла наклона кривой $\chi(z)$ меньше 1].

[1)]Если $\alpha \geqslant \theta$, то $\chi - \chi^*$ либо монотонно возрастает по z, либо константа. Так что в данном случае $\dot{K}/K$ совершенно однозначно монотонно убывает по ω.

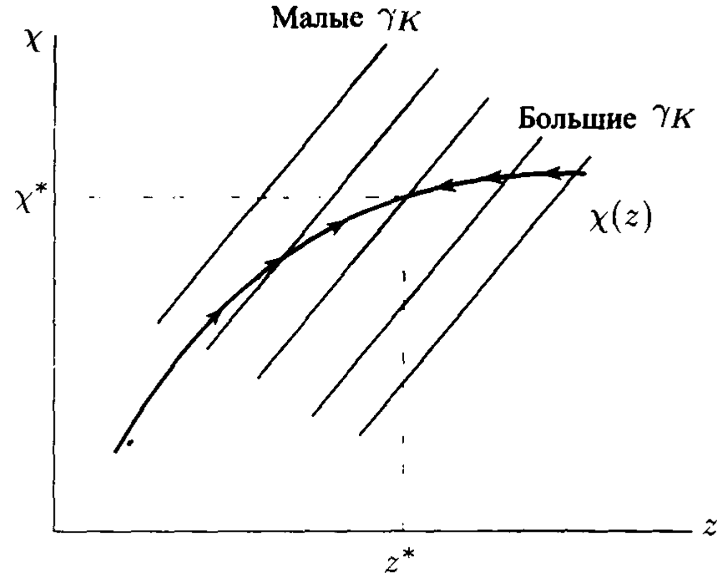


Рис. 5.7. Определение темпа прироста человеческого капитала. В окрестности стационарного состояния линии постоянного темпа прироста имеют больший угол наклона, чем седловая кривая $\chi(z)$. Те линии постоянного темпа прироста, которые расположены правее, соответствуют большим значениям $\dot{K}/K$. Поэтому имеет место прямая зависимость $\dot{K}/K$ от ω в окрестности стационарного состояния. Из обратной зависимости между z и ω следует обратная зависимость $\dot{K}/K$ от ω

На рис. 5.7 показано, что в окрестности стационарного состояния зависимость $\dot{K}/K$ от z прямая. Следовательно, зависимость $\dot{K}/K$ от ω в данной области обратная. Другими словами, если $\omega(0) < \omega^*$, то по мере роста со временем ω падение $z - z^*$ происходит быстрее, чем падение $\chi - \chi^*$, в результате чего, как следует из уравнения (5.42), $\dot{K}/K$ уменьшается.

Как мы установили посредством численного моделирования, обратная зависимость между $\dot{K}/K$ и ω имеет место для достаточно большого диапазона значений величины ω вокруг ее стационарного значения (см. Mulligan and Sala-i-Martin, 1993). То есть снижение $z - z^*$ мажорирует снижение $\chi - \chi^*$ в широком диапазоне значений параметров, с которыми мы до сих пор имели дело[1]. Таким образом, из модели следует,

[1] Посредством численного моделирования установлено, что обратная зависимость между $\dot{K}/K$ и ω может перемениться на прямую зависимость в области очень больших значений ω. Однако для очень больших (или очень малых) значений ω ограничения в виде неравенств на валовое инвестирование становятся связывающими (см. разд. 2.2.4). Если же мы рассматриваем только тот диапазон, в котором эти ограничения не срабатывают, то наши численные результаты показывают, что $\dot{K}/K$ является убывающей функцией ω при всех значениях параметров, с которыми мы до сих пор имели дело.

что чем больше отношение физического капитала к человеческому ω, тем меньше темп прироста физического капитала $\dot{K}/K$. Это свойство показано в третьей сверху части рис. 5.6.

Темп прироста выпуска товаров Y. Количество произведенных товаров (в виде потребительских товаров и физического капитала) задается уравнением (5.20),

$$Y = AK^{\alpha} \cdot (uH)^{1-\alpha}.$$

Тогда, используя выражения (5.41) и (5.42) для $\dot{H}/H$ и $\dot{K}/K$, а также формулу (5.35) для $\dot{u}/u$, мы можем определить темп прироста Y:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \gamma^* + \alpha \cdot (z - z^*) - (\chi - \chi^*). \tag{5.43}$$

Анализ динамики $\dot{Y}/Y$ аналогичен анализу, который мы произвели для $\dot{K}/K$. Из уравнения (5.43) следует, что графики постоянного темпа прироста для $\dot{Y}/Y$ в пространстве (z, χ) являются прямыми линиями с тангенсом угла наклона $\alpha < 1$. Несколько этих линий показано на рис. 5.8; линии, расположенные правее, соответствуют более высоким темпам роста. Отличием от предыдущего случая здесь является то, что в окрестности стационарного состояния линии постоянного темпа прироста не обязательно круче кривой $\chi(z)$. Таким образом, определить вид зависимости $\dot{Y}/Y$ от z в окрестности стационарного состояния не получается. Поэтому мы делаем вывод, что $\dot{Y}/Y$ может как расти, так и снижаться при изменении ω[1].

Мы проверили эти результаты численно и обнаружили, что зависимость между $\dot{Y}/Y$ и ω имеет U-образный вид, как показано на четвертой сверху части рис. 5.6. Минимум $\dot{Y}/Y$ может оказаться как левее, так и правее стационарного состояния; т. е. $\dot{Y}/Y$ может быть как возрастающей, так и убывающей функцией ω в окрестности стационарного состояния.

Допустим, например, что параметр α равен 0.5, и зададимся стандартными значениями остальных параметров, т. е. теми, что мы использовали и раньше ($\rho = 0{,}02$, $n = 0{,}01$, $\delta = 0{,}05$), также положим $B = 0{,}11$, чтобы стационарная норма доходности $B - \delta$ равнялась 0,06. (Стационарный темп прироста $(1/\theta) \cdot [B - \delta - \rho]$ в таком случае равен 0.02 при $\theta = 2$.) При таком наборе параметров минимум $\dot{Y}/Y$ оказывается в точности в стационарном значении ω, если $\theta = 3{,}5$.

---

[1] Если $\alpha \geqslant \theta$, то $\chi - \chi^*$ либо растет по ω, либо константа. Следовательно, $\dot{Y}/Y$ определенно убывает по ω.

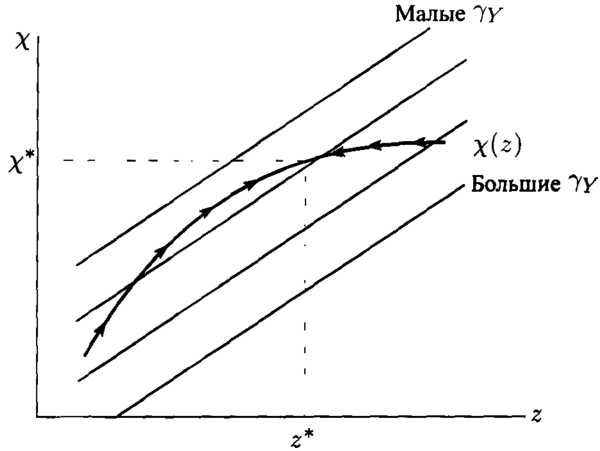


Рис. 5.8. Определение темпа прироста выпуска товаров. В окрестности стационарного состояния линии постоянного темпа прироста могут иметь как более крутой, так и более пологий наклон относительно наклона седловой траектории $\chi(z)$. Поэтому мы не можем сказать, как темп прироста $\dot{Y}/Y$ зависит от z и ω. Отметим, что кривая $\chi(z)$ скопирована из правой части рис. 5.4 и имеет такой вид при $\alpha < \theta$

слева от стационарного состояния - если $\theta > 3{,}5$, и справа от него – если $\theta < 3{,}5$. (Заметим, что если минимум $\dot{Y}/Y$ находится слева от стационарного состояния, то $\dot{Y}/Y$ является возрастающей функцией z в окрестности стационарного состояния, и наоборот.) Таким образом, эффект дисбаланса в окрестности стационарного состояния может быть как симметричным, с более высокими темпами прироста при относительном недостатке любого из ресурсов K или H, так и асимметричным, с увеличением темпов прироста при одном типе дисбаланса и уменьшением при другом.

Темп прироста выпуска в широком смысле Q. Выпуск в широком смысле Q определен в уравнении (5.18) (сейчас считаем, что $\eta = 0$). Используя формулу (5.17) для μ/ν, выражение (5.43) для $\dot{Y}/Y$, (5.41) для $\dot{H}/H$ и (5.35) для $\dot{u}/u$, получаем формулу для вычисления темпа прироста Q:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{u}}{u} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha u}. \qquad (5.44)$$

Динамику $\dot{Y}/Y$ мы уже обсудили. Следовательно, анализ динамики $\dot{Q}/Q$ сводится к анализу динамики $\dot{u}/u$.

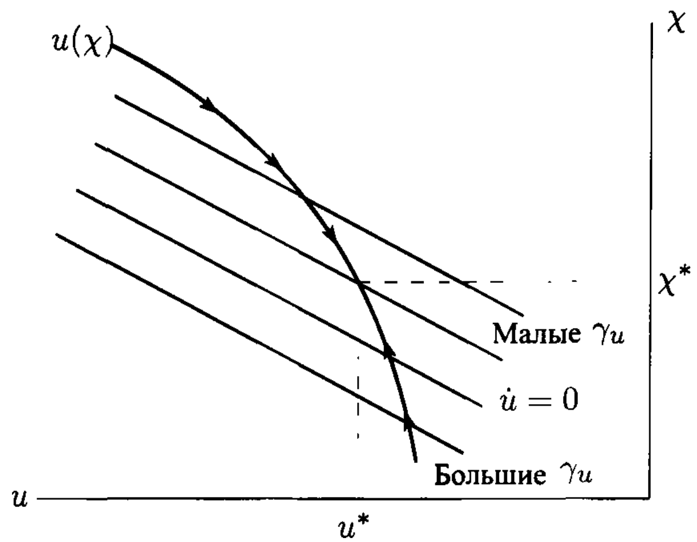


Рис. 5.9. Определение $\dot{u}/u$. В окрестности стационарного состояния линии постоянного темпа прироста более пологи, чем седловая траектория $\chi(u)$. Линии постоянного темпа прироста, которые лежат выше и правее, соответствуют меньшим значениям $\dot{u}/u$. Следовательно, в окрестности стационарного состояния, $\dot{u}/u$ имеет обратную зависимость от χ (следовательно, и от z). Обратная зависимость между z и ω приводит к тому, что $\dot{u}/u$ имеет прямую зависимость от ω

Из уравнения (5.35) следует, что линии постоянного темпа прироста $\dot{u}/u$ являются прямыми с наклоном, равным наклону графика $\dot{u} = 0$, который фигурирует в левой части рис. 5.4. На рис. 5.9 показано несколько этих прямых; те, что левее (большие значения u), соответствуют большим значениям $\dot{u}/u$. Если $z(0) > z^*$, что соответствует $\omega(0) > \omega^*$, то $u(0) > u^*$ и $\chi(0) > \chi^*$. Следовательно, экономика движется вниз, вдоль изображенной на рис. 5.9 кривой $u(\chi)$ в направлении меньших значений u и χ. Как следует из рисунка, $\dot{u}/u$ движется вверх, т. е. по мере роста z, $\dot{u}/u$ увеличивается от некоторого отрицательного значения до своего стационарного значения, равного нулю. Эта динамика изображена в пятой части рис. 5.6.

Вернемся теперь к формуле (5.44) для $\dot{Q}/Q$. Если ω растет, то $\dot{u}/u$ тоже растет (как мы только что установили), а u уменьшается. Следовательно, последнее выражение в скобках в правой части уравнения (5.44) дает вклад в обратную зависимость между $\dot{Q}/Q$ и ω.

Однако в формулу для $\dot{Q}/Q$ также входит и отношение $\dot{Y}/Y$, которое имеет U-образную форму зависимости от ω (см. рис. 5.6), с минимумом слева или справа от стационарного состояния. Впрочем, результаты наших численных исследований показали, что в широком диапазоне значений ω зависимость $\dot{Q}/Q$ от ω все-таки обратная[1]. То есть при рассматриваемых нами значениях параметров новый член в выражении (5.44) имеет достаточную силу, чтобы подавить U-образность зависимости $\dot{Y}/Y$ от ω. Таким образом, как показано в самой нижней части рис. 5.6, $\dot{Q}/Q$ является монотонно убывающей функцией ω.

Итоговая картина динамики переменных в модели Узавы—Лукаса. Модель Узавы - Лукаса демонстрирует отличную от односекторной модели картину эффектов дисбаланса между K и H. В односекторной модели, чем больше был дисбаланс между K и H в любом направлении, тем больше были темпы прироста выпуска и потребления. Отметим, что в односекторной модели выпуск включал в себя потребительские товары и оба вида капитала. Следовательно, нам следует сравнивать темп прироста выпуска в односекторной модели с темпом прироста выпуска в широком смысле в модели Узавы -Лукаса.

В модели Узавы - Лукаса зависимость $\dot{C}/C$ от ω всегда обратная, и отношение $\dot{Q}/Q$ также имеет обратную зависимость от ω (см. рис. 5.6). Следовательно, если человеческий капитал в избытке относительно физического капитала ($\omega < \omega^*$), то эти темпы прироста возрастают по мере роста размера дисбаланса между человеческим и физическим капиталами, но если человеческого капитала не хватает относительно физического капитала ($\omega > \omega^*$), то они снижаются. Соответственно, модель прогнозирует более быстрое восстановление экономики после войны, во время которой повреждается в основном физический капитал, чем после эпидемии, уничтожающей преимущественно человеческий капитал.

Источником таких новых результатов послужило предположение, что в секторе образования более интенсивно используется человеческий капитал. Если, например, $\omega > \omega^*$, то предельный продукт человеческого капитала в товарном секторе велик, а рост будет иметь место в основном благодаря высокому темпу роста человеческого капитала. Однако из высокого уровня ω следует высокая ставка заработной платы и, следовательно, высокая стоимость работы сектора образования, который относительно более интенсивно использует человеческий капитал. Другими словами, данный эффект мотивирует людей использовать человеческий

[1] Как сказано в сноске (1) на с. 338, при очень больших или очень малых значениях ω ограничения в виде неравенств на валовое инвестирование срабатывают. Но если рассматривать только такой диапазон значения ω, в котором эти ограничения не связывающие, то, согласно нашим численным результатам, $\dot{Q}/Q$, так же как и $\dot{K}/K$, является убывающей функцией ω при всех рассматриваемых нами значениях параметров.

капитал в секторе производства товаров, а не в секторе образования, который производит относительно мало фактора H. Соответственно, этот эффект приводит к замедлению роста экономики при ω^*.

Поведение нормы сбережения. В гл. 2 мы обсудили поведение нормы валового сбережения в односекторной модели Рамсея. При производственной функции Кобба—Дугласа норма сбережения монотонно убывала, оставалась неизменной или монотонно возрастала во время перехода, в зависимости от того, была определенная комбинация параметров положительна, равна нулю или отрицательна (см. приложение 2В). Мы также отмечали, что если взять достаточно высокое значение доли капитала, скажем 0,75 (т. е. капитал рассматривается в широком смысле), то при разумных значениях параметров норма валового сбережения будет приблизительно постоянна.

Аналогичный анализ может быть применен к модели Узавы—Лукаса с производственной функцией Кобба—Дугласа в секторе производства товаров. Предположим, что валовое сбережение определено как часть выпуска товаров Y, которая осталась не потребленной. Здесь мы моделируем ситуацию в узком смысле, мы не считаем, что произведенный человеческий капитал может тоже быть выпуском или сбережением. В таком случае мы можем показать (следуя процедуре, аналогичной той, что приведена в приложении 2В), что переходное поведение нормы сбережения определяется следующим образом:

$$\Psi = -B\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}+\delta-\frac{\rho+\delta}{\theta}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{ds}{d\omega}>0; \tag{5.45}$$

$$\Psi = -B\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}+\delta-\frac{\rho+\delta}{\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad s=1-\alpha\cdot\frac{\theta-1}{\theta};$$

$$\Psi = -B\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}+\delta-\frac{\rho+\delta}{\theta}<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{ds}{d\omega}<0.$$

Как видим, условие постоянства нормы сбережения $\Psi = 0$ теперь трудновыполнимо. Во-первых, из (5.45) следует, что для $\Psi = 0$ необходимо выполнение неравенства $\alpha\delta > B\cdot(1-\alpha)$. Для тех значений параметров, которые мы брали ранее, $\delta = 0{,}05$ и $B = 0{,}11$, из этого условия вытекает $\alpha > 0{,}69$. Так как, согласно предположению, α относится теперь только к физическому капиталу, это неравенство едва ли может быть выполнено. Во-вторых, из условия трансверсальности для данной модели (стационарная доходность $B-\delta$ превосходит стационарный темп прироста $(1/\theta)\cdot(B-\delta-\rho)$) следует, что Ψ может быть равно 0, только если

$$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\alpha} < 2.$$

В частности, это условие означает, что $\theta > 1/\alpha$. Таким образом, если бы при некотором малом значении α было выполнено предыдущее неравенство, то для постоянства нормы сбережения потребовалось бы большое значение θ.

Если бы норма сбережения была постоянной в процессе перехода, то ее значение

$$s = 1 - \frac{\alpha \cdot (\theta - 1)}{\theta}$$

было бы очень большим, поскольку и значение α близко к 1, и θ велико. Например, если $\alpha = 0{,}5$ и $\theta = 2$, то $s = 0{,}75$. Так как сбережение в данном случае соответствует только части товарного выпуска, идущего в физический капитал - и не включает в себя инвестирование в человеческий капитал, - то такое большое значение s нереалистично.

Разумные значения параметров, включая значение α, существенно отдаленное от 1, соответствуют $\Psi < 0$ и, следовательно, $ds/d\omega < 0$ в системе (5.45). Рассмотрим слаборазвитую страну, которая начинает развиваться в условиях относительного недостатка человеческого капитала, так что $\omega > \omega^*$. Тогда данная модель для такой страны прогнозирует старт валовой нормы сбережения (определенной как часть товарного выпуска, которая не ушла в потребление) с низкого значения, а затем рост ее по мере того, как экономика сходится к своему стационарному состоянию.

Ограничения в виде неравенств на валовое инвестирование. В односекторной модели, которую мы изучали в первой части данной главы, в случае если начальное значение $\omega \equiv K/H$ было удалено от его стационарного значения, одно из ограничений неотрицательности валового инвестирования становилось связывающим. В частности, из $\omega < \omega^*$ следовало, что валовое инвестирование в человеческий капитал было равно нулю, в то время как из $\omega > \omega^*$ следовало, что валовое инвестирование в физический капитал было равно нулю. В модели Узавы—Лукаса ограничения в виде неравенств не являются связывающими в некотором диапазоне значений ω вокруг его стационарного значения, так что в рамках рассмотрения этого диапазона имеет место описанная выше динамика. Однако если ω стартует значительно ниже или выше своего стационарного значения, то одно из ограничений на валовое инвестирование срабатывает.

Если $\alpha < \theta$, как мы и предполагаем, то u и ω имеют обратную зависимость друг от друга, как показано на рис. 5.5. Если ω значительно ниже ω^*, то ограничение $u \leqslant 1$ становится связывающим, т. е. если K в существенном недостатке относительно H, то валовое инвестирование в H равно нулю. В этом случае H убывает с постоянным темпом δ, так что ситуация здесь такая же, что и в обычной односекторной модели роста, в которой выпуск распределяется между C и K. Мы знаем, что в указанном диапазоне ω темпы прироста C, K и Y имеют обратную зависимость от ω. Следовательно, как видно на рис. 5.6, кривые $\dot{C}/C$ и $\dot{K}/K$ имеют наклон вниз и часть кривой $\dot{Y}/Y$ имеет наклон вниз даже при достаточно малых значениях ω, когда ограничение $u \leqslant 1$ является связывающим.

Мы можем численно определить, насколько именно меньше ω^* должно быть значение ω, для того чтобы ограничение $u \leqslant 1$ и, следовательно $\dot{H} + \delta H \geqslant 0$, стало связывающим. Для упомянутых ранее значений параметров, включая $\alpha = 0{,}5$ и $\theta = 2$, ω должно отклониться от ω^* на 5%, после чего указанное ограничение станет связывающим. Аналогичные выводы имеют место и при небольших вариациях в выборе значений параметров относительно тех, что мы выбрали[1]. Таким образом, для широкого диапазона значений ω, меньших ω^*, ограничение $u \leqslant 1$ можно отбросить без искажения результатов.

Значительное превышение величиной ω значения ω^* приводит к тому, что ограничение $\dot{K} + \delta K \geqslant 0$ становится связывающим. То есть если K в сильном избытке относительно H, то валовое инвестирование в K равно нулю[2]. В этом случае K растет с постоянным темпом $-\delta$, и весь выпуск идет на потребление. Так что в данном случае единственное решение, которое принимает домохозяйство, заключается в том, чтобы правильно распределить H между производством (u) и образованием ($1 - u$). Но эта структура совпадает с двухсекторной моделью, в которой потребительские товары производятся посредством одной технологии, а капитал (H) посредством другой. Единственное отличие от стандартных двухсекторных моделей такого типа (таких как модель Uzawa, 1964, и модель Srinivasan, 1964) заключается в том,

[1] Если $\alpha \geqslant \theta$, то ограничение $u \leqslant 1$ никогда не станет связывающим.

[2] Если $\alpha < \theta$, то u убывает по ω, как показано на рис. 5.5. Поэтому значительный рост u приведет к тому, что неравенство $u \geqslant 0$ станет связывающим. Однако ограничение $C \geqslant 0$ никогда не станет связывающим, так как $u'(c) \to \infty$ при $c \to 0$. Следовательно, при росте ω неравенство $\dot{K} + \delta K \geqslant 0$ срабатывает раньше, чем $u \geqslant 0$. Мы также установили численно, что ограничение $\dot{K} + \delta K \geqslant 0$ становится связывающим при достаточно больших значениях ω, даже если $\alpha \geqslant \theta$.

что здесь сектору потребительских товаров свойственна убывающая эффективность с ростом масштаба, в то время как сектору капитальных товаров (H) – постоянная.

В приложении 5B показано, что темпы прироста C и Y в модели Узавы–Лукаса постоянны, когда ограничение $\dot{K} + \delta K \geqslant 0$ срабатывает. То есть если ω достаточно велико для того чтобы ограничение неотрицательного инвестирования в физический капитал стало связывающим, то $\dot{C}/C$, $\dot{Y}/Y$, а также $\dot{K}/K$ не зависят от ω. Поэтому, как показано на рис. 5.6, при достаточно больших значениях ω графики $\dot{C}/C$, $\dot{Y}/Y$ и $\dot{K}/K$ становятся горизонтальными.

Поведение других темпов прироста зависит от динамики u. В частности, даже при $\alpha < \theta$ и срабатывании ограничения $\dot{K} + \delta K \geqslant 0$ стратегия u не должна убывать по ω (как это было на рис. 5.5). Если бы зависимость u от ω была обратной в ограниченном интервале, то $\dot{H}/H$ и $\dot{Q}/Q$ росли бы с ω в этом интервале. И наоборот, если бы зависимость u от ω была прямой, то $\dot{H}/H$ и $\dot{Q}/Q$ снижались бы с ростом ω. Но это верно при $\theta \leqslant 1$, а если $\theta > 1$, то результат может быть любым.

Численно мы определили, насколько большим должно быть значение ω, чтобы ограничение неотрицательности инвестирования в физический капитал стало связывающим. При значениях параметров, которые мы рассматривали выше, для того чтобы данное ограничение сработало, величина ω должна быть почти в 5 раз больше ω^*. Аналогичные выводы имеют место в случае небольшой вариации значений параметров относительно рассмотренных нами. Следовательно, полученные результаты свидетельствуют о том, что мы можем без ограничения общности отбросить ограничение $\dot{K}+\delta K \geqslant 0$ для значений ω в широком диапазоне выше ω^*.

При разумных значениях параметров диапазон значений ω, в рамках которого ограничения в виде неравенств не связывают (от 5% ω^* до 5-кратного превышения ω^* при наших стандартных значениях параметров), оказывается достаточно широким относительно эмпирически наблюдаемых диапазонов значений отношения K/H. Поэтому кажется вполне разумным сфокусировать внимание на изучении практической значимости полученных в рамках данной модели решений, т. е. тех графиков, которые представлены на рис. 5.5 и 5.6.

5.2.3. Обобщенная модель Узавы–Лукаса

Обобщение модели Узавы–Лукаса основано на предположении, что в секторе образования относительно интенсивнее используется человеческий капитал $\eta < \alpha$, но физический капитал все равно присутствует в этом секторе, т. е. $\eta > 0$. Мы уже видели на основании уравнений (5.17) и (5.19) при $\eta < \alpha$, что vK/uH — отношение физического капитала, используемого в производстве товаров, к человеческому капиталу, используемому там же — монотонно сходится к своему стационарному значению. Отсюда следует, что норма доходности r и темп прироста потребления $\dot{C}/C$ монотонно сходятся к своим стационарным значениям. Таким образом, эти результаты точно такие же, что и в случае Узавы—Лукаса, где $\eta = 0$.

Отличительной особенностью здесь является то, что мы не можем свести данную динамическую систему к двумерному случаю, как это делали ранее, и, следовательно, не можем построить фазовые диаграммы в таком виде, как на рис. 5.4. Более того, в общем случае мы не можем показать, что функции стратегий для χ и u имеют монотонную зависимость от ω[1] или что темпы прироста K, H, Y и Q качественно ведут себя так же, как и ранее[2].

Мы произвели имитационное моделирование, в котором параметр α был взят равным 0,4, а параметр η варьировался от 0 до 0,4. Значения остальных параметров были стандартными для данной книги: $\delta = 0{,}05$, $\rho = 0{,}02$, $n = 0{,}01$ и $\theta = 3$. При $\eta = 0$ мы положили $B = 0{,}13$, так что стационарная процентная ставка равна 0,08, а стационарный подушевой темп прироста равен 0,02. Шаблоны динамики различных темпов прироста при $\eta = 0$ такие же, что и на рис. 5.6. При увеличении η мы корректируем B таким образом, чтобы сохранить неизменными стационарные темпы прироста и процентную ставку[3].

Как показывает имитационное моделирование, по мере приближения η к α стратегии u и χ остаются монотонными функциями с обратной зависимостью от ω, как показано на рис. 5.5 для случая $\eta = 0$ (впрочем, см. сноску (1) на с. 347). Мы также обнаружили, что качественное поведение различных темпов прироста остается таким же, как и на рис. 5.6, за исключением того, что большие значения η наклоняют кривую $\dot{Y}/Y$

[1] Имитационными методами мы обнаружили, что u может иметь немонотонную зависимость от $\omega = K/H$, но только при необычных значениях основных параметров. Мы также нашли такие специфические значения параметров, при которых стратегия χ может иметь наклон, противоположный наклону стратегии u, при $\eta = 0$ такого результата быть не может.

[2] В работах Bond, Wang, and Yip (1996) и Mino (1996) установлена локальная устойчивость в более общем случае, в котором производственные функции обладают неоклассическими свойствами.

[3] Везде здесь предполагается $A = 1$.

вверх в окрестности стационарного состояния. Таким образом, согласно этим численным результатам, при «разумных» значениях структурных параметров основные качественные выводы из модели Узавы -Лукаса, по всей видимости, сохраняются и при отказе от нереалистичного предположения, что в секторе образования не используется физический капитал в качестве производственного ресурса ($\eta = 0$). В частности, наше предыдущее обсуждение эффектов дисбаланса между K и H также, скорее всего, остается в силе.

Другой отличительной особенностью обобщенной модели является то, что диапазон, в котором ограничения $u \leqslant 1$ и $\dot{K} + \delta K \geqslant 0$ не являются связывающими, сужается по мере того, как η растет по направлению к α. Этот результат справедлив в силу того что, как мы знаем из предыдущего исследования односекторной модели, этот диапазон сжимается до нуля при $\eta = \alpha$. Если сделать вполне разумное предположение, что η значительно меньше α (даже если параметр η все еще положителен), то, как и ранее, существует широкий диапазон значений ω вокруг стационарного состояния, для которого ограничения в виде неравенств не связывают.

5.2.4. Модель с обратными интенсивностями факторов

До сих пор мы имели дело со структурами, в которых в секторе образования относительно более интенсивно использовался человеческий капитал, т. е. $\alpha > \eta \geqslant 0$. В данном разделе мы рассмотрим последствия предположения об обратной интенсивности факторов ($\alpha < \eta$). Рассмотрение будет коротким, так как предположение о том, что в секторе образования относительно интенсивнее используется физический капитал, неправдоподобно. (Если бы мы интерпретировали K и H не как физический и человеческий капиталы, а как-либо иначе, то обратные интенсивности факторов вполне могли бы иметь место.)

Как мы уже видели, из условия $\alpha < \eta$ следует, что уравнение (5.19) представляет собой неустойчивое дифференциальное уравнение относительно переменной $p \equiv \mu/\nu$. (Это уравнение применимо, поскольку ограничения в виде неравенств на валовое инвестирование не связывают.) Следовательно, любое отклонение p от ее стационарного значения со временем только увеличится. Это неустойчивое поведение передастся и на отношение vK/uH (посредством уравнения (5.17)). Вспомним, что это отношение определяет предельный продукт физического капитала в секторе производства товаров и, следовательно, определяет r и $\dot{C}/C$. Соответственно, неустойчивое поведение vK/uH передастся на r и на

$\dot{C}/C$. Так как такая расходящаяся динамика не соответствует оптимизационной задаче домохозяйства, то нам остается только рассмотреть случай равенства p своему стационарному значению в любой момент времени[1].

Из постоянства p вытекает постоянство отношения vK/uH (следует из уравнения (5.17)). Следовательно, r и $\dot{C}/C$ также постоянны на протяжении всего перехода в стационарное состояние.

В приложении 5С (разд. 5.7) показано, что темп прироста выпуска в широком смысле $\dot{Q}/Q$ также постоянен и равен $\dot{C}/C$. Таким образом, мы получили неожиданный результат — темпы прироста C и Q не изменяются при изменении переменной состояния $\omega \equiv K/H$ (в рамках диапазона значений этой переменной, при которых ограничения в виде неравенств не являются связывающими). Другими словами, в условиях обратной интенсивности факторов эффект дисбаланса не оказывает влияния на эти темпы прироста.

Благодаря тому что величины

$$\frac{vK}{uH}, \quad \frac{\dot{C}}{C}, \quad \frac{\dot{Q}}{Q}$$

постоянны, динамика переменных u, χ, $\dot{H}/H$ и $\dot{K}/K$ определяется достаточно просто. В приложении 5С показано, что каждая из этих переменных монотонно сходится к своему стационарному значению по мере того, как переменная состояния ω сходится к своему стационарному значению. Углы наклона графиков зависимостей этих переменных от ω все определены однозначно и отрицательны для u и χ, угол положителен для $\dot{H}/H$ и отрицателен для $\dot{K}/K$.

5.3. Условия для эндогенного роста

До сих пор мы работали с моделями, в которых имела место постоянная эффективность с ростом масштаба производства в секторах производства товаров и образования; т. е. производственные функции предполагались вида (5.1) и (5.13). (Модель Узавы–Лукаса, представленная посредством уравнений (5.20) и (5.21), является частным случаем, в котором в секторе образования используется только человеческий капитал в качестве ресурса, т. е. $\eta = 0$.) При использовании этих производственных функций, в случае если физический и человеческий капиталы

---

[1] В работах Bond, Wang, and Yip (1996) и Mino (1996) получены аналогичные результаты в более общем случае, в котором производственные функции обладают обычными неоклассическими свойствами.

растут с одинаковым темпом, убывающей эффективности не возникает. В силу этого, в стационарном состоянии нормы доходности остаются постоянными, а экономика может расти с постоянным темпом. Следуя Mulligan and Sala-i-Martin (1993), изучим теперь вопрос о том, будет ли иметь место положительный рост в стационарном состоянии, т. е. эндогенный рост, в случае если мы рассмотрим производственные функции в более общем виде.

Преобразуем уравнения (5.1) и (5.13) к виду

$$Y = C + \dot{K} + \delta K = A \cdot (vK)^{\alpha_1} \cdot (uH)^{\alpha_2}; \tag{5.46}$$

$$\dot{H} + \delta H = B \cdot [(1 - v) \cdot K]^{\eta_1} \cdot [(1 - u) \cdot H]^{\eta_2}. \tag{5.47}$$

То есть в качестве производственных функций мы оставили функции Кобба–Дугласа, но теперь считаем, что суммы $\alpha_1 + \alpha_2$ и $\eta_1 + \eta_2$ не обязательно равны единице, так что постоянной эффективности с ростом масштаба производства, вообще говоря, нет.

Если в одном из секторов наблюдается убывающая эффективность с ростом масштаба производства, что имеет место при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, то мы можем остаться в рамках привычной нам конкурентной модели, если добавим в производственную функцию некоторый фактор, такой, например, как неквалифицированный труд или землю с фиксированным на агрегированном уровне предложением. Если этот производственный фактор стоит под показателем степени $1 - \alpha_1 - \alpha_2$, то на уровне индивидуального производителя вновь имеет место постоянство эффективности. То есть здесь важно обратить внимание на то, что убывание эффективности производства $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ связано с теми производственными факторами, которые могут накапливаться.

В данной модели может также иметь место возрастающая эффективность при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, что в рамках конкурентной модели можно объяснить наличием эффектов распространения знаний, которые мы рассматривали в гл. 4. Например, для производства Y ресурсы отдельной фирмы K и H могут быть возведены в степени α_1 и $1 - \alpha_1$ соответственно, так что на отдельную фирму постоянная эффективность может распространяться. В таком случае агрегированная величина H в экономике может появиться в производственной функции в качестве дополнительного ресурса (как это и сделано в работе Lucas, 1988) со степенным показателем

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 1, \quad \text{где} \quad \alpha_2 > 1 - \alpha_1.$$

Ключевой особенностью здесь является то, что возрастающая эффективность $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ связана с теми производственными факторами, которые могут быть накоплены всей экономикой[1)].

Предположим, что мы ищем такое стационарное состояние, в котором u и v постоянны, а C, Y, K и H растут с постоянными, но не обязательно одинаковыми темпами. (До тех пор пока хотя бы одна из переменных u или v не достигла 0, мы не можем позволить им расти с постоянными темпами в силу ограничений $0 \leqslant v \leqslant 1$ и $0 \leqslant u \leqslant 1$.) Если мы разделим обе части уравнения (5.47) на H, затем прологарифмируем и возьмем производные по времени, то получим

$$\eta_1 \gamma_K^* + (\eta_2 - 1)\gamma_H^* = 0. \tag{5.48}$$

где γ^* обозначает стационарный темп прироста той переменной, которая фигурирует в нижнем индексе.

Если мы разделим обе части уравнения (5.46) на K, прологарифмируем и возьмем производные по времени, то получим

$$\frac{C/K}{(C/K) + \gamma_K^* + \delta} \cdot \left(\gamma_C^* - \gamma_K^*\right) = (\alpha_1 - 1) \cdot \gamma_K^* + \alpha_2 \gamma_H^*. \tag{5.49}$$

Используя те же рассуждения, что мы использовали в гл. 4, можно показать, что $\gamma_C^* = \gamma_K^*$. (Если $\gamma_C^* > \gamma_K^*$, то темп прироста γ_K^*, полученный из уравнения (5.46), стремится к $-\infty$. Если $\gamma_C^* < \gamma_K^*$, то γ_K^* равно r, чистому предельному продукту K в товарном секторе. Это ра-

[1)] Как мы видели в гл. 4, из того, что в модели присутствует такой вид распространения знаний, следует, что результаты модели не будут оптимальными по Парето. Поэтому эти модели полезны для понимания роли вмешательства правительства в экономическую деятельность, в основном путем субсидирования тех видов деятельности, которые связаны с распространением знаний. В предельном случае, в котором это распространение очень велико, возможно множество равновесий, и уже эти равновесия зачастую могут быть упорядочены посредством критерия, основанного на оптимальности по Парето. Предположим, например, что отдача от образования для индивидуума имеет прямую зависимость от среднего уровня образования населения. Тогда в одном виде равновесия каждый получает образование, так как в условиях, когда почти все люди образованы, оставшиеся люди также видят преимущество образования и хотят его получить. В другом виде равновесия никто не получает образования, так как если большинство не имеет образования, то и остальные не видят никаких преимуществ в его получении. Мы не изучаем класс моделей с несколькими равновесиями, потому что масштаб распространения знаний, необходимый для генерирования такой ситуации, кажется нереалистично большим. Более того, с определенной точки зрения, модели, в которых однозначно не определяется положение равновесия из числа возможных, не совершенны. Такого рода модели, а также более благоприятные оценки их значимости, приведены в работах Krugman (1991), Benhabib and Farmer (1996), Boldin (1994), Chamley (1992), Xie (1992).

венство противоречит условию трансверсальности.) Из уравнения (5.49) вытекает

$$(\alpha_1 - 1) \cdot \gamma_K^* + \alpha_2 \gamma_H^* = 0. \qquad (5.50)$$

Используя это уравнение, а также условие $\gamma_Y^* = \alpha_1 \gamma_K^* + \alpha_2 \gamma_H^*$, вытекающее из уравнения (5.46), можно показать, что $\gamma_Y^* = \gamma_K^*$. Таким образом, в стационарном состоянии переменные C, K и Y должны все расти с одинаковым темпом.

Уравнения (5.48) и (5.50) формируют систему двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными γ_K^* и γ_H^*. Эта система имеет решение, отличное от $\gamma_K^* = \gamma_H^* = 0$, только если детерминант характеристической матрицы коэффициентов равен нулю. Это означает, что параметры должны удовлетворять следующему условию:

$$\alpha_2 \eta_1 = (1 - \eta_2) \cdot (1 - \alpha_1). \qquad (5.51)$$

Это уравнение (5.51) является ключевым условием, при выполнении которого в модели возможен эндогенный рост с положительными постоянными темпами прироста.

Примером выполнения ограничений (5.51), налагаемых на параметры, является уже рассмотренный нами случай постоянства эффективности производства в каждом секторе: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\eta_1 + \eta_2 = 1$. В этом случае $\gamma_H^* = \gamma_K^*$, так что отношение K/H постоянно в стационарном состоянии. Конечно, уравнение (5.51) может быть выполнено и при других вариантах соотношений между параметрами.

Если $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 1$ — случай, рассмотренный Узавой (Uzawa, 1965) и Лукасом (Lucas, 1988), то условие (5.51) выполнено при любых значениях α_1 и α_2. Таким образом, если производственная функция сектора образования линейна по H, то все переменные могут расти в стационарном состоянии, даже если в секторе производства товаров убывает эффективность с ростом масштаба, т. е. $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Особенностью модели Лукаса является учет распространения знаний через агрегированный человеческий капитал, так что $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$. Согласно нашим выводам, это условие хотя и совместимо с эндогенным ростом, но не существенно для него. Если $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 1$, что также предполагается в модели Лукаса, то эта модель может сгенерировать эндогенный рост, даже без учтенного в модели распространения знаний на базе человеческого капитала.

Если $\alpha_1 \neq 1$, то из уравнения (5.50) следует

$$\gamma_K^* = \left(\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}\right) \cdot \gamma_H^*.$$

Следовательно, $\gamma_K^* \lesseqgtr \gamma_H^*$ при $\alpha_1 + \alpha_2 \lesseqgtr 1$. Таким образом, хотя все величины могут расти с постоянными темпами при $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 1$, тем не менее, отношения K/H, Y/H и C/H постоянны только если $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Посмотрим, что будет, если предположить, что $\alpha_i, \eta_i > 0$, где $i = 1, 2$. Если $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, то уравнение (5.51) будет выполнено, если $\eta_1 + \eta_2 > 1$. Аналогично, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ уравнение (5.1) выполнено при $\eta_1 + \eta_2 < 1$. Другими словами, убывание эффективности с ростом масштаба в одном секторе может быть нивелировано возрастающей эффективностью подходящей степени в другом. Если $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, то $\gamma_K^* < \gamma_H^*$, и наоборот.

И наконец, уравнение (5.51) выполнено при $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$. Такая спецификация параметров соответствует AK-модели, которую мы изучали в гл. 4. В этом случае человеческий капитал никак не используется; он не помогает производить товары, а также не появляется в функции полезности. Отсюда следует, что оптимизирующие свое поведение экономические агенты не будут накапливать H совсем, а весь объем K будет размещен в секторе производства товаров ($v = 1$ в уравнении (5.46) и (5.47)).

Если мы хотим, чтобы был эндогенный рост, а также чтобы K и H росли с одинаковым темпом в стационарном состоянии, то уравнение (5.51) должно быть выполнено таким образом, чтобы в каждом секторе имела место постоянная эффективность производства с ростом его масштаба, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\eta_1 + \eta_2 = 1$, т. е. производственные функции имели вид (5.1) и (5.13). Можно было бы рассмотреть вариант модели с предположением, что отношение K/H все время растет или все время падает, но нам такое допущение кажется невозможным, поэтому мы на протяжении всего основного текста данной главы считали, что в каждом секторе выполнено условие постоянства эффективности с ростом масштаба.

5.4. Заключения и выводы

Мы расширили AK-модель из гл. 4 посредством разделения экономики на два сектора, в одном из которых производятся потребительские товары C и физический капитал K, в другом создается человеческий капитал H. Если интенсивность использования производственных факторов в секторах одинаковая, то основные новые результаты относительно роста в таком случае происходят из ограничений неотрицательности на валовое инвестирование в оба вида капитала. Эти ограничения генерируют эффект дисбаланса, благодаря которому темп прироста выпуска тем больше, чем больше величина разрыва между отношением K/H и его стационарным значением.

Предположение о равенстве интенсивностей использования факторов не учитывает ключевой особенности образования, состоящей в том, что в образовании основным ресурсом являются образованные люди, а не капитал или труд. Поэтому мы изменили структуру модели таким образом, чтобы в производстве человеческого капитала относительно более интенсивно использовался человеческий капитал. Эти изменения повлияли на наши заключения относительно эффекта дисбаланса. Темп прироста выпуска (в широком определении, включая производство нового человеческого капитала) растет по мере роста дисбаланса в случае, если человеческий капитал в относительном избытке, но уменьшается по мере роста дисбаланса в случае, если человеческий капитал в относительном недостатке. Из этих результатов следует, что экономика восстанавливается быстро после войны, которая разрушает преимущественно физический капитал, но медленно после эпидемии, которая ликвидирует в основном человеческий капитал.

5.5. *Приложение 5А*. Переходная динамика в односекторной модели при ограничениях в виде неравенств на валовое инвестирование

Предположим, что $K(0)/H(0) > \alpha/(1-\alpha)$. Вспомним, что в этом случае домохозяйства хотят уменьшить K и увеличить H на некоторые объемы, так что ограничение $I_K \geqslant 0$ будет связывающим. Следовательно, $I_K = 0$ и $\dot{K}/K = -\delta$. В таком случае задача домохозяйства состоит в том, чтобы максимизировать полезность при указанной траектории K и ограничении $\dot{H} = Y - C - \delta H$. Гамильтониан данной задачи имеет вид

$$J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot [AK^\alpha H^{1-\alpha} - \delta H - C], \tag{5.52}$$

где

$$u(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}.$$

Условия первого порядка $\partial J/\partial C = 0$ и $\dot{\nu} = -\partial J/\partial H$ обычным образом дают нам уравнение для темпа прироста потребления:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{H}\right)^\alpha - \delta - \rho\right], \tag{5.53}$$

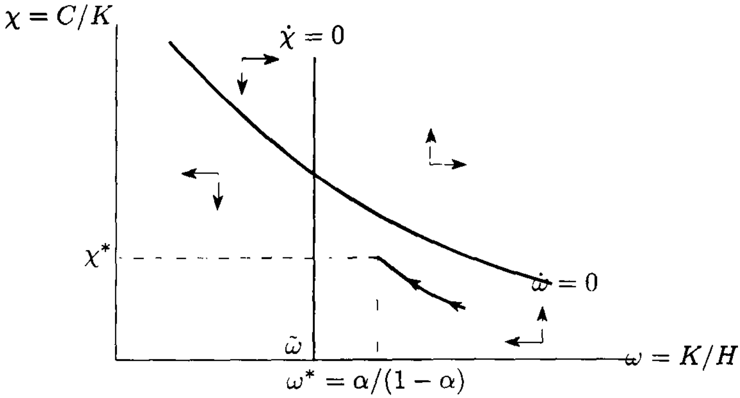


Рис. 5.10. Фазовая диаграмма односекторной модели при $\omega > \omega^*$. Представленная на данном рисунке динамика имеет место при $\omega \equiv K/H > \omega^* = \alpha/(1-\alpha)$. При $\omega > \omega^*$ экономика движется по траектории, на которой $\chi \equiv C/K$ монотонно растет, а ω монотонно снижается. Экономика достигает ω^* за конечное время (это происходит до достижения $\tilde{\omega}$), а χ в этот момент достигает значения χ^*. В этой точке ограничение неотрицательности валового инвестирования в K перестает быть связывающим. После чего переменные K и H растут с постоянным, положительным темпом прироста

где $A \cdot (1-\alpha) \cdot (K/H)^\alpha - \delta$ – чистый предельный продукт H. Это уравнение, бюджетное ограничение $\dot{H} = AK^\alpha H^{1-\alpha} - \delta H - C$ и уравнение $K(t) = K(0) \cdot e^{-\delta t}$ задают траектории C, H и K.

Далее, так же как и в гл. 4, определим две переменные $\omega \equiv K/H$ и $\chi \equiv C/K$, которые будут константами в стационарном состоянии. Используя уравнения для $\dot{C}$ и $\dot{H}$, получаем переходные уравнения для ω и χ:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -A\omega^\alpha + \chi\omega; \tag{5.54}$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A \cdot (1-\alpha) \cdot \omega^\alpha - \rho\right] + \delta \cdot \frac{\theta - 1}{\theta}. \tag{5.55}$$

На рис. 5.10 показана фазовая диаграмма в пространстве (ω, χ). Из условия $\dot{\omega} = 0$ получаем $\chi = A\omega^{-(1-\alpha)}$, что задает на рисунке наклоненную вниз кривую. Значение χ выше (ниже) этой кривой соответствует $\dot{\omega} > 0$ ($\dot{\omega} < 0$). Направления движения показаны на рисунке стрелками.

Из условия $\dot{\chi} = 0$ получаем

$$\omega = \left[\frac{\rho + \delta \cdot (1-\theta)}{A \cdot (1-\alpha)}\right]^{1/\alpha} \equiv \tilde{\omega}. \tag{5.56}$$

Будем считать, что $\rho + \delta \cdot (1-\theta) \geqslant 0$, так что величина $\tilde{\omega}$ вполне определена и неотрицательна, но вообще это условие лишнее. Значение ω выше (ниже) $\tilde{\omega}$ соответствует $\dot{\chi} > 0$ ($\dot{\chi} < 0$), как показано стрелками на рисунке. (Если $\rho+\delta\cdot(1-\theta) < 0$, то $\dot{\chi} > 0$ выполнено для всех $\chi \geqslant 0$.)

На рисунке

$$\tilde{\omega} < \omega^* = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

т. е. меньше отношения K к H, которое определено в (5.7) в условиях отсутствия действующих ограничений в виде неравенств на оба вида валового инвестирования. Из формулы для $\tilde{\omega}$ следует, что условие $\tilde{\omega} < \omega^*$ соответствует неравенству $\rho + \delta < A\alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha}$, которое вытекает из предположения $\gamma^* > 0$ и выражения (5.9). На рисунке также отмечено значение χ^*, для модели без действующих ограничений в виде неравенств. Значение χ^* в этой модели определяется по формуле:

$$\chi^* = \frac{\theta-1}{\theta} \cdot \left[A \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} - \frac{\delta}{\alpha}\right] + \frac{\rho}{\theta\alpha}. \qquad (5.57)$$

Динамика, показанная на рис. 5.10, имеет место при $\omega < \omega^*$, что заставляет неравенство $I_K \geqslant 0$ быть связывающим ограничением. На рисунке видно, что в этой области χ монотонно возрастает, а ω монотонно убывает. В конце концов, ω достигает значения ω^* и ограничение $I_K \geqslant 0$ больше не связывает. Начиная с этого момента ω остается на уровне ω^*, а K и H растут с одинаковым темпом γ^*, значение которого определено в (5.9). Это последнее значение темпа прироста найдено для случая, когда ограничения в виде неравенств на оба вида инвестирования не являются связывающими. Положение траектории движения определено так, что χ достигает значения χ^* (определяемого из (5.57)) как раз в тот момент, когда ω достигает ω^*. Отсюда следует, что в момент, когда ограничение неотрицательности валового инвестирования в физический капитал перестает быть связывающим, скачка в уровне потребления не возникает[1].

Результаты при $K(0)/H(0) < \alpha/(1-\alpha)$ аналогичны. В этом случае условие $I_H \geqslant 0$ является связывающим, и $\dot{H}/H = -\delta$. Уравнения перехода для ω и χ имеют вид:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = A\omega^{-(1-\alpha)} - \chi; \qquad (5.58)$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = -A \cdot \frac{\theta-\alpha}{\theta} \cdot \omega^{-(1-\alpha)} + \chi + \delta \cdot \frac{\theta-1}{\theta} - \frac{\rho}{\theta}. \qquad (5.59)$$

[1] Мы благодарны Kiminori Matsuyama за решение, представленное здесь.

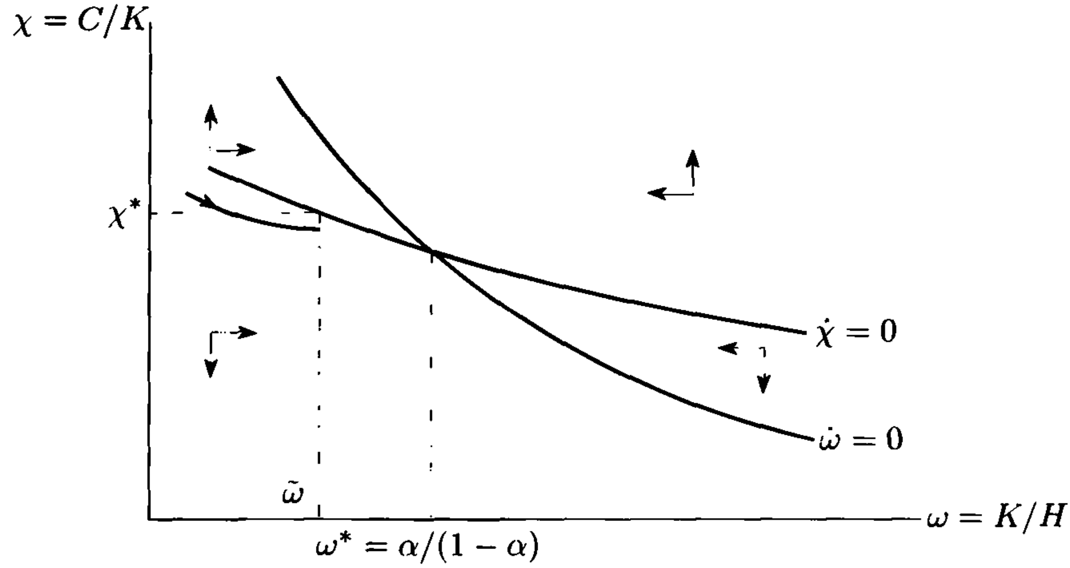


Рис. 5.11. Фазовая диаграмма односекторной модели при $\omega < \omega^*$. Представленная на данном рисунке динамика имеет место при $\omega \equiv K/H < \omega^* = \alpha/(1-\alpha)$. При $\omega < \omega^*$ экономика движется по траектории, на которой $\chi \equiv C/K$ монотонно снижается (если $\alpha < \theta$, как и предполагается в данном случае), а ω монотонно растет. Экономика достигает ω^* за конечное время (это происходит до достижения $\tilde{\omega}$), как раз в этот момент, когда χ достигает значения χ^*. В этой точке ограничение неотрицательности валового инвестирования в H перестает быть связывающим. После чего переменные K и H растут с постоянным, положительным темпом прироста

На рис. 5.11 показана фазовая диаграмма в случае $\alpha < \theta$. Условие $\dot{\omega} = 0$ соответствует $\chi = \omega^{-(1-\alpha)}$. Условие $\dot{\chi} = 0$ соответствует

$$\chi = A \cdot \frac{\theta - \alpha}{\theta} \cdot \omega^{-(1-\alpha)} - \delta \cdot \frac{\theta - 1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta}. \tag{5.60}$$

Как показано на рисунке, график $\dot{\chi} = 0$ при $\alpha < \theta$ имеет наклон вниз. Этот график имеет менее отрицательный угол наклона, чем график $\dot{\omega} = 0$ (при $\alpha > \theta$ график $\dot{\chi} = 0$ имел бы положительный угол наклона). Кривые $\dot{\omega} = 0$ и $\dot{\chi} = 0$ пересекаются в значении $\hat{\omega}$, которое, как нетрудно проверить (используя условие $\gamma^* > 0$), больше $\omega^* = \alpha/(1-\alpha)$.

Динамика, изображенная на рис. 5.11, имеет место при $\omega < \omega^*$. На рисунке видно, что в этой области χ монотонно снижается, а ω монотонно растет. (Если $\alpha > \theta$, то χ монотонно растет, а если $\alpha = \theta$, то χ - константа.) Положение траектории движения, как и в предыдущем случае, определено так, что χ достигает значения χ^* (определяемого из (5.57)) как раз в тот момент, когда ω достигает ω^*.

5.6. *Приложение 5В.* Решение модели Узавы–Лукаса

Гамильтониан для данной модели имеет вид:

$$J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot \left[AK^{\alpha} \cdot (uH)^{1-\alpha} - C - \delta K\right] + \\ + \mu \cdot [B \cdot (1-u) \cdot H - \delta H]. \tag{5.61}$$

Выражения в квадратных скобках равны $\dot{K}$ (первое) и $\dot{H}$ (второе). Если мы определим $\omega \equiv K/H$ и $\chi \equiv C/K$, то темпы прироста K и H даются уравнениями:

$$\frac{\dot{K}}{K} = A \cdot u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \chi - \delta; \tag{5.62}$$

$$\frac{\dot{H}}{H} = B \cdot (1-u) - \delta. \tag{5.63}$$

Тогда темп прироста ω дается уравнением:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H} = A \cdot u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \chi - B \cdot (1-u). \tag{5.64}$$

Из условий первого порядка $\partial J/\partial C = 0$ и $\partial J/\partial u = 0$ имеем:

$$u'(C) = \nu e^{\rho t}; \tag{5.65}$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{A}{B} \cdot (1-\alpha) \cdot u^{-\alpha}\omega^{\alpha}. \tag{5.66}$$

Из условия $\dot{\nu} = -\partial J/\partial K$ вытекает

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -A\alpha u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} + \delta. \tag{5.67}$$

Из $\dot{\mu} = -\partial J/\partial H$ следует

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{\nu}{\mu} \cdot A \cdot (1-\alpha) \cdot u^{1-\alpha}\omega^{\alpha} - B \cdot (1-u) + \delta.$$

Подставив сюда выражение для ν/μ из (5.66), получаем

$$\dot{\mu}/\mu = -B + \delta. \tag{5.68}$$

Продифференцировав уравнение (5.56) по времени, а также используя уравнение

$$u(C) = \frac{(C^{1-\theta} - 1)}{(1-\theta)}$$

и выражение для $\dot{\nu}/\nu$ из уравнения (5.67), получаем обычное уравнение для темпа прироста потребления:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[A\alpha u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]. \tag{5.69}$$

Этот результат соответствует уравнению (5.25). Тогда темп прироста χ можно определить из уравнений (5.69) и (5.62) и получить, таким образом, формулу (5.26):

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\chi}}{\chi} &= \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{K}}{K} = \\ &= \left(\frac{\alpha-\theta}{\theta}\right) \cdot Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} + \chi - \frac{1}{\theta} \cdot [\delta \cdot (1-\theta) + \rho].\end{aligned} \tag{5.70}$$

Теперь продифференцируем уравнение (5.66) по времени и воспользуемся выражениями (5.67) для $\dot{\nu}/\nu$, (5.68) для $\dot{\mu}/\mu$ и (5.64) для $\dot{\omega}/\omega$, получим:

$$\frac{\dot{u}}{u} = B \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} + Bu - \chi. \tag{5.71}$$

Этот результат появляется в основном тексте главы в виде уравнения (5.27). Уравнения (5.64), (5.70) и (5.71) формируют систему из трех дифференциальных уравнений относительно переменных ω, χ и u, причем начальное значение переменной состояния ω известно, $\omega(0)$.

Стационарное состояние этой системы можно найти сразу, приравняв нулю три производные по времени. Введем обозначение комбинации параметров

$$\varphi \equiv \frac{\rho + \delta \cdot (1-\theta)}{B\theta},$$

тогда имеем:

$$\begin{aligned}\omega^* &= \left(\frac{\alpha A}{B}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \left[\varphi + \frac{\theta-1}{\theta}\right], \\ \chi^* &= B \cdot \left(\varphi + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta}\right), \\ u^* &= \varphi + \frac{\theta-1}{\theta}.\end{aligned} \tag{5.72}$$

Эти значения встречаются в тексте главы в виде группы уравнений (5.29). Стационарная норма доходности, которая равна чистому предельному продукту K в товарном секторе и чистому предельному продукту H в секторе образования, равна

$$r^* = B - \delta.$$

Соответствующий стационарный темп прироста Y, C, K и H равен

$$\gamma^* = (1/\theta) \cdot (B - \delta - \rho).$$

Эти значения r^* и γ^* представлены в основном тексте главы уравнениями (5.30) и (5.31).

Пусть z – валовой средний продукт физического капитала:

$$z \equiv Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)}.$$

Стационарное значение z получаем из уравнений (5.72), $z^* = B/\alpha$. Тогда система трех дифференциальных уравнений (5.64), (5.70) и (5.71) принимает вид:

$$\frac{\dot\omega}{\omega} = (z - z^*) - (\chi - \chi^*) + B \cdot (u - u^*); \tag{5.73}$$

$$\frac{\dot\chi}{\chi} = \left(\frac{\alpha - \theta}{\theta}\right) \cdot (z - z^*) + (\chi - \chi^*); \tag{5.74}$$

$$\frac{\dot u}{u} = B \cdot (u - u^*) - (\chi - \chi^*). \tag{5.75}$$

Из определения z следует

$$\frac{\dot z}{z} = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{\dot u}{u} - \frac{\dot\omega}{\omega}\right) = -(1 - \alpha) \cdot (z - z^*). \tag{5.76}$$

Эти выражения для $\dot z/z$, $\dot\chi/\chi$ и $\dot u/u$ присутствуют в тексте главы в виде уравнений (5.33)–(5.35).

Проинтегрировав уравнение (5.76), получаем уравнение (5.37):

$$\frac{z - z^*}{z} = \left(\frac{z(0) - z^*}{z(0)}\right) \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot z^* t},$$

где $z(0)$ – начальное значение z. Это уравнение можно переписать в виде решения для z:

$$z = z^* \cdot \frac{z(0)}{z^* \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot z^* t} + z(0) \cdot [1 - e^{-(1-\alpha)\cdot z^* t}]}. \tag{5.77}$$

Из уравнения (5.77) следует, что $z \to z^*$ при $t \to \infty$. Если $z(0) > z^*$, то $\dot z < 0$ и $z > z^*$ для всех t, если же $z(0) < z^*$, то $\dot z > 0$ и $z < z^*$ для всех $t \to \infty$.

Теперь исследуем свойства устойчивой траектории χ и u, т. е. той траектории, следуя вдоль которой χ сходится к χ^*, а u к u^*. Пусть $z(0) > z^*$, так что $z - z^*$ монотонно убывает со временем. Уравнение (5.74) можно переписать в виде

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = (\chi - \chi^*) + \left(\frac{\alpha - \theta}{\theta}\right) \cdot \Omega(t), \tag{5.78}$$

где $\Omega(t) = z - z^*$ – монотонно убывающая функция времени. Если $\alpha < \theta$, то второе слагаемое в правой части уравнения (5.78) отрицательно, но величина его уменьшается со временем. Если в какой-то конечный момент времени выполнено $\chi \leqslant \chi^*$, то из уравнения следует, что $\dot{\chi} < 0$ для всех последующих t. Так как величина $\dot{\chi}$ асимптотически ограничена снизу некоторым конечным значением, то χ уйдет от χ^* и достигнет нуля за конечное время. Поэтому на устойчивой траектории выполнено $\chi > \chi^*$ для всех t. Если $\dot{\chi} \geqslant 0$ в какой-то момент t, то из уравнения (5.78) следует, что $\dot{\chi} > 0$ для всех последующих t (в силу того что отрицательное слагаемое в правой части уравнения уменьшается со временем). Следовательно, χ уходит от χ^* в бесконечность. В итоге получается, что при движении по устойчивой траектории выполнено $\dot{\chi} < 0$ для всех t.

При $\alpha > \theta$ или при начальном значении $z(0) < z^*$ выводы будут такими же. Итоговые результаты приведены в столбцах табл. 5.1, соответствующих $\chi - \chi^*$ и $\dot{\chi}$.

Уравнение (5.75) определяет динамику u при заданной динамике χ. Предположим, например, что $z(0) > z^*$ и $\alpha < \theta$, так что $\chi > \chi^*$ и $\dot{\chi} < 0$. Если $u \leqslant u^*$ при некотором t, то из уравнения (5.75) следует, что $\dot{u} < 0$ при всех последующих t. Следовательно, u отклоняется от u^* и сходится к 0. Таким образом, на устойчивой траектории $u > u^*$ при всех t. Если $\dot{u} \geqslant 0$ при некотором t, то $\dot{u} > 0$ при всех последующих t, потому что член $-(\chi - \chi^*)$ в уравнении (5.75) отрицателен и уменьшается со временем по модулю. Следовательно, для всех t выполнено $\dot{u} < 0$. Динамика $u - u^*$ и $\dot{u}$ при различных комбинациях знаков $z(0) - z^*$ и $\alpha - \theta$ показана в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Переходная динамика χ и u

$z(0)-z^*$	$\alpha-\theta$	$\chi-\chi^*$	$\dot{\chi}$	$u-u^*$	$\dot{u}$
>0	<0	>0	<0	>0	<0
>0	>0	<0	>0	<0	>0
$=0$	–	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$
<0	<0	<0	>0	<0	>0
–	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	$=0$

Покажем теперь, как начальное значение $z(0) - z^*$ связано с начальным значением переменной ω. Если мы подставим выражение для $\chi - \chi^*$ из уравнения (5.74) в уравнение (5.73), то получим

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\alpha}{\theta}(z - z^*) - \gamma_\chi + B \cdot (u - u^*). \tag{5.79}$$

Предположим, что $\alpha \leqslant \theta$ и $z(0) > z^*$. В этом случае из условий $z - z^* > 0$, $\dot{\chi} < 0$ и $u - u^* \geqslant 0$ из (5.79) следует, что $\dot{\omega}/\omega > 0$. Поэтому система может находиться на устойчивой траектории, только если $\omega(0) < \omega^*$. Более того, в этом случае ω монотонно возрастает от $\omega(0)$ к ω^* (так как $\dot{\omega}/\omega > 0$). Следовательно, монотонное снижение z соответствует монотонному росту ω. Отсюда следует, что более низкое начальное значение переменной $\omega(0)$ связано с более высоким начальным значением $z(0)$. Подобным же образом $z(0) < z^*$ соответствует $\omega(0) > \omega^*$, а $z(0) = z^*$ соответствует $\omega(0) = \omega^*$.

Рассмотрим случай $\alpha > \theta$. Выразим разность $u - u^*$ из уравнения (5.75) и подставим ее в уравнение (5.73), тогда получим

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = (z - z^*) + \frac{\dot{u}}{u}. \tag{5.80}$$

Теперь, как нетрудно проверить, используя это уравнение, при $\alpha > \theta$ имеет место соответствие неравенства $z(0) > z^*$ ($z(0) < z^*$) неравенству $\omega(0) < \omega^*$ ($\omega(0) > \omega^*$).

Итак, мы делаем заключение, что $z(0) \gtreqless z^*$ соответствует $\omega(0) \lesseqgtr \omega^*$ при любых конфигурациях параметров α и θ. Более того, меньшее значение $\omega(0)$ соответствует большему значению $z(0)$. Таким образом, мало начальное значение z или велико, зависит только от того, в избытке физический капитал относительно человеческого или в недостатке. Исходя из этого результата и табл. 5.1, мы можем теперь построить функции стратегий $\chi(\omega)$ и $u(\omega)$. Эти результаты показаны в данной главе на рис. 5.5.

Норма доходности r, равная чистому предельному продукту физического капитала в секторе производства товаров, равна $\alpha z - \delta$. Следовательно, r имеет прямую зависимость от z и обратную от ω. Из уравнения (5.69) следует, что темп прироста C дается уравнением

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot (\alpha z - \delta - \rho). \tag{5.81}$$

Так как $\dot{C}/C$ имеет прямую зависимость от z, то, соответственно, обратную от ω.

Темп прироста K дается уравнением:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{1}{\theta} \cdot (\alpha z - \delta - \rho) - \frac{\dot{\chi}}{\chi},$$

где мы подставили выражение для $\dot{C}/C$ из уравнения (5.81). Теперь подставим сюда выражение для $\dot{\chi}/\chi$ из (5.79) и используем уравнения

$$z^* = \frac{B}{\alpha} \quad \text{и} \quad \gamma^* = \frac{1}{\theta} \cdot (B - \delta - \rho),$$

получим:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \gamma^* + (z - z^*) - (\chi - \chi^*). \tag{5.82}$$

Эта формула в основном тексте главы появилась в виде уравнения (5.42).

Темп прироста H дается выражением:

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{\omega}}{\omega}.$$

Заменим $\dot{K}/K$ на выражение (5.82) для него, заменим $\dot{\omega}/\omega$ на выражение (5.80), а также используем уравнение (5.75) для исключения $\dot{u}/u$, в результате чего имеем после упрощения выражения

$$\frac{\dot{H}}{H} = \gamma^* - B \cdot (u - u^*), \tag{5.83}$$

что появляется в тексте главы в виде уравнения (5.41).

Так как

$$Y = AK^\alpha \cdot (uH)^{1-\alpha},$$

то темп прироста выпуска дается выражением

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \cdot \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{H}}{H}\right).$$

Подставим сюда выражение для $\dot{K}/K$ из (5.82), $\dot{u}/u$ из (5.75) и $\dot{H}/H$ из (5.83), получаем

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \gamma^* + \alpha \cdot (z - z^*) - (\chi - \chi^*). \tag{5.84}$$

Эта формула появляется в тексте главы в виде уравнения (5.43).

Выпуск в широком смысле задается уравнением

$$Q = Y + \frac{\mu}{\nu} \cdot B \cdot (1 - u) \cdot H = AK^\alpha \cdot (uH)^{1-\alpha} + \frac{\mu}{\nu} \cdot B \cdot (1 - u) \cdot H,$$

где отношение μ/ν, являющееся теневой ценой человеческого капитала в единицах товаров, задано в уравнении (5.66). После исключения μ/ν посредством уравнения (5.66) имеем

$$Q = \frac{Y \cdot (1 - \alpha + \alpha u)}{u}.$$

Отсюда получаем следующее уравнение для темпа прироста выпуска в широком смысле:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{u}}{u} \cdot \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha + \alpha u}, \tag{5.85}$$

которое появляется в тексте главы в виде уравнения (5.41).

Альтернативные трактовки модели Узавы–Лукаса представлены в работах Faig (1995) и Caballe and Santos (1993).

5.7. *Приложение 5C.* Модель с обратными интенсивностями факторов

Здесь мы рассмотрим производственную структуру, задаваемую уравнениями (5.1) и (5.13) с условием $\alpha < \eta$. Обозначим через $p \equiv \mu/\nu$ цену H в единицах товаров. В тексте данной главы мы отмечали, что уравнение (5.19) является неустойчивым дифференциальным уравнением относительно p и что p всегда равна своему стационарному значению, которое определяется по формуле

$$p = p^* = \psi^{1/(\alpha - \eta)} \cdot \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)^{(\alpha - \eta)/(1 - \alpha + \eta)}, \tag{5.86}$$

где

$$\psi \equiv \left(\frac{A}{B}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\eta} \cdot \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \eta}\right)^{1 - \eta}.$$

Соответственно, из уравнения (5.17) вытекает постоянное равенство vK/uH своему стационарному значению,

$$\frac{vK}{uH}\left(\frac{vK}{uH}\right)^* = \left[\psi \cdot \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)\right]^{1/(1 - \alpha + \eta)}. \tag{5.87}$$

Тогда норма доходности и темп прироста потребления постоянны и имеют вид:

$$r = r^* = \alpha A \left[\left(\frac{vK}{uH}\right)^*\right]^{\alpha - 1} - \delta; \tag{5.88}$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \gamma^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r^* - \rho). \tag{5.89}$$

Теперь покажем, что полный капитал $K + pH$ и полный выпуск, $Q \equiv Y + p \cdot (\dot{H} + \delta H)$ всегда растут с темпом прироста γ^*, т. е. с тем же темпом, что и C. Анализ оптимального потребления из гл. 2 можно перенести и сюда, если считать, что домохозяйства получают доход со своего полного капитала $K+pH$, равный норме доходности r. (В данном случае считаем, что ставка заработной платы неквалифицированного труда равна нулю.) Согласно уравнениям (2.14) и (2.15), потребление кратно полному капиталу, а так как r константа, то и множитель этой кратности постоянен. Поэтому $K + pH$ растет с тем же темпом γ^*, что и C.

Гамильтониан (5.14) можно записать в виде

$$J = u(C) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot (Q - C) - \nu\delta \cdot (K + pH), \qquad (5.90)$$

где

$$u(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}.$$

Используя условия первого порядка, можно проверить, что

$$\dot{J} = -\rho \cdot u(C) \cdot e^{-\rho t}.$$

После дифференцирования правой части уравнения (5.90) по времени, с учетом условия первого порядка

$$\nu = c^{-\theta} e^{-\rho t}$$

и упрощения, имеем

$$\left(\frac{\dot{\nu}}{\nu} - \delta\right) \cdot [C + \delta \cdot (K + pH)] + \delta Q = \frac{\dot{\nu}}{\nu} \cdot Q + \dot{Q}.$$

Подставив сюда

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -\left(\rho + \theta \cdot \frac{\dot{C}}{C}\right)$$

и переставив члены, получаем формулу для темпа прироста Q:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = (\delta + \rho + \theta_{\gamma_C}) \cdot \left\{1 - \frac{1}{Q} \cdot [C + \delta \cdot (K + pH)]\right\}. \qquad (5.91)$$

Так как $\dot{C}/C$ является константой и $K + pH$ является положительной, кратной C константой, то уравнение (5.91) выражает линейную обратную зависимость $\dot{Q}/Q$ от C/Q.

Одним из решений уравнения (5.91) является $\dot{Q}/Q = \dot{C}/C = \gamma^*$, так что C/Q равно константе $(C/Q)^*$. Если же $C/Q < (C/Q)^*$, то из уравнения (5.91) получаем $\dot{Q}/Q > \gamma^*$ и $C/Q \to 0$, а если $C/Q > (C/Q)^*$, то $\dot{Q}/Q < \gamma^*$ и $C/Q \to \infty$. Следовательно, на устойчивой траектории всегда выполнено $\dot{Q}/Q = \gamma^*$.

Если мы воспользуемся зависимостью между u и v из уравнения (5.16), то посредством уравнения (5.87) мы можем выразить u в виде функции $\omega \equiv K/H$:

$$u = \frac{\eta \cdot (1-\alpha)}{\eta - \alpha} - \left[\frac{\alpha \cdot (1-\eta)}{(vK/uH)^* \cdot (\eta - \alpha)}\right] \cdot \omega. \tag{5.92}$$

Следовательно, функция стратегии для u имеет вид линейной отрицательной функции ω в замкнутой форме. Так как пересечение этой функции с осью ординат лежит выше 1, то уравнение (5.92) определяет диапазон ω, для которого указанное значение u лежит внутри интервала $u \in (0,1)$. Из вида данного уравнения ясно, что ширина этого диапазона уменьшается до 0 по мере приближения $\beta - \alpha$ к 0.

Из уравнений $v = (vK/uH)^* \cdot (u/\omega)$ и (5.92) получаем формулу для v:

$$v = -\frac{\alpha \cdot (1-\beta)}{\beta - \alpha} + \left[\frac{\beta \cdot (1-\alpha)}{\beta - \alpha}\right] \cdot \left[\left(\frac{vK}{uH}\right)^*\right] \cdot \frac{1}{\omega}. \tag{5.93}$$

Отсюда видно, что v является положительной линейной функцией $1/\omega$ и, следовательно, убывающей функцией ω. Нетрудно проверить, что если $u \in (0,1)$, то решение для v находится внутри интервала $v \in (0,1)$. (Этот результат вытекает непосредственно из уравнения (5.16).)

Из уравнений (5.13) и (5.16) получаем следующее выражение для темпа прироста H:

$$\frac{\dot{H}}{H} = B \cdot \left[\frac{\eta \cdot (1-\alpha)}{\alpha \cdot (1-\eta)}\right]^\eta \cdot \left[\left(\frac{vK}{uH}\right)^*\right]^\eta \cdot (1-u) - \delta.$$

Подставим сюда u из уравнения (5.92), имеем

$$\frac{\dot{H}}{H} = -a_1 + a_2 \cdot \omega, \tag{5.94}$$

где $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ — константы. Таким образом, $\dot{H}/H$ — положительная линейная функция ω.

Так как полный капитал $K + pH$ растет с постоянным темпом γ^*, то имеем

$$\gamma^* = \left(\frac{\omega}{\omega + p}\right) \cdot \frac{\dot{K}}{K} + \left(\frac{p}{\omega + p}\right) \cdot \frac{\dot{H}}{H}.$$

Следовательно, темп прироста K дается уравнением:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \gamma^* + (\gamma^* - \gamma_H) \cdot \frac{p}{\omega}.$$

Подставим выражение для $\dot{H}/H$ из (5.94), получим

$$\frac{\dot{K}}{K} = \gamma^* - a_2 \cdot p + p \cdot \frac{y^* + a_1}{\omega}. \tag{5.95}$$

Таким образом, $\dot{K}/K$ является положительной линейной функцией $1/\omega$, и, следовательно, от ω зависимость обратная. Из уравнения (5.95) мы также можем получить диапазон ω, для которого ограничение $\dot{K}/K + \delta \geqslant 0$ не является связывающим.

Теперь выясним динамику $\chi \equiv C/K$. Заметим, что из условия $Y = C + \dot{K} + \delta K$ вытекает

$$\chi = Av \cdot \left[\left(\frac{vK}{uH}\right)^*\right]^{\alpha-1} - \delta - \frac{\dot{K}}{K}.$$

Подставим сюда вместо $\dot{K}/K$ выражение для него из (5.93), получим

$$\chi = \text{const} + \left\{A \cdot \left[\frac{\eta \cdot (1-\alpha)}{\eta - \alpha}\right] \cdot \left[\left(\frac{vK}{uH}\right)^*\right]^{\alpha} - p \cdot (\gamma^* + a_1)\right\} \cdot \frac{1}{\omega}, \tag{5.96}$$

где $-a_1$ — слагаемое (константа) из уравнения (5.94). Если исключить отсюда a_1 и p, подставив выражения для них из (5.94) и (5.86), то можно воспользоваться условием трансверсальности (неравенство $r^* > \gamma^*$ в уравнениях (5.88) и (5.89)), чтобы показать, что выражение в фигурных скобках в уравнении (5.96) положительно. Следовательно, χ является положительной линейной функцией $1/\omega$, и, соответственно, зависимость от ω обратная.

5.8. Задачи

5.1. CES-производственная функция с физическим и человеческим капиталами. Рассмотрим CES-производственную функцию с физическим капиталом K и человеческим капиталом H в качестве аргументов:

$$Y = A\{a \cdot (bK)^{\psi} + (1-a) \cdot [(1-b) \cdot H]^{\psi}\}^{1/\psi},$$

где $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $\psi < 1$. Выпуск полностью расходуется на потребление и инвестирование в K и H. Норма амортизации обоих видов капитала равна δ. Домохозяйства имеют обычные предпочтения бесконечного горизонта планирования, как в модели Рамсея. Предположим сначала, что ограничений невозвратности инвестиций в K и H

нет, тогда валовое инвестирование в любой вид капитала может быть отрицательным.

a. Выпишите гамильтониан в данном случае и найдите условия первого порядка.

b. Какое отношение между K и H будет оптимальным? Подставьте это отношение в данную производственную функцию, чтобы получить зависимость Y от K. Какой вид приняла редуцированная таким образом производственная функция?

c. Чему равно стационарное значение отношения физического капитала к человеческому $(K/H)^*$?

d. Опишите поведение экономики с течением времени, если начальные значения таковы, что $K(0)/H(0) < (K/H)^*$. Чему равны мгновенные нормы инвестирования в каждый из видов капитала в момент 0?

e. Пусть $I_K \geqslant 0$ и $I_Y \geqslant 0$. Как наличие этих ограничений отразится на динамике экономики, если выполнено начальное условие $K(0)/H(0) < (K/H)^*$?

5.2. Издержки ввода физического и человеческого капиталов. Рассмотрим модель из разд. 5.1, в которой потребительские товары, физический и человеческий капиталы производятся посредством одинаковых технологий. Представим себе, что имеются издержки ввода в эксплуатацию обоих видов капитала. В соответствии с результатами разд. 3.3, стоимость ввода в эксплуатацию единицы K равна $(b_K/2) \cdot (I_K/K)$, а единицы H равна $(b_H/2) \cdot (I_H/K)$. Предположим, что нормы амортизации каждого типа капитала равны 0.

a. Что вы можете сказать о параметрах b_K и b_H? Который из них, скорее всего, будет больше?

b. Пусть $b_K = b_H$. Что можно сказать о краткосрочной динамике экономики, если начальные значения удовлетворяют условию $K(0)/H(0) < (K/H)^*$? Что будет, если $K(0)/H(0) > (K/H)^*$?

c. Пусть $b_K < b_H$. Те же вопросы, что и в пункте b, кроме того, прокомментируйте различия в результатах здесь и в пункте b.

5.3. Внешние эффекты человеческого капитала (основано на работе Lucas, 1988). Производственная функция i-го производителя имеет вид:

$$Y_i = A \cdot (K_i)^\alpha \cdot (H_i)^\lambda \cdot H^\varepsilon,$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Переменные K_i и H_i — ресурсы физического и человеческого капиталов, используемые фирмой i для производства товаров Y_i. Переменная H — средний уровень человеческого капитала во всей экономике; параметр ε представляет собой силу внешнего влияния среднего человеческого капитала на производительность фирмы. Выпуск товарного сектора может быть потрачен на потребление C или на валовое инвестирование в физический капитал I_K. Физический капитал выбывает с темпом δ. Производственная функция для человеческого капитала имеет вид:

$$(I_H)_j = BH_j,$$

где H_j — человеческий капитал, нанятый на работу j-м производителем человеческого капитала. Человеческий капитал также выбывает с темпом δ. Домохозяйства имеют обычные предпочтения бесконечного горизонта планирования, как в модели Рамсея, со ставкой временного предпочтения ρ и параметром межвременного замещения θ. Рассмотрим конкурентное равновесие, в котором производители Y и H оперируют как совершенные конкуренты.

a. Чему равны стационарные темпы прироста C, Y и K? Какова зависимость этих темпов прироста от силы внешнего воздействия человеческого капитала, т. е. от параметра ε?
b. Чему равен стационарный темп прироста H? При каких условиях H будет расти с таким же темпом, что и K в стационарном состоянии?
c. Чем решение социального управляющего отличается от конкурентного решения?

6 Технологические изменения: модели растущего разнообразия товаров

В гл. 4 и 5 мы рассматривали модели эндогенного роста, в которых для капитала в широком понимании этого термина в долгосрочном периоде не возникал эффект убывающей отдачи. Отсутствие этого эффекта означает, что долгосрочный рост макроэкономических показателей на душу населения возможен и при отсутствии технологического прогресса. Противоположная точка зрения заключается в том, что аккумулирование всего капитала (даже в его широком понимании с учетом человеческого капитала) не позволит поддерживать рост в долгосрочном периоде, поскольку накопление в конечном итоге приведет к значительному уменьшению нормы прибыли. Эта точка зрения заставляет нас обратиться к технологическому прогрессу (как к процессу улучшения качества продукции, разработки новых видов и способов ее производства), чтобы решить проблему убывающей отдачи в долгосрочном периоде.

Экзогенно заданный темп технологического прогресса x определяет темп прироста показателей на душу населения в устойчивом состоянии в моделях Солоу–Свэна и Рамсея, изложенных в гл. 1 и 2. В этой и следующей главах будет рассказано о последних теоретических достижениях по включению технологического прогресса в число эндогенных переменных, мы рассмотрим модели, позволяющие фактически оценить и объяснить происхождение параметра x. Эти теоретические модели позволяют определить, как политика правительства и другие факторы могут влиять на темп прироста показателей на душу населения в масштабе всей экономики в долгосрочном периоде.

В данной главе рассматриваются модели, в которых под технологическим прогрессом подразумевается растущее разнообразие товаров. Количество новых видов продукции отражает количество инноваций в экономике, при этом появление новых продуктов можно расценивать как открытие новых отраслей. Естественно, что подобная оценка уровня технологического прогресса как количества видов продукции является всего лишь одним из приближенных способов оценки. Но мы выбрали именно этот индикатор технологических достижений, на основе которого и будет изучен долгосрочный рост.

В гл. 7 используется другой подход, в рамках которого прогресс — это качественные улучшения уже имеющихся товаров. Эти качественные улучшения представляют собой практически непрерывный процесс модернизации, происходящий в каждой отрасли. Следовательно, модели гл. 7 являются дополнением к модели растущего разнообразия товаров, изложенной в данной главе.

6.1. Исходная модель разнообразия товаров

В базовой модели разнообразия товаров рассматриваются три группы агентов. Первая группа — это производители конечного выпуска, которые нанимают рабочую силу и закупают промежуточную продукцию. Используя эти два ресурса, они производят конечную продукцию, которую продают по единичным ценам. Вторая группа агентов — фирмы, занимающиеся исследованиями и разработками (R&D). На инновационный продукт фирма-изобретатель имеет бессрочный патент, позволяющий продавать этот продукт по любой устраивающей ее цене. Третья группа — это домашние хозяйства, которые максимизируют свою полезность при заданном бюджетном ограничении.

6.1.1. Производители конечного продукта

Производители конечной продукции имеют доступ к производственной технологии, в которой комбинируются труд и промежуточные продукты, служащие ресурсами. Произведенные конечные продукты продаются на рынке по единичным ценам. Основываясь на таких работах, как Spence (1976), Dixit and Stiglitz (1977), Ethier (1982) и Romer (1987, 1990), запишем производственную функцию фирмы i в виде

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N} (X_{ij})^{\alpha}, \tag{6.1}$$

где $0 < \alpha < 1$; Y_i — конечный выпуск; X_{ij} — количество промежуточного продукта j, затрачиваемого на производство конечного выпуска;

N – количество видов промежуточных продуктов[1]. Параметр A – это общий показатель производительности или эффективности. Разнообразие промежуточной продукции в рамках данной модели является частью производственной функции. В качестве альтернативного подхода можно построить модель, в которой полезность будет функцией от числа видов потребительских товаров. Такая модель, предложенная в работе Grossman and Helpman (1991, гл. 4), приводит к похожим результатам.

Производственная функция (6.1) характеризуется убывающей предельной производительностью по каждому из факторов (L_i и X_{ij}) и постоянной отдачей от масштаба по ресурсам в целом. Функция $(X_{ij})^\alpha$ аддитивно сепарабельная, т. е. предельный продукт промежуточного товара j не зависит от затраченного количества промежуточного продукта j'[2]. Это означает, что новый товар не является ни прямой заменой, ни прямым дополнением к уже существующим типам товаров. Это свойство характерно для инновационных прорывов, т. е. именно для тех изменений, модель которых мы и хотим построить. В некоторых случаях новый продукт j может заменить уже существующий товар j' (что уменьшит предельный продукт $X_{j'}$) или дополнить его (что приведет к росту предельного продукта $X_{j'}$). Но независимость предельных продуктов в целом должна сохраняться. Эта предпосылка важна, поскольку в таком случае изобретение новых видов продукции не приведет к тому, что существующие товары выйдут из употребления.

Для качественных изменений, напротив, разумной предпосылкой является то, что товары лучшего качества вытесняют товары худшего качества. Это означает, что продукция худшего качества устаревает сразу же после выхода новой более качественной продукции.

---

[1] Spence (1976) впервые объяснил преимущества модели разнообразия продуктов, работая с потребительскими предпочтениями. При этом он записывал функцию полезности не как сумму, а как интеграл (см. формулу (45), 1976). Его исследования продолжили Dixit and Stiglitz (1977). Для описания предпочтений потребителей относительно видов продукции они использовали формулу, аналогичную (6.1). Ethier (1982) использовал данную формулу для описания функции производства в зависимости от ресурсов. Romer (1987, 1990) воспользовался моделью, предложенной Ethier, уже в контексте технологического прогресса и экономического роста.

[2] Альтернативная к (6.1) функция выпуска имеет вид

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} (X_{ij})^\sigma\right]^{\alpha/\sigma},$$

где $0 < \sigma < 1$. В данном случае параметр σ может отличаться от α. Именно параметр σ определяет монопольную власть тех, кто обладает правами на производство промежуточного товара j. В рассматриваемом нами случае $\alpha = \sigma$.

Из выражения (6.1) следует, что предельная производительность каждого промежуточного товара ($\partial Y_i/\partial X_{ij}$) стремится к бесконечности при $X_{ij} = 0$ и убывает с ростом X_{ij}. Если в текущий момент на рынке доступны N видов товаров по каким-либо конечным ценам, то у фирмы будет стимул использовать все N видов.

Важно отметить, что технологический прогресс будет выражаться в увеличении числа N, т. е. в росте количества доступных для производства промежуточных продуктов, а не в росте параметра продуктивности A. Чтобы оценить последствия роста N, предположим, что количество промежуточных продуктов может быть измерено в простых физических единицах и что все промежуточные продукты используются в равных долях, т. е.

$$X_{ij} = X_i$$

(это оказывается верным в состоянии равновесия). Тогда из (6.1) получаем формулу для конечного выпуска:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha}N(X_i)^\alpha = AL_i^{1-\alpha}(NX_i)^\alpha \cdot N^{1-\alpha}. \tag{6.2}$$

Для заданного числа N из (6.2) следует, что производственная функция имеет постоянную отдачу от масштаба по параметрам L_i и NX_i, последний из которых обозначает общее количество затраченных промежуточных продуктов. Для заданного количества L_i и NX_i, Y_i будет расти вместе с N с тем же темпом, что и $N^{1-\alpha}$. Этот результат, отражающий технологический прогресс, показывает целесообразность расширения ассортимента промежуточной продукции. Выгода растет из-за убывающей отдачи каждого отдельного X_{ij}.

Для фиксированного L_i из выражения (6.2) следует, что рост количества всей промежуточной продукции NX_i за счет увеличения X_i (т. е. за счет всех X_{ij}) при фиксированном N сталкивается с проблемой убывающей отдачи. Подобной проблемы не возникает, если рост NX_i обеспечивается за счет роста N при фиксированном X_i. Таким образом, технологическое изменение, осуществляемое за счет непрерывного увеличения N, позволяет решить проблему убывающей отдачи. Это свойство производственной функции лежит в основе эндогенного роста.

Для удобства предположим, что количество видов N — число непрерывное, а не дискретное. Подобное предположение не согласуется с реальностью, если мы рассматриваем N буквально как количество различных видов промежуточной продукции, хотя при больших значениях N ошибка будет невелика. В общем виде следует рассматривать N как наиболее подходящий параметр, описывающий технологическую сложность производственного процесса типичной фирмы или же среднюю степень специализации факторов, используемых типичной фирмой[1].

Конечные товары Y_i, производимые всеми фирмами, по своей сути идентичны друг другу. Агрегированный выпуск всех фирм Y может быть направлен на различные цели. В частности, этот выпуск может быть потрачен на потребление, производство промежуточных товаров X_i и на исследования и разработки, необходимые для создания новых видов промежуточной продукции (т. е. для расширения N). Все цены измеряются в единицах конечного продукта Y.

Мы можем оценивать X_{ij} как обслуживание товаров длительного пользования. Фирмы берут в аренду основные средства производства K_{ij}. Общее количество капитала, взятого в аренду фирмой i, равно

$$K_i = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}.$$

Это аналог капитальных вложений из предыдущих моделей[2]. Если принять данный подход, то в конечном итоге мы придем к модели с двумя переменными: суммарное количество капитала K и число видов продуктов N. Эта модель похожа на модель, рассмотренную в гл. 5.

Для удобства предположим, что X_{ij} описывает спрос на товары и услуги недлительного пользования. Эта модель, как и модель с промежуточными товарами длительного пользования, предлагает то же понимание главных факторов технологических изменений и долгосрочного экономического роста. Это так, потому что модель товаров недлительного пользования имеет только одну переменную — количество видов продуктов N.

[1] Для случая непрерывного N перейдем от суммы дискретного числа видов продукции (6.1) к интегральной сумме по континууму видов:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \int_0^N [X_i(j)]^\alpha dj,$$

где j — индекс вида товара; N — ассортимент всех доступных видов товаров. По существу результаты в случае непрерывного и дискретного N будут одинаковыми.

[2] Acemoglu (2002) расширяет рамки продуктового разнообразия, предполагая, что часть промежуточных продуктов способствует увеличению трудовых резервов L, а другая часть увеличивает капитал K. Исследователи могут выбирать, в какую область направить усилия по исследованию и разработкам – в инновации, позволяющие увеличить трудовые или капитальные ресурсы. Он показал, что технологический прогресс в долгосрочном периоде может способствовать увеличению трудовых ресурсов, в случае, если эластичность замещения между трудом и капиталом меньше 1.

Прибыль производителя конечной продукции равна

$$Y_i - wL_i - \sum_{j=1}^{N} P_j X_{ij},$$

где w — ставка заработной платы; P_j — цена промежуточного продукта j. Производители конечной продукции конкурируют между собой, следовательно, рассматривают w и цены P_j как заданные. Отсюда мы имеем равенство между стоимостью факторов и их предельной производительностью, значит, итоговая прибыль равна нулю.

Из выражения (6.1) следует, что предельная производительность j-го промежуточного продукта равна

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_{ij}} = A\alpha L_i^{1-\alpha}(X_{ij})^{\alpha-1}. \tag{6.3}$$

Из равенства предельной производительности и цены следует

$$X_{ij} = L_i \cdot \left(\frac{A\alpha}{P_i}\right)^{1/(1-\alpha)}. \tag{6.4}$$

Таким образом, мы можем определить спрос на j-й товар X_{ij} как функцию от цены P_j. Эластичность спроса по цене для каждого товара постоянна и составляет $-1/(1-\alpha)$.

Функция спроса изображена на рис. 6.1.

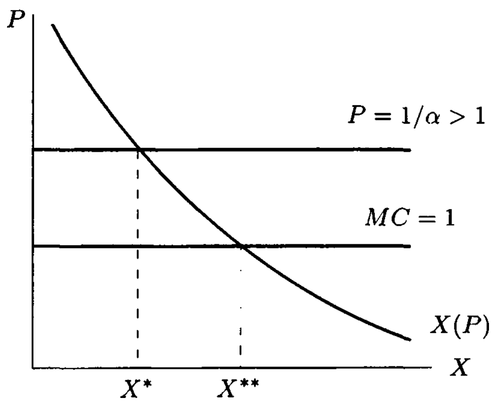


Рис. 6.1. Спрос на промежуточную продукцию. Спрос на промежуточную продукцию описывается убывающей функцией с постоянной эластичностью. Когда цена равна предельным издержкам, спрос составляет X^{**}. В случае если цена выше предельных издержек, спрос будет меньше, чем X^{**}

Равенство между w и предельным продуктом труда означает:

$$w = (1-\alpha) \cdot \frac{Y_i}{L_i}. \tag{6.5}$$

6.1.2. Фирмы-разработчики

В каждый момент существующая технология позволяет производить N видов промежуточной продукции. Увеличение количества N предполагает технологический скачок, который позволит производить новый вид промежуточной продукции. Подобный технологический прорыв возможен за счет целенаправленных усилий фирм в секторе R&D.

Фирмы из сектора R&D принимают решение в два этапа. Во-первых, они решают, стоит ли направлять ресурсы на разработку нового продукта. Фирмы будут расходовать ресурсы, если чистая приведенная стоимость ожидаемой в будущем прибыли будет не меньше понесенных сегодня затрат. На второй стадии фирмы-разработчики определяют оптимальную цену, по которой они будут продавать изобретенный товар производителям конечной продукции. Эта цена определяет поток прибыли в каждый момент времени и, таким образом, текущую приведенную прибыль, рассмотренную на первом шаге.

Проанализируем модель в обратном порядке. Сначала определим оптимальную цену, предположив, что новый продукт уже изобретен. Затем рассчитаем текущую стоимость прибыли и сравним ее с R&D издержками. Если текущая стоимость не меньше R&D издержек, то фирма будет вкладывать инвестиции в R&D. В заключение мы рассмотрим равновесие в случае отсутствия входных барьеров на рынке исследований и разработок.

Стадия 2. Оптимальная цена изобретенного товара. Чтобы стимулировать научные исследования, необходимо вознаграждать наиболее успешных новаторов. Главной проблемой является то, что создание нового вида промежуточного товара j сопряжено с издержками, но потом идеи по его производству могут быть использованы на неконкурентной основе всеми потенциальными производителями товара j, т. е. использование какого-либо способа производства одним производителем не повлияет на величину конечного выпуска, который при заданных ресурсах мог быть произведен совместно всеми производителями, использующими данный вариант производства. Впоследствии будет целесообразно сделать существующие открытия доступными для всех производителей, но подобная практика не сможет обеспечить ожидаемый стимул для дальнейших исследований. Необходим компромисс.

который, как и в случае обычного анализа патентов, находится между ограничением на использование существующих идей (т. е. своего рода возможностью исключать третьих лиц) и вознаграждением за новаторскую деятельность.

О проблемах конкуренции и ограничении на использование идей говорил почти 200 лет назад Томас Джефферсон, третий президент США и автор Декларации независимости, который также работал в Патентной комиссии США. В своем письме к Айзеку МакФерсону (Isaac McPherson) от 13 августа 1813 г. Джефферсон писал[1]:

> «Сложно представить себе в природе более необычный вид исключительной собственности, чем продукт мыслительной деятельности, называемый идеей. Индивид обладает правом исключительной собственности на нее до тех пор, пока он хранит идею при себе. Но после ее разглашения она уже принадлежит всем и не может быть изъята из общественного владения. Важно также и то, что никто не может владеть этой идеей в меньшей степени, все владеют ею в полном объеме. Тот, кто воспринимает мою идею, самостоятельно познает ее, не уменьшая при этом ее размер ... по своей природе идеи не могут быть предметом собственности. Общество может предоставить изобретателю исключительные права на прибыль со своих идей в качестве поощрения и стимула к разработке новых идей, которые повысят полезность. Но этого может быть и не сделано в зависимости от того, насколько в этом заинтересовано общество, и повлиять на данное решение не могут ни требования, ни жалобы. Соответственно, насколько я проинформирован, Англия (до тех пор, пока мы не стали подражать ей) была единственной страной, где на законодательном уровне было закреплено право исключительной собственности на использование идей. В других странах эти права иногда соблюдаются, правда, лишь в исключительных случаях и только при помощи специальных и личных постановлений. В целом, в других странах считается, что монопольное право, скорее, создает проблемы в обществе, а не приносит ему пользу. И можно видеть, что страны, отказавшиеся от монополий на изобретения, так же как и Англия, преуспели в разработке новых успешных устройств и механизмов».

Таким образом, хотя Джефферсон понимал важность защиты патентов как инструментов стимулирования инноваций, но в конечном итоге он выступал против режима, в котором сохранялись монопольные права на идеи.

---

[1] Это письмо доступно в сети Интернет в разделе Thomas Jefferson Papers Библиотеки Конгресса США (lcweb2.loc.gov/ammem/mtjhtml/mtjhome.html).

Вопреки точке зрения Джефферсона, мы рассмотрим институциональную среду в которой изобретатель товара j получает пожизненное монопольное право на производство и продажу созданного на основе собственных идей товара X_j[1]. Возможность получения монопольной ренты стимулирует исследовательскую деятельность. Можно усилить монопольную власть, если обеспечить патентную защиту или если фирма удерживает технологию в тайне. В любом случае будет целесообразно предположить, что монопольная власть изобретателя длится какое-то конечное число периодов или постепенно ослабевает. Мы рассмотрим далее этот аспект чуть подробнее.

Текущее значение прибыли от изобретения j-го промежуточного продукта представлено формулой

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi_j(v) e^{-\bar{r}(t,v)\cdot(v-t)}\, dv, \tag{6.6}$$

где $\pi_j(v)$ — прибыль в момент времени v;

$$\bar{r}(t,v) \equiv \left[\frac{1}{v-t}\right] \cdot \int_t^{v} r(w)\, dw$$

— средняя процентная ставка между периодами t и v. Если процентная ставка постоянна, как в случае равновесия, и равна r, то в выражении (6.6) получаем $e^{-r\cdot(v-t)}$.

Выручка производителя в каждый момент времени равна произведению цены товара $P_j(v)$ на его проданное количество. Прибыль равна выручке за вычетом производственных издержек. Предположим, что на производство единицы уже известного промежуточного продукта j-го типа уходит одна условная единица конечного выпуска Y. В сущности, это означает, что изобретатель товара j может определить, какая часть гомогенного потока конечной продукции была получена из данного промежуточного продукта, и обратить эту часть назад в j-й промежуточный товар. Формально мы предполагаем, что предельные и средние издержки постоянны и пронормированы к 1. Поэтому поток прибыли выглядит следующим образом:

$$\pi_j(v) = [P_j(v) - 1] \cdot X_j(v), \tag{6.7}$$

[1]Предположим для удобства, что производитель j-го промежуточного продукта является и его изобретателем. Мы придем к тем же результатам, если вместо этого предположим, что изобретатель получает процентные отчисления за использование его идей конкурентами.

где

$$X_j(v) = \sum_i X_{ij}(v) = \left[\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right]^{1/(1-\alpha)} \cdot L_i = L \cdot \left[\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right]^{1/(1-\alpha)}, \qquad (6.8)$$

что является величиной совокупного спроса всех производителей i из выражения (6.4). Количество L — это агрегированные затраты труда, которые, согласно предпосылке, постоянны.

Поскольку в функции прибыли нет фазовых переменных, а в функции спроса нет межвременных параметров, производитель товара X_j выбирает в каждый момент времени тот уровень цены P_j, который позволяет ему максимизировать монопольную прибыль[1]. Задача максимизации, исходя из (6.7) и (6.8), выглядит следующим образом:

$$\max_{P_j(v)} \pi_j(v) = [P_j(v) - 1] \cdot L \cdot \left[\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right]^{1/(1-\alpha)}. \qquad (6.9)$$

Монопольная цена[2] равна

$$P_j(v) = P = \frac{1}{\alpha} > 1. \qquad (6.10)$$

Отсюда следует, что цена P_j постоянна во времени и одинакова для каждого промежуточного продукта j. Монопольная цена представляет собой надбавку в $1/\alpha$ раз к предельным издержкам, равным 1. Эта цена одинакова для всех промежуточных продуктов j, поскольку одинаковы затраты на их производство и поскольку они симметрично представлены в производственной функции (6.1).

Подставив P_j из (6.10) в выражение (6.4), мы можем определить общее количество каждого произведенного продукта:

$$X_j = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}L. \qquad (6.11)$$

Это количество также постоянно во времени и для всех j. Важно отметить, что, поскольку цена превосходит предельные издержки, количество X_j меньше, чем оно могло бы быть, если бы цена совпадала

---

[1] Мы можем получить этот результат из похожего динамического анализа, построив функцию Гамильтона и найдя условие первого порядка для P. Так как P — это управляющая переменная, то из условия первого порядка будет следовать, что производная прибыли равна нулю точно так же, как и в статической модели.

[2] Этот результат предполагает, что доля промежуточных ресурсов α есть величина, обратная коэффициенту надбавки. Однако это ограничение не используется более в том случае, если мы рассматриваем обобщенную производственную функцию, представленную в сноске (2) на с. 372. В этом случае монопольная цена оказывается равной $P_j = P = 1/\sigma$.

с предельными издержками (см. рис. 6.1). Количество X_j одинаково для всех продуктов в каждый момент времени (если значение L постоянно). Общее количество всей промежуточной продукции X равно

$$X = NX_j = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}LN. \tag{6.12}$$

Уровень агрегированного выпуска определяется из выражений (6.2) и (6.12)

$$Y = AL^{1-\alpha}X^{\alpha}N^{1-\alpha} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN. \tag{6.13}$$

Подставив P_j и X_j из (6.10) и (6.11) в выражение (6.9), получаем формулу для прибыли:

$$\pi_j(v) = \pi = LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)}. \tag{6.14}$$

Эта прибыль также постоянна во времени и по всем продуктам. Подставив оптимальные величины P_j и X_j в выражение (6.6), получаем, что текущая стоимость прибыли изобретателя в момент t равна

$$V(t) = LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\bar{r}(t,v)\cdot(v-t)}\,dv. \tag{6.15}$$

Стадия 1. Решение о входе на рынок R&D. Известно, что институциональная среда позволяет исследователю после создания нового продукта получать текущую прибыль $V(t)$, рассчитанную в (6.15). Для исследователя инвестиции в R&D будут оправданными, если эта текущая прибыль не ниже R&D издержек. Отсюда следует, что инвестиции в R&D зависят от структуры и размера издержек. На практике процесс исследования характеризуется неопределенностью относительно количества необходимых для инновации ресурсов, а также относительно вероятности успешного исхода. Упростим анализ, предположив, что для успешного создания нового продукта необходимо определенное количество усилий. (В гл. 7 рассматривается модель, в которой процесс проведения исследования полностью связан с неопределенностью.)

Если известны все условия, необходимые для создания инновации, в конечном счете, это приведет к тому, что траектория агрегированных показателей экономического роста будет гладкой. Случайная природа процесса появления новой продукции приведет к тому, что траектория на агрегированном уровне не будет гладкой, а будет содержать отклонения темпов прироста от линии долгосрочного тренда. Эти отклонения можно рассматривать как колебания, возникающие в моделях реального делового цикла. (См. Kydland and Prescott, 1982; McCallum, 1989.)

Нас прежде всего интересуют факторы, определяющие тенденцию долгосрочного роста, поэтому мы рассмотрим процесс проведения R&D, в котором отсутствуют циклические компоненты.

В первой модели предполагается, что издержки на создание нового типа продукта составляют η единиц от Y. Мы применяем предпосылки обычной односекторной модели производства для моделирования использования конечного выпуска на проведение R&D[1]. В целом стоит предположить, что стоимость создания новых видов продукции зависит от числа уже ранее изобретенных товаров, что описывается функцией $\eta(N)$. Постепенное сокращение темпов прироста числа новых видов продукции означает, что издержки будут расти вместе с N, т. е. $\eta'(N) > 0$. Но если число уже созданных видов продукции будет способствовать появлению новых видов, то с ростом N издержки будут падать, так что $\eta'(N) < 0$[2]. В данном случае мы отказываемся от этих условий и предполагаем, что издержки на изобретение нового товара со временем не изменяются, т. е.

$$R\&D \text{ издержки} = \eta = \text{const}. \tag{6.16}$$

Подобное условие соответствует постоянному темпу прироста агрегированного выпуска. Однако оно ставит некоторые вопросы относительно эффектов масштаба, на которых мы остановимся позже. Фирма решает направлять ресурсы на R&D, если $V(t) \geqslant \eta$.

Условие свободного входа на рынок. Предположим, что существует свободный вход на рынок, где занимаются исследованиями и разработками, поэтому каждый, кто готов нести R&D издержки в размере η, может получить чистую текущую прибыль $V(t)$, указанную в формуле (6.15). Если $V(t) > \eta$, то на исследования и разработки в момент t будет направлено бесконечное количество ресурсов[3]; следовательно, в равновесии $V(t) > \eta$ не выполняется. Если $V(t) < \eta$, то в момент t на исследования и разработки не выделяется никаких ресурсов,

---

[1] В работе Rivera-Batiz and Romer (1992) использована эта спецификация в рамках так называемой модели лабораторного оборудования для R&D.

[2] Условие относительно того, что издержки на изобретение нового продукта снижаются, эквивалентны предпосылке о том, что издержки постоянны, но новые продукты обладают большей производительностью, чем старые. В гл. 7 рассматривается модель, в которой производительность новых товаров, по сравнению с предшествующими, выше.

[3] Инвестиции будут бесконечными, если нет ограничений на заимствование по процентной ставке $r(t)$, тогда долг будет покрываться инвестициями.

следовательно, количество видов продукции N остается без изменений[1]. Мы будем рассматривать проблему равновесия при условии проведения исследований и разработок, а следовательно, при растущем со временем числе N. Тогда получаем

$$V(t) = \eta, \tag{6.17}$$

что справедливо для всех t.

Продифференцировав по времени условие свободного входа на рынок (6.17) с учетом формулы для $V(t)$ из (6.15) и условия

$$\bar{r}(t,v) \equiv \frac{1}{(v-t)} \cdot \int_t^v r(w)\,dw^{2)},$$

получаем

$$r(t) = \frac{\pi}{V(t)} + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)}, \tag{6.18}$$

где π -- постоянный поток прибыли, определяемый из выражения (6.9). Из формулы (6.18) следует, что процент по займам $r(t)$ совпадает с доходностью инвестиций в R&D. Эта доходность равна норме прибыли $\pi/V(t)$ плюс капитальные доходы или убытки, определяемые исходя из изменения стоимости самих фирм-разработчиков $\dot{V}(t)/V(t)$. Поскольку η — константа, то из условия свободного входа на рынок (6.17) следует $\dot{V}(t) = 0$. Тогда из (6.18) получаем, что процентная ставка постоянна и равна $r(t) = r = \pi/\eta$. Подставив π из (6.9), получаем

$$r = \frac{L}{\eta} \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)}. \tag{6.19}$$

Основная технология и рыночная структура устанавливают норму прибыли в размере (6.19) (при этом предполагается, что темп прироста N положителен). Таким образом, ситуация соответствует модели AK из гл. 4, когда технология и стимулы к инвестированию ограничивают норму прибыли величиной $A - \delta$.

Промежуточная продукция, которая должна появиться на рынке, обеспечивает такой поток монопольной прибыли, который позволяет

[1] Количество изобретений N не может быть уменьшено, т. е. невозможно забыть об уже существующих технологиях и способах производства продукции и таким образом добиться снижения издержек, затраченных на изобретение новых товаров. Если бы N было обратимо, то в таком случае $V(t) = \eta$ должно было бы выполняться в каждый момент времени.

[2] Для дифференцирования определенного интеграла воспользуемся правилом Лейбница. См. математическое приложение.

лишь покрывать R&D издержки, равные η, т. е. в выражении (6.15) $V(t) = \eta$. Поскольку новые и старые продукты обеспечивают одинаковую монопольную прибыль, текущая стоимость уже существующих промежуточных товаров также должна равняться η. Однако η — это еще и рыночная стоимость фирмы, которая производит один вид промежуточной продукции, следовательно, суммарная рыночная стоимость всех фирм равна ηN. (Напомним, что у фирм нет собственного капитала, поскольку в модели не участвуют товары длительного пользования.)

6.1.3. Домашние хозяйства

Бесконечно живущие домашние хозяйства максимизируют полезность

$$U = \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t}\, dt, \tag{6.20}$$

где темп прироста населения n равен нулю. Домашние хозяйства также получают прибыль в размере r от владения активами (assets), а также получают заработную плату w за определенное количество совокупного труда L. Бюджетное ограничение имеет привычный общий вид:

$$\frac{d(\text{Активы})}{dt} = wL + r \cdot (\text{Активы}) - C. \tag{6.21}$$

Потребление домашних хозяйств задается уравнением Эйлера[1),]

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho). \tag{6.22}$$

Условие трансверсальности предполагает, что r должно превосходить долгосрочный темп прироста выпуска Y.

6.1.4. Общее равновесие

В закрытой экономике общее количество активов домашних хозяйств совпадает с рыночной стоимостью всех фирм:

$$\text{Активы} = \eta N.$$

Так как η постоянна, то изменение количества активов задается как

$$\frac{d(\text{Активы})}{dt} = \eta \dot{N}.$$

[1)] Так как численность населения постоянна, то темп прироста потребления в целом равен темпу прироста потребления на душу населения.

Ставка заработной платы задается выражением (6.5):

$$w = (1-\alpha)\cdot\frac{Y}{L}.$$

После преобразований выражение (6.19) может быть записано в виде

$$r = \frac{1}{\eta}\cdot(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot\frac{Y}{N}.$$

Отсюда следует, что совокупный доход

$$wL + r\cdot\text{Активы} = Y - \alpha^2 Y.$$

Это приводит к тому, что бюджетное ограничение домашних хозяйств (6.21) принимает следующий вид:

$$\eta\dot{N} = Y - C - X, \tag{6.23}$$

где мы воспользовались условием $X = \alpha^2 Y$, полученным из выражений (6.12) и (6.13). Выражение (6.23) является ограничением на ресурсы для всей экономики. Это условие означает, что в каждый момент времени ВВП (Y) должен быть распределен между потреблением C, производством промежуточной продукции X и созданием новых продуктов $\dot{N}$, каждый из которых будет стоить η.

Подставив r из выражения (6.19) в выражение (6.22), получаем формулу для темпа прироста:

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[\frac{L}{\eta}\cdot A^{1/(1-\alpha)}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right]. \tag{6.24}$$

Это темп прироста числа видов N, выпуска Y, а также потребления C. В данной модели, как и в модели AK, в динамике не происходит изменения темпов прироста этих трех показателей, и все они характеризуются одинаковым и постоянным темпом прироста[1)].

Равенство (6.24) выполняется только в том случае, если при подстановке всех переменных получаем $\gamma \geqslant 0$. Если $\gamma < 0$, то у потенциальных изобретателей будет недостаточно стимулов для того, чтобы тратить ресурсы на R&D, и, следовательно, N не будет изменяться во времени. Темп прироста γ тогда будет равен нулю. Поэтому мы рассматриваем ситуацию, когда $\gamma \geqslant 0$ в выражении (6.24).

[1)] Мы видим, что равновесие существует без изменений показателей роста в динамике. Доказательство того, что другое равновесие невозможно, идентично доказательству в гл. 4. Рассмотрите данное доказательство самостоятельно.

Число видов товаров N в начальный момент времени составляет $N(0)$ и затем растет с постоянным темпом прироста γ, определяемым из (6.24). Решение задачи относительно выпуска в выражении (6.13) указывает, что при фиксированном L выпуск, обозначенный через Y, пропорционален N. Отсюда следует, что Y и N растут с одинаковым постоянным темпом прироста.

Уровень потребления должен удовлетворять бюджетному ограничению из выражения (6.23), которое может быть переписано как

$$C = Y - \eta\gamma N - X,$$

где $\eta\gamma N = \eta\dot{N}$ — количество ресурсов, направленных на R&D. Подставив в правую часть Y из (6.13), γ из (6.24) и X из (6.12) и упростив, получим

$$C = \frac{N}{\theta} \cdot \left\{LA^{1/(1-\alpha)} \cdot (1-\alpha)\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} \cdot [\theta - \alpha \cdot (1-\theta)] + \eta\rho\right\}. \qquad (6.25)$$

Выражение (6.25) подтверждает, что C и N при фиксированном L растут с тем же темпом прироста γ, указанным в (6.24)[1].

6.1.5. Определяющие факторы темпов прироста

Рассмотрим факторы экономического прироста γ, указанные в выражении (6.24). Предпочтения домашних хозяйств, описываемые параметрами ρ и θ, как и параметр уровня производственной технологии A, воздействуют в целом так же, как и в модели AK из гл. 4. Темп прироста тем выше, чем больше желание сберегать (ниже ρ и θ) и лучше уровень технологии (выше значение A).

Новым фактором являются затраты на изобретение нового продукта η. Уменьшение η приводит к росту нормы прибыли r в выражении (6.24) и, таким образом, ведет к увеличению темпов прироста γ в уравнении (6.24).

В модели присутствует эффект масштаба, так как увеличение труда L приводит к увеличению темпов прироста γ в выражении (6.24).

[1] Условие трансверсальности: $r > \gamma$. (Напомним, что темп прироста населения n равен нулю.) Так как

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho),$$

условие трансверсальности может быть записано $r \cdot (1 - \theta) < \rho$. Подставив r из выражения (6.19), получаем неравенство

$$LA^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot (1-\alpha) \cdot \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}\alpha \cdot (1-\theta) < \eta\rho.$$

Это условие гарантирует, что выражение для уровня C в (6.25) положительно.

Этот результат аналогичен результатам, полученным в гл. 4 для модели обучения на практике при наличии внешних эффектов и для модели общественных благ. Как и в ранее рассмотренных моделях, в данной экономике не будет наблюдаться тенденции перехода к устойчивому состоянию, если предположить, что темп прироста населения положителен. Данная модель содержит эффект масштаба, так как новый продукт, затраты на изобретение которого равны η, может быть использован на неконкурентной основе во всей экономике. Чем больше размер экономики, т. е. чем больше L, тем меньше затраты на изобретение новых продуктов в расчете на единицу L (или Y). Следовательно, как и в случае уменьшения η, увеличение L приводит к росту γ.

В гл. 4 мы уже сталкивались с тем, что эффекты масштаба не подтверждаются эмпирически, если оценивать масштаб как численность населения в стране или размах экономической деятельности. В этом контексте анализ эффекта масштаба в рамках страны может быть нецелесообразным. Тот масштаб, о котором идет речь в модели, имеет две важные особенности: во-первых, в понятие масштаба включается все производство, в котором на неконкурентной основе могут быть использованы новые идеи, во-вторых, масштаб определяет границы прав собственности изобретателя. Если идеи быстро распространяются через границы, то страны не будут подходящими объектами для исследования, поскольку это не соответствует первой особенности. (Проблемы распространения технологии рассматриваются в гл. 8.) Страны также могут не подходить из-за второй особенности, если патентная защита используется на международном уровне или если монопольная власть в других государствах может поддерживаться хотя бы частично, благодаря коммерческой тайне.

Если рассматривать мировую экономику с учетом движения идей и соблюдением прав собственности, то L будет определять мировое население или агрегированный показатель деловой активности. Модель в данном случае будет предсказывать положительное соотношение между среднедушевым темпом прироста мировой экономики и численностью населения в мире или общемирового выпуска. Kremer (1993) доказывал, что подобная гипотеза может быть справедливой в течение достаточно долгого периода времени. Однако с традиционной точки зрения предсказанный эффект масштаба кажется неоднозначным, поэтому во многих странах пытаются изменить структуру экономики, чтобы исключить возникновение подобного эффекта масштаба на практике. Jones (1999) представил подробный анализ литературы по данной проблеме.

6.1.6. Оптимальность по Парето

Задача социального плановика. Покажем, что результаты, полученные для децентрализованной экономики, не будут оптимальными по Парето. Чтобы узнать, является ли результат — в данном случае темп прироста γ из выражения (6.24) — оптимальным по Парето, сравним его с результатом аналогичной задачи, решенной при наличии гипотетического социального плановика.

Социальный плановик пытается максимизировать полезность репрезентативного домашнего хозяйства (6.20). У плановика есть бюджетное ограничение:

$$Y = AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha} = C + \eta\dot{N} + X. \tag{6.26}$$

Мы используем ту же производственную функцию, что и в выражении (6.1), но при этом накладываем условие, что количество промежуточных продуктов одинаково для всех фирм i и производителей промежуточной продукции j. Плановик, проводя оптимизацию с учетом каждого X_{ij}, получает оптимальный объем производства. Правая часть уравнения (6.26) включает в себя три возможных направления использования выпуска: потребление, исследование и разработка, выпуск промежуточной продукции.

Гамильтониан для задачи социального плановика может быть записан как

$$J = u(c) \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot \frac{1}{\eta} \cdot (AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}), \tag{6.27}$$

где теневая цена ν относится к $\dot{N}$. Мы также воспользовались условием $C = Lc$. Управляющие переменные - это c и X, N — фазовая переменная.

Отличие от децентрализованного решения заключается в расчетах количества промежуточной продукции X и темпа прироста N, обозначенного через γ:

$$X_{\begin{subarray}{l}\text{(Социальное}\\ \text{управление)}\end{subarray}} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{1/(1-\alpha)}LN; \tag{6.28}$$

$$\gamma_{\begin{subarray}{l}\text{(Социальное}\\ \text{управление)}\end{subarray}} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{L}{\eta} \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{1/(1-\alpha)} - \rho\right]. \tag{6.29}$$

Определив X по формуле (6.28), получаем выпуск, равный:

$$Y_{\begin{subarray}{l}\text{(Социальное}\\ \text{управление)}\end{subarray}} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}LN. \tag{6.30}$$

Величина X в модели децентрализованной экономики, определяемая по формуле (6.11), отличается от решения социального плановика из (6.28) на множитель $\alpha^{1/(1-\alpha)} < 1$. Таким образом, в децентрализованной экономике на производство промежуточной продукции направляется меньшее количество ресурсов, что приводит к меньшему выпуску (сравните выражения (6.13) и (6.30)).

На рис. 6.1 количество промежуточной продукции, которое будет производить плановик, равно X^{**}. Это то количество, на которое будет предъявлен спрос при цене, равной предельным издержкам. В децентрализованной экономике, где цена определяется как монопольная и равна $1/\alpha$, спрос будет меньше X^*. Разница между X^{**} и X^* в статике задает потери в эффективности от монополизации.

Для децентрализованной экономики темп прироста (6.24) отличается от темпа прироста в модели социального плановика множителем

$$\alpha^{1/(1-\alpha)} < 1,$$

на который умножается первый член в больших скобках в выражении (6.29). Вспомним, что первый член в выражении (6.24) отвечает за частную норму рентабельности r, рассчитываемую по формуле (6.19). Таким образом, в модели децентрализованной экономики наблюдается меньший экономический рост, чем в модели социального плановика, а меньший темп прироста ведет к норме прибыли, меньшей по сравнению с нормой прибыли в модели социального плановика. Выпишем из (6.29) социальную норму прибыли:

$$r\,\begin{matrix}\text{(Социальное}\\ \text{управление)}\end{matrix} = \frac{L}{\eta} \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{1/(1-\alpha)}. \tag{6.31}$$

В модели обучения на опыте с внешними эффектами, разобранной в гл. 4, частная норма рентабельности была ниже социальной из-за наличия невозмещенных выгод, которые один производитель предоставляет другому. В модели с изобретением новых товаров и монопольными правами на эти изобретения разрыв между общественной и частной нормами прибыли возникает по другой причине. Причина диспропорции заложена в монопольном ценообразовании на промежуточную продукцию: цена P, определенная по формуле (6.10), равна единичным предельным издержкам, умноженным на $1/\alpha$. Правительство может создать стимулы частному сектору и получать оптимальное, с социальной точки зрения, решение в децентрализованной экономике. Это возможно, если правительство сможет разработать своего рода отраслевую политику, сочетающую налоги и субсидии, которая будет давать стимулы к назначению цены, равной предельным издержкам, но не будет при этом снижать стимулы к созданию новых видов продукции. Рассмотрим возможные варианты.

Субсидии покупателям промежуточной продукции. Пусть экономика является децентрализованной, но правительство использует паушальный налог для субсидирования покупателей промежуточной продукции. Если ставка по субсидии равна $1 - \alpha$, то производитель конечного выпуска Y заплатит только αP за каждую единицу продукции X. Спрос X_{ij} из (6.4) соответственно возрастает на коэффициент $(1/\alpha)^{1/(1-\alpha)}$. Цена в равновесии по-прежнему равна предельным издержкам, умноженным на $1/\alpha$, а количество продукции X в равновесном состоянии равно произведению выражения (6.11) на $(1/\alpha)^{1/(1-\alpha)}$ и, таким образом, совпадает с решением социального плановика (6.28). Этот результат получается благодаря тому, что цена, отданная пользователем за продукцию X, за вычетом субсидий равна 1.

Расширение числа промежуточных продуктов X обеспечивает как статический, так и динамический прирост эффективности. В статике для фиксированного N монопольное ценообразование подразумевает, что предельная производительность продукта X превосходит затраты на производство, равные 1, следовательно, в экономике в целом не удается максимизировать количество товаров потребления. Если увеличится доля конечного выпуска, направленного на производство X, а Y возрастет еще больше, то может вырасти и потребление. Правительственная субсидия на покупку X позволяет гарантировать выигрыш в статике.

В динамике более высокий уровень продукции X также служит стимулом к увеличению N. Рост числа промежуточных продуктов также увеличивает поток монопольной прибыли, указанной в (6.6), на мультипликатор $(1/\alpha)^{1/(1-\alpha)}$. Это увеличение обеспечивает рост нормы доходности r в выражении (6.19) на тот же множитель. Следовательно, частная норма прибыли совпадает с социальной, представленной в (6.31)[1]. Получаем, что темп прироста в децентрализованной экономике равен темпу прироста в модели социального плановика (6.29). Таким образом, государственные субсидии обеспечивают динамическую эффективность, поскольку темп прироста N является оптимальным с социальной точки зрения. В более общих моделях первое наилучшее решение не может быть достигнуто только при помощи субсидий на покупку промежуточ-

[1] Точное совпадение зависит от эластичности спроса на промежуточный товар по цене. Эта характеристика зависит от формы производственной функции в выражении (6.1).

ной продукции. Например, в модели, рассмотренной далее, в которой монопольная власть изобретателя временна, необходимы будут и субсидии на исследования.

Субсидии на производство конечной продукции. Правительство может создать в экономике стимулы, которые позволят достичь социального оптимума, если оно, субсидируя производство, повысит спрос на промежуточную продукцию. Необходимый коэффициент надбавки на конечную продукцию Y_i равен $(1-\alpha)/\alpha$, так что производители получают $1/\alpha$ единиц прибыли от каждого произведенного товара.

Субсидии на исследования. Политика, которая кажется вполне естественной, но в рамках которой не удается достичь социального оптимума в модели, — это политика субсидирования R&D. Если правительство берет на себя часть расходов на R&D, то возможный изобретатель будет снижать чистые R&D издержки η, представленные в формуле (6.19). Это изменение приводит к росту величин r и γ, определяемых в случае частной экономики, до величин, рассчитываемых при наличии социального плановика. Проблема, однако, заключается в том, что количество промежуточной продукции X в выражении (6.11) по-прежнему не является оптимальным с точки зрения общественного благосостояния из-за наличия монопольного ценообразования. Следовательно, несмотря на то что экономика растет «правильным» темпом, она не достигает эффективного статического состояния, поскольку на производство промежуточной продукции при фиксированном N направляется неоптимальное количество ресурсов.

Хотя различные направления политики правительства в области налогообложения и субсидирования могут улучшить перераспределение в модели, однако на практике успешное осуществление какой-либо отраслевой политики оказывается довольно сложным. Правительство должно не только давать субсидии в правильном направлении (главным образом, стимулировать спрос на продукцию, которая продается по монопольным ценам), но и затем финансировать систему, в которой отсутствовали бы искажающие налоги. Если выпуск будет облагаться налогом, то оптимальность нарушится. Кроме того, в более реалистичной модели размер необходимых субсидий будет различаться в зависимости от факторов производства или конечных продуктов. Другими словами, правительство будет вынуждено выбирать наиболее удачных производителей. В разд. 6.2 анализируется эта проблема, исходя из наличия монопольной и конкурентной продукции.

6.1.7. Эффекты масштаба и R&D издержки

Один из способов изменить влияние эффекта масштаба — это изменить предпосылки относительно R&D издержек. Ключевым предположением ранее было то, что изобретение нового вида продукции требует фиксированной части η от конечного выпуска Y. Эта предпосылка означает, что $\dot{N}$ равен произведению $1/\eta$ на затраты на исследования и разработки. Отсюда темп прироста N равен

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\mathrm{R\&D}}{N}. \tag{6.32}$$

Из выражения (6.13) следует, что Y/N пропорционально N. Выражение (6.32) указывает на положительное соотношение между темпом прироста производительности $\dot{N}/N$ и долей R&D в Y/N. Отсюда следует, что общий долговременный положительный тренд в параметрах R&D, Y и L порождает соответствующий рост производительности. Подобный вывод подвергается критике с эмпирической точки зрения. Jones (1995, 1999) проводил анализ поведения временных рядов в наиболее развитых странах и показал, что темп прироста производительности оставался практически без изменений, несмотря на наличие восходящего тренда для переменных R&D, Y и L.

Альтернативным предположением, более соответствующим реальным данным, является то, что $\dot{N}/N$ пропорционально доле R&D в Y. Тогда отсутствие положительного тренда для производительности будет объясняться отсутствием тренда для переменной, указывающей долю затрат на R&D в ВВП. Доля ВВП, идущая на R&D в США с 1970 г., на самом деле мало изменилась — она упала с 2,6% в 1970 г. до 2,5% в 1996 г. В Великобритании доля незначительно упала с 2,0% в 1972 г. до 1,8% в 1997 г. В других странах Организации экономического сотрудничества и развития наблюдается умеренный рост доли R&D — в Японии доля выросла с 1,7% в 1970 г. до 2,8% в 1997 г.; в Германии этот показатель увеличился с 2,1% в 1970 г. до 2,3% в 1998 г.; во Франции — с 1,9% в 1970 г. до 2,2% в 1997 г.; в Италии – с 0,8% в 1970 г. до 1,4% в 1996 г.; в Канаде — с 1,2% в 1970 г. до 1,7% в 1998 г.[1]

В этих данных отражены формальные расходы на R&D, но концепция научных исследований, рассматриваемых в теории, намного шире. Доля реальных расходов на R&D по анализируемым данным по мере развития стран имеет тенденцию к росту, что кажется вполне реальным,

[1] Данные предоставлены Мировым банком в разделе «Показатели мирового развития за 2002 г.», а также Национальным научным фондом на сайте http://www.nsf.gov.

однако в некоторых странах ОЭСР истинные доли могут и не расти. Таким образом, устойчивость показателя доли R&D в ВВП указывает на достаточно хорошую аппроксимацию поведения исследователей в развитых странах. Также будет вполне логично в качестве приближения первого порядка предположить, что прирост производительности $\dot{N}/N$ пропорционален доле R&D в ВВП с постоянным положительным коэффициентом.

В теоретической модели соответствующее предположение выглядит следующим образом: затраты на изобретение нового ряда промежуточных продуктов пропорциональны дополнительному объему выпуска, который будет создан с помощью новых продуктов. Так как выпуск Y пропорционален N в выражении (6.13), эквивалентным предположением является то, что затраты на R&D пропорциональны Y/N. Из выражения (6.13) следует

$$\frac{Y}{N} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L,$$

новая спецификация предполагает замену η в исходной модели на $\eta A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L$. Поскольку новый член по-прежнему константа, то мы легко получаем те же результаты. Рассчитаем норму прибыли и темп прироста, упростив выражения (6.19) и (6.24):

$$r = \frac{\alpha\cdot(1-\alpha)}{\eta} \tag{6.33}$$

и

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{\alpha\cdot(1-\alpha)}{\eta} - \rho\right]. \tag{6.34}$$

Важной особенностью является то, что норма прибыли и темп прироста больше не зависят от L и A. Таким образом, в экономике еще возможен эндогенный рост, но эффекты масштаба больше не присутствуют.

Пересмотренная модель также допускает, что рост численности населения не влияет на темп прироста выпуска. Если $L(t)$ растет с постоянным темпом прироста n, текущая стоимость монопольных прав на все разнообразие промежуточной продукции определяется преобразованием выражения (6.15):

$$V(t) = A^{1/(1-\alpha)}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{2/(1-\alpha)}\cdot L(t)\cdot\left(\frac{1}{r-n}\right),$$

где мы вполне корректно предполагаем, что r - константа. Новым является то, что $V(t)$ возрастает вместе с n, поскольку более высокий показатель n подразумевает более высокий спрос на промежуточные продукты в будущем.

Условие свободного входа на рынок теперь примет вид

$$\eta A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L(t) = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} \cdot L(t) \cdot \left(\frac{1}{r-n}\right),$$

где левая часть — это затраты на инновации (которые пропорциональны $L(t)$), а правая — это $V(t)$. Упростив данное условие свободного входа на рынок, получаем выражение для равновесной нормы прибыли:

$$r = n + \frac{\alpha \cdot (1-\alpha)}{\eta}. \tag{6.35}$$

Темп прироста по-прежнему определяется по формуле $\gamma = (1/\theta)\cdot(r-\rho)$. Таким образом, r и γ будут инвариантными по L и возрастающими по n.

6.1.8. Растущие издержки на R&D

В данном разделе мы рассмотрим ситуацию, в которой издержки на R&D описываются возрастающей функцией от числа ранее воплощенных в продукцию идей, т. е. $\eta = \eta(N)$, где $\eta'(N) > 0$. Подобный подход будет вполне правдоподобным, если рассматривать рост числа N как реакцию на истощение уже существующих идей производства товаров. Рассмотрим функцию с постоянной эластичностью

$$\eta(N) = \phi N^{\sigma}, \tag{6.36}$$

где $\sigma > 0$ и $\phi > 0$ — экзогенно заданные константы.

Вначале отметим, что стратегия ценообразования на изобретенный продукт не зависит от вида R&D издержек. Поэтому оптимальная цена по-прежнему определяется как монопольная $P = 1/\alpha$, количество каждого промежуточного товара задается выражением (6.11), а прибыль представлена равенством (6.14). Как и раньше, условие свободного входа на рынок сводится к тому, что

$$V(t) = \eta(N).$$

Главное отличие от рассматриваемой ранее ситуации заключается в том, что растет N, а следовательно, растет и $\eta(N)$, таким образом, $V(t)$ также возрастает. Поскольку $\dot{V}(t)$ теперь отлична от нуля, постольку из выражения (6.18) следует, что процентная ставка не является постоянной и равна

$$r(t) = \frac{\pi}{\phi N^{\sigma}} + \sigma \cdot \frac{\dot{N}}{N}. \tag{6.37}$$

Последний член, зависящий от $\dot{N}/N$, представляет собой темп прироста стоимости фирмы, которая обладает монопольным правом на производство какого-либо существующего промежуточного продукта. Эта стоимость растет со временем, так как затраты на инновационную деятельность растут, а существующие промежуточные продукты по качеству такие же, как и новые[1].

Подставим выражение для $r(t)$ из (6.37) в (6.22) и получим

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\pi}{\phi N^{\sigma}} + \sigma \cdot \frac{\dot{N}}{N} - \rho \right). \tag{6.38}$$

Отсюда следует, что темп прироста потребления больше не является величиной постоянной, уменьшается с ростом N и растет вместе с $\dot{N}/N$. Для того чтобы найти решение, необходимо найти выражение для $\dot{N}/N$. Подставим формулу издержек на R&D (6.36) в ограничение по ресурсам (6.23) и получим

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\psi_1}{\phi} \cdot N^{-\sigma} - \frac{C}{\phi} \cdot N^{-(1+\sigma)}, \tag{6.39}$$

где $\psi_1 \equiv (1 - \alpha^2) \cdot A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} L > 0$ является константой при фиксированном L.

Мы можем представить решение модели графически, построив фазовую диаграмму в пространстве $(C,\ N)$. Графиком $\dot{N} = 0$ является прямая линия, исходящая из начала координат, описываемая функцией $C = \psi_1 N$. Для всех комбинаций C и N, расположенных выше этой кривой, количество N будет падать (стрелка указывает влево, рис. 6.2).

Подставляем (6.39) в (6.38) и получаем выражение для $\dot{C}/C$ как функции от N и C:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\pi}{\phi} \cdot N^{-\sigma} + \sigma \cdot \left[\frac{\psi_1}{\phi} \cdot N^{-\sigma} - \frac{C}{\phi} \cdot N^{-(1+\sigma)} \right] - \rho \right). \tag{6.40}$$

График, соответствующий $\dot{C} = 0$, задается уравнением

$$C = \left(\frac{\pi}{\sigma} + \psi_1 \right) \cdot N - \frac{\rho\phi}{\sigma} \cdot N^{1+\sigma}. \tag{6.41}$$

Функция является выпуклой вверх и достигает максимума в точке

$$N^{\max} = \left(\frac{\pi + \sigma\psi_1}{\rho\phi \cdot (1+\sigma)} \right)^{1/\sigma}.$$

[1] Этот результат справедлив, когда сохраняется знак равенства в условии свободного входа на рынок. В таком случае новые идеи продолжают появляться, несмотря на то что издержки инновационной деятельности растут.

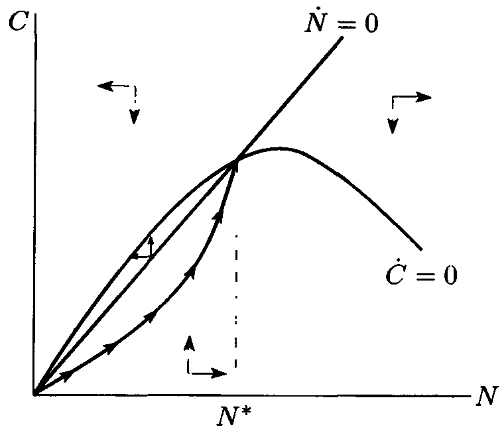


Рис. 6.2. Фазовая диаграмма модели с растущими R&D издержками. График $\dot{N} = 0$ — линия из начала координат, задается функцией $C = \psi_1 N$. Для комбинаций C и N, расположенных выше этой прямой, количество N будет падать. График $\dot{C} = 0$ задается уравнением $C = \left(\frac{\pi}{\sigma} + \psi_1\right) \cdot N - \frac{\rho\phi}{\sigma} \cdot N^{1+\sigma}$. Эта функция потребления является выпуклой вверх и достигает максимума в точке $N^{\max} = \left(\frac{\pi + \sigma\psi_1}{\rho\phi \cdot (1+\sigma)}\right)^{1/\sigma}$. Выше графика этой функции стрелки указывают вниз, т. е. при движении к устойчивому состоянию C падает, и наоборот, если мы находимся ниже кривой, то при движении к устойчивому состоянию потребление будет расти. Отметим, что $N^* < N^{\max}$, поэтому устойчивое состояние находится левее максимальной точки на графике $\dot{C} = 0$. Устойчивое состояние в данной модели — это седловая точка, движение к которой осуществляется по кривой, имеющей положительный наклон, что ведет к росту как потребления, так и разнообразия товаров

Стрелки выше кривой указывают вниз (см. рис. 6.2), при движении к устойчивому состоянию потребление падает. В устойчивом состоянии N, определяемое как точка пересечения двух траекторий, рассчитывается по формуле

$$N^* = \left(\frac{\pi}{\rho\phi}\right)^{1/\sigma} = \left(\frac{LA^{1/(1-\alpha)} \cdot (1-\alpha)/\alpha \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)}}{\rho\phi}\right)^{1+\sigma}. \qquad (6.42)$$

Отметим, что $N^* < N^{\max}$, поэтому устойчивое состояние находится левее максимальной точки на графике траектории $\dot{C} = 0$.

Устойчивое состояние — это седловая точка, движение к которой осуществляется по кривой, имеющей положительный наклон, что ведет к росту потребления и разнообразия товаров[1]. В долгосрочном периоде число видов продукции постоянно, пока постоянна величина L. Если L растет с неизменным темпом прироста n, то и N будет расти с тем же темпом прироста в устойчивом состоянии. Таким образом, в модели отсутствуют эффекты масштаба, влияющие на темпы прироста в устойчивом состоянии. (В модели присутствует эффект масштаба в том смысле, что более высокий уровень L соответствует более высокому значению N, следовательно, и более высокому уровню y и c.) Обратим внимание на то, что темп прироста в долгосрочном периоде инвариантен по параметрам сбережений (ρ и θ), а также по издержкам на исследования и разработки (η). Единственный параметр, влияющий на темп прироста в устойчивом состоянии, – это темп прироста населения n[2].

6.2. Ослабление монопольной власти. Конкуренция

Ранее в данной главе мы предполагали, что изобретатель промежуточной продукции обладает пожизненным монопольным правом на ее производство и использование. В действительности, со временем, когда конкуренты узнают больше о продукции (или технологии), они начинают ее копировать или выпускать товары-заменители. Монопольная власть также постепенно ослабевает, если патентная защита является временной.

В данном разделе мы построим модель постепенного ослабления монопольной власти. Пусть Пуассоновский процесс задает вероятности перехода товаров с монопольного на конкурентный рынок[3]. Так, если промежуточный товар j выпускается монополией в данный момент времени, то через период времени dT он становится конкурентным с вероятностью $p \cdot dT$, где $p \geqslant 0$. Таким образом, если товар, изобретенный в момент времени t, первоначально выпускался монополией, вероятность того, что этот товар вновь выпускается монополией в момент

[1]Мы исключили траектории, которые находятся выше оптимальной, как и в модели необратимости инвестиций в гл. 2. (Необратимость возникает здесь, поскольку нельзя забыть новые идеи, т. е. $\dot{N} \geqslant 0$.) Вдоль этих траекторий цена на патент станет отрицательной за конечный промежуток времени, что нарушает предположение о свободном распространении идей. Более детальный анализ представлен в Приложении 2В гл. 2.

[2]В некоторых других моделях в долгосрочном периоде ненулевой темп прироста выпуска на душу населения также зависел от ненулевого темпа прироста населения, но эти темпы могли не совпадать. См. работы Jones (1995), Segerstrom (1998) и Peretto (1998).

[3]Для анализа аналогичной модели см. Judd (1985).

времени v, где $v \geqslant t$, будст равна $e^{-p\cdot(v-t)}$. (Параметр p описывает крайнюю вероятность, которую мы использовали в модели с конечным временным горизонтом планирования в гл. 3.)

Монополизированный промежуточный продукт, как и раньше, продается по монопольной цене $1/\alpha$. Спрос на каждый монополизированный промежуточный продукт, обозначенный через X^m, по-прежнему задается выражением (6.11):

$$X^m = LA^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}. \tag{6.43}$$

Для монополии прибыль определяется формулой

$$\pi^m = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot X^m, \tag{6.44}$$

в то время как в случае конкуренции поток прибыли равен 0. Ожидаемая приведенная прибыль от изобретения (первоначально монополизированного) промежуточного продукта в момент времени t рассчитывается подстановкой в формулу (6.6) нового выражения для вероятности $e^{-p\cdot(v-t)}$

$$E[V(t)] = \int_t^{\infty} \pi^m e^{-[p+\bar{r}(t,v)]\cdot(v-t)}\,dv. \tag{6.45}$$

Мы предполагаем, что изобретателей волнует только этот ожидаемый доход[1].

Если взять производную по времени выражения (6.45), то получим формулу, аналогичную (6.18):

$$r(t) = \frac{\pi^m}{E[V(t)]} + \frac{dE[V(t)]/dt}{E[V(t)]} - p. \tag{6.46}$$

В выражении справа первый член это норма прибыли $\pi^m/E[V(t)]$. Второй член · это норма доходности капитала в предположении, что монопольная власть сохраняется. Последний член p отражает вероятность потери монопольной власти в единицу времени. Когда это все-таки происходит, величина потерь составляет $E[V(t)]$, т. е. всю стоимость фирмы, так как потеря монопольной власти означает, что все будущие потоки прибыли фирмы падают до нуля. Поскольку возможность потерь равна p, то влияние этой вероятности на норму прибыли представлено выражением

$$-p \cdot \frac{E[V(t)]}{E[V(t)]} = -p.$$

[1]Данный подход соответствует предположению о том, что индивидуумы стремятся избегать риска, так как риски носят полностью уникальный характер, а собственность фирм хорошо диверсифицирована.

Вернемся к рассмотрению ситуации, в которой издержки на R&D постоянны и равны η. Условие свободного входа на рынок с положительными расходами на исследования и разработки означает $E[V(t)] = \eta$, при этом $dE[V(t)]/dt = 0$. Подставив полученные результаты в выражение (6.46), запишем

$$r(t) = \frac{\pi^m}{\eta} - p.$$

Правая часть уравнения — константа, поэтому величина $r(t)$ также является постоянной и равна r. Подставив выражение для π^m из (6.46), получим

$$r = \frac{L}{\eta} \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} - p. \tag{6.47}$$

Выражение (6.47) отличается от (6.19) только вычитанием параметра p из правой части. Таким образом, неустойчивость монопольной власти уменьшает прежнее значение r на величину p. Вспомним также, что норма прибыли, рассчитанная в (6.19), была ниже социальной нормы прибыли (6.31). Следовательно, такая неустойчивая монопольная позиция исследователя создает еще больший разрыв между частной и социальной нормами прибыли. Причина заключается в том, что, с точки зрения всего общества, выигрыш от научного открытия носит долговременный характер, в то время как, с точки зрения отдельного индивида, вознаграждение за изобретение бывает лишь временным.

Постоянная норма прибыли, определенная в (6.47), подразумевает постоянные темпы прироста потребления[1]:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{L}{\eta} \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} - p - \rho\right]. \tag{6.48}$$

Темпы прироста количества промежуточной продукции N и величины выпуска Y более не совпадают с $\dot{c}/c$. Для расчета новых темпов прироста проанализируем разделение N на монополизированную и конкурентную составляющие.

Пусть N^C – количество конкурентных промежуточных продуктов, тогда $N - N^C$ — количество оставшихся монополизированных продуктов. Количество производимого монополией промежуточного товара X^m рассчитывается по формуле (6.43). Для каждого конкурентного товара цена совпадает с предельными издержками, принятыми

[1] Если в выражении (6.48) $\dot{c}/c < 0$, тогда имеем угловое решение

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{y}}{y} = 0.$$

за 1, и количество произведенной продукции определяется из выражения (6.4):

$$X^c = LA^{1/(1-\alpha)}\alpha^{1/(1-\alpha)} > X^m. \tag{6.49}$$

Из (6.1), (6.43) и (6.49) получаем формулу для расчета конечного выпуска:

$$Y = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN \cdot \left[1 + \frac{N^c}{N} \cdot (\alpha^{-\alpha/(1-\alpha)} - 1)\right]. \tag{6.50}$$

Отсюда следует, что для заданного N величина Y из (6.50) превосходит Y из (6.13), если $N^C > 0$ (так как $0 < \alpha < 1$). Более того, Y увеличивается вместе с ростом N^C/N при фиксированном N. Этот результат показывает статический выигрыш перехода от монополии к конкуренции при производстве существующих промежуточных товаров.

Поскольку каждый монополизированный продукт становится конкурентным с вероятностью p в каждый момент времени, то изменение N^C во времени в случае, если $N - N^C$ велико, приблизительно равно

$$\dot{N}_c \approx p \cdot (N - N_c). \tag{6.51}$$

Последний шаг в построении модели — это бюджетное ограничение экономики в целом, определяющее уровень потребления C:

$$C = Y - \eta\dot{N} - N_c X_c - (N - N_c) \cdot X^m, \tag{6.52}$$

т. е. потребление равно выпуску Y минус расходы на R&D, равные $\eta\dot{N}$, минус производство конкурентных промежуточных продуктов $N^C X^C$ минус производство монополизированных промежуточных продуктов $(N - N^C) \cdot X^m$.

В модели содержатся две фазовые переменные (N и N^C) и динамика перехода к устойчивому состоянию, в котором отношение N^C/N достигает значения $(N^C/N)^*$. В этом отношении модель похожа на двухсекторную модель, рассмотренную в гл. 5, в которой отношение двух типов капитала K/H постепенно устанавливалось на уровне $(K/H)^*$. В данном случае анализ процесса перехода к устойчивому состоянию достаточно громоздкий, поэтому мы сфокусируемся на его характеристиках.

В устойчивом состоянии N, N^C, Y и C растут с темпом прироста, указанным в выражении (6.48), который мы обозначим γ^*. С учетом этого из выражения (6.51) получаем

$$\left(\frac{N^c}{N}\right)^* = \frac{p}{\gamma^* + p}. \tag{6.53}$$

Таким образом, доля конкурентной продукции растет по мере роста p, когда больше товаров становится конкурентными, и падает при увеличении γ^*, когда изобретаются новые (монополизированные) продукты.

Подставив выражение для N^C/N из (6.53) в (6.50), можно определить формулу для выпуска, которая соответствует траектории в устойчивом состоянии:

$$Y^* = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN \cdot \left[1 + \frac{p}{\gamma^* + p} \cdot \left(\alpha^{-\alpha/(1-\alpha)} - 1\right)\right]. \qquad (6.54)$$

(Отметим, что Y^* растет с тем же темпом, что и N.) Если $p = 0$, то и $(N^C/N)^* = 0$ (см. выражение (6.53)), и тогда формула для Y^* будет совпадать с формулой (6.13) для модели чистой монополии. Если $p \to \infty$, т. е. промежуточные товары сразу же становятся конкурентными, а значит $(N^C/N)^* = 1$, то формула для Y^* будет выглядеть, как в модели социального плановика (6.30). Сложность, однако, заключается в том, что если $p \to \infty$, то $\gamma^* = 0$[1]. Другими словами, если бы p всегда было бесконечным, то ничего бы не изобреталось и N было бы равно исходной величине $N(0)$, которая определялась до начала научно-исследовательской деятельности.

В модели чистой монополии мы показали, что социальный оптимум может быть достигнут, если правительство использует паушальный налог для финансирования субсидий на покупку промежуточных товаров по ставке $1 - \alpha$. В данной модели эта субсидия должна быть введена только для покупок монополизированных товаров. Определить, на какую продукцию следует ввести субсидии, в модели довольно легко (так как можно определить, относится товар к полностью монополизированной группе или является полностью конкурентным). В реальности справиться с подобной задачей будет довольно затруднительно.

В любом случае предоставление субсидии по ставке $1 - \alpha$ не приведет к социальному равновесию, поскольку существование параметра p обусловливает наличие разрыва между социальной (выражение (6.31)) и частной нормами прибыли (выражение (6.47), в котором вместо $\alpha^{2/(1-\alpha)}$ следует поставить $\alpha^{1/(1-\alpha)}$). Для достижения социального равновесия правительство должно субсидировать научную деятельность, чтобы поднять частную норму прибыли по исследованиям и разработкам на величину p. Другими словами, необходимо использовать

---

[1] При больших значениях p видно, что в выражении (6.47) $r < 0$, а в (6.48) $\dot{c}/c < 0$. Равновесным является угловое решение, когда изобретатели не тратят ничего на исследования и разработки (так как они не могут потратить отрицательное количество), а N остается постоянным и $\gamma^* = 0$.

две политики — первую, направленную на стимулирование производства монополизированной продукции, и вторую, направленную на стимулирование исследований и разработок.

Правительство может прямо воздействовать на параметр p, если будет ограничивать монопольную власть при помощи, например, усиления антитрастовой политики или ограничения патентной защиты. Увеличение показателя p объясняется нахождением компромисса при определении оптимальной патентной защиты, компромисса между статической выгодой от повышения конкуренции и динамическими потерями из-за слишком низкого темпа возникновения новой продукции (Reinganum, 1989)[1]. Сложностью в данном анализе является и проблема межвременного согласования: правительство стремится ограничить существующую монопольную власть, чтобы все N товаров стали доступны на конкурентном рынке, но затем обещает защиту прав собственности на последующие изобретения. Подобные обещания не вызывают доверия. Чтобы решить данную проблему, необходимо предположить что правительство поручает самому себе удерживать p на одном уровне для уже существующих товаров, но может менять вероятность для только что изобретенных товаров.

6.3. Модель технологических изменений Ромера

В работе Ромера (1990) впервые используется принцип разнообразия продуктов при моделировании эндогенного роста. Особенностью его модели является то, что на производство конечной продукции ему требуются η единиц труда, а не конечной продукции[2]. Таким образом, увеличение N (означающее рост выпуска и предельного продукта труда) повышает ставку реальной заработной платы и увеличивает продуктовые затраты на исследования и разработки. С этой точки зрения модель Ромера совпадает с моделью, рассмотренной в разд. 6.1.8, в которой издержки на R&D росли при увеличении N. В модели Ромера, как и предполагалось, если L — константа, то рост в конечном итоге прекратится и в устойчивом состоянии число N будет постоянным. Сле-

[1] В данном случае снижение доли инноваций ведет к общественным потерям. В других случаях, как, например, в модели, изложенной в гл. 7, снижение доли инноваций бывает желательным.

[2] Romer (1990) рассматривал промежуточные продукты как бесконечно существующие товары длительного пользования, а не как товары краткосрочного пользова-

довательно, и выпуск на душу населения Y/L в долгосрочном периоде также постоянен.

В модели Ромера (1990) обеспечивается эндогенный рост благодаря другой важной особенности. Ромер предположил, что затраты на изобретение нового продукта сокращаются по мере роста количества идей, воплощаемых в N продуктах[1]. Пусть λ — это доля труда, затрачиваемого на производство конечной продукции, тогда $1 - \lambda$ труда идет на исследования и разработки. Предпосылка Ромера заключается в том, что изменение количества N зависит от количества затраченного на исследовательскую деятельность труда $(1 - \lambda) \cdot L$, разделенного на η/N:

$$\frac{\dot{N}}{N} = (1 - \lambda) \cdot \frac{L}{\eta}. \tag{6.55}$$

Jones (1995, 1999) критиковал подобный подход, согласно которому существует положительное соотношение между темпом технологических изменений $\dot{N}/N$ и абсолютным количеством труда, затрачиваемого на исследовательскую деятельность, $(1 - \lambda) \cdot L$. Jones отмечает, что реальные данные по США и другим развитым странам не подтверждают выводы модели, так как число исследователей и инженеров, занимающихся R&D, со времен значительно увеличилось, в то время как темп прироста продуктивности столь сильно не возрос. Например, в США количество ученых и инженеров возросло с 544 000 человек в 1970 г. до 960 000 в 1991 г. Еще больший рост наблюдался в странах Организации экономического сотрудничества и развития: в Японии эта цифра увеличилась с 172 000 в 1970 г. до 511 000 в 1992 г., в Германии — с 82 000 в 1970 г. до 176 000 в 1989 г., во Франции — с 58 000 в 1970 г. до 129 000 в 1991 г., в Великобритании — с 77 000 в 1972 г. до 123 000 в 1992 г.[2]. Мы уже отмечали, что подобные критические замечания не относятся к моделям с постоянным соотношением между ростом производительности и долей ВВП, приходящейся на исследования и разработки.

Однако несмотря на справедливую критику, высказываемую в работах Jones, продолжим рассмотрение модели инноваций Ромера, начатое выражением (6.55). Необходимо отметить, что затраты на изобретение новой продукции пропорциональны w/N. Поскольку заработная плата w пропорциональна N (см. (6.5) и (6.13)), то в конечном итоге

---

[1] В работе Grossman and Helpman (1990, гл. 3) выдвигается аналогичное предположение.

[2] Данные получены на электронной странице Национального научного фонда www.nsf.gov [Электронный ресурс].

затраты на изобретение нового продукта, выраженные в единицах конечной продукции, не будут изменяться во времени. Следовательно, это соответствует темпам прироста N и Y/L в устойчивом состоянии.

Хотя темп прироста в равновесии и постоянен, определение этого темпа в децентрализованной экономике будет содержать и новый вид экстерналий: решение индивида заниматься деятельностью в сфере R&D и, следовательно, увеличивать N снижает количество труда, необходимого для дальнейших изобретений. Таким образом, текущие исследования характеризуются положительным внешним воздействием на продуктивность дальнейших исследований. Неспособность поощрить исследователей за эти положительные внешние эффекты в децентрализованной экономики является еще одним фактором, приводящим к неоптимальности в модели. Следовательно, политический деятель, который хочет сделать децентрализованную экономику оптимальной по Парето, наряду с монопольным ценообразованием на промежуточную продукцию должен обратить внимание на данный вид экстерналий.

Условие свободного входа на рынок в модели Ромера преобразуется в

$$r = \alpha\lambda\,\frac{L}{\eta}\,. \tag{6.56}$$

Отсюда из выражения (6.55) и условия первого порядка $\dot{c}/c = (1/\theta)\cdot(r-\rho)$ следует

$$(1-\lambda)\cdot\frac{L}{\eta} = \frac{1}{\theta}\cdot\left(\alpha\lambda\,\frac{L}{\eta} - \rho\right). \tag{6.57}$$

Мы можем использовать данное условие для нахождения параметра λ, а следовательно, параметров r и γ, последний из которых отвечает за темп прироста N:

$$\lambda = \frac{\theta L + \eta\rho}{L\cdot(\theta+\alpha)}, \quad r = \frac{\alpha\cdot(\theta L + \eta\rho)}{\eta\cdot(\theta+\alpha)}, \quad \gamma = \frac{\alpha L - \eta\rho}{\eta\cdot(\theta+\alpha)}. \tag{6.58}$$

Формула темпа прироста γ во многом похожа на формулу (6.24) для децентрализованной экономики, в которой издержки на R&D измеряются в единицах продукции, а не труда. Сходство заключается, во-первых, в том, что γ будет тем выше, чем больше склонность домашних хозяйств к сбережению (ниже параметры ρ и θ); во-вторых, в том что γ будет тем выше, чем ниже η, параметр, характеризующий издержки на R&D; и, в-третьих, в эффекте масштаба — γ тем выше, чем больше L.

Отличием же является то, что в (6.58) параметр γ не зависит от производительности A, которая входит в производственную функцию (6.1).

Такой результат является следствием предпосылки о том, что сектор научных исследований не использует промежуточную продукцию в качестве ресурсов. Если все же промежуточная продукция используется в качестве производственных ресурсов и в научных исследованиях (пусть даже и с меньшей интенсивностью, чем при производстве конечной продукции), то увеличение A приведет и к росту γ.

Для объяснения неоптимальности в модели Ромера решим задачу социального плановика. Социальный плановик максимизирует функцию полезности репрезентативного домашнего хозяйства при заданных ограничениях

$$Y = A \cdot (\lambda L)^{1-\alpha} N^{1-\alpha} X^{\alpha} = C + X;$$
$$\frac{\dot{N}}{N} = (1-\lambda) \cdot \frac{L}{\eta}.$$

Управляющие переменные — это C, X и λ, фазовая переменная — N. Воспользовавшись традиционными условиями оптимизации, получаем:

$$\begin{aligned} \gamma(\text{Социальное управление}) &= \frac{1}{\theta} \cdot \frac{L}{\eta} - \rho; \\ \lambda(\text{Социальное управление}) &= \frac{1}{\theta} \cdot \frac{L - \rho\eta}{L}. \end{aligned} \tag{6.59}$$

Выражение для γ из формулы (6.59) соответствует социальной норме доходности по L/η.

Темп прироста в модели социального плановика из (6.59) превосходит темп прироста в случае децентрализованной экономики (6.58). Разрыв между темпами прироста отражает разницу между затратами труда $(1-\lambda) \cdot L$, которые социальный плановик направляет на исследования, и трудом, затрачиваемым на исследования в частной экономике. Неоптимальное распределение труда между производством и исследованиями является следствием двух искажающих сил на рынке: монопольного ценообразования и внешних эффектов исследовательской деятельности. Чтобы определить природу этих искажений, необходимо проанализировать такую политику правительства, при которой решение в децентрализованной экономике будет совпадать с Парето-оптимальным решением в модели социального плановика.

Политик может нейтрализовать прямые эффекты монопольного ценообразования, воспользовавшись паушальным налогом по ставке $1-\alpha$ для субсидирования покупок промежуточной продукции. Эта субсидия обеспечивает норму прибыли и темп прироста выше, чем в (6.58).

Однако из-за наличия экстерналий темп прироста все равно останется меньше, чем в модели социального плановика.

Избавиться от остающегося несоответствия можно с помощью другой субсидии, которая пойдет непосредственно на исследования. Необходимый размер субсидии на исследования и разработки составит $(1/\theta) \cdot [1 - (\rho\eta/L)]$. Эта субсидия стимулирует исследовательскую деятельность так, что темп прироста в децентрализованной экономике будет совпадать с темпом прироста в экономике социального плановика из (6.59). Следовательно, частная норма прибыли станет $r = L/\eta$. Это соотношение неявным образом использовалось в модели социального плановика для определения γ.

Предоставление субсидии на исследования из-за наличия внешних эффектов аналогично субсидированию приобретения средств производства и продукции в модели с положительными производственными экстерналиями, изложенной в гл. 4. Успешная политика в области предоставления субсидий сопряжена со множеством трудностей, так как правительство само определяет области исследований, внутри которых имеются значительные положительные экстерналии. Предполагается, что затраченные средства из государственного бюджета в свою очередь не приведут к тому, что негативные последствия субсидирования перевесят выгоды от включения в рассмотрение экстерналий. В следующей главе речь пойдет еще об одном недостатке субсидирования исследований: частная выгода от инновационной деятельности может быть слишком высокой, так как будет включать в себя переход рентного дохода от текущего монополиста к изобретателю. Подобный эффект также возникает, когда конкурирующие исследователи соревнуются в скорости изобретения нового продукта или нового процесса создания продукции (Reingaum, 1989).

6.4. Основные выводы

В данной главе мы построили модель технологического прогресса, который заключался в увеличении числа используемых производителями видов промежуточных продуктов. Желая получить монопольную прибыль, исследователи тратят ресурсы на изобретение новых продуктов. Мы рассматривали экономику, в которой производство характеризуется постоянной отдачей от количества видов продукции и в которой на каждое изобретение затрачивается одинаковое количество конечного продукта. В такой экономике возможен эндогенный рост. Темп прироста зависит от особенностей системы предпочтений в данной стране и уровня технологий; сюда относятся такие характеристики, как склонность к сбережению, вид производственной функции, издержки на R&D, а также масштаб экономики (оцененный как количество заданного фактора, такого как труд или человеческий капитал). Анализ других моделей технологического прогресса приводит к тем же результатам относительно темпов прироста, однако в этих моделях не уделяется должного внимания эффектам масштаба.

В целом, итоговый темп прироста, как и количество используемых в производстве промежуточных продуктов, не является оптимальным по Парето. Мы исследовали возможности улучшения результатов за счет различных налоговых схем и субсидий. Однако, хотя подобные возможности и существуют в модели, использование таких мер на практике сопряжено с огромными трудностями.

Равновесный темп прироста в рассмотренной нами модели соответствует экзогенному темпу технологических изменений x в моделях Солоу–Свэна и Рамсея, изложенных в гл. 1 и 2. Таким образом, проведенный в главе анализ позволяет включить параметр x в число эндогенных переменных и восполнить пробел в экономической теории. С помощью данной модели можно, например, обосновать, почему, когда скорость распространения идей из одной страны в другую достаточно велика, технологии со временем будут развиваться во всех странах. Этот вывод равносилен тому, что в долгосрочном периоде темп прироста мирового реального ВВП на душу населения будет положительным.

6.5. Задачи

6.1. Динамика перехода к устойчивому состоянию в модели разнообразия продуктов. В разд. 6.1 мы показали, что в модели существует равновесие, в котором N, Y и C растут с одинаковыми темпами, а норма прибыли r постоянна.

a. Покажите, что не существует другого равновесия, т. е. что в модели нет динамики. (Подсказка: рассмотрите подобную ситуацию в гл. 4.)

b. Пусть темп прироста, задаваемый выражением (6.24), отрицательный. Каково будет равновесие в данном случае? Какие ограничения на основные параметры привели к данной ситуации?

6.2. Альтернативная производственная функция в модели разнообразия продуктов. Пусть вместо выражения (6.1) выпуск описывается следующей функцией:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} (X_{ij})^{\sigma}\right]^{\alpha/\sigma},$$

где $0 < \sigma < 1$. Параметр σ (вместо α) теперь определяет эластичность спроса на каждый тип промежуточного продукта.

a. Какова цена монополизированных промежуточных продуктов и каково количество каждого отдельного продукта X_j?

b. Каково условие свободного входа на рынок R&D? Как определить норму прибыли?

c. Определите темп прироста N, X_j и выпуска Y в устойчивом состоянии.

6.3. Влияние политики государства в модели растущего разнообразия продуктов. Рассмотрите первую модель разнообразия продуктов, для которой равновесный темп прироста задается формулой (6.24).

a. Покажите, что правительство может обеспечить первое наилучшее равновесное решение, если будет использовать паушальный налог для финансирования соответствующей субсидии на промежуточные товары. Какова необходимая доля субсидий? Почему в более широких моделях будет сложнее осуществить эту политику?

b. Может ли правительство обеспечить первое наилучшее решение, если будет полагаться на субсидирование только исследований (финансируемых также за счет паушального налога)? Поясните ответ. Какие изменения в модели заставят правительство субсидировать исследования?

6.4. Промежуточные затраты как товары длительного пользования (на основе модели Barro and Sala-i-Martin, 1992). Предположим, что затрачиваемые промежуточные продукты X_{ij} — бесконечно существующие товары длительного пользования. Новые товары могут быть получены из единицы конечного выпуска. Изобретатель промежуточной продукции j-го типа взимает ренту в размере R_j, при этом конкурирующие производители конечной продукции воспринимают R_j как заданную.

a. Определите величину R_j.

b. Определите количество каждого промежуточного продукта X_j в устойчивом состоянии.

c. Каков темп прироста экономики в устойчивом состоянии? Насколько ответ на этот вопрос отличается от рассмотренного случая, когда промежуточные продукты были товарами недлительного пользования?

d. Если промежуточные продукты являются товарами длительного пользования, то какие динамические эффекты возникают при переходе к устойчивому состоянию?

6.5. Продолжительность монопольной власти. Рассмотрите модель, изложенную в разд. 6.2, в которой монопольные промежуточные товары переходят на конкурентный рынок с вероятностью p в каждый момент времени.

a. Каким образом различие в значениях вероятности p влияет на устойчивое состояние в модели?

b. Какая политика государства приведет к результатам «первого наилучшего» в этой модели? Возможно ли, в частности, достигнуть первого наилучшего результата, только лишь субсидируя покупки монополизированных промежуточных продуктов?

c. Если правительство сможет влиять на p с помощью различных инструментов (антитрастовые законы и патентная защита), то какие выводы мы можем сделать о желательных мерах, исходя из модели?

6.6. Эффект масштаба.

a. Покажите, почему в модели разнообразия продуктов из разд. 6.1 наблюдается эффект масштаба, заключающийся в том, что темп прироста увеличивается вместе с совокупным количеством труда L? Насколько корректно на практике отождествлять L с численностью населения в стране?

b. Что изменится в модели, если население L будет увеличиваться с постоянным темпом?

c. Каким образом следует изменить модель, чтобы эффекты масштаба не возникали?

7 Технологические изменения: модель ступеней качества Шумпетера

В предыдущей главе технологический прогресс рассматривался как увеличение числа видов продукции N. В данной главе мы попытаемся учесть изменение качества и производительности каждого вида продукции. Данный подход к эндогенному росту известен как подход Шумпетера. Увеличение числа N означает появление инноваций, которые позволяют производить совершенно новые продукты и применять совершенно новые способы производства. Улучшение качества существующих товаров, напротив, означает постепенное совершенствование и развитие уже известных способов производства. Таким образом, анализ в данной главе дополняет рассуждения гл. 6.

На рис. 7.1 представлен график, отражающий структуру модели. Пусть на рынке имеется N видов промежуточной продукции. Каждому продукту присваивается номер от 1 до N, согласно которому эти продукты расставляются вдоль горизонтальной оси. В гл. 6 N могло расти во времени, но сейчас мы считаем N фиксированным. Наилучшее на данный момент качество каждого товара отмечено на вертикальной оси. Далее мы дадим более точное определение указанных на оси ступенек качества. Так как качественные изменения происходят различными темпами (и случайным образом), то, как видно из рисунка, достигнутые уровни качества не равны.

Для анализа базовых инноваций в гл. 6 мы предполагаем, что выпуск новых видов продукции не влияет на производство уже известных видов. (Вслед за Spence, 1997, и Dixit-Stiglitz, 1977, мы воспользовались функциональной формой, в которой промежуточные продукты рассмат-

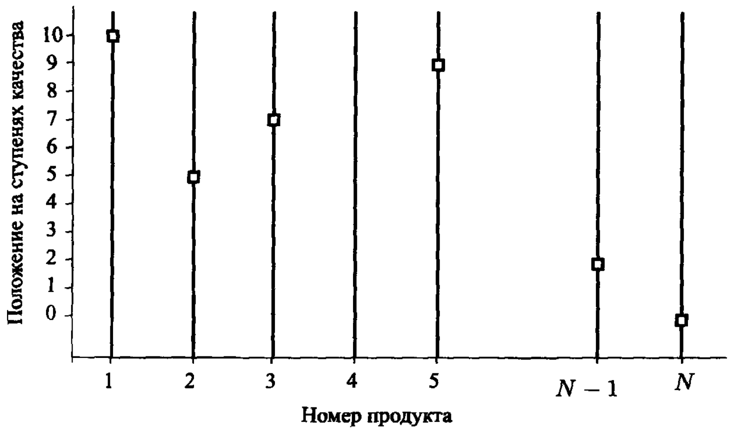


Рис. 7.1. Ступени качества и продуктовое разнообразие. По горизонтальной оси откладывается порядковый номер вида продукции, по вертикальной оси — уровень качества, достигнутый в каждом секторе производства промежуточной продукции

риваются как аддитивно сепарабельные.) Таким образом, изобретение нового продукта не превращало существующие продукты в устаревшие.

Важной особенностью модели Шумпетера является то, что по мере улучшения качества продукции и технологии ее производства более новые продукты и технологии замещают старые. Рассмотрим модель, в которой товары одного типа с различными оценками качества являются близкими субститутами. Мы делаем крайнее предположение, согласно которому промежуточные товары одного и того же типа, но различного качества являются совершенными субститутами; т. е. создание продукта с более высокой оценкой качества приведет к полному вытеснению более старой версии продукта. Поэтому исследователи, добившиеся успеха в улучшении качества какой-либо продукции, лишают монопольной ренты существующего производителя данной продукции. Этот процесс получил название «созидательное разрушение», данное в работах Schumpeter (1934) и Aghion and Howitt (1992). С нормативной точки зрения, результатом такого «созидательного разрушения» является «захват бизнеса». Этот эффект вынуждает фирмы проводить исследований больше, чем необходимо с социальной точки зрения. Следовательно, темп прироста в децентрализованной экономике может быть весьма высоким.

7.1. Краткий обзор модели

В начале нашего исследования, перед тем как непосредственно перейти к формальному анализу, рассмотрим базовую модель, в которой предполагаются качественные улучшения продукции. Пусть в экономике представлено три сектора: производители конечного выпуска, фирмы, занимающиеся исследованиями и разработками (R&D), и потребители. Производители конечной продукции предъявляют спрос на производимую исследовательскими фирмами промежуточную продукцию. Как и ранее, в производстве конечного выпуска используются N видов промежуточных продуктов, только теперь N — константа. Каждый промежуточный продукт характеризуется определенным положением на лестнице качества, при подъеме по ступеням которой происходит улучшение продукта. В каждый момент времени мы обладаем технологией, позволяющей производить несколько различных по качеству видов каждого промежуточного продукта. Однако мы будем рассматривать то равновесие, в котором в каждом секторе производятся товары только наилучшего качества, и именно они используются для производства конечной продукции.

Исследователи затрачивают ресурсы для улучшения качества существующих промежуточных продуктов. Успешный исследователь получает эксклюзивные права на улучшенный промежуточный продукт и может продавать его по монопольной цене производителям конечной продукции. Исследователь, обладающей монополией на использование последней технологии, будет получать прибыль. Для начала предположим, что каждый раз улучшения производятся новым исследователем, т. е. предшественник перестает получать прибыль. Следовательно, принимая решение о том, сколько ресурсов тратить на исследования, предприниматели оценивают размер поступающей прибыли и длительность ее получения. Длительность получения прибыли — величина случайная, так как зависит от неопределенных результатов исследовательской деятельности конкурентов.

Временный характер монопольной власти изобретателя позволяет сделать два вывода, которые отличают данную модель от модели пожизненной монополии из гл. 6. Первое отличие заключается в том, что чем короче ожидаемая продолжительность монопольной власти, тем меньше ожидаемая выгода от R&D; это не соответствует тому, что, с точки зрения общества, успехи в целом являются долгосрочными. (Подобная ситуация описывается в гл. 6 в модели, когда промежуточные продукты со временем становятся конкурентными.) Второе отличие это то, что вознаграждение за успешные исследования частично является причиной «созидательного разрушения» и приводит к «захвату бизнеса», поскольку прибыль нынешнего производителя переходит к новому. Так как это перераспределение не имеет социальной стоимости, то у фирм будет очень сильный стимул заниматься R&D. В данной главе мы покажем, что эффект, указанный во втором отличии, больше эффекта, указанного в первом. По сути, эти эффекты практически одинаковы, разница заключается лишь в том, что второй эффект наступает раньше по времени и поэтому его дисконтированная оценка будет выше. Следовательно, в результате частная норма прибыли от R&D будет превышать социальную норму прибыли.

Далее мы рассмотрим ситуацию, в которой лидер отрасли имеет право первого хода, а также преимущество по R&D издержкам. В этом случае лидер, скорее всего, будет проводить все исследования в отрасли. Однако, если преимущество по издержкам будет невелико, вероятность исследовательского успеха так же, как и в исходной модели, будет зависеть от возможностей входа в отрасль. Если преимущество по издержкам более значимо, то отраслевой лидер может не обращать внимания на фирмы-аутсайдеры и вести себя как исследователь-монополист.

7.2. Построение модели

7.2.1. Производители конечной продукции: производственная технология и уровень качества

Преобразуем производственную функцию i-й фирмы из выражения (6.1) в

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N} (\tilde{X}_{ij})^{\alpha}, \tag{7.1}$$

где, как и ранее, L_i — затраты труда и $0 < \alpha < 1$. Новым фактором является $\tilde{X}_{ij}$ — скорректированное по качеству количество используемого промежуточного продукта j.

Расставим промежуточные продукты на ступени продуктовой лестницы в соответствии с вероятными оценками качества. Расстояние между ступенями определяется величиной, пропорциональной q, где $q > 1$[1]. Все величины пронормированы таким образом, что появившийся на рынке товар соответствует качеству, равному 1. Последующим

[1] Данная модель следует логике моделей, представленных в работах Aghion and Howitt (1992) и Grossman and Helpman (1994, гл. 4).

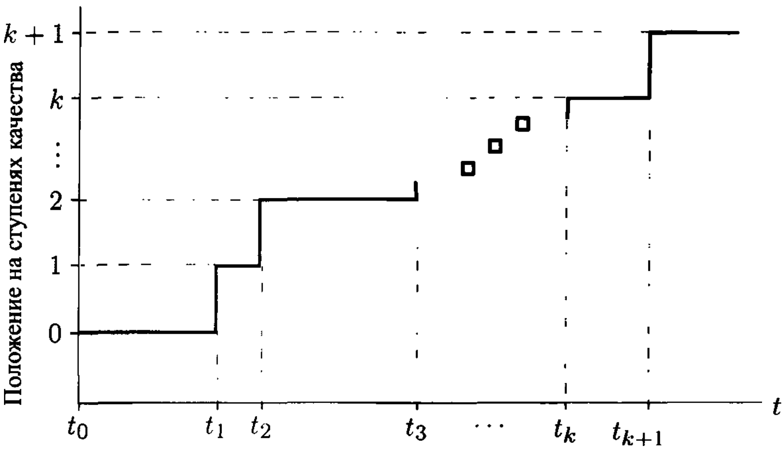


Рис. 7.2. Ступени качества в отдельном секторе. Со временем положение товара на ступенях качества в j-м секторе либо остается без изменений, либо переходит на следующую ступень. Период между качественными скачками является стохастическим, поскольку зависит от неопределенных результатов в исследованиях

улучшениям качества соответствуют оценки q, q^2 и т. д. Следовательно, если в секторе j происходит κ_j-е улучшение качества, то доступные качества продукции — это совокупность $1, q, q^2, \ldots, (q)^{\kappa_j}$. Улучшение качества товаров в секторе (т. е. рост κ_j) является результатом эффективного приложения исследовательских усилий, речь о которых пойдет чуть позже. Эти улучшения должны происходить последовательно, при этом за каждый период времени возможно подняться лишь на одну ступень вверх.

На рис. 7.2 показана возможная траектория развития наилучшего по качеству товара в секторе j. Наилучшее качество равно 1 в момент времени t_0, оно поднимается до q (первой ступени) в момент t_1, затем до q^2 (второй ступени) в момент t_2, до q^k (k-й ступени) в момент t_k и т. д. Следовательно, $t_{k+1} - t_k$ — это интервал, в котором наилучшее качество представлено оценкой q^k. На рисунке видно, что эти интервалы — промежутки различной длины для каждого k. Эта длина случайна и зависит от успехов исследователей в создании новых идей.

Промежуточный продукт является товаром недлительного пользования и характеризуется единичными предельными издержками (в единицах выпуска Y). То есть затраты на производство одинаковы для всех уровней качества q^k, где $k = 0, \ldots, \kappa_j$. Таким образом, в рассматриваемом секторе изобретатель последней модификации имеет преимущество по производительности над предыдущими новаторами, но эти же преимущества сходят на нет и превращаются в недостатки при сравнении с последующими изобретателями. Исследователь, благодаря которому произошло качественное улучшение в отрасли, получает монопольные права на производство j-го промежуточного продукта этого качества. В частности, если ступени качества $k = 0, \ldots, \kappa_j$ достигнуты, то k-й производитель будет единственным, кто производит товары качества q^k[1].

Предполагается, что среди всех доступных в секторе товаров на самом деле производятся и используются[2] только товары наилучшего качества. Следовательно, в j-м секторе качество промежуточной продукции будет q^{κ_j}. Так как X_{ij} — это физическое количество промежуточной продукции, привлеченной в производство i-й фирмой, то с учетом поправки на качество количество затраченных товаров равно

$$\tilde{X}_{ij} = q^{\kappa_j} X_{ij}. \tag{7.2}$$

Следовательно, производственная функция из (7.1) станет равной

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(q^{\kappa_j} X_{ij}\right)^{\alpha}. \tag{7.3}$$

В гл. 6 качественные улучшения не рассматривались и для каждого сектора было справедливо $\kappa_j = 0$. Поэтому технологические преимущества возникли в (7.3) только благодаря увеличению N. Теперь, поскольку N фиксировано, предположим, что все существующие виды промежуточной продукции были открыты в (отдаленном) прошлом. Пусть κ_j изменяется со временем в каждом секторе в результате усилий исследователей, направленных на качественные улучшения.

Из выражения (7.3) следует, что предельный продукт промежуточного товара j равен

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_{ij}} = A\alpha L_i^{1-\alpha} q^{\alpha\kappa_j} X_{ij}^{\alpha-1}. \tag{7.4}$$

---

[1] Поскольку в данной модели не рассматривается первоначальное открытие товара, мы можем предположить, что товары качества 1 (нулевая ступень качества) могут быть произведены любым агентом. Обращение к товарам более низкого качества не заслуживает внимания, если в каждом из секторов уже произошло потенциальное улучшение качества.

[2] Это предположение определяет условие $\alpha q \geqslant 1$. По своей сути результаты будут совпадать с результатами модели при $\alpha q < 1$, когда мы рассматривали равновесие при сдерживающем ценообразовании, а не монопольном. Подробности см. в приложении (разд. 7.6).

Каждая фирма максимизирует прибыль

$$Y_i = w \cdot L_i - \sum_{j=1}^{N} P_j X_{ij}, \tag{7.5}$$

где P_j — цена товара j. Условие первого порядка означает равенство цены и предельного продукта, т. е.

$$A\alpha L_i^{1-\alpha} q^{\alpha\kappa_j} X_{ij}^{\alpha-1} = P_j.$$

Перегруппировав это выражение и просуммировав по всем фирмам i, получаем функцию агрегированного спроса на товар j:

$$X_j = L \cdot \left(\frac{A\alpha q^{\alpha\kappa_j}}{P_j}\right)^{1/(1-\alpha)}. \tag{7.6}$$

Эта функция спроса соответствует функции спроса из гл. 6, если $\kappa_j = 0$ (см. выражение (6.4)). В частности, эластичность спроса по-прежнему константа, равная $-1/(1-\alpha)$. Как и в гл. 6, мы предполагаем, что совокупная рабочая сила L постоянна.

7.2.2. Исследовательский сектор

Фирмы сектора R&D, как и фирмы, рассматриваемые в гл. 6, принимают решение в два этапа. Сначала они определяют, заниматься ли исследованием, и если да, то сколько в него инвестировать. На второй стадии успешные исследователи определяют цену, по которой продают изобретенные товары производителям конечной продукции. Мы вновь начинаем разбор модели с конца: т. е. начнем с определения оптимальной цены для уже изобретенного товара. Потом обсудим первую стадию.

Стадия 2. Ценообразование, прибыль и производство уже известного товара. Инновации в секторе означают улучшение качества, обозначенного через q. В j-м секторе κ_j-й новатор поднимает качество с $q^{\kappa_j - 1}$ до q^{κ_j}. Новатор получит монопольную прибыль в размере

$$\pi(\kappa_j) = (P_j - 1) \cdot X_j, \tag{7.7}$$

где X_j определяется из (7.6), а предельные издержки производства равны 1. Фирмы выбирают тот уровень прибыли, который позволяет максимизировать текущую дисконтированную стоимость всей будущей прибыли. Поскольку динамические ограничения отсутствуют, то эта задача эквивалентна максимизации прибыли в каждом периоде. Оптимальная цена P_j определяется исходя из той же надбавки, что и в (6.7):

$$P_j = \frac{1}{\alpha}. \tag{7.8}$$

Следовательно, монопольная цена вновь постоянна во времени и одинакова для секторов. [1].

Совокупное количество произведенного промежуточного продукта j может быть определено из (7.6) и (7.8) как

$$X_j = LA^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)} \cdot q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}. \tag{7.9}$$

Так как в модели из гл. 6 $\kappa_j = 0$, это количество не менялось ни во времени, ни при переходе от одного сектора к другому (см. выражение (6.8)). Рост κ_j во времени в каждом секторе и расхождение в уровне κ_j для секторов приведут к тому, что X_j будет меняться как во времени, так и по секторам.

Поскольку новатор будет назначать цену в соответствии с (7.8) и продавать количество промежуточной продукции, указанное в (7.9), то, подставив эти величины в (7.7), получаем, что поток прибыли составит

$$\pi(\kappa_j) = \bar{\pi} \cdot q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}, \tag{7.10}$$

где

$$\bar{\pi} \equiv A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)}L \tag{7.11}$$

постоянна во времени, пока численность населения L константа. Мы рассматриваем $\bar{\pi}$ как базовый поток прибыли в случае $\kappa_j = 0$. Прибыль $\bar{\pi}$ та же самая, что и в гл. 6 (выражение (6.13)), поскольку в той ситуации уровень качества не изменялся. Для заданного $\bar{\pi}$ функция $\pi(\kappa_j)$ из (7.10) возрастает по κ_j. Таким образом, прибыль, получаемая изобретателями более качественной продукции, будет больше. Более того, так как в равновесии q^{κ_j} возрастает со временем, то и прибыль будет также со временем расти.

Одно ключевое отличие между этой моделью и моделью в гл. 6 заключается в том, что, несмотря на то что монопольное право на изоб-

---

[1]Монопольная цена используется потому, что функция спроса из выражения (7.6) предполагает, что более низкие по качеству промежуточные продукты вида j не составляют конкуренции товару наилучшего качества. См. приложение (разд. 7.6). В работе Aghion, Harris, Howitt and Vickers (2001) рассматривается ситуация, в которой товары различного уровня качества являются несовершенными заменителями друг друга и, следовательно, могут одновременно присутствовать на рынке.

ретение пожизненно, стоимость этого права падает до нуля, когда конкурент изобретает лучший по качеству товар. (Напомним, что предполагается, что новаторы каждый раз различны.) Другими словами, если t_{κ_j} — это момент, когда осуществляется κ_j-е улучшение качества, а t_{κ_j+1} — это момент, когда качественное улучшение производит конкурент, то поток прибыли (7.10) поступает только в период с t_{κ_j} по t_{κ_j+1}. Важно отметить, что t_{κ_j+1} определяется уровнем усилий в R&D, прилагаемых конкурентами и, следовательно, является эндогенным параметром. Промежуток времени, в течение которого κ_j-я инновация является передовой, составляет

$$T(\kappa_j) = t_{\kappa_j+1} - t_{\kappa_j}.$$

Текущая стоимость всей прибыли, которую получит новатор ранга κ_j и которая оценивается в момент времени t_{κ_j}, равна

$$V(\kappa_j) = \int\limits_{t_{\kappa_j}}^{t_{\kappa_j+1}} \pi(\kappa_j) e^{-\bar{r}(v,t_{\kappa_j})\cdot(v-t_{\kappa_j})}\, dv, \qquad (7.12)$$

где, как и ранее,

$$\bar{r}(v, t_{\kappa_j}) \equiv \frac{1}{v - t_{\kappa_j}} \cdot \int\limits_{t_{\kappa_j}}^{t_{\kappa_j+1}} r(w)\, dw$$

обозначает процентную ставку, определяемую как среднее значение ставки в период времени между t_{κ_j} и v. Отметим, что если процентная ставка постоянна, что будет справедливо в равновесии, текущая стоимость составит

$$V(\kappa_j) = \pi(\kappa_j) \cdot \frac{1 - e^{-r\cdot T(\kappa_j)}}{r}. \qquad (7.13)$$

Текущая стоимость, которая отражает вознаграждение за κ_j-ю новацию, характеризуется положительной зависимостью от потока прибыли $\pi(\kappa_j)$ и продолжительности монопольной власти $T(\kappa_j)$. Нам уже известно $\pi(\kappa_j)$, и для определения $V(\kappa_j)$ необходимо вначале определить $T(\kappa_j)$.

Подставив в (7.9) параметр L_i вместо L, мы можем определить количество j-го промежуточного продукта X_{ij}, используемого фирмой i. Воспользуемся выражением (7.3) и сложим выпуск по всем фирмам i, тогда получим выражение для выпуска:

$$Y = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} L \cdot \sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}. \qquad (7.14)$$

Поскольку L и N постоянны, то ключевым фактором роста совокупного выпуска является продвижение по ступенькам качества κ_j в различных секторах.

Определим совокупный индекс качества:

$$Q = \sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}, \tag{7.15}$$

так что

$$Y = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} LQ. \tag{7.16}$$

Индекс Q представляет собой комбинацию κ_j, и увеличение κ_j приведет к росту Q. Отметим также, что при агрегировании выражения (7.9) по секторам общее количество промежуточной продукции, обозначенное через X, пропорционально Q:

$$X = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} LQ. \tag{7.17}$$

Случайность инноваций предполагает, что прогресс будет происходить неравномерно в каждом отдельном секторе; долгое время может не происходить никаких инноваций, но в некоторые моменты производительность резко изменяется, увеличиваясь на какое-то дискретное значение. Предполагается, что отдельные секторы малы и что вероятность успеха в исследовании в одном секторе не зависит от вероятности в другом. По закону больших чисел нестабильность микроэкономических параметров не будет передаваться макроэкономическим параметрам: суммирование по большому количеству секторов N приведет к сглаживанию агрегированного индекса качества Q в (7.15) и, следовательно, к сглаживанию совокупного экономического роста. Таким образом, как и в гл. 6, мы абстрагируемся от общих колебаний, которые изучаются в моделях реального делового цикла. Мы полагаем, что основным фактором изменений является параметр κ_j.

Стадия 1. Инновационная деятельность. Продолжительность получения монопольной прибыли. Обозначим через $p(\kappa_j)$ вероятность успеха в исследовании в секторе j в единицу времени, когда лучшее качество составляет κ_j. Другими словами, $p(\kappa_j)$ — это вероятность того, что в данный момент времени какой-либо исследователь в секторе j улучшит качество с κ_j до $\kappa_j + 1$. Эта вероятность, что будет подробно показано далее, зависит от усилий, прилагаемых исследователями. В каждый момент времени мы считаем $p(\kappa_j)$ величиной заданной, следовательно, вероятность того, что лидер утратил монопольную власть, определяется пуассоновским процессом, по аналогии с моделью в гл. 6, когда монопольная власть новатора была временной.

Текущий размер прибыли лидера $V(\kappa_j)$ из выражения (7.13) является случайной величиной, поскольку заключительный период t_{κ_j+1} наступает с вероятностью $p(\kappa_j)$ в каждую единицу времени. Ожидания относительно $V(\kappa_j)$ представлены следующим образом:

$$E[V(\kappa_j)] = \frac{\pi(\kappa_j)}{r + p(\kappa_j)}. \tag{7.18}$$

Обоснование выражения (7.18) дано в приложении (разд. 7.6.2), но его трактовка интуитивно понятна[1]. Перепишем выражение (7.18) как

$$r = \frac{\pi(\kappa_j) - p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j)]}{E[V(\kappa_j)]},$$

тогда оно означает, что рыночная норма прибыли равна норме прибыли от исследований. Ключевым аспектом здесь является то, что в этом выражении для отдачи от R&D с правой стороны стоят капитальные потери нынешнего лидера $p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j)]$, возникающие из-за возможности появления инновации в секторе j. Выражение (7.18) указывает на то, что вероятность потери монопольной власти $p(\kappa_j)$ вместе с r формируют фактическую ставку дисконта $p(\kappa_j) + r$. Отметим, что увеличение $p(\kappa_j)$ снижает $E[V(\kappa_j)]$. Подставив $\pi(\kappa_j)$ из (7.10) в (7.18) получаем

$$E[V(\kappa_j)] = \bar{\pi}\, \frac{q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}}{r + p(\kappa_j)}, \tag{7.19}$$

где $\bar{\pi}$ определяется из формулы (7.11).

R&D технология. Рассмотрим, каким образом вероятность $p(\kappa_j)$ зависит от усилий, направленных на исследования и разработки, в секторе j. Пусть $Z(\kappa_j)$ — это совокупные ресурсы, потраченные потенциальным новатором в секторе j, когда самое высокое качество описывается переменной κ_j. Предположим, что $p(\kappa_j)$ зависит только от общих затрат на R&D, т. е. $Z(\kappa_j)$, а не от того, как эти расходы распределены между исследователями. Предполагается также, что чем выше затраты $Z(\kappa_j)$, тем выше вероятность успеха $p(\kappa_j)$. Правдоподобным является предположение, в котором предельный эффект от $Z(\kappa_j)$ на $p(\kappa_j)$ убывает по $Z(\kappa_j)$. То есть инвестиции в R&D в любой момент времени характеризуются убывающей отдачей. Однако для упрощения анализа и

[1] Этот результат соответствует выражению (6.18) гл. 6.

сохранения большинства выводов предположим, что вероятность успеха пропорциональна затратам на эти исследования $Z(\kappa_j)$[1].

Вероятность успешной инновации для заданного $Z(\kappa_j)$, по-видимому, зависит от κ_j. Если новаторство становится все более и более затруднительным, то вероятность успеха будет отрицательно зависеть от κ_j. И наоборот, если ранее осуществленные новации делают последующие более легкими, то вероятность успеха будет зависеть от κ_j положительно. В любом случае, предполагается, что вероятность успеха в исследовании представлена выражением

$$p(\kappa_j) = Z(\kappa_j) \cdot \phi(\kappa_j), \tag{7.20}$$

где функция $\phi(\kappa_j)$ отражает влияние текущей технологической позиции κ_j.

В выражении (7.19) указано ожидаемое вознаграждение за κ_j-ю новацию. Отметим, что неопределенность, которая лежит в основе расчета $E[V(\kappa_j)]$, касается также и продолжительности удержания монопольных позиций, т. е. случайности момента следующего $(\kappa_j + 1)$-го изобретения. Мы должны также учитывать дополнительную неопределенность, с которой априори сталкиваются новаторы из-за случайности их собственного успеха в исследованиях.

Усилия, направляемые в R&D: условие свободного входа. В секторе j общие затраты на R&D в единицу времени в размере $Z(\kappa_j)$ приводят к успеху с вероятностью $p(\kappa_j)$, рассчитываемой по (7.20). В случае успеха фирма получает эквивалент патентной стоимости в размере величины, указанной в (7.19). Предполагается, что исследователя интересует только ожидаемая величина, а не случайность такого исхода. Это предположение справедливо и в том случае, если индивидуумы не склонны к риску, поскольку каждый исследовательский проект достаточно мал и характеризуется уникальной неопределенностью[2].

---

[1] Линейность $Z(\kappa_j)$ означает, что предельный вклад R&D усилий в вероятность успеха равен среднему вкладу. То есть исследовательский процесс в модели не рассматривался как накапливаемый ресурс, наподобие пруда для разведения рыбы, когда индивидуальная вероятность успеха убывает по мере роста совокупных инвестиций. В модели нет места для гонки за патентом, в которой (по причине накопления) совокупный уровень исследований оказывается слишком велик с точки зрения общества (обзор этих моделей представлен в работе Reinganum, 1989).

[2] В данном случае необходимо предположить, что исследовательские проекты проводятся различными объединениями, которые достаточно велики по размеру, что позволяет диверсифицировать риск. Однако эти объединения не должны быть и слишком большими, чтобы все несовершенства модели не были нивелированы за счет размера.

Направлять инвестиции в R&D, т. е. будет выгодно $Z(\kappa_j) > 0$, только если ожидаемая доходность за единицу времени $p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)]$ будет больше или равна затратам $Z(\kappa_j)$. Кроме того, если, как мы предполагаем, существует свободный вход на исследовательский рынок, то чистый ожидаемый доход на единицу времени должен быть равен нулю, т. е.

$$p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - Z(\kappa_j) = 0. \tag{7.21}$$

Подставив $p(\kappa_j)$ из (7.20), запишем условие входа:

$$Z(\kappa_j) \cdot \{\phi(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - 1\} = 0. \tag{7.22}$$

Мы рассматриваем сектор с положительными затратами на R&D, $Z(\kappa_j) > 0$, поэтому выражение в фигурных скобках в уравнении (7.22) должно быть равным нулю:

$$\phi(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - 1 = 0. \tag{7.23}$$

Следовательно, подставив $E[V(\kappa_j+1)]$ из (7.19), получаем условие входа на рынок:

$$r + p(\kappa_j + 1) = \phi(\kappa_j) \cdot \bar{\pi} \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}. \tag{7.24}$$

Дальнейший анализ зависит от вида функции $\phi(\kappa_j)$, т. е. от того, каким образом вероятность успеха из выражения (7.20) изменяется в зависимости от занимаемой ступени качества.

Самое простое определение $\phi(\kappa_j)$ — это функция, в которой трудность достижения успеха в точности соотносится с выпуском, который будет произведен на новой ступени качества $\kappa_j + 1$:

$$\phi(\kappa_j) = \frac{1}{\zeta} \cdot q^{-(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}, \tag{7.25}$$

где $\zeta > 0$ — параметр, отражающий R&D издержки. Из выражения (7.25) следует, что R&D издержки растут (а следовательно, вероятность успеха падает) пропорционально ожидаемому уровню выпуска, который пропорционален выражению $q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}$.

Подставив $\phi(\kappa_j)$ из выражения (7.25) в (7.24), получаем

$$r + p(\kappa_j + 1) = \frac{\bar{\pi}}{\zeta}. \tag{7.26}$$

Из выражения (7.26) следует, что вероятность успеха в исследовании за единицу времени одинакова для всех секторов, не зависит от занимаемой ступени качества и задается выражением:

$$p = \frac{\bar{\pi}}{\zeta} - r. \tag{7.27}$$

Если r постоянна во времени, то и p также константа.

Количество ресурсов, направляемых на R&D в секторе j, определяется из выражений (7.20), (7.25) и (7.27):

$$Z(\kappa_j) = q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)} \cdot (\bar{\pi} - r\zeta). \tag{7.28}$$

Следовательно, чем выше качество продукции в секторе (выше значение κ_j), тем больше усилий затрачивается на R&D. Вероятность успеха, однако, одинакова для всех секторов, потому что в выражениях (7.20) и (7.25) предполагается, что $p(\kappa_j)$ зависит от значения $Z(\kappa_j)$, разделенного на $q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}$.

Совокупные расходы Z на R&D определяются из (7.28):

$$Z \equiv \sum_{j=1}^{N} Z(\kappa_j) = q^{\alpha/(1-\alpha)} Q \cdot (\bar{\pi} - r\zeta), \tag{7.29}$$

где Q — это совокупный индекс качества, определенный в (7.15). Таким образом, Z пропорционально Q при заданном r.

Результаты изменятся, если изменить выражение (7.25), сделав другое предположение относительно того, каким образом $\phi(\kappa_j)$ зависит от κ_j. Можно предположить, что вместо падения с ростом κ_j из-за $q^{-(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}$ $\phi(\kappa_j)$ может оказаться менее чувствительным к κ_j. Тогда мы можем предположить, что $\phi(\kappa_j) = 1/\zeta$ является константой. Из условия свободного входа на рынок (7.24) следует, что (для любого сектора, в котором $Z[\kappa_j] > 0$) $p(\kappa_j + 1)$ является возрастающей по κ_j функцией. В этом случае передовые секторы будут характеризоваться более высокими темпами прироста по сравнению с другими. Этот результат, в конечном счете, определяет увеличивающийся темп прироста всей экономики.

В качестве альтернативы мы можем предположить, что $\phi(\kappa_j)$ убывает по κ_j еще быстрее, чем функция $q^{-(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}$. В этом случае условие свободного входа на рынок (7.24) предполагает, что (для любого сектора, в котором $Z[\kappa_j] > 0$) $p(\kappa_j + 1)$ является убывающей по κ_j функцией. Этот результат означает снижающийся темп прироста всей экономики.

В рассматриваемой нами модели функция $\phi(\kappa_j)$ дана в (7.25). Эта спецификация соответствует формулировке модели AK, которую мы рассматривали в гл. 6 и в других разделах. С учетом этой предпосылки ожидаемый темп прироста в каждом секторе будет одинаковым, а темп прироста всей экономики станет постоянным. Далее рассмотрим эту ситуацию подробнее.

7.2.3. Потребители

В заключение обзора модели рассмотрим поведение домашних хозяйств, которые, как и в анализируемых ранее моделях, стремятся «сгладить» потребление в течение всего жизненного периода (см. гл. 2). Ключевая формула — это формула темпа прироста потребления:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho), \tag{7.30}$$

где C — это совокупное потребление. (Равенство выполняется, так как L — константа.)

Из ограничения на ресурсы для экономики страны следует, что совокупный выпуск распределяется между совокупным потреблением (C), общими затратами на промежуточную продукцию (X) и совокупными расходами на R&D (Z), т. е.

$$Y = C + X + Z. \tag{7.31}$$

Из выражений (7.16), (7.17) и (7.29) следует, что Y, X и Z являются линейными по Q. Следовательно, C также линейно по Q. Таким образом, темп прироста всех трех показателей будет совпадать с темпом прироста показателя Q:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{Q}}{Q} = \gamma.$$

Подставим выражение для процентной ставки из (7.27) в формулу темпа прироста потребления (7.30) и получим, что темп прироста равен

$$\gamma = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \cdot (\frac{\bar{\pi}}{\zeta} - p - \rho).$$

Однако это выражение не является окончательным решением в данной модели, поскольку p, вероятность успеха R&D, определяется эндогенно. Чтобы получить итоговое выражения для темпа прироста, необходимо проанализировать поведение индекса качества Q.

7.2.4. Поведение агрегированного индекса качества и эндогенный рост

Вспомним выражение для Q из (7.15):

$$Q \equiv \sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}.$$

Для сектора j выражение $q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}$ не изменяется, если не происходит никаких инноваций, но возрастает до $q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}$ в случае успешного исследования. Вероятность успеха в единицу времени равна значению p, рассчитываемому в выражении (7.27). Так как значение p одинаково для всех секторов, ожидаемое изменение Q за единицу времени составляет

$$\begin{aligned} E(\Delta Q) &= \sum_{j=1}^{N} p\cdot[q^{(\kappa_j+1)\alpha/(1-\alpha)} - q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}] = \\ &= p\cdot[q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]\cdot\sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)} = p\cdot[q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]\cdot Q. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Ожидаемое относительное изменение Q за единицу времени составляет

$$E\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right) = p\cdot[q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]. \tag{7.33}$$

Число секторов N достаточно велико, из закона больших чисел следует, что за конечный промежуток времени средний темп прироста Q будет близок к величине, стоящей в правой части выражения (7.33). Предполагается, что N настолько велико, чтобы считать Q величиной дифференцируемой, а $\dot{Q}/Q$ – величиной нестохастической и равной правой части уравнения (7.33). Подставив p из (7.27), получаем темп прироста Q:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \left(\frac{\bar{\pi}}{\zeta} - r\right)\cdot[q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]. \tag{7.34}$$

Выражение (7.34) показывает, что темп прироста Q является функцией убывающей по процентной ставке r. Пересечение с осью ординат находится в точке

$$\frac{\bar{\pi}}{\zeta}\cdot[q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1],$$

наклон равен $-[q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1]$. Эта функция показана на рис. 7.3. Как уже отмечалось ранее, C и Q растут с одинаковым постоянным темпом прироста γ. Формула для потребления (7.30) указывает еще на одно соотношение между темпом прироста и r. Пересечение двух прямых определяет равновесие, где $\dot{Q}/Q = \dot{C}/C$.

Из выражения (7.11) следует, что поток прибыли $\bar{\pi}$ растет, если растет параметр A в производственной функции или же увеличивается численность населения L. Эти изменения сдвигают линию $\dot{Q}/Q$ параллельно вверх. Таким образом, темп прироста экономики растет.

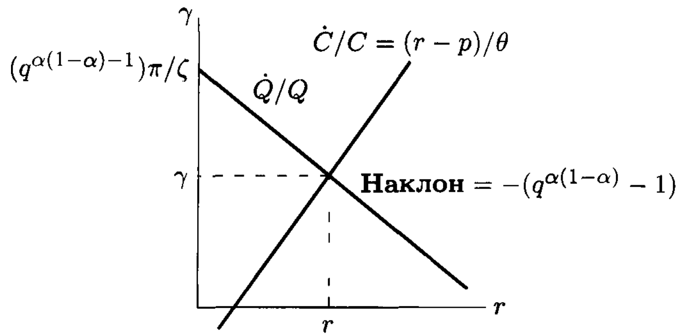


Рис. 7.3. Определение процентной ставки и темпов прироста. Процентная ставка и темп прироста определяются как точка пересечения двух графиков $\dot{Q}/Q$ и $\dot{C}/C$. Выражение (7.34) показывает, что темп прироста Q является функцией, убывающей по процентной ставке r. Пересечение с осью ординат находится в точке $\bar{\pi}/\zeta \cdot [q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1]$, наклон равен $-[q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1]$. Формула для темпа прироста потребления (7.30) указывает на положительное соотношение между темпом прироста и r

Уменьшение величины ζ, отвечающей за расходы на R&D, приведет к тем же результатам. Увеличение q (величины шага между инновациями) будет иметь два последствия: точка пересечения с осью ординат сдвинется вверх, а отрицательный наклон станет еще круче. Однако из (7.34) совершенно ясно, что увеличение q будет увеличивать темп прироста при заданном r до тех пор, пока $(\bar{\pi}/\zeta - r) > 0$, что должно сохраняться в состоянии равновесия в моделях с положительным ростом. Следовательно, чистое воздействие от роста q — это увеличение темпов прироста.

Алгебраически, подставив выражение (7.30) в (7.34), получаем

$$r = \frac{\rho + \theta \cdot [q^{\alpha(1-\alpha)} - 1] \cdot (\bar{\pi}/\zeta)}{1 + \theta \cdot [q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]}; \qquad (7.35)$$

$$\gamma = \frac{[q^{\alpha(1-\alpha)} - 1] \cdot [(\bar{\pi}/\zeta) - \rho]}{1 + \theta \cdot [q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]}, \qquad (7.36)$$

где

$$\bar{\pi} = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} L.$$

Предполагается, что переменные таковы, что γ положительна (т. е. условие свободного входа на рынок (7.26) по-прежнему сохраняется), а также что выполняется $r > \gamma$ (чтобы выполнялось условие трансверсальности)[1]. Из выражения (7.33) следует, что равновесная величина p равна отношению γ из (7.36) к величине $[q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1]$:

$$p = \frac{(\bar{\pi}/\zeta) - \rho}{1 + \theta \cdot [q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]}. \tag{7.37}$$

Результаты аналогичны результатам модели разнообразия гл. 6, где не существовало переходной динамики[2]. Единственная фазовая переменная сейчас — это агрегированный индекс качества Q. Пусть дана первоначальная величина $Q(0)$, тогда переменные Q, Y, X, Z и C растут с постоянным темпом прироста γ, указанным в (7.36). Процентная ставка r является величиной постоянной и рассчитывается по формуле (7.35).

Полученный рост в каждом секторе зависит от случайных результатов исследовательской работы. В частности, относительное соотношение качества продукции различных секторов, а следовательно, относительные затраты на промежуточную продукцию и R&D определяются случайным образом. В любой момент времени наивысшие уровни качества по секторам распределены неравномерно, как показано на рис. 7.2.

Отметим, что, как показано графически, из алгебраических вычислений следует, что темп прироста — это убывающая функция по параметрам полезности (ρ и θ), а также по R&D издержкам ζ. Темп прироста — растущая функция по $\bar{\pi}$ и по q[3].

7.2.5. Эффект масштаба

Темп прироста увеличивается вместе с численностью населения L, так как первоначальный поток прибыли $\bar{\pi}$ растет вместе с L, что следует из (7.11). Похожий эффект масштаба возникал и в гл. 6, где обсуждалось, как избежать этого эффекта, если масштаб всей экономики также влияет на величину затрат в R&D.

---

[1] Из выражений (7.35) и (7.36) следует, что для $r > \gamma$ справедливо

$$\rho > (1 - \theta) \cdot [q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1] \cdot \frac{\bar{\pi}}{\zeta}.$$

Для $\gamma > 0$ из(7.36) справедливо $\rho < \bar{\pi}/\zeta$.

[2] Мы показали здесь и в приложении, что равновесие возможно и при отсутствии переходной динамики. Доказательство отсутствия других равновесий базируется на условии трансверсальности и проведено в соответствии с последовательностью доказательства, изложенного в гл. 4.

[3] Если затраты на исследования определены как возрастающая функция по q, то мы можем, исходя из модели, определить q.

В данной модели ключевое соотношение — это выражение для вероятности успеха (7.20):

$$p(\kappa_j) = Z(\kappa_j) \cdot \phi(\kappa_j).$$

Остановимся на выражении (7.25) для $\phi(\kappa_j)$, в котором трудность достижения научных успехов соотносится с уровнем выпуска, который будет достигнут на следующей $\kappa_j + 1$ ступени качества:

$$\phi(\kappa_j) = \frac{1}{\zeta} \cdot q^{-(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}.$$

Это означает, что сложность достижения успехов будет больше в передовых секторах, где вклад инноваций в конечный выпуск намного больше. Однако в среднем для экономики предполагается, что изменения масштаба не влияют на $\phi(\kappa_j)$, а следовательно, и на $p(\kappa_j)$.

Альтернативное предположение заключается в том, что $\phi(\kappa_j)$ изменяется обратно пропорционально абсолютному уровню выпуска, приходящемуся на промежуточный продукт j, когда новый $\kappa_j + 1$ уровень будет достигнут. Этот уровень выпуска указан в (7.14):

$$Y(\kappa_j + 1) = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}.$$

Таким образом, вместо (7.25) мы можем предположить:

$$\phi(\kappa_j) = \frac{1}{\zeta \cdot Y(\kappa_j + 1)} = \frac{1}{\zeta A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}}, \tag{7.38}$$

где $\zeta > 0$ отражает R&D издержки. Новым по сравнению с (7.25) является обратное соотношение между $\phi(\kappa_j)$ и выражением $A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L$.

Найдем решение модели и получим новое выражение для темпа прироста:

$$\gamma = \frac{[q^{\alpha/(1-\alpha)} - 1] \cdot \{[\alpha \cdot (1-\alpha)/\zeta] - \rho\}}{1 + \theta \cdot [q^{\alpha(1-\alpha)} - 1]}. \tag{7.39}$$

Это выражение не зависит от масштаба, за который отвечает параметр L. Количество L не влияет на рост, потому что вероятность исследовательского успеха $p(\kappa_j)$, как следует из выражений (7.20) и (7.38), зависит от расходов на R&D в секторе j, выраженных относительно размера сектора и измеряемых величиной будущего вклада в выпуск $Y(\kappa_j + 1)$, а поскольку L, в итоге, влияет на $Z(\kappa_j)$ и $Y(\kappa_j + 1)$ в одинаковой пропорции, то вероятность p не зависит от L. Так как темп прироста в выражении (7.33) определяется через p, то итоговая формула для γ (7.39) не включает L. Исходя из этой же логики, γ не зависит от производственной технологии A в выражении (7.1).

Эти результаты схожи с результатами разд. 6.1.7 для случая, когда затраты на изобретение нового продукта растут вместе с отношением выпуска к количеству промежуточных продуктов Y/N. В некоторых научных работах (например, Young (1998), Aghion and Howitt (1998, гл. 12) и Dinopoulus and Thompson (1998)) также исключается эффект масштаба. В этих моделях предполагается, что тем или иным образом увеличение масштаба фактически ослабляет влияние исследовательских затрат $Z(\kappa_j)$ на вероятность успеха $p(\kappa_j)$.

7.3. Инновационная деятельность лидера

7.3.1. Взаимодействие между лидером и аутсайдерами

До сих пор мы предполагали, что усилия в секторе R&D прилагаются исключительно аутсайдерами. Теперь предположим, что и лидер сектора также занимается исследованиями и разработками. Пусть $Z^o(\kappa_j)$ - затраты аутсайдеров на R&D; $Z^\ell(\kappa_j)$ - затраты лидера, так что $Z(\kappa_j) = Z^o(\kappa_j) + Z^\ell(\kappa_j)$. Если и аутсайдеры, и лидер одинаково хороши в проведении R&D (что мы пока предполагаем), вероятности успеха в R&D в единицу времени для аутсайдеров и лидера соответственно равны

$$\begin{aligned} p^o(\kappa_j) &= Z^o(\kappa_j) \cdot \phi(\kappa_j); \\ p^\ell(\kappa_j) &= Z^\ell(\kappa_j) \cdot \phi(\kappa_j). \end{aligned} \tag{7.40}$$

Суммарная вероятность успеха в исследовании составит

$$p(\kappa_j) = p^o(\kappa_j) + p^\ell(\kappa_j).$$

Чистый выигрыш от R&D для аутсайдеров составит

$$p^o(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - Z^o(\kappa_j) = Z^o(\kappa_j) \cdot \{\phi(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - 1\}. \tag{7.41}$$

Чистый выигрыш лидера равен

$$\begin{aligned} &p^\ell(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - Z^\ell(\kappa_j) - p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j)] = \\ &= Z^\ell(\kappa_j) \cdot \{\phi(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - 1\} - Z(\kappa_j) \cdot \phi(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j)]. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Важно отметить, что успех в исследовании, достигнутый либо лидером, либо аутсайдерами, приводит к утрате лидером текущего дохода $EV(\kappa_j)$.

Если аутсайдеры продолжают какие-то исследования, т. е. $Z^o(\kappa_j) > 0$, то условие свободного входа на рынок (7.23) сохраняется. Из этого условия следует, что чистый выигрыш от R&D для аутсайдеров из выражения (7.41) равен нулю. Но это условие означает, что и в правой части формулы (7.42) первый член равен нулю. Следовательно, чистый выигрыш лидера от R&D деятельности отрицателен, если $Z(\kappa_j) > 0$. Однако более важно то, что если лидер рассматривает затраты аутсайдеров в R&D как заданные, то увеличение затрат на R&D лидера $Z^{\ell}(\kappa_j)$ приводит к увеличению общих затрат $Z(\kappa_j)$ и, следовательно, к уменьшению чистого выигрыша лидера. Следовательно, если аутсайдеры предпринимают какой-либо заданный уровень усилий на R&D, наилучшая реакция лидера в этом случае это $Z^{\ell}(\kappa_j) = 0$. Результат указывает на то, что равновесие, полученное раньше (когда лидер не занимается исследованиями), является равновесием Курно–Нэша[1].

Эти результаты предсказывают постоянную смену лидера в отрасли. Лидера меняет аутсайдер, как только происходит улучшение качества. Затем этого нового лидера сменяет другой аутсайдер и т. д. Такой порядок противоречит ситуации в действительности, ведь большинство улучшений качества существующей продукции осуществляется отраслевыми лидерами. Поэтому, чтобы модель больше соответствовала действительности, ее необходимо модифицировать.

В равновесии Курно Нэша лидер рассматривает усилия аутсайдеров $Z^{o}(\kappa_j)$ как заданные, каждый аутсайдер в свою очередь воспринимает как заданные усилия других аутсайдеров и лидера $Z^{\ell}(\kappa_j)$ (которые равны нулю в равновесии). Так как лидер участвует в производстве и может делать различного рода инвестиции, вполне логичным будет отказаться от предпосылки Курно Нэша, согласно которой лидер воспринимает действия аутсайдеров как заданные. Логичнее будет воспользоваться предпосылкой модели Штакельберга, в соответствии с которой лидер делает первый шаг и задает определенный уровень $Z^{\ell}(\kappa_j)$. В этом случае аутсайдеры будут выбирать $Z^{o}(\kappa_j)$ при заданном $Z^{\ell}(\kappa_j)$, но лидер будет выбирать уровень $Z^{\ell}(\kappa_j)$, руководствуясь функцией реакции на $Z^{o}(\kappa_j)$.

Определение $Z^{o}(\kappa_j)$ для заданного $Z^{\ell}(\kappa_j)$ эквивалентно уже проведенному ранее анализу. Условие свободного входа на рынок должно сохраняться (если $Z^{o}(\kappa_j) > 0$), так что чистая прибыль от R&D в выражении (7.41) равна нулю. Более того, итоговая вероятность успешного исхода исследований $p(\kappa_j)$ и соответствующие совокупные затраты $Z(\kappa_j)$ определяются, как и раньше[2]. Таким образом, выбирая $Z^{\ell}(\kappa_j)$ при максимизации чистого выигрыша, указанного в (7.42), лидер

[1] Подробнее см. Aghion and Howitt (1992).

[2] Этот результат является следствием условия первого порядка для определения $Z^{o}(\kappa_j)$, если $p(\kappa_j)$ — это выпуклая, а не линейная функция от $Z(\kappa_j)$.

рассматривает вторую часть выражения как заданную (так как $Z(\kappa_j)$ известно). Условие свободного входа на рынок для аутсайдеров предполагает, что первая часть выражения из правой части (7.42) равна нулю. Таким образом, до тех пор, пока $Z^o(\kappa_j) > 0$, лидера не интересует его выбор относительно $Z^\ell(\kappa_j)$. Следовательно, существует неопределенность относительно того, каким образом количество исследований распределено между лидером и аутсайдерами. Однако относительно высокое значение $Z^\ell(\kappa_j)$ приведет к тому, что $Z^o(\kappa_j)$ упадет до нуля. Вне этой точки чистая прибыль лидера с ростом $Z^\ell(\kappa_j)$ будет падать. Следовательно, лидер никогда не превысит эту критическую отметку $Z^\ell(\kappa_j)$. Отметим, что в данном случае лидер проводит все исследования, но равновесные значения $Z(\kappa_j)$ и $p(\kappa_j)$ определяются так же, как и в предыдущей модели. Таким образом, равновесие определяется исходя из потенциальной возможности аутсайдеров проводить исследования.

Чтобы избавиться от неопределенности в распределении исследований, предположим, что отраслевые лидеры обладают преимуществом по R&D издержкам. Эта модификация кажется вполне разумной, поскольку лидер зачастую обладает лучшей информацией о существующих технологиях или же имеет какие-то другие преимущества, позволяющие снижать затраты на R&D[1]. Более того, если агенты несут различные R&D издержки, тот, чьи издержки минимальны, и станет в итоге лидером в отрасли.

Для более подробного анализа заменим параметр $\phi(\kappa_j)$ в двух вероятностных функциях, указанных в (7.40) соответственно на $\phi^o(\kappa_j)$ и $\phi^\ell(\kappa_j)$, где $\phi^o(\kappa_j) > \phi^\ell(\kappa_j)$. Если аутсайдеры проводят исследования, т. е. $Z^o(\kappa_j) > 0$, то условие свободного входа на рынок получается преобразованием выражения (7.41)[2]:

$$Z^o(\kappa_j) \cdot \{\phi^o(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - 1\} = 0. \tag{7.43}$$

Чистая прибыль лидера, полученная путем преобразования (7.42), равна

$$Z^\ell(\kappa_j) \cdot \{\phi^\ell(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)] - 1\} - p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j)]. \tag{7.44}$$

Поведение аутсайдеров по-прежнему будет влиять на величину $p(\kappa_j)$ из правой части выражения. Однако в условии свободного входа на рынок (7.43), как и в условии $\phi^o(\kappa_j) < \phi^\ell(\kappa_j)$, предполагается, что множитель,

[1] Текущие технологические лидеры (компании или страны) практически не имеют преимущества по издержкам при изобретении совершенно новых продуктов, что показано в гл. 6. Подробнее см. Brezis, Krugman and Tsiddon (1993).

[2] Предполагается, что аутсайдер, добившийся успеха в исследовании, занимает место лидера. Отсюда $E[V(\kappa_{j+1})]$ одинакова для всех.

стоящий после $Z^\ell(\kappa_j)$, положителен, а не равен нулю. Поэтому лидер будет повышать $Z^\ell(\kappa_j)$ до тех пор, пока аутсайдеры не будут вытеснены из исследовательского бизнеса, т. е. пока лидер будет проводить все исследования[1)].

Предположим, что лидер выбирает такой уровень $Z^\ell(\kappa_j)$, который будет настолько высок, что аутсайдеры откажутся от исследовательской деятельности. В этой точке дальнейший рост $Z^\ell(\kappa_j)$ приведет к повышению $Z(\kappa_j)$ в соотношении один к одному, а отсюда и к росту $p(\kappa_j)$ в правой части выражения (7.44). Если же преимущество лидера по издержкам незначительно, то его чистый выигрыш будет отрицателен. Следовательно, у лидера не будет стимула выбирать более высокий уровень $Z^\ell(\kappa_j)$. Поэтому, хотя все исследования в отрасли и проводятся ее лидером, вероятность успешного исследования $p(\kappa_j)$ по-прежнему зависит от потенциала конкурентов.

Если преимущество по издержкам лидера достаточно велико, то он будет стремиться увеличить $Z^\ell(\kappa_j)$ выше того значения, при котором аутсайдеры перестают заниматься исследованиями. В этом случае лидер ведет себя как монополист в секторе R&D и определяет вероятность успеха в исследовании, не обращая внимания на потенциальную конкуренцию со стороны аутсайдеров[2)]. В следующем разделе рассматривается эта ситуация.

[1)] Мы можем достичь равновесия, в котором исследования проводятся множеством агентов, если откажемся от предпосылки, что вероятность успешного завершения исследования зависит только от совокупных затрат на R&D $Z(\kappa_j)$. Если вероятность успеха каждой фирмы $p_i(\kappa_j)$ описывается выпуклой функцией от ее затрат на исследования $Z(\kappa_j)$, то и лидер, и аутсайдеры будут вместе заняты в исследовательском деле.

[2)] Критическое значение разницы в параметрах исследования может быть определено, если приравнять нулю производную (7.44) по $Z(\kappa_j)$. При вычислении используем также то, что $Z^o(\kappa_j) = 0$ и $dp(\kappa_j)/dZ^\ell(\kappa_j) = \phi^\ell(\kappa_j)$. Параметры $E[V(\kappa_j + 1)]$ и $E[V(\kappa_j)]$ определяются условием свободного входа на рынок и соответственно равны

$$E[V(\kappa_j + 1)] = 1/\phi^o(\kappa_j) \quad \text{и} \quad E[V(\kappa_j)] = q^{-\alpha/(1-\alpha)}/\phi^o(\kappa_j).$$

Собрав все элементы воедино, получаем, что критическая величина для $\phi^\ell(\kappa_j)$ равна:

$$\phi^\ell(\kappa_j) = \frac{\phi^o(\kappa_j)}{1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}}.$$

Если значение $\phi^\ell(\kappa_j)$ больше или равно этой величине, то лидер не обращает внимания на конкурентов и ведет себя как монополист при определении издержек R&D.

7.3.2. Лидер как исследователь-монополист

Предположим, что преимущество лидера по издержкам столь велико, что он может не обращать внимания на потенциальную конкуренцию со стороны аутсайдеров. Пусть вероятность успеха в исследовании по-прежнему определяется из формул (7.20) и (7.25):

$$p(\kappa_j) = \frac{Z(\kappa_j)}{\zeta_\ell \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}}, \tag{7.45}$$

где ζ_ℓ отражает издержки лидера. Для удобства мы опускаем индекс ℓ для p и Z. Рассчитаем ожидаемую текущую стоимость чистой прибыли лидера $E[V(\kappa_j)]$.

Поток монопольной прибыли, соответствующий наилучшему качеству κ_j, представлен формулой (7.10):

$$\pi(\kappa_j) = \bar{\pi} \cdot q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}, \tag{7.46}$$

где

$$\bar{\pi} = A^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} L.$$

Вычисление $E[V(\kappa_j)]$ можно подразделить на две части. Первая часть - расчет текущей стоимости чистой прибыли $\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j)$, получаемой до следующего качественного улучшения. Лидер отрасли, как и ранее, получает эту прибыль на протяжении случайного промежутка времени $T(\kappa_j)$. Ожидаемая приведенная стоимость этого потока имеет ту же форму, что и выражение (7.18):

$$E[V(\kappa_j)] \text{ (Первая часть)} = \frac{\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j)}{r + p(\kappa_j)}.$$

Вторая часть отражает период после того, как произошли качественные улучшения, т. е. после $T(\kappa_j)$. Ожидаемая текущая стоимость, начиная с этого момента, составляет величину $E[V(\kappa_j + 1)]$, дисконтированную с учетом коэффициента $\exp[-r \cdot T(\kappa_j)]$. В приложении (разд. 7.6.4) показано, что ожидаемая величина для второй части составит

$$E[V(\kappa_j)] \text{ (Вторая часть)} = p(\kappa_j) \cdot \frac{E[V(\kappa_j + 1)]}{r + p(\kappa_j)}.$$

Соединив две части, получаем:

$$E[V(\kappa_j)] = \frac{\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j) + p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)]}{r + p(\kappa_j)}. \tag{7.47}$$

Формула для $E[V(\kappa_j)]$ отражает рыночную стоимость фирмы, производящей продукцию качества κ_j и обладающей монопольной властью на дальнейшую инновационную деятельность в секторе j.

Перепишем последнее выражение как

$$r = \frac{\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j) + p(\kappa_j) \cdot \{E[V(\kappa_j + 1)] - E[V(\kappa_j)]\}}{E[V(\kappa_j)]}. \tag{7.48}$$

Выражение (7.48) - это уже знакомое нам условие отсутствия арбитража. Оно означает, что доходность по облигациям r равна доходности от владения ведущей в отрасли фирмой. Первая часть дохода от владения фирмой – это чистая прибыль от вложения средств в R&D, $\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j)$. Вторая часть отражает вероятность успеха $p(\kappa_j)$ и ожидаемый при этом рост капитала $E[V(\kappa_j+1)] - E[V(\kappa_j)]$. Норма доходности от владения фирмой равна сумме этих двух величин, разделенной на текущую стоимость фирмы $E[V(\kappa_j)]$.

Из (7.45) выразим $Z(\kappa_j)$ и подставим в (7.47):

$$E[V(\kappa_j)] = \frac{\pi(\kappa_j) - p(\kappa_j) \cdot \zeta_\ell \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)} + p(\kappa_j) \cdot E[V(\kappa_j + 1)]}{r + p(\kappa_j)}.$$

Таким образом, $E[V(\kappa_j)]$ зависит от $p(\kappa_j)$ и других параметров (включая $E[V(\kappa_j + 1)]$), которые в свою очередь не зависят от $p(\kappa_j)$. Поскольку в данной модели не предполагается возможность вхождения в отрасль, то мы не можем использовать условие свободного входа на рынок. Однако монополист по-своему устанавливает собственное условие «входа», определяя свое оптимальное значение $p(\kappa_j)$ (он выбирает такой уровень затрачиваемых усилий на R&D, $Z(\kappa_j)$, который позволяет максимизировать $E[V(\kappa_j)]$). Если взять производную $E[V(\kappa_j)]$ по $p(\kappa_j)$ и приравнять ее нулю, то мы получим условие первого порядка:

$$E[V(\kappa_j + 1)] - E[V(\kappa_j)] = \zeta_\ell \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)} = \frac{Z(\kappa_j)}{p(\kappa_j)}, \tag{7.49}$$

где в последнем равенстве используется (7.45).

Выражение (7.49) имеет два важных отличия от (7.21). Во-первых, $Z(\kappa_j)/p(\kappa_j)$ теперь приравнивается увеличению текущей стоимости $E[V(\kappa_j + 1)] - E[V(\kappa_j)]$, а не самой текущей стоимости $E[V(\kappa_j + 1)]$, так как лидер не рассматривает возможность потери монопольной прибыли. Во-вторых, параметр $E[V(\kappa_j)]$ рассчитывается по-другому, поскольку предполагается, что монопольная власть фирмы постоянна, а не временна.

Эту последнюю особенность можно увидеть, подставив

$$E[V(\kappa_j + 1)] = E[V(\kappa_j)] + \frac{Z(\kappa_j)}{p(\kappa_j)}$$

из выражения (7.49) в формулу (7.47). Тогда получаем

$$E[V(\kappa_j)] = \frac{\pi(\kappa_j)}{r}. \tag{7.50}$$

Выражение, стоящее справа, — это текущая стоимость, полученная благодаря (гипотетически) постоянному потоку прибыли размером $\pi(\kappa_j)$. Поскольку этот поток постоянен, то и ставка дисконта будет равна r, а не $r + p(\kappa_j)$.

Если мы подставим (7.50) в (7.49), заменив при этом $\pi(\kappa_j)$ на выражение (7.46), то получим условие для r. Получившаяся величина, обозначим ее через r_ℓ, является равновесной нормой прибыли, если исследования в каждом секторе проводятся лидером отрасли[1]:

$$r_\ell = \frac{\bar{\pi}}{\zeta_\ell} \cdot \left[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}\right]. \tag{7.51}$$

Соответствующий темп прироста Q и других макроэкономических показателей определяется как

$$\gamma_\ell = \frac{1}{\theta} \cdot (r_\ell - \rho). \tag{7.52}$$

Напомним, что норма прибыли в предыдущей модели соответствовала следующему условию (из выражения (7.27)):

$$r = \frac{\bar{\pi}}{\zeta} - p, \tag{7.53}$$

где ζ -- R&D издержки аутсайдеров. Выражение справа включает параметр p, который мы можем заменить на равновесное значение из (7.37). Формула (7.51) для r_ℓ имеет три отличия от значения r из формулы (7.53). Во-первых, из $\zeta_\ell < \zeta$ следует, что $r_\ell > r$. Во-вторых, в формуле (7.53) r падает с ростом p, поскольку частная прибыль от инноваций носит временный характер. В результате $r_\ell > r$. И наконец,

[1] Если $r < r_\ell$, где r_ℓ задается выражением (7.51), производная $E[V(\kappa_j)]$ по $p(\kappa_j)$ будет положительна, поэтому фирма-лидер будет проводить бесконечное число исследований. Если $r > r_\ell$, то производная отрицательна, следовательно, исследования не проводятся вообще и экономика не растет. Поэтому для существования равновесного состояния, в котором будет наблюдаться положительный рост, необходимо, чтобы $r = r_\ell$.

в-третьих, выражение (7.51) включает $[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}] < 1$, поскольку лидер взвешивает только возрастание текущей стоимости за счет успешного исследования. В результате $r_\ell < r$.

7.4. Оптимальность по Парето

В данном разделе проанализируем, является ли децентрализованное равновесие оптимальным по Парето, сравнив его с решением социального плановика. Социальный плановик максимизирует функцию полезности репрезентативного домашнего хозяйства

$$U = \int_0^\infty \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t}\, dt$$

при ограничении на ресурсы

$$Y = AL^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N} (q^{\kappa_j} X_j)^\alpha = C + \sum_{j=1}^{N} [X_j + Z(\kappa_j)] = C + X + Z. \qquad (7.54)$$

Из первой части выражения следует, что общий выпуск зависит от уровня качества κ_j и количества затраченных промежуточных продуктов наилучшего качества X_j. Из следующей части выражения видно, что выпуск может быть потрачен на потребление C, производство промежуточной продукции X и расходы на R&D, обозначенные через Z.

Решение задачи плановика также зависит от технологии. Вероятность $p(\kappa_j)$ задается выражением (7.45):

$$p(\kappa_j) = \frac{Z(\kappa_j)}{\zeta_\ell \cdot q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)}}.$$

Мы предполагаем, что R&D издержки лидера ζ_ℓ не превышают издержки его конкурентов, поскольку социальный плановик предоставляет право заниматься исследовательской деятельностью агентам с наименьшими издержками.

Для удобства вначале в модели социального плановика определим количество промежуточной продукции (статическая задача). Затем, используя полученный результат, выпишем упрощенный гамильтониан. Легко видеть, что условие первого порядка для максимизации U с учетом выбора X_j предполагает

$$X_j(\text{Социальное управление}) = LA^{1/(1-\alpha)} \alpha^{1/(1-\alpha)} q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}. \qquad (7.55)$$

Напомним, что решение в децентрализованной экономике дано в выражении (7.9):

$$X_j = LA^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}.$$

Соотношение количества X_j из модели социального плановика с количеством промежуточной продукции из децентрализованной модели уже известно: ввиду монопольного ценообразования количество продукции в децентрализованной модели меньше (на множитель $\alpha^{1/(1-\alpha)} < 1$), чем в модели социального плановика.

Подставив X_j из выражения (7.55) в (7.54), получаем выражение для агрегированного выпуска:

$$Y(\text{Социальное управление}) = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}LQ, \tag{7.56}$$

где $Q = \sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}$ - это тот же агрегированный индекс качества, который мы определили в формуле (7.15) для децентрализованной экономики. Для сравнения, уровень выпуска в децентрализованной экономике, рассчитанный в (7.16), составляет

$$Y = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LQ.$$

Следовательно, для заданного Q выпуск в модели социального плановика превосходит выпуск в децентрализованной экономике. Это означает, что в статике невозможно достичь оптимального с социальной точки зрения количества промежуточного продукта X_j в каждом секторе в децентрализованной экономике.

Из выражения (7.56) следует, что при наличии механизма централизованного планирования темп прироста Y равен темпу прироста Q. Ожидаемое изменение Q за единицу времени составит

$$E(\Delta Q) = \sum_{j=1}^{N} p(\kappa_j)\cdot\left[q^{(\kappa_j+1)\cdot\alpha/(1-\alpha)} - q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}\right].$$

Подставив выражение для $p(\kappa_j)$ из (7.45), получаем

$$E(\Delta Q) = \frac{Z\cdot\left[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}\right]}{\zeta_\ell}. \tag{7.57}$$

Таким образом, ожидаемое изменение Q (а следовательно, и Y) зависит от совокупных расходов на R&D, обозначенных через Z, а не от того, каким образом эти расходы распределены внутри сектора. (Этот результат отражает предположение о том, что отдача от R&D в каждом секторе не уменьшается с ростом текущих инвестиций в R&D.) Вновь предположим, что число секторов достаточно велико, чтобы рассматривать Q как величину дифференцируемую; тогда выражение (7.57) будет отражать реальное изменение индекса качества $\dot{Q}$.

Воспользуемся полученными результатами и запишем функцию Гамильтона:

$$J = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t} + \nu \cdot \left[LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{1/(1-\alpha)} Q - Z - cL \right] + \\ + \mu \cdot \frac{Z \cdot [1 - q^{-\alpha(1-\alpha)}]}{\zeta_\ell}. \qquad (7.58)$$

Множитель Лагранжа ν стоит перед ограничением на ресурсы $Y = C + X + Z$. Это ограничение получается из (7.54) подстановкой Y из (7.56) и X из (7.55). Теневая цена μ соответствует $\dot{Q}$ из (7.57).

Теперь воспользуемся уже знакомыми нам методами для получения условий динамической оптимизации для определения параметров c и Z в (7.58). Условие первого порядка и уравнение изменения Q позволяют получить темп прироста в модели социального плановика:

$$\gamma(\text{Социальное управление}) = \\ = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1}{\zeta_\ell} \cdot LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{1/(1-\alpha)} [1 - q^{-\alpha(1-\alpha)}] - \rho \right\}. \qquad (7.59)$$

Ожидаемая социальная норма отдачи, соответствующая выражению в квадратных скобках, стоящему перед $-\rho$, равна

$$r(\text{Социальное управление}) = \\ = \frac{1}{\zeta_\ell} \cdot LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{1/(1-\alpha)} [1 - q^{-\alpha(1-\alpha)}]. \qquad (7.60)$$

В модели социального плановика темп прироста (7.59) и норма прибыли (7.60) превосходят соответственно величины γ_ℓ и r_ℓ, определенные для монополиста в (7.52) и (7.51). Это различие, как и ранее, отражает влияние монопольного ценообразования на промежуточные продукты. Необходимые субсидии на покупку промежуточной продукции позволят устранить это несоответствие, подобно тому как это было в гл. 6.

Норма прибыли r_ℓ характеризует децентрализованную экономику, если лидер отрасли имеет значительные преимущества по издержкам исследования (см. сноску (2) на с. 431). В противном случае, наличие возможной конкуренции определяет норму прибыли в размере r из выражения (7.35). Соотношение между r и социальной нормой прибыли из (7.60) однозначно не прослеживается. Монопольное ценообразование, как уже не раз отмечалось, является причиной того, что частная норма прибыли не достигает нормы прибыли, получаемой в модели социального плановика[1]. Другие особенности отражают неполноту прав собственности на результаты исследований при наличии конкуренции. Норма прибыли из (7.35), с социальной точки зрения, весьма высока, так как в нее включается и возможность изъятия монопольной прибыли у предшественника. Однако, с другой стороны, r значительно занижается в социальном контексте, поскольку выигрыш от инноваций считается временным. Результат от одновременного завышения и занижения r неоднозначен, поскольку силы воздействия практически одинаковы, но при этом отличаются по направлению и продолжительности. Первоначальным источником монопольной прибыли фирмы является прибыль, перешедшая от предшественника. Рассмотрение инноваций как инструмента получения временного выигрыша эквивалентно тому, что мы можем не обращать внимания на рентный доход, который перейдет к последователю. Рассуждения об одинаковой силе воздействия в целом справедливы, но можно отметить две особенности: эффект занижения r будет превышать эффект завышения из-за темпа прироста экономики γ при анализе взаимодействия без учета фактора времени, однако при дисконтировании по ставке r эффект занижения станет меньше эффекта завышения. Соотношение $r > \gamma$ (условие трансверсальности) означает, что преобладает первый эффект. Следовательно, чистым эффектом неполноты прав собственности является завышение r. Таким образом, возможно, что при угрозе со стороны конкурентов норма прибыли и темп прироста в децентрализованной экономике будут превосходить социально оптимальные величины. Более того, ясно, что в таком случае конкурентные норма прибыли и темп прироста превысят величины, определяемые монопольным лидером отрасли (т. е. должно выполняться $r > r_\ell$, так как r_ℓ всегда меньше социальной нормы прибыли). Таким образом, конкуренция может послужить стимулом для проведения исследований и последующего роста, и стимул этот будет даже чрезмерным[2].

---

[1] Другое следствие – это то, что r зависит от затрат аутсайдеров на R&D, равных ζ. Если $\zeta_\ell > \zeta$, то r также будет ниже, чем в модели социального планировщика.

[2] Aghion и др. (2002) рассматривали соотношение между конкуренцией и ростом, основываясь на модели Aghion, Harris, Howitt and Vickers (2001). В рамках модели предполагалось, что множество фирм с различным уровнем производительности в каждый момент времени могут одновременно заниматься производственной деятельностью, так как их выпуски – это несовершенные субституты. Тогда инвестиции в R&D делаются для того, чтобы частично избежать конкуренции и чтобы не отставать. Результатом моделирования является построение перевернутой U-образной кривой, в которой затраты на R&D и темп роста вначале увеличиваются, а потом убывают по мере появления новых конкурентов.

Несоответствия, возникающие из-за конкуренции при проведении исследований, могли бы быть устранены, если бы использовалась схема, позволяющая фактически закрепить право на получение монопольной прибыли за отраслевым лидером (Coase (1960)). Эта схема предполагает, что новаторы будут платить компенсации прямым предшественникам за утраченный рентный доход. Тогда новатор в секторе j поднимет расходы на инновации на величину требуемой компенсации текущему лидеру. Однако также повысится и размер ожидаемого выигрыша на сумму ожидаемой компенсации от последующего новатора. Первая часть этой схемы предполагает, что новатор будет оценивать эффективность своего изобретения, исходя из величин чистых изменений потоков монопольной ренты; т. е. у новаторов пропадает стимул к получению ренты нынешнего лидера отрасли. Во второй части схемы предполагается, что у новатора есть стимулы к тому, чтобы расценивать результаты своей научной деятельности как долгосрочные, а не до того момента, когда появится новый изобретатель. Однако, как и ранее, успешная реализация этой схемы становится проблематичной в более общих моделях (например, в ситуациях, когда качественные изменения сложно оценить).

Только что описанная схема преодоления несоответствий автоматически возникает в модели, где у лидера есть монопольное право на проведение исследований. По причине того что наличие монопольной власти позволяет достичь социального равновесия, когда используется политика субсидирования, позволяющая решить проблему несоответствия монопольного ценообразования в статике.

7.5. Итоговые замечания об экономическом росте

Качественные улучшения, изучаемые в данной главе, представляют собой непрерывный процесс совершенствования существующих товаров и технологий их изготовления. В предыдущей главе технический прогресс, лежащий в основе экономического роста, заключался в увеличении количества видов продукции, т. е. в появлении совершенно новых товаров и технологий. С точки зрения моделирования, отличие двух подходов в описании прогресса заключается в следующем: в данной главе мы считали, что товары лучшего качества замещают товары худшего качества, т. е. качественные улучшения приводят к вытеснению с рынка старых товаров; в гл. 6 мы, наоборот, предполагали, что новые виды продукции не являются ни прямыми заменителями, ни дополнениями к существующим товарам, поэтому инновации не приводят к вытеснению старых товаров с рынка. Следствием этого является то, что в децентрализованной экономике усилия, затрачиваемые фирмами на качественное улучшение продукции, могут оказаться завышенными из-за стремления этих фирм захватить монопольную ренту, получаемую нынешними лидерами отраслей.

Другое важное отличие модели - это то, что затраты на качественное улучшение у лидеров отрасли ниже, чем у аутсайдеров. Следовательно, в состоянии равновесия фирмы-лидеры будут проводить бо́льшую часть исследований, направленных на улучшение качества продукции. Однако у лидеров вряд ли будет преимущество по издержкам при создании совершенно новых видов продукции и технологий производства, так как в данном случае не существует базового продукта, качество которого фирмы могли бы улучшать. Поэтому появление совершенно новых товаров, скорее всего, не будет следствием исследовательской деятельности фирм-лидеров.

7.6. Приложение

7.6.1. Промежуточные продукты с различной оценкой качества

В данной главе предполагалось, что каждый j-й промежуточный продукт будет производиться и использоваться только наилучшего качества κ_j. Также предполагалось, что товар данного уровня будет оцениваться по монопольной цене. Проанализируем эту предпосылку более подробно.

Предположим, что товар j выпускается различного уровня качества $k = 0, \ldots, \kappa_j$. Пусть X_{ijk} - это количество промежуточного товара j качества k, использованного i-й фирмой. Ступенька качества k соответствует качеству q^k, т. е. $k = 0$ соответствует качеству 1, $k = 1$ соответствует качеству q и т. д. Таким образом, общее количество затрачиваемого i-й фирмой промежуточного продукта j с учетом качества равно

$$\tilde{X}_{ij} = \sum_{k=0}^{\kappa_j} \left(q^k X_{ijk}\right). \tag{7.61}$$

В выражении (7.61) предполагается, что продукты различного уровня качества в рамках отдельного сектора являются совершенными субститутами как ресурсы производства. Общее количество ресурсов $\tilde{X}_{ij}$, произведенных сектором, является взвешенной по качеству суммой числа всех использованных продуктов $q^k X_{ijk}$.

Исследователь, благодаря которому произошло улучшение качества товаров в секторе j, получает монопольное право на производство j-го промежуточного продукта наилучшего качества. В частности, если уровни качества $k = 1, \ldots, \kappa_j$ были достигнуты, то изобретатель товара наилучшего качества является единственным производителем промежуточной продукции с уровнем качества q^k. Поскольку уже известно, что если производится продукция только наилучшего качества, а производителей менее качественных товаров можно не учитывать, то промежуточная продукция будет оцениваться по монопольной цене $P = 1/\alpha$.

Предположим, что товары, качество которых ниже κ_j также могут быть использованы в производстве в секторе j. Рассмотрим товары следующего по качеству ранга $\kappa_j - 1$. Если производитель наилучшего по качеству промежуточного товара назначает монопольную цену $1/\alpha$ и если эта цена достаточно велика, то производитель товара с качеством $\kappa_j - 1$ может получить прибыль, занимаясь производством своего товара.

Напомним, что из (7.61) следует, что товары различного качества, взятые в соответствующей пропорции, являются совершенными субститутами. Так, каждая единица наилучшего товара эквивалентна q единицам следующего по качеству продукта ($q > 1$). Следовательно, если за товар лучшего качества назначается цена P, то за следующий по качеству товар цена $(1/q) \cdot P$. Еще более низкий по качеству товар может быть продан по цене $(1/q^2) \cdot P$, и т. д. Если $(1/q) \cdot P$ меньше предельных издержек производства, то второй по качеству товар покидает рынок (как и другие, более низкие по качеству товары). Следовательно, если лидер по качеству назначает монопольную цену, равную $1/\alpha$, то последующий по качеству производитель может назначить максимальную цену в размере $1/(\alpha q)$, производитель еще менее качественной продукции назначит цену в размере $1/(\alpha q^2)$, и т. д. Если $1/(\alpha q)$ меньше единицы, то производитель второй по качеству продукции (и все последующие производители) не выдерживает конкуренции со стороны лидера и его монопольной цены. Поэтому из того, что $\alpha q > 1$, следует, что на рынке будет применяться монопольное ценообразование. Неравенство $\alpha q > 1$ выполняется, если q, т. е. соотношение между качеством товаров, расположенных на соседних ступенях качества, достаточно велико; тогда товары низкого качества тут же вытесняются с рынка, даже если наиболее качественный товар оценивается по монопольной цене. В этом случае полученные нами результаты справедливы.

Если $\alpha q \leqslant 1$, последуем логике работы Grossman and Helpman (1991, гл. 4), предположив, что поставщики промежуточной продукции конкурируют по Бертрану. В таком случае фирма-лидер будет применять сдерживающее ценообразование, устанавливая цену значительно ниже монопольной, с тем чтобы следующую по качеству продукцию стало просто не выгодно производить[1]. Эта сдерживающая цена равна:

$$\text{Сдерживающее ценообразование} \quad \Rightarrow \quad P = q. \tag{7.62}$$

Если лидер назначает цену в размере $q - \epsilon$, где ϵ — произвольная малая положительная величина, то производитель следующего по качеству товара может назначить максимальную цену в размере $1 - \epsilon/q$, что приведет к отрицательной прибыли. Таким образом, товары более низкого качества также будут вытесняться с рынка. Если $\alpha q \leqslant 1$ (условие существования сдерживающего ценообразования), то сдерживающая цена будет не больше, чем монопольная $1/\alpha$.

Общее количество произведенной продукции (наивысшего качества) при сдерживающем ценообразовании определяется из выражения (7.6):

$$\begin{gathered}\text{Сдерживающее ценообразование} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad X_j = LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}.\end{gathered} \tag{7.63}$$

Сравнение с (7.9) показывает, что если $\alpha q \leqslant 1$, то количество произведенной продукции при сдерживающем ценообразовании не меньше количества произведенной продукции при монополии.

Формулы для определения цены и количества промежуточной продукции в условиях монополии (7.8) и (7.9) справедливы при $\alpha q \geqslant 1$. Формулы для определения этих величин при сдерживающем ценообразовании (7.62) и (7.63) применяются, если $\alpha q \leqslant 1$. В любом случае цена определяется как надбавка к предельным издержкам производства, при этом в каждом секторе производится только наилучшая по качеству промежуточная продукция, и только она используется в качестве ресурса производителями конечной продукции. В данной главе мы неявным образом предполагали, что $\alpha q \geqslant 1$, т. е. что на рынке существует монопольное ценообразование и справедливы выражения (7.8) и (7.9). Однако в сущности результаты будут теми же и при сдерживающем ценообразовании, когда $\alpha q < 1$[2].

[1] В работе Grossman and Helpman (1991, гл. 4) предполагается, что $\alpha = 0$. Тогда эластичность спроса составляет 1, а монопольная цена, определяемая как $1/\alpha$, равна бесконечности. Так как в этой ситуации неравенство $\alpha q \leqslant 1$ должно все равно выполняться, то монопольное ценообразование в данной модели применять нельзя.

[2] Механизм сдерживающего ценообразования применяется на рынке тогда, когда успеха в исследованиях добиваются каждый раз новые агенты. В случае когда только лидер отрасли занимается исследовательской деятельностью, сдерживающее ценообразование не используется.

7.6.2. Продолжительность монопольной власти

Чтобы определить размер вознаграждения за успешные исследования $E[V(\kappa_j)]$, необходимо знать функцию плотности распределения продолжительности монопольной власти $T(\kappa_j)$. Обозначим через $G(\tau)$ интегральную функцию плотности распределения для $T(\kappa_j)$, т. е. вероятность того, что $T(\kappa_j) \leqslant \tau$. Изменения $G(\tau)$ по τ отражают вероятность того, что в каждый момент времени монопольная власть будет утеряна, поскольку в момент τ появляется новый продукт. Если инновация возникает в момент времени τ, то она не появляется раньше, хотя вероятность такого исхода равна $1 - G(\tau)$. Тогда при условии, что открытие еще не произошло, вероятность его появления в каждый момент времени равна $p(\kappa_j)$. Следовательно, производная $G(\tau)$ по τ равна

$$G'(\tau) = [1 - G(\tau)] \cdot p(\kappa_j). \tag{7.64}$$

Так как $p(\kappa_j)$ является константой, мы можем легко решить дифференциальное уравнение (7.64). Если принять во внимание краевое условие $G(0) = 0$, то в результате получаем

$$G(\tau) = 1 - e^{-p(\kappa_j)\cdot\tau}.$$

Функция плотности распределения вероятностей может быть определена дифференцированием интегральной плотности распределения:

$$g(\tau) = G'(\tau) = p(\kappa_j) \cdot e^{-p(\kappa_j)\cdot\tau}. \tag{7.65}$$

Выражение (7.13) определяет текущую величину прибыли $V(\kappa_j)$ как функцию, зависящую от длительности удержания монопольной власти $T(\kappa_j)$:

$$V(\kappa_j) = \pi(\kappa_j) \cdot \frac{1 - e^{-r\cdot T(\kappa_j)}}{r},$$

где $\pi(\kappa_j)$ — это поток монопольной прибыли. Выражение (7.65) задает плотность распределения параметра $T(\kappa_j)$. Ожидаемая текущая величина прибыли:

$$E[V(\kappa_j)] = \frac{\pi(\kappa_j)}{r} \cdot p(\kappa_j) \cdot \int\limits_0^\infty (1 - e^{-r\tau}) \cdot \exp[-p(\kappa_j) \cdot \tau]\, d\tau.$$

Вычислив интеграл, получаем:

$$E[V(\kappa_j)] = \frac{\pi(\kappa_j)}{r + p(\kappa_j)}, \tag{7.66}$$

что совпадает с формулой (7.18).

7.6.3. Рыночная стоимость фирм

В данной модели, как и в гл. 6, благосостояние определяется рыночной стоимостью фирм. Поскольку товары, уступающие по качеству товару-лидеру, не производятся, то в каждом секторе рыночную стоимость будет иметь только одна фирма (та, которая обладает правом на производство последнего κ_j-го изобретения). Рыночная оценка стоимости данной инновации $E[V(\kappa_j)]$ задается выражением (7.19):

$$E[V(\kappa_j)] = \bar{\pi} \cdot \frac{q^{\kappa_j \alpha/(1-\alpha)}}{r + p(\kappa_j)}.$$

Подставив формулу для $r + p$ из (7.26), получаем

$$E[V(\kappa_j)] = \zeta \cdot q^{\kappa_j \alpha/(1+\alpha)}. \tag{7.67}$$

Обратите внимание на то, что чем более продвинутым является сектор (выше величина κ_j), тем больше рыночная стоимость фирмы-лидера.

Совокупная стоимость всех фирм, обозначенная через V, рассчитывается как сумма выражения (7.67) по всем N секторам:

$$V = \zeta \cdot \sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j \alpha/(1+\alpha)} = \zeta Q. \tag{7.68}$$

Общая рыночная стоимость фирмы, таким образом, равна произведению Q на константу.

7.6.4. Исследования, проводимые отраслевым лидером

До момента $T(\kappa_j)$ лидер отрасли получает доход в размере $\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j)$. Плотность распределения $T(\kappa_j)$, как и ранее, задается выражением (7.65). Таким образом, ожидаемая приведенная стоимость потока прибыли к моменту $T(\kappa_j)$ совпадает с выражением (7.66), в котором $\pi(\kappa_j)$ заменяется на $\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j)$. Отсюда

$$E[V(\kappa_j)] \text{ (Первая часть)} = \frac{\pi(\kappa_j) - Z(\kappa_j)}{r + p(\kappa_j)}. \tag{7.69}$$

Текущая приведенная стоимость потока прибыли, начиная с момента $T(\kappa_j)$, равна $e^{-r \cdot T(\kappa_j)} \cdot E[V(\kappa_j + 1)]$. Воспользовавшись функцией распределения $T(\kappa_j)$ из выражения (7.65), получаем

$$E[V(\kappa_j)] \text{ (Вторая часть)} = E[V(\kappa_j + 1)] \cdot p(\kappa_j) \cdot \int_0^\infty \exp\{-[r + p(\kappa_j)] \cdot \tau\} \cdot d\tau.$$

Рассчитав интеграл, получаем уже известную нам формулу:

$$E[V(\kappa_j)] \text{ (Вторая часть)} = p(\kappa_j) \cdot \frac{E[V(\kappa_j + 1)}{r + p(\kappa_j)}. \tag{7.70}$$

7.7. Задачи

7.1. Шаг между инновациями. Предположим, что R&D издержки $Z(q)$ — это функция от размера шага между инновациями q. (Мы по-прежнему предполагаем, что q известно.) Предположим, что функция $Z(\cdot)$ удовлетворяет условиям $Z' > 0$ и $Z'' > 0$.

a. Какова величина q в состоянии равновесия, например, в модели, где преимущество лидера по издержкам столь велико, что он может не обращать внимания на исследования, проводимые аутсайдерами?

b. При каких условиях ответ на предыдущий вопрос будет соответствовать предпосылке о том, что лидер может не обращать внимания на исследования, проводимые конкурентами?

7.2. Монопольные права на исследования. Предположим, что государство поддерживает монопольную власть лидеров отраслей, не предоставляя аутсайдерам возможности проводить исследования. При каких условиях эта политика повысит благосостояние общества? С какими проблемами на практике придется столкнуться государству при проведении данной политики?

7.3. Лидер отрасли — единственный исследователь. Пусть издержки производства лидера отрасли ζ_ℓ меньше издержек аутсайдеров ζ.

a. При каких условиях все исследования, направленные на улучшение качества, будут осуществляться только отраслевым лидером? Изменится ли ответ на поставленный вопрос, если анализировать исследования, направленные на осуществление научных прорывов?

b. При каких условиях активность исследовательской работы, направленной на улучшение качества, не будет зависеть от потенциальных исследований, проводимых аутсайдерами? Опишите природу взаимодействия лидера и аутсайдеров для случая, когда потенциальные возможности последних влияют на равновесие. Возможна ли ситуация, когда более сильная конкуренция приводит к повышению темпов прироста экономики?

7.4. Альтернативное соотношение между вероятностью успешного исследования и интенсивностью исследований. Модифицируем выражение (7.20) и получим новую функцию зависимости вероятности успеха $p(\kappa_j)$ от усилий, прикладываемых в секторе R&D, $Z(\kappa_j)$:

$$p(\kappa_j) = [Z(\kappa_j) \cdot \phi(\kappa_j)]^{\epsilon},$$

где $0 < \epsilon < 1$. В каждый момент времени вероятность успеха отдельного исследователя равна величине $p(\kappa_j)$, умноженной на долю его усилий в общих R&D усилиях в секторе j.

a. Определите условие свободного входа в сектор j для R&D фирм. Насколько это условие отличается от того условия, когда $\epsilon = 1$?

b. Что изменится при $\epsilon < 1$? (Рассмотрите аналогию с прудом для разведения рыбы, в который есть «свободный вход» и который является местом накопления рыбы.)

c. Что произойдет, если $\epsilon > 1$?

d. Рассмотрите, каким образом в состоянии равновесия определяется интенсивность исследований в каждом секторе для $0 < \epsilon < 1$?

8 Распространение технологии

В модели Солоу—Свэна, рассматриваемой в гл. 1, конвергенция являлась следствием убывающей отдачи от капитала. Более высокая норма отдачи от капитала в бедных экономиках (или, по крайней мере, в экономиках, находящихся ниже устойчивого состояния) приводит к более высоким темпам прироста показателей на душу населения. В модели Рамсея, представленной в гл. 2, мы показали, каким образом эта тенденция изменится под влиянием нормы сбережений. Скорость конвергенции будет выше или ниже в зависимости от того, будет в бедных экономиках сберегаться бо́льшая или меньшая часть дохода. Далее, в гл. 3, мы выяснили, что международная мобильность капитала ускоряет процесс конвергенции.

В моделях, рассмотренных в гл. 4 и 5, в экономике в устойчивом состоянии может сохраняться положительный рост показателей на душу населения, если отдача от капитала постоянна, при этом капитал рассматривается в широком смысле и включает человеческий. Если отдача от такого капитала некоторое время убывает, но в долгосрочном периоде приблизительно постоянна, то в экономике наблюдается конвергенция, которая также характеризуется эндогенным ростом в долгосрочном периоде. (В гл. 1 мы обсуждали некоторые случаи, в которых возникала подобная ситуация.) В гл. 5 мы также рассмотрели, каким образом несоответствие физического и человеческого капиталов повлияло на динамику перехода к устойчивому состоянию. Страны, экономики которых характеризуются более высоким первоначальным соотношением человеческого и физического капиталов, будут расти особенно быстро. Следовательно, теории эндогенного роста, основанные на постоянстве отдачи от капитала, понимаемого широком смысле, в долгосрочном периоде, соответствуют более интенсивной динамике перехода, предполагающей также наличие конвергенции.

В моделях из гл. 6 и 7 долгосрочный рост был следствием постоянной отдачи от инвестиций в исследования и разработки, служившие источником технологического прогресса в этих моделях. Мы пока еще не обсудили вопрос о том, как соотносятся эти теории с результатами нескольких эмпирических исследований процессов конвергенции. При анализе экономик главный вопрос заключается в том, насколько быстро открытия, сделанные в ведущих странах, появляются в менее развитых экономиках. Далее в этой главе мы выясним, что распространение технологии способствует конвергенции между странами.

В данной главе мы рассмотрим процесс распространения технологии в рамках модели разнообразия промежуточных продуктов из гл. 6[1]. Необходимо отметить, что мы получим те же результаты и при рассмотрении модели качественных улучшений, изложенной в гл. 7[2]. Главная идея заключается в том, что страны-последователи постепенно догоняют лидеров, поскольку заимствование и дальнейшее использование открытий обходятся дешевле инноваций. Этот механизм приводит к конвергенции даже в случае отсутствия убывающей отдача капитала и R&D инвестиций.

Начнем анализ с процесса распространения технологии из ведущей страны (страны 1) в страну-последователь (страну 2). В качестве основы возьмем модель из гл. 6, в которой уровень технологии зависит от количества разнообразных промежуточных продуктов, которые были открыты технологическим лидером. Исследователи страны 1 затрачивают усилия на изобретение товаров, которые вначале используются для производства конечной продукции в стране 1. Изобретатель нового вида продукции является монопольным поставщиком этого продукта в стране 1.

В стране 2 промежуточные продукты не изобретаются, однако страна заимствует или адаптирует продукцию, разработанную в стране 1. Использование этой продукции сопряжено с издержками адаптации в новой среде. Мы рассматриваем эти издержки как издержки копирования. Они схожи с издержками на исследования и раз-

[1] Ранее проведенные теоретические исследования, посвященные распространению технологии, включают такие работы, как Nelson and Phelps (1966), Krugman (1979). Jovanivic and Lach (1991), Grossman and Helpman (1991, гл. 11 и 12), Segerstrom (1991).

[2] Для анализа данной модели см. Connolly (1999).

работки из гл. 6, с той лишь разницей, что издержки копирования обычно меньше затрат на инновации. Предполагается, что агент, который несет издержки копирования, становится монопольным поставщиком промежуточного продукта в стране 2. Предполагается, что те, кто заимствуют продукцию и технологию, не платят никаких авторских гонораров иностранным изобретателям; следовательно, агенты из страны 1 не получают никакой компенсации за использование их изобретений в стране 2. В одном из последующих разделов мы рассмотрим ситуацию, в которой адаптация технологии в стране 2 осуществляется за счет привлечения иностранного капитала из страны 1.

Конечные продукты, производимые двумя странами, идентичны и могут выступать в качестве предмета торговли между странами. Однако производители конечной продукции в стране 2 могут использовать тот или иной вид промежуточного продукта, только если кто-то сначала потратил ресурсы на адаптацию этого продукта для данной страны. Предполагается, что мировой рынок капитала отсутствует; следовательно, торговля между странами сбалансирована в каждый момент времени. Таким образом, в действительности экономики являются закрытыми, однако есть возможность заимствования технологий.

Можно привести ряд примеров успешного экономического развития, которое было вызвано использованием зарубежных технологий, как было предложено в наших теоретических моделях. Young (1989, гл. 6) в качестве примера приводит Гонконг, где многие предприниматели, работая на производстве, обучались ведению бизнеса, являясь учениками иностранных менеджеров. В Сингапуре для того, чтобы начать бизнес в некоторых отраслях (например, в электронике или финансовых услугах), были необходимы значительные иностранные инвестиции и квалификация. Правительство Сингапура активно стимулировало иностранное участие (Young, 1992). Иностранные инвестиции в Китай со стороны Гонконга и в Мексику со стороны Соединенных Штатов были важны для продвижения знаний о передовых производственных технологиях (Romer, 1993). В Республике Маврикий значительный рост производства одежды явился следствием привлечения иностранных предпринимателей, которые обучали и контролировали местных работников. Иностранцев, главным образом из Гонконга, привлекли зоны свободной торговли, в которых правительством проводилась благоприятная политика, включающая в себя низкие налоги и гарантированную минимальную заработную плату (см. Gulhati and Nallari, 1990; Bowman, 1991; Romer, 1992).

8.1. Поведение исследователей в странах-лидерах

В данном разделе мы продолжаем анализ, начатый в работе Barro and Sala-i-Martin (1997). Поведение исследователей в стране 1 задается моделью, рассмотренной в первой части гл. 6. Кратко напомним эту модель. Пусть N_1 — число видов промежуточной продукции в стране 1, тогда количество конечных продуктов Y_1 равно

$$Y_1 = A_1 L_1^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} (X_{1j})^{\alpha}, \tag{8.1}$$

где $0 < \alpha < 1$; A_1 — параметр производительности; L_1 — затраты труда; X_{1j} — количество затрачиваемой в качестве промежуточной продукции вида j. Предполагается, что население постоянно, следовательно, постоянны и совокупные трудовые ресурсы L_1. Параметр A_1 отражает уровень технологии в стране 1, кроме того, этот параметр отражает различные аспекты политики правительства, влияющие на производительность в стране 1 (налогообложение, предоставление коммунальных услуг и охрана прав собственности).

Затраты на производство каждого промежуточного продукта X_{1j} равны единице, и каждый товар, как и в гл. 6, продается по монопольной цене $P = 1/\alpha > 1$. Равенство предельного продукта X_{1j} цене определяет количество используемого промежуточного продукта каждого типа в стране 1:

$$X_{1j} = X_1 = (A_1)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} L_1. \tag{8.2}$$

Подставив формулу (8.2) в (8.1), получаем уровень выпуска на одного работника в стране 1:

$$y_1 \equiv \frac{Y_1}{L_1} = (A_1)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} N_1. \tag{8.3}$$

Следовательно, выпуск на одного работника y_1 увеличивается с ростом производительности A_1 и количества продуктов N_1. Ставка заработной платы w_1 равна предельной производительности труда, используемого фирмой, и рассчитывается как произведение $1 - \alpha$ и y_1.

Из выражения (8.2) следует, что поток монопольной прибыли от продажи j-го промежуточного продукта в стране 1:

$$\pi_{1j} = \pi_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} (A_1)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} L_1. \tag{8.4}$$

Текущая дисконтированная величина всей будущей прибыли равна стоимости фирмы, занимающейся исследованиями и разработками, V_1.

Из условия отсутствия арбитража следует, что норма прибыли фирмы, занимающейся исследованиями и разработками, такая же, как и доходность по облигациям. Мгновенная норма прибыли от приобретения R&D фирмы равна сумме коэффициента доходности фирмы и прироста капитала, возникающего вследствие изменения стоимости фирмы:

$$r_1 \frac{\pi_1 + \dot{V}_1}{V_1}. \tag{8.5}$$

Формула (8.5) соответствует формуле (6.18) из гл. **6**. На изобретение нового продукта в стране 1 затрачивается определенное количество товаров. Обозначим это количество через η_1. Предполагается, что в состоянии равновесия в стране 1 создаются новые продукты, и поэтому равновесный темп прироста положителен. В таком случае условие свободного входа на рынок приравнивает стоимость фирмы V_1 к η_1. Так как η_1 — константа, стоимость фирмы во времени также не изменяется. Следовательно,

$$\dot{V}_1 = 0 \quad \text{и} \quad r_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1},$$

т. е. процентная ставка в стране 1 в состоянии равновесия является константой. Из выражения (8.4) следует, что процентная ставка

$$r_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1} = \frac{L_1}{\eta_1} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} (A_1)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)}. \tag{8.6}$$

Условие оптимизации в задаче потребителя предполагает, что темп прироста потребления C_1 задается формулой:

$$\gamma_1 = \frac{\dot{C}_1}{C_1} = \frac{1}{\theta} \cdot (r_1 - \rho). \tag{8.7}$$

Предполагается, что параметры предпочтений ρ и θ одинаковы для всех стран. Подставив сюда r_1 из выражения (8.6), получаем темп прироста:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{L_1}{\eta_1} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot (A_1)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right]. \tag{8.8}$$

Как и в гл. 6, страна 1 всегда находится в устойчивом состоянии, в котором N_1, Y_1 и C_1 растут с постоянным темпом прироста γ_1.

8.2. Поведение фирм в странах-последователях

8.2.1. Производители конечного выпуска

Производственная функция для страны 2 совпадает с производственной функцией для страны 1 из выражения (8.1):

$$Y_2 = A_2 L_2^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N_2} (X_{2j})^\alpha, \tag{8.9}$$

где N_2 – это количество промежуточных продуктов в стране 2. Поскольку мы предполагаем, что страна 1 – это технологический лидер, а страна 2 – последователь, то $N_2(0) < N_1(0)$. Пусть далее N_2 - количество доступных промежуточных продуктов в стране 2, это подмножество множества доступных в стране 1 товаров N_1 [1]. В начальный момент времени в стране 2 не проводится каких-либо исследований, и она лишь копирует промежуточные продукты страны 1.

Параметр производительности A_2 и совокупные трудовые ресурсы L_2 могут отличаться от соответствующих параметров страны 1. Разница между A_2 и A_1, как уже отмечалось выше, отражает различия в политике, проводимой государствами. Совокупные трудовые затраты отражают тот масштаб производства, в котором могут быть использованы промежуточные продукты. Разница между L_2 и L_1 отражает разницу в масштабах двух экономик. Производитель конечного выпуска в стране 2 выбирает то количество труда и ту величину затрачиваемых промежуточных продуктов, которая позволяет максимизировать прибыль при заданных ценах. Из условия первого порядка получаем функцию спроса на промежуточный товар j как функцию от цены P_{2j}:

$$X_{2j} = L_2 \cdot (A_2 \cdot \alpha)^{1/(1-\alpha)} \cdot (P_{2j})^{-\alpha/(1-\alpha)}. \tag{8.10}$$

8.2.2. Фирмы-заемщики технологий

Издержки копирования. Основываясь на анализе, проведенном в гл. 6, предположим, что затраты на инновации в стране 2, обозначенные через η_2, постоянны (но не обязательно равны η_1). Это означает,

[1] В данном случае нас не интересует, каким образом в стране 2 появились знания для производства первого продукта. Однако нельзя не отметить, что из выражения (8.9) следует, что в стране 2 не будет производиться ничего, если нет самого первого промежуточного продукта. Это замечание справедливо и для производства первого продукта в стране 1, и для модели разработки новых видов продукции из гл. 6. Поэтому, исходя из вида производственной функции, предположим, что всегда известно, как производить хотя бы один вид промежуточной продукции.

что в каждой стране создание новых видов продукции сталкивается с проблемой убывающей отдачи. Как уже отмечалось в гл. 6, данное предположение может быть следствием того, что число потенциальных новаций не ограничено.

Предположим, что в стране 2 суммарные затраты на копирование и адаптацию промежуточного продукта из страны 1 составляют величину, равную $v_2(t)$. Заимствование продуктов, в отличие от их создания, в каждый момент времени ограничивает их число общим количеством изобретенных где-либо товаров. В частности, в данной модели страна 2 может заимствовать продукцию из еще не заимствованного подмножества множества товаров N_1, изобретенных в стране 1. Так как N_2 относительно N_1 растет, то издержки копирования будут также расти. Это выполняется, например, когда товары в стране 1 различаются в зависимости от издержек копирования, которые понесет страна 2. При этом товары, которые легче копировать, будут заимствоваться в первую очередь, а предельные издержки v_2 будут расти вместе с N_2. В данной модели это условие отражается в предпосылке, что v_2 — это растущая по N_2/N_1 функция:

$$v_2 = v_2\left(\frac{N_2}{N_1}\right), \tag{8.11}$$

где $v_2' > 0$. Мы также предполагаем, что $v_2[N_2(0), N_1(0)] < \eta_2$, т. е. изначально для страны 2 будет дешевле заимствовать товары, а не создавать их самим.

Если $N_2/N_1 < 1$, т. е. не все виды товаров страны 1 заимствуются страной 2, то издержки копирования v_2 оказываются меньше η_2, так как заимствование обычно обходится дешевле изобретения. Но v_2 будет превосходить η_2 при $N_2/N_1 < 1$, когда оставшееся количество незаимствованных изобретений будет включать лишь те товары, которые достаточно сложно адаптировать в стране 2. Другими словами, в некоторых случаях для технологического последователя будет дешевле самим изобрести новый продукт, а не заимствовать его у страны-лидера. На рис. 8.1 изображена более простая ситуация, когда $v_2(N_2/N_1) < \eta_2$ при $N_2/N_1 < 1$. Результат остается без изменений, если выполняется $v_2(N_2/N_1) < \eta_2$ при $N_2/N_1 < 1$. Видно, что $v_2(N_2/N_1)$ достигает η_2, когда N_2/N_1 достигает 1. В следующем разделе мы преобразуем эту предпосылку.

Важно отметить, что в модели предполагается, что издержки копирования нетривиальны, т. е. невозможно перенять инновационную идею таким образом, чтобы издержки были практически нулевыми. В работе

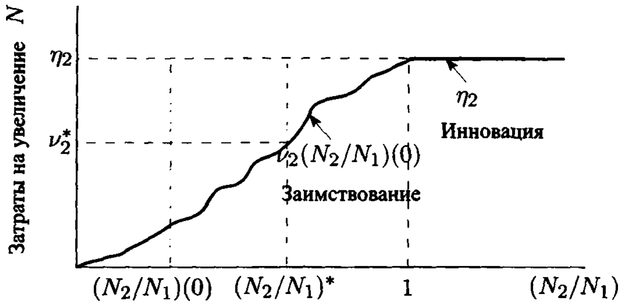


Рис. 8.1. Издержки технологического изменения в стране 2. Предполагается, что издержки копирования в стране 2 (v_2) являются растущей по N_2/N_1 функцией, достигающей значения η_2 при $N_2/N_1 = 1$. Также предполагается, что издержки заимствования в устойчивом состоянии (v_2^*) меньше η_2

Mansfield, Schwartz and Wagner (1981, с. 908–909) проанализированы издержки копирования в США по 48 инновационным продуктам таких отраслей, как химическая и фармацевтическая, а также электроника и машиностроение. Исследователи обнаружили, что издержки копирования в среднем составляют 65% от стоимости инноваций. Однако этот коэффициент различается по продуктам весьма значительно, только половина коэффициентов находится в диапазоне от 40 до 90%.

Griliches (1957), исследуя данные по США, показал, что время, необходимое для выведения гибридных сортов кукурузы, и скорость распространения этих сортов зависят от издержек и ожидаемой доходности. Период выведения и распространения нового сорта будет тем короче, чем ближе гибридный сорт кукурузы к сортам, первоначально созданным для данной кукурузной зоны (т. е. для районов, в которых проводилось большинство ранних исследований по гибридным сортам). Скорость распространения сортов в зонах была тем больше, чем больше размер рынка и потенциальное увеличение урожая.

Teece (1977) исследовал издержки распространения технологии между странами для международных фирм. Он показал, что для 26 продуктов таких отраслей, как химическая промышленность, перегонка нефти и машиностроение, издержки в среднем составляют 19% от общих затрат по проекту. Также он показал, что издержки распространения уменьшаются по мере накопления опыта по заимствованию технологий, но не зависят от уровня экономического развития страны, заимствующей технологию. В работе Nelson and Phelps (1966), наоборот, делается вывод о том, что издержки v_2 будут тем меньше, чем выше качество человеческого капитала в стране-заемщике. В любом случае, один очевидный вывод из работ Mansfield, Schwartz and Wagner (1981) и Teece (1977) заключается в том, что издержки распространения технологии v_2 всегда будут существенными.

Оптимальное ценообразование, когда продукт уже создан. Предполагается, что если агент из страны 2 за заимствование j-го товара страны 1 в момент времени t платит $v_2(t)$, то он получает монопольное пожизненное право на использование этого товара в стране 2[1]. Следовательно, заимствование в стране 2 соответствует инновационной деятельности в стране 1. Агент, заимствующий товар j, назначает цену P_{2j}, максимизирующую прибыль, если функция спроса задается выражением (8.10). Предельные издержки производства промежуточной продукции равны 1, как и в стране 1. Монопольная цена каждого промежуточного продукта в стране 2 определяется как постоянная надбавка к предельным издержкам и равна $P_{2j} = P_2 = 1/\alpha > 1$. Эта цена совпадает с ценой в стране 1 и не зависит от j. Подставив монопольную цену в функцию спроса из выражения (8.10), получаем формулу расчета количества промежуточных продуктов:

$$X_{2j} = X_2 = (A_2)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} L_2. \tag{8.12}$$

Если мы знаем количество каждого промежуточного ресурса, то можем получить формулы для выпуска и прибыли в расчете на душу населения (y_2 и π_{2j}):

$$y_2 \equiv \frac{Y_2}{L_2} = (A_2)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} N_2; \tag{8.13}$$

$$\pi_{2j} = \pi_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot (A_2)^{1/(1-\alpha)} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} L_2. \tag{8.14}$$

Отметим, что эти формулы аналогичны выражениям для страны 1 из (8.2)–(8.4). Ставка заработной платы ω_2 является произведением $1-\alpha$ и y_2.

---

[1]Предполагается, что производители страны 2 не могут нарушить локальную монополию, импортируя товар j из страны 1. Даже если товар может быть куплен из-за границы по цене ниже монопольной, производители в стране 2 все равно понесут издержки в размере v_2, которые будут включать в себя и расходы на изучение того, как наиболее эффективно использовать данный товар стране 2.

Из выражений (8.13) и (8.3) следует, что соотношение продуктов на одного работника в обеих отраслях равно

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right). \tag{8.15}$$

Это выражение положительно зависит от соотношения параметров продуктивности A_2/A_1 и соотношения числа известных видов промежуточной продукции N_2/N_1.

Отношение потоков прибыли равно

$$\frac{\pi_2}{\pi_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right). \tag{8.16}$$

Это отношение также растет вместе с A_2/A_1. Положительная зависимость от L_2/L_1 — это выигрыш от масштаба. В данном случае важный параметр масштаба отражает итог от дополнительного вложения ресурса L_i в работу с промежуточными продуктами в стране i.

Условие свободного входа на рынок. Текущая величина прибыли от заимствования промежуточного продукта j в стране 2 равна

$$V_2(t) = \pi_2 \int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^s r_2(v)\,dv\right\} ds, \tag{8.17}$$

где $r_2(v)$ — норма прибыли в стране 2 в момент времени t. Между нормами прибыли двух стран ($r_2(v) \neq r_1$) возможна разница, так как исключен международный кредит[1]. Если в стране 2 существует свободный вход на рынок копирования и равновесное количество ресурсов, направляемых на копирование, в каждый момент времени ненулевое, то $V_2(t)$ должно совпадать с издержками копирования $v(t)$ в каждый момент времени:

$$V_2(t) = \nu_2\left(\frac{N_2}{N_1}\right). \tag{8.18}$$

Подставив формулу для $V_2(t)$ из (8.17) и продифференцировав обе части выражения (8.18) по t, получаем условие отсутствия арбитража:

$$r_2 = \frac{\pi_2 + \dot{\nu}_2}{\nu_2}. \tag{8.19}$$

[1] Если бы международное кредитование было разрешено, то все текущие инвестиции направились бы в сектор, исследования в котором приносят наибольший доход. Инвестиции будут направляться в более чем один сектор, если преобразовать модель таким образом, чтобы между нормой прибыли и инвестициями, направленными на исследования и разработки в каждом секторе, существовало обратное соотношение.

Следовательно, если v_2 — константа, то величина r_2 также будет постоянна и равна π_2/v_2, т. е. отношению потока прибыли к единовременным затратам на получение этой прибыли. Этот результат аналогичен результату для r_1 из выражения (8.6) Однако если v_2 изменяется во времени, то r_2 будет включать в себя еще и прирост капитала $\dot{v}_2/v_2$. При свободном входе на рынок монопольные права на промежуточный продукт определяются издержками на получение этих прав v_2. Если v_2 растет (так как N_2/N_1 растет в (8.18)), то увеличивающаяся стоимость монопольных прав предполагает прирост капитала по ставке $\dot{v}_2/v_2$. Этот прирост добавляется к «дивидендной» части π_2/v_2, в результате чего получаем норму прибыли в (8.19). Этот результат аналогичен результату из разд. 6.8, где издержки на исследования и разработки задаются функцией от числа уже изобретенных товаров.

8.2.3. Потребители

Поведение и предпочтения потребителей соответствуют модели Рамсея. Из уравнения Эйлера следует, что норма прибыли r_2 определяет темп прироста потребления в стране 2 следующим образом:

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta} \cdot (r_2 - \rho). \tag{8.20}$$

Отметим, что параметры (ρ и θ), описывающие предпочтения потребителя, одинаковы в станах 2 и 1.

8.2.4. Рост в устойчивом состоянии

В устойчивом состоянии N_2 растет с тем же темпом прироста γ_1, что и N_1. Отношение N_2/N_1 тогда постоянно и равно $(N_2/N_1)^*$. Из формулы издержек копирования (8.11) следует, что в устойчивом состоянии v_2 также является константой. Предположим теперь, что параметры модели таковы, что последователь никогда не догонит лидера, т. е. $0 < (N_2/N_1)^* < 1$. Далее проанализируем, каким образом это неравенство повлияет на параметры A_i, L_i и η_i.

В устойчивом состоянии темпы прироста Y_2 и C_2 совпадают с темпом прироста N_2, равным γ_1. Поэтому темп прироста всех агрегированных показателей страны 2, отмеченный через γ_2^*, равен γ_1.

Поскольку C_2 и C_1 в долгосрочном периоде растут с одинаковым темпом прироста γ_1 и так как параметры сбережения ρ и θ одинаковы в обеих странах, то из выражений (8.6), (8.7) и (8.20) следует, что нормы прибыли в этих странах также одинаковы:

$$r_2^* = r_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1}, \tag{8.21}$$

где π_1 задается формулой (8.4). Когда N_2/N_1 достигает значения $(N_2/N_1)^*$, а значит, $\gamma_2^* = \gamma_1$, тогда получаем, что $r_2^* = r_1$. Таким образом, в долгосрочном периоде процесс распространения технологий выравнивает нормы прибыли даже в случае отсутствия общего рынка капитала.

Так как $r_2^* = r_1$, то из выражений (8.19) и (8.5) следует

$$\frac{\pi_2}{v_2^*} = \frac{\pi_1}{v_1},$$

где v_2^* — это величина v_2 в устойчивом состоянии. (Отметим, что в устойчивом состоянии доход от капитала $\dot{v}_2/v_2$ равен нулю, так как v_2^* — константа.) Из формулы (8.16) для нормы прибыли следует

$$\nu_2^* = \eta_1 \cdot \frac{\pi_2}{\pi_1} = \eta_1, \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{L_2}{L_1}. \tag{8.22}$$

До сих пор предполагалось, что агенты в стране 2 выбирают стратегию отказа от инноваций. Поведение агентов в стране 2 считается оптимальным, если вдоль равновесной траектории выполняется условие $v_2(t) < \eta_2$. Так как v_2 возрастает по параметру N_2/N_1, то (если первоначально N_2/N_1 ниже равновесного значения в устойчивом состоянии) необходимое условие заключается в том, что $v_2^* < \eta_2$, т. е. из выражения (8.22) следует, что:

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} < 1. \tag{8.23}$$

Другими словами, страна 2 стоит ниже страны 1 по показателям производительности A_2/A_1 и вклада труда L_2/L_1[1)], а также инновационным издержкам η_1/η_2. Если неравенство (8.23) выполняется, то у агентов страны 2 не будет стимула заниматься исследовательской деятельностью (так как всегда выполняется условие $v_2[t] < \eta_2$). Более того, производители в стране 1 никогда не будут заимствовать технологию,

[1)]Масштаб производства, за который отвечает переменная L_i, влияет на рост показателей положительно, поскольку предполагается, что издержки копирования и создания инноваций являются фиксированными и не зависят от объемов экономической деятельности в стране. Однако если издержки зависят от масштаба, как в некоторых моделях, рассмотренных в гл. 6, то вывод может быть другим.

потому что не существует товаров, технологию производства которых они могли бы заимствовать. Таким образом, равновесным является уже ранее описанное состояние, в котором страна 1 является постоянным лидером, а страна 2 — постоянным последователем. В следующем разделе мы обсудим результаты, когда неравенство не соблюдается.

Так как $(N_2/N_1)^* < 1$, из выражения (8.15) следует, что соотношение выпусков на одного работника $(y_2/y_1)^*$ будет меньше единицы при $A_2 \leqslant A_1$. (Отметим, что при $A_2 > A_1$ неравенство из выражения (8.23) выполняется, если $L_2 < L_1$ или $\eta_2 > \eta_1$.) Таким образом, выпуск на одного работника в стране-последователе в устойчивом состоянии, скорее всего, не достигнет уровня выпуска в стране-лидере. Возможность заимствования не является достаточным условием, позволяющим выровнять уровни выпусков на одного работника в долгосрочном периоде.

Потребление C_2 в устойчивом состоянии растет с постоянным темпом прироста γ_1. Траектория потребления может быть определена из бюджетного ограничения страны 2: C_2 равен выпуску Y_2 (из выражения (8.13)) минус количество товаров, направленных на производство промежуточной продукции N_2X_2 (где X_2 задается выражением (8.12)), минус количество ресурсов, затрачиваемых на копирование. Вдоль равновесной траектории последнее вычитаемое определяется из формулы

$$v_2^*\dot{N}_2 = v_2^*\gamma_1 N_2,$$

где v_2^* задается выражением (8.22). Формулу для C_2 и аналогичную формулу для C_1 можно преобразовать таким образом, чтобы определить соотношение потреблений на душу населения в устойчивом состоянии $(c_2/c_1)^*$. Это отношение равно соотношению выпусков на одного работника в устойчивом состоянии $(y_2/y_1)^*$. Следовательно, если $A_2 \leqslant A_1$, то $(c_2/c_1)^* < 1$, т. е. в долгосрочном периоде потребление на душу населения в стране-последователе также будет ниже потребления в стране-лидере.

8.2.5. Динамика траектории перехода к устойчивому состоянию и конвергенция

Поведение экономических показателей страны 2 в динамике сложнее, чем показателей страны 1. (Напомним, что темп прироста в стране 1 одинаков во все моменты времени.) Причиной этого является то, что темп прироста потребления, заданный в (8.20), является функцией, линейной по норме прибыли r_2. Из выражения (8.19) следует, что норма прибыли составляет $(\pi_2 + \dot{v}_2)/v_2$, что включает изменение издержек копирования v_2. Мы знаем, что поток прибыли π_2 является постоянным.

Однако v_2 зависит от соотношения N_2/N_1. Если вдоль траектории перехода к устойчивому состоянию темп прироста N_2 отличается от темпа прироста N_1, то соотношение N_2/N_1 будет отвечать за динамику перехода, так же как норма прибыли r_2 и темп прироста потребления.

В данном разделе мы рассмотрим динамику показателей страны 2 при движении к устойчивому состоянию. Это поведение мы будем анализировать с помощью дифференциальных уравнений по переменным C_2 и N_2. (Так как Y_2 пропорционально N_2, что следует из выражения (8.13), то динамика показателя Y_2 будет совпадать с динамикой N_2.) Мы знаем, что в устойчивом состоянии N_2 и C_2 растут с постоянным темпом прироста. Из проведенного в гл. 4 анализа следует, что при построении фазовой диаграммы, отражающей качественные изменения в экономике, следует работать с фазовыми и управляющими переменными, которые остаются без изменений в устойчивом состоянии. Так как N_2 и N_1 растут с одинаковым постоянным темпом прироста, то в долгосрочном периоде отношение N_2/N_1 является константой. Используем это соотношение в качестве фазовой переменной. Чтобы упростить запись, введем обозначение $\hat{N} \equiv N_2/N_1$. Мы знаем, что в устойчивом состоянии C_2 и N_2 растут с одинаковым темпом прироста, а значит, C_2/N_2 также является постоянным. Это соотношение может выступить в качестве управляющей переменной. Введем обозначение $\chi_2 \equiv C_2/N_2$. Так как Y_2 пропорциональна N_2 (согласно (8.13)), то значение χ_2 будет пропорционально отношению выпуска к потреблению C_2/Y_2.

Проанализируем динамику показателей χ_2 и $\hat{N}$. Для удобства расчетов предположим, что в выражении (8.11) издержки являются функцией с постоянной эластичностью:

$$\nu_2 = \eta_2 \cdot \hat{N}^{\sigma} \tag{8.24}$$

для $\hat{N} < 1$, где $\sigma > 0$. Отметим, что v_2 достигает значения η_2, когда $\hat{N}$ достигает 1. Это свойство использовалось и при построении графика на рис. 8.1. Из выражений (8.22) и (8.24) следует, что отношение N_2 к N_1 в устойчивом состоянии равно:

$$\hat{N}^* = \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2}\right]^{1/\sigma}. \tag{8.25}$$

Предполагается, что параметры удовлетворяют неравенству (8.23), т. е. $\hat{N}^* < 1$, как и показано на рис. 8.1.

Темп прироста χ_2 определяется как

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{\dot{C}_2}{C_2} - \frac{\dot{N}_2}{N_2}.$$

Рассчитаем темпы прироста C_2 и N_2.

Темп прироста потребления в стране 2 задается формулой (8.20). Подставив в нее выражение для нормы прибыли r_2 из (8.19) и для издержек копирования v_2 из (8.26), получаем

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{\pi_2}{\nu_2} + \sigma \cdot \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} - \rho \right]. \tag{8.26}$$

Следовательно, для того чтобы определить темп прироста потребления C_2, необходимо первоначально определить $\hat{N}$, который рассчитывается как разница в темпах прироста N_2 и N_1:

$$\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{\dot{N}_2}{N_2} - \frac{\dot{N}_1}{N_1}.$$

Изменение N_2 определяется из бюджетного ограничения

$$Y_2 = C_2 + N_2 X_2 + v_2 \dot{N}_2.$$

Другими словами, общий выпуск Y_2 (из выражения (8.13)) равен сумме общего потребления C_2, количества ресурсов $N_2 X_2$, идущих на производство промежуточной продукции (где X_2 задается выражением (8.12) и где предельные издержки производства единицы промежуточной продукции равны 1), а также количества ресурсов, направляемых на заимствование (равных произведению издержек копирования единицы продукции v_2 и количества новых продуктов, заимствованных в течение периода $\dot{N}_2$). Преобразовав ресурсное ограничение с использованием формул (8.13) и (8.12), получаем

$$\dot{N}_2 = \frac{1}{\nu_2} \cdot \left[\pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot N_2 - C_2 \right]. \tag{8.27}$$

Разделим обе части равенства на N_2 и рассчитаем темп прироста N_2, воспользовавшись формулой (8.24) для издержек копирования v_2:

$$\frac{\dot{N}_2}{N_2} = \frac{1}{\eta_2 \cdot \hat{N}^\sigma} \cdot \left[\pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} - \chi_2 \right]. \tag{8.28}$$

Теперь мы можем рассчитать темпы прироста χ_2 и $\hat{N}$. В выражении (8.28) вычтем γ_1 из обеих частей равенства и получим темп прироста $\hat{N}$:

$$\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\eta_2 \cdot \hat{N}^\sigma} \cdot \left[\pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} - \chi_2 \right] - \gamma_1. \tag{8.29}$$

Подставив $\dot{\hat{N}}/\hat{N}$ из выражения (8.29) в выражение (8.26), получаем формулу для темпов прироста C_2. Вычтем $\dot{N}_2/N_2$ из обеих частей

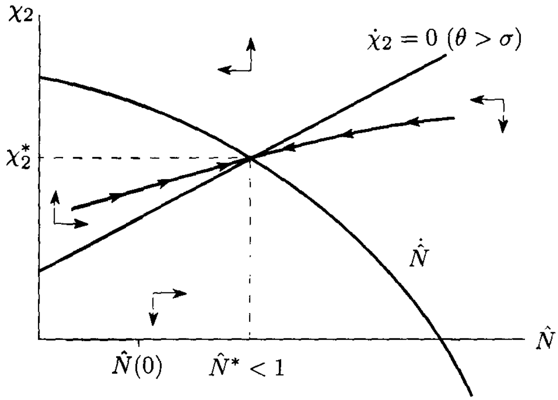


Рис. 8.2. Фазовая диаграмма для страны 2, когда $\theta > \sigma$. Траектория $\dot{\hat{N}} = 0$ имеет отрицательный наклон и является устойчивой. Траектория $\dot{\chi}_2 = 0$ имеет положительный наклон и является неустойчивой при $\theta > \sigma$

равенства (8.28) и получим темп прироста χ_2:

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta\eta_2 \cdot \hat{N}^\sigma} \cdot \left\{\pi_2 + (\theta - \sigma) \cdot \left[\chi_2 - \pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha}\right]\right\} - \frac{1}{\theta} \cdot (\sigma\gamma_1 + \rho). \quad (8.30)$$

Выражения (8.29) и (8.30) формируют систему автономных дифференциальных уравнений для переменных $\hat{N}$ и χ_2. В предыдущем разделе мы уже обсудили проблемы устойчивого состояния. Динамика может быть описана с помощью стандартной двумерной фазовой диаграммы в пространстве $(\hat{N}, \chi_2)$.

Уравнение траектории $\dot{\hat{N}} = 0$ задается формулой

$$\chi_2 = \left[\pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha}\right] - \eta_2 \cdot \gamma_1 \cdot \hat{N}^\sigma.$$

Эта траектория в пространстве $(\hat{N}, \chi_2)$ имеет отрицательный наклон, как показано на рис. 8.2 и 8.3. Из (8.29) следует, что $\dot{\hat{N}} = 0$ является устойчивой траекторией, т. е. увеличение $\hat{N}$ приведет к уменьшению значения $\dot{\hat{N}}$ в окрестности траектории.

График $\dot{\chi}_2 = 0$ задается формулой

$$\chi_2 = \pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} - \frac{\pi_2}{\theta - \sigma} + (\sigma\gamma_1 + \rho) \cdot \eta_2 \cdot \frac{\hat{N}^\sigma}{\theta - \sigma}.$$

Отметим, что наклон линии зависит от знака выражения $\theta - \sigma$. Если $\theta > \sigma$, то линия имеет положительный наклон, как показано на рис. 8.2.

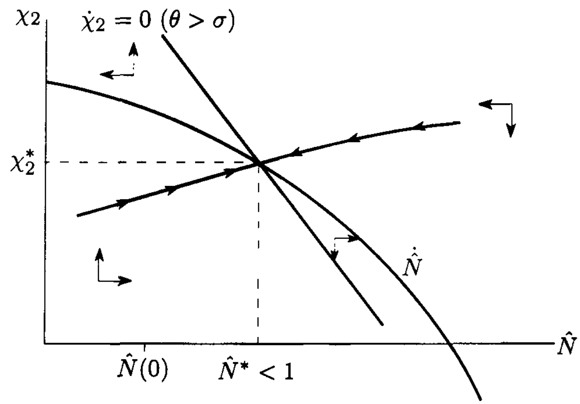


Рис. 8.3. Фазовая диаграмма для страны 2, когда $\theta < \sigma$. Траектория $\dot{\hat{N}} = 0$ вновь является устойчивой и имеет отрицательный наклон. Линия траектории $\dot{\chi}_2 = 0$ имеет отрицательный наклон, а сама траектория устойчива при $\theta < \sigma$

Эта траектория является неустойчивой, так как с ростом χ_2 увеличивается и $\dot{\chi}_2$.

Направления движения показателей в динамике на рис. 8.2 отмечены стрелками в четырех областях, образованных линиями траекторий с нулевым ростом. Единственная траектория, где отсутствует неустойчивость параметров $\hat{N}$ и χ_2, является седловая траектория, изображенная на рис. 8.2 стрелками. Неустойчивые траектории также можно исключить при рассмотрении равновесия по аргументам, аналогичным параметрам из неоклассической модели роста гл. 2. Если первоначальное состояние $\hat{N}(0) < \hat{N}^*$, то $\hat{N}$ и χ_2 монотонно растут при переходе к устойчивому состоянию.

На рис. 8.3 изображен случай, когда $\theta < \sigma$. Из выражения (8.30) следует, что траектория, задаваемая выражением $\dot{\chi}_2 = 0$, имеет отрицательный наклон и является устойчивой. (Мы можем показать, что наклон этой кривой более крутой, чем линии, задаваемой $\dot{\hat{N}} = 0$.) В результате седловая траектория вновь имеет положительный наклон, т. е. $\hat{N}$ и χ_2 вновь монотонно растут при переходе от $\hat{N}(0)$ к $\hat{N}^*$[1].

Поскольку $\hat{N}$ и χ_2 всегда монотонно растут при переходе к устойчивому состоянию, то из выражения (8.29) следует, что темп прироста $\hat{N}$

[1] Если $\theta = \sigma$, то траектория $\dot{\chi}_2 = 0$ является вертикальной прямой. В таком случае равновесная устойчивая траектория также имеет положительный наклон.

постепенно падает до нуля, что является темпом прироста в устойчивом состоянии. (Монотонное увеличение $\hat{N}$ означает монотонное увеличение v_2.) Таким образом, во время перехода N_2 растет быстрее N_1 (темпы заимствования опережают темпы появления инноваций), однако темп прироста N_2 постепенно падает до темпа прироста N_1. В устойчивом состоянии темпы прироста заимствований и возникновения инноваций находятся на одном уровне γ_1 и соотношение $\hat{N} \equiv N_2/N_1$ является константой.

Темпы прироста страны-последователя замедляются по мере приближения к устойчивому состоянию, так как издержки копирования v_2 постепенно возрастают. Увеличение v_2 следует воспринимать в качестве аналога убывающей отдачи от заимствований. В стандартной неоклассической модели убывающая отдача от капитала играла такую же роль.

Из выражения (8.26) следует, что постепенное увеличение $\hat{N}$ и постепенное падение $\dot{\hat{N}}/\hat{N}$ будут означать и постепенное уменьшение темпов прироста потребления в стране 2, обозначаемое через $\dot{C}_2/C_2$. Таким образом, из выражения (8.20) следует, что величина r_2 монотонно убывает и в устойчивом состоянии снижается до величины r_1.

Так как y_2 — выпуск на одного работника в стране 2 — пропорционален N_2 (см. выражение (8.13)), то темп прироста y_2 превосходит величину γ_1 во время переходного периода, однако постепенно снижается до уровня γ_1. Таким образом, в модели наблюдается уже известный нам тип конвергенции, когда выпуск в стране-последователе растет быстрее, чем в стране-лидере, однако разница темпов прироста постепенно сокращается, по мере того как страна-последователь догоняет лидера.

Как ранее отмечалось, y_2 – выпуск на одного работника в стране-последователе — в устойчивом состоянии не достигнет значения величины выпуска в стране-лидере y_1: т. е. $(y_2/y_1)^* < 1$. Из формул (8.15) и (8.25) следует, что $(y_2/y_1)^*$ является функцией, возрастающей по A_2/A_1 и L_2/L_1 и убывающей по η_2/η_1.

8.3. Постоянные (или медленно растущие) издержки копирования

Равновесие, о котором речь шла до сих пор, рассматривается при условии, что издержки копирования v_2 по мере увеличения $\hat{N}$ значительно возрастают. В частности, на рис. 8.1 показана ситуация, когда v_2 выше v_2^* при $\hat{N} \equiv N_2/N_1 < 1$. (При этом необязательно, чтобы v_2 было равно η_2, когда N_2/N_1 достигает 1.) На рис. 8.4 изображен альтернативный

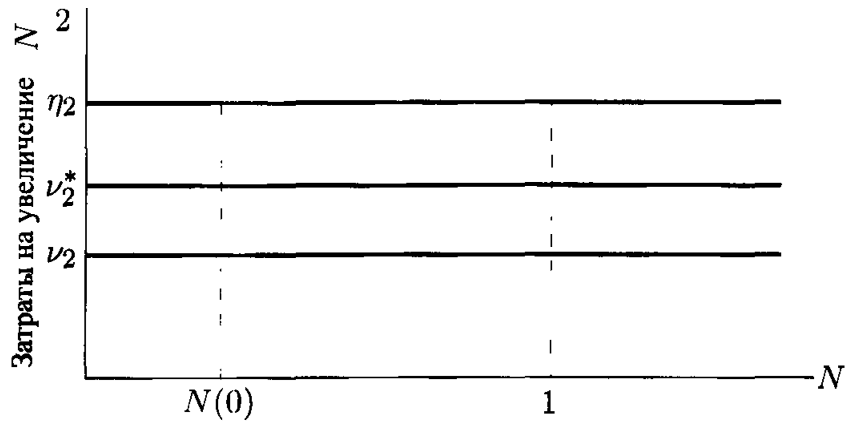


Рис. 8.4. Низкие постоянные издержки заимствования в стране 2. Стоимость заимствований в стране 2 v_2 постоянна и ниже значения параметра в устойчивом состоянии v_2^*, которое в свою очередь ниже затрат на инновации η_2

случай, когда значение v_2 постоянно и невелико, так что $v_2 < v_2^*$. Анализ будет таким же, если v_2 медленно растет и при N_2/N_1, равном 1, достигает значения ниже v_2^*.

Интуитивно ясно, что если значение v_2 мало (т. е. ниже v_2^*), то процесс заимствования будет происходить значительно быстрее, так что, в итоге, будут заимствованы технологии производства всех товаров, разработанных в стране 1. Следовательно, к какому-то конечному периоду T будет достигнуто $\hat{N} = 1$. В этот момент времени на рынке будет избыточное количество агентов, готовых заплатить v_2 за заимствование одной из инноваций страны 1, которые продолжают появляться с темпом прироста γ_1. В равновесии проблему избыточного предложения со стороны агентов необходимо решить. Более того, для $t < T$, т. е. там, где $\hat{N} < 1$, агенты страны 2 понимают, что величина избыточного предложения будет далее расти, поэтому их предыдущие решения относительно объемов заимствования технологий должны соответствовать этим ожиданиям.

8.3.1. Устойчивое состояние

Для простоты начнем с конца, т. е. рассмотрим случай, когда $t > T$ и $\hat{N} = 1$ уже достигнуто. В этом случае на основе проведенного анализа логично выдвинуть гипотезу о том, что страна 2 будет в устойчивом состоянии, в котором N_2 растет с тем темпом прироста γ_1, с которым растет N_1, поэтому $\hat{N} = 1$ сохраняется всегда. В этом случае товары, изобретаемые в стране 1, тут же заимствуются страной 2[1]. Величина C_2 также растет с темпом прироста γ_1, поэтому $\chi_2 \equiv C_2/N_2$ не меняется со временем.

Предположим, что r_2 равно π_2/v_2, что следует из выражения (8.19), когда v_2 константа. В таком случае $r_2 > r_1$. Этот результат получается из формулы (8.22) для v_2^* с использованием выражения (8.6) для r_1 и условия $v_2 < v_2^*$ из рис. 8.4. Но из $r_2 > r_1$ следует, что C_2 будет расти быстрее, чем γ_1 (темп прироста C_1), поэтому страна 2 не будет находиться в устойчивом состоянии. Проблема заключается в том, что копирование является слишком выгодным при издержках v_2, чтобы в устойчивом состоянии C_2 и N_2 росли с темпом прироста γ_1. Если бы норма прибыли составляла π_2/v_2, то агенты страны 2 затрачивали бы такое количество ресурсов на копирование, что темп прироста N_2 превышал бы γ_1. Но поскольку скорость появления новых продуктов лишь γ_1, то в результате часть ресурсов, идущих на копирование, затрачивается неэффективно. Следовательно, тем или иным способом норма прибыли в стране 2 должна быть снижена до величины r_1, чтобы распределение ресурсов соответствовало устойчивому состоянию.

Если $N_2 = N_1$ и агенты в стране 2 тратят на копирование ресурсы в размере $v_2\gamma_1 N_1$, то N_2 будет расти, как и N_1, с постоянным темпом прироста γ_1. Однако если каждый индивид из страны 2 полагает, что может получить копию продукта, заплатив лишь v_2, то сумма затрат на копирование превысит величину $v_2\gamma_1 N_1$, т. е. будет повышенный спрос на товары для копирования. Предположим, что при наличии избыточного спроса в данной ситуации право на монопольное использование товаров в стране 2 распределяется случайным образом. В частно-

---

[1] Если мы считаем, что процесс копирования товаров занимает время, то продукция, сделанная по заимствованной технологии, появляется с лагом, и разрыв между страной 1 и страной 2 сохраняется всегда. В работе Jovanovic and Lach (1991) разработана модель, которая включает временной лаг на заимствование. В работе Mansfield, Schwartz and Wagner (1981, с. 909) на основе выборки по 48 инновациям устанавливается, что отношение времени, затрачиваемого на заимствование, ко времени, необходимого для создания нового продукта, в среднем составляет 70%. Лаг, в течение которого о достижении становится известно в отрасли, оказывается достаточно коротким. Например, Mansfield (1985) говорит о том, что 70% всех инноваций становятся известными конкурентам в течение года. К схожему выводу пришли Caballero and Jaffe (1993), исследуя данные о цитировании патентов (т. е. ссылки на предыдущие изобретения, позволившие сделать текущее изобретение). Они рассмотрели время, за которое инновационные идеи одного исследователя начинают влиять на деятельность других исследователей и пришли к выводу, что распространение знаний происходит достаточно быстро, лаг при этом составляет от одного до двух лет.

сти, мы предполагаем, что вероятность каждого агента на получение монопольного права пропорциональна величине затрат, потраченных на усилия по копированию. В равновесии общее количество ресурсов, затраченных потенциальными заемщиками, будет составлять величину $v_2^*\gamma_1 N_1$, где $v_2^* > v_2$ — это те издержки, при которых норма прибыли станет равной r_1 (см. выражения (8.21), (8.22) и рис. 8.4)[1]. Это повышение фактических издержек копирования до v_2^* предотвращает вход на рынок других потенциальных заемщиков. Тот же самый результат будет получен, если мы рассмотрим более полную модель, в которой потенциальные заемщики конкурируют друг с другом за право собственности на использование промежуточного продукта в стране 2.

В устойчивом состоянии эффективные затраты на копирование составят $v_2^* > v_2$, а норма прибыли от копирования в стране 2 составит r_1. Эта норма доходности соответствует темпу прироста C_2 и N_2 в устойчивом состоянии, равному γ_1. Равновесное решение является таким же, как и на рис. 8.1, за исключением того, что $(N_2/N_1)^* = 1$. (Мы по-прежнему предполагаем, что $\eta_2 > v_2^*$, как показано на рис. 8.4; т. е. неравенство в выражении (8.23) сохраняется, и у агентов страны 2 нет стимулов к новаторской деятельности.)

8.3.2. Процесс перехода к устойчивому состоянию

Рассмотрим ситуацию, когда $t < T$, т. е. $N_2 < N_1$ и доступные для копирования товары предложены в богатом ассортименте. Норма прибыли в стране 2 должна равняться

$$r_2 = \frac{\pi_2}{\nu_2} \tag{8.31}$$

и быть постоянной. Темп прироста потребления в таком случае также постоянен и составляет

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\pi_2}{\nu_2} - \rho\right). \tag{8.32}$$

Этот результат соответствует выражению (8.26), где σ равна 0[2].

---

[1] Этот результат сохраняется лишь в том случае, когда риски, связанные с копированием, являются диверсифицированными и потенциальный заемщик оценивает только ожидаемые доходы.

[2] В выражении (8.24) при $\sigma = 0$ параметр v_2 не зависит от N_2/N_1. Однако в данном случае также выполняется $v_2 < \eta_2$.

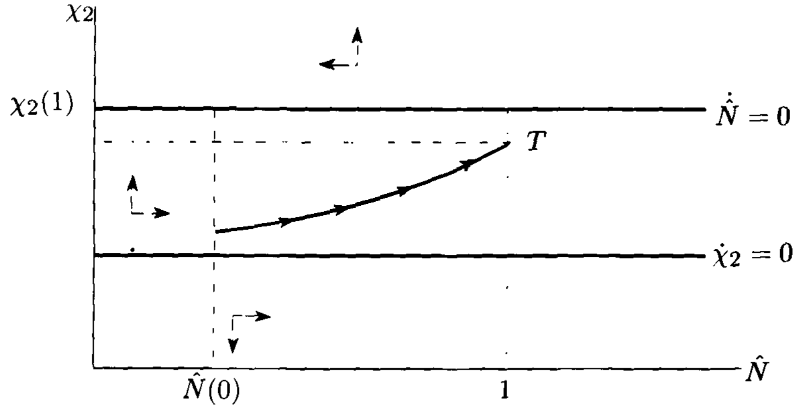


Рис. 8.5. Фазовая диаграмма для страны 2 в случае постоянной v_2. Траектория $\dot{\hat{N}} = 0$ является горизонтальной прямой, лежащей выше траектории $\dot{\chi}_2 = 0$, которая также является горизонтальной прямой. Седловая траектория в устойчивом состоянии расположена между двумя горизонтальными линиями и имеет положительный наклон

Формула для $\dot{\hat{N}}/\hat{N}$ совпадает с выражением (8.29), а для $\dot{\chi}_2/\chi_2$ – с выражением (8.30) при σ равна 0:

$$\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\nu_2} \cdot \left[\pi_2 \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} - \chi_2\right] - \gamma_1; \tag{8.33}$$

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\pi_2}{\nu_2} \cdot \left[1 - \theta \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha}\right] - \frac{\rho}{\theta} + \frac{\chi_2}{\nu_2}, \tag{8.34}$$

где вновь $\chi_2 \equiv C_2/N_2$.

Как и ранее, воспользуемся выражениями (8.33) и (8.34) для построения фазовой диаграммы в пространстве $(\hat{N}, \chi_2)$. На рис. 8.5 показан итоговый график. Обратите внимание на то, что траектория теперь имеет вид горизонтальной прямой. Можно легко показать, что (при $r_2 = \pi_2/v_2 > r_1$) траектория $\dot{\hat{N}} = 0$ находится выше $\dot{\chi}_2 = 0$, как изображено на рисунке: $\hat{N}$ будет уменьшаться при значениях, расположенных выше траектории $\dot{\hat{N}} = 0$, и расти при значениях, расположенных ниже; в то же время χ_2 будет расти и при значениях выше $\dot{\chi}_2 = 0$ и падать при значениях, находящихся ниже. На рис. 8.5 видно, что седловая траектория в устойчивом состоянии расположена между двумя горизонтальными прямыми и имеет положительный наклон. В данном случае мы изобразили траекторию таким образом, что она остается ниже линии $\dot{\hat{N}} = 0$, когда $\hat{N}$ достигает единицы. В последующем анализе мы рассмотрим этот случай более подробно.

На рис. 8.5 изображена ситуация, когда $\hat{N}$ и χ_2 растут монотонно. Увеличение $\hat{N}$ означает, что вдоль траектории $\dot{N}_2/N_2$ превосходит γ_1. Рост χ_2 означает, что исходя из выражения (8.29) отношение $\dot{N}_2/N_2$ строго убывает. Таким образом, это решение соответствует решению из разд. 8.2.5, поскольку предсказывает, что последователь будет расти быстрее лидера (при оценке роста числа наименований известных продуктов и выпуска), но разница в темпах прироста сокращается по мере того, как последователь догоняет лидера. Отличием является то, что $\dot{C}_2/C_2$ является теперь константой, превосходящей по величине γ_1 (см. выражение (8.32)).

Сложность решения заключается в анализе показателей в момент времени T, когда $\hat{N}$ достигает 1. После этого момента затраты на копирование $v_2^* > v_2$, а норма прибыли равна r_1. До этого момента издержки копирования составляют v_2, а норма прибыли (из выражения (8.31)) составляет

$$\frac{\pi_2}{v_2} > r_1.$$

Каждый, кто затрачивает v_2 на заимствование товара до момента времени T, в следующий момент получит прирост капитала, вызванный увеличением теневой цены заимствованного продукта с v_2 до v_2^*. В действительности в данной модели оказывается, что норма прибыли на копируемый продукт в момент времени T равна бесконечности. Такое удивительное поведение поддерживает равновесие величин, когда затраты на копирование малы и постоянны[1].

На рис. 8.6 изображены равновесные для страны траектории нормы прибыли r_2 и логарифма потребления $\log(C_2)$. Левее момента времени T норма прибыли равна π_2/v_2, наклон $\log(C_2)$, соответственно, постоянен и равен

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{\pi_2}{v_2} - \rho.$$

Правее T норма прибыли меньше, но также постоянна и равна π_1/v_1, а наклон $\log(C_2)$ будет также меньше, составляя $(1/\theta) \cdot (\pi_1/v_1 - \rho)$.

[1] Если мы введем в модель долгосрочные капитальные товары, траектория $r(t)$ в каждый момент времени будет соответствовать чистому предельному продукту капитала и никогда не будет бесконечной. Следовательно, вывод о том, что в какой-либо момент времени $r(t)$ может равняться бесконечности, зависит от справедливости предпосылки о том, что все товары являются товарами недлительного пользования.

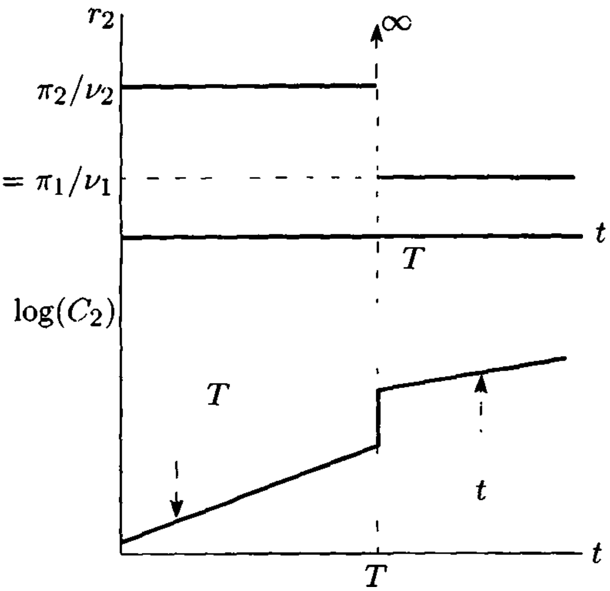


Рис. 8.6. Траектория r_2 и $\log(C_2)$ во времени, когда v_2 мало и постоянно. Значение нормы доходности r_2 постоянно до момента T и после, но уже на меньшем уровне. В момент времени T норма доходности стремится к бесконечности. Следовательно, наклон прямой $\log(C_2)$ до момента T и после постоянен, однако после T график становится более пологим

В момент времени T бесконечная норма прибыли (для момента времени) соответствует скачку в уровне $\log(C_2)$. Этот скачок соответствует общему ограничению на ресурсы страны 2, поскольку количество затрат на копирование резко уменьшается в тот же момент времени на то же количество[1]. Отметим, что в момент времени T (как и в любой другой момент времени) не происходит резких изменений в уровне общего выпуска.

Предположим теперь, что v_2 является не константой, а постепенно возрастающей величиной, при этом, когда $\dot{\hat{N}} = 1$, v_2 остается меньше v_2^*.

[1]Изменение количества ресурсов, затрачиваемых на копирование, приводит к двум компенсационным эффектам. Во-первых, использование ресурсов падает, так как темп роста N_2 снижается на дискретную величину. Во-вторых, использование ресурсов возрастает, поскольку каждая единица теперь стоит $v_2^* > v_2$. В равновесии (что предполагает бесконечную норму прибыли в момент времени T и, следовательно, скачок потребления вверх) в результате уменьшится использование ресурсов на заимствование. Также устойчивая теневая траектория, показанная на рис. 8.5, в момент времени T должна быть ниже прямой $\dot{\hat{N}} = 0$, чтобы соответствовать резкому падению $\dot{\hat{N}}$ и резкому увеличению χ_2 в момент времени T. (Прямые $\dot{\hat{N}} = 0$ и $\dot{\chi}_2 = 0$ после момента времени T сдвигаются вниз и вверх соответственно, так как значение v_2 заменяется на более высокое по уровню значение v_2^*.)

В таком случае в момент времени T также предполагается бесконечная норма прибыли и скачок в уровне потребления. Главным новым результатом является то, что r_2 будет монотонно падать при $t < T$, следовательно, и темп прироста C_2 будет также убывать. Таким образом, $\dot{C}_2/C_2$ будет оставаться постоянным только в том случае, если v_2 не будет изменяться совсем до момента времени T.

В итоге, выводы относительно темпов прироста последователя для случая медленно растущих издержек копирования качественно согласуются с выводами для модели из предыдущего раздела. В каждом случае более низкая величина N_2/N_1 предполагает более высокий темп прироста N_2, а следовательно, и Y_2. Это также справедливо и для темпов прироста C_2, за исключением того случая, когда издержки копирования v_2 не возрастают, пока N_2 не становятся равными N_1 в момент времени T.

8.4. Иностранные инвестиции и право на интеллектуальную собственность

Рассмотрим некоторые особенности иностранного инвестирования и соблюдения интеллектуальных прав собственности в процессе распространения новой технологии. В проведенном ранее анализе новатор из страны 1 платил стоимость η_1 для получения монопольного права на использование промежуточного продукта в стране 1. Однако новатор не имел прав собственности на использование промежуточной продукции в стране 2. Теперь же предположим, что новатор из страны 1 имеет пожизненное право собственности на использование промежуточной продукции в обеих странах. Эта ситуация возникает, если страны уважают право на интеллектуальную собственность иностранных граждан, что является главной темой продолжающихся переговоров о мировой торговле. Это право собственности делает невозможным для агентов страны 2 копирование продуктов без выплаты вознаграждения изобретателю.

Пусть затраты на адаптацию промежуточных продуктов из страны 1 в стране 2 составляют постоянную величину v_2. Мы рассматриваем эти издержки как затраты, понесенные изобретателем промежуточных продуктов в стране 1[1]. Предположим, что $v_2 < v_2^*$, заданного в выражении (8.22), так что в предыдущей модели, когда $N_2/N_1 < 1$, справедливо

[1] Оценка издержек, проведенная Teece (1977), о которой речь шла ранее, также может быть использована в данной ситуации.

$\gamma_2 > \gamma_1$ и $r_2 > r_1$. Издержки копирования в стране 2 настолько малы, что страна 2 будет расти быстрее, чем страна 1. Мы также предполагаем, что предприниматели в стране 2 не имеют стимулов к новаторской деятельности. Следовательно, все инновации происходят благодаря усилиям предпринимателей в стране 1.

Пусть страна 2 ранее была закрытой для иностранных инвестиций и не могла в полном объеме заимствовать инновации из страны 1. Пусть также в стране 2 не велась активная инновационная деятельность из-за относительно низких величин A_2 и L_2 или относительно высоких инновационных затрат η_2. Если страна 2 вдруг станет открытой для иностранных инвестиций, количество известных в стране 1 товаров, равное N_1. будет значительно превосходить количество доступных в стране 2 товаров N_2. Норма доходности иностранных инвестиций из страны 1 в страну 2 (т. е. доходность от приспособления для использования товаров в стране 2) задана формулой (8.31) и равна $r_2 = \pi_2/v_2$. Значение r_2 превосходит значение $r_1 = \pi_1/v_1$, определяемое для инноваций в формуле (8.6). (Этот результат получается из предпосылки $v_2 < v_2^*$ в выражении (8.22).) Так как в модели предполагается убывающая отдача от инноваций, исследователи в стране 1 будут первоначально направлять все свои ресурсы, расходуемые ранее на исследования и разработки, в качестве иностранных инвестиций в страну 2. (Проблема перераспределения ресурсов, расходуемых на R&D, не возникала ранее, хотя $r_2 > r_1$, из-за отсутствия глобального рынка капитала.)

В конечном счете, диспропорция из-за наличия неадаптированных продуктов будет преодолена (т. е. N_2 достигнет N_1) и станет невозможно достичь норму прибыли r_2, получаемую при просто адаптации. Тогда у исследователей в стране 1 появится стимул направлять ресурсы на разработку новых продуктов, т. е. расширять N_1. Однако норма прибыли теперь будет превосходить величину r_1, указанную в (8.6), поскольку предприниматель уже знает, что успешный продукт может быть также адаптирован в стране 2 при соответствующих затратах v_2, позволяющих использовать данный товар на правах монополии. Если, как уже отмечалось ранее, неравенство $v_2 < v_2^*$ сохраняется, то распространение продукции сразу же становится целесообразным.

Общий поток монопольной прибыли от изобретения товара в стране 1 и его одновременной адаптации для страны 2 равен сумме потоков, указанных в выражениях (8.4) и (8.14):

$$\tilde{\pi} = \pi_1 + \pi_2 = \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} \cdot \left[A_1^{1/(1-\alpha)} \cdot L_1 + A_2^{1/(1-\alpha)} \cdot L_2\right]. \quad (8.35)$$

Предположение, лежащее в основе расчета формулы (8.35), заключается в том, что промежуточные продукты, направляемые на производство товаров в стране 1, используются согласно технологии из выражения (8.1) — с параметром производительности A_1 (в то же время продукты, идущие в производство в стране 2, используются согласно технологии, указанной в (8.9)), с параметром производительности A_2. Другими словами, иностранные инвестиции приводят к тому, что промежуточные продукты из страны 1 становятся доступными в стране 2 быстрее, но не влияют на параметр производительности, который определяет производственный процесс в стране 2. Это предположение оказывается вполне уместным, если рассматривать A_2 как параметр, определяющий политику государства, которая затрагивает всех производителей в стране 2 (например, налогообложение, предоставление коммунальных услуг, защита прав собственности).

Новатор в стране 1 теперь затрачивает величину $\eta_1 + v_2$, чтобы обеспечить прибыль в размере $\tilde{\pi}$, рассчитываемую в (8.35). Соответственно, из условия свободного входа на рынок следует, что норма прибыли в стране 1 составляет:

$$\tilde{r}_1 = \frac{\tilde{\pi}}{\eta_1 + \nu_2} = \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} \cdot \left[\frac{A_1^{1/(1-\alpha)} \cdot L_1 + A_2^{1/(1-\alpha)} \cdot L_2}{\eta_1 + \nu_2}\right]. \tag{8.36}$$

Из неравенства $v_2 < v_2^*$ следует, что величина $\tilde{r}_1$ превосходит величину r_1 из выражения (8.6)[1].

Постоянная норма прибыли в выражении (8.36) соответствует устойчивому состоянию, в котором все количественные переменные (N_1, Y_1, C_1, N_2, Y_2 и C_2) растут с постоянным темпом прироста

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{\theta} \cdot (\tilde{r}_1 - \rho).$$

Это устойчивое состояние характеризуется одновременным появлением новых товаров N_1 и их адаптированных версий $N_2 = N_1$. Так как $\tilde{r}_1$ стало выше, то $\tilde{\gamma}_1$ также превосходит γ_1 из выражения (8.8), рассчитываемого для модели без иностранных инвестиций. Далее в главе мы обсудим влияние на благосостояние иностранных инвестиций и наличия прав собственности.

[1]Из условия $v_2 < v_2^*$ также следует, что $\tilde{r}_1 < r_2 = \pi_2/v_2$. Следовательно, как и подразумевалось ранее, предприятия из страны 1 первоначально адаптируют всю существующую продукцию для страны 2 и лишь затем займутся изобретением новых товаров.

8.5. Основные выводы о темпах прироста в странах-последователях

Из рассмотренных ранее моделей следует, что темп прироста выпуска на одного работника в стране 2 может быть записан как

$$\frac{\dot{y}_2}{y_2} = \gamma_1 + G\left[\frac{y_2}{y_1}, \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^*\right], \tag{8.37}$$

где частные производные функции G удовлетворяют условиям: $G_1 < 0$ и $G_2 > 0$. Эта функция также удовлетворяет условию $G(\cdot,\cdot) = 0$ при $y_2/y_1 = (y_2/y_1)^*$. Для темпов прироста не обязательно существует абсолютная конвергенция (в том понимании, в котором она рассматривалась в гл. 1). Причиной является то, что темп прироста в богатой стране не всегда ниже, чем темп прироста в бедной, т. е. возможна ситуация, когда $\dot{y}_2/y_2 < \gamma_1$ при $y_2/y_1 < 1$. Если в устойчивом состоянии уровень дохода в бедной стране относительно дохода богатой страны мал, т. е. мало соотношение $(y_2/y_1)^*$ (потому, например, что соотношение A_2/A_1 также невелико), то темп прироста в стране-последователе, рассчитываемый как $\dot{y}_2/y_2$, может быть ниже, чем темп прироста лидера γ_1, даже если страна-последователь беднее ($y_2 < y_1$). Темп прироста страны 2, т. е. $\dot{y}_2/y_2$, превышает γ_1, если $y_2/y_1 < (y_2/y_1)^*$.

В данном случае мы можем говорить об условной конвергенции, так как темп прироста страны-последователя $\dot{y}_2/y_2$ снижается с увеличением y_2/y_1 при заданном уровне $(y_2/y_1)^*$. Также для заданного уровня y_2/y_1 дробь $\dot{y}_2/y_2$ будет расти вместе с $(y_2/y_1)^*$. Другими словами, темп прироста в стране-последователе является функцией, возрастающей по показателю отдаленности от устойчивого состояния. Например, если правительство в стране 2 примет меры, благоприятствующие производству и инвестированию (такие, как низкие налоги на капитальные доходы или более эффективные меры по защите прав собственности), то изменение политического курса приведет к росту A_2. В этом случае $(y_2/y_1)^*$ возрастет и, следовательно, будет расти и $\dot{y}_2/y_2$.

В неоклассических моделях роста с технологическим прогрессом за счет расширения труда, рассмотренных в гл. 2, формула темпов прироста выпуска на душу населения в закрытой экономике аналогична формуле (8.37). Разница заключается в том, что γ_1 заменяется экзогенно коэффициентом технических изменений, обозначенным через x; y_2/y_1 заменяется на $\hat{y}$, т. е. уровнем выпуска на одного *эффективного* работника (концепция «эффективный работник» позволяет учитывать темп прироста x, возникающий благодаря техническому прогрессу); $(y_2/y_1)^*$

заменяется на $(\hat{y})^*$, означающий величину выпуска на одного эффективного работника в устойчивом состоянии. Таким образом, формула прироста для стандартной модели может быть записана как

$$\frac{\dot{y}}{y} = x + H[\hat{y}, (\hat{y})^*], \tag{8.38}$$

где частные производные функции H удовлетворяют условиям: $H_1 < 0$, $H_2 > 0$ и $H(\cdot,\cdot) = 0$ при $\hat{y} = (\hat{y})^*$. Величина $(\hat{y})^*$ зависит от факторов, включенных в параметр A (таких, как политика), а также от склонности к сбережению. Более высокий уровень A означает увеличение $(\hat{y})^*$, в то время как более высокие значения параметров предпочтения (ρ и θ) способствуют уменьшению $(\hat{y})^*$.

Различие двух классов модели заключается в том, что свободным членом в выражении (8.37) является значение параметра γ_1, т. е. темп прироста ведущей экономики (или ведущих экономик), в то время как в формуле (8.38) свободным членом является значение параметра x, означающего экзогенно заданный темп технического прогресса. При проведении эмпирических исследований γ_1 определяется как средний темп прироста выпуска на одного работника в развитых странах[1]. Параметр x нельзя определить напрямую, кроме того, его значение, скорее всего, будет меняться во времени или в зависимости от страны.

Если все последователи заимствуют продукцию и технологии из одних и тех же стран-лидеров (так как издержки копирования v_i в любом случае одинаковы) и если экзогенно задаваемые темпы технологического прогресса одинаковы во всех странах в конкретный момент времени, то, согласно обеим моделям, значение свободного члена будет одинаково для всех стран. В пространственном анализе в выражении (8.37) накладывается ограничение на значение свободного члена, которое должно равняться наблюдаемой величине γ_1, в то же время в выражении (8.38) подобного ограничения не предполагается. Таким образом, модель распространения технологии является ограничением неоклассической модели экономического роста, и эту модель можно проверить эмпирически.

В панельном анализе свободный член может изменяться во времени, но только в соответствии с наблюдаемыми изменениями γ_1. В выражении (8.38) это значение не изменится, если рассматривать такую

[1] На страну-последователя влияет темп прироста N_1, а не темп прироста выпуска на одного работника в стране-лидере y_1, хотя в данной модели эти величины совпадают. В целом не удается напрямую оценить ни N_1, ни N_2, хотя возможно оценить стоимость патентов и суммарные затраты на исследования и разработки.

неоклассическую модель роста, в которой темп технологического прогресса x не меняется (как во времени, так и по странам). Если же темп технологических изменений задается экзогенно, но не обязательно является константой, то в выражении (8.38) свободная переменная может неограниченно изменяться во времени. В данном случае модель распространения технологии также является ограничением неоклассической модели роста и ее также можно эмпирически оценить.

С учетом выражений $G(\cdot)$ и $H(\cdot)$, ключевой особенностью, следующей из выражения (8.37), является то, что темп прироста зависит от различных параметров страны, рассмотренных *относительно* параметров ведущей страны (или группы стран); в то же время в выражении (8.38) рассматриваются абсолютные значения параметров. Пусть, например, темп прироста США (рассматриваемых в качестве репрезентативного лидера) составляет 2% в год (т. е.$\gamma_1 = 2\%$). Из выражения (8.37) следует, что для заданного γ_1 темп прироста типичной страны-последователя, например Мексики, зависит от качества ее политических и экономических институтов (определяющих значение параметра A_2), рассмотренных в сравнении с институтами в США. Из выражения (8.38) следует, что при определении темпов прироста в Мексике важное значение имеет качество институтов в Мексике, но не обязательно сравнивать эти параметры с параметрами в США.

Если для всех стран существует один лидер, то в пространственном анализе все характеристики лидера имеют одинаковую свободную переменную. Однако в панельном анализе изменение характеристик лидера (в частности, изменение факторов, влияющих на γ_1) будет значительно сдвигать во времени значение свободной переменной. Эмпирический анализ будет менее затруднительным, если можно определить различия в издержках копирования между группами стран или во времени. Jaumotte (1999) использовала эту идею, утверждая, что издержки копирования будут тем ниже, чем выше объемы торговли между страной последователем и соответствующей группой стран-лидеров[1]. Главная идея заключается в том, что страны-последователи, импортируя продукцию у стран-лидеров, способствуют более быстрому восприятию передовых технологий.

Jaumotte (1999) рассматривала выборку из 63 развивающихся стран за период времени с 1960 по 1994 г. Эти страны являются группой

[1]В работах Chua (1993), а также Easterly and Levine (1997) исследуется гипотеза о том, что рост страны зависит от уровня развития других стран. Однако этот анализ проводился по странам, расположенным рядом географически, а не связанным международной торговлей.

стран-последователей, аналогичных стране 2. Лидеры, которые в нашем анализе являются страной 1, — это страны Организации экономического сотрудничества и развития и Израиль. Jaumotte воспользовалась системой расчета показателей, которые будут рассмотрены в гл. 10, для оценки траектории N_i во времени для каждой страны из обеих групп. Вначале она определила влияние наблюдаемого роста ресурсов (физический капитал, человеческий капитал, оцененный как уровень образования, труд) и отделила его от наблюдаемого роста выпуска, остатки в таком случае означают изменение N_i. Она предположила, что издержки адаптации v_2 положительно зависят от N_2/N_1, как и в выражении (8.24), но отрицательно от отношения импорта из стран-лидеров к ВВП стран-последователей.

Jaumotte (1999, табл. 2) показала, что темп прироста технологии в стране-последователе, измеряемый как $\dot{N}_2/N_2$, зависит отрицательно от N_2 и положительно от N_1. Более того, эти результаты соответствуют гипотезе о том, что отношение N_2 к N_1 влияет на $\dot{N}_2/N_2$. Она также показала, что чем больше объем торговли, тем отношение $\dot{N}_2/N_2$ более чувствительно к N_2/N_1. В рамках модели этот эффект возникает, если большие объемы торговли снижают издержки заимствований технологий. Таким образом, эти эмпирические результаты подтверждают справедливость модели распространения технологии из данной главы.

В работе Caselli and Coleman (2001) в качестве прямой меры распространения технологии рассматривается величина импорта высокотехнологического оборудования, главным образом компьютеров. В частности, для стран, которые не экспортируют компьютеры, эта величина является хорошей оценкой размера инвестиций в компьютерные технологии. Тогда основная идея заключается в том, что увеличение количества компьютеров означает рост использования продвинутых технологий.

В работе Caselli and Coleman (2001, табл. 2), как и у Jaumotte (1999), показано, что мера распространения технологии увеличивается благодаря растущему импорту промышленной продукции из стран ОЭСР. Другой результат, согласующийся с уже упоминавшейся ранее теорией, разработанной в исследовании Nelson and Phelps (1996), означает, что чем больше количество человеческого капитала в стране, тем выше скорость распространения технологии. Этот результат означает, что более доступный человеческий капитал понижает издержки адаптации сложных технологий или, что то же самое, повышает норму прибыли от адаптации. Человеческий капитал, который в данной модели является ключевым фактором, оценивается как среднее количество лет посещения занятий в школе и университете. Эта оценка имеет смысл, поскольку знания, получаемые на более высоком уровне образования, особенно важны при использовании новых сложных технологий. В работе Caselli and Coleman (2001) также устанавливается, что скорость распространения технологии будет тем выше, чем лучше защищены права собственности и чем ниже доля выпуска, создаваемая в сельском хозяйстве.

8.6. Смена технологического лидера

Обратимся вновь к ситуации, где новатор обладает правом на собственность только в своей родной стране. Ранее мы рассматривали ситуацию, когда $(A_2/A_1)^{1/(1-\alpha)} \cdot (L_2/L_1) \cdot (\eta_1/\eta_2) < 1$, что показано в выражении (8.23), т. е. соответствующие параметры страны 2 ниже, чем страны 1. Это неравенство, как показано на рис. 8.1 и 8.4, обеспечивает то, что на вертикальной оси v_2^* будет находиться ниже η_2. По этой причине у агентов страны 2 нет стимулов к инновациям.

Предположим теперь, что неравенство перевернуто:

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} > 1, \tag{8.39}$$

т. е. рост в стране 2, по сути, опережает рост в стране 1. Так как по-прежнему $N_2(0) < N_1(0)$, страна 2 в начальный момент времени находится на более низкой технологической ступени. Это возможно, когда, например, страна 2 отставала от страны 1 достаточно долгое время, но последние политические изменения (отразившиеся на увеличении A_2) превратили страну 2, по сути говоря, в лидера.

Вернемся к ситуации, изображенной на рис. 8.1, когда v_2 растет вместе с N_2/N_1 и достигает η_2, когда N_2/N_1 становится равным 1. Неравенство (8.39) означает, что величина v_2^*, задаваемая (8.22), теперь превосходит η_2. Таким образом, из рис. 8.7 видно, что N_2/N_1 достигает 1 и, соответственно, v_2 достигает η_2 в точке, в которой издержки на увеличение N_2 по-прежнему меньше v_2^*. Этот результат означает, что агенты страны 2 считают выгодным увеличение соотношения N_2/N_1 выше единицы, даже при инновационных издержках, равных η_2. Таким образом, поскольку все товары из страны 1 были заимствованы, страна 2 переключается на инновации.

Изобретения в стране 2 позволяют создавать продукты, которые могут быть заимствованы страной 1. Так как издержки копирования ниже, чем η_1, агенты страны 1 теперь предпочитают заимствовать продукты.

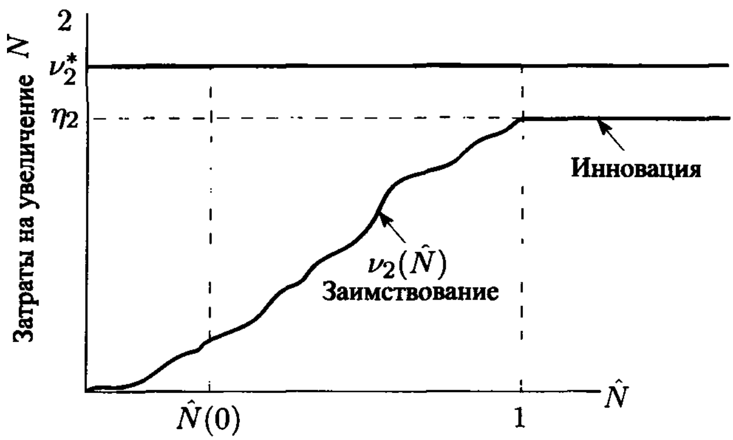


Рис. 8.7. Затраты на технологические изменения в стране 2, если $v_2^* > \eta_2$. Издержки копирования в стране 2, т. е. v_2, являются возрастающей по N_2/N_1 функцией и достигают издержек на инновации η_2, когда N_2/N_1 становится равным 1. Предполагается, что в устойчивом состоянии издержки копирования v_2^* превосходят η_2

а не изобретать их. Страна 1 превращается из лидера в последователя[1]. Отметим, что благосостояние в стране 1 будет улучшаться за счет более технологически развитой страны 2[2].

Первоначальная модель может быть использована и после смены лидера, однако необходимо учитывать, что позиции стран теперь противоположны. Страна 2 стала постоянным технологическим лидером, а страна 1 — последователем. Норма прибыли в стране 2, т. е. r_2, и темпы прироста γ_2 (показателей N_2, Y_2 и C_2) после смены постоянны. Величины r_2 и γ_2 определяются из формул (8.6) и (8.9) при замене индексов с 1 на 2. В устойчивом состоянии соотношение количества продуктов

---

[1]В случае когда $v_2(N_2/N_1)$ достигает η_2 при N_2/N_1, равном 1 (как показано на рис. 8.1 и 8.7), страна 1 сразу же превращается из лидера в последователя, а страна 2 — из последователя в лидера. Эта смена лидера предполагает наличие переходного периода, включающего как инновационную деятельность, так и заимствование технологий, когда $v_2(N_2/N_1)$ поднимается выше η_2 еще до того, как N_2/N_1 достигает 1, и если в стране 1 используется аналогичная функция издержек. В этой исправленной формулировке страна 2 в какой-то момент времени перейдет от полного заимствования к комбинированию заимствований и инноваций. Затем, после определенного конечного числа изобретений страны 2, затраты на копирование в стране 1 станут достаточно низкими, и страна 1 перейдет к комбинированию инноваций и заимствований. В конце концов, страна 2 перестанет заниматься копированием, а страна 1 перестанет производить инновации.

[2]Так как конечный продукт является гомогенным, то повышение производительности в стране 2 не создаст неблагоприятного ценового эффекта в стране 1.

$(N_2/N_1)^*$ по-прежнему задается формулой (8.25), но теперь превосходит единицу.

На рис. 8.2 и 8.3 показана динамика после смены лидера для страны 1 при $\hat{N}$, равном N_1/N_2, и χ_1, замененном на χ_2. Единственное отличие от ранее рассматриваемой ситуации заключается в том, что начальное значение $\hat{N}$ равно 1 и находится правее $\hat{N}^*$. Траектория в динамике характеризуется монотонно убывающими параметрами $\hat{N}$ и $\chi_1 \equiv C_1/N_1$. Монотонное убывание $\hat{N}$ означает, что страна 2 продолжает расти быстрее страны 1 и после смены лидера. С падением $\hat{N}$ издержки копирования v_1 в стране 1 падают, а норма прибыли и темпы прироста в стране 1 увеличиваются. В устойчивом состоянии норма прибыли в стране 1 равна r_2 и является постоянной, темпы прироста (показателей N_1, Y_1 и C_1) достигают значения γ_2 и также постоянны[1].

Смена технологического лидера в модели может произойти только один раз, если основные параметры A_i, L_i и η_i не меняются. Смена происходит в момент времени, когда страна, первоначально обладающая знаниями о технологии производства лишь небольшого количества товаров N_i, затем опередит лидера, т. е. станет справедливым неравенство (8.39). Таким образом, данный пример отличается от моделей смены лидера, исследуемых в работах Brezis, Krugman and Tsiddon (1993); Jovanivic and Nyarko (1996), Ohyama and Jones (1995). В этих моделях смена технологического лидера отражала эффект запаздывания склонности к созданию и адаптации новых идей. В текущей модели страны, которые начинают позади, имеют преимущество из-за низких издержек копирования, но не имеют преимуществ при изобретении и использовании наилучшей технологии.

В действительности параметры A_i, L_i и η_i будут со временем меняться, например из-за политики правительства. Время от времени это приводит к смене технологического лидера. (Эта смена будет значительно отставать во времени от момента изменения основных параметров.) Однако, так как эффект запаздывания не ведет к улучшению

[1] Оставшийся нерассмотренным случай — это

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right) \cdot \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = 1.$$

Тогда равновесие может быть как в исходной модели (когда страна 1 — постоянный лидер, а страна 2 - постоянный последователь), так и как в рассмотренной выше модификации (когда позиции стран противоположны). Также возможно сочетание инновационной деятельности и копирования в обеих странах. В устойчивом состоянии агенты обеих стран безразличны к тому, заимствовать или изобретать.

изобретения и способу применения новой технологии и так как лидер определяется исходя из наиболее благоприятных значений ключевых параметров, тенденция к тому, что конкретный последователь может опередить лидера, не наблюдается[1]. Напротив, вероятность, что какой-либо из последователей догонит лидера, скорее всего, будет высокой.

Эти результаты вполне соответствуют более сложным моделям смены технологического лидера, рассмотренным в работе Brezis, Krugman and Tsiddon (1993). В этой работе говорится о том, что Великобритания заняла лидирующие позиции, сместив Голландию в XVIII в., Соединенные Штаты (и в некоторых областях Германия) опередили Великобританию в конце XIX в., а Япония превзошла США в некоторых отраслях экономики в 1980 гг.[2]. Совсем недавно США вновь захватили лидерство во многих высокотехнологичных областях. Поразительным фактом является не то, что происходит смена технологического лидера, а то, что лидер остается на вершине столь длительный период. И например, большинство стран никогда не были технологическими лидерами. Эмпирически не подтверждается, что отставание в новаторской деятельности и использовании новых технологий в дальнейшем приведет к значительному росту.

8.7. Анализ благосостояния

Рассмотрим модель, в которой страна 1 является технологическим лидером, страна 2 – страной-последователем, затраты на копирование растут вместе с N_2/N_1 (см. рис. 8.1). Одним из источников искажений в данной модели является монопольное ценообразование на промежуточную продукцию, которая изобретена в стране 1 и заимствована страной 2. Подобное рассуждение уже встречалось в гл. 6. В статике эта разница отражает соотношение между ценой каждого продукта $1/\alpha$ и предельными издержками, равными 1. Эта разница в каждой стране может быть элиминирована с помощью паушального налога, поступления от которого позволят субсидировать закупки промежуточной продукции по

[1]Весьма интересным и пока неразрешенным является вопрос о том, применяется ли принцип попеременного лидерства к спортивным командам. Анализ затрат на новых игроков является здесь весьма показательным; активисты команд при выборе игроков и затрачиваемые на них суммы обычно имеют обратную зависимость с результатами последних выступлений.

[2]До недавнего времени главным технологическим лидером был Китай. См. Templ, 1986. Более подробный анализ современных теорий эндогенного роста представлен в работе Young, 1993.

ставке $(1-\alpha)/\alpha$. Тогда покупатели промежуточной продукции должны заплатить чистую цену в размере 1, равную предельным издержкам.

Другой вид искажений возникает в модели из-за того, что агенты страны 1 не имеют достаточного стимула заниматься новаторской деятельностью, так как они не получают никакой выгоды от того, что их идеи заимствуются страной 2. Этот эффект будет устранен, если каждый изобретатель страны 1 получит право собственности на использование своих идей во всем мире. Модель с учетом прав на интеллектуальную собственность и иностранные инвестиции, которую мы рассматривали ранее, предлагает только один вариант интернализации этого эффекта. Гарантия соблюдения прав собственности на инновации во всем мире служит стимулом для исследователей, поскольку позволяет оценивать уровень общемировых выгод от своих изобретений[1)].

Другое искажение в модели возникает из-за того, что агенты в стране 2 не учитывают, что копирование продукции и технологий из страны 1 приводит к увеличению затрат на будущие заимствования. Чтобы избавиться от этого эффекта, предположим, что N_1 растет с заданным темпом прироста γ_1, а эффект от монопольного ценообразования нейтрализуется субсидированием промежуточной продукции по ставке $(1-\alpha)/\alpha$. Эта субсидия, финансируемая за счет паушального налога, означает, что конечная цена промежуточной продукции равна 1, т. е. предельным издержкам производства. Тогда мы можем сравнить результаты, полученные для страны 2 в децентрализованной модели и в модели социального плановика. (Анализ модели социального плановика для страны 1 не проводится, так как предполагается, что темп прироста γ_1 является величиной заданной, а искажения, возникающие из-за монопольного ценообразования, устранены за счет схемы налогов и субсидий.)

Социальный плановик максимизирует функцию полезности репрезентативного домашнего хозяйства страны 2. Производственная функция задается выражением (8.9). Предполагается, что v_2 определяется из (8.24). Темп прироста N_1 составляет γ_1. Оптимальное количество

[1)] В этой модели удается обойти проблему несовершенства рынка капитала, которая заключалась в расхождении норм доходности r_1 и r_2, существующих в обеих странах. В результате права собственности на использование идей в другой стране дают гарантию иностранным инвесторам. Здесь подразумевается, что в первоначальной модели домашние хозяйства из страны 1 не желают предоставлять займы стране 2, несмотря на то норма прибыли r_2, которую готовы заплатить агенты страны 2, превосходит норму прибыли r_1, которую получают домашние хозяйства в стране 1.

промежуточной продукции X_2 максимизирует выпуск Y_2, не зависит от затрат на промежуточную продукцию и задается формулой

$$X_2 = L_2 A_2^{1/(1-\alpha)} \alpha^{1/(1-\alpha)}. \tag{8.40}$$

Традиционные условия динамической оптимизации приводят к следующим уравнениям для темпов прироста N_2 и C_2:

$$\frac{\dot{N}_2}{N_2} = \frac{1}{\nu_2} \cdot (\Psi - \chi_2); \tag{8.41}$$

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\Psi}{\nu_2} - \rho - \sigma\gamma_1 \right), \tag{8.42}$$

где $\chi_2 \equiv C_2/N_2$ и новый параметр ψ определяется как

$$\Psi = (1-\alpha) \cdot L_2 A_2^{1/(1-\alpha)} \alpha^{\alpha/(1-\alpha)}. \tag{8.43}$$

В децентрализованной модели, когда на покупку промежуточной продукции предоставляется субсидия в размере $(1-\alpha)/\alpha$, величина Ψ будет равной потоку прибыли π_2. (Это количество превосходит величину π_2 из выражения (8.14).)

При децентрализованной экономике субсидия на покупку промежуточной продукции X_2 совпадает с решением в модели социального плановика из выражения (8.40). Так как все значения X_2 равны, траектория для N_2 в децентрализованной модели будет соответствовать траектории этого показателя в модели социального плановика, если χ_2 одинаково. То есть формула, по которой определяется $\dot{N}_2/N_2$ в децентрализованной модели, будет выглядеть так же, как и в (8.41). Следовательно, разница в результатах возникает лишь благодаря разнице в потреблении.

Темп прироста потребления в децентрализованной модели

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{\Psi}{\nu_2} - \rho - \sigma\gamma_1 + \frac{\sigma}{\nu_2} \cdot (\Psi - \chi_2) \right]. \tag{8.44}$$

Это уравнение отличается от формулы (8.42) для модели социального плановика только компонентом, включающим $\Psi - \chi_2$. Как можно показать, в устойчивом состоянии $\Psi > \chi_2$. Кроме того, так как χ_2 монотонно возрастает в процессе перехода к устойчивому состоянию (как следует из анализа фазовой диаграммы), $\Psi - \chi_2$ всегда должно быть положительным. Следовательно, значение $\dot{C}_2/C_2$ в децентрализованной экономике будет больше, чем в модели социального плановика при любых значениях N_2/N_1 (и, следовательно, v_2). Другими словами, решение в децентрализованной экономике предполагает более низкое значение χ_2 и более высокое C_2. Из выражения (8.41) следует, что темп

$\dot{N}_2/N_2$ в децентрализованной экономике выше, чем в модели социального плановика при любом значении N_2/N_1. Поэтому значение N_2/N_1 в устойчивом состоянии в децентрализованной экономике будет больше, чем в устойчивом состоянии в модели социального плановика[1)].

Темп прироста N_2 в децентрализованной модели является слишком высоким, поскольку распределение ресурсов на заимствование (а следовательно, и рост) аналогичны процессу увеличения вылова рыбы в переполненном пруду. В частности, агент, который увеличивает затраты $v_2(N_2/N_1)$ для увеличения N_2, не осознает, что это действие приведет к росту издержек, которые понесут последующие заемщики продукции. С другой точки зрения, частные агенты рассматривают увеличение капитальной прибыли $\dot{v}_2/v_2$ как часть отдачи от копирования, в то же время этот показатель даже не входит в социальную норму прибыли. Эта разница не возникла бы, если бы потенциальный заемщик мог изначально четко установить права собственности на каждый товар, который может быть заимствован страной 2. С другой стороны, этого несоответствия не возникает, если изобретатель из страны 1 обладает правами на адаптацию продукции в стране 2.

По аналогии мы можем оценить разные уровни благосостояния в модели из разд. 8.3, когда v_2 достаточно мало и является константой. В устойчивом состоянии решение в модели центрального плановика и в децентрализованной модели характеризуется $N_2/N_1 = 1$, когда N_2 и C_2 растут с темпом прироста γ_1. Однако в децентрализованной модели конкуренция между потенциальными заемщиками приведет к повышению оптимальной цены копирования $v_2^* > v_2$. Эта потеря ресурсов означает, что уровень $\chi_2 = C_2/N_2$ в устойчивом состоянии будет ниже, чем в модели социального плановика. (Данный результат сохраняется даже при субсидировании потребления промежуточной продукции в стране 2.)

Напомним, что при $N_2 = N_1$ в момент времени T в децентрализованной экономике C_2 резко возрастает, а количество ресурсов, направляемых на копирование, соответственно, падает. Мы можем показать, что решение в модели социального плановика в стране 2 таких скачков не содержит. Темп прироста C_2 падает на дискретную величину в момент времени T, но сам уровень C_2 (а следовательно, и количество ресурсов, направляемых на заимствование) резко не изменяется.

Для $t < T$ мы можем показать, что значение $\dot{N}_2/N_2$ в децентрализованной экономике превосходит величину, определяемую в модели со-

---

[1)]Предполагается, что параметры подобраны таким образом, что N_2/N_1 в устойчивом состоянии будет меньше 1.

циального плановика. (Этот результат сохраняется при субсидировании потребления промежуточной продукции в стране 2.) Величина $\dot{C}_2/C_2$ одинакова (и постоянна) в обеих моделях, однако в децентрализованной экономике траектория характеризуется более низкими значениями $\chi_2 = C_2/N_2$ и, соответственно, бо́льшим количеством ресурсов, идущих на копирование, $v_2\dot{N}_2$.

Проблема вновь заключается в том, что стимул к защите прав собственности в стране 2 является чрезмерным. В модели с постепенно растущими издержками копирования, равными $v_2(N_2/N_1)$, стимулом к приобретению монопольных прав собственности служит поток капитальной прибыли. В модели с постоянной величиной v_2 стимулом является бесконечная норма прибыли, получаемая в момент времени T. В любом случае капитальная прибыль является причиной слишком высокой скорости заимствований[1].

8.8. Основные выводы: рост и распространение технологии

Распространение технологии из стран-лидеров в страны-последователи предполагает наличие издержек копирования и адаптации. Мы предполагали, что в начальный момент времени издержки копирования ниже инновационных издержек, но по мере уменьшения числа еще не заимствованных продуктов и технологий эти издержки постепенно возрастают. Такая структура издержек указывает на наличие эффекта убывающей отдачи от копирования, а следовательно, означает присутствие конвергенции. Страны-последователи растут тем быстрее, чем больше их отставание от лидеров. Однако эта конвергенция является условной, при этом для заданного значения технологического разрыва темп прироста будет также зависеть от политики правительства и других параметров, определяющих доходность технологического копирования для страны-последователя.

В устойчивом состоянии страна-лидер и страна-последователь растут с одинаковыми темпами прироста. Таким образом, несмотря на различия в затратах на исследования и разработки, в уровнях

---

[1] В альтернативной модели издержки v_2 не зависят от N_2/N_1, но обратно пропорциональны времени, прошедшему с момента изобретения продукции в стране 1. Идея заключается в том, что более быстрые темпы адаптации сопряжены с бо́льшими издержками. В таком случае искажение показателей роста возникает из-за того, что страна 2 копирует товар или технологию слишком рано и, следовательно, несет социально неоправданные издержки копирования. Проблема возникает вновь из-за желания соблюдать права на интеллектуальную собственность в стране 2.

производительности и склонности к сбережению, выравнивание темпов прироста в долгосрочном периоде все-таки происходит. Если страны характеризуются одинаковой склонностью к сбережению (что означает равенство ρ_i и θ_i), то равенство темпов прироста будет означать, что нормы сбережения в устойчивом состоянии также одинаковы. Следовательно, даже при отсутствии мирового рынка капитала распространение технологии способствует выравниванию нормы прибыли по странам в долгосрочном периоде.

В некоторых случаях распространение технологии осуществляется за счет технологий и продукции, разработанных местными производителями. Этот процесс сопряжен с затратами, но он позволяет не выплачивать вознаграждение изобретателям товаров или способов производства. В других ситуациях распространение технологии становится возможным за счет иностранных инвестиций. Признание прав на интеллектуальную собственность на международном уровне является стимулом к дальнейшим изобретениям и открытиям новых продуктов и технологий в ведущих странах. По этой причине соблюдение этих прав лежит в основе долгосрочного роста в лидирующих странах и странах-последователях.

8.9. Задачи

8.1. Оптимальность по Парето в модели «лидер-последователь». Рассмотрите модель «лидер-последователь», описанную в разд. 8.1 и 8.2.

a. Рассмотрите несоответствия, приводящие к неоптимальным по Парето результатам. Каким образом эти несоответствия отличаются от несоответствий в модели разнообразия для одной страны, изложенной в гл. 6?

b. Какую политику необходимо проводить, чтобы обеспечить оптимальность по Парето?

c. Предположим, что страна-лидер характеризуется децентрализованным равновесием без государственного вмешательства. Будет ли когда-либо оптимально для правительства страны-последователя субсидировать инновации в стране-лидере?

8.2. Нормы прибыли в модели «лидер-последователь». Рассмотрите модель «лидер-последователь», описанную в разд. 8.1 и 8.2.

a. Постоянны ли нормы прибыли в обеих странах? Где норма прибыли выше?

b. Что произойдет, если у страны-лидера и у страны-последователя будет общий совершенный кредитный рынок?

8.3. Конвергенция в модели «лидер-последователь».

a. Существует ли в модели, изложенной в разд. 8.1 и 8.2, конвергенция к одному и тому же уровню выпуска на душу населения и заработной платы? Наблюдается ли в этих моделях конвергенция к одному и тому же темпу прироста выпуска на душу населения?

b. Возможно ли для страны, которая первоначально характеризовалась более низким уровнем выпуска на душу населения, стать страной с более высоким уровнем выпуска на душу населения? Возможна ли в дальнейшем еще одна смена лидера по уровню выпуска на душу населения?

c. Могут ли страны поменяться ролями новатора и заемщика?

d. Какие выводы в данной модели можно сделать относительно абсолютной и условной конвергенции?

8.4. Различные теории конвергенции. Сравните результаты конвергенции в теории распространения технологии и в модели Рамсея. Возможно ли различить эти теории эмпирически? Если да, то как?

8.5. Иностранные инвестиции

a. Рассмотрите роль иностранных инвестиций в контексте моделей распространения технологии.

b. Являются ли выгодными с точки зрения агентов инновационной экономики, т. е. страны 1, возможности размещения инвестиций в стране-заемщике, т. е. в стране 2?

c. Являются ли выгодными иностранные инвестиции с точки зрения агентов страны 2? Будет ли выгодно для страны 2 всегда соблюдать права на интеллектуальную собственность предпринимателей из страны 1?

8.6. Смена технологического лидера

a. Обсудите концепцию смены лидера и покажите, чем она отличается от концепции абсолютной конвергенции.

b. Предусматривается ли в модели Рамсея из гл. 2 (расширенной с учетом различных случайных шоков технологии) смена лидера? Противоречит ли данная модель наблюдениям о том, что экономика, которая первоначально технологически отстает, становится затем лидером?

8.7. Инновации и перемещение технологии (основано на работе Krugman, 1979). Рассмотрите мир, состоящий из двух стран

(Север и Юг), в которых M видов потребительской продукции. Эти товары нельзя запасать, но ими можно торговать между странами. В каждой стране L работников, которые и являются потребителями. Функция полезности в каждый момент времени имеет вид

$$U = \left(\sum_{i=1}^{M} (c_i)^\theta\right)^{1/\theta},$$

где $0 < \theta < 1$, c_i — количество потребляемого товара i. Существует два вида товаров: старые и новые. В каждый момент времени M_o товаров из M являются старыми, а $M_n = M - M_o$ новыми. Технология производства старой продукции является общей, поэтому эти товары могут быть произведены как на Юге, так и на Севере. Технология производства новых товаров может быть использована на Севере, но недоступна на Юге. На производство единицы любого товара необходима одна единица труда, все товары производятся в условиях совершенной конкуренции.

Нормализуем цену каждого из старых товаров и приравниваем ее единице. Пусть P_n — это стоимость каждого нового товара. (Отметим, что цена для всех старых товаров должна быть одинакова, как и цена для новых товаров.) Пусть w_N, w_L – ставки заработной платы на Севере и на Юге соответственно. Пусть τ – это условие торговли для Севера, т. е. соотношение цен товаров, произведенных на Севере, к ценам товаров, произведенных на Юге.

a. Каким образом τ зависит от w_N и w_L? Каким образом y (отношение среднедушевого дохода на Севере к среднедушевому доходу на Юге) зависит от w_N и w_L?

b. Пусть $\sigma \equiv M_n/M_o$. Выведите соотношение, показывающее структуру специализации мировой экономики как функцию от σ. Воспользуйтесь данным результатом, чтобы связать w_N, w_L, τ и y с σ.

c. Пусть $\dot{M} = iM$ отвечает за темп прироста инноваций на Севере, где i задается экзогенно.

Пусть $\dot{M}_o = tM_n$ описывает норму технологического перехода, где t также экзогенно. Найдите величину σ в устойчивом состоянии и ее закон изменения. Каким образом структура мировой специализации меняется во времени? Что со временем происходит с y?

d. Определите начальные условия, при которых наблюдается конвергенция, т. е. $\dot{y} < 0$. Является ли процесс конвергенции в данной модели эквивалентным долгосрочному равенству доходов, т. е. $y^* = 1$?

8.8. Выбор технологии и смена лидера (основано на работе Ohyama and Jones, 1993). Рассмотрите 2 страны с одним товаром недлительного пользования. В каждой из стран живут L потребителей, которые также являются работниками. Коэффициент предпочтений $\rho > 0$. Традиционная технология описывается как

$$q_i^T = A_i \cdot (1 - \theta_i),$$

где $i = 1, 2$; $1 - \theta_i$ это доля рабочей силы, задействованной в производстве продукции по традиционной технологии в стране i. Страна 1 является технологическим лидером, поскольку известно, что $A_1 > A_2$.

В нулевой момент времени появляется новая технология, которая имеет следующие характеристики:

$$q_i^N = B_i\theta_i; \quad B_i = B + \lambda \cdot \int\limits_0^t q_i^N \cdot d\tau,$$

где B -- константа, при этом $0 < B < A_i$; λ также константа и $0 < \lambda < \rho$. Первоначально новая технология не столь продуктивна, как старая ($B < A_i$), но характеризуется возможностью «обучения на опыте» $\lambda > 0$.

a. Пусть технологии в странах являются взаимоисключающими, т. е. θ_i либо 0, либо 1. При каких условиях начнет использоваться новая технология и в какой из стран это произойдет? Возможна ли смена лидера? Если да, то рассчитайте время T, которое потребуется стране 2, чтобы обойти страну 1.

b. Пусть технологии используются в странах одновременно, т. е. в каждой стране $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$. В нулевой момент времени каждая страна выбирает уровень θ_i и затем всегда поддерживает этот уровень. Возможно ли частичное введение новой технологии? Обсудите, возможна ли смена лидера, и если да, то определите T.

c. Пусть существуют одномоментные издержки перехода от традиционной к новой технологии. Эти издержки определяются как $c(\theta_i) = c\theta_i/(1 - \theta_i)$, где $c > 0$ является константой. При каких условиях возможно частичное введение новой технологии? Возможна ли смена лидера? Если да, то определите T.

d. (*Повышенной трудности.*) Пусть θ_i различно в каждый момент времени. Пусть издержки перехода от традиционной технологии к новой отсутствуют. Опишите динамику θ_i и выпуска. Возможна ли смена лидера? Если да, то определите T. Проведите анализ для случая, когда существуют единовременные издержки перехода $c(\theta_i)$.

9 Предложение труда и население

В предыдущих главах мы предполагали, что население и рабочая сила растут с одинаковым экзогенно заданным темпом прироста n. Теперь мы попытаемся включить численность населения и рабочей силы в число эндогенных переменных, сделаем это тремя различными способами. Во-первых, мы рассмотрим процесс миграции как следствие экономической ситуации в стране. В рамках данного подхода количество населения и рабочей силы может изменяться в зависимости от рождаемости и смертности. Во-вторых, мы введем коэффициент рождаемости, который эндогенно определяет население и рабочую силу. В конце мы рассмотрим изменение трудовых усилий, прилагаемых работниками. Таким образом, в данной главе мы не пользуемся предпосылкой о равенстве рабочей силы и населения.

9.1. Миграция в моделях экономического роста

Миграция — это процесс перемещения людей, следствием которого является изменение численности населения и рабочей силы в стране. Процесс миграции, или мобильность рабочей силы, аналогичен мобильности капитала, которую мы подробно рассматривали в гл. 3. Отличие заключается в том, что капитал перетекает из стран с меньшей нормой доходности в страны с большей нормой доходности, а рабочая сила переходит из стран с меньшей заработной платой и менее благоприятными условиями проживания в страны с высокой заработной платой и более благоприятными условиями проживания. Ранее мы выяснили, что мобильность капитала способствует конвергенции стран к их устойчивому состоянию. Далее мы покажем, что мобильность труда приводит к тем же результатам.

Миграция отличается от естественного роста населения, поскольку не зависит от рождаемости и смертности. Во-первых, в случае миграции прирост населения в принимающей стране означает соответствующее уменьшение численности населения в другой стране. Поэтому необходимо рассматривать иммиграцию и эмиграцию как две стороны одного процесса.

Во-вторых, в отличие от новорожденных, мигранты приезжают с уже накопленным человеческим капиталом. Поскольку миграция включает переезд и человеческого капитала, то мобильность рабочей силы означает и некоторую мобильность капитала. Новорожденные отличаются от мигрантов еще и тем, что резиденты обычно заботятся о новорожденных (т. е. своих детях), но не о мигрантах. Это отличие, касающееся связей различных групп населения, влияет на то, сколько население будет сберегать, а следовательно, и на темпы прироста экономики.

Начать анализ миграции проще всего с модели Солоу—Свэна, в которой рассматривается закрытая экономика с экзогенно заданной постоянной нормой сбережения. Расширение модели и включение миграции означает, что экономики теперь частично открыты, т. е. предполагается мобильность рабочей силы и человеческого капитала. Хотя анализ и подразумевает наличие обратного влияния экономического роста на заработную плату и на коэффициент миграции, однако основная оптимизационная задача мигрантов не рассматривает это влияние. Таким образом, в первой модели мы только постулируем функцию миграции.

Затем мы переходим к анализу модели Рамсея, в которой оптимизируется поведение домашнего хозяйства. Этот анализ предполагает, что репрезентативное домашнее хозяйство выбирает оптимальную траекторию потребления без учета благосостояния иммигрантов. В этой модели рассматривается предложенная чуть ранее функция миграции.

В конце мы рассмотрим модель, в которой допускается мобильность капитала, а коэффициент миграции определяется из задачи оптимизации поведения домашних хозяйств. В данном случае мы сможем проанализировать, каким образом изменения в издержках и выгодах, возникающих из-за миграции, влияют на динамические траектории миграции и экономического роста.

9.1.1. Миграция в модели Солоу—Свэна

Модель с миграцией. В данном разделе нами будет проанализирована модель Солоу -Свэна для закрытой экономики, в которую будет включена миграция. Мы предполагаем, что существует мобильность населения, но экономика является закрытой для иностранных товаров и активов, т. е. мы делаем нереалистичное предположение о том, что люди мобильнее физического капитала. Хотя это предположение является экстремальным, в результате анализа мы приходим к некоторым выводам относительно влияния миграции на процесс роста. В следующих разделах мы будем предполагать мобильность капитала.

Пусть $M(t)$, которое может быть как положительным, так и отрицательным, означает приток мигрантов в страну, а $k(t)$ – это количество капитала, который каждый мигрант привозит с собой. Так как мы предположили, что капитал не может перемещаться сам по себе, то количество капитала, которое каждый мигрант привозит с собой, определяет степень мобильности капитала.

Мигранты обычно не привозят с собой практически никакого физического капитала (под которым в первую очередь подразумеваются здания или машины), но обладают достаточным количеством человеческого капитала. Для удобства мы не будем различать формы капитала (как мы это делали в гл. 4 и 5), а будем рассматривать капитал в его широком понимании, включающем физический и человеческий капиталы. Таким образом, κ – это весь капитал в его широком понимании, который перевозит мигрант[1].

Население внутри страны и рабочая сила $L(t)$ растут с темпом прироста, равным разнице коэффициентов рождаемости и смертности. Общий темп прироста в стране тогда равен

$$\frac{\dot{L}}{L} = n + \frac{M}{L} = n + m, \tag{9.1}$$

где $m \equiv M/L$ является коэффициентом чистой миграции. Для удобства мы опустили индексы времени.

Изменение основного капитала внутри страны задается выражением

$$\dot{K} = s \cdot F(K, \hat{L}) - \delta K + \kappa M, \tag{9.2}$$

где s – постоянная валовая норма сбережения. Новый элемент, влияющий на $\dot{K}$, – это κM, капитал, привезенный иммигрантами или увезенный эмигрантами. Темп прироста капитала на одного эффективного

[1]В данной модели мигранты не могут получать финансовую прибыль из источника, находящегося за границей, в частности со своей родины. Люди, которые переезжают, оставляют или потребляют весь капитал, который не могут увезти с собой. Мы также не рассматриваем возможности перевода денег иммигрантами своим родственникам, которые остались на родине мигранта.

работника $\hat{k}$ определяется из выражений (9.1) и (9.2):

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{s \cdot f(\hat{k}}{\hat{k}} - (x + n + \delta) - m \cdot \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right), \tag{9.3}$$

где $\hat{\kappa} \equiv \kappa e^{-xt}$ — это количество капитала на одного «эффективного иммигранта», т. е. количество иммигрантов увеличивается вместе с технологическим фактором e^{xt}. (Мы здесь предполагаем, что норма экзогенного технологического прогресса x одинакова внутри страны и за границей.) Напомним, что $x+n+\delta$ является эффективной ставкой амортизации в моделях без учета миграции, т. е. это норма выбытия $\hat{k}$ при росте эффективного труда по ставке $x+n$ и при амортизации основного капитала по ставке δ. (См. выражение (1.30) в модели Солоу—Свэна.) Эта эффективная норма амортизации умножается на коэффициент миграции $m \cdot [1 - (\hat{\kappa}/\hat{k})]$. Итоговое выражение будет выглядеть, как и в исходной модели, если в каждый момент времени $m = 0$ или $\hat{\kappa} = \hat{k}$.

Так как мигранты привозят небольшое количество физического капитала, то будет выполняться соотношение $\hat{\kappa} < \hat{k}$, за исключением тех случаев, когда человеческий капитал на одного мигранта значительно больше, чем на одного работника внутри страны[1]. Если $\hat{\kappa} < \hat{k}$, то параметр миграции $m \cdot [1 - (\hat{\kappa}/\hat{k})]$ прибавляется к эффективной норме амортизации, если $m > 0$, и вычитается, если $m < 0$. Если мигранты приезжают без капитала, т. е. $\hat{\kappa} = 0$, то в выражении (9.3) коэффициент миграции m будет прибавляться к естественному темпу прироста населения n. Если мы будем рассматривать n как коэффициент рождаемости, то это действие будет иметь смысл, поскольку дети первоначально не имеют человеческого капитала[2].

Если $m > 0$, то $\hat{\kappa}$ это количество капитала на эффективного работника, привезенного каждым мигрантом. Это количество будет связано с общим количеством капитала на эффективного работника, который был на родине иммигранта. При заданном значении капитала на родине мигранта (т. е. при заданном параметре $\hat{\kappa}$) отношение $\hat{\kappa}/\hat{k}$ будет уменьшаться с ростом $\hat{k}$ в принимающей стране[3]. Более того, если мы

[1] Если $m > 0$, то мы должны сравнивать приток капитала, привозимый иммигрантами, с количеством населения в принимающей стране. Если $m < 0$, то необходимо сравнивать количество эмигрантов с количеством населения в покидаемой стране.

[2] Смерть, наоборот, означает уменьшение человеческого капитала. Однако мы упрощаем анализ, предполагая, что норма амортизации физического и человеческого капитала является константой и составляет δ от всего капитала.

[3] Мы не рассматриваем возможность того, что изменение $\hat{k}$ повлияет на количество иммигрантов с уровнем капитала $\hat{\kappa}$.

предположим, что типичная иностранная экономика находится близко к своему устойчивому состоянию, мы можем считать $\hat{\kappa}$ практически постоянным по времени.

Если $m < 0$, то $\hat{\kappa}$ будет представлять собой капитал на одного эффективного работника для каждого эмигранта[1]. В данном случае отношение $\hat{\kappa}/\hat{k}$ будет практически постоянным, т. е. $\hat{\kappa}/\hat{k}$ не будет меняться с ростом $\hat{k}$.

Функция миграции. В данном разделе нами будет разработана модель, в которой коэффициент миграции положительно зависит от текущей ставки заработной платы внутри страны по сравнению с заработной платой в других странах. При заданных параметрах за границей более высокий уровень $\hat{k}$ будет способствовать росту заработной платы внутри страны и, соответственно, росту коэффициента миграции m[2].

В данном случае мы полагаем, что существует положительное соотношение между m и $\hat{k}$, как показано на рис. 9.1. Предположим также,

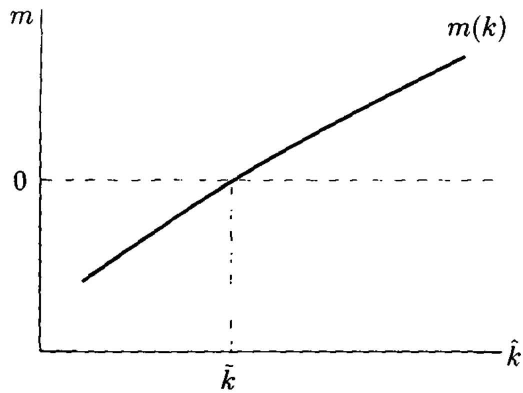


Рис. 9.1. Коэффициент миграции. При заданных параметрах за границей более высокий уровень $\hat{k}$ будет повышать заработную плату внутри страны и, соответственно, способствовать росту коэффициента миграции m. Величина $\tilde{k}$ — это количество капитала на одного эффективного работника, при котором миграция отсутствует

[1] Мы предполагаем, что иммиграция и эмиграция не происходят одновременно, поэтому общая и чистая миграции совпадают. В более общем случае неоднородность человеческого капитала и других параметров приводит к тому, что общая миграция превосходит чистую.

[2] Однако при отсутствии мобильности капитала более высокий уровень $\hat{k}$ также приведет к уменьшению доходности капитала внутри страны, включая доходность человеческого капитала, который мигранты привезут с собой. Мы предполагаем, что эффект от высокой заработной платы будет наиболее сильным.

что условия, влияющие на заработную плату за единицу эффективного труда в других странах, не изменяются при изменении $\hat{k}$. Мы также сохраняем без изменений бытовые условия внутри страны и за границей, которые входят в функцию полезности домашних хозяйств. Отметим, что $\tilde{k}$ на рисунке соответствует нулевой миграции.

Анализ, который мы хотели бы провести, включает рассмотрение сдвига функции миграции $m(\hat{k})$. Согласно теории миграции, на которую мы опираемся далее, эти сдвиги связаны с изменениями издержек и выигрыша от смены места жительства. Например, снижение заработной платы или ухудшение условий быта делает миграцию более привлекательной и, следовательно, сдвигает график функции $m(\hat{k})$ вверх. Наклон графика функции при прочих равных зависит от соотношения издержек переезда (для предельного мигранта) и величины миграции. Если издержки при увеличении числа мигрантов растут быстро, то изменение $\hat{k}$ не сильно влияет на миграцию, т. е. прямая $m(\hat{k})$ является относительно пологой.

Определим отдельно параметр, отвечающий за миграцию, который уже задавался в правой части выражения (9.3):

$$\xi(\hat{k}) \equiv m(\hat{k}) \cdot \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right), \tag{9.4}$$

тогда темп прироста $\hat{k}$ задается как

$$\frac{1}{\hat{k}} \cdot \dot{\hat{k}} = \frac{s \cdot f(\hat{k}}{\hat{k}} - [x + n + \delta + \xi(\hat{k})]. \tag{9.5}$$

В эффективную норму амортизации $x + n + \delta + \xi(\hat{k})$ параметр $\xi(\hat{k})$ входит с коэффициентом 1; $m(\hat{k})$ как часть $\xi(\hat{k})$ из выражения (9.4) прибавляется к темпу прироста эффективного труда, а следовательно, и к $x + n$. Выражение $-m(\hat{k}) \cdot (\hat{\kappa}/\hat{k})$ из формулы для $\xi(\hat{k})$ представляет собой отрицательное воздействие человеческого капитала мигрантов на темпы прироста основного капитала внутри страны. Этот приток человеческого капитала вычитается из эффективной нормы амортизации.

Если $m(\hat{k}) > 0$, то мы утверждаем, что $\hat{\kappa}$ можно рассматривать независимо от $\hat{k}$. В данном случае влияние $\hat{k}$ на $\xi(\hat{k})$ можно определить из выражения (9.4) как

$$\xi'(\hat{k}) = m'(\hat{k}) \cdot \left[1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right] + m(\hat{k}) \cdot \frac{\hat{\kappa}}{(\hat{k})^2}.$$

Таким образом, из того, что $m'(\hat{k}) > 0$, $\hat{\kappa} < \hat{k}$ и $m(\hat{k}) > 0$, следует $\xi'(\hat{k}) > 0$.

Если $m(\hat{k}) < 0$, то $\dot{\kappa}/\hat{k}$ может рассматриваться как константа. В этом случае, поскольку $m'(\hat{k}) > 0$ и $\dot{\kappa} < \hat{k}$, из выражения (9.4) следует, что $\xi'(\hat{k}) > 0$. Таким образом, $\xi'(\hat{k}) > 0$ вне зависимости от того, является коэффициент миграции положительным или отрицательным. Отсюда следует, что чем выше $\hat{k}$, тем больше значение эффективной нормы амортизации $x+n+\delta+\xi(\hat{k})$ в выражении (9.5). В предыдущих моделях это выражение, наоборот, не зависело от $\hat{k}$.

Устойчивое состояние. На рис. 9.2 изображен стандартный вид графика для модели роста. Кривая $s \cdot f(\hat{k})/\hat{k}$, как обычно, имеет отрицательный наклон из-за убывающего среднего продукта капитала. Горизонтальная линия $x+n+\delta$ теперь заменяется возрастающей кривой $x+n+\delta+\xi(\hat{k})$. Если $\hat{k} = \tilde{k}$, то $m(\hat{k}) = 0$ (см. график 9.1) и $\xi(\hat{k}) = 0$ (см. выражение (9.4)). Следовательно, значение функции эффективной амортизации при $\tilde{k}$ равно $x+n+\delta$. Если $\hat{k} > \tilde{k}$, то $m(\hat{k}) > 0$ и график функции эффективной амортизации лежит выше $x+n+\delta$. И наоборот, если $\hat{k} < \tilde{k}$, то график функции лежит ниже $x+n+\delta$. На рис. 9.2 точка пересечения двух кривых $\hat{k}^*$ превосходит $\tilde{k}$.

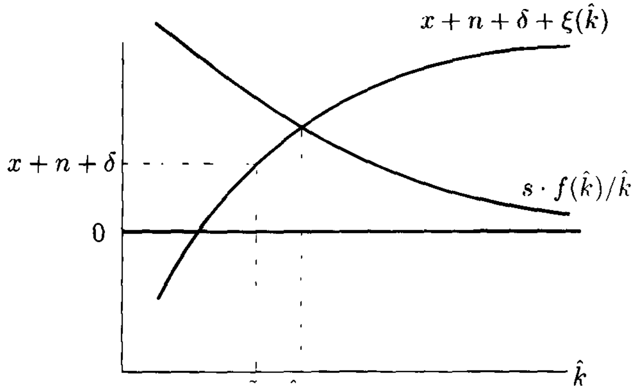


Рис. 9.2. Модель Солоу—Свэна с миграцией. Положительное соотношение между чистой миграцией и заработной платой предполагает, что темп прироста населения является функцией, положительно зависящей от $\hat{k}$. Следовательно, график функции для эффективной нормы амортизации в модели Солоу–Свэна будет иметь положительный наклон. Устойчивое состояние определяется точкой пересечения графиков функций сбережений $s \cdot f(\hat{k})/\hat{k}$ и эффективной амортизации $x+n+\delta+\xi(\hat{k})$. Для любого значения $\hat{k}$ темп прироста $\hat{k}$ будет определяться исходя из расстояния между этими кривыми по вертикали

Устойчивое состояние соответствует пересечению функций $s \cdot f(\hat{k})/\hat{k}$ и $x + n + \delta + \xi(\hat{k})$ в точке $\hat{k}^*$. В данном случае мы нарисовали кривые так, что $\hat{k}^* > \tilde{k}$, $m^* > 0$, и экономика является реципиентом мигрантов в устойчивом состоянии. То есть экономика остается в устойчивом состоянии как страна, постоянно принимающая мигрантов (или постоянно отправляющая мигрантов при $\hat{k}^* < \tilde{k}$)[1].

На рис. 9.2 мы можем оценить влияние от изменения различных параметров на устойчивое состояние. Например, увеличение s или постоянное улучшение производственной функции сдвигает $s \cdot f(\hat{k})/\hat{k}$ вверх и, таким образом, приводит к росту $\hat{k}^*$ и m^*. Равновесное значение m^* растет, потому что сдвиг кривой означает увеличение заработной платы на единицу эффективного труда в устойчивом состоянии и, следовательно, делает экономику страны более привлекательной для иностранцев.

Если ухудшаются условия в других экономиках, то функция миграции $m(\hat{k})$ сдвинется вверх на рис. 9.1. Это изменение сдвинет кривую эффективной амортизации

$$x + n + \delta + \xi(\hat{k})$$

на рис. 9.2 также вверх (см. выражение для $\xi(\hat{k})$ в формуле (9.4)). Следовательно, $\hat{k}^*$ падает, а m^* растет. Таким образом, увеличение предложения рабочей силы со стороны иммигрантов снижает интенсивность использования капитала внутри принимающей страны в устойчивом состоянии. Это происходит потому, что иммигранты обычно приезжают с небольшим капиталом.

Динамика перехода и конвергенция. Для оценки скорости конвергенции, подразумеваемой выражением (9.5), как и ранее, предположим, что производство описывается функцией Кобба–Дугласа: $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$. Мы также преобразуем функцию $\xi(\hat{k})$ к логнормальному виду:

$$\xi(\hat{k}) \equiv m(\hat{k}) \cdot \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right) \approx b \cdot \log \frac{\hat{k}}{\hat{k}_{\text{world}}}, \tag{9.6}$$

где $b \geqslant 0$, а $\hat{k}_{\text{world}}$ представляет собой интенсивность использования капитала в других экономиках. Из выражения (9.6) следует, что $\xi(\hat{k}) = 0$,

[1] Согласно теории миграции, на которую мы опираемся далее в разделе, увеличение численности населения может вызвать нехватку другого фиксированного фактора, такого как земля, например. Эта чрезмерная численность означает, что в устойчивом состоянии коэффициент миграции будет нулевым для каждой из экономик (если естественный темп прироста населения n в устойчивом состоянии в каждой из экономик также нулевой).

если интенсивность использования капитала внутри страны совпадает с интенсивностью использования во всем мире, поскольку тогда будут отсутствовать стимулы к миграции (если мы не будем учитывать разницу в условиях быта и в форме производственной функции). Мы рассматриваем $\hat{k}_{\text{world}}$ как константу, т. е. предполагаем, что все остальные страны (в среднем) находятся в устойчивом состоянии.

Ключевым элементом в анализе конвергенции будет размер параметра b. Для того чтобы оценить данный параметр, дифференцируем выражение (9.6) по переменной $\log(\hat{k})$ и получаем[1)]

$$b = \frac{\partial \xi(\hat{k})}{\partial \log \hat{k}} = \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right) \cdot \frac{\partial m(\hat{k})}{\partial \log \hat{k}}. \tag{9.7}$$

Это выражение показывает, что при $\hat{\kappa} < \hat{k}$ b положительно зависит от чувствительности коэффициента миграции к $\log(\hat{k})$. Ранее мы отмечали, что если издержки переезда (для мигрантов в среднем) резко возрастают при увеличении числа мигрантов, то график функции $m(\hat{k})$ на рис. 9.1 будет относительно пологим. В таком случае коэффициент b будет небольшим. Для той ситуации, когда издержки переезда растут слишком быстро с ростом m, значение b будет близко к 0, поэтому $\xi(\hat{k})$ будет также в районе 0, и эффективная норма амортизации из выражения (9.5) будет приблизительно равна $x + n + \delta$, как в рассмотренных ранее моделях.

При заданном отношении чувствительности миграции к $\log(\hat{k})$ коэффициент b будет уменьшаться с ростом $\hat{\kappa}/\hat{k}$. А при $\hat{\kappa} = \hat{k}$, в частности, $b = 0$ и эффективная норма амортизации вновь составляет $x + n + \delta$.

Если мы логарифмируем и линеаризуем дифференциальное уравнение (9.5) в окрестности точек устойчивого состояния, то мы можем записать скорость конвергенции к устойчивому состоянию:

$$\beta = (1 - \alpha) \cdot (x + n + \delta) + b + b \cdot (1 - \alpha) \cdot \log \frac{\hat{k}}{\hat{k}_{\text{world}}}. \tag{9.8}$$

Это выражение сводится к значению, получаемому в модели Солоу—Свэна (см. выражение (1.33)) при $b = 0$.

Если мы рассмотрим типичную экономику, для которой $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$, и предположим, что $b > 0$, то из выражения (9.8) следует, что потенциальная возможность миграции увеличивает коэффициент конверген-

[1)] При $m < 0$, чтобы получить выражение (9.7), мы считаем значение соотношения $\hat{\kappa}/\hat{k}$ постоянным. При $m > 0$, если $\hat{\kappa}$ не меняется, в выражении в правой части появится дополнительный член $m(\hat{k}) \cdot (\hat{\kappa}/\hat{k})$. Соотношение (9.7) тогда является приблизительным и выполняется, если $m(\hat{k})$ относительно мало.

ции β на величину b, в сравнении с моделью Солоу—Свэна. Для того чтобы определить величину b, проанализируем некоторые эмпирические результаты оценки миграции.

В работе Barro and Sala-i-Martin (1991), а также Braun (1993) использовались данные по штатам США, регионам Японии и пяти европейским странам (Франция, Германия, Италия, Испания и Великобритания) для оценки чувствительности миграции внутри страны к разнице в доходах на душу населения. Коэффициент регрессии для чистой миграции при логарифме первоначального среднедушевого дохода или продукта в среднем составлял 0,012 в год.

Чувствительность международной миграции к разнице в заработках оказывается ниже, чем для регионов внутри страны. Так, в работе Hatton and Williamson (1994) исследовалась миграция из 11 европейских стран в США с 1850 до 1913 г. Коэффициенты регрессии, указывающие чувствительность миграции к соответствующей разнице между ставками заработной платы, в среднем составляли 0,008 в год.

Чтобы соотнести эти результаты со значением коэффициента b, воспользуемся функцией Кобба—Дугласа: $\log(\hat{y}) = \log(A) + \alpha \cdot \log(\hat{k})$. Это выражение наряду с (9.7) дает нам следующее:

$$b = \alpha \cdot \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right) \cdot \frac{\partial m}{\partial \log \hat{y}}. \tag{9.9}$$

Эмпирические оценки, упомянутые выше, предполагали, что $\partial m / \partial[\log(\hat{y})]$ составляет примерно 0,012 в год для регионов страны и примерно 0,008 в год между странами. Ранее (в гл. 1 и 2) мы объяснили, что значение коэффициента α, равное 0,75, является обоснованным для капитала, понимаемого в широком смысле. Следовательно, для расчета коэффициента b в выражении (9.9) нам необходимо определить соотношение $\hat{\kappa}/\hat{k}$.

В работе Dolado, Goria and Ichino (1994, табл. 2) исследовался состав мигрантов для периода 1960–1987 гг. для девяти развитых стран (Австралии, Бельгии, Канады, Германии, Нидерландов, Швеции, Швейцарии, Великобритании и США). Они выяснили, что уровень образованности иммигрантов в среднем составлял 80% от уровня образованности коренного населения в предположении о том, что обучение иммигрантов системно не отличалось от обучения в родной для них стране. Chiswick (1978, табл. 1) нашел по данным переписи за 1970 г., что уровень образования детей, родившихся за границей, составляет 91% от уровня образования коренных жителей. Borjas (1992, табл. 1.4) на основе данных переписи США показал, что уровень образования родившихся за границей людей вырос с 79% в 1940 г. до 82% от уровня коренных жителей в 1950 г. Затем этот уровень составил 87% в 1960 г., 94% в 1970 и 93% в 1980 г.

В случае международной миграции мы считаем, что человеческий капитал мигрантов составляет 80% от человеческого капитала местных жителей. Если иммигранты не привозят никакого физического капитала и если отношение человеческого капитала к общему капиталу в экономике страны составляет 5/8 (как мы определили в гл. 5), то $\hat{\kappa}/\hat{k}$ равно 0,5 (0,8 от 5/8).

В случае миграции в пределах страны соотношение человеческого капитала мигрантов и человеческого капитала местных жителей, вероятно, будет выше, чем в случае международной миграции. Например, в работе Borjas, Bronars and Trejo (1992) на основе данных об уровне образования мужчин показано, что в США в 1986 г. для мигрантов, переезжающих в другой штат, число лет получения образования в среднем было на 3% большим, чем в среднем для коренных жителей штата[1]. Если предположить, что это отношение составляет 100%, то $\hat{\kappa}/\hat{k}$ будет равным 0,62.

При рассмотрении регионов страны мы используем соотношения

$$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}} = 0{,}62 \quad \text{и} \quad \frac{\partial m}{\partial[\log(\hat{y})]} = 0{,}012.$$

Если предположить, что $\alpha = 0{,}75$, то b в среднем за год будет составлять 0,003. При рассмотрении международной миграции мы считаем, что

$$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}} = 0{,}5 \quad \text{и} \quad \frac{\partial m}{\partial[\log(\hat{y})]} = 0{,}008 \text{ в год.}$$

Если $\alpha = 0{,}75$, то b снова приблизительно составляет 0,003 в год. Результаты одинаковы для двух случаев, поскольку более высокое значение $\partial m/\partial[\log(\hat{y})]$ при региональной миграции компенсируется более высоким значением $\hat{\kappa}/\hat{k}$.

При ранее принятых значениях других параметров ($x = 0{,}02$, $n = 0{,}01$, $\delta = 0{,}05$) значение β в модели Солоу–Свэна, когда $\alpha = 0{,}75$, составит 0,020. Значение β, получаемое из выражения (9.8), оказывается выше, чем в модели Солоу - Свэна, на величину b; т. е. β приблизительно равно 0,023 при межрегиональной и международной миграции. Поэтому учет миграции в модели предполагает, во-первых, что есть небольшое увеличение скорости конвергенции (примерно на 10%) и, во-вторых, что коэффициенты конвергенции, оцененные для регионов внутри страны,

[1] Эта информация представлена в дополнительной таблице в работе Steve Trejo.

не отличаются сильно от коэффициентов между странами. Это предположение согласуется с полученными в работе Barro and Sala-i-Martin (1992a) результатами, в соответствии с которыми оценка скорости (условной) конвергенции между регионами страны будет незначительно выше, чем между странами.

Снижение величины $\hat{\kappa}/\hat{k}$ означает рост b в выражении (9.9), а следовательно, и скорости конвергенции β. Поэтому предположения относительно скорости конвергенции будут отличаться для страны, которая принимает мигрантов, т. е. при $m > 0$, и для страны, которую мигранты покидают, т. е. при $m < 0$. Так как страны-реципиенты характеризуются большей интенсивностью использования капитала, чем страны, из которых уезжают, то величина $\hat{\kappa}/\hat{k}$ оказывается ниже для принимающих стран. Следовательно, склонность к миграции повышает скорость, с которой принимающая экономика будет двигаться к устойчивому состоянию, относительно скорости конвергенции покидаемой страны. Также возможно (мы обсудим это далее), что миграция снизит скорость конвергенции в стране, из которой уезжают.

Возможность миграции повышает скорость конвергенции, так как мы считаем $b > 0$. Если коэффициент миграции положительно зависит от дохода, т. е. если

$$\frac{\partial m}{\partial[\log(\hat{y})]} > 0,$$

то коэффициент b из выражения (9.9) будет отрицательным при $\hat{\kappa}/\hat{k} \geqslant 1$. Данная ситуация могла бы возникнуть, если бы мигранты обладали таким количеством человеческого капитала, которое было бы существенно выше, чем в среднем для домашних хозяйств в родной стране мигранта.

Для принимающих экономик, где $m > 0$, условие $\hat{\kappa}/\hat{k} \geqslant 1$ кажется неправдоподобным. Иммигранты должны были бы не только обладать большим человеческим капиталом, чем средний житель принимающей страны, но эта разница в человеческом капитале также должна превзойти потери от того, что мигранты не могут привести с собой значительное количество физического капитала. Это условие вряд ли будет выполнено, поскольку, как уже было отмечено, мигранты характеризуются меньшим человеческим капиталом, чем жители принимающей экономики.

Для стран, из которых уезжают, где $m < 0$, условие $\hat{\kappa}/\hat{k} \geqslant 1$ является возможным, но все же маловероятным. Для миграции внутри страны традиционная точка зрения (изложенная Greenwood, 1975) заключается в том, что более образованные люди более склонны к миграции. В работе

Borjas, Bronars and Trejo (1992, табл. 2 и 4) дана количественная оценка данного эффекта для молодых людей в Соединенных Штатах в 1986 г. Полученные цифры указывают на то, что мигранты в среднем характеризуются бо́льшим на 2% количеством лет обучения в школе, чем в среднем в родном штате. Этот небольшой избыточный человеческий капитал будет возмещен нежеланием мигрантов перевозить физический капитал (если мы по-прежнему будем предполагать, что физический капитал не является совершенно мобильным между штатами США).

В работе Hatton and Williamson (1994) отмечается, что эмигранты из Европы в период с 1850 по 1913 г. обладали в основном низкой квалификацией, так что в данном случае $\hat{\kappa}/\hat{k} < 1$ будет справедливо для человеческого капитала, даже для стран, из которых уезжают. Для более бедных стран вполне вероятно, что люди с относительно высоким уровнем человеческого капитала будут более склонны к миграции. Данный феномен получил название «*утечка мозгов*». Эта ситуация особенно подходит для описания возвращения поселенцев из колоний, например, британцев из Индии, французов из Алжира и португальцев из Мозамбика. В некоторых случаях это стремление может быть достаточно сильное, чтобы превзойти по эффекту невозможность перевезти большое количество физического капитала. Таким образом, склонность к миграции в данном случае замедлила бы скорость конвергенции для экономических стран, из которых уезжают иммигранты.

Новый результат при $b > 0$ заключается в том, что β из выражения (9.8) растет вместе с $\hat{k}^*$ при заданных значениях других параметров. Причиной этого является то, что более высокий уровень $\hat{k}^*$ означает более высокий коэффициент миграции m^*, а следовательно, и более высокую скорость конвергенции в окрестности устойчивого состояния. Напомним, например, что постоянное усовершенствование производственной функции или увеличение нормы сбережений s внутри страны способствует росту $\hat{k}^*$. Теперь мы нашли, что эти изменения также увеличивают скорость конвергенции β. Ранее β было инвариантно по значениям производственной функции и нормам сбережения из модели Солоу–Свэна.

Если мы предполагаем совершенную мобильность труда (т. е. издержки переезда стремятся к 0), то $\partial m/\partial[\log(\hat{y})]$ стремится к бесконечности. Поэтому, если $\hat{\kappa} < \hat{k}$, то коэффициент b из уравнении (9.9) становится бесконечным. Из (9.8) тогда следует, что β становится бесконечным; т. е. совершенная мобильность труда приводит к бесконечной скорости конвергенции. Этот результат соответствует результату при совершенной мобильности капитала, рассмотренной в гл. 3.

В заключение рассмотрим влияние на скорость конвергенции такого коэффициента, как доля капитала α. Традиционно увеличение α приводило к снижению эффекта убывающей отдачи от капитала. Поэтому скорость конвергенции уменьшается и стремится к 0 при α, стремящемся к 1; т. е. конвергенции в AK модели не возникает, что мы наблюдали в гл. 4.

Формула для скорости конвергенции β из выражения (9.8) характеризуется обратным соотношением между β и α при заданном b. (Пусть $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$, т. е. последний член в выражении (9.8) равен нулю.) В выражении (9.9) показано, каким образом определяется коэффициент b. При заданном значении $\partial m/\partial[\log(\hat{y})]$ коэффициент b увеличивается с ростом α. Данный эффект компенсирует обратное соотношение между β и α. Однако мы также должны рассмотреть влияние α на $\partial m/\partial[\log(\hat{y})]$.

При производственной функции Кобба—Дугласа ставка заработной платы на единицу эффективного труда равна $\hat{w} = (1 - \alpha) \cdot A\hat{k}^{\alpha}$ и пропорциональна $\hat{y}$. С ростом α доля дохода, идущая на заработную плату (за простой труд), снижается. Поэтому мы ожидаем, что $\partial m/\partial[\log(\hat{y})]$ также будет снижаться, поскольку выигрыш от переезда необученной рабочей силы из одного места в другое становится меньшим. Таким образом, в целом неясно, растет или падает b вместе с α. Однако, когда α достигает 1, $\hat{w}$ достигает 0 и $\partial m/\partial[\log(\hat{y})]$ стремится к 0 (поскольку выигрыш от переезда необученной рабочей силы становится нулевым). Этот результат означает, что b становится 0, как только α достигает 1, а также что коэффициент β из выражения (9.8) также стремится к 0 при α, стремящемся к 1. Таким образом, даже с учетом миграции, в модели отсутствует конвергенция, если нет убывающей отдачи капитала.

9.1.2. Миграция в модели Рамсея

В гл. 2 мы использовали условия модели Рамсея для оптимизации поведения домашних хозяйств, чтобы расширить модель Солоу—Свэна и включить в состав переменных норму сбережений. Сейчас мы рассмотрим модификацию модели Рамсея для модели Солоу—Свэна с учетом миграции. Новым в данной модели будет взаимодействие между миграцией и выбором нормы сбережения. Эти нововведения коснутся поведения нормы сбережений в переходный период, а следовательно, и скорости конвергенции, а также нормы сбережений и некоторых других характеристик устойчивого состояния.

Построение модели Рамсея с учетом миграции. Структура модели, которую мы используем, является модификацией расширенной Вейлем (Weil, 1989) модели Бланчарда (Blanchard, 1985) и формально предполагает исследование поведения домашних хозяйств при конечном горизонте планирования, проводимое по аналогии с гл. 3. Предположим теперь, что резиденты страны, как и в модели Рамсея, представлены бесконечно живущими семьями; в модели Бланчарда это означает, что $p = 0$. Размер каждой семьи растет с постоянным экзогенно заданным темпом прироста n.

Мигранты по-прежнему прибывают в страну со скоростью $m(t)$, и каждый мигрант приезжает с капиталом в размере $\kappa(t)$, который, вероятнее всего, представлен человеческим капиталом[1]. Главное предположение заключается в том, что, в отличие от детей, об иммигрантах никто не заботится. Их потребление не включается в функцию полезности местного жителя[2].

Пусть $L(t)$ – совокупная численность населения внутри страны в момент времени t, которая задается как

$$L(t) = L(0) \cdot e^{nt} \cdot \exp\left\{ \int_0^t m(v)\, dv \right\}. \tag{9.10}$$

Численность населения в нулевой момент времени $L(0)$ представляет собой коренное население, которое появилось в один момент, наподобие того как это произошло во время освоения земель Оклахомы в 1890 гг.[3]. Население в последующие моменты времени будет тогда частично состоять из потомков коренных жителей, а также иммигрантов и их потомков. Мы нормализуем начальное значение, так что $L(0) = 1$.

Тип домашнего хозяйства, обозначенный через j, $j \geqslant 0$, задается тогда исходя из времени, прошедшего с момента приезда семьи в страну.

---

[1] Мигранты, как и ранее, не могут получать финансовый доход из-за границы.

[2] Подобный анализ можно провести и для эмигрантов при $m(t) < 0$, если резиденты страны не заботятся об уезжающих из страны людях. Например, если миграция заключается в отъезде целых семей, то вполне естественно предполагать, что оставшиеся в стране семьи не будут заботиться об уехавших. Задача становится более сложной, если члены семей уезжают в другие страны и затем посылают денежные переводы оставшимся на родине родственникам или, наоборот, получают от них финансовую помощь.

[3] Нам необходимо каким-то образом задать начальную численность населения. Для моментов времени $t > 0$, которые наступят в далеком будущем, точный способ задания начальных условий не имеет сильного значения. Подробнее см. Braun (1993).

Для коренного населения $j = 0-$, поскольку это население приехало в страну до нулевого момента времени.

Условия оптимизации и агрегирование результатов. Домашние хозяйства каждого типа j максимизируют функцию полезности, которая зависит еще и от времени t:

$$U(j,t) = \int_t^\infty \log[c(j,v)] \cdot e^{-(\rho-n)(v-t)}\,dv, \tag{9.11}$$

где $c(j,v)$ — это потребление на одного человека для домашнего хозяйства типа j в момент времени v. Как и в гл. 3, мы воспользовались логарифмической функцией полезности, чтобы упростить агрегирование мигрантов различных типов.

Из анализа, проведенного в гл. 2, следует, что из максимизации функции полезности каждым домашним хозяйством при заданном бюджетном ограничении возникают следующие условия:

$$\frac{1}{c(j,t)} \cdot \dot{c}(j,t) = r(t) - \rho; \tag{9.12}$$

$$\dot{a}(j,t) = [r(t) - n] \cdot a(j,t) + w(t) - c(j,t); \tag{9.13}$$

$$c(j,t) = (\rho - n) \cdot [a(j,t) + \tilde{w}(t)], \tag{9.14}$$

где $a(j,t)$ — количество активов на человека; $w(t)$ — ставка заработной платы (одинакова для всех); $\tilde{w}(t)$ среднедушевая текущая оценка будущих заработков, которая задается как

$$\tilde{w}(t) = \int_t^\infty w(v) \cdot e^{n(v-t)} \cdot e^{-\bar{r}(v,t)(v-t)}\,dv, \tag{9.15}$$

где

$$\bar{r}(v,t) \equiv \frac{1}{v-t} \cdot \int_t^v r(v)\,dv$$

означает среднюю процентную ставку между моментами времени t и v. Мы также имеем уже знакомое нам условие трансверсальности, которое требует, чтобы текущая стоимость активов асимптотически стремилась к нулю.

Метод изучения агрегированных потребления и активов в сущности совпадает с методом, используемым при анализе моделей с конечным горизонтом планирования в гл. 3. Поэтому кратко остановимся на основных моментах анализа.

Агрегированное потребление в момент t находится суммированием (интегрированием) по всем группам мигрантов j, $0 \leqslant j \leqslant t$:

$$C(t) = \int\limits_0^\infty [c(j,t) \cdot m(j) \cdot L(j) \cdot e^{n(t-j)}]\,dj + e^{nt} \cdot c(0-,t) =$$
$$= e^{nt} \cdot \int\limits_0^\infty \left[c(j,t) \cdot m(j) \cdot \exp\left\{ \int\limits_0^j m(v)\,dv \right\} \right] dj + e^{nt} \cdot c(0-,t), \tag{9.16}$$

где $m(j) \cdot L(j)$ — первоначальный поток мигрантов типа j, для $L(j)$ мы воспользовались формулой из выражения (9.10), последний член обозначает потребление местных жителей. Для агрегированных активов результат будет тот же:

$$A(t) = e^{nt} \cdot \int\limits_0^\infty \left[a(j,t) \cdot m(j) \cdot \exp\left\{ \int\limits_0^j m(v)\,dv \right\} \right] dj + e^{nt} \cdot a(0-,t). \tag{9.17}$$

Агрегированная величина дохода, получаемого за счет заработной платы, определяется из выражения (9.15):

$$\tilde{W}(t) = L(t) \cdot \tilde{w}(t) = e^{nt} \cdot \exp\left\{ \int\limits_0^j m(v)\,dv \right\} \cdot \int\limits_t^\infty w(v) \cdot e^{n(v-t)} \cdot e^{-\bar{r}(v,t)(v-t)}\,dv. \tag{9.18}$$

Изменение во времени $A(t)$ и $\tilde{W}(t)$ задается дифференцированием выражений (9.17) и (9.18):

$$\dot{A} = \kappa(t) \cdot m(t) \cdot L(t) + r(t) \cdot A(t) - C(t) +$$
$$+ w(t) \cdot e^{nt} \cdot \left[1 + \int\limits_0^t m(j) \cdot \exp\left\{ \int\limits_0^j m(v)\,dv \right\} \right]; \tag{9.19}$$

$$\dot{\tilde{W}} = [r(t) + m(t)] \cdot \tilde{W}(t) - w(t) \cdot L(t). \tag{9.20}$$

Для получения выражения (9.19) мы использовали бюджетное ограничение домашнего хозяйства из выражения (9.13) и условие $a(t,t) = \kappa(t)$, т. е. семьи-иммигранты приезжают с активами в размере $\kappa(t)$ на человека.

Из выражения (9.14) следует, что

$$\dot{C}(t) = (\rho - n) \cdot \left[\dot{A}(t) + \frac{d\tilde{W}}{dt} \right].$$

Если мы воспользуемся выражениями (9.19) и (9.20), а также условием $A(t) = K(t)$, то в конечном итоге получим уравнение для темпов прироста потребления на душу населения:

$$\frac{\dot{c}}{c} = r(t) - \rho - m(t) \cdot (\rho - n) \cdot \frac{k(t) - \kappa(t)}{c(t)}, \tag{9.21}$$

где $c(t) \equiv C(t)/L(t)$. Это соотношение сводится к результату модели Рамсея при логарифмической функции полезности, если $m(t) = 0$ или $\kappa(t) = k(t)$. Если $m(t) > 0$ и $\kappa(t) < k(t)$, то приток мигрантов будет уменьшать среднедушевое потребление на значение последнего вычитаемого в правой части формулы (9.21). В таком случае больший приток мигрантов $m(t)$ влияет так же, как и увеличение ρ. Этот эффект аналогичен эффекту увеличения численности детей, рассмотренному в модели Бланчарда (выражение $\rho + n$ в формуле (3.32)), поскольку, как отмечал Weil (1989), мигрантов можно рассматривать как и «нелюбимых» детей из модели Бланчарда.

Устойчивое состояние и динамика перехода в модели. Как и в модели Рамсея, динамика перехода к устойчивому состоянию может быть описана системой дифференциальных уравнений для $\hat{k}$ и $\hat{c}$. Уравнение для темпов прироста $\hat{k}$, аналогичное выражению (9.3) для модели Солоу–Свэна, выглядит как

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (x + n + \delta) - m \cdot \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right). \tag{9.22}$$

Выражение для темпа прироста $\hat{c}$ получается из уравнения (9.21):

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = f'(\hat{k}) - (x + \rho + \delta) - m \cdot (\rho - n) \cdot \frac{\hat{\kappa} - \hat{k}}{\hat{c}}. \tag{9.23}$$

Далее мы опять воспользуемся определением миграции из выражения (9.6) для модели Солоу—Свэна:

$$m \cdot \left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right) = b \cdot \log \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}_{\text{world}}},$$

где $\hat{k}_{\text{world}}$ — константа. Подставив миграцию в данной форме в выражения (9.22) и (9.23), мы можем воспользоваться традиционным способом построения фазовой диаграммы в пространстве $(\hat{k}, \hat{c})$. С помощью этой диаграммы мы можем проанализировать устойчивое состояние и динамику перехода к нему.

Из выражений (9.23) и (9.6) следует, что при $\hat{c} \neq 0$ линия $\dot{\hat{c}} = 0$ задается как

$$f'(\hat{k}) = \delta + \rho + x + \frac{(\rho - n) \cdot b \cdot \log(\hat{k}/\hat{k}_{\text{world}})}{\hat{c}/\hat{k}}. \tag{9.24}$$

Это условие отличается от стандартного условия из гл. 2 наличием последнего слагаемого в правой части. Пусть $\hat{k}^*$ — это значение параметра в устойчивом состоянии, при котором миграция отсутствует, т. е. эта величина удовлетворяет условию $f'(\hat{k}) = \delta + \rho + x$. Вид кривой $\dot{\hat{c}} = 0$ зависит от соотношения между $\hat{k}^*$ и $\hat{k}_{\text{world}}$. Если $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$, что будет справедливо для типичной экономики, линия будет выглядеть как вертикальная прямая из точки $\hat{k}^*$, что показано на рис. 9.3, *а*. Линия тогда совпадает со стандартным графиком для модели с нулевой миграцией (см. график (2.1)).

Если экономика страны в устойчивом состоянии, характеризующемся отсутствием миграции, все еще является привлекательной для иммигрантов, т. е. если $\hat{k}^* > \hat{k}_{\text{world}}$, кривая будет выглядеть так, как на рис. 9.3, *б*. В частности, при $\hat{k}_{\text{world}} < \hat{k} < \hat{k}^*$ значение $\hat{c}$ достигает 0, когда $\hat{k}$ достигает $\hat{k}_{\text{world}}$, и $\hat{c}$ стремится к бесконечности, когда $\hat{k}$ достигает $\hat{k}^*$. В итоге, если $\hat{k}^* < \hat{k}_{\text{world}}$, то график будет выглядеть как на рис. 9.3, *в*, при $\hat{k}^* < \hat{k} < \hat{k}_{\text{world}}$.

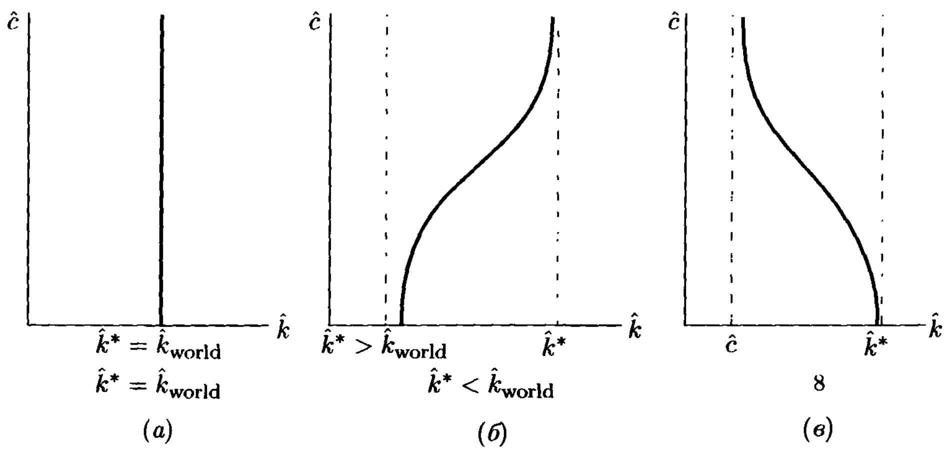


Рис. 9.3. Вид кривой $\dot{\hat{c}} = 0$ в модели Рамсея с учетом миграции. Вид кривой $\dot{\hat{c}} = 0$ зависит от соотношения между $\hat{k}^*$ и $\hat{k}_{\text{world}}$. Если $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$, то линия будет выглядеть как вертикальная прямая из точки $\hat{k}^*$, что показано на рис. 9.3, *а*. Если $\hat{k}^* > \hat{k}_{\text{world}}$, то линия будет возрастать (рис. 9.3, *б*), а если $\hat{k}^* < \hat{k}_{\text{world}}$, то будет убывать (рис. 9.3, *в*)

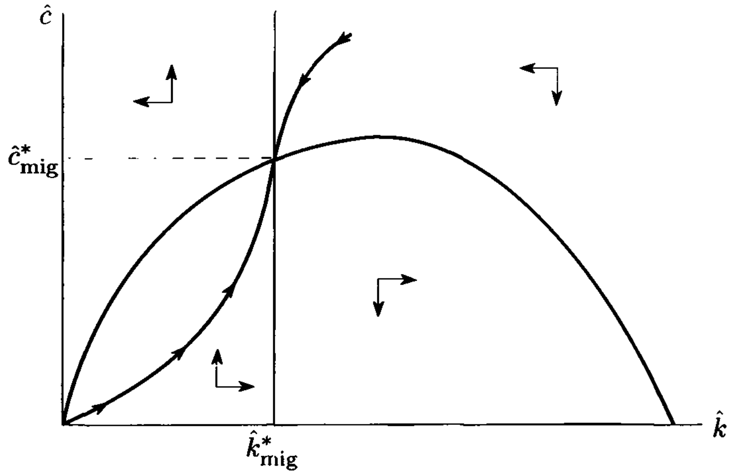


Рис. 9.4. Фазовая диаграмма для модели Рамсея с учетом миграции. На диаграмме изображен случай, когда $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$, так что $\dot{\hat{c}} = 0$ является вертикальной прямой, как показано на рис. 9.3, *а*. График $\dot{\hat{k}} = 0$ имеет традиционную перевернутую U-образную форму. В устойчивом состоянии при $\hat{k}^*$ миграция отсутствует, поскольку мы предполагаем, что $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$. В модели присутствует равновесная седловая траектория. Если в начальный момент времени экономика характеризовалась небольшим значением $\hat{k}$, то в процессе перехода к равновесному состоянию $\hat{k}$ и $\hat{c}$ растут монотонно. Чистая миграция в процессе перехода является отрицательной, но асимптотически достигает равновесного нулевого значения

Из выражений (9.22) и (9.6) следует, что $\dot{\hat{k}} = 0$ задается как

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} - b \cdot \log(\hat{k}/\hat{k}_{\text{world}}). \tag{9.25}$$

Это условие также отличается от стандартного выражения из гл. 2 наличием в правой части последнего вычитаемого. Если $\hat{k}^* < \hat{k}_{\text{world}}$, то при заданном уровне $\hat{k}$ значение $\hat{c}$ будет выше, чем ранее, в то время как при $\hat{k}^* > \hat{k}_{\text{world}}$ значение $\hat{c}$ будет ниже, чем раньше. В других случаях график функции, показанный на рис. 9.4, будет таким же, как и на рис. 2.1 для стандартной модели.

На рис. 9.4 отображена линия $\dot{\hat{c}} = 0$ для случая, изображенного на рис. 9.3, *а*, когда $\hat{k}^* = \hat{k}_{\text{world}}$. Значение $\hat{k}$ в устойчивом состоянии зависит от величины, обозначенной через $(\hat{k}^*)_{\text{mig}}$ и равной $\hat{k}^*$. Этот результат является следствием того, что $(\hat{k}^*)_{\text{mig}} = \hat{k}_{\text{world}}$ при $m^* = 0$ (из выражения (9.6)). Таким образом, для типичной экономики интенсивность использования капитала в устойчивом состоянии не зависит от потенциальной миграции, а равновесное значение коэффициента миграции равно 0.

Если $\hat{k}^* > \hat{k}_{\text{world}}$, как показано на рис. 9.3, *b*, то функция $\dot{\hat{k}} = 0$ пересекает прямую $\dot{\hat{c}} = 0$ в точке, в которой $\hat{k}_{\text{world}} < (\hat{k}^*)_{\text{mig}} < \hat{k}^*$ и $m^* > 0$. Таким образом, национальная экономика будет привлекательной для мигрантов, если находится в равновесном состоянии, не предполагающем миграцию; возможность миграции приведет к новому равновесному состоянию с уже положительной миграцией и, соответственно, меньшей интенсивностью использования капитала (поскольку мигранты привозят с собой лишь небольшое количество капитала). Эти выводы диаметрально противоположны, если $\hat{k}^* < \hat{k}_{\text{world}}$, как показано на рис. 9.3, *c*. В таком случае $\hat{k}^* < (\hat{k}^*)_{\text{mig}} < \hat{k}_{\text{world}}$ и $m^* < 0$.

Устойчивое состояние в модели, как обычно, определяется седловой траекторией, а фазовая диаграмма на рис. 9.4 может быть использована для показа направлений движения. Чтобы оценить скорость конвергенции, мы традиционно воспользуемся производственной функцией Кобба–Дугласа $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$. Подставим данную функцию в выражения (9.22) и (9.23) и затем прологарифмируем и линеаризуем систему в окрестности равновесного значения. Поскольку процедура является знакомой, то мы опустим детали, задав это в качестве упражнения; отметим только, что коэффициент конвергенции определяется как

$$2\beta = \left\{\zeta^2 + 4b\cdot(\rho - n) + 4(1-\alpha)(\rho+\delta+x)\times \right.$$
$$\left. \times\left[\frac{\rho+\delta+x}{\alpha} - (n+x+\delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta, \tag{9.26}$$

где $\zeta = \rho - \pi - b$. Результат стандартной модели Рамсея из гл. 2 (выражение (2.34) соответствует выражению (9.26), если $b = 0$ (и $\theta = 1$).

Мы можем легко показать, что из выражения (9.26) следует, что β растет вместе с b. Таким образом, как и в модели Солоу—Свэна, бо́льшая склонность к миграции приводит к росту скорости конвергенции (если $\hat{k} < \hat{k}$). Чтобы получить этот результат, количественно воспользуемся уже известными значениями параметров $\alpha = 0{,}75$, $x = 0{,}02$, $n = 0{,}01$, $\delta = 0{,}05$ и $\rho = 0{,}02$. Для данных величин коэффициент конвергенции β, как следует из выражения (9.26), будет равен 0,025 при $b = 0$. (Этот относительно высокий уровень β объясняется тем, что берется логарифмическая функция полезности, в которой $\theta = 1$ и в которой предполагается более высокая эластичность межвременного замещения по сравнению с обычной функцией.) Мы отмечали ранее, что оценки склонности к миграции и соотношения $\hat{\kappa}/\hat{k}$ предполагают, что b будет примерно равно 0,003 для регионов страны или при анализе международной миграции. Из выражения (9.26) следует, что эти значения b способствуют росту β с 0,025 в модели без миграции до 0,027. Это минимальное воздействие миграции на скорость конвергенции аналогично воздействию, указанному в модели Солоу—Свэна.

9.1.3. Модель миграции и роста Брауна

Теории миграции и роста, рассматриваемые до сих пор, имели два существенных недостатка. Во-первых, потоки миграции определялись исходя из постулируемой функции миграции, а не из решения оптимизационной задачи о переезде домашним хозяйством. Во-вторых, единственная предполагаемая мобильность капитала заключается в миграции человеческого капитала.

Braun (1993) разработал несколько моделей, в которых миграция отражает оптимизационные решения и в которых предполагается различная степень мобильности капитала. Ключевым фактором, упрощающим анализ в моделях, является наличие совершенного мирового кредитного рынка, на котором предполагается одна и та же процентная ставка для резидентов всех стран. В таком случае решение относительно миграции будет зависеть исключительно от различия траекторий ставки заработной платы между странами (или от различий в условиях проживания).

Браун делает несколько альтернативных предположений относительно мобильности физического капитала. В одной из моделей физический капитал характеризуется совершенной мобильностью, а в другой модели изменение основного капитала влечет за собой издержки приспособления, которые уже рассматривались в гл. 3. Чтобы представить основные идеи в упрощенной форме, рассмотрим ситуацию, в которой физический капитал характеризуется совершенной мобильностью, при этом экономика является малой, поэтому для нее задается постоянная мировая ставка процента.

Если мы воспользуемся традиционной производственной функцией с постоянной отдачей от масштаба и предположим, что уровень технологий одинаков во всех странах, то люди никогда не будут мигрировать, если миграция сопряжена с затратами, а движение капитала является свободным. Наоборот, если уровни технологий различаются, то люди (и капитал) имеют тенденцию перемещаться в места с наилучшими условиями. В действительности, если естественный темп прироста населения равен нулю, то исходя из функции миграции, которая будет дана позже, в долгосрочном периоде останется населенной только экономика с наилучшей технологией. Введение издержек приспособления для инвестиций не опровергает эти выводы, поскольку рабочая сила и капитал по-прежнему перемещаются в экономику с наилучшими условиями.

Чтобы избежать подобного результата, введем предположение об убывающей отдаче от масштаба в каждой экономике. В частности, мы принимаем предположение Брауна о том, что рост численности населения приводит к чрезмерной нагрузке на природные ресурсы, такие как, например, земля[1]. Этот результат приводит к устойчивому распределению мирового населения и означает, что ни одна из стран не останется без населения.

Построение модели. Экономика внутри страны, как и другие экономики, описывается производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}\hat{L}^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{R}{L}\right)^{\lambda}, \qquad (9.27)$$

где $\hat{L} \equiv Le^{xt}$ -- это эффективное количество ресурсов труда, а $x \geqslant 0$ является экзогенно заданным трудосберегающим технологическим прогрессом во всех экономиках. Новым членом в уравнении (9.27) является константа R, представляющая собой природный ресурс, к которому резиденты национальной экономики имеют свободный доступ. Однако это благо является предметом накопления, среднедушевая величина R/L входит в производственную функцию. Мы предполагаем $0 < \lambda < 1 - \alpha$, т. е. общая отдача от K и L является убывающей при заданном R, но социальный предельный продукт по L является положительным.

В выражении (9.27) мы можем рассматривать R как частные земли, хотя в данном случае иммигранты смогут использовать этот ресурс, заплатив ренту. Мы можем также рассматривать в качестве R услуги, поставляемые государством резидентам страны в фиксированном совокупном количестве на бесплатной основе. Желание мигрировать также будет зависеть от системы налогообложения. Например, подушный налог или плата за иммиграцию приведет к снижению стимулов к переезду для иностранцев. Мы рассматриваем ситуацию, когда иммигранты автоматически включаются в пользование R и когда ни налоги, ни плата не взимаются.

[1] Альтернативное предположение заключается в том, что страны изначально характеризуются возрастающей отдачей от масштаба, т. е. от L, и лишь потом вследствие перенаселенности они испытывают убывающую отдачу.

В конкурентной среде каждый производитель рассматривает значение R/L как заданное (поскольку L в данном выражении соответствует численности всего населения в экономике) и выбирает количество ресурсов K и L при наличии привычной производственной функции с постоянной отдачей. Стоимость факторов тогда будет определяться исходя из соответствующих частных предельных продуктов, и весь выпуск, произведенный внутри страны, пойдет на оплату этих факторов. Ставка заработной платы равна частному предельному продукту труда и выводится из выражения (9.27):

$$w = (1-\alpha)A\hat{k}^{\alpha} \cdot \left(\frac{R}{L}\right)^{\lambda} \cdot e^{xt}, \tag{9.28}$$

где $\hat{k} \equiv K/\hat{L}$.

Стоимость аренды капитала составляет $r + \delta$, где r - это мировая реальная процентная ставка. Мы считаем r константой, при этом $r > x$; т. е. мировая экономика находится в устойчивом состоянии, в котором выполняется условие трансверсальности[1]. Производители внутри страны приравнивают частный предельный продукт капитала, определяемый в выражении (9.27), к стоимости ренты:

$$\alpha A\hat{k}^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{R}{L}\right)^{\lambda} = r + \delta.$$

Из этого условия капиталоемкость рассчитывается по формуле

$$\hat{k} = \left[\frac{\alpha \cdot A \cdot (R/L)^{\lambda}}{r+\delta}\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{9.29}$$

Подставив $\hat{k}$ из выражения (9.29) в выражение (9.28), получаем формулу для ставки заработной платы внутри страны:

$$w = \left[\frac{(1-\alpha) \cdot A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot (R/L)^{\lambda/(1-\alpha)}}{(r+\delta)^{\alpha/(1-\alpha)}}\right] \cdot e^{xt}. \tag{9.30}$$

Следовательно, внутренняя ставка заработной платы является относительно высокой по сравнению с заработной платой, предлагаемой где-либо еще, если в экономике есть достаточное количество природных ресурсов на душу населения R/L и уровень технологий A относительно высок. Напомним, что политика правительства также может быть учтена в параметре A.

[1]Мы упростили анализ, предположив, что темп прироста населения в остальном мире равен нулю.

Принятие решения о миграции. Поскольку мы рассматриваем совершенную мобильность капитала и пренебрегаем разницей в условиях проживания, входящих в функции полезности, постольку люди будут сравнивать страны исключительно на основе ставки заработной платы. Предположим, что мировая экономика устанавливает ставку заработной платы в размере w_{world}. Выигрыш от переезда в данную страну из других стран в момент времени t представляет собой текущую оценку разницы в ставках заработной платы:

$$B(t) \equiv \int_t^{\infty} [w(v) - w_{\text{world}}] \cdot e^{-r\cdot(v-t)}\, dv. \tag{9.31}$$

Если мы определим

$$\hat{B}(t) \equiv B(t) \cdot e^{-xt},$$

то производная $\hat{B}(t)$ по времени определяется из выражения (9.31):

$$\dot{\hat{B}} = -[\hat{w}(t) - \hat{w}_{\text{world}}] + (r - x) \cdot \hat{B}(t), \tag{9.32}$$

где

$$\hat{w}(t) \equiv w(t) \cdot e^{-xt}$$

и

$$\hat{w}_{\text{world}} \equiv w_{\text{world}} \cdot e^{-xt}.$$

Так как мы предполагаем, что мировая экономика находится в устойчивом состоянии, то $\hat{w}_{\text{world}}$ является константой.

Мы предполагаем, не теряя при этом в целостности оценки, что $\hat{w}(t) \geqslant \hat{w}_{\text{world}}$. Это условие означает, что $\hat{w}(v) \geqslant \hat{w}_{\text{world}}$, а следовательно, $\hat{B}(v) \geqslant 0$ для всех $v \geqslant t$. Любой возникающий поток миграции будет направлен в рассматриваемую страну. Ситуация будет обратной, если $\hat{w}(v) \leqslant \hat{w}_{\text{world}}$.

Упростим анализ, предположив, что естественный темп прироста населения в стране равен нулю. Тогда, если $M(t) \geqslant 0$ — это приток мигрантов из других стран в момент времени t, то темп прироста населения внутри страны составит

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{M(t)}{L(t)}. \tag{9.33}$$

Ключевой задачей сейчас является определение затрат на миграцию. Предполагается, что издержки, которые несет каждый мигрант, являются функцией, возрастающей по аргументу $M(t)/L(t)$.

Это предположение является вполне разумным, если, например, затраты на поиск работы и места проживания растут вместе с числом соискателей, рассмотренным относительно населения страны-реципиента[1]. Предполагается, что в качестве издержек выступает потерянное рабочее время, т. е. для заданной величины $M(t)/L(t)$ издержки в единицах выпуска пропорциональны ставке мировой заработной платы w_{world}, которую мигранты получали бы в своих родных странах. Следовательно, понесенные мигрантом издержки составят

$$\text{Проигрыш от переезда} = \eta \cdot \frac{M(t)}{L(t)} \cdot w_{\text{world}}, \tag{9.34}$$

где $\eta' > 0$ и $\eta'' \geqslant 0$. Мы также упрощаем анализ, предполагая, что $\eta(0) = 0$; т. е. мы пренебрегаем затратами на перевозку и другими соответствующими издержками, при этом издержки каждого мигранта снижаются до нуля, когда поток мигрантов снижается до нуля (для более детального анализа см. Braun (1993)).

С ростом количества мигрантов в стране R/L падает, и, в соответствии с выражением (9.30), падает и w. Если количество переехавших людей таково, что w стало равным w_{world}, то стимулы к миграции будут отсутствовать. (Если технологический параметр внутри страны A будет совпадать с технологическим параметром во всем остальном мире, то возникает и равенство в заработных платах, когда соотношение R/L совпадает с соотношением R/L для остального мира.) При равенстве заработных плат национальная экономика будет находиться в устойчивом состоянии, в котором миграция находится на нулевом уровне; население L — константа; интенсивность использования капитала $\hat{k}$ также постоянна. Условие $\eta(0) = 0$ означает, что устойчивое состояние в системе на самом деле достижимо, поскольку если $w > w_{\text{world}}$, то $B > 0$ и у людей будет стимул к переезду с нулевыми издержками. Таким образом, у индивидов по-прежнему будет стимул мигрировать, а население внутри страны будет расти до тех пор, пока $w > w_{\text{world}}$. (Если предположить, что $\eta(0) > 0$, то в устойчивом состоянии будет сохраняться положительная разница между заработной платой во всем остальном мире и внутри страны.)

[1]Ключевая особенность заключается в том, что предельные издержки переезда растут с количеством желающих переехать. Это соотношение также сохранится при неоднородности издержек переезда. Индивиды, чьи издержки переезда меньше, сделают это быстрее, поэтому предельные издержки переезда растут вместе числом переезжающих (хотя в данном случае это справедливо для общего количества мигрантов, а не для отдельного текущего потока).

Так как в устойчивом состоянии численность населения во всем мире не сокращается[1], мы знаем, что некоторые жители никогда не переедут в рассматриваемую нами страну; т. е. некоторые люди не воспользуются возможностью переезда. Если все люди одинаковы и если они все оптимизируют свое поведение, то, чтобы некоторые из них пришли к равновесию в точке с нулевым чистым выигрышем от миграции, необходимо, чтобы у всех был нулевой выигрыш. Следовательно, равновесие предполагает такой размер миграции в каждый момент времени, при котором выигрыши и проигрыши от переезда равны

$$B(t) = \eta \cdot \frac{M(t)}{L(t)} \cdot w_{\text{world}} \tag{9.35}$$

для всех t. Это равенство будет по-прежнему выполняться, если заменить $B(t)$ на $\hat{B}(t)$ слева и w_{world} на $\hat{w}_{\text{world}}$ справа.

Мы можем рассчитать приток мигрантов в каждый момент времени, а следовательно, и темп прироста населения внутри страны, преобразовав выражение (9.35):

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{M(t)}{L(t)} = \psi\left(\frac{\hat{B}}{\hat{w}_{\text{world}}}\right), \tag{9.36}$$

где ψ является функцией, обратной к η из выражения (9.34). Так как $\eta' > 0$ и $\eta'' \geqslant 0$, то функция η является однозначно определенной функцией, обратная функция ψ также является однозначно определенной. Функция ψ удовлетворяет условиям $\psi' > 0$ и $\psi'' \leqslant 0$. Из предположения $\eta(0) = 0$ следует $\psi(0) = 0$.

В нашем анализе моделей Солоу - Свэна и Рамсея мы рассматривали функцию миграции, изображенную на рис. 9.1, в которой коэффициент миграции $m = M/L$ возрастал при увеличении $\hat{w}$ и, следовательно, при увеличении $\hat{k}$. В данной функции предполагается, что условия в остальном мире, представленные w_{world}, остаются без изменений. Главное различие между постулируемой ранее функцией и текущей функцией заключается в том, что предыдущее соотношение включало только текущую ставку заработной платы на единицу эффективного труда $\hat{w}$, в то время как последнее соотношение включает полную траекторию ставок

[1] Мы используем это условие, потому что большое снижение численности мирового населения приведет к значительному увеличению R/L и, следовательно, к увеличению w_{world}. Выражение (9.28) для ставки заработной платы, которое справедливо и для ставки заработной платы во всем мире, означает, что равенство между w и w_{world} возникает до того момента, когда население становится нулевым внутри страны или за рубежом.

эффективной заработной платы, поскольку они входят в выражение для прибыли $\hat{B}$.

Система в динамике, устойчивое состояние и процесс перехода к нему. Динамическая система для L и $\hat{B}$ задается выражениями (9.32) и (9.36), где $\hat{w}$ изменяется обратно пропорционально L в соответствии с выражением (9.30):

$$\hat{w} = \left[\frac{(1-\alpha) \cdot A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot (R/L)^{\lambda/(1-\alpha)}}{(r+\delta)^{\alpha/(1-\alpha)}} \right]. \tag{9.37}$$

На рис. 9.5 мы воспользовались выражениями (9.32) и (9.33) для построения фазовых диаграмм в пространстве $(L, \hat{B})$. Из выражения (9.36) и свойств функции ψ, включая $\psi(0) = 0$, следует, что $\dot{L} = 0$ (при $L \neq 0$) соответствует $\hat{B} = 0$. Это выражение также означает, что (так как $\psi' > 0$) $\dot{L} > 0$ при $\hat{B} > 0$ и $\dot{L} < 0$ при $\hat{B} < 0$.

Из выражения (9.32) следует, что $\dot{\hat{B}} = 0$ соответствует положительной линейной зависимости между $\hat{B}$ и $\hat{w}$. Так как $\hat{w}$ обратно пропор-

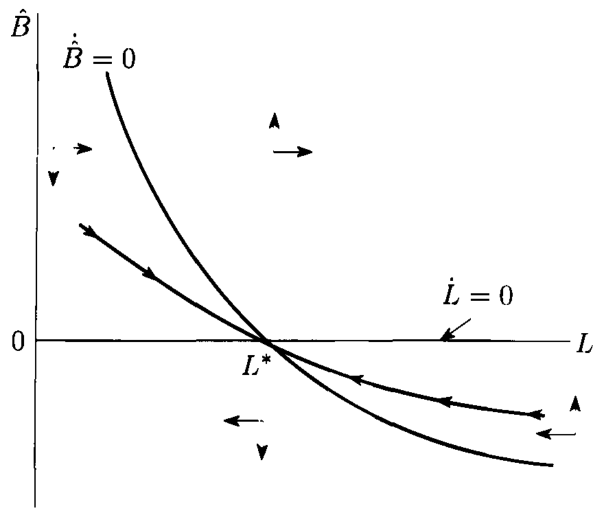


Рис. 9.5. Фазовая диаграмма в случае, если миграция — это параметр выбора. Динамика модели может быть описана с помощью текущей оценки выгод от переезда $\hat{B}$ и населения внутри страны L. Решением системы является устойчивая седловая траектория, наклон которой всегда отрицательный. Таким образом, подразумевается, что первоначально низкое количество населения означает высокие выгоды от миграции в страну и, следовательно, более высокий коэффициент чистой миграции m. С ростом численности населения чистый выигрыш от миграции уменьшается. В устойчивом состоянии чистый выигрыш $\hat{B}$ нулевой, а население L постоянно

ционально L в выражении (9.37), соотношение между $\hat{B}$ и L также обратно пропорционально, как показано на рис. 9.5. Поскольку $r > x$, то величина $\hat{B}$ выше кривой $\dot{\hat{B}} = 0$ означает, что $\dot{\hat{B}} > 0$, величины ниже кривой означают, что $\dot{\hat{B}} < 0$.

На рисунке видно, что в устойчивом состоянии $L = L^*$ и является константой, а $\dot{\hat{B}} = 0$. Из выражения (9.32) следует, что $\hat{w}^* = \hat{w}_{\text{world}}$, а из выражения (9.37) определяется значение L^*, которое удовлетворяет этому равенству. В частности, L^* растет вместе с A и увеличивается прямо пропорционально R (для экономики внутри страны).

Решением системы является седловая траектория, на рис. 9.5 показано направление движения. Если в начальный момент времени в экономике $L < L^*$, то $\hat{B} > 0$ и L со временем растет. В результате соответствующее уменьшение $\hat{w}$ приводит к уменьшению $\hat{B}$ и, следовательно, уменьшению коэффициента миграции. Со временем коэффициент миграции монотонно снижается и достигает нуля при L, стремящемся к L^*.

Мы можем оценить скорость конвергенции, проведя традиционно линеаризацию системы в окрестности точки устойчивого состояния. В данном случае система будет описываться выражениями (9.32) и (9.36), а линеаризация проводится по $\hat{B}$ и $\log(L/L^*)$. Коэффициент миграции, равный темпу прироста L, задается как

$$\frac{M}{L} = \frac{\dot{L}}{L} \approx \beta \cdot \log \frac{L^*}{L}, \tag{9.38}$$

где коэффициент конвергенции определяется из

$$2\beta = \left[(r - x)^2 + \frac{4\lambda \cdot \psi'(0)}{1 - \alpha}\right]^{1/2} - (r - x). \tag{9.39}$$

Из выражения (9.39) видно, что ключевым параметром, определяющим скорость конвергенции, является $\psi'(0)$, чувствительность коэффициента миграции в окрестности равновесного состояния к относительному выигрышу от переезда $\hat{B}/\hat{w}_{\text{world}}$(см. выражение (9.36)). Чем больше эта чувствительность, тем выше скорость конвергенции. Напомним, что ψ является функцией, обратной к функции η, связывающей издержки переезда с коэффициентом миграции в выражении (9.34). Наклон $\psi'(0)$ задается обратной к $\eta'(0)$ величиной; следовательно, чем быстрее растут затраты на миграцию при увеличении количества мигрантов, тем меньше будет реакция коэффициента миграции на относительный выигрыш $\hat{B}/\hat{w}$ и, следовательно, меньше скорость конвергенции.

Скорость конвергенции для L является также скоростью конвергенции для $\hat{y}$. Чтобы увидеть это, рассмотрим производственную функцию из выражения (9.27) и выражение для $\hat{k}$ из формулы (9.29)и получим формулу для $\hat{y}$:

$$\hat{y} = \left[\frac{A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot (R/L)^{\lambda/(1-\alpha)}}{(r+\delta)^{\alpha/(1-\alpha)}} \right]. \tag{9.40}$$

Эта формула практически совпадает с формулой (9.37) для $\hat{w}$, за исключением наличия множителя $1-\alpha$ в выражении для $\hat{w}$. Для $\hat{y}$ получаем

$$\log \frac{\hat{y}}{\hat{y}^*} = \frac{\lambda}{1-\alpha} \cdot \log \frac{L^*}{L}, \tag{9.41}$$

т. е. значение $\hat{y}$ будет больше своего значения в устойчивом состоянии, когда L будет ниже устойчивого значения, и наоборот. Из выражения (9.40) также следует, что темп прироста $\hat{y}$ задается как

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = -\frac{\lambda}{1-\alpha} \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \tag{9.42}$$

Воспользуемся выражениями (9.42), (9.38) и (9.41), чтобы записать формулу для $\hat{y}$ в уже знакомом нам виде:

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = -\beta \cdot \log \frac{\hat{y}}{\hat{y}^*}. \tag{9.43}$$

Таким образом, темп прироста $\hat{y}$ обратно пропорционален уровню $\hat{y}$, а скорость конвергенции β задается выражением (9.39).

Напомним, что ранее мы обсудили некоторые эмпирические выводы относительно коэффициентов чистой миграции. Согласно полученным результатам, коэффициент миграции зависит от разницы в среднедушевом доходе или продукте. Мы можем переписать выражение (9.38), если воспользуемся выражением (9.41) и перейдем от $\log(L^*/L)$ к $\log(\hat{y}/\hat{y}^*)$:

$$\frac{M}{L} = \frac{\dot{L}}{L} \approx \frac{\beta \cdot (1-\alpha)}{\lambda} \log \frac{\hat{y}}{\hat{y}^*}. \tag{9.44}$$

Выражения (9.43) и (9.44) можно рассматривать как систему двух уравнений относительно темпов роста выпуска и коэффициента миграции. Предположим, что мы рассматриваем группу стран, для которых значения параметров α и λ одинаковы. Тогда для стран с более высоким значением $\psi'(0)$ коэффициент β будет также выше. Следовательно, согласно (9.44), эти страны будут характеризоваться большей чувствительностью коэффициентов миграции к разнице в среднедушевом продукте и более высокой скоростью конвергенции по среднедушевому выпуску, в соответствии с выражением (9.43).

Braun (1993) проверял гипотезу о том, что более высокая чувствительность коэффициента миграции будет соответствовать более высокой скорости конвергенции для среднедушевого продукта или дохода. Он использовал данные о внутренней миграции и конвергенции для штатов США, регионов пяти стран Европы (Франции, Германии, Италии, Испании и Великобритании), а также Японии. Таким образом, он смог достаточно точно сравнить оценки для семи коэффициентов чувствительности миграции с соответствующими коэффициентами конвергенции для параметров среднедушевого выпуска и дохода. Несмотря на то что выборка достаточно мала, результаты подтвердили главную гипотезу, т. е. страны с большей чувствительностью коэффициентов миграции также характеризовались более высокой скоростью конвергенции. В гл. 11 представлен более подробный анализ данного результата.

Динамика мировой экономики. Ранее мы предполагали, что мировая экономика находится в устойчивом состоянии, характеризующемся постоянной ставкой заработной платы на единицу эффективного труда $\hat{w}_{\text{world}}$ и соответствующей интенсивностью использования капитала, которую мы обозначили как $\hat{k}_{\text{world}}$. Мы описали динамику процесса перехода при наличии миграции, согласно которой эффективная ставка заработной платы внутри страны $\hat{w}$ достигает постоянного мирового уровня $\hat{w}_{\text{world}}$. Если экономика внутри страны характеризуется той же технологией, что и мировая экономика, то $\hat{k}$ стремится к $\hat{k}_{\text{world}}$.

В общем случае мы можем рассматривать переходную динамику, в которой в устойчивом состоянии $\hat{k}_{\text{world}}$ достигает значения $(\hat{k}_{\text{world}})^*$. Тогда для экономики i изменение $\hat{k}_i$ во времени может быть разделено на два этапа: во-первых, переход от $\hat{k}_i$ к $\hat{k}_{\text{world}}$ и, во-вторых, переход от $\hat{k}_{\text{world}}$ к $(\hat{k}_{\text{world}})^*$.

Braun (1993) в своей работе проанализировал мир, состоявший только из двух регионов $i = 1, 2$. Миграция возможна между регионами, при этом издержки переезда определены в (9.34). Для мировой экономики (в данном случае объединения двух экономик) динамика основного капитала и потребления на одного эффективного работника $\hat{k}_{\text{world}}$ и $\hat{c}_{\text{world}}$ совпадают со значениями модели Рамсея, рассмотренной в гл. 2. Этот процесс предполагает постепенный переход от $\hat{k}_{\text{world}}$ к $(\hat{k}_{\text{world}})^*$.

а скорость конвергенции зависит от тех же параметров, которые играли определяющую роль в модели Рамсея.

В то же время люди мигрируют в страну с более высокой ставкой заработной платы, что приводит к уменьшению среднедушевого выпуска в принимающей стране и к росту этого показателя в стране с низким уровнем заработной платы. Скорость этого процесса зависит от параметров конвергенции, заданных выражением (9.39).

Темп прироста выпуска на одного эффективного работника для каждой страны может быть рассчитан как

$$\frac{\dot{\hat{y}}_i}{\hat{y}_i} = -\beta \cdot \log \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{\text{world}}} - \mu \cdot \log \frac{\hat{y}_{\text{world}}}{(\hat{y}_{\text{world}})^*}, \tag{9.45}$$

где β дано в (9.39), а μ определяется из модели Рамсея для мировой экономики. Выражение (9.45) позволяет учитывать пространственный эффект, который предполагает нивелирование различий между странами, а также временной эффект, который предполагает переход мировой экономики к устойчивому состоянию. Если мы рассмотрим пространственные данные для одного момента времени, то относительные темпы прироста будут находиться в обратной зависимости от первоначального относительного состояния и будут включать коэффициент β. Напротив, при рассмотрении временных данных относительно параметра $\hat{y}_{\text{world}}$, темп прироста будет уменьшаться с ростом $\hat{y}_{\text{world}}/(\hat{y}_{\text{world}})^*$ и будет включать коэффициент μ. В панельном анализе темп прироста каждой из экономик зависит от $\hat{y}_i/\hat{y}_{\text{world}}$ и $\hat{y}_{\text{world}}/(\hat{y}_{\text{world}})^*$, и формула его расчета включает оба коэффициента β и μ.

Несовершенная мобильность капитала. В данной модели скорость конвергенции страны к устойчивому состоянию для всей мировой экономики и определяется коэффициентом β из уравнения (9.39), отражающим только последовательную миграцию населения. Если предположить отсутствие совершенной мобильности капитала, то силы, которые влияли на конвергенцию в рассмотренных ранее моделях, также повлияют и на β. Например, на процесс конвергенции оказывается дополнительное влияние, если инвестиции влекут за собой издержки приспособления или если рынки капитала несовершенны.

Можно напрямую оценить издержки приспособления для инвестиций, если мы будем действовать в рамках совершенных рынков капитала (см. Braun, 1993). Эти издержки приспособления могут быть введены в модель таким же образом, как и в гл. 3. Главный результат заключается в том, что коэффициент конвергенции β будет выше, если чувствительность издержек приспособления к количеству инвестиций станет меньше.

Анализ будет более сложным, если рынки кредита несовершенны. Нормы прибыли будут тогда различны для всех экономик, и решение мигрировать будет основано на этом различии, наряду с разницей в ставках заработной платы. Мы также должны отслеживать права собственности на активы в различных странах, при этом поведение функции потребления соответственно становится более сложным. Результаты, которые мы получили прежде в моделях Солоу–Свэна и Рамсея, в данном случае могут быть также справедливы, если движение капитала полностью отсутствует, за исключением движения человеческого капитала, который перевозят с собой мигранты.

9.2. Определение уровня рождаемости

Согласно теории Мальтуса (1798), влияние экономических факторов на рождаемость и смертность играло центральную роль в экономическом развитии. Лишь немногие теории вызвали больше полемики, чем теория Мальтуса, согласно которой численность населения определяется доступностью пищи. Точка зрения Мальтуса базируется на предположении о том, что пища необходима человеку для выживания и что потенциал прироста населения намного выше, чем способность земли производить продовольствие. Теория Мальтуса была основана на идее, что начиная с Неолитической сельскохозяйственной революции, приблизительно за 8000 лет до н. э., экономика была полностью сельскохозяйственной. Закон убывающей отдачи от использования земли привел Мальтуса к выводам о том, что увеличение миграции населения заставило бы людей использовать менее производительную землю, на которой не может быть произведено достаточное количество пищи, которое позволит существовать столь большому количеству людей. Нехватка пищи тогда вынуждает индивидов откладывать вступление в брак и рождение детей, и темп прироста населения уменьшается. Мальтус говорил:

> «Предположим, что средств пропитания в стране хватает лишь на поддержание ее жителей. Постоянное желание увеличить численность населения, которое свойственно даже самым порочным обществам, способствует росту количества людей прежде, чем произойдет необходимое увеличение количества продуктов питания. Поэтому пища, которой ранее хватало на поддержание жизни одиннадцати миллионов, теперь должна быть разделена уже среди одиннадцати с половиной миллионов человек. Следова-

тельно, бедное население будет жить еще хуже, и многие из них погибнут вследствие бедственного положения... В течение этого периода трудности при вступлении в брак и при создании семьи будут настолько серьезными, что рост населения остановится»[1].

Однако в то же самое время, когда Мальтус писал книгу, в Англии происходила промышленная революция. Возможно, впервые в истории условия жизни для существенного числа граждан значительно улучшились. Но, вопреки предсказаниям Мальтуса, улучшение жизни не привело к неизбежному увеличению прироста населения. В действительности эмпирические исследования за последние несколько лет говорят о том, что, за исключением очень бедных стран и домашних хозяйств, увеличение дохода на душу населения способствует сокращению уровня рождаемости. Хотя эмпирические исследования не подтвердили определенные предсказания Мальтуса, в его исследованиях отражена связь экономических переменных (таких как доход на душу населения, ставка заработной платы, уровень образования мужчин и женщин, урбанизация) с коэффициентами рождаемости и смертности (см. Wahl, 1985; Behrman, 1990; Shultz, 1989; Barro and Lee, 1994). Таким образом, результаты эмпирических исследований полностью отрицают то, что естественный темп прироста населения является экзогенным по отношению к экономическому росту.

Несмотря на это, в самых современных теориях экономического роста предполагается, что темп прироста населения является экзогенным и постоянным. Например, при рассмотрении моделей Солоу–Свэна и Рамсея в гл. 1 и 2 различные значения темпов прироста населения n оказывали влияние на совокупный рост, однако мы не рассматривали обратную связь между экономическим ростом и темпом прироста населения. В данной главе допускается эндогенное влияние населения на экономический рост в форме миграции, но еще не рассматривается изменение естественного темпа прироста населения.

В данном разделе мы рассматриваем модель роста, в которой скорость экономического развития влияет на выбор семьи относительно количества детей, а следовательно, и на коэффициент рождаемости[2]. В частности, мы хотим построить модель, отражающую некоторые из

[1] См. Maltus (1798, с. 161, сноска 19).

[2] Мы не пытаемся объяснить, почему произошла промышленная революция. В работах Lucas (2002), Galor and Weil (2000), Hansen and Prescott (2002), Jones (2001) рассматривались модели, в которых демографический переход и промышленная революция возникают как эндогенная реакция на изменение экономической окружающей среды.

главных эмпирических выводов, таких как, например, отрицательное соотношение между рождаемостью и доходами на душу населения во всех странах, за исключением стран с очень низким уровнем дохода на душу населения.

9.2.1. Модель пересекающихся поколений

Мы начинаем анализ с рассмотрения двух работ Becker and Barro (1988, 1989). В данных работах предполагается, что родителей и детей связывает альтруизм. Решение родителей о количестве детей принимается вместе с выбором уровня потребления и размером трансфертов между поколениями. На воспитание детей требуются большие затраты, но дополнение к полезности (как видится родителям) может быть достаточным, чтобы оправдать эти затраты. Если предельная полезность от рождения детей уменьшается с их количеством или если с ростом числа детей издержки на воспитание еще одного ребенка также растут, то коэффициент рождаемости в модели будет определяться исходя из стандартного условия первого порядка. Выбор количества детей также зависит от качества их воспитания и образования, в модели это отражено в уровне потребления и количестве основного капитала, приходящихся на каждого человека.

В работе Becker and Barro (1988) используется модель пересекающихся поколений (*overlapping-generations* - OLG), в которой люди живут в течение двух периодов: детства и зрелости. (См. приложение к гл. 3, модели OLG.) Институт брака не рассматривается, и каждый взрослый поколения i имеет n_i детей. Функция полезности принимает вид

$$U_i = u(c_i, n_i) + \Upsilon(n_i) \cdot n_i U_{i+1}, \tag{9.46}$$

где индекс i – это период зрелости человека; U_i - функция полезности в период зрелости; c_i – потребление в расчете на одного взрослого в период зрелости; n_i - количество детей на одного взрослого. Параметр $u(c_i, n_i)$ представляет собой те единицы полезности, которые были получены в течение взрослой жизни от потребления и наличия детей. (В данной формулировке потребление детей в течение детства включается в потребление их родителей.)

Последнее выражение из правой части уравнения (9.46) представляет собой те единицы полезности, которую получают взрослые с учетом предполагаемого благополучия своих детей, когда те станут взрослыми. Величина U_{i+1} – это полезность, которую получит каждый ребенок, став взрослым. Эта полезность также определяется из выражения (9.46), при этом все переменные должны быть обновлены с учетом периода. Предполагаем, что все дети одинаковы и родители уделяют всем детям равное внимание, так что все дети в следующий период достигают одного и того же уровня полезности U_{i+1}. (Это уравнивающее соотношение будет справедливо, если каждый будет характеризоваться одной и той же функцией полезности $u(\cdot)$ и если эта полезность является выпуклой по ресурсам, предоставляемым каждому ребенку.)

Функция $\Upsilon(n_i)$ в выражении (9.46) отражает ту степень альтруизма, которую родители отдают в качестве полезности каждому ребенку; поэтому $\Upsilon(n_i)$ умножается на «совокупную» полезность, достигаемую следующим поколением $n_i U_{i+1}$. Предполагаемые соотношения — это $\Upsilon(n_i) > 0$ (оценка родителями счастья своего ребенка), $\Upsilon'(n_i) < 0$ (формула убывающей предельной полезности от числа детей) и $\Upsilon(1) < 1$. Последнее соотношение означает, что если на одного взрослого приходится один ребенок, то взрослые будут эгоистами в том смысле, что они ценят единицу $u(c_i, 1)$ выше, чем $u(c_{i+1}, 1)$[1].

В работе Becker and Barro (1993) предполагается, что функция альтруизма является функцией с постоянной эластичностью:

$$\Upsilon(n_i) = \Upsilon n_i^{-\epsilon}, \tag{9.47}$$

где $\epsilon > 0$ и $0 < \Upsilon < 1$. Параметр Υ отражает степень альтруизма между родителями и детьми, когда $n_i = 1$. Представление о заботе родителей о своих детях отражено тем, что $0 < \Upsilon$, а эгоизм родителей отражается в то, что $\Upsilon < 1$. Условие $\epsilon > 0$ означает, что существует убывающая предельная полезность от количества детей в том смысле, что $\Upsilon(n_i)$ убывает с ростом n_i.

Если мы воспользуемся выражениями (9.46) и (9.47), мы можем записать U_i как взвешенную сумму будущих $u(c_j, n_j)$ для каждого поколения, начиная с i-го:

$$U_i = \sum_{j=1}^{\infty} \Upsilon^{j-1} \cdot N_j^{1-\epsilon} \cdot u(c_j, n_j), \tag{9.48}$$

где N_j число потомков в поколении j. Это число равно 1, когда $j = i$ (т. е. когда мы начинаем рассмотрение с точки зрения одного взрослого),

[1] Если продолжить дискуссию относительно альтруистических связей, начатую в приложении гл. 3, то параметр Υ будет сочетать чистые межвременные предпочтения (включающие параметр ρ) и отношение к детям. В рассматриваемом нами контексте мы считаем ρ равным нулю.

и равно произведению n_j для $j > i$:

$$N_i = 1; \quad N_j = \prod_{k=i}^{j-1} n_k \quad \text{для всех } j = i+1, i+2, \ldots . \tag{9.49}$$

Ранее мы рассматривали функцию $u(c)$, характеризующуюся постоянной предельной эластичностью $u'(c)$ по c. Теперь мы сделаем аналогичное предположение о том, что функция $u(c_j, n_j)$ характеризуется постоянной эластичностью предельной полезности по параметрам c_j и n_j:

$$u(c_j, n_j) = \frac{[c_j \cdot (n_j)^{\phi}]^{1-\theta}}{1-\theta}, \tag{9.50}$$

где $\phi > 0$ и $\theta > 0$. Мы также предполагаем, что

$$\psi \cdot (1-\theta) < 1$$

для получения убывающей предельной полезности по n_j. Пусть

$$\psi \equiv (1-\epsilon) \cdot (1-\theta),$$

где $\psi > 0$[1]. Подставив выражение для $u(c_j, n_j)$ из формулы (9.50) в (9.48), получаем

$$U_i = \sum_{j=1}^{\infty} \Upsilon^{j-1} \cdot \frac{[N_j^{\psi} \cdot c_j \cdot n_j^{\phi}]^{1-\theta} - 1}{1-\theta}. \tag{9.51}$$

Отметим, что из условия $\epsilon > 0$ следует $\psi \cdot (1-\theta) < 1$. В числителе мы добавили -1, поэтому, когда θ стремится к 1, выражение под знаком суммы преобразуется в логарифмическую функцию полезности:

$$U_i = \sum_{j=1}^{\infty} \Upsilon^{j-1} \cdot [\psi \cdot \log N_j + \log c_j + \phi \cdot \log n_j]. \tag{9.52}$$

Если θ достигает 1, то мы можем получить выражение (9.52) из выражения (9.51), используя правило Лопиталя.

Мы можем дополнить модель, как это сделано в работе Becker and Barro (1993), точно определив издержки на рождение и воспитание детей и введя относящееся к нескольким поколениям бюджетное ограничение. Это ограничение отражает соотношение средств,

[1] Из условия $\psi > 0$ следует, что $\epsilon < 1$ при $\theta < 1$, как и рассматривалось в работе Becker and Barro (1988). В данной формулировке также допускается, что $\epsilon > 1$ при $\theta > 1$. Если $\theta = 1$, то необходимо, чтобы выполнялось $\epsilon = 1$, чтобы ψ было конечным.

переданных родителями своим детям, к первоначальному капиталу родителей, величине заработной платы и доходов от активов, а также к издержкам на воспитание детей и потреблению. В каждом поколении взрослые определяют уровень потребления и рождаемости, позволяющие максимизировать U_i из выражения (9.51) при относящемся к нескольким поколениям бюджетном ограничении. Анализ достаточно прост, если решение о величине трансферта между поколениями принимается внутри семьи, т. е. если, принимая решения, родители всегда выделяют положительные трансферты. Тогда нам не придется анализировать, что для данного случая необходимо оговаривать отсутствие отрицательных трансфертов, которые можно рассматривать как долги, оставленные детям. Мы не рассматриваем данную ситуацию здесь более подробно, поскольку предпочитаем работать с непрерывной во времени версией модели.

9.2.2. Модель с непрерывным временем

Модель пересекающихся поколений играет весьма важную роль для изучения уровня рождаемости, поскольку длительность периода жизни поколения имеет большое значение. Она отражает среднюю разницу в возрасте между родителями и детьми, т. е. продолжительность периодов детства и зрелости. В целях агрегирования нам, однако, придется складывать показатели семей, в которых в заданный момент времени есть дети разных возрастов. Однако в данной модели ограничение на целочисленность количества детей будет иметь значение только на уровне семьи, на агрегированном же уровне это ограничение будет устранено за счет неоднородности семей.

Исходя из этих рассуждений, можно заключить, что не следует решать задачу выбора на уровне отдельных семей в модели с дискретным временем, а затем обобщать результат на уровень всей экономики. Результаты, полученные в подобной модели с дискретным временем (которые могут содержать зацикленность около устойчивого состояния), будут отражать неудачную попытку суммирования результата по всем семьям. Таким образом, нам необходимо проводить точное агрегирование или же необходимо воспользоваться аппроксимацией поведения типичного домашнего хозяйства с помощью модели с непрерывным временем. Модели с непрерывным временем не хватает реалистичности на уровне отдельной семьи (например, в модели пренебрегается ограничение на целочисленность детей), но она вполне подходит для изучения переменных на уровне экономики в целом.

Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем разделе, и модифицируем модель бесконечно живущего домашнего хозяйства с непрерывным временем, предложенную в модели Рамсея в гл. 2. Бесконечный горизонт планирования здесь является естественной предпосылкой, поскольку он отражает наличие альтруистических связей между родителями и детьми, детьми и внуками и т. д. Параметр межвременных предпочтений $\rho > 0$ в постановке модели Рамсея соответствует степени альтруизма между поколениями, $\Upsilon < 1$, в модели пересекающихся поколений. Новым является то, что межвременные предпочтения также зависят от числа детей и что на воспитание детей расходуются ресурсы.

Количество рождений и смертей. В модели с дискретным временем новое поколение, размер которого является конечным, появляется в каждый период времени. Каждый человек проживает два периода: детство и зрелость. В модели с непрерывным временем мы, наоборот, оцениваем количество рождений и смертей как непрерывные потоки.

Пусть $n \geqslant 0$ является коэффициентом рождаемости, который мы рассматриваем как параметр оптимизации в каждый момент времени, а $d > 0$ является коэффициентом смертности. Для удобства предположим, что d не зависит от возрастной структуры семьи. Мы также предполагаем, что d не зависит от затрат семьи на медицину, на улучшение санитарных условий и т. д., хотя оценка влияния этих параметров на смертность в модели будет важным ее расширением. Размер семьи N изменяется непрерывно в соответствии с

$$\dot{N} = (n - d) \cdot N. \tag{9.53}$$

Параметр N является теперь еще одной фазовой переменной для домашних хозяйств.

Функция полезности. Воспользуемся формулой функции полезности домашних хозяйств в случае дискретного времени из выражения (9.51) и с ее помощью модифицируем функцию для непрерывного времени, заданную выражением (2.1). В итоге мы получаем

$$U = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\rho t}}{1-\theta} \left\{ [N^\psi \cdot c \cdot (n-d)^\phi]^{1-\theta} - 1 \right\} dt. \tag{9.54}$$

Параметр $e^{-\rho t}$ соответствует параметру альтруизма Υ^{j-i} из выражения (9.51). Выражение (9.54) включает чистый темп прироста населения $n - d$, а не коэффициент рождаемости n отдельно. Если d означает младенческую смертность, то $n - d$ отражает количество выживших детей, т. е. тот параметр, который появляется в функции полезности[1]. Отметим, что количество людей N входит в функцию полезности. Этот фактор вызывает сложности при решении модели. Джонс (Jones, 2001) использовал более простую функцию полезности, которая не зависела от численности населения, что позволяло легче находить математическое решение.

Издержки воспитания детей. Затраты на рождение и воспитание каждого ребенка составляют η. Мы считаем, что η тратится полностью в момент рождения, хотя в более реалистичных моделях предполагается, что эти затраты возрастают в течение долгого периода взросления ребенка. Мы попытаемся обойти этот недостаток, считая, что η — это достаточно большие расходы, которые отражают текущую стоимость расходов на каждого ребенка. Поскольку nN — это количество новорожденных за единицу времени, постольку ηnN - это общие издержки на воспитание детей, а ηn — это затраты на душу населения.

Ключевым аспектом является соотношение η и других параметров, таких как проводимое родителями время с детьми и качество воспитания ребенка, что в модели соответствует потреблению и количеству капитала на человека, c и k[2]. Если η означает затраты на приобретение на рынке товаров и услуг, то с ростом экономики относительно дохода на душу населения уменьшаются издержки воспитания детей. В данном случае, наоборот, с развитием экономики коэффициент рождаемости n имеет тенденцию к росту.

Becker (1991) и другие исследователи утверждали, что воспитание детей требует больших затрат времени со стороны родителей, особенно матери, в обществах, где женщины считаются главными в воспита-

---

[1] Эта модель не является достаточно полной и не позволяет рассматривать коэффициент смертности в зависимости от возраста. Однако выбор домашних хозяйств не изменится, если мы включим такой фактор, как d^{-i}, где $i > 0$, умноженный на $N^{\psi} \cdot c \cdot (n - d)^{\Phi}$ из выражения (9.54). Этот фактор отражает отрицательную полезность, возникающую из-за смертности взрослых.

[2] Мы считаем, что затраты на воспитание ребенка пропорциональны количеству детей. Предполагается, что структура затрат семьи, собирающейся заводить первого ребенка, такова, что издержки воспитания каждого последующего ребенка снижаются. Однако, в конечном счете, издержки воспитания с увеличением количества детей будут расти в нелинейной зависимости, поскольку рождение большего числа детей означает, что время между появлением новых детей становится короче или же возраст родителей становится довольно большим.

нии детей[1]. Другими словами, рост производительности, влияющий на производство товаров и услуг и возникающий благодаря накоплению капитала и технологическому прогрессу, не может быть использован при воспитании детей. В данном случае издержки η растут вместе со ставкой заработной платы или другими мерами альтернативных издержек времени родителей. В таком случае большее число лет, затраченных на образование взрослыми (в особенности женщинами), будет повышать η. Более того, η растет вместе с ростом среднедушевого количества человеческого и физического капитала, представленного параметром k в модели.

Для того чтобы определить связь между η и заработной платой родителей, необходимо рассмотреть альтернативные способы времяпрепровождения. Так, время может расходоваться на производство продукции, а может и на воспитание детей. Это расширение модели создает дополнительную техническую сложность в виде нелинейных соотношений. Однако так как главная идея заключается в положительном соотношении между η и k, мы, наоборот, постулируем линейное соотношение:

$$\eta = b_0 + bk, \tag{9.55}$$

где $b_0 \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Здесь b_0 означает затраты товаров на воспитание ребенка, а bk – издержки, возрастающие с увеличением капиталоемкости.

Спецификация в выражении (9.55) оказывается довольно простой, если предположить, что $b_0 = 0$, поскольку издержки воспитания детей на душу населения $\eta n = bnk$ тогда учитываются вместе с выражением nk, которое было со знаком минус в бюджетном ограничении домашних хозяйств (см. выражение (2.23)). Далее мы обсудим некоторые результаты моделей, которые включают продуктовые издержки b_0.

Семейное бюджетное ограничение. Пусть каждый член семьи получает одинаковую заработную плату в размере w. (Более реалистичной является предпосылка о том, что w зависит от возраста, т. е. дети не сразу начинают получать заработную плату.) Семейные активы приносят доход по ставке r.

Пусть c и k – это потребление и активы в расчете на каждого члена семьи соответственно. (Для удобства мы воспользовались тем, что в закрытой экономике величина активов на душу населения a равна k.)

[1] См. Galor and Weil (1996) для подробного анализа этой особенности в контексте моделей роста. В работе Becker, Murphy and Tamura (1990) также подчеркивается связь между человеческим капиталом и затратами на воспитание детей.

Бюджетное ограничение выглядит следующим образом:

$$\dot{k} = w + (r - n + d) \cdot k - bnk - c, \tag{9.56}$$

где формула издержек на воспитание ребенка η задается выражением (9.55), при этом $b_0 = 0$. Как обычно, мы предполагаем, что каждое домашнее хозяйство рассматривает траектории ставки заработной платы w и нормы прибыли r как заданные[1]. Отличие от традиционной формулы заключается в наличии затрат на воспитание детей в расчете на душу населения, bnk.

Условия оптимизации. Оптимизационная задача домашних хозяйств заключается в выборе траектории управляющих переменных c и n, позволяющих максимизировать U в формуле (9.54). Задача максимизации решается при следующих ограничениях: первоначальный размер активов составляет $k(0)$; формулы перехода к устойчивому состоянию двух фазовых переменных N и k задаются выражениями (9.53) и (9.56); справедливы неравенства $c \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$ (которые никогда не будут связаны, так как функция полезности задается выражением (9.54)); а также выполняются ограничения, которые исключают возможность бесконечной передачи долга из поколения в поколение (при $k < 0$).

Запишем гамильтониан:

$$\begin{aligned} J = \frac{e^{-\rho t}}{1-\theta} \cdot \left\{[N^{\psi} \cdot c \cdot (n-d)^{\phi}]^{1-\theta} - 1\right\} + \\ + \nu \cdot [w + (r+d) \cdot k - (1+b) \cdot nk - c] + \mu \cdot (n-d) \cdot N, \end{aligned} \tag{9.57}$$

где v и μ — это теневые цены для двух фазовых переменных k и N. Ограничения $c \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$ никогда не используются (поскольку предельная полезность становится бесконечной при c и n, стремящихся к 0, и $d \geqslant 0$), поэтому поведение домашних хозяйств удовлетворяет условию первого порядка, получаемому из выражений:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\partial J}{\partial n} = 0, \quad \dot{v} = -\frac{\partial J}{\partial k}$$

[1] Мы, однако, предполагаем, что издержки на воспитание ребенка η зависят от активов каждого домашнего хозяйства k, а не от величины капитала на душу населения в экономике в целом. Анализ будет слегка отличаться, если η будет зависеть только от параметров, отражающих состояние экономики в целом, что, возможно, отразится на соотношении между η и ставки заработной платы.

и
$$\dot{\mu} = -\frac{\partial J}{\partial N}\text{[1]}.$$

Эти выражения значительно упрощаются, если взять логарифм функции полезности и $\theta = 1$. Рассмотрим этот случай более подробно.

Условия $\partial J/\partial c = 0$ и $\dot{v} = -\partial J/\partial k$ можно преобразовать таким образом, чтобы получить выражение для темпов прироста c[2]:
$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left\{ r - \rho - (n-d) \cdot [1 - \psi \cdot (1-\theta)] - nb + \phi \cdot (1-\theta) \cdot \frac{\dot{n}}{n-d} \right\}.$$

При рассмотрении логарифмической функции полезности $\theta = 1$ мы можем записать выражение как
$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho - (n-d) - bn. \tag{9.58}$$

Когда $\theta = 1$, темп прироста населения $n - d$ фактически складывается с коэффициентом межвременных предпочтений ρ (см. сноску (2) на с. 532, для сравнения со стандартной моделью Рамсея). Кроме того, выражение bn вычитается из r, так как чем выше k, тем больше издержки, связанные с воспитанием детей, обозначенные через bnk.

---

[1] Одной из возможных проблем является то, что увеличение количества детей не обязательно сопряжено с большими издержками, поэтому будет существовать стимул к тому, чтобы брать взаймы для сколь угодно большого увеличения числа n. Подобная проблема не возникает, если значение параметра издержек b достаточно велико, что гарантирует, что переменная Ω (которая, как будет показано далее, определяется как $(1+b) \cdot k/c - \phi/(n-d)$), будет всегда положительной.

[2] В модели Рамсея, рассмотренной в гл. 2, параметр n являлся экзогенно задаваемым, а $b = 0$. Тогда темп прироста c составлял
$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \{r - \rho - (n-d) \cdot [1 - \psi \cdot (1-\theta)]\}.$$

В традиционной модели также предполагалось, что $\psi \cdot (1-\theta)$, совпадающее с $1 - \epsilon$, равно единице, тогда формула записывается как
$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho).$$

Из условия $\psi \cdot (1-\theta) = 1$ (или, что то же самое, $\epsilon = 0$) следует, что предельный вклад N в общую полезность (при заданных c и n) будет отрицательным, если $\theta > 1$, и неограниченным по величине, если θ достигает 1. По этой причине в работах Becker and Barro (1998, 1989) рассматривается случай $\theta < 1$. Предполагается, что ψ — величина положительная и конечная, а предельный вклад N в общую полезность также конечен и положителен.

Для удобства анализа введем новую переменную Ω:

$$\Omega \equiv (1+b)\cdot\frac{k}{c} - \frac{\phi}{n-d}.$$

Из условия $\partial J/\partial c = \partial J/\partial n = 0$ получаем

$$\mu = e^{-\rho t}\cdot N^{\psi(1-\theta)-1}\cdot c^{1-\theta}\cdot(n-d)^{\phi(1-\theta)}\cdot\Omega.$$

Если продифференцировать по времени выражение для μ и подставить вместо $\dot\mu$ условие $\dot\mu = -\partial J/\partial N$, то получим

$$\dot\Omega = -\psi + \frac{\Omega}{\theta}\cdot\left\{\rho - (1-\theta)\cdot\left[r - (1-\psi)\cdot(n-d) - nb + \phi\cdot\frac{\dot n}{n-d}\right]\right\}.$$

Если $\theta = 1$, то дифференциал можно упростить:

$$\dot\Omega = -\psi + \Omega\rho.$$

Это решение является неустойчивым. Следовательно, если $\Omega(0)$ является значением параметра в нулевой момент времени, то оно равно ψ/ρ. Так как вся траектория является неустойчивой, то, сдвигаясь из точки $\Omega(0)$ в последующие моменты времени, значения Ω равны $\pm\infty$. Неустойчивость этой траектории нарушает условие трансверсальности для N[1], поэтому оптимальный выбор заключается в том, что Ω равно ψ/ρ в каждый момент времени. Рассчитав значение Ω, можно увидеть, что коэффициент рождаемости удовлетворяет условию:

$$n = d + \frac{\phi\rho\cdot(c/k)}{\rho\cdot(1+b) - \psi\cdot(c/k)}. \tag{9.59}$$

Из выражения (9.59) следует, что при заданных значениях параметров ϕ, ψ, b и ρ, а также при заданном отношении c/k изменение коэффициента смертности d на какую-либо величину приводит к изменению рождаемости n на эту же величину. Более высокие значения

---

[1]Дифференциальное уравнение для Ω имеет общее решение:

$$\Omega = \frac{\psi}{\rho} + \left[\Omega(0) - \frac{\psi}{\rho}\right]\cdot e^{\rho t}.$$

Условие для μ можно упростить при $\theta = 1$ до $\mu N = \Omega e^{-\rho t}$. Подставив решение для Ω в это выражение для μN, получаем

$$\mu N = e^{-\rho t}\cdot\frac{\psi}{\rho} + \Omega(0) - \frac{\psi}{\rho}.$$

Следовательно, условие трансверсальности для N $(\lim_{t\to\infty}(\mu N) = 0)$ выполняется, только если $\Omega(0) = \psi/\rho$. В таком случае $\dot\Omega = 0$ для всех t и значение Ω равно ψ/ρ, что соответствует устойчивому состоянию.

параметров ϕ и ψ приводят к увеличению предельной полезности по параметрам n и N соответственно (см. выражение (9.54)), а следовательно, приводят к росту n. Более высокое значение b означает рост издержек на воспитание детей, что соответственно приводит к снижению n. Высокое значение параметра ρ означает ухудшение условий инвестирования (в N), а следовательно, ведет к снижению n.

Параметр c/k — отношение влияния дохода на количество детей, определяемого как c, к издержкам, связанным с воспитанием детей, линейно зависящим от k через выражение $(1+b)\cdot nk$, указанное в бюджетном ограничении из выражения (9.56). Следовательно, увеличение c/k соответствует увеличению n. Этот результат означает, что n переходит к устойчивому состоянию в том же направлении, что и c/k.

Динамика перехода и устойчивое состояние. Динамическая модель состоит из выражений для $\dot{k}$ и $\dot{c}/c$ из формул (9.56) и (9.58), а также выражения для n из формулы (9.59). Формулы для $\dot{k}$ и $\dot{c}/c$ включают параметры w и r, определяемые, как обычно, из производственной функции. Пусть трудовые ресурсы L совпадают с количеством населения N; тогда технологический прогресс, возникающий благодаря увеличению трудовых ресурсов, осуществляется с постоянным темпом прироста $x \geqslant 0$. Производственная функция — это функция Кобба-Дугласа:

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$, $\hat{k} \equiv K/\hat{L}$ и $\hat{y} = Y/\hat{L}$. Если капитал обесценивается с постоянным темпом δ, то решение, максимизирующее прибыль, для конкурентных фирм, определяется как

$$r = \alpha A\hat{k}^{\alpha-1} - \delta, \quad w = (1-\alpha)\cdot A\hat{k}^{\alpha}\cdot e^{xt}. \tag{9.60}$$

Для удобства составим систему из уравнений, содержащих преобразованные переменные:

$$\chi \equiv \frac{c}{k} \quad \text{и} \quad z \equiv A\hat{k}^{\alpha-1},$$

где z — средний за период продукт капитала. Выражения (9.56) и (9.58), как и (9.60), могут быть использованы для получения формулы динамики перехода для параметра χ:

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = -\rho - (1-\alpha)\cdot z + \chi. \tag{9.61}$$

Подставив значение n из выражения (9.59) и воспользовавшись формулами (9.56) и (9.60), получаем формулу динамики перехода для

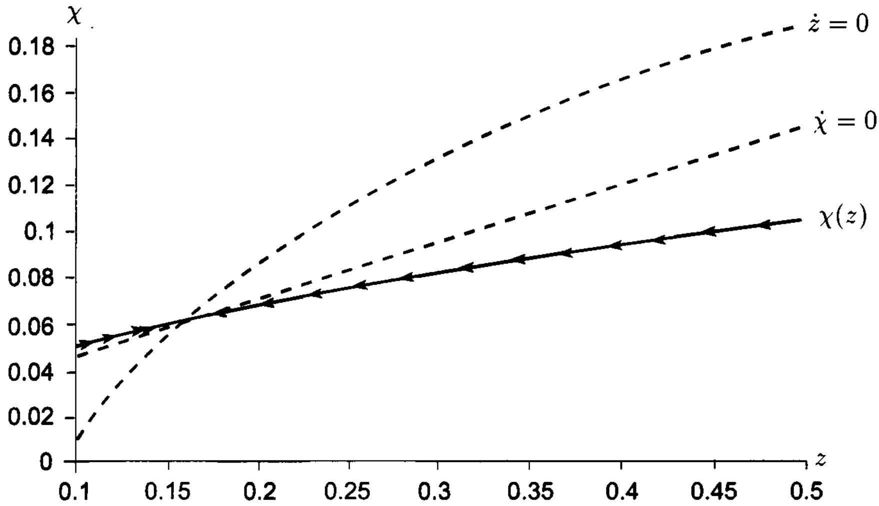


Рис. 9.6. Фазовая диаграмма в пространстве (z, χ) модели рождаемости. В данной модели рождаемости седловая траектория является устойчивой. В пространстве (z, χ) устойчивая траектория имеет положительный наклон. Следовательно, если в начальный момент времени экономика страны характеризуется высоким средним уровнем продукта капитала z, то z и $\chi \equiv c/k$ будут монотонно убывать при переходе к устойчивому состоянию

параметра z:

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha) \cdot \left[z - \delta - bd - x - \chi - \frac{\phi\rho\chi \cdot (1+b)}{\rho \cdot (1+b) - \psi\chi} \right]. \tag{9.62}$$

При построении рис. 9.6, на котором изображена фазовая диаграмма в пространстве (z, χ), мы воспользовались условиями (9.61) и (9.62). Изображенные кривые соответствуют определенным значениям основных параметров:

$$\begin{array}{llll} \alpha = 0{,}75; & \delta = 0{,}05; & \rho = 0{,}02; & x = 0{,}02; \\ d = 0{,}01; & b = 1; & \psi = 0{,}2; & \phi = 0{,}2. \end{array}$$

В первом ряду стоят величины, которые мы использовали ранее. Во втором ряду мы предположили, что годовой коэффициент смертности d равен 0,01. Параметры b, ψ и ϕ являются произвольными. Далее мы обсудим, насколько решение в модели зависит от изменения этих параметров. В любом случае вид фазовой диаграммы не сильно меняется при изменении значений этих параметров.

Графиком траектории $\dot{\chi} = 0$, задаваемой выражением (9.61), является прямая с положительным наклоном и свободным членом ρ. Эта траектория является неустойчивой, т. е. при заданном z $\dot{\chi}/\chi$ растет с увеличением χ.

Из выражения (9.62) следует, что линия $\dot{z} = 0$ имеет положительный наклон и является устойчивой, т. е. при заданном значении χ $\dot{z}/z$ убывает с ростом z. Соотношение между параметрами χ и z вдоль этой прямой является решением квадратного уравнения, которое имеет два действительных положительных корня при «рационально» заданных параметрах. Больший корень лежит над прямой $\dot{\chi} = 0$. Прямая, изображенная на рис. 9.6, соответствует меньшему корню.

Пересечение двух траекторий определяет устойчивые значения z^* и χ^*. Зная эти значения, мы можем рассчитать n^*, используя выражение (9.59). Ставка процента в устойчивом состоянии может быть рассчитана как

$$r^* = \alpha z^* - \delta.$$

На рис. 9.6 показано, что устойчивая седловая траектория имеет положительный наклон в пространстве (z, χ). Следовательно, если в начальный момент времени в экономике страны $z(0) > z^*$(т. е. $\hat{k}[0] < \hat{k}^*$), то z и χ монотонно убывают до значений в устойчивом состоянии.

Из выражения (9.59) следует, что n положительно коррелирует с $\chi \equiv c/k$ вдоль траектории перехода к устойчивому состоянию. Следовательно, уменьшение χ вдоль траектории, показанное на рис. 9.6, соответствует уменьшению n. На рис. 9.7 изображено соотношение между χ и z при переходе к устойчивому состоянию. (Так как из рис. 9.6 нам известно соотношение между χ и z, то мы можем воспользоваться выражением (9.59), чтобы задать n как функцию от z.) С ростом z значение параметра n будет монотонно уменьшаться до значения в устойчивом состоянии. То есть при заданном коэффициенте смертности d коэффициент рождаемости с развитием экономики будет падать.

Вывод о том, что уровень рождаемости на душу населения падает с ростом выпуска, согласуется с эмпирическими исследованиями в различных странах. Однако, как видно из статистики, при очень низком уровне выпуска рождаемость и ВВП на душу населения соотносятся положительно. Таким образом, теория Мальтуса подтверждается для очень бедных стран. Первоначальное положительное соотношение между рождаемостью и ВВП на душу населения возникает, если наряду с издержками воспитания, растущими линейно вместе с k, включить в рассмотрение и продуктовые издержки воспитания детей. Эти издержки являются той силой (эффектом дохода), которая обеспечивает положительное соотношение между рождаемостью и выпуском на душу населения. Более того, так как продуктовые издержки имеют более важ-

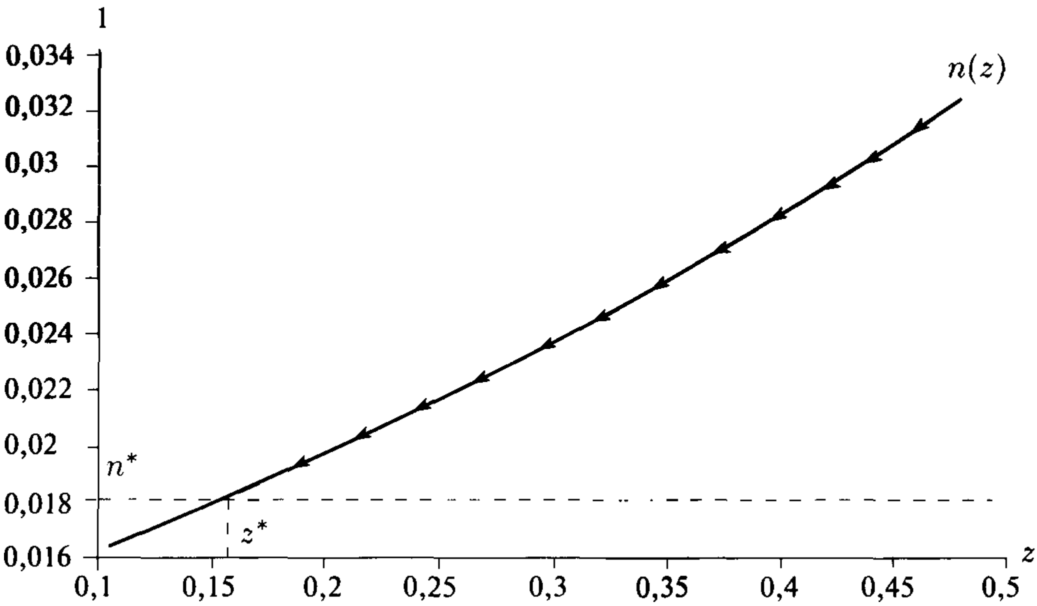


Рис. 9.7. Коэффициент рождаемости в переходный период. Если в начальный момент времени экономика страны характеризуется высоким средним уровнем продукта капитала z. то при уменьшении z (вдоль седловой траектории, изображенной на рис. 9.6) коэффициент рождаемости n падает до своего значения в устойчивом состоянии. При количественной оценке для заданных величин первоначальное значение z составляет 0,3 (и соответствует норме прибыли 0,25), первоначальное значение n составляет 0,023 и уменьшается до 0,018 в устойчивом состоянии

ное значение в бедных странах, постоянное положительное соотношение между рождаемостью и выпуском на душу населения возникает только для низкого уровня выпуска на душу населения.

Мы можем ввести параметр продуктовых издержек на воспитание детей, если будем считать, что параметр b_0 в выражении (9.55) отличен от нуля. Хотя используемая ранее аналитическая методика не работает, если выражение для издержек по воспитанию детей содержит положительный свободный член, однако мы можем использовать численные методы для оценки динамики в модифицированной модели. В частности, мы можем исследовать результаты модели при $b_0 = 50$. Если все остальные параметры, используемые при построении графиков 9.6 и 9.7, включая $b = 1$, оставить без изменений, то значение $b_0 = 50$ означает, что при $n = 0{,}02$ и $\hat{k}$, равном одной десятой $\hat{k}^*$, продуктовые издержки воспитания детей составляют примерно одну шестнадцатую общего выпуска (если параметр A в производственной функции равен 1).

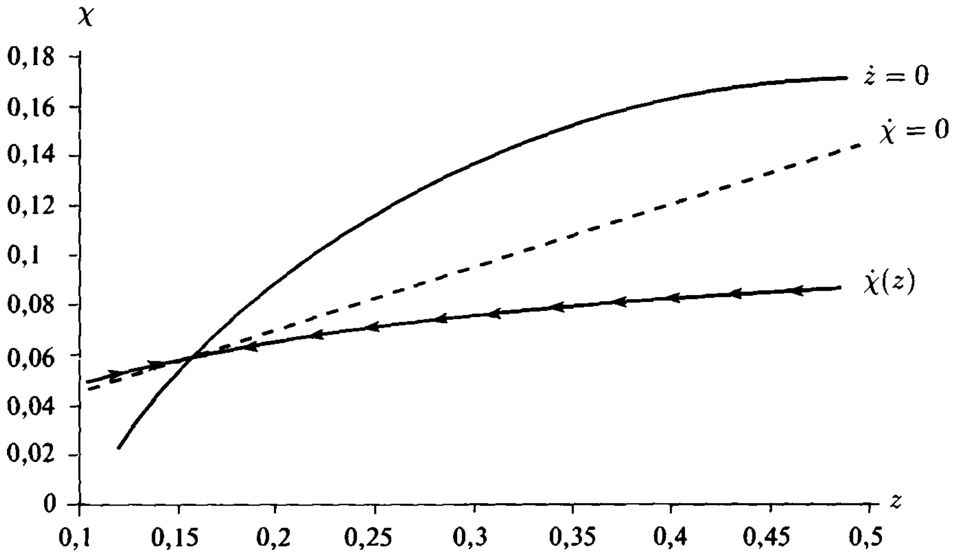


Рис. 9.8. Фазовая диаграмма продуктовых издержек на воспитание детей в пространстве (z, χ). Этот график отражает преобразование модели, изображенной на рис. 9.6, и включение такого параметра, как продуктовые издержки на воспитанияе детей. Если в начальный момент времени экономика характеризуется высоким средним уровнем продукта капитала z, то z и $\chi \equiv c/k$ по-прежнему монотонно убывают во время переходного периода

Мы численно рассчитали, что для случая $\eta = 50 + bk$ фазовая диаграмма в пространстве (z, χ) будет иметь вид, как на рис. 9.8[1]. Соответствующее соотношение между n и z показано на рис. 9.9. Важным отличием рис. 9.9 в сравнении с рис. 9.7 является то, что теперь n растет при уменьшении z, если значения z достаточно велики (т. е. при достаточно низких значениях $\hat{k}$). Таким образом, расширение модели соответствует реальным наблюдениям, поскольку теперь рождаемость увеличивается с ростом среднедушевого выпуска в очень бедных странах, но падает с ростом выпуска в большинстве исследуемых стран.

В табл. 9.1 мы возвращаемся к ситуации, когда $b_0 = 0$, для того чтобы показать, как значения переменных n^* и r^* зависят от значений параметров ϕ, ψ, d и b в устойчивом состоянии. Для первоначальных значений параметров мы получаем $n^* = 0{,}018$ и $r^* = 0{,}067$. Рост ϕ или ψ приводит к увеличению выгоды, получаемой от рождения детей, и, следовательно, повышает n^*. Например, n^* возрастает до 0,030, если ϕ или ψ растет до 0,4. Величина n^* падает до 0,014, если ϕ уменьша-

[1]Эти результаты предполагают, что стоимость продуктов, начинающаяся с 50, растет с темпом $x = 0{,}02$ в год при экзогенно задаваемом технологическом прогрессе.

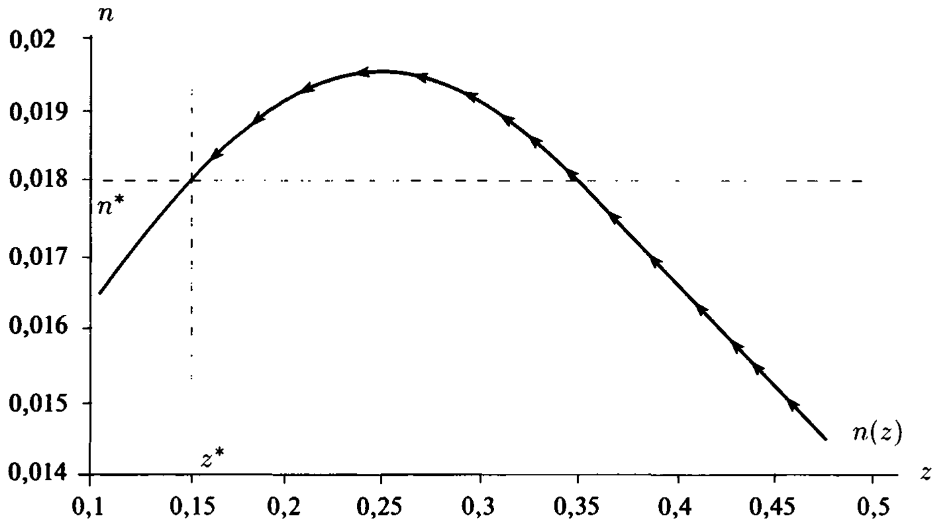


Рис. 9.9. Переходная динамика коэффициента рождаемости с учетом продуктовых затрат на воспитание детей. Данный график представляет собой модификацию графика рис. 9.7 с учетом продуктовых затрат на воспитание детей. Если в начальный момент времени экономика характеризуется высоким средним продуктом капитала z, то, так как z уменьшается вдоль седловой траектории, изображенной на рис. 9.8, коэффициент рождаемости может теперь изменяться немонотонно. В отличие от рис. 9.7, коэффициент рождаемости может некоторое время возрастать, а затем будет снижаться до тех пор, пока не достигнет значения в устойчивом состоянии. Это поведение говорит о тенденции роста коэффициентов рождаемости с ростом дохода на душу населения в самых бедных странах и о падении коэффициента с ростом дохода на душу населения в большинстве рассматриваемых стран

ется до 0,1, и падает до 0,017, если ψ уменьшается до 0,1. Так как в устойчивом состоянии $\dot{c}/c = x$, воспользуемся выражением (9.58) для определения соотношения между n^* и r^*. Для заданных величин ρ, b и d, r^* изменяется за счет фактора $1 + b$ в том же направлении, что и n^*. Таким образом, в табл. 2 показано, что увеличение ϕ и ψ приводит к увеличению r^*.

Для заданного соотношения c/k из выражения (9.59) следует, что n изменяется в отношении один к одному с коэффициентом смертности d. Однако, так как увеличение d ведет к росту $(c/k)^*$, итоговое влияние d на n^* оказывается немного больше, чем один к одному. Например, если d увеличивается с 0,01 до 0,02, из табл. 9.1 видно, что n^* возрастает с 0,0183 до 0,0291. Изменение темпов прироста населения $n^* - d$ мало, поэтому из выражения (9.58) следует, что r^* за счет фактора b

Таблица 9.1

Влияние изменения параметров на значения n^* и r^*

Значения параметров	n^*	r^*
Первоначальные значения	0,0183	0,067
$\phi = 0{,}4$	0,0300	0,090
$\phi = 0{,}1$	0,0139	0,058
$\psi = 0{,}4$	0,0300	0,090
$\psi = 0{,}1$	0,0168	0,064
$d = 0{,}02$	0,0291	0,078
$d = 0$	0,0076	0,055
$b = 0{,}5$	0,0226	0,064
$b = 2{,}4$	0,0152	0,076

Примечание. Первоначальные значения – это $\alpha = 0{,}75$, $\delta = 0{,}05$, $\rho = 0{,}02$, $x = 0{,}02$, $d = 0{,}01$, $b = 1$, $\psi = 0{,}2$, $\phi = 0{,}2$. В таблице показано влияние изменения каждого из этих параметров на значения переменных n^* и r^* в устойчивом состоянии, все остальные параметры не меняются.

по-прежнему изменяется в том же направлении, что и n^*. Из табл. 9.1 видно, что увеличение d приводит к соответствующему увеличению r^*.

Увеличение параметра издержек b приводит к уменьшению n^*. Например, как следует из табл. 9.1, если b возрастет до 2, n^* упадет до 0,015, в то же время если b упадет до 0,5, то n^* возрастет до 0,023. Так как увеличение b приводит к уменьшению n^*, из выражения (9.58) следует, что влияние на r^* будет неоднозначным. Те значения, которые были рассмотрены в табл. 9.1, показали, что эффект положителен.

9.3. Выбор между работой и досугом

До сих пор мы предполагали, что соотношение между предложением труда и населением постоянно, т. е. мы пренебрегали изменениями в занятости рабочей силы, или в отработанных часах, и прилагаемых работником усилиях. В данном разделе мы будем изменять предложение труда при заданной численности населения, принимая во внимание выбор соотношения между работой и досугом. Изменение в предложении труда в данной модели означает некоторую совокупность изменений в занятости рабочей силы, часах работы и прилагаемых на работе усилий, однако анализ не позволяет выделить отдельно эти составляющие предложения труда.

Мы проведем анализ в рамках модели Рамсея, добавив досуг в качестве дополнительного аргумента в функцию полезности. При этом воспользуемся такой спецификацией предпочтений в модели, согласно которой предложение труда в переходный период меняется, однако в устойчивом состоянии количество времени, уделяемого работе, является константой. Данная модель позволяет оценить поведение показателя трудовых усилий при переходе к устойчивому состоянию и рассмотреть, каким образом изменения различных параметров повлияют на количество трудовых усилий в устойчивом состоянии.

Население, обозначенное через $N(t)$, теперь должно отличаться от трудовых ресурсов $L(t)$. Мы возвращаемся к той ситуации, когда $N(t)$ растет с экзогенно заданным темпом прироста n, а $L(t)$ может изменяться при заданном $N(t)$. Пусть $\ell(t)$ – это интенсивность прилагаемых трудовых усилий в момент t, т. е.

$$L(t) \equiv \ell(t) \cdot N(t). \tag{9.63}$$

Если $\ell(t)$ – это та часть времени, которая затрачивается на работу, то ее можно оценить с помощью имеющихся данных, естественным пределом данной величины будет 100%. Наоборот, если $\ell(t)$ учитывает изменение прилагаемых усилий, то данную величину нельзя оценить и у нее отсутствует очевидная верхняя граница.

Преобразуем функцию полезности домашнего хозяйства из выражения (2.1), чтобы включить в нее отрицательную полезность от трудовых усилий

$$U = \int_0^\infty u[c(t), \ell(t)] \cdot e^{-(\rho - n)t}\, dt, \tag{9.64}$$

где частные производные отвечают традиционным условиям выпуклости функции, включая $u_c > 0$, $u_\ell < 0$, $u_{cc} < 0$ и $u_{\ell\ell} \leqslant 0$[1]. Если ставка заработной платы w является тем количеством, которое платится за единицу трудовых ресурсов, то бюджетное ограничение домашнего хозяйства получается преобразованием выражения (2.2):

$$\dot{a} = w\ell + (r - n) \cdot a - c. \tag{9.65}$$

---

[1] Это означает, что трудовые усилия ℓ отрицательно влияют на значение функции полезности. Другой подход, предложенный Becker (1965), предполагает, что оставшееся время после работы на рынке труда индивид использует для домашнего производства. Важное отличие этого подхода заключается в том, что на производительность труда, прилагаемого дома, влияет накопление капитала и технологический прогресс. Распределение времени между работой дома и на рынке труда тогда будет зависеть от тренда относительной производительности и изменения относительного спроса на товары, произведенные дома и на рынке. Описание данного подхода в динамике изложено в таких работах, как Greenwood and Hercowitz (1991), Benhabib, Rogerson and Wright (1991).

Продолжим анализ, традиционно выписав гамильтониан:

$$J = u(c, \ell) \cdot e^{-(\rho - n)t} + v \cdot [w\ell + (r - n) \cdot a - c].$$

Задача максимизации в данном случае такая же, как и в гл. 2, с той лишь разницей, что u_c, предельная полезность потребления, теперь может зависеть от ℓ, и нам необходимо добавить новое условие первого порядка $\partial J / \partial \ell = 0$.

Условие первого порядка, которое соответствует выражению (2.7) из модели Рамсея, записывается как

$$r = \rho - \frac{u_{cc} \cdot c}{u_c} \cdot \frac{\dot{c}}{c} - \frac{u_{c\ell} \cdot \ell}{u_c} \cdot \frac{\dot{\ell}}{\ell}. \qquad (9.66)$$

Отметим, что мы получаем первоначальную формулу из гл. 2, если $u_{c\ell} = 0$. Если $u_{c\ell} > 0$, то более высокое значение $\dot{\ell}/\ell$ будет вычитаться из коэффициента межвременных предпочтений ρ, поскольку домашние хозяйства предпочитают потреблять больше в будущем, когда ℓ будет большим, т. е. тогда, когда время досуга будет небольшим. Данный результат является противоположным к более вероятному исходу, когда потребление и досуг являются комплементами, т. е. $u_{c\ell} < 0$.

Условие первого порядка, которое отражает замещаемость потребления и досуга в каждый момент времени, будет выглядеть как

$$-\frac{u_\ell}{u_c} = w. \qquad (9.67)$$

Нам бы хотелось, чтобы выражение (9.67) соответствовало эмпирической оценке, согласно которой количество часов, отработанных работником (рассматриваемых как грубое приближение ℓ), обычно уменьшается на начальных стадиях экономического развития, но в конечном итоге устанавливается на постоянном уровне (см. Barro, 1997, гл. 2). В частности, мы бы хотели прийти к модели, в которой в устойчивом состоянии ℓ является константой.

В устойчивом состоянии в модели Рамсея w и c растут с одинаковым темпом прироста x. Следовательно, нам необходимо построить такую функцию полезности, в которой из выражения (9.67) следует, что ℓ является константой хотя бы в долгосрочном периоде, при этом w и c растут с одинаковым темпом. Мы также хотим оставить свойство, согласно которому в данной модели есть устойчивое состояние, в котором c растет с постоянным темпом. В приложении 9А (разд. 9.4) показано, что эти условия приводят к тому, что сама функция полезности принимает форму

$$u(c, \ell) = \frac{c^{1-\theta} \cdot e^{(1-\theta)\cdot\omega(\ell)} - 1}{1-\theta}, \tag{9.68}$$

где $\theta > 0$, $\omega'(\ell) < 0$ и $\omega''(\ell) \leqslant 0$[1]. Эта формулировка соответствует формулировке, используемой в работе King, Plosser and Rebelo (1988a), а также Rebelo (1991)[2]. Знак $u_{c\ell}$ будет зависеть от величины θ, т. е. $u_{c\ell} \lesseqgtr 0$ в зависимости от $\theta \lesseqgtr 1$. Стандартная функция с постоянной эластичностью, используемая в выражении (2.8), является частным случаем, когда $\omega(\ell) = 0$. Однако в этом случае нельзя определить конечную величину трудовых усилий.

Если мы воспользуемся выражением (9.68), чтобы рассчитать u_ℓ и u_c, то из условия первого порядка из выражения (9.67) следует

$$-\omega'(\ell) = \frac{w}{c}. \tag{9.69}$$

Дальнейший расчет модели оказывается достаточно громоздким при рассмотрении общего θ, но мы можем получить результаты, рассматривая частный случай, в котором $\theta = 1$. Применив правило Лопиталя для выражения (9.68), получаем, что, когда θ достигает 1, предел $u(c, \ell)$ равен

$$u(c, \ell) = \log(c) + \omega(\ell), \tag{9.70}$$

т. е. если функция полезности является логарифмической по c, то она также сепарабельна по c и l, и $u_{cl} = 0$. Если функция полезности задается выражением (9.70), то из условия первого порядка (9.66) получаем уже знакомое выражение для темпа прироста c:

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho. \tag{9.71}$$

---

[1]Это условие означает, что $u_c > 0$, $u_\ell < 0$ и $u_{cc} < 0$. Из условия $u_{\ell\ell} \leqslant 0$ следует, что должно выполняться

$$\omega''(\ell) + (1-\theta) \cdot [\omega'(\ell)]^2 \leqslant 0;$$

это неравенство должно выполняться при $\theta \geqslant 1$.

[2]Rebelo (1991, с. 513) показал другую альтернативную функцию полезности $u(c, \ell k)$, при этом функция $u(\cdot)$ является в некоторой степени гомогенной, а k рассматривается как человеческий капитал в расчете на душу населения. Выражение ℓk может тогда оцениваться как упущенное время досуга, скорректированное с учетом качеств человека, как и в формулировке, используемой Becker (1965) и Heckman (1976).

Определим параметры в расчете на единицу эффективного труда с учетом влияния параметра интенсивности трудовых усилий l:

$$\hat{k} \equiv \frac{K}{\ell N e^{xt}}, \quad \hat{c} \equiv \frac{C}{\ell N e^{xt}}.$$

Если мы рассматриваем закрытую экономику и традиционные фирмы, то из выражения (9.71) и условий $r = f'(\hat{k}) - \delta$ и $a = k$ следует

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = f'(\hat{k}) - (\delta + \rho + x) - \frac{\dot{\ell}}{\ell}; \tag{9.72}$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{f'(\hat{k})}{\hat{k}} - (x + n + \delta) - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - \frac{\dot{\ell}}{\ell}. \tag{9.73}$$

Эти результаты отличаются от стандартных результатов (полученных в выражениях (2.23) и (2.24)) только тем, что $\dot{\ell}/\ell$ прибавляется к темпу прироста использования эффективного труда. Поскольку в устойчивом состоянии $\dot{\ell}/\ell = 0$, то формулы для $\hat{k}^*$ и $\hat{c}^*$ совпадают с формулами в модели Рамсея.

Далее предположим, что производственная функция задается функцией Кобба–Дугласа $f(\hat{k}) = A\hat{k}^{\alpha}$ и отрицательная полезность работы задается функцией с постоянной эластичностью

$$\omega(\ell) = -\zeta \cdot \ell^{1+\sigma},$$

где $\zeta > 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Поскольку ставка заработной платы в случае функции Кобба--Дугласа равна $w = (1-\alpha) \cdot A\hat{k}^{\alpha} \cdot e^{xt}$, то выражение (9.69) может быть записано как

$$\zeta \cdot (1 + \sigma) \cdot \ell^{1+\sigma} = (1 - \alpha) \cdot \frac{A\hat{k}^{\alpha}}{\hat{c}}. \tag{9.74}$$

(Отметим, что, заменив справа c на $\hat{c}$, в левой части мы получаем дополнительный параметр ℓ.) Поскольку $\hat{y}$ пропорционален $A\hat{k}^{\alpha}$, то из выражения (9.74) следует, что высокое значение ℓ (небольшое время досуга) соответствует небольшому значению c/y. (Это соотношение выполняется для функции $w(\ell)$ в общем виде, если $w'(\ell) > 0$ и $w''(\ell) \geqslant 0$.) Из выражения (9.74) следует, что темп прироста ℓ задается как

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{\alpha}{1+\sigma} \cdot \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} - \frac{1}{1+\sigma} \cdot \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}. \tag{9.75}$$

Если мы воспользуемся функцией Кобба--Дугласа для $f'(\hat{k})$ и $f(\hat{k})$ и формулой для $\dot{\ell}/\ell$ из (9.75), то из выражений (9.72) и (9.73) после некоторых преобразований получаем динамическую систему для $\hat{k}$ и $\hat{c}$:

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = A\hat{k}^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha+\sigma}\cdot\left[\sigma\cdot\frac{\hat{c}}{\hat{k}} + (1+\sigma)\cdot(x+\delta) + \rho + \sigma n\right]; \quad (9.76)$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \alpha A\hat{k}^{\alpha-1} + \\ + \frac{1}{\alpha+\sigma}\cdot\left[\alpha\cdot\frac{\hat{c}}{\hat{k}} - (1+\sigma)\cdot(x+\delta) - (1+\alpha+\sigma)\cdot\rho + \alpha n\right]. \quad (9.77)$$

Эти формулы приводятся к стандартным формулам (2.36) и (2.37), если $\theta = 1$ (что соответствует предполагаемой здесь логарифмической функции полезности), при этом σ должно стремиться к бесконечности. Бесконечное значение параметра σ не допускает изменения ℓ во времени и, следовательно, соответствует результатам модели с фиксированным предложением труда.

Мы уже отмечали, что в устойчивом состоянии значения $\hat{k}$ и $\hat{c}$ такие же, как и в модели Рамсея, что может быть проверено, если приравнять (9.76) и (9.77) нулю. Тогда значения в устойчивом состоянии могут быть рассчитаны как

$$r^* = \alpha A\cdot(\hat{k}^*)^{\alpha-1} - \delta = \rho + x;$$

$$\frac{\hat{c}^*}{\hat{k}^*} = \frac{\rho+\delta+x}{\alpha} - (n+x+\delta).$$

Мы можем подставить эти величины в уравнение (9.74) и определить равновесный уровень трудовых усилий ℓ^*:

$$\ell^* = \left[\frac{1-\alpha}{\zeta\cdot(1+\sigma)}\cdot\frac{\rho+\delta+x}{\rho+\delta+x-\alpha\cdot(n+x+\delta)}\right]^{1/(1+\sigma)}. \quad (9.78)$$

Динамика перехода в устойчивому состоянию $\hat{k}$ и $\hat{c}$, определяемая из уравнений (9.76) и (9.77), может быть проанализирована с помощью фазовой диаграммы в пространстве $(\hat{k},\hat{c})$.Траектория устойчивого состояния системы вновь является седловой. Оставим построение этой диаграммы в качестве упражнения.

Если мы логарифмируем и линеаризуем выражения (9.76) и (9.77) в окрестности точки равновесия, то формула для скорости конвергенции к устойчивому состоянию может быть записана как

$$2\beta = \rho - n - \left\{(\rho-n)^2 + \frac{4(1-\alpha)\cdot(1+\sigma)}{\alpha+\sigma}\cdot(\rho+\delta+\theta x)\times \\ \times\left[\frac{\rho+\delta+x}{\alpha} - (n+x+\delta)\right]\right\}^{1/2}. \quad (9.79)$$

Эта формула сводится к стандартной формуле в модели Рамсея (см. выражение (2.34) при $\theta = 1$), если σ стремится к бесконечности.

Если мы воспользуемся уже знакомыми нам значениями параметров ($\alpha = 0{,}75$; $x = 0{,}02$; $n = 0{,}01$; $\delta = 0{,}05$; $\rho = 0{,}02$), то величина β, рассчитанная по формуле (9.79), составит 0,030 при $\sigma = 0$. Если σ будет больше 0, то β будет уменьшаться и достигнет значения в модели Рамсея (равного 0,025 при заданных значениях параметров) при σ, стремящейся к бесконечности. Таким образом, включение в модель выбора между работой и досугом повышает скорость конвергенции, но на небольшую величину.

Причина того, что коэффициент конвергенции немного выше при меняющемся предложении труда, заключается в том, что ℓ монотонно убывает при приближении к устойчивому состоянию; т. е. в данной модели более бедные люди (которые впоследствии желают стать богатыми) работают усерднее, чем богатые люди. Мы можем обеспечить такой результат, подставив $\dot{\hat{k}}/\hat{k}$ и $\dot{\hat{c}}/\hat{c}$ из выражений (9.76) и (9.77) в формулу (9.75) для $\dot{\ell}/\ell$, тогда после упрощения получаем

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \sigma}\right) \cdot (\chi^* - \chi),$$

где $\chi = \hat{c}/\hat{k}$. Возможно использовать метод, разработанный в приложении 2B, чтобы показать, что если $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, то χ будет монотонно падать во время перехода к устойчивому состоянию и, следовательно, будет справедливо $\chi > \chi^*$. (В качестве упражнения покажите это самостоятельно.) Из этого результата следует, что $\dot{\ell}/\ell < 0$, т. е. ℓ монотонно снижается со значения $\ell(0)$ до значения ℓ^* в устойчивом состоянии. Эта модель соответствует эмпирическим наблюдениям, в которых трудовые усилия снижаются на начальных стадиях экономического развития.

9.4. *Приложение*. Функция полезности с потреблением и трудовыми усилиями

В данном разделе мы более подробно рассмотрим функцию полезности $u(c, \ell)$ необходимого для нас вида в модели принятия решения о работе и досуге. Мы хотим, чтобы экономика характеризовалась устойчивым состоянием, в котором $\dot{c}/c$ и ℓ являются константами. Из выражения (9.66) следует, что эластичность предельной полезности по потреблению должна быть постоянной (как и в модели Рамсея):

$$\frac{u_{cc} \cdot c}{u_c} = -\theta = \text{const}. \tag{9.80}$$

Условие первого порядка для выражения (9.67) может быть записано как

$$\frac{w}{c} = \frac{-u_\ell}{c \cdot u_c}.$$

Мы рассматриваем устойчивое состояние, в котором w и c растут с одинаковым темпом прироста, поэтому w/c является константой. Следовательно, если мы возьмем логарифм правой части и продифференцируем его по времени, то для устойчивого состояния получим:

$$\frac{u_{\ell c} \cdot \dot{c} + u_{\ell\ell}\dot{\ell}}{u_\ell} - \frac{u_{cc} \cdot \dot{c} + u_{c\ell}\dot{\ell}}{u_c} - \frac{\dot{c}}{c} = 0.$$

Так как $\dot{\ell} = 0$, а темп прироста потребления $\dot{c}/c$ в целом ненулевой, это условие можно переписать как

$$\frac{c \cdot u_{\ell c}}{u_\ell} = 1 + \frac{c \cdot u_{cc}}{u_c} = 1 - \theta. \tag{9.81}$$

Перепишем выражение (9.81):

$$\frac{1}{u_\ell} \cdot \frac{\partial(u_\ell)}{\partial c} = \frac{1-\theta}{c}.$$

Проинтегрировав это выражение по c, получаем

$$\log(u_\ell) = (1-\theta) \cdot \log(c) + (\text{функция от } \ell).$$

Проинтегрировав выражение по ℓ, получаем

$$u(c, \ell) = c^{1-\theta} \cdot \varphi(\ell) + \psi(c), \tag{9.82}$$

где φ и ψ, как и ранее, являются произвольными функциями.

Из выражений (9.80) и (9.82) следует

$$\frac{u_{cc} \cdot c}{u_c} = \frac{-\theta \cdot (1-\theta) \cdot c^{-\theta} \cdot \varphi(\ell) + c \cdot \psi''(c)}{(1-\theta) \cdot c^{-\theta} \cdot \varphi(\ell) + \psi'(c)} = -\theta.$$

Функция $\psi(c)$ не должна противоречить этому выражению. Следовательно, $\psi(c)$ должна удовлетворять условию:

$$c \cdot \psi''(c) = -\theta \cdot \psi'(c).$$

Проинтегрируем данное выражение дважды и, опустив мультипликативные и аддитивные константы, получим следующую формулу:

$$v(c) = c^{1-\theta}, \quad \text{если} \quad \theta \neq 1;$$
$$v(c) = \log(c), \quad \text{если} \quad \theta = 1.$$

Подставив выражение для $v(c)$ в формулу (9.82), получим необходимую функцию $u(c, l)$. Запишем результат, как в выражении (9.68):

$$u(c, l) = \frac{c^{1-\theta} e^{(1-\theta)\omega(l)} - 1}{1-\theta}. \tag{9.83}$$

Из этой формулы следует, что при $\theta > 0$ и $\omega'(l) < 0$ справедливо $u_c > 0$, $u_l < 0$ и $u_{cc} < 0$. Нестрогое неравенство $u_{ll} \leqslant 0$ будет выполняться, если

$$\omega''(l) + (1-\theta) \cdot [\omega'(l)]^2 \leqslant 0,$$

что справедливо при $\omega''(l) \leqslant 0$ и $\theta \geqslant 1$. Используя правило Лопиталя, можно показать, что функция в выражении (9.83) будет равна $\log(c) + \omega(l)$, когда θ достигнет 1.

9.5. Задачи

9.1. Миграция в неоклассических моделях роста.

a. При каких условиях склонность к миграции (миграционный потенциал) ускоряет конвергенцию в модели Солоу — Свэна? А в модели Рамсея? Что влияет на конвергенцию?

b. Может ли государство, в которое направляются мигранты, посчитать необходимым введение ограничений на въезд? Будет ли выгодно государству взимать плату с мигрантов за въезд в страну? Будет ли эта плата различаться в зависимости от человеческого капитала, ввозимого мигрантом?

c. Ответьте на вопросы пункта b для страны, из которой население мигрирует?

9.2. Модель миграции из деревни в город (основанная на работе Mas-Colell and Razin, 1973). Рассмотрите экономику, состоящую из двух производственных секторов. Сельскохозяйственный сектор, обозначенный через A, производит только товары потребления. Городской или промышленный сектор, обозначенный через I, производит выпуск, расходуемый на потребление и инвестиции.

Производственная функция Кобба–Дугласа имеет следующий вид:

$$Y_A = (K_A)^{\alpha} \cdot (L_A)^{1-\alpha}; \quad Y_I = (K_I)^{\lambda} \cdot (L_I)^{1-\lambda},$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$. Технический прогресс отсутствует.

Каждый человек предлагает одну неэластичную единицу труда, а все население $L = L_A + L_I$ растет с темпом прироста $n \geqslant 0$. Естественные темпы прироста населения считаются одинаковыми в сельских и городских районах. Капитал $K = K_A + K_I$ может перетекать из сектора в сектор с нулевыми издержками. Люди могут переезжать из одного района в другой с некоторыми затратами. Предполагается, что коэффициент миграции в городской сектор положительно зависит от разницы заработных плат:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = b \cdot \frac{w_I - w_A}{w_A},$$

где $b > 0$; μ — это доля населения, работающего в промышленном секторе.

Население сберегает постоянную часть своего дохода, равную s, и тратит η из своего дохода на промышленные продукты в целях потребления. Капитал не изнашивается. Цена промышленного товара, выраженная в единицах сельскохозяйственной продукции, равна p.

a. Для каждого момента времени получите формулы для расчета стоимости ренты R, ставок заработной платы w_A и w_I, а также относительной цены промышленной продукции p. Какова доля капитала, задействованного в промышленном секторе?

b. Постройте фазовую диаграмму в пространстве (k, μ), где $k = K/L$. Каковы равновесные значения k^* и μ^*? Является ли равновесие устойчивым?

c. Пусть в начальный момент времени $\mu < \mu^*$. Покажите, что коэффициент миграции в городские районы снижается по мере приближения к равновесному состоянию. Дайте характеристику поведения относительной цены p и темпа прироста капитала вдоль траектории перехода к устойчивому состоянию. Присутствует ли в модели конвергенция?

9.3. Экономический рост в модели оптимизации миграционных процессов (основано на работе Braun, 1993). Рассмотрите модель миграции Брауна, изложенную в разд. 9.1.3. В конце раздела мы упомянули возможность расширения модели с целью включения динамики мировой экономики. Предположим, что теперь мы находимся в рамках модели, изложенной в разд. 9.1.3. Производственная функция задается выражением (9.27). Единственным отличием является то, что теперь что мир состоит из двух экономик: страны 1 и страны 2. Количество природных ресурсов в странах R_1 и R_2 является заданным. Население в странах равно L_1 и L_2, тогда $L = L_1 + L_2$ — численность мирового населения. Естественный темп прироста населения в каждой из стран равен 0, начальные условия модели таковы, что наблюдается миграция населения из страны 2 в страну 1. Затраты на переезд из страны 2 в страну 1 задаются выражением (9.34), в котором w_{world} заменяется на w_2. Если число мигрантов стремится к нулю, то и издержки миграции стремятся к нулю. Капитал характеризуется совершенной мобильностью между странами. Общее количество капитала $K = K_1 + K_2$ распределено между экономиками таким образом, чтобы уравновешивать предельный продукт капитала в каждый момент времени. Мировая норма прибыли r (которая теперь изменяется во времени) равна чистому предельному продукту капитала. Для простоты предположим, что технологический прогресс и амортизация отсутствуют. Предпочтения потребителей задаются моделью Рамсея, изложенной в гл. 2, с бесконечным горизонтом планирования.

a. Составьте динамическую систему для переменных k, L_2, B и c, где B — это текущий выигрыш от переезда из страны 2 в страну 1 (по аналогии с выражением (9.31)), а $c \equiv C/L$ - это среднедушевое потребление во всем мире. Отметим, что фазовыми переменными в системе являются k и L_2; при заданном L параметр L_2 определяет распределение населения между двумя экономиками. (Подсказка: люди, изначально проживающие в стране 1, никогда не переезжают и поэтому траектория потребления c_1 одинакова для всех. Для людей, изначально проживающих в стране 2, траектория потребления c_2 должна быть одинакова вне зависимости от того, когда они переезжают в страну 1 и переезжают ли вообще. Эти рассуждения, наряду с формулой роста потребления из модели Рамсея, задают поведение c в зависимости от нормы прибыли r.)
b. Каковы равновесные величины k, L_2 и B?
c. Рассмотрите логарифмическое приближение динамической системы в окрестности точек устойчивого состояния.
   (i) Обратите внимание на то, что вблизи устойчивого состояния небольшое изменение L_2 приводит к несущественному изменению заработной платы в обеих странах, а также незначительному изменению мирового выпуска и нормы прибыли. Используя эту информацию, разделите четырехмерную систему

на две части: первая будет включать параметры всего мира k и c; вторая — параметры миграции L_2 и B.

(ii) Найдите скорость конвергенции β с использованием мировых параметров и соотнесите результат с решением модели Рамсея в гл. 2.

(iii) Найдите скорость конвергенции μ для L_2. Покажите, каким образом скорость конвергенции выпуска на душу населения y_1 зависит от β и μ(см. выражение (9.45)).

9.4. Эндогенно определяемый уровень смертности. Рассмотрите модель определения коэффициента рождаемости из разд. 9.2.2. Предположим, что на коэффициент смертности d можно повлиять с помощью семейных или государственных расходов на здравоохранение.

a. Пусть d зависит от текущих расходов домашних хозяйств на здравоохранение. Определите оптимальную траекторию этих расходов. Как изменится d с развитием экономики? Какие выводы можно сделать относительно коэффициента рождаемости n и капиталоемкости k?

b. Предположим теперь, что d зависит от государственных расходов на здравоохранение на душу населения. Пусть отношение этих расходов к суммарному выпуску является константой g и эти расходы финансируются за счет паушального налога. Каким образом траектории коэффициента рождаемости n и капиталоемкости k зависят от величины g? Каково оптимальное значение g? Будет ли предпочтительней, если g будет изменяться во времени?

9.5. Динамика перехода в модели выбора между досугом и работой. В разд. 9.3 мы определили динамические параметры в модели выбора между досугом и работой. В случае логарифмической функции полезности и производственной функции Кобба–Дугласа выражения для темпов прироста $\hat{k}$ и $\hat{c}$ задаются уравнениями (9.76) и (9.77). Уравнение (9.74) связывает количество трудовых усилий ℓ с переменными $\hat{k}$ и $\hat{c}$.

a. Постройте фазовую диаграмму в пространстве $(\hat{k}, \hat{c})$.

b. Если $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, опишите траекторию перехода к устойчивому состоянию $\hat{k}$, $\hat{c}$ и ℓ.

c. Проверьте, что скорость конвергенции β в окрестности устойчивого состояния задается уравнением (9.79). Почему скорость конвергенции выше, чем в стандартной модели Рамсея (см. выражение (2.34))?

10 Оценка экономического роста

Расчет экономического роста представляет собой методологию, которая позволяет эмпирически разделить наблюдаемый рост ВВП на компоненты, характеризующие изменения затрат факторов и технологию производства. Поскольку невозможно напрямую оценить технологический прогресс, постольку темп прироста уровня технологии может быть «косвенно» оценен как часть темпа прироста ВВП, которая не может быть объяснена ростом наблюдаемых факторов, т. е. как «остаточный рост». Обычно расчет темпов прироста рассматривается как первый шаг в анализе фундаментальных факторов, воздействующих на экономический рост, так как в рамках расчета мы не пытаемся объяснить, каким образом те или иные силы воздействуют на темпы прироста каждого из факторов и их доли. Последним шагом в анализе является рассмотрение соотношения темпов прироста факторов производства, долей этих факторов и скорости технологического прогресса (т. е. остатков) с такими параметрами, как политика правительства, предпочтения домашних хозяйств, природные ресурсы, начальные уровни физического и человеческого капитала, и т. д. Расчет темпов прироста может иметь важное содержательное значение, если главные параметры, которые влияют на темпы прироста факторов производства, по сути дела не зависят от тех параметров, которые влияют на технологический прогресс.

Базовыми работами по оценке экономического роста являются работы Solow (1957), Kendrick (1961), Denison (1962) и Jorgenson and Griliches (1967). Griliches (1997, часть 1) представил краткий обзор этих работ, делая акценты на остатках Солоу.

10.1. Стандартная простейшая оценка экономического роста

10.1.1. Базовая модель

Начнем анализ с рассмотрения стандартной производственной функции, которая может быть записана как

$$Y = F(T, K, L), \tag{10.1}$$

где T это уровень технологии; K — это количество основного капитала; L количество труда. Капитал и труд могут быть дезагрегированы по типам или качеству, как это было сделано в работе Jorgenson and Griliches (1967). Из производственной функции видно, что ВВП будет расти только при увеличении производственных ресурсов, включая уровень технологии.

Темп прироста выпуска может быть разделен на компоненты, связанные с накоплением факторов производства и технологическим прогрессом. Взяв логарифмы выражения (10.1) и найдя производные по времени, получаем

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \frac{F_K K}{Y} \cdot \frac{\dot{K}}{K} + \frac{F_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{L}}{L}, \tag{10.2}$$

где F_K, F_L — (социальные) предельные продукты факторов; g – рост, возникающий благодаря технологическому прогрессу, задаваемый как

$$g \equiv \frac{F_T T}{Y} \cdot \frac{\dot{T}}{T}. \tag{10.3}$$

Выражение (10.2) означает, что темп прироста ВВП может быть разложен на темпы прироста трех составляющих: капитала, труда и технологии. В частности, это означает, что разложение является средневзвешенной суммой темпов прироста трех компонент, где веса задаются относительным вкладом каждого фактора в ВВП. (Размер этих вкладов в свою очередь равен произведению общественного предельного продукта на величину затраченного ресурса, разделенному на ВВП.) Эта формулировка в особых случаях включает нейтральный по Хиксу и трудоинтенсивный технологический прогресс. Если технология является нейтральной по Хиксу, т. е. $F(T, K, L) = T \cdot \tilde{F}(K, L)$, то $F_T T = Y$ и $g = \dot{T}/T$. Если технологический прогресс является трудоинтенсивным, т. е. $F(T, K, L) = \tilde{F}(K, TL)$, то

$$F_T T = F_L L \quad \text{и} \quad g = \frac{F_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{T}}{T}.$$

В следующем разделе мы покажем, что темпы прироста Y, K и L могут быть рассчитаны эмпирически (хотя и с определенными сложностями). Предположим пока, что мы можем рассчитать социальный предельный продукт F_K и F_L (далее мы покажем, что при некоторых условиях эти величины могут быть приблизительно равными стоимости факторов). В выражении (10.2) не может быть напрямую оценено значение g. Однако, если все другие компоненты выражения (10.2) могут быть оценены эмпирически, мы сможем затем вычислить g. В частности, вклад технологического прогресса в экономический рост g из выражения (10.2) может быть рассчитан как остаток, получаемый при взятии разности между фактическим приростом ВВП и той частью темпа прироста, которая объясняется темпом прироста капитала и труда:

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{F_K K}{Y} \cdot \frac{\dot{K}}{K} - \frac{F_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \tag{10.4}$$

Отметим, что, для того чтобы оценить g эмпирически, нам необходимо знать социальный предельный продукт F_K и F_L, но эти величины также нельзя оценить напрямую. На практике исследователи обычно предполагают, что социальный предельный продукт может быть оценен как наблюдаемые факторные цены. Если плата за факторы совпадает с их социальным предельным продуктом, то есть $F_K = R$ (стоимости ренты капитала) и $F_L = w$ (ставке заработной платы), то $F_L L = wL$, что составляет общее количество выплаченной заработной платы в экономике (фонд заработной платы). Следовательно, $F_L L/Y = wL/Y$ является долей ВВП, направляемой на выплату заработной платы, эта доля является долей труда, которую мы обозначили через s_L. Аналогично, $F_K K/Y = RK/Y$ является долей ВВП, идущей на оплату ренты капитала, эта доля является долей капитала, которую мы ранее обозначали через s_K. Воспользовавшись новыми обозначениями, перепишем выражение для оценки коэффициента технологического прогресса:

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K \cdot \frac{\dot{K}}{K} - s_L \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \tag{10.5}$$

Для функции Кобба—Дугласа доли факторов будут постоянны во времени (и будут соответствовать степеням в производственной функции). Однако проводимый нами анализ является более общим, поскольку значение этих долей может изменяться со временем.

Оценка $\hat{g}$ обычно характеризуется как оценка роста совокупной производительности факторов TFP[1]. Эта формулировка была впервые

[1] TFP – total factor productivity. -- *Прим.пер.*

использована Солоу (1957), поэтому $\hat{g}$ еще иногда называют «остатками Солоу». Поскольку только что описанный метод основывается на расчете темпов прироста количества ресурсов напрямую, то оценки роста TFP, или остатки Солоу, считаются *прямыми*. Это обозначение отличает данный подход от метода, основанного на ценах (он будет описан в следующем разделе), который мы обозначим как *двойственный*.

Если весь доход, связанный с валовым внутренним продуктом Y, распределяется между трудом и капиталом, то выполняется условие $s_K + s_L = 1$ или $Y = RK + wL$[1]. В этом случае расчет остатков упрощается:

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K \cdot \frac{\dot{K}}{K} - (1 - s_K) \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \tag{10.6}$$

Выражение (10.6) может быть пересчитано для среднедушевых показателей:

$$\hat{g} = \frac{\dot{y}}{y} - s_K \cdot \frac{\dot{k}}{k}, \tag{10.7}$$

где $y \equiv Y/L$ и $k \equiv K/L$ — выпуск и капитал на единицу труда.

Хотя формула (10.6) для модели с непрерывным временем в целом является достаточно содержательной, для эмпирического анализа дискретных данных необходимо ее модифицировать. Thörnqvist (1936) рассматривал эту проблему, измеряя с помощью логарифмических разностей темпы роста между двумя моментами времени t и $t+1$ и используя в качестве весов средние арифметические факторных долей в моменты времени t и $t+1$. Согласно данному подходу, темп прироста совокупной производительности факторов в случае нейтральности по Хиксу может быть приблизительно оценен как

$$\log\frac{T(t+1)}{T(t)} \approx \log\frac{Y(t+1)}{Y(t)} - \bar{s}_K(t) \cdot \log\frac{K(t+1)}{K(t)} - \\ - [1 - \bar{s}_K(t)] \cdot \log\frac{L(t+1)}{L(t)}, \tag{10.8}$$

---

[1] Выражение, связывающее выпуск Y и доход факторов, соответствует равенству между ценами факторов и предельными продуктами, если производственная функция $F(\cdot)$ характеризуется постоянной отдачей по K и L (что справедливо для неоклассической производственной функции), так что выполняется $Y = RK + wL$. В международной экономике чистые факторные доходы могут приходиться на факторы, находящиеся в иностранной собственности, и $RK + wL$ будет включать этот чистый факторный доход.

где $\bar{s}_K(t) \equiv [s_K(t) + s_K(t+1)]/2$ — это средняя за периоды t и $t+1$ доля капитала[1]. Если условие нейтральности по Хиксу не выполняется, то выражение (10.8) может использоваться для приблизительной оценки вклада технологического прогресса в экономический рост.

10.1.2. Оценка ресурсов

Капитал. Практическая реализация идей, изложенных в предыдущем разделе, предполагает оценку не только темпов прироста ресурсов, но и оценку долей капитала и труда. Теоретически мы можем использовать работу физического капитала в качестве оценки затрат капитала. Например, мы можем рассчитать количество «машинных часов», затраченных на производственный процесс в период времени t. Поскольку на основе имеющихся данных нельзя провести подобную оценку, обычно рассматривается количество физического капитала определенного типа, а потом делается предположение, что продолжительность и объем работы данного вида капитала пропорциональны всем фондам. Иногда делается попытка отделить остаточный основной капитал от того капитала, который был затрачен в настоящее время в производстве.

Оценка объема физического капитала производится на основе собранных данных о валовых инвестициях в физический капитал, а также информации об амортизации существующего капитала. Данный подход, названный методом непрерывного учета запасов, оценивает имеющийся в распоряжении основной капитал в период $t+1$, обозначенный $K(t+1)$, как сумму основного капитала, приходящегося на конец периода t (который равен размеру основного капитала на начало предыдущего периода минус амортизация) и приобретенного за инвестиционный период капитала, равного $I(t)$:

$$K(t+1) = K(t) + I(t) - \delta \cdot K(t), \tag{10.9}$$

[1]Выражение (10.8) является лишь приближенным, если производственная функция задается в общей неоклассической форме. Однако Diawert (1976) показал, что формула остается без изменений, если производственная функция в логарифмической форме содержит произведения логарифмов:

$$\log(Y) = \alpha_0 + \alpha_L \cdot \log(L) + \alpha_K \cdot \log(K) + \alpha_t t + \frac{\beta_{KK}}{2} \cdot (\log[K])^2 + \frac{\beta_{LL}}{2} \cdot (\log[L])^2 + \\ + \frac{\beta_{tt}}{2} \cdot t^2 + \beta_{KL} \cdot \log(K) \cdot \log(L) + \beta_{K_t} \cdot \log(K) \cdot t + \beta_{L_t} \cdot \log(L) \cdot t,$$

где все коэффициенты α и β являются постоянными. Для того чтобы существовала постоянная отдача от масштаба, параметры модели должны удовлетворять ограничению $\beta_{KK} + \beta_{KL} = \beta_{LL} + \beta_{KL} = \beta_{K_t} + \beta_{L_t} = 0$. В качестве упражнения рассмотрите доказательство суждения Diawert.

где δ — это постоянная норма амортизации[1]. Если данные о $I(t)$ доступны и δ известно (что не является правдоподобным предположением), то еще одной составляющей, необходимой для применения выражения (10.9), является первоначальное количество капитала $K(0)$. Одним из способов измерить $K(0)$ является получение прямых оценок величины основного капитала, введенного в обращение в начальный период. Другой способ — попытаться приблизительно угадать значение параметра $K(0)$ и затем воспользоваться выражением (10.9) для подсчета $K(t)$ в дальнейших периодах. Оценка размера основного капитала в начальные периоды достаточно сильно зависит от предложенной величины первоначального капитала $K(0)$ и поэтому не является надежной. Однако по мере амортизации $K(0)$ эта оценка постепенно становится все более точной. Для реализации данного метода необходимо иметь данные о $I(t)$ за более ранние периоды времени по сравнению с теми, в течение которых используются смоделированные значения $K(t)$.

Труд. Количество используемого труда может расти, если в данном периоде растет количество часов работы или возрастает число работников. Оценивая изменение рабочей силы в часах, необходимо учитывать изменение показателей занятости, а также уровня безработицы и количества отработанных одним работником часов.

Качество ресурсов. В более ранних исследованиях была использована методология оценки темпов экономического роста на основе расчета взвешенной суммы темпов прироста капитала и часов работы. Вес каждого показателя определяется как доля в общем доходе, приходящаяся на ресурс, и предполагалось, что веса постоянны во времени. Чтобы получить оценку темпов прироста совокупной производительности факторов, необходимо вычесть взвешенную сумму темпов прироста ресурсов из темпов прироста совокупного выпуска. В работах многих исследователей, таких как Солоу (1957) и Denison (1962, 1967), эти остатки являлись достаточно большими. Другими словами, значительная часть роста совокупного выпуска объяснялась не темпами роста затрат ресурсов, а техническим прогрессом.

В работе Jorgenson and Griliches (1967) было показано, что значительную долю остатков Солоу можно объяснить изменением качества

---

[1] В данном случае предполагается, что вклад каждой единицы оборудования в общую стоимость основного капитала равен восстановительной стоимости данной единицы оборудования. В терминах разд. 3.6 это означает, что мы пренебрегаем издержками регулирования инвестиций и поэтому предполагаем, что $q = 1$.

ресурсов. Например, улучшение качества рабочей силы отражает увеличение среднего количества лет получения образования и улучшение системы здравоохранения. Для заданного количества труда и часов работы улучшение качества рабочей силы приводит к росту выпуска. Но если труд измеряется только в рабочих часах, то неоцененное изменение качества проявляется в росте совокупной производительности факторов. Неоцененные улучшения качества капитала проявляются таким же образом.

Для того чтобы учитывать улучшение качества труда, показатель отработанных часов может быть расширен и включать несколько составляющих, таких как образование, опыт, пол и прочие факторы (более детальный анализ и практическое применение данного подхода представлены в работе Jorgenson, Gollop and Fraumeni (1987)). Каждый компонент взвешивается в соответствии со средней ставкой заработной платы, которая является приближенной оценкой предельного продукта труда. Например, если люди с высшим образованием зарабатывают больше (и, по-видимому, являются более производительными), чем люди со средним образованием, то дополнительный работник с высшим образованием имеет больший вклад в увеличение выпуска, чем дополнительный работник со средним образованием.

При данном подходе совокупные затраты труда являются взвешенной суммой по всем категориям, где весами выступает относительная ставка заработной платы. Для заданного количества часов работы качество труда улучшается (а следовательно, оценка использования трудовых ресурсов растет), если работники перемещаются в категорию с более высокими ставками заработной платы. Например, если доля рабочей силы, которая имеет высшее образование, растет, а доля работников без образования падает, то совокупный вклад труда растет, даже если общее количество часов работы не меняется.

Рассмотрение качественных изменений в основном капитале также предполагает его разложение на несколько составляющих. Общая оценка затрат капитала является взвешенной суммой по всем видам капитала, при этом в качестве весов выступает относительный рентный доход[1)]. Для расчета ренты необходимо сделать предположение о том, что все инвестиции имеют одинаковую норму доходности. При совершенном предвидении рентная ставка по капиталу задается условием

[1)]В работе Feenstra and Markusen (1995) также предусматривается включение новых видов средств производства. Напомним, что в гл. 6 технологический прогресс принимает форму увеличения количества видов продукции.

отсутствия арбитража:

$$R_i(t) = [1 + r(t)] \cdot P_i(t) - (1 - \delta_i) \cdot P_i(t+1), \tag{10.10}$$

где $R_i(t)$ – это рентная ставка по основному капиталу; $P_i(t)$ — стоимость средства производства; δ_i — норма амортизации; $r(t)$ — реальная процентная ставка для всей экономики. Ожидается, что можно выявить категории капитальных благ, которые являются однородными по $P_i(t)$ и δ_i. Однако на практике новый вид средства производства будет лучшего качества, чем предыдущий. Отсутствие возможности полностью оценить качественные изменения приводит к недооценке роста основного капитала (а также занижению текущего выпуска).

Из выражения (10.10) следует, что для заданного значения $P_i(t)$ источником вариации ставок рентного дохода является различная норма амортизации δ_i. При прочих равных условиях арендная ставка для быстро изнашивающегося капитала будет выше, чем для капитала с длительным сроком службы. Поэтому в этом смысле переход от износостойкого капитала к капиталу, изнашивающемуся более быстрыми темпами, означает улучшение «качества» капитала.

10.1.3. Результаты оценки экономического роста

В табл. 10.1 представлены результаты оценки экономического роста для ряда стран за различные периоды времени. Результаты взяты из различных научных работ, во всех из которых учитывается изменение качества ресурсов на основе методологии, предложенной в работе Jorgenson and Griliches (1967). В данной таблице общий темп роста ВВП разделен на темп роста капитала, темп роста труда и темп роста совокупной производительности.

Таблица 10.1

Оценка роста в некоторых странах

Страна	Темп прироста ВВП (1)	Вклад капитала (2)	Вклад труда (3)	Темп прироста совокупной производительности факторов (4)
Группа А: страны ОЭСР, 1947–1973 гг.				
Канада ($\alpha = 0{,}44$)	0,0517	0,0254 (49%)	0,0088 (17%)	0,0175 (34%)

Продолжение табл. 10.1

Страна	(1)	(2)	(3)	(4)
Франция[1]	0,0542	0,0225	0,0021	0,0296
($\alpha = 0{,}40$)		(42%)	(4%)	(54%)
Германия[2]	0,0661	0,0269	0,0018	0,0374
($\alpha = 0{,}39$)		(41%)	(3%)	(56%)
Италия[2]	0,0527	0,0180	0,0011	0,0337
($\alpha = 0{,}39$)		(34%)	(2%)	(64%)
Япония[2]	0,0951	0,0328	0,0221	0,0402
($\alpha = 0{,}39$)		(35%)	(23%)	(42%)
Нидерланды[3]	0,0536	0,0247	0,0042	0,0248
($\alpha = 0{,}45$)		(46%)	(8%)	(46%)
Великобритания[4]	0,0373	0,0176	0,0003	0,0193
($\alpha = 0{,}38$)		(47%)	(1%)	(52%)
США	0,0402	0,0171	0,0095	0,0135
($\alpha = 0{,}40$)		(43%)	(24%)	(34%)
Группа B: страны ОЭСР, 1960–1995 гг.				
Канада	0,0369	0,0186	0,0123	0,0057
($\alpha = 0{,}42$)		(51%)	(33%)	(16%)
Франция	0,0358	0,0180	0,0033	0,0130
($\alpha = 0{,}41$)		(53%)	(10%)	(38%)
Германия	0,0312	0,0177	0,0014	0,0132
($\alpha = 0{,}39$)		(56%)	(4%)	(42%)
Италия	0,0357	0,0182	0,0035	0,0153
($\alpha = 0{,}34$)		(51%)	(9%)	(42%)
Япония	0,0566	0,0178	0,0125	0,0265
($\alpha = 0{,}43$)		(31%)	(22%)	(47%)
Великобритания	0,0221	0,0124	0,0017	0,0080
($\alpha = 0{,}37$)		(56%)	(8%)	(36%)
США	0,0318	0,0117	0,0127	0,0076
($\alpha = 0{,}39$)		(37%)	(40%)	(24%)
Группа C: страны Латинской Америки, 1940–1990 гг.				
Аргентина	0,0279	0,0128	0,0097	0,0054
($\alpha = 0{,}54$)		(46%)	(35%)	(19%)

[1] 1950–1973.

[2] 1952–1973.

[3] 1951–1973.

[4] 1955–1973.

Окончание табл. 10.1

Страна	(1)	(2)	(3)	(4)
Бразилия ($\alpha=0{,}45$)	0,0558	0,0294 (53%)	0,0150 (27%)	0,0114 (20%)
Чили ($\alpha=0{,}52$)	0,0362	0,0120 (33%)	0,0103 (28%)	0,0138 (38%)
Колумбия ($\alpha=0{,}63$)	0,0454	0,0219 (48%)	0,0152 (33%)	0,0084 (19%)
Мексика ($\alpha=0{,}69$)	0,0522	0,0259 (50%)	0,0150 (29%)	0,0113 (22%)
Перу ($\alpha=0{,}66$)	0,0323	0,0252 (78%)	0,0134 (41%)	−0,0162 (−19%)
Венесуэла ($\alpha=0{,}55$)	0,0443	0,0254 (57%)	0,0179 (40%)	0,0011 (2%)
Группа D: страны Восточной Азии, 1966–1990 гг.				
Гонконг[1)] ($\alpha=0{,}37$)	0,073	0,030 (41%)	0,020 (28%)	0,023 (32%)
Сингапур ($\alpha=0{,}49$)	0,087	0,056 (65%)	0,029 (33%)	0,02 (2%)
Южная Корея ($\alpha=0{,}30$)	0,103	0,041 (40%)	0,045 (44%)	0,017 (16%)
Тайвань ($\alpha=0{,}26$)	0,094	0,032 (34%)	0,036 (39%)	0,026 (28%)

Источники: Оценки для стран ОЭСР из группы A взяты из работы Cristensen, Cummings and Jorgenson, (1980). Оценки для стран ОЭСР из группы B даны в работе Jorgenson and Yip (2001, табл. 3, 5, 7, 10). Оценки для стран Латинской Америки, представленные в группе C, даны в работе Elias (1990), дополненной неопубликованными заметками Victor Elias. (В данном источнике в расчетах предполагалось, что доля капитала α постоянна во времени.) Оценки для стран Восточной Азии из группы D взяты из работы Young (1995, табл. V-VIII).

Средняя доля капитала α указана в скобках под названием страны. В столбце (1) указан годовой темп прироста реального ВВП. В столбце (2) — произведение доли капитала α и темпа прироста скорректированных с учетом качества капитальных ресурсов. В скобках указан процент от темпа прироста ВВП, который объясняется темпом прироста затрат капитала. В столбце (3) стоит произведение доли труда $1-\alpha$ и темпа прироста, скорректированного с учетом качества труда. Число в скобках отражает долю ВВП в процентах, которая объясняется ростом трудовых ресурсов. В столбце (4) показан темп прироста совокупной производительности факторов. Число в скобках отражает процент от темпа прироста ВВП, пришедшийся на рост совокупной производительности.

[1)] 1966–1991.

Группа А в табл. 10.1, данные для которой взяты из работы Christensen, Cummings and Jorgenson (1980), включает такие страны, как Великобритания, Германия, Италия, Канада, Нидерланды, США, Франция и Япония, и охватывает период времени с 1947 по 1973 г. Ежегодный темп прироста совокупной производительности факторов в странах был значительным – от 1,4% в США до 4,0% в Японии. Темп прироста совокупной производительности факторов составлял более трети общего прироста ВВП для всех этих стран.

В группе В, составленной на основе работы Jorgenson and Yip (2001), представлено разделение темпов прироста на те же три категории для тех же стран ОЭСР (за исключением Нидерландов) для более позднего периода с 1960 по 1995 г. Одним из результатов является то, что коэффициенты темпов прироста совокупной производительности факторов стали намного меньше, чем для периода с 1947 по 1973 г. Для более позднего периода темпы прироста совокупной производительности факторов составляли от 0,6% в Канаде и 0,8% в США до 1,5% в Италии и 2,6% в Японии. Это уменьшение темпов прироста производительности во всем мире известно как *спад производительности*. Хотя темп прироста совокупной производительности факторов в странах в более позднем периоде и меньше, часть общего прироста, вызванная ростом совокупной производительности факторов, в некоторых странах остается высокой из-за того, что уменьшилась часть прироста, обусловленного изменением затрат производственных факторов. Например, в Германии, Италии и Японии темп прироста совокупной производительности факторов по-прежнему составлял более 40% от совокупного роста в период времени с 1960 по 1995 г. В столбце (3) групп А и В показано, что коэффициент роста затрат труда для Франции, Германии, Италии и Великобритании фактически нулевой для всего периода с 1947 по 1995 г.

В группе С дано аналогичное разложение темпов прироста реального ВВП для семи стран Латинской Америки. Результаты, представленные в таблице, взяты из работы Elias (1990) и затем дополнены результатами из неопубликованных заметок Victor Elias. Оценки прироста совокупной производительности факторов для стран в период с 1940 по 1990 г. находятся в диапазоне от −0,6% в год для Перу и до 1,4% для Чили[1].

[1]Оценки темпов прироста совокупной производительности факторов достаточно низки (а обычно и отрицательны) за период с 1980 по 1990 г. Отрицательные значения достаточно сложно объяснить технологическим регрессом (т. е. забыванием технологии), но эти значения могут отражать падающую эффективность организации рынка из-за политических или других изменений.

Наконец, в группе D представлено разделение совокупных темпов роста для четырех стран Восточной Азии. Эти результаты взяты из работы Янга (Young, 1995) и содержат данные по Гонконгу, Сингапуру, Южной Корее и Тайваню за период с 1966 по 1990 г. Несмотря на значительный рост совокупного ВВП, оценки для темпов прироста совокупной производительности факторов находились в диапазоне от 0,2% для Сингапура до 2,6% для Тайваня. Причиной этого является то, что темпы прироста физического капитала и труда в этих странах были также велики и, следовательно, также вошли в итоговый темп прироста.

Многие экономисты были удивлены низкими оценками темпов прироста совокупной производительности факторов для этих восточноазиатских стран. После просмотра результатов некоторые исследователи пришли к выводу, что рост в странах «восточноазиатского чуда» не является «чудесным», поскольку, в отличие от чуда, которое, по определению, нельзя объяснить, темпы прироста в этих странах могут быть объяснены простым наращиванием факторов производства. Однако в последующих разделах мы пересмотрим эмпирические результаты и выводы относительно темпов прироста в странах Восточной Азии.

10.1.4. Особенности регрессионной оценки роста совокупной производительности факторов

Важно отметить, что оценки роста совокупной производительности, указанные в табл. 10,1, представляют собой прямую реализацию равенств, представленных выражениями (10.6) и (10.8) (которые включают в себя множество видов капитала и труда), и не предполагают эконометрической оценки. Остатки Солоу $\hat{g}$ оцениваются для каждого момента времени с использованием временного ряда таких параметров, как Y, K, L, s_K и s_L. На практике исследователи рассчитывают среднее значение $\hat{g}$ за рассматриваемые периоды времени.

Альтернативным подходом является построение регрессионной модели для темпа прироста выпуска $\dot{Y}/Y$ по темпам прироста ресурсов $\dot{K}/K$ и $\dot{L}/L$ согласно выражению (10.2). (Этот подход будет применяться при соответствующих корректировках дискретных данных.) Свободный член тогда равен g, а коэффициенты при темпах прироста соответственно равны

$$\frac{F_K K}{Y} \quad \text{и} \quad \frac{F_L L}{Y}.$$

Главное преимущество такого подхода заключается в том, что он не требует реализации предпосылки относительно того, что социальная предельная производительность равна наблюдаемой стоимости факторов, т. е. $F_K = R$ и $F_L = w$.

Недостатки данного подхода заключаются в следующем.

- Параметры $\dot{K}/K$ и $\dot{L}/L$ не могут все время рассматриваться как экзогенно заданные по отношению к изменениям параметра g. В частности, темп прироста факторов будет значимым при наличии корреляции в изменениях ненаблюдаемого технологического прогресса.
- Если $\dot{K}/K$ и $\dot{L}/L$ (рассчитанные как средние по дискретным периодам величины) оцениваются с ошибкой, то стандартные оценки коэффициентов, стоящих перед этими переменными, $F_K K/Y$ и $F_L L/Y$, будут неустойчивыми. Эта проблема чаще возникает для темпа прироста затрат капитала, где оценка значения основного капитала, скорее всего, не будет соответствовать величине, задействованной в производстве. Эта проблема обычно приводит к занижению вклада накопленного капитала в экономический рост при использовании данных, характеризующихся малыми периодами между наблюдениями.
- Рамки проводимого регрессионного анализа должны быть расширены таким образом, чтобы во времени менялись также факторные доли и темпы прироста совокупной производительности факторов.

При имеющихся недостатках регрессионного анализа, традиционно более предпочтительным подходом к оценке совокупной производительности факторов является неэконометрический подход, изложенный в исследованиях, представленных в табл. 10.1.

10.2. Двойственный подход к оценке экономического роста

Hsieh (2002) разработал двойственный подход к оценке экономического роста, когда остатки Солоу оцениваются исходя из темпов прироста стоимости факторов, а не их количества. Эта идея отсылает нас к работе Jorgenson and Griliches (1967).

Двойственный подход может быть легко получен из равенства между выпуском и факторными доходами:

$$Y = RK + wL. \tag{10.11}$$

Взяв логарифмы и продифференцировав по времени обе части выражения (10.11), получаем:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_K \cdot \left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L \cdot \left(\frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{L}}{L}\right),$$

где s_K и s_L вновь являются долями факторного дохода. Если выражение, включающее темпы прироста количества факторов, перенести в левую часть равенства, то оценка темпа прироста совокупной производительности факторов задается как

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K \cdot \frac{\dot{K}}{K} - s_L \cdot \frac{\dot{L}}{L} = s_K \cdot \frac{\dot{R}}{R} + s_L \cdot \frac{\dot{w}}{w}. \tag{10.12}$$

Следовательно, прямая оценка темпов прироста совокупной производительности факторов в средней части выражения (основанная на вычитании из $\dot{Y}/Y$ взвешенных темпов прироста других факторов) равна сумме стоимости факторов, взвешенных по долям, что соответствует правой части выражения. Отметим, что данная оценка роста совокупной производительности факторов предполагает использование факторных долей в доходе s_K и s_L в качестве прямых оценок, однако эта оценка отражает изменение стоимости факторов, а не их количества. По этой причине такие оценки роста совокупной производительности труда называются двойственными, или основанными на ценах[1)].

Интуитивно понятно, что для двойственной оценки, которая находится с правой стороны уравнения (10.12), цены на факторы (при заданном количестве факторов) будут продолжать расти, только если выпуск будет увеличиваться при заданном количестве ресурсов. Поэтому правильно взвешенное среднее значение роста цен на факторы позволяет оценить темп прироста совокупной производительности факторов.

Важно отметить, что при выводе уравнения (10.12) использовалось только условие $Y = RK + wL$. Мы не делали никаких предположений относительно соотношения цен на факторы и социальных предельных продуктов, а также относительно вида производственной функции. Если выполняется $Y = RK + wL$, то прямые и двойственные оценки темпов прироста совокупной производительности факторов всегда совпадают. В некоторых случаях (особенно когда цены на факторы отличаются от социальных предельных продуктов) оценка $\hat{g}$ из уравнения (10.12)

[1)] Эта формула расчета была предложена Susanto Besu. Ранее данный подход был использован в работе Jorgenson and Griliches (1967, с. 251–253), где исследователи также расширили выражение (10.12), допустив изменение во времени относительных цен на продукцию. В данном случае $\dot{Y}/Y$ становится средневзвешенным по долям значением темпов прироста выпуска, а в выражении для двойственной оценки экономического роста из правой части вычитается взвешенное по долям среднее значение темпов прироста цен на продукцию. В рассматриваемом нами случае последнее выражение является нулевым, что означает фиксированную относительную стоимость единицы выпуска.

отклоняется от истинного значения g. Однако ошибка $g - \hat{g}$ при двойственной оценке будет такой же, как и при прямой оценке[1)].

Hsieh (2002) использовал двойственные оценки (находящиеся с правой стороны уравнения (10.12)) для альтернативной оценки темпов прироста совокупной производительности факторов для четырех стран Восточной Азии, представленных в табл. 10.1 (ранее оценка была дана в работе Yuong (1995)). При анализе Hsieh рассматривал несколько видов L и K в зависимости от их качества. Результаты, включающие прямые оценки, полученные по аналогии с работой Young, находятся в табл. 10.2. Самый интересный вывод заключается в том, что оценка для Сингапура изменяется от нуля при прямом оценивании до 2,2% при двойственном оценивании ежегодно. Двойственные оценки для Тайваня также оказываются существенно выше, но для Гонконга и Южной Кореи оценки меняются незначительно. Hsieh также заметил, что двойственные оценки для Соединенных Штатов аналогичны прямым оценкам.

Если условие $Y = RK + wL$ выполняется, то разница между прямыми и двойственными оценками темпов прироста совокупной производительности факторов говорит лишь о том, что при вычислениях использовались различные данные. Hsieh в процессе рассуждения говорит о причинах такого расхождения в результатах для Сингапура. Данные из национальных счетов Сингапура показывают значительный рост K во времени. Учитывая поведение Y и wL, стоимость ренты R должна, соответственно, резко снизиться. Однако прямые оценки доходности капитала в Сингапуре (рассчитанные на основе наблюдаемых норм доходностей на финансовых рынках) являются относительно устойчивыми во времени. С другой стороны, если траектория R, определяемая из наблюдаемых значений норм доходности, верна (и если информация

[1)]Это равенство в целом не выполняется, если доли факторов в доходе, s_K и s_L, будут заменены на веса, соответствующие предельному продукту, $(F_K K/Y)$ и $(F_L L/Y)$. Если используются веса, соответствующие предельному продукту, то прямая оценка $\hat{g}$, рассчитанная в выражении (10.4), будет правильно оценивать темп прироста совокупной производительности факторов g. Соответствующая двойственная оценка - это

$$\frac{F_K K}{Y} \cdot \frac{\dot{R}}{R} + \frac{F_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{w}}{w}.$$

Можно показать, что эта оценка равна прямой оценке, если соотношение цен на факторы и социальных предельных продуктов (R/F_K и w/F_L) со временем не изменяется. (Необязательно, чтобы эти соотношения были равны единице.) Однако практической значимости эти выводы не имеют, поскольку значения F_K и F_L в целом являются ненаблюдаемыми.

Таблица 10.2

Начальные и двойственные оценки темпов прироста совокупной производительности факторов

Страна	Первоначальная оценка	Двойственная оценка
Гонконг, 1966-1991 гг.	0,023	0,027
Сингапур, 1972-1990 гг.	−0,007	0,022
Южная Корея, 1966-1990 гг.	0,017	0,015
Тайвань, 1966–1990 гг.	0,021	0,037

Примечание. Эти оценки взяты из работы Hsieh (2002, табл. 1). Первоначальные оценки получены на основе данных о темпах прироста количества затрачиваемых ресурсов, где в качестве весов взяты факторные доли. Двойственные оценки получены на основе данных о темпах прироста цен на ресурсы при использовании все тех же факторных долей в качестве весов. Разница между первоначальной и двойственной оценками темпов прироста совокупной производительности факторов указывает на использование различных источников данных.

относительно Y и wL также является верной), тогда предполагаемая траектория для K будет характеризоваться менее быстрым ростом, чем при использовании национальных счетов. Hsieh утверждает, что фактически официальные статистические данные существенно завышают темп прироста основного капитала, а следовательно, более низкие оценки темпа прироста капитала, получаемые из наблюдаемых значений R, являются обоснованными.

Двойственная оценка темпов прироста совокупной производительности факторов для Сингапура, рассчитанная Hsieh и составляющая 2,2% в год, является средневзвешенным значением устойчивого темпа прироста ставки заработной платы (для заданного качества труда) и взятого с небольшим весом темпа прироста арендной платы. Необходимо отметить, что Hsieh смог также рассчитать прямую оценку темпов прироста совокупной производительности факторов на основе временного ряда K, который получается из наблюдаемых и достаточно точных значений временного ряда R. (Если капитал представлен различными видами K_j, то данный расчет будет применяться к каждому виду при заданных оценках стоимости ренты R_j.) Так как $Y = RK + wL$ выполняется при построении модели, то прямые оценки будут совпадать с двойственными. Таким образом, не будет необходимости проводить двойственную оценку.

10.3. Проблемы оценки экономического роста

Ключевым предположением при подсчетах темпов прироста было то, что стоимость факторов производства совпадала с социальным предельным продуктом. Если эта предпосылка не выполняется, то оценка $\hat{g}$, рассчитанная по формуле (10.6), будет отклоняться от реального значения g, обозначающего истинный вклад технологического прогресса в экономический рост. В следующем разделе мы поясним эти проблемы для моделей с растущей отдачей от масштаба и внешними эффектами, с различной системой налогообложения и для различных типов факторов.

10.3.1. Модель возрастающей отдачи с внешними эффектами

В гл. 3 мы рассмотрели, как некоторые авторы (включая Griliches (1979), Romer (1986) и Lucas (1988)) строили модель экономического роста с возрастающей отдачей и внешними эффектами. Анализ, проведенный Ромером, является обобщением модели «обучения на опыте» Эрроу (Arrow, 1962), в которой эффективность производства возрастала вместе с опытом. В модели Ромера, изложенной в гл. 4, выпуск Y_i фирмы i зависел не только от частных производственных ресурсов K_i и L_i, но и капитала K, доступного в масштабах всей экономики. Идея заключается в том, что производители будут работать более эффективно, «обучаясь» на инвестициях (которые являются своеобразным аналогом «опыту»). Более того, это знание мгновенно распространяется от одной фирмы к другой, поэтому производительность фирмы зависит от совокупного накопления опыта, который отражается в общем основном капитале.

Эти идеи могут быть отражены в производственной функции Кобба–Дугласа:

$$Y_i = AK_i^{\alpha} K^{\beta} L_i^{1-\alpha}, \tag{10.13}$$

где $0 < \alpha < 1$ и $\beta \geqslant 0$. Для заданного K эта производственная функция характеризуется постоянной отдачей от величин частных ресурсов K_i и L_i. Если $\beta > 0$, то существует положительный внешний эффект.

В работе Griliches (1979) в производственной функции из выражения (10.13) K_i отвечало за специфический капитал фирмы i, в то время как K (смоделированное как сумма K_i) являлось совокупным уровнем знаний в отрасли. Следовательно, внешние эффекты вновь отражают распространение знания между фирмами. В работе Lukas (1988) K_i означает используемый фирмой человеческий капитал, а K – совокупный (или, возможно, средний) уровень человеческого капитала в отрасли или в стране. В данном случае положительные внешние эффекты являются следствием взаимодействия с умными людьми.

Вернувшись к интерпретации формулы (10.13) Ромера, каждая фирма ведет себя как конкурирующая, воспринимая в качестве заданных факторные цены R и w в масштабах всей экономики, а также совокупный размер капитала K. Следовательно, частные предельные продукты равны стоимости факторов:

$$R = \frac{\alpha Y_i}{K_i} \quad \text{и} \quad w = (1-\alpha) \cdot \frac{Y_i}{L_i}. \tag{10.14}$$

Доли дохода на факторы производства тогда, как обычно, задаются

$$s_k = \alpha \quad \text{и} \quad s_L = 1-\alpha. \tag{10.15}$$

В состоянии равновесия каждая фирма устанавливает одно и то же соотношение капитала к труду k_i, но размер каждой фирмы не определен. Производственная функция из выражения (10.13) может быть переписана как

$$Y_i = Ak_i^{\alpha} k^{\beta} L_i L^{\beta},$$

где $k \equiv K/L$. Из равновесного условия $k_i = k$ следует

$$Y_i = Ak_i^{\alpha+\beta} L_i L^{\beta}.$$

Просуммировав выпуск всех фирм, получаем

$$Y = Ak^{\alpha+\beta} L^{1+\beta}.$$

В конечном итоге, благодаря условию $k \equiv K/L$, мы можем перейти к производственной функции для всей экономики:

$$Y = AK^{\alpha+\beta} L^{1-\alpha}. \tag{10.16}$$

В данном выражении совокупный выпуск Y соотносится с совокупными ресурсами K и L. Если $\beta > 0$, то в экономике в целом наблюдается возрастающая отдача от масштаба.

С учетом правой части выражения (10.16) для расчетов темпов прироста на основе агрегированных данных необходимо вычислить

$$\hat{g} = \frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{Y}}{Y} - (\alpha+\beta) \cdot \frac{\dot{K}}{K} - (1-\alpha) \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \tag{10.17}$$

Следовательно,

$$s_L = 1 - \alpha$$

является весовым коэффициентом для $\dot{L}/L$, но значение коэффициента $s_K = \alpha$ при $\beta \geqslant 0$ занижает вклад $\dot{K}/K$. Эта недооценка возникает из-за того, что (при наличии внешних эффектов от инвестиций в знания) социальный предельный продукт капитала $((\alpha + \beta) \cdot Y/K$ превосходит частный предельный продукт, равный $\alpha Y/K$. Частный предельный продукт равен стоимости фактора R). Отметим также, что веса при темпах прироста факторов производства из выражения (10.17) в сумме составляют $1 + \beta$, что превосходит единицу, при $\beta > 0$ из-за лежащей в основе возрастающей отдачи от масштаба. Возрастающая отдача возникает еще потому, что идеи о том, как производить более эффективно, являются неконкурентными и распространяются свободно и мгновенно между фирмами.

Интерпретация K (фактора, вес которого превышает долю приходящегося на него дохода при определении темпов прироста в выражении (10.17)) зависит от рассматриваемой модели. Griliches (1979) рассматривал в качестве K виды деятельности, позволяющие создавать знания, например R&D. Romer (1986) отдельно выделял физический капитал. Lukas (1988) придавал особое значение человеческому капиталу в форме образования. Также возможно наличие отрицательных внешних эффектов, таких как проблемы на дорогах и ущерб окружающей среде.

Получить эмпирические оценки в выражении (10.17) довольно затруднительно, поскольку невозможно правильно определить веса при темпах прироста факторов производства на основе долей в доходе; не существует способа, позволяющего напрямую оценить коэффициент β. Если вместо этого записать остатки Солоу, то получим

$$\hat{g}\ (\text{Solow}) = \frac{\dot{T}}{T} + \beta \cdot \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha \cdot \frac{\dot{K}}{K} - (1-\alpha) \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \qquad (10.18)$$

Таким образом, стандартные расчеты остатков Солоу позволяют оценить влияние на рост таких параметров, как внешние эффекты и возрастающая отдача $\beta \cdot (\dot{K}/K)$, а также экзогенно заданный технический прогресс $\dot{T}/T$.

По-видимому, для разделения внешних эффектов и возрастающей отдачи от экзогенного технического прогресса необходимо построить модель регрессии. В данной модели строится регрессия обычных остатков Солоу g(Solow), рассчитанных по формуле (10.18), по темпу прироста фактора, который приводит к возникновению внешнего эффекта, $\dot{K}/K$. Однако этот подход также сталкивается с некоторыми проблемами при проведении экономических расчетов, например проблемой одновременности.

10.3.2. Налоги

В большинстве случаев налоги не влияют на расчеты совокупной производительности факторов. Пусть чистый доход фирмы облагается налогом, заработная плата и рентные платежи являются затратами фирмы, подлежащими вычитанию при обложении подоходным налогом, и заработная плата и рента облагаются налогом по специальным ставкам для домашних хозяйств. В данном случае конкурирующие фирмы приравнивают предельный продукт труда F_L к заработной плате w, а предельный продукт капитала F_K — к стоимости ренты R. Условие $Y = RK + wL$ также выполняется (если равновесная чистая прибыль фирмы и налоги равны нулю). Следовательно, формула (10.6) для $\hat{g}$ по-прежнему справедлива.

Пусть, наоборот, фирмы получают капитал за счет финансирования посредством выпуска акций, при этом заработная плата и амортизация δK не облагаются налогом, а r — это требуемая норма доходности по акциям (включающая подушевой налог). Конкурирующая фирма по-прежнему приравнивает предельный продукт труда к ставке заработной платы w. Фирма также приравнивает предельный продукт капитала после налогообложения $(1-\tau)\cdot(F_K-\delta)$ к r, где τ — предельная ставка налога на доход фирм. Следовательно, предельный продукт капитала определяется как

$$F_K = \frac{r}{1-\tau} + \delta.$$

Подставив выражения для F_K и F_L в формулу (10.4) для расчета темпов прироста, получаем

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{r}{1-\tau}\cdot\frac{K}{Y} + \frac{\delta K}{Y}\right)\cdot\frac{\dot{K}}{K} - s_L\cdot\frac{\dot{L}}{L}. \tag{10.19}$$

Если налоги пропорциональны доходам фирм, так что τ является как средней, так и предельной ставкой налога, то $rK/(1-\tau)$ в состоянии равновесия будет равно доходам фирм (за вычетом амортизации, но включая налог на доходы). Отсюда выражение в скобках в формуле (10.19) равно s_K, т. е. доходу на капитал, если капитальный доход фирм рассчитывается как доход фирм (включая налог на доход) плюс амортизация. Поэтому традиционная формула для расчета темпов прироста совокупной производительности факторов остается справедливой.

При наличии налога на выпуск или продажи, поведение конкурирующих фирм описывается как $F_L = w/(1-\tau)$ и $F_K = R/(1-\tau)$, где R — это по-прежнему стоимость ренты капитала, а τ — предельная ставка налога на выпуск. Подставив в формулу для расчета темпов прироста (10.4) выражения для F_K и F_L, получаем

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{R}{1-\tau} \cdot \frac{K}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{K}}{K} - \left(\frac{w}{1-\tau} \cdot \frac{L}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{L}}{L}. \tag{10.20}$$

Если налогообложение является пропорциональным, так что средняя и предельная ставки налога совпадают, общий доход от сбора налогов тогда составит τY. Выпуск Y равен сумме доходов факторов плюс доход от косвенного налогообложения:

$$Y = RK + wL + \tau Y,$$

так что доход факторов $RK + wL$ равен $(1-\tau) \cdot Y$. Поэтому выражения в скобках в формуле (10.20) равны соответственно s_K и s_L. (Отметим, что эти доли выражены относительно доходов факторов, а не валового внутреннего продукта.) Следовательно, традиционная формула для темпов прироста совокупной производительности труда (10.6) не меняется[1].

Стандартная формула для расчета темпов прироста справедлива, например, и для случая пропорционального налога на добавленную стоимость, который предполагает одинаковую налоговую ставку на добавленную стоимость, созданную как за счет труда, так и за счет капитала. Однако традиционная формула будет неточной, если предположить различные налоговые ставки на добавленную стоимость, создаваемую каждым фактором. Если фирмы платят налог по ставке τ_K на RK и по ставке τ_L на wL, то из формулы для расчета темпов роста (10.4) получаем

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{1+\tau_K}{1+\tau}\right) \cdot s_K \cdot \frac{\dot{K}}{K} - \left(\frac{1+\tau_L}{1+\tau}\right) \cdot s_L \cdot \frac{\dot{L}}{L}, \tag{10.21}$$

где τ – это средневзвешенное значение налоговых ставок, определяемое как

$$\tau = s_K \tau_K + s_L \tau_L.$$

[1] Анализ будет более сложным, если предположить, что налогообложение фирм не является пропорциональным (относительно выпуска или дохода). Если предельная ставка налогообложения растет, то, в сущности, мы возлагаем дополнительные налоговые обязательства на большие фирмы. Поэтому для данной модели с постоянной отдачей от масштаба в состоянии равновесия на рынке будут функционировать только бесконечно малые фирмы. Непропорциональное налогообложение может допускаться в моделях, в которых создание фирмы требует постоянных издержек или в которых масштаб ответственности или какие-то другие факторы, в итоге, приводят к убывающей отдаче от размера фирмы.

Если, например, $\tau_K > \tau_L$, то из выражения (10.21) следует, что веса при $\dot{K}/K$ должны быть подняты относительно весов при $\dot{L}/L$, чтобы получить g точно.

10.3.3. Различные виды факторов производства

Предположим, что производственная функция теперь имеет вид

$$Y = F(A, K_1, K_2, L_1, L_2). \tag{10.22}$$

Одной из трактовок выражения (10.22) является то, что K_1 и K_2 - это основной капитал различного вида или качества, а L_1 и L_2 — соответственно различные виды труда или его качества. Тогда дальнейший расчет темпов роста осуществляется на основе метода, предложенного в работе Jorgenson and Griliches (1967), если удельный вес каждого фактора совпадает с его долей в совокупном доходе. То есть удельный вес $\dot{K}_1/K_1$ равен R_1K_1/Y и т. д. Остатки Солоу, полученные согласно данному методу, будут в точности оценивать вклад технологического прогресса в экономический рост g до тех пор, пока плата за эти факторы совпадает с их социальным предельным продуктом.

Сложности возникают, когда не удается на основе имеющихся данных разделить факторы, например когда и $\dot{K}_1/K_1$, и $\dot{K}_2/K_2$ объединяются в совокупную долю капитала $(R_1K_1 + R_2K_2)/Y$. Одной из причин подобной проблемы является то, что новый и обычно лучший вид капитала объединяется с более старыми видами. Аналогично, различные виды труда могут быть объединены в некоторых источниках данных.

Другая интерпретация выражения (10.22) заключается в том, что K_1 и L_1 могут представлять вклад факторов в производство в секторе 1 (например, городской промышленности), а K_2 и L_2 -- использование факторов в секторе 2 (например, в сельском хозяйстве). Соотношение секторов со временем может меняться, так как может происходить переход от сельского хозяйства к промышленности. Подобные сдвиги не создают проблем для оценки темпов прироста, если веса темпов прироста факторов производства (различающихся в зависимости от сектора) определяются исходя из их долей в доходе. Однако возникают ошибки при оценке, если капитал или труд агрегируется по секторам, а веса для темпов прироста этих агрегированных показателей определяются в зависимости от долей в доходе, соответственно, совокупного капитала или труда.

Чтобы продемонстрировать это более наглядно, предположим, что совокупный темп прироста факторов производства рассчитывается неверно:

$$\tilde{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{R_1K_1 + R_2K_2}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{K}}{K} - \left(\frac{w_1L_1 + w_2L_2}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{L}}{L}, \tag{10.23}$$

где $K = K_1 + K_2$ и $L = L_1 + L_2$. Эту формулу следует сравнить с выражением для правильной оценки показателя:

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{R_1K_1}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{K}_1}{K_1} - \left(\frac{R_2K_2}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{K}_2}{K_2} - \left(\frac{w_1L_1}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{L}_1}{L_1} - \left(\frac{w_{12}L_2}{Y}\right) \cdot \frac{\dot{L}_2}{L_2}. \tag{10.24}$$

Выражение (10.24) является формулой для правильного определения вклада экзогенно заданного технологического прогресса, т. е. $\hat{g} = g$, если плата за факторы соответствует их социальному предельному продукту.

Рассмотрим, каким образом $\tilde{g}$ из (10.23) соотносится с реальным ростом совокупной производительности факторов, рассчитанной по (10.24):

$$\begin{aligned} \tilde{g} - \hat{q} = {} & \frac{K_1}{K} \cdot \frac{K_2}{K} \cdot \frac{K}{Y} \cdot (R_1 - R_2) \cdot \left(\frac{\dot{K}_1}{K_1} - \frac{\dot{K}_2}{K_2}\right) + \\ & + \frac{L_1}{L} \cdot \frac{L_2}{L} \cdot \frac{L}{Y} \cdot (w_1 - w_2) \cdot \left(\frac{\dot{L}_1}{L_1} - \frac{\dot{L}_2}{L_2}\right). \end{aligned} \tag{10.25}$$

Следовательно, если $R_1 \neq R_2$ и $\dot{K}_1/K_1 \neq \dot{K}_2/K_2$ или если $w_1 \neq w_2$ и $\dot{L}_1/L_1 \neq \dot{L}_2/L_2$, то $\tilde{g} \neq \hat{g}$. В частности, если $R_1 > R_2$, то соотношение $\dot{K}_1/K_1 > \dot{K}_2/K_2$ приводит к тому, что $\tilde{g} > \hat{g}$. Аналогично и для труда.

Если рассматривать различные по качеству факторы производства, то оценка прироста совокупной производительности факторов в результате превзойдет истинный темп прироста совокупной производительности факторов при условии, что со временем состав факторов становится лучшего качества (и подобные сдвиги не удается оценить). Эта проблема является одной из главных и решенных проблем при ограниченности данных, рассмотренных в работе Jorgenson and Griliches (1967).

Одна из интерпретаций результатов для отрасли предполагает миграцию рабочей силы из сельской местности в города. Заработная плата в городе w_1 может превосходить заработную плату в сельской местности w_2 по различным причинам, включая законодательно утвержденный минимальный уровень заработной платы и требования членов профсоюзов по работе в городе. В таком случае движение труда из сельскохозяйственных секторов в промышленные отражает выигрыш в производительности в экономике в целом. Выражение для труда в формуле (10.25) отражает экономический рост, вызванный этим изменением распределения труда между секторами при заданном темпе прироста совокупного труда $\dot{L}/L$. Этот эффект, возникающий при передвижении рабочей силы из отраслей сельского хозяйства с низкой производительностью в высокопроизводительные отрасли промышленности, рассматривался в работе Kuznets (1961, с. 61), где было получено выражение, аналогичное (10.25).

При проведении оценки экономического роста изменение распределения ресурсов между секторами должно проявляться при расчетах. Если изменение количества рабочей силы в каждом из секторов взвешивается по доле дохода, приходящегося на труд каждого типа, то вклад изменения соотношения секторов в совокупный рост появляется в части, отвечающей за изменение количества ресурсов в выражении (10.24). Если же веса определены так же, как и в выражении (10.23), то вклад изменения распределения ресурсов между секторами будет входить в оценку совокупной производительности факторов.

10.4. Рост совокупной производительности факторов производства. R&D

Оценка экономического роста зачастую рассматривается как первый шаг при объяснении темпов прироста совокупной производительности факторов g, оцениваемых по формуле (10.6). Например, исследовательские программы, рассмотренные в работе Griliches (1973), фокусируются на расходах в R&D как на основном факторе, влияющем на темпы прироста совокупной производительности факторов[1]. Теория эндогенного роста, рассмотренная в гл. 6 и 7, используется для моделирования соотношения между технологическими изменениями и затратами на R&D. В последующих разделах мы проанализировали это соотношение для моделей, в которых предполагается увеличение количества видов продукции и улучшение качества существующей продукции.

10.4.1. Модели растущего разнообразия

В модели растущего разнообразия, изложенной в гл. 6, общая производственная функция задается выражением (6.13):

$$Y = TL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}, \tag{10.26}$$

где T — это экзогенно заданный технологический параметр; L совокупные затраты труда; N – количество видов уже известной и использу-

[1] Более ранние исследования по данной теме представлены работами таких экономистов, как Terleckyj (1958), Minasian (1962), Griliches (1964) и Mansfield (1965).

емой промежуточной продукции, X — совокупное количество затрачиваемой промежуточной продукции, а $0 < \alpha < 1$. Технологический прогресс возникает благодаря затратам в R&D, которые приводят к росту N во времени. Таким образом, N означает текущее состояние эндогенно определяемой технологии. В данной модели ведущая технология, т. е. предполагающая использование всех N видов известных на данный момент промежуточных продуктов, применяется всеми производителями. Следовательно, эта спецификация наилучшим образом подходит для универсальных технологий (см. David (1991); Bresnahan and Trajtenberg (1995)), которые находят широкое применение в экономике.

Конкурирующие производители выпуска Y приравнивают предельный продукт труда и ставку заработной платы:

$$w = (1 - \alpha) \cdot \frac{Y}{L}.$$

Следовательно, доля трудового дохода традиционно составит

$$s_L = \frac{wY}{L} = 1 - \alpha. \tag{10.27}$$

Конкурирующие производители конечной продукции уравновешивают предельную производительность промежуточной продукции каждого вида и стоимость промежуточных ресурсов, равную монопольной цене $1/\alpha$. Это условие может быть выражено как

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha \cdot \frac{Y}{X}.$$

Следовательно, доля дохода, идущего на приобретение N промежуточных ресурсов, составляет

$$s_X = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{X}{Y} = \alpha. \tag{10.28}$$

Темп прироста выпуска из выражения (10.26) может быть рассчитан как

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{T}}{T} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\dot{N}}{N} + s_L \cdot \frac{\dot{L}}{L} + s_X \cdot \frac{\dot{X}}{X}, \tag{10.29}$$

где из выражений (10.27) и (10.28) использовались формулы для s_K и s_L. В исходной модели, рассмотренной в гл. 6, предполагалось $\dot{T}/T = \dot{L}/L = 0$. Однако формула (10.29) справедлива только тогда, когда при изменении T и L предельные продукты труда и каждого из промежуточных ресурсов равны своим факторным ценам. Поэтому в этой модели обычная формула для расчета темпа прироста совокупной производительности факторов имеет следующий вид:

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_L \cdot \frac{\dot{L}}{L} - s_X \cdot \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{T}}{T} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\dot{N}}{N}. \qquad (10.30)$$

Следовательно, несмотря на монопольное ценообразование на промежуточную продукцию, остатки Солоу позволяют достаточно верно оценить суммарный вклад в рост производительности экзогенно заданного технологического прогресса $\dot{T}/T$ и эндогенного роста числа видов продукции $\dot{N}/N$.

Отметим, что из выражения (10.30) следует, что часть остатков Солоу, отвечающая за эндогенный рост, отражает лишь долю, равную $1 - \alpha$, от темпа прироста видов продукции $\dot{N}/N$. Оставшаяся часть $\alpha \cdot (\dot{N}/N)$ получается из выражения $s_X \cdot (\dot{X}/X) = \alpha \cdot (\dot{X}/X)$ в левой части выражения (10.30). При заданном количестве промежуточной продукции каждого вида создание новых видов с темпом прироста $\dot{N}/N$ приводит к приросту агрегированного количества промежуточной продукции с тем же самым темпом. Вклад от увеличения количества продукции в общий рост (с учетом коэффициента α, т. е. доли дохода, идущего на покупку промежуточной продукции) соответствует росту фактора производства, а не технологическому прогрессу. В результате технологический прогресс, заключающийся в создании новых видов промежуточной продукции, также приводит к росту количества промежуточной продукции, в том числе за счет производства по новой технологии.

В исходной модели из гл. 6 $\dot{N}$ пропорционально количеству выпуска, идущего на R&D, т. е. $\dot{N} = (1/\eta) \cdot (\text{R\&D})$, где η затраты на R&D, которые необходимы для того, чтобы увеличить N на единицу. Следовательно, темп прироста N задается следующим образом:

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\text{R\&D}}{\eta N} = \frac{\text{R\&D}}{\text{Рыночная стоимость R\&D предыдущих периодов}}. \qquad (10.31)$$

Отметим, что ηN это произведение количества изобретений N на затраты производства каждого изобретения η. Следовательно, ηN это рыночная стоимость фирм, которая соответствует рыночной стоимости понесенных этими фирмами затрат на R&D. Оценка темпов прироста совокупной производительности факторов из выражения (10.30) тогда рассчитывается по формуле

$$\hat{g} = \frac{\dot{T}}{T} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\text{R\&D}}{\text{Рыночная стоимость R\&D предыдущих периодов}}. \qquad (10.32)$$

В модели растущего разнообразия выбранное количество X пропорционально L, т. е. величина Y/L, рассчитанная по формуле (10.26), пропорциональна N. Поскольку знаменатель последнего члена, стоящего в правой части выражения (10.32), равен ηN, постольку этот последний член пропорционален соотношению расходов на R&D и выпуску на одного работника Y/L. Таким образом, $\hat{g}$ в выражении (10.32) может быть записано как функция, линейная по (R&D)/(Y/L). Этот результат совпадает с результатами моделей, предложенных в работах Griliches (1973) и Coe and Helpman (1995) с той разницей, что R&D затраты в исходной модели рассматриваются в отношении к выпуску на одного работника Y/L, а не просто к уровню выпуска. Причина заключается в том, что модель учитывает эффект масштаба при росте L. В альтернативной спецификации, рассмотренной в гл. 6, когда исключался эффект масштаба по L, $\hat{g}$ зависит от соотношения издержек R&D и выпуска, как и в традиционных эмпирических исследованиях.

Эмпирическая методология, описанная Griliches (1973), вполне согласуется с общей постановкой модели. Подход, предложенный Griliches, заключается в том, что, во-первых, проводится традиционный анализ для оценки экономического роста, позволяющий вычислить остаток Солоу. Этот метод соответствует расчету $\hat{g}$ по формуле (10.30). Главное отличие заключается в том, что промежуточная продукция X включает поток сервисных услуг для ряда капитальных товаров; т. е. промежуточная продукция рассматривается не только как товары краткосрочного пользования. Затем Griliches оценивает регрессию, чтобы определить влияние переменной R&D на темп прироста совокупной производительности факторов. Например, темп прироста TFP может быть оценен с помощью регрессии по расходам на R&D (обычно выраженным в доле выпуска или объеме продаж), по выражению для тренда (чтобы учесть экзогенный технический прогресс), а также с учетом случайного влияния. Коэффициент при переменной R&D в регрессии будет показывать оценку социальной нормы доходности по исследованиям и разработкам.

Методология Griliches использовалась в ряде исследований для фирм и отраслей промышленности США, включая работы Griliches and Lichtenberg (1984) и Griliches (1988). Главная проблема заключается в некачественных данных о значениях R&D. Тем не менее в этих исследованиях была показана довольно высокая социальная норма доходности по R&D, в основном в интервале от 20 до 40% в год.

В работе Coe and Helpman (1995) использовался данный подход для 22 стран ОЭСР. В данном исследовании была получена необычайно высокая норма доходности по R&D в стране (около 100% в год). Если включить в рассмотрение положительные внешние эффекты, то норма доходности получается даже выше (около 130% в год).

Одним из недостатком методологии, предложенной Griliches, которую мы обсудили при регрессионном анализе темпов прироста, является то, что оценки могут быть неправильными вследствие ответной реакции факторов. В данном случае сложность заключается в том, что расходы на R&D будут зависеть от экзогенного изменения производительности ($\dot{T}/T$ в выражении (10.32)), т. е. оценка коэффициента при переменной R&D будет частично включать этот экзогенный технологический прогресс. Эта проблема может объяснить высокое значение норм доходности R&D в упоминавшихся ранее исследованиях. Например, в работе Coe and Helpman (1995) высокие коэффициенты в уравнении регрессии при параметре R&D могут отражать положительную реакцию расходов на R&D на возможности роста, а не на рост производительности вследствие роста расходов на R&D. Такая возможность причинно-следственной связи также может наблюдаться в исследованиях по отраслям и фирмам США.

По сути дела, проблема одновременности может быть решена посредством использования инструментальных переменных. Однако подходящих инструментальных переменных может быть и не найдено. Возможные инструментальные переменные включают политику государства в отношении исследований и разработок, например, субсидии на исследования, законодательную поддержку, патентную систему и схему налогообложения исследовательской деятельности.

В модели растущего разнообразия предлагается возможный способ расширить процедуру расчета темпов прироста, чтобы учесть вклад R&D. Расширенный остаток Солоу может быть рассчитан вычитанием из темпа прироста выпуска $\dot{Y}/Y$ не только вклада темпов прироста факторов производства

$$s_L \cdot \left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + s_X \cdot \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)$$

из выражения (10.30), но также и выражения

$$(1-\alpha) \cdot \frac{\text{R\&D}}{\text{Рыночная стоимость R\&D предыдущих периодов}}$$

из (10.32). Однако в данном случае при расчете нам необходимо знать долю труда $1-\alpha$ и значение текущих расходов на R&D, а также суммарные расходы на R&D предыдущих периодов.

10.4.2. Модели ступеней качества

Другой известной моделью технологических изменений, посвященной эндогенному экономическому росту, является модель ступеней качества, которую мы обсудили в гл. 7. В данной модели технологический прогресс заключается в улучшении качества промежуточной продукции (или, что то же самое, в уменьшении издержек на производство промежуточной продукции заданного качества). Количество видов продукции в данном случае предполагается фиксированным, хотя в дальнейшем можно включить в модель и изменение этого числа.

В модели, разработанной в гл. 7 (выражения (7.15) и (7.16)), производственная функция записывается как

$$Y = TL^{1-\alpha}X^{\alpha}Q^{1-\alpha}, \tag{10.33}$$

где T – это экзогенный уровень технологии; L - агрегированный труд; $0 < \alpha < 1$; X -- агрегированное количество используемых промежуточных продуктов. Переменная $Q = \sum_{j=1}^{N} q^{\kappa_j\alpha/(1-\alpha)}$ является агрегированным индексом качества, где N – это фиксированное количество видов продукции; $q > 1$ – соответствующее расстояние между ступенями качества в каждом секторе; κ_j – наивысшая ступень качества, достигнутая в секторе j. Каждый вид промежуточной продукции оценивается по монопольной цене $1/\alpha > 1$. Технологический прогресс являлся следствием деятельности в области R&D и позволяет продвигаться вверх по ступеням качества в каждом секторе, при этом в каждый момент времени возможен только один шаг.

Ключевой особенностью модели ступеней качества является то, что в каждом секторе промежуточные продукты различного качества рассматриваются как совершенные субституты. Товары, находящиеся на более высокой ступени качества, лучше товаров, находящихся на более низких ступенях. По этой причине в состоянии равновесия промежуточный продукт вида j(с оценкой качества $\kappa_j - 1, \kappa_j - 2, \ldots$) уходит с рынка. Этот технический моральный износ («творческое разрушение») отличает модель ступеней качества от модели разнообразия товаров. В модели (рассмотренной в предыдущем разделе) не возникало технологического старения продукции и новые промежуточные продукты присутствовали на рынке вместе со старыми.

Из выражения (10.33) следует, что стандартная формула расчета темпов прироста в модели ступеней качества будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_L \cdot \frac{\dot{L}}{L} - s_X \cdot \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{T}}{T} + (1-\alpha) \cdot \frac{\dot{Q}}{Q}, \tag{10.34}$$

где, как и в предыдущих моделях, $s_L = wL/Y$ и $s_X = (1/\alpha) \cdot (X/Y)$[1]. Следовательно, в данной модели остаток Солоу равен сумме экзогенного технологического прогресса $\dot{T}/T$ и темпа прироста качества $\dot{Q}/Q$, взвешенного по доле труда $1-\alpha$. Этот результат совпадает с выражением (10.30) для модели растущего разнообразия с той лишь разницей, что технологические изменении теперь описываются $\dot{Q}/Q$, вместо $\dot{N}/N$. Вновь часть вклада технологических изменений $(\alpha \cdot \dot{Q}/Q)$ идет на рост промежуточных продуктов $\dot{X}/X$, и только оставшаяся часть появляется в остатке Солоу.

Из соотношения $\dot{Q}/Q$ и расходов на исследования и разработки можно прийти к некоторым новым выводам. В модели ступеней качества, изложенной в гл. 7, темп роста Q может быть выражен следующим образом[2]:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \left[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}\right] \cdot \frac{\text{Текущие R\&D расходы}}{\text{R\&D расходы предыдущих периодов}}. \tag{10.35}$$

Главное отличие от выражения для $\dot{N}/N$ из формулы (10.31) заключается в наличии впереди константы $[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}]$, значение которой

---

[1] Чтобы получить выражение (10.34), мы предположили, что $\dot{N} = 0$. В базовой модели предполагается, что L и T являются постоянными во времени. Выражение (10.34) справедливо, даже если L и T изменяются во времени.

[2] Из выражения (7.33) следует, что

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = p \cdot [q^{a/(1-\alpha)} - 1],$$

где p - это вероятность достижения успеха в исследованиях в каждом секторе за единицу времени. (В равновесии, подразумеваемом в гл. 7, вероятность исследовательского успеха p одинакова для всех секторов.) Вероятность выводится из выражений (7.19) и (7.21):

$$p = \frac{Z(\kappa_j)}{q^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot E[V(\kappa_j)]},$$

где $Z(\kappa_j)$ это текущие расходы на R&D в секторе j, а $E[V(\kappa_j)]$ — рыночная стоимость фирмы-лидера в секторе j. Поскольку только ведущая фирма в каждом секторе имеет положительную рыночную стоимость, то выражение $E[V(\kappa_j)]$ соответствует рыночной стоимости произведенных ранее затрат на исследования и разработки в секторе. Следовательно, константа в выражении (10.35) равна $1-q^{-\alpha/(1-\alpha)}$ и находится между 0 и 1.

находится между 0 и 1. Эта константа меньше единицы, поскольку старые виды промежуточной продукции считаются морально устаревшими во всех секторах, в которых происходят качественные улучшения. Эта константа будет тем выше, чем больше q, означающее соотношение производительностей только что изобретенного промежуточного продукта и следующего по качеству продукта. При высоких q «созидательное разрушение» несет в себе больше именно созидательного, а не разрушительного, и поэтому вклад текущих затрат на R&D в совокупный индекс качества Q постепенно снижается.

Индекс качества Q можно рассматривать в качестве оценки основных фондов в секторе R&D. Однако в данной модели не совсем правомерно следовать общей практике, в соответствии с которой моделируются основные фонды. Согласно подходу, предложенному в моделях с постоянным лидером, изменение количества капитала, идущего на исследования и разработки, равно текущим расходам на R&D (дополнение к валовым инвестициям) минус амортизация существующего капитала в секторе R&D. Предполагается, что последний член, обычно рассматриваемый как постоянная доля существующего капитала, соответствует моральному износу старых технологий. В модели ступеней качества необходимо дисконтировать текущие расходы на R&D с учетом $[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}] < 1$, чтобы обеспечить одновременное моральное старение промежуточных продуктов более низкого качества. Тогда эти дисконтированные расходы на R&D учитываются напрямую как чистые инвестиции, влияющие на изменение количества капитала в секторе исследований и разработок (т. е. на индекс качества Q). Норма амортизации этого капитала равна нулю, поскольку в модели нельзя полностью забыть технологию.

Формула расчета темпов прироста из выражений (10.34) и (10.35) может быть записана как

$$\dot{\hat{g}} = \frac{\dot{T}}{T} + (1-\alpha)\cdot[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}]\times \\ \times \frac{\text{Текущие R\&D расходы}}{\text{R\&D расходы предыдущих периодов}}. \tag{10.36}$$

Этот результат соответствует выражению (10.32), за исключением наличия коэффициента $[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}] < 1$. Таким образом, в модели ступеней качества вклад переменной, отвечающей за расходы на R&D, в рост совокупной производительности факторов меньше, чем «один к одному», частично из-за умножения на долю труда, $1-\alpha$, и частично из-за умножения на коэффициент морального износа $[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}]$.

Поскольку параметр q не является напрямую наблюдаемым, нерегрессионный подход к оценке влияния R&D на темпы прироста не будет доступным в рамках модели ступеней качества.

В базовой модели ступеней качества рыночная стоимость затрат на R&D предыдущих периодов пропорциональна выпуску на одного рабочего Y/L[1]. Следовательно, темп прироста совокупной производительности факторов из выражения (10.36) может быть записан как линейная функция от соотношения (R&D)$/(Y/L)$, отметим, что переменная R&D возникла в исходной модели разнообразия продуктов. Параметр (R&D) / Y используется в эмпирических исследованиях, если затраты на R&D определены таким образом, чтобы избавиться от эффекта масштаба в данной модели.

Влияние R&D на темп прироста совокупной производительности факторов в (10.36) может быть оценен эмпирически с помощью регрессионного анализа. В принципе, результаты могут быть использованы для оценки коэффициента морального износа $[1 - q^{-\alpha/(1-\alpha)}]$. Однако в данном случае вновь возникнут проблемы одновременности, поэтому потребуется наличие подходящих инструментальных переменных для параметра R&D.

10.5. Оценка экономического роста и его источники

Оценка экономического роста зачастую используется несоответствующим образом при определении основных источников роста, в то время как в действительности данный расчет является разложением. Чтобы понять этот момент, рассмотрим неоклассическую модель экономики, которая находится в устойчивом состоянии. Пусть дана производственная функция Кобба—Дугласа с экзогенно заданным трудосберегающим технологическим прогрессом со скоростью x:

$$Y = AK^{\alpha} \cdot (Le^{xt})^{1-\alpha}.$$

Предположим для простоты, что совокупная рабочая сила L является постоянной.

В гл. 1 и 2 мы нашли, что в устойчивом состоянии темп прироста выпуска и основного капитала также будет x. Следовательно, если мы воспользуемся предложенным в данной главе разложением темпа роста, то получим

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \cdot \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \cdot x,$$

[1] См. выражения (7.68) и (7.16).

где $\dot{Y}/Y = \dot{K}/K = x$. Так как мы считаем, что αx – это та часть темпа прироста в устойчивом состоянии x, которая объясняется темпом прироста капитала, то темп прироста совокупной производительности факторов рассчитывается как $(1-\alpha)\cdot x$. Следовательно, с технологическим прогрессом мы связываем только долю от общего темпа прироста выпуска в размере $1-\alpha$, в то время как в действительности без этого прогресса рост вообще невозможен.

В данной модели разумно считать, что основным источником роста является только технология, поскольку без технологического прогресса не происходил бы рост валового внутреннего продукта. Тем не менее, разложение темпов прироста оказывается верным в том смысле, что технологический прогресс ведет к дополнительному накоплению капитала, который, в свою очередь, приводит к большему росту ВВП, чем в случае, если основной капитал не меняется. До тех пор пока капитал является эндогенным и соответствует технологическому прогрессу, весь рост ВВП объясняется технологией. В этом смысле, отнесение только части темпа прироста ВВП, составляющей $(1-\alpha)\cdot x$, к технологическому прогрессу является не совсем верным. Однако также верно и то, что если бы основной капитал не увеличивался в результате технологического прогресса, ВВП рос бы со скоростью $(1-\alpha)\cdot x$, а не x.

Данную точку зрения проще объяснить на графике. На рис. 10.1 изображена функция выпуска на душу населения. Пусть в начальный момент времени экономика находится в устойчивом состоянии, в котором основной капитал k^* и ВВП на душу населения y^* постоянны. Предположим, что технология улучшается таким образом, что график производственной функции смещается пропорционально вверх. Если основной капитал не увеличивается, то ВВП возрастает с y^* до $y^{*\prime}$. Таким образом, $y^{*\prime} - y^*$ – это увеличение ВВП, происходящее непосредственно за счет усовершенствования технологии. Однако в ответ на усовершенствование технологии основной капитал будет также расти (что показано в гл. 1 и 2). Пусть значение капитала в новом устойчивом состоянии равно k^{**}, а новый ВВП $y^{**} > y^{*\prime}$. Отметим, что разность $y^{**} - y^{*\prime}$ является тем увеличением валового внутреннего продукта, которое объясняется эндогенным увеличением капитала. Оценка экономического роста справедливо показывает, что увеличение выпуска с y^* до $y^{*\prime}$ может быть связано с технологическим прогрессом, тогда как увеличение выпуска с $y^{*\prime}$ до y^{**} является ответной реакцией основного капитала. Таким образом, данный пример ясно показывает, что единственный основной источник роста – это технологический прогресс, поскольку без него ВВП не будет расти.

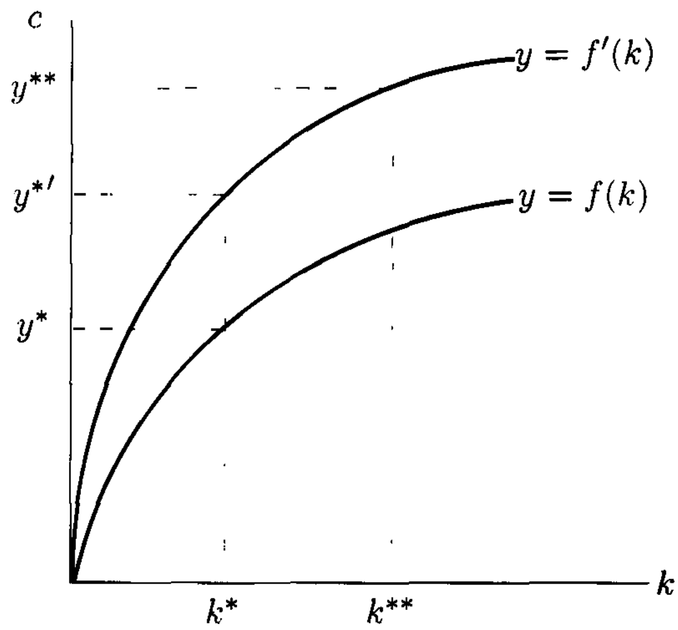


Рис. 10.1. Реакция экономики на технологический прогресс. На графике изображены две функции выпуска на душу населения. Пусть в начальный момент времени экономика находится в устойчивом состоянии, в котором основной капитал k^* и ВВП на душу населения y^* постоянно. Предположим, что технология улучшается таким образом, что производственная функция смещается пропорционально вверх. Если основной капитал не увеличивается, то ВВП возрастает с y^* до $y^{*\prime}$. Таким образом, $y^{*\prime} - y^*$ – это увеличение ВВП, происходящее непосредственно за счет усовершенствования технологии. Однако в ответ на усовершенствование технологии основной капитал будет также расти (что показано в гл. 1 и 2). Пусть значение капитала в новом устойчивом состоянии равно k^{**}, а новый ВВП $y^{**} > y^{*\prime}$. Отметим, что разность $y^{**} - y^{*\prime}$ является тем увеличением валового внутреннего продукта, которое объясняется эндогенным увеличением капитала. Оценка экономического роста справедливо показывает, что увеличение выпуска с y^* до $y^{*\prime}$ может быть связано с технологическим прогрессом, тогда как увеличение выпуска с $y^{*\prime}$ до y^{**} является ответной реакцией основного капитала. Данный пример ясно показывает, что единственный основной источник роста — это технологический прогресс, поскольку без него ВВП не будет расти

Темп прироста совокупной производительности факторов, равный $(1-\alpha)\cdot x$, является ответом на вопрос «Чему был бы равен темп прироста выпуска, если бы скорость технологического прогресса была равной x, а основной капитал (и затраты труда) являлись константой?»

Точно так же темп прироста αx является ответом на вопрос «Чему был бы равен темп прироста выпуска, если бы основной капитал рос, как и ранее (с темпом x), а технологический прогресс был бы нулевым?» Эти ответы являются логичными при данных предпосылках, однако в целом они недостаточно соответствуют результатам причинно-следственного анализа экономики. Если технологический прогресс является действительно экзогенным, то для устойчивого состояния в неоклассической модели можно высказать обоснованное с экономической точки зрения утверждение о том, что различные темпы технического прогресса проявляются в долгосрочном периоде как разница в темпах прироста выпуска.

Если мы хотим связать технологию и с прямым увеличением ВВП, и с увеличением ВВП за счет ответного эндогенного роста капитала, то необходимо разделить оценку $\hat{g}$ на $(1-\alpha)$. Другими словами, мы получаем[1)]

$$x = \frac{\hat{g}}{1-\alpha}. \tag{10.37}$$

В качестве примера в табл. 10.3 внесены коррективы для четырех стран Восточной Азии, каждую из которых называют «чудом» и сведения о которых представлены в табл. 10.2. В столбце (1) показан темп прироста совокупного валового внутреннего продукта. В столбце (2) представлен предполагаемый темп прироста совокупной производительности факторов из последнего столбца табл. 10.2. В скобках указана доля совокупного роста, которая объясняется технологией. В столбце (3) рассчитан темп прироста ВВП, осуществляемый только за счет технологического прогресса (непосредственно и косвенно) при использовании корректировки, предложенной в уравнении (10.37). Отметим, что доля совокупного роста ВВП, объясняемая только технологическим прогрессом, составляет 59% для Гонконга, 49% для Сингапура и 53% для Тайваня (из, соответственно, 37, 25 и 39%). Лишь темп прироста Южной Кореи по-прежнему в значительной степени объясняется экзогенным накоплением факторов (росту совокупной производительности факторов соответствует только 20% роста ВВП). Таким образом, несмотря на то что оценки роста совокупной производительности факторов являются небольшими, вполне возможно, что именно благодаря технологическому прогрессу происходит более чем половина роста ВВП.

Проблема усложняется, если мы признаем, что человеческий капитал также отвечает эндогенно на экзогенное улучшение технологии. Корректировка с учетом этого дополнительного фактора приводит к формуле, аналогичной (10.37), за исключением того, что относительная доля капитала является суммой долей физического и человеческого капиталов. Как уже обсуждалось ранее, эта доля неизвестна,

---

[1)] Предполагается, что ответная реакция капитала происходит в течение периода наблюдения.

Таблица 10.3

Оценка роста в некоторых странах

Страна	Темп прироста ВВП (1)	Темп прироста TFP (2)	Темп прироста TFP с учетом физического капитала (3)	Темп прироста TFP с учетом всех видов капитала (4)
Группа А: страны ОЭСР, 1947–1973 гг.				
Гонконг	0,073	0,027	0,043	0,090
($\alpha = 0{,}44$)		(37%)	(59%)	(123%)
Сингапур	0,087	0,022	0,043	0,073
($\alpha = 0{,}40$)		(25%)	(49%)	(84%)
Южная Корея	0,0103	0,015	0,021	0,050
($\alpha = 0{,}39$)		(14%)	(20%)	(49%)
Тайвань	0,094	0,037	0,050	0,123
($\alpha = 0{,}39$)		(39%)	(53%)	(131%)

Примечания. В столбце (1) представлен темп прироста ВВП из табл. 10.1 для группы D. В столбце (2) показан темп прироста совокупной производительности факторов, заимствованный из столбца (2) табл. 10.2, в котором указаны двойственные оценки. В столбце (3) представлена отдача от физического капитала, полученная умножением темпа прироста TFP на $1/(1-\alpha)$, где α — это доля капитала, указанная в табл. 10.1 для группы D. В столбце (4) представлены данные с учетом отдачи от физического и человеческого капитала, полученные умножением темпов прироста TFP на 1/0,3, т. е. предполагается, что доля капитала в его широком понимании $\alpha = 0{,}7$. Цифры в скобках указывают процент от темпов роста ВВП, приходящихся на каждый фактор роста совокупной производительности труда

однако, исходя из данных о конвергенции, она может быть близка к 0,7. В столбце (4) табл. 10.3 мы использовали именно это число в качестве доли совокупного капитала, чтобы рассчитать темп прироста ВВП, объясняемый только технологическим прогрессом, когда учитывается и человеческий, и физический капитал. Технологический прогресс теперь отвечает за весь рост ВВП в Гонконге и Тайване. (Технологические изменения привели более чем к 100%-ным темпам прироста, поскольку отдача от человеческого и физического капиталов при экзогенных улучшениях технологии должна быть больше, чем она действительно была.) Технология также объясняет 84% экономического роста в Сингапуре и 49% в Южной Корее.

Коррективы, внесенные в оценки в данном разделе, безусловно, преувеличивают важности технологического прогресса, поскольку предполагается, что вся эндогенная отдача от капитала проявляется в течение периода наблюдений. Однако не предполагалось, что расчет позволит реально учесть роль капитала в темпах прироста совокупной производительности факторов и даст возможность делать причинно-следственные выводы об основных источниках роста, эти результаты, скорее, предупреждают читателя о том, что подобных выводов следует избегать. Небольшое положительное значение $\hat{g}$ в целом соответствует ситуации, когда технологический прогресс отвечает за небольшую часть экономического роста, но возможна и другая ситуация, когда это значение, в конечном счете, объясняет весь экономический рост. Таким образом, одно и то же разложение может быть интерпретировано с двух разных точек зрения.

Оценка экономического роста может также обеспечить механическое разложение темпа прироста выпуска на темпы прироста ресурсов и темп прироста совокупной производительности факторов. Успешное разложение в данном случае может быть полезным и может послужить стимулом развития теорий экономического роста. Однако сам расчет темпов прироста не представляет собой отдельную теорию, поскольку с помощью расчетов нельзя объяснить, каким образом изменения количества ресурсов и улучшение совокупной производительности факторов будет влиять на другие параметры, которые являются ключевыми в модели (такие, как предпочтения потребителей, технология или политика правительства).

11 Эмпирический анализ региональных данных

Одним из ключевых свойств неоклассической модели роста является то, что она дает возможность выявлять наличие условной конвергенции. Эта концепция возникает, когда темп прироста экономики положительно связан с разницей между нынешним уровнем доходов и уровнем в устойчивом состоянии. Условную конвергенцию не следует путать с безусловной, которая заключается в том, что бедные страны имеют тенденцию расти быстрее богатых (и, таким образом, бедные страны «догоняют» богатые). Существуют примеры, когда все страны характеризуются наличием условной конвергенции (темпы прироста каждой страны уменьшаются по мере приближения к устойчивому состоянию), однако безусловная конвергенция отсутствует (богатые страны могут расти быстрее бедных, если богатые страны находятся дальше от своего устойчивого уровня). Две концепции конвергенции могут совпадать, если страны стремятся к одному и тому же устойчивому состоянию. В гл. 1 и 2 мы установили, что в неоклассических моделях роста страны, характеризующиеся одинаковой технологией и схожими предпочтениями потребителей, стремятся к одному устойчивому состоянию. Поэтому в данном случае неоклассическая модель роста указывает на наличие безусловной конвергенции, т. е. бедные экономики растут быстрее богатых. Таким образом, одним из способов проверки гипотезы о наличии конвергенции является проверка того, характеризуются ли экономики с одинаковыми предпочтениями и технологией (экономики, которые, скорее всего, стремятся к одному устойчивому состоянию) наличием безусловной конвергенции.

В данной главе мы проверяем гипотезы о наличии конвергенции в неоклассических моделях роста, анализируя экономику регионов внутри стран. Хотя между регионами и существуют различия в технологии, предпочтениях и институциональной среде, эти различия будут меньше, чем различия между странами. Фирмы и домашние хозяйства различных регионов одной страны имеют доступ к одинаковым технологиям и характеризуются практически одинаковыми предпочтениями. Более того, регионы управляются общим центральным правительством и поэтому имеют единую институциональную инфраструктуру и законодательную систему. Относительная однородность означает, что экономика регионов характеризуется, скорее всего, одним и тем же устойчивым состоянием. Именно поэтому безусловная конвергенция чаще возникает между регионами страны, а не между странами.

Можно возразить, что гипотеза о наличии конвергенции не будет правомерной, поскольку ресурсы обладают большей мобильностью между регионами страны, чем между странами. Законодательные, культурные, лингвистические и институциональные барьеры, препятствующие перемещению факторов производства, оказываются ниже для регионов внутри страны в сравнении с межстрановыми барьерами. Следовательно, предпосылка о закрытой экономике (стандартная предпосылка в неоклассической модели роста), вероятнее всего, при рассмотрении региональных данных будет нарушаться. Однако, как мы выяснили в гл. 3, динамические характеристики экономики, открытой для движения капитала, могут совпадать с характеристиками закрытой экономики, если часть капитала (в который включается и человеческий капитал) не является мобильной или не может быть использована в качестве обеспечения в межрегиональных и международных кредитных операциях. Скорость конвергенции при наличии мобильности капитала возрастает, но для разумных значений доли мобильного капитала она остается практически без изменений. Другой результат заключается в том, что для технологий без убывающей отдачи капитала (т. е. для некоторых версий модели AK) скорость конвергенции равна нулю вне зависимости от того, открытая экономика или закрытая.

В гл. 9 мы также установили, что включение процессов миграции в неоклассическую модель ускоряет конвергенцию. Изменение вновь касается количественной оценки скорости конвергенции. Поэтому можно сделать вывод о том, что, несмотря на то что регионы внутри одной страны относительно открыты для потоков капитала и миграции, эмпирический анализ в рамках неоклассической модели роста по-прежнему может быть проведен.

11.1. Две концепции конвергенции

Две концепции конвергенции возникают в рамках анализа экономического роста стран и регионов. Согласно одной точке зрения (Barro, 1984, гл. 12; Baumol, 1986; DeLong, 1988; Barro, 1991a; Barro and Sala-i-Martin, 1991, 1992a, 1992b), конвергенция возникает, если темпы роста бедных стран выше темпов роста богатых стран, т. е. можно говорить о тенденции, согласно которой бедные страны догоняют богатые страны по уровню среднедушевого дохода или выпуска. Это условие соответствует используемому нами понятию β-конвергенции[1]. Вторая концепция (Easterlin, 1960a; Borts and Stein, 1964, гл. 2; Streissler, 1979; Barro, 1984, гл. 12; Baumol, 1986; Dowrick and Nguyen, 1989; Barro and Sala-i-Martin, 1991, 1992a, 1992b) предполагает анализ пространственной дисперсии. В данном варианте конвергенция возникает, если дисперсия, оцененная, например, как стандартное отклонение логарифма дохода на душу населения или выпуска по группе стран или регионов, имеет тенденцию со временем уменьшаться. Данный процесс мы называем σ-конвергенция. Конвергенция первого типа (бедные страны растут быстрее богатых) обычно приводит к конвергенции второго типа (уменьшение дисперсии среднедушевого дохода или выпуска), однако этому процессу препятствуют другие процессы, вызывающие рост дисперсии.

Чтобы более точно определить связь между двумя концепциями, проанализируем одно из уравнений темпа прироста, рассматриваемого в рамках модели неоклассического роста в гл. 2. Уравнение (2.35) описывает темп прироста среднедушевого дохода экономики i по сравнению с первоначальным уровнем дохода между двумя моментами времени. Воспользуемся уравнением (2.35), для того чтобы выделить периоды времени, принятые за единицу (например, год), также добавим в данное уравнение случайное возмущение:

$$\log \frac{y_{it}}{y_{i,t-1}} = a_{it} - (1 - e^{-\beta}) \cdot \log y_{i,t-1} + u_{it}, \tag{11.1}$$

где индекс t означает год, индекс i — страну или регион. Исходя из теоретических соображений, свободный член a_{it} равен

$$x_i + (1 - e^{-\beta}) \cdot [\log(\hat{y}_i^*) + x_i \cdot (t-1)],$$

[1] Этот процесс иногда описывается как «регрессия к средним величинам».

где $\hat{y}_i^*$ – значение $\hat{y}_i$ в устойчивом состоянии, а x_i - уровень технологического прогресса. Предполагается, что случайное возмущение u_{it} характеризуется нулевой средней, дисперсией σ_{ut}^2 и не зависит от $\log(y_{i,t-1})$, u_{jt} для $j \neq i$, а также лаговых ошибок.

Мы можем считать, что случайное возмущение отражает неожиданные изменения производственных условий или предпочтений. Предположим вначале, что коэффициент a_{it} одинаков для всех экономик, т. е. $a_{it} = a_t$. Это означает, что в устойчивом состоянии величина $\hat{y}_i^*$ и уровень технологического прогресса x_i одинаковы для всех экономик. Данное предположение является более обоснованным не для международных, а для региональных данных; очевидно, что если речь идет о технологии и предпочтениях, то разница между регионами одной страны не столь велика, по сравнению с разницей между странами.

Если свободный член a_{it} везде одинаков и $\beta > 0$, то из выражения (11.1) следует, что бедные страны будут расти быстрее богатых. В неоклассических моделях роста, изложенных в гл. 1 и 2, делался данный прогноз. В AK-моделях, рассмотренных в гл. 4, наоборот, прогнозировалось, что β равна 0, а следовательно, конвергенция данного вида отсутствовала. К тем же выводам мы пришли при анализе моделей эндогенного роста (гл. 6 и 7), в которых предполагалась линейность производственной функции[1].

Поскольку коэффициент при $\log(y_{i,t-1})$ в выражении (1.11) меньше 1, то можно говорить о том, что конвергенция не позволяет избавиться от автокорреляции в $\log(y_{i,t})$. Пусть, наоборот, в отсутствие случайных шоков переход к устойчивому состоянию будет последовательным и не будет содержать никаких колебаний и отклонений. Таким образом, для двух экономик справедливо следующее: та экономика, которая в начальный момент времени находится на более низкой ступени развития, так и останется позади лидера в любой последующий момент времени.

Пусть σ_t^2 -- это пространственная дисперсия $\log(y_{it})$ в момент времени t. Из выражения (11.1) и из предпосылок относительно u_{it} следует, что σ_t^2 изменяется во времени согласно дифференциальному уравнению первого порядка[2]:

$$\sigma_t^2 = e^{-2\beta} \cdot \sigma_{t-1}^2 + \sigma_{ut}^2, \tag{11.2}$$

[1] В гл. 4 мы тем не менее показали, что β-конвергенция возникает, когда технология пусть и в долгосрочном периоде, но характеризуется убывающей отдачей по капиталу для конечного значения K.

[2] Чтобы получить уравнение (11.2), прибавим $\log(y_{i,t-1})$ к обеим частям выражения (11.1), рассчитаем дисперсию и воспользуемся тем, что ковариация между u_{it} и $\log(y_{i,t-1})$ равна 0.

где мы предполагаем, что пространственная выборка достаточно велика, так что выборочная дисперсия $\log(y_{it})$ соответствует дисперсии генеральной совокупности.

Если дисперсия возмущений σ_{ut}^2 постоянна во времени ($\sigma_{ut}^2 = \sigma_u^2$ для всех t), то решение дифференциального уравнения первого порядка выглядит следующим образом:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma_u^2}{1 - e^{-2\beta}} + \left(\sigma_0^2 - \frac{\sigma_u^2}{1 - e^{-2\beta}}\right) \cdot e^{-2\beta t}, \tag{11.3}$$

где σ_0^2 — это дисперсия $\log(y_{i0})$. (Можно легко проверить, что решение (11.3) удовлетворяет уравнению (11.2).) Из выражения (11.3) следует, что σ_t^2 монотонно стремится к значению, характеризующему устойчивое состояние и равному

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_u^2}{1 - e^{-2\beta}},$$

которое растет с увеличением σ_u^2, но уменьшается с ростом коэффициента конвергенции β. Со временем значение σ_t^2 растет (или падает) в зависимости от того, выше (или ниже) в начальный момент времени σ_0^2 значения в устойчивом состоянии σ^2. Таким образом, положительный коэффициент β (β-конвергенция) не означает обязательное падение σ_t^2 (σ-конвергенция). Другими словами, β-конвергенция есть необходимое, но не достаточное условие наличия σ-конвергенции.

На рис. 11.1 изображен график σ_t^2 во времени, где σ_0^2 ниже и выше σ^2. Обоснование значения параметра конвергенции $\beta = 0{,}02$ мы приведем в следующем разделе. При данном значении β предполагается, что пространственная дисперсия со временем будет падать или расти медленными темпами. Так, если в начальный момент времени σ_0^2 сильно отличается от значения в устойчивом состоянии σ^2, то потребуется примерно 100 лет, чтобы σ_t^2 приблизилось к σ^2.

Пространственная дисперсия $\log(y_{i,t})$ чувствительна к возможным экономическим шокам, которые оказывают общее влияние на группы стран и регионов. Наличие этого вида возмущений нарушает условие, согласно которому u_{it} в выражении (11.1) не зависит от u_{jt} для $j \neq i$. Очевидно, что эти шоки, скорее всего, будут либо положительно, либо отрицательно влиять на регионы с высоким или низким доходом (т. е. очевидно, что эти шоки коррелируют с объясняющими переменными), поэтому исключение этих шоков при регрессионном анализе приведет к смещению оценок β.

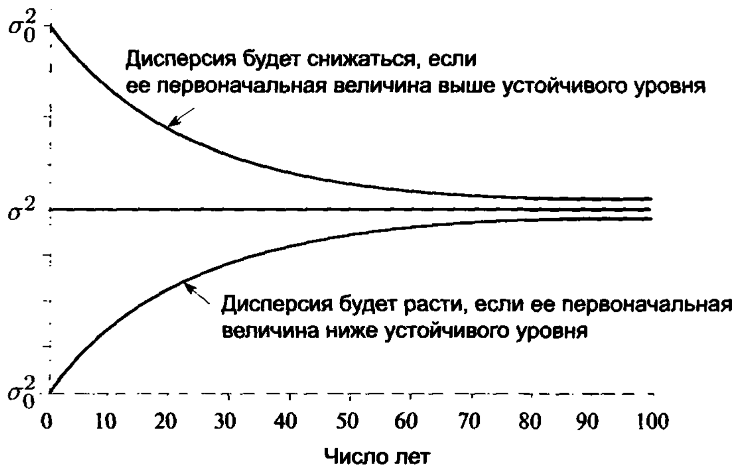


Рис. 11.1. Теоретическое поведение дисперсии. На рисунке изображен график дисперсии среднедушевого выпуска, оцененной как дисперсия логарифма среднедушевого дохода для экономик. Хотя и предполагается наличие β-конвергенции, дисперсия может падать, расти или оставаться неизменной в зависимости от того, находится она в начальный момент времени выше, ниже или совпадает с величиной σ^2, характеризующей устойчивое состояние. В данном случае при построении графика предполагалось $\beta = 0{,}02$ в год

В качестве примеров можно привести шоки, которые вызывают изменения условий торговли сырьевыми товарами. Для экономики США в качестве примера можно привести резкое падение относительных цен на сельскохозяйственную продукцию в 1920-е гг. Это колебание оказало отрицательное влияние на доходы сельскохозяйственных регионов по сравнению с доходами в промышленных регионах. Мы также можем вспомнить два скачка цены на нефть в 1970-е гг. и снижение цены в 1980-е. Эти шоки имели воздействие на относительные доходы в нефтедобывающих регионах в сравнении с другими. Еще одним примером в истории США является Гражданская война, последствия которой оказали более негативное влияние на доходы южных штатов по сравнению с доходами северных штатов.

Пусть формально S_t - это случайная переменная, отвечающая на колебания в период t в экономике в целом. Например, S_t может отражать относительную цену на нефть, складывающуюся на мировом рынке. Тогда выражение (11.1) может быть переписано следующим образом:

$$\log \frac{y_{it}}{y_{i,t-1}} = a_{it} - (1 - e^{-\beta}) \cdot \log y_{i,t-1} + \varphi_i S_i + u_{it}, \tag{11.4}$$

где φ_i это оценка воздействия общего колебания на темп прироста в регионе i. Поскольку положительное значение S_t означает увеличение относительной стоимости нефти, то φ_i будет положительным для регионов, в которых добываются большие объемы нефти[1]. Коэффициент φ_i, вероятно, будет отрицательным для стран, в которых производится такая продукция, как автомобили, где нефть используется в качестве фактора производства. Мы считаем, что φ_i в пространственной выборке характеризуется средним значением $\bar{\varphi}$ и вариацией σ_φ^2.

Если $\log(y_{i,t-1})$ и φ_i не коррелируют, то оценка β в выражении (11.4) будет устойчивой, когда в уравнении регрессии опускается параметр, отвечающий за шоки. Однако если $\log(y_{i,t-1})$ и φ_i имеют положительную корреляцию, коэффициент при $\log(y_{i,t-1})$, полученный с помощью МНК, в выражении (11.4) будет смещенным вверх или вниз в зависимости от того, положительно или отрицательно S_t. Например, если штаты, в которых добывается нефть, характеризуются относительно более высоким среднедушевым доходом, то увеличение цен на нефть принесет выгоду относительно более богатым штатам. Следовательно, оценка темпов прироста, по сравнению с первоначальным доходом, с помощью МНК приведет к заниженным оценкам коэффициента конвергенции. При проведении эмпирического анализа, результаты которого изложены в последующих разделах, для получения состоятельных оценок коэффициента конвергенции мы оставляем без изменений параметр S_t.

Из выражения (11.4) следует, что динамика дисперсии логарифма среднедушевого дохода записывается следующим образом:

$$\sigma_t^2 = e^{-2\beta} \cdot \sigma_{t-1}^2 + \sigma_{ut}^2 + S_t^2 \cdot \sigma_\varphi^2 + 2S_t \cdot e^{-\beta} \cdot \mathrm{cov}[\log y_{i,t-1}, \varphi_i], \qquad (11.5)$$

где дисперсии и ковариации определяются исходя из текущего и предыдущих совокупных шоков S_t, S_{t-1}, … . Если $\mathrm{cov}[\log(y_{i,t-1}), \varphi_i]$ равна 0, т. е. если шок не коррелирует с первоначальным доходом, то выражение (11.5) совпадает с выражением (11.2) с той лишь разницей, что наличие S_t приведет к смещению σ^2 во времени. Относительно большое

[1] Точнее, данный шок будет оказывать положительное влияние на реальный доход, получаемый в стране или регионе, где добываются большие объемы нефти. Этот доход может принадлежать «иностранным гражданам» и являться частью чистых факторных платежей, получаемых «из-за границы», что проявляется в разнице между ВНП и ВВП. Так, значительная доля капитальных ресурсов штата Вайоминг принадлежит резидентам других штатов. Положительный нефтяной шок увеличивает номинальный ВВП Вайоминга (и повышает реальную величину ВВП, рассчитанную с учетом национального индекса цен), но не обязательно приведет к увеличению ВНП или личного дохода. Для США это отличие важно для нескольких отраслей, в особенности при анализе нефтедобывающей отрасли.

значение величины S_t в один из моментов времени ведет к росту σ_t^2 выше значения σ^2, характеризующего устойчивое состояние и соответствующего стандартной величине S_t. Следовательно, в отсутствие новых шоков σ_t^2 будет постепенно возвращаться к значению σ^2, как и показано на рис. 11.1.

11.2. Конвергенция по штатам США

11.2.1. β-конвергенция

Теперь воспользуемся данными о доходе на душу населения по штатам США, чтобы оценить скорость конвергенции β[1]. (Описание данных и их источники представлены в Приложении, разд. 11.12.) Предположим пока, что мы имеем наблюдения только для двух периодов времени: 0 и T. Тогда из выражения (2.35) следует, что средний темп прироста дохода на душу населения для экономики i за период времени с 0 по T задается как

$$\frac{1}{T} \cdot \log \frac{y_{iT}}{y_{i0}} = x - \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \cdot \log y_{i0} + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \cdot \log \tilde{y}_i^* + u_{i0,T}, \tag{11.6}$$

где $u_{i0,T}$ отражает влияние вектора ошибок, составленного из u_{it} за период времени между 0 и T; $\hat{y}_i^*$ -- уровень дохода в равновесном состоянии; x -- уровень технологического прогресса, который предполагается одинаковым для всех экономик.

Коэффициентом при первоначальном уровне дохода в уравнении (11.6) является $(1 - e^{-\beta T})/T$, при заданном значении β данное выражение уменьшается с ростом интервала времени T. Таким образом, если мы будем оценивать линейное соотношение между темпами

[1] В работе Barro and Sala-i-Martin (1992a) также использовались данные о валовой продукции штата (gross state product - GSP), предоставленные Бюро экономического анализа. Валовой продукт штата аналогичен ВВП, так как в этот показатель входит продукция, которая была произведена внутри штата. Для сравнения в показателях дохода (таких как ВНД) продукция приписывается тому штату, в котором живет собственник фактора производства. Это различие значимо, если экономика является открытой и если у людей, проживающих в одном штате, есть капитальные вложения в других штатах, или же если между штатами существует маятниковая миграция (когда люди живут в одном штате, а работают в другом). В работе Barro and Sala-i-Martin (1992a) показано, что в действительности разница не оказывается столь значительной; оценки скорости конвергенции для валового продукта штата совпадают с оценками для личного дохода. Поскольку данные по валовому продукту штата доступны только с 1963 г., то в данной главе мы сосредоточим внимание на результатах, полученных на основе данных о доходе.

прироста дохода и логарифмом первоначального дохода, то ожидается, что коэффициент будет тем меньше, чем дольше временной интервал, за которым находится средний темп прироста. Причиной этого является то, что темп прироста убывает с ростом дохода (если $y_{i0} < \hat{y}_i^*$). Следовательно, если мы будем рассчитывать темп прироста за более продолжительный период времени, то расчетное значение будет включать в себя большее количество будущих темпов прироста с первоначально более высокими темпами прироста. Таким образом, с ростом интервала влияние первоначального значения на средний темп прироста убывает. Коэффициент $(1-e^{-\beta T})/T$ равен 0 при T, стремящемся к бесконечности, и равен β при T, стремящемся к 0.

Отметим, что в выражении (11.6) $[(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(\hat{y}_i^*)$ выступает в качестве объясняющей переменной. Таким образом, темп прироста экономики i зависит от первоначального уровня дохода y_{i0}, а также от уровня дохода в устойчивом состоянии. Поэтому мы используем концепцию условной, а не безусловной конвергенции: темп прироста экономики зависит отрицательно от своего первоначального уровня дохода после того, как мы определим устойчивое состояние.

Удобство использования региональных данных объясняется рядом факторов: предположим, что вместо многопараметрического уравнения (11.6) мы бы оценивали однопараметрическую регрессию:

$$\frac{1}{T} \cdot \log \frac{y_{iT}}{y_{i0}} = a - \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \cdot \log y_{i0} + w_{i0,T}. \tag{11.7}$$

Обратите внимание, что в выражении (11.7) $[(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(\hat{y}_i^*)$ больше не является объясняющей переменной. Если коэффициент, стоящий перед параметром первоначального уровня дохода в выражении (11.7), окажется отрицательным, то это будет означать, что бедные экономики растут быстрее богатых, т. е. возникает «безусловная конвергенция». Именно поэтому для проверки гипотезы о наличии безусловной конвергенции во многих научных исследованиях анализируется регрессия наподобие уравнения (11.7). Возникает вопрос, а является ли неудача при попытке найти отрицательный коэффициент достаточным основанием для того, чтобы отрицать неоклассическую модель роста. Напомним, что, согласно неоклассической модели, существуют многопараметрические соотношения, такие как (11.6). Предположим, что вместо выражения (11.6) мы оцениваем соотношение (11.7). Если мы будем анализировать данные, в которых различные экономики характеризуются различными устойчивыми состояниями, т. е. $\hat{y}_i^* \neq \hat{y}_j^*$ для всех i и j, то оценки однопараметрического уравнения регрессии (11.7) будут неверно определены, а исключенный в (11.7) параметр будет входить в ошибку:

$$w_{i0,T} = u_{i0,T} + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \cdot \log(\hat{y}_i^*).$$

Если устойчивый уровень дохода $\hat{y}_i^*$ коррелирует с объясняющей переменной y_{i0}, то ошибка будет коррелировать с переменной, стоящей справа, а однопараметрическая регрессия (11.7) даст смещенные оценки β. В частности, если более богатые на данный момент экономики стремятся к более высокому устойчивому уровню дохода (т. е. если $\hat{y}_i^*$ и y_{i0} положительно коррелированны), то оценка β в выражении (11.7) будет смещена к нулю. Другими словами, исследователь может не найти связь между ростом и уровнем первоначального дохода, даже если присутствует условная конвергенция. При этих условиях, чтобы получить состоятельную оценку β, необходимо измерить показатели $\hat{y}_i^*$ и включить их в регрессию.

Предположим, что мы имеем выборку, в которой разные экономики стремятся к разным устойчивым уровням, однако не существует корреляции между начальным уровнем дохода и уровнем дохода в устойчивом состоянии. Хотя однопараметрическая регрессия по-прежнему некорректно определена, ошибка (которая включает недостающую переменную $\hat{y}_i^*$) не коррелирует с объясняющей переменной. Следовательно, стандартное оценивание уравнения (11.7) может дать состоятельную оценку β. В конце концов, если мы будем анализировать данные, в которых все экономики характеризуются одним и тем же устойчивым уровнем, т. е. $\hat{y}_i^* = \hat{y}_j^*$ для всех i и j, то $[(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(\hat{y}_i^*)$ будет входить в свободный член, а стандартная оценка уравнения (11.7) вновь позволит получить состоятельную оценку β.

Подводя итог, следует сказать, что существует два способа оценить скорость конвергенции β. Первый заключается в использовании общих выборок (т. е. данных, для которых нельзя с уверенностью сказать, что первоначальный уровень дохода не коррелирует с уровнем дохода в устойчивом состоянии) и в дальнейшем поиске оценок уровня дохода в устойчивом состоянии. Второй заключается в использовании выборок, в которых различные экономики характеризуются конвергенцией к одному и тому же уровню или хотя бы значения в устойчивом состоянии не связаны с первоначальным уровнем дохода. Именно в этом случае региональные данные играют важную роль. И хотя между регионами существуют различия в технологии, предпочтениях, институциональной инфраструктуре, эта разница, скорее всего, окажется меньше, чем между странами. Фирмы и домашние хозяйства внутри одной страны имеют доступ к одним технологиям, а также обладают схожими предпочтениями. Более того, регионы управляются одним центральным правительством и поэтому характеризуются одинаковой институциональной инфраструктурой и законодательной системой. Эта относительная однородность говорит о том, что безусловная конвергенция будет чаще проявляться между регионами внутри одной страны, а не между странами.

В табл. 11.1 представлены результаты оценки уравнения (11.7) с помощью нелинейного МНК по 47 или в зависимости от начального момента времени 48 штатам и территориям США для различных периодов. Строки табл. 11.1 соответствуют различным периодам времени. Например, в первой строке представлен анализ данных за 120 лет, т. е. за период с 1880 по 2000 г. В столбце (1) представлены результаты оценки уравнения только с одной объясняющей переменной: логарифмом дохода на душу населения в начальный момент времени. В столбце (2) представлены результаты анализа с добавлением четырех фиктивных переменных, обозначающих четыре главных исследуемых региона: Северо-Восток (Northeast), Юг (South), Средний Запад (Midwest) и Запад (West). В столбце (3) включены переменные, обозначающие долю отраслей; предполагается, что эти переменные будут отражать шоки, о которых мы говорили в предыдущем разделе. Мы уже объяснили, что включение этих вспомогательных переменных поможет получить точные оценки β.

Для каждой группы указаны оценки β, стандартная ошибка этих оценок (в круглых скобках), R^2 и стандартная ошибка регрессии (в квадратных скобках). Все уравнения оценивались с учетом наличия свободных членов, которые не указаны в табл. 11.1.

Точечная оценка β для выборки за долгий период времени с 1880 по 2000 г. составляет 0,0172 ($s.e.$[1] = 0,0024)[2]. Высокое значение R^2, равное 0,92, отмечено на рис. 11.2, где изображен график соотношения среднего темпа прироста дохода на душу населения за период с 1880 по 2000 г. к логарифму дохода в 1880 г.

В столбце (2) первой строки даны оценки скорости конвергенции в случае, когда задействованы четыре отвечающие за регионы переменные. Оценка коэффициента β равна 0,0160 (0,0034). Сходство между этой оценкой и предыдущей дает основание сделать вывод о том, что

[1] $s.e.$ = standart error.

[2] В регрессии анализируется 47 штатов и территорий. Данные по Оклахоме недоступны для 1880 г.

Таблица 11.1

Оценка уравнения регрессии для личного дохода в штатах США

	(1) Базовое уравнение		(2) Уравнение с региональными фиктивными переменными		(3) Уравнение со структурными переменными и региональными фиктивными переменными	
Периоды	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$
1880-2000	0,0172	0,92	0,0160	0,95	–	–
	(0,0024)	[0,0012]	(0,0034)	[0,0010]		
1880-1900	0,0101	0,36	0,0224	0,62	0,0268	0,65
	(0,0022)	[0,0068]	(0,0043)	[0,0054]	(0,0051)	[0,0053]
1900-1920	0,0218	0,62	0,0209	0,67	0,0270	0,71
	(0,0031)	[0,0065]	(0,0065)	[0,0062]	(0,0077)	[0,0060]
1920-1930	−0,0149	0,14	−0,0128	0,43	0,0209	0,64
	(0,0051)	[0,0132]	(0,0078)	[0,0111]	(0,0119)	[0,0089]
1930-1940	0,0129	0,28	0,0072	0,34	0,0147	0,37
	(0,0033)	[0,0079]	(0,0052)	[0,0078]	(0,0083)	[0,0078]
1940-1950	0,0502	0,73	0,0512	0,88	0,0304	0,91
	(0,0058)	[0,0087]	(0,0062)	[0,0059]	(0,0065)	[0,0052]
1950-1960	0,0193	0,40	0,0191	0,52	0,0305	0,74
	(0,0039)	[0,0051]	(0,0056)	[0,0047]	(0,0053)	[0,0035]
1960-1970	0,0286	0,61	0,0181	0,73	0,0196	0,74
	(0,0039)	[0,0040]	(0,0046)	[0,0034]	(0,0061)	[0,0035]
1970-1980	0,0186	0,27	0,0079	0,44	0,0057	0,46
	(0,0049)	[0,0044]	(0,0055)	[0,0040]	(0,0068)	[0,0040]

Окончание табл. 11.1

	(1)		(2)		(3)	
	Базовое уравнение		Уравнение с региональными фиктивными переменными		Уравнение со структурными переменными и региональными фиктивными переменными	
Периоды	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$
1980 1990	0,0036	0,01	0,0095	0,57	0,0029	0,69
	(0,0085)	[0,0077]	(0,0074)	[0,0052]	(0,0070)	[0,0045]
1990-2000	0,0016	0,01	−0,0005	0,07	0,0029	0,14
	(0,0035)	[0,0035]	(0,0045)	[0,0035]	(0,0050)	[0,0034]
Совместная оценка	0,0150		0,0164	—	0,0212	—
за 9 периодов	(0,0015)		(0,0021)	—	(0,0023)	—

Примечание. Регрессионный анализ проводился с помощью нелинейного МНК и заключался в оценивании уравнений следующего вида:

$$\frac{1}{T}\cdot\log\frac{y_{it}}{y_{i,t-T}} = a - [\log(y_{i,t-T})]\cdot\frac{1-e^{-\beta T}}{T} + \text{прочие параметры},$$

где $y_{i,t-T}$ это доход на душу населения в штате i в начале периода, разделенный на ИПЦ, T - это длина временного интервала, а прочие параметры это региональные фиктивные переменные и структурные величины (см. описание в тексте главы). В Приложении (разд. 11.12) представлен анализ данных по штатам США. Выборки, начинающиеся с 1880 г., включают 47 наблюдений. В других выборках представлено по 48 наблюдений. В каждом столбце указаны оценки β, стандартная ошибка этих оценок (в круглых скобках), R^2 и стандартная ошибка регрессии (в квадратных скобках). Оценки константы, региональных фиктивных переменных и структурных параметров не приводятся. Статистика соотношения правдоподобия соответствует тесту гипотезы о равенстве коэффициентов при логарифме первоначального дохода за 9 периодов с 1900 по 2000 г. Значение p рассчитывается на основе χ^2-распределения с восемью степенями свободы.

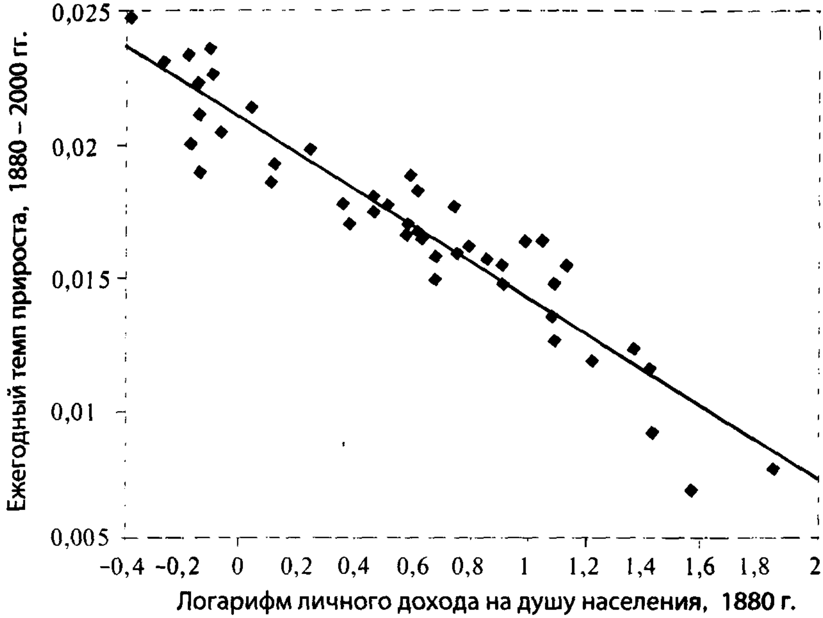


Рис. 11.2. Конвергенция личного дохода по штатам США: личный доход в 1880 г. и рост дохода за период с 1880 по 2000 г. Средний темп прироста дохода на душу населения в штате за период с 1880 по 2000 г., откладываемый вдоль вертикальной оси, отрицательно связан с логарифмом дохода на душу населения 1880 г., откладываемым по горизонтальной оси. Таким образом, штаты США характеризуются безусловной β-конвергенцией по личному доходу

скорость конвергенции в исследуемых регионах не столь значительно отличается от скорости конвергенции среднего по штатам дохода в каждом из регионов. Мы можем проверить данный результат, рассчитав средний доход для каждого из четырех регионов. Темп прироста среднего по региону дохода за период с 1880 по 2000 г. по отношению к логарифму среднего в регионе дохода 1880-го г. изображен на рис. 11.3. Очевидно, что зависимость будет отрицательной (коэффициент корреляции составляет −0,97). Оценка скорости конвергенции, исходя из данного соотношения, будет составлять 2,1% в год, что практически совпадает со скоростью конвергенции при расчете внутрирегиональных темпов прироста, указанных в столбце (2).

В следующих десяти строках данные выборки разбиты на периоды. Первые два периода длятся по двадцать лет (с 1880 по 1900 и с 1900

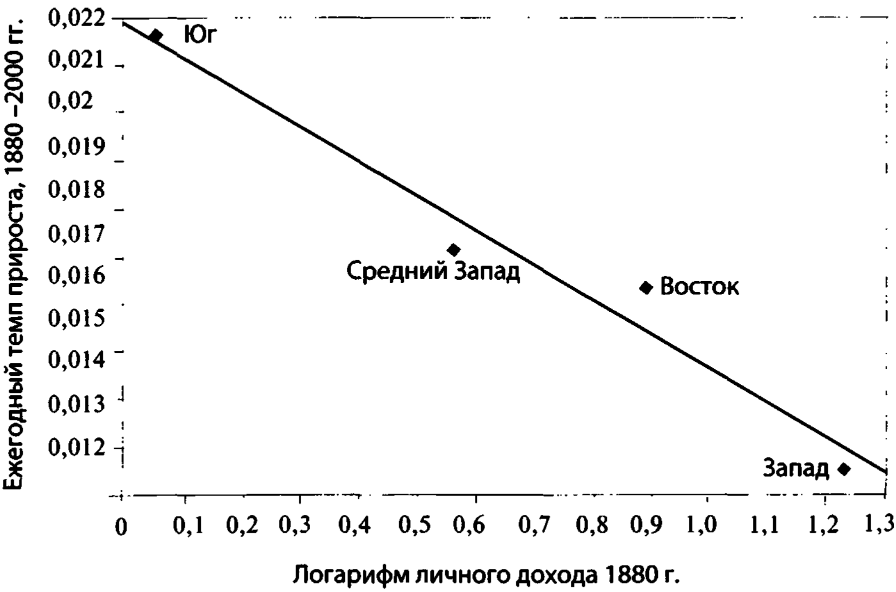


Рис. 11.3. Конвергенция личного дохода по штатам США: доход в 1880 г. и рост дохода за период с 1880 по 2000 г. Отрицательная зависимость между ростом дохода и первоначальным уровнем дохода, показанная на рис. 11.2, справедлива и для средних значений по четырем регионам, что показано на рис. 11.3

по 1920 г.[1]), поскольку данные по доходам за период с 1890 по 1910 г. недоступны. Оставшиеся 8 периодов длятся по 10 лет.

Оценка коэффициента β существенно больше нуля (что означает β-конвергенцию) для семи из десяти периодов. Коэффициент имеет неправильный знак ($\beta < 0$) только для периода с 1920 по 1930 г., в это время резко падала относительная цена сельскохозяйственной продукции. Подходящим объяснением этому может служить то, что сельскохозяйственные штаты чаще всего являются бедными, а также то, что они больше всего пострадали от падения цен на сельскохозяйственную продукцию. Оценка коэффициента оказывается незначимой для двух последних периодов: 1980-е и 1990-е гг. Если мы предположим, что коэффициенты β одинаковы для всех периодов, то общая оценка этого коэффициента в базовом уравнении составит 0,0150 (0,0015).

В столбце (2) табл. 11.1 добавлены региональные фиктивные переменные, при этом коэффициенты при этих переменных могут из-

[1])Опечатка в первоисточнике, см. табл. 11.1.

меняться от периода к периоду. Эти региональные переменные отражают эффекты, которые являются общими для всех штатов в одном регионе в данный период. Оценка β для 1920-х гг. по-прежнему имеет неверный знак, так же как и коэффициент для 1990-х, хотя для обеих оценок ошибка является значимой. Следовательно, в 1920-х гг., даже внутри регионов, бедные штаты имеют тенденцию расти медленнее, чем богатые. Совместная оценка для девяти периодов с 1900 по 2000 г. теперь составляет 0,0164 (0,0021) и практически совпадает с оценкой для базовой регрессии.

Совокупные шоки, которые влияют на каждую группу штатов в отдельности, такие как сдвиги относительной цены сельскохозяйственной продукции или нефти, должны объяснить неустойчивость оценок коэффициентов. Основываясь на работе Barro and Sala-i-Martin (1991, 1992a, 1992b), в столбце (3) табл. 11.1 мы добавили дополнительные переменные в уравнения регрессии с тем, чтобы совокупные шоки оставались без изменений. Переменная, обозначенная через S_{it}(для удобства), рассчитывается как

$$S_{it} = \sum_{j=1}^{9} \omega_{ij,t-T} \cdot \frac{\log(y_{jt}/y_{j,t-T})}{T}, \tag{11.8}$$

где $\omega_{ij,t-T}$ — это вес j-го сектора в личном доходе i-го штата в момент времени $t-T$, а y_{jt} — это средний национальный личный доход на одного работника в секторе j в момент времени t. Девять секторов — это сельское хозяйство, горнодобывающая отрасль, строительство, обрабатывающая промышленность, торговля, финансы и недвижимость, транспорт, услуги и государственный сектор. Мы рассматриваем S_{it} в качестве приблизительной оценки эффектов, отраженных в $\varphi_i S_t$ в уравнении (11.4).

Структурная переменная показывает, с каким темпом будет расти экономика штата, если каждый из секторов экономики будет расти со средней для государства скоростью. Например, предположим, что экономика i специализируется на производстве автомобилей и что совокупный темп прироста в автомобильном секторе равен нулю за период между $t-T$ и t. Низкое значение S_{it} для этого региона будет означать, что экономика штата не будет расти быстрыми темпами, поскольку автомобильная промышленность пострадала от шока.

Отметим, что из уравнения (11.8) следует, что S_{it} зависит одновременно от темпов прироста средних для государства величин и от лаговых значений секторных долей в штате i. По этой причине эту переменную можно рассматривать в качестве экзогенной по отношению к текущему росту экономики штата i.

Из-за нехватки данных мы можем включить структурную переменную только для периодов после 1929 г. Для периодов до 1929 г. мы можем получить приблизительные оценки S_{it}, используя данные о доли сельского хозяйства в совокупном доходе штата.

В столбце (3) представлены результаты анализа уравнений регрессии роста с учетом не только региональных фиктивных переменных, но и структурных параметров. (Предполагается, что коэффициенты при региональных и структурных переменных могут изменяться от периода к периоду.) Одно из отличий от предыдущих результатов заключается в том, что оценка коэффициента β для 1920 гг. становится положительной, близкой к 0,02. Коэффициенты для 1980-х и 1990-х гг. также положительны, но их значение продолжает оставаться небольшим. Совместная оценка β для девяти периодов с 1900 по 2000 г. составляет 0,0212 (0,0023).

Главный итог заключается в том, что в среднем по штатам скорость конвергенции составляет примерно 2% в год. Средние значения для четырех исследуемых регионов также характеризуются скоростью конвергенции, совпадающей со скоростью конвергенции штатов внутри регионов. Если считать постоянными величины структурных шоков, то мы не сможем отклонить гипотезу о том, что скорость конвергенции является устойчивой во времени, несмотря на то что оценки за последние два десятилетия незначительно отличаются от нуля.

11.2.2. Ошибка измерения

Существование ошибки измерения дохода во времени чаще всего приводит к смещению вверх оценки β, т. е. нивелирование ошибки измерения со временем может привести к возникновению конвергенции[1)]. Одна из причин возникновения ошибки измерения заключается в том, что номинальный доход каждого штата рассчитывается с учетом индекса цен в государстве в целом, поскольку точных индексов цен на уровне штатов не существует.

Одним из способов решения проблемы ошибки измерения является включение в регрессию в качестве инструментальных переменных

[1)] Этот же вывод справедлив и для краткосрочных деловых колебаний. Мы можем построить модель, в которой временные колебания выпуска выделяются в качестве самостоятельного параметра, отдельно от параметров колебаний в переходной динамике, возникающей в моделях роста.

(instrumental variables -- IV) лаговых значений дохода. Если ошибки измерения соответствуют временным периодам (и автокорреляция ошибок отсутствует), то лаговые значения логарифма дохода будут подходящими инструментами для оценки логарифма дохода на начало каждого периода. Если мы повторно оценим регрессию, результаты которой представлены в первом столбце табл. 11.1, с учетом лагового значения логарифма дохода предыдущего периода в качестве инструментального параметра, то мы получим общую оценку β, равную 0,0176 (0,0019). В данном панельном анализе использовались данные за девять периодов начиная с 1900 г., поскольку за период с 1880 по 1900 г. наблюдения отсутствуют. Оценка параметра β с помощью МНК за те же периоды составляет 0,0165 (0,0018). Следовательно, использование инструментальных параметров приводит к незначительным изменениям оценки β, из чего следует, что ошибка измерения не может объяснять статистически значимое отрицательное соотношение между ростом и начальным уровнем дохода.

Если оценивать периоды отдельно, то мы вновь получаем лишь незначительную разницу в оценках, получаемых с помощью использования инструментальных переменных и МНК. Наибольшее изменение наблюдается за период с 1950 по 1960 г., когда оценка, получаемая с помощью IV, составляет 0,0139 (0,0040), а оценка, получаемая с помощью МНК, равна 0,0193 (0,0039).

Результаты для регрессий, оценки которых даны в столбцах 2 и 3 табл. 11.1, аналогичны. Следовательно, ошибка измерения, скорее всего, не будет ключевым фактором, влияющим на результаты.

11.2.3. σ-конвергенция

На рис. 11.4 изображено стандартное отклонение логарифма дохода на душу населения за вычетом трансфертов для 47 или 48 штатов и территорий США, полученное при пространственном анализе данных за период с 1880 по 2000 г. Дисперсия сократилась с 0,54 в 1880 г. до 0,33 в 1920 г., но затем возросла до 0,40 в 1930 г. Этот рост отражает шок, оказавший отрицательное влияние на сельское хозяйство в 1920-е гг.: в 1920 г. штаты, специализирующиеся на сельском хозяйстве, были беднее относительно штатов с развитой промышленностью, а их доход продолжал сокращаться из-за падения цен на сельскохозяйственную продукцию относительно цен промышленных товаров.

После достижения относительного максимума в 1932 г. дисперсия снизилась до 0,36 к 1940 г., затем до 0,24 к 1950 г., до 0,20 к 1960 г.

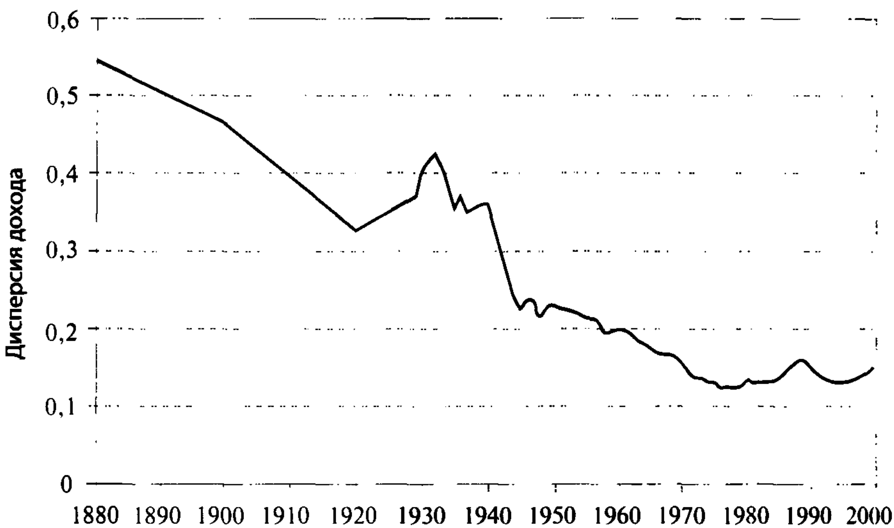


Рис. 11.4. Дисперсия личного дохода в штатах США за период с 1880 по 2000 г. Показано стандартное отклонение логарифма дохода на душу населения за вычетом трансфертов для 47 или 48 штатов и территорий США, полученное при пространственном анализе данных за период с 1880 по 2000 г. Эта оценка дисперсии падала с 1880 по 1920 г., росла в 1920-е гг., вновь падала, начиная с 1930-х гг. до середины 1970-х, затем росла до 1988 г., опять уменьшалась до 1992 г., и потом практически не менялась

и до 0,16 к 1970 г. Продолжительное снижение остановилось в середине 1970 гг., при этом минимум составил 0,14 в 1976 г. После этого σ_t возросло до максимальной оценки 0,16 в 1988 г. Дисперсия сократилась до 0,14 в начале 1990-х и затем оставалась практически на одном уровне.

11.3. Конвергенция между префектурами Японии

11.3.1. β-конвергенция

В работе Barro and Sala-i-Martin (1992b) анализируется β-конвергенция по доходу на душу населения в 47 префектурах Японии (данные и определения представлены в Приложении, разд. 11.12). В табл. 11.2 даны нелинейные оценки коэффициента конвергенции β для периода с 1930 по 1990 г. Структура табл. 11.2 совпадает со структурой табл. 11.1.

В первой строке табл. 11.2 представлены результаты оценки уравнений регрессии для всего периода с 1930 по 1990 г. Базовое уравнение регрессии, результаты оценки которого даны в первом столбце, в качестве регрессора включает только логарифм начального дохода. Оценка коэф-

Таблица 11.2

Оценка уравнения регрессии для личного дохода по префектурам Японии

	(1)		(2)		(3)	
	Базовое уравнение		Уравнение с региональными фиктивными переменными		Уравнение со структурными переменными и региональными фиктивными переменными	
Периоды	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$
1930–1990	0,0279	0,92	0,0276	0,97	–	–
	(0,0033)	[0,0019]	(0,0024)	[0,0012]		
1930–1955	0,0358	0,86	0,0380	0,90	–	–
	(0,0035)	[0,0045]	(0,0037)	[0,0038]		
1955–1990	0,0191	0,59	0,0222	0,81	–	–
	(0,0035)	[0,0027]	(0,0035)	[0,0020]		
1955–1960	−0,0152	0,07	−0,0023	0,44	0,0047	0,46
	(0,0079)	[0,0133]	(0,0082)	[0,0111]	(0,0118)	[0,0112]
1960–1965	0,0296	0,30	0,0360	0,55	0,0414	0,56
	(0,0072)	[0,0108]	(0,0079)	[0,0093]	(0,0096)	[0,0093]
1965–1970	−0,0010	0,00	0,0127	0,47	0,0382	0,62
	(0,0062)	[0,0097]	(0,0067)	[0,0076]	(0,0091)	[0,0065]
1970–1975	0,0967	0,78	0,0625	0,87	0,0661	0,87
	(0,0100)	[0,0095]	(0,0092)	[0,0078]	(0,0118)	[0,0079]

Окончание табл. 11.2

Периоды	(1) Базовое уравнение		(2) Уравнение с региональными фиктивными переменными		(3) Уравнение со структурными переменными и региональными фиктивными переменными	
	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$
1975–1980	0,0338	0,23	0,0455	0,37	0,0469	0,37
	(0,0100)	[0,0087]	(0,0119)	[0,0085]	(0,0145)	[0,0086]
1980 1985	−0,0115	0,04	0,0076	0,37	0,0102	0,37
	(0,0077)	[0,0075]	(0,0089)	[0,0066]	(0,0094)	[0,0067]
1985 1990	0,0007	0,00	0,0086	0,28	0,0085	0,28
	(0,0067)	[0,0067]	(0,0082)	[0,0061]	(0,0085)	[0,0062]
Совместная оценка по 7 периодам	0,0125	—	0,0232	-	0,0312	—
Статистика отношения правдоподобия	(0,0032)	·	(0,0034)	–	(0,0040)	·
	94,6		40,6		26,4	
(p-статистика)	(0,000)		(0,000)		(0,002)	

Примечание. В приложении (разд. 11.12) представлены данные по префектурам Японии и приведено их описание; в примечании к табл. 11.1 дано уравнение регрессии. Параметр $y_{i,t-T}$ доход на душу населения в префектуре i в начале периода, разделенный на совокупный индекс потребительских цен. Все выборки включают 47 наблюдений. Значение статистики отношения правдоподобия относится к тесту гипотезы о том, что коэффициенты перед логарифмом начального дохода равны для всех семи периодов. Значение p-статистики определяется согласно хи-квадрат распределению с шестью степенями свободы.

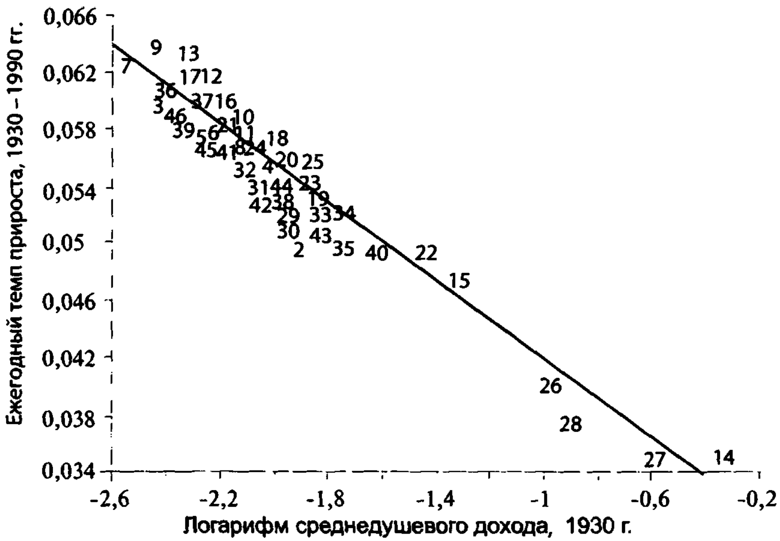


Рис. 11.5. Конвергенция дохода на душу населения в префектурах Японии: доход 1930 г. и рост дохода за период с 1930 по 1990 г. Темп прироста дохода на душу населения в префектурах за период с 1930 по 1990 г., откладываемый вдоль вертикальной оси, уменьшается с ростом логарифма дохода на душу населения 1930 г., откладываемого на горизонтальной оси. Таким образом, можно говорить о наличии абсолютной β-конвергенции между экономиками префектур Японии. Указанные на графике числа соответствуют номеру префектуры из табл. 11.10

фициента β составляет 0,0279 (0,0033), при этом R^2 равен 0,92. Точность регрессии может быть оценена на рис. 11.5. Устойчивая отрицательная корреляция между темпом прироста с 1930 по 1990 г. и логарифмом дохода на душу населения 1930 г. подтверждает наличие β-конвергенции между префектурами Японии.

Оценки коэффициента β, указанные во втором столбце, существенно не отличаются от ранее полученных, при этом уравнение регрессии в качестве объясняющих переменных включает фиктивные переменные, обозначающие семь регионов Японии. Из этого результата следует, что скорость конвергенции экономик префектур внутри региона совпадает со скоростью конвергенции между регионами. Этот результат можно проверить, оценив регрессию по семи точкам, в которых собраны данные о росте и уровне среднего дохода на душу населения в каждой из областей. Отрицательное соотношение между темпом прироста за период с 1930 по 1990 г. и логарифмом дохода на душу населения

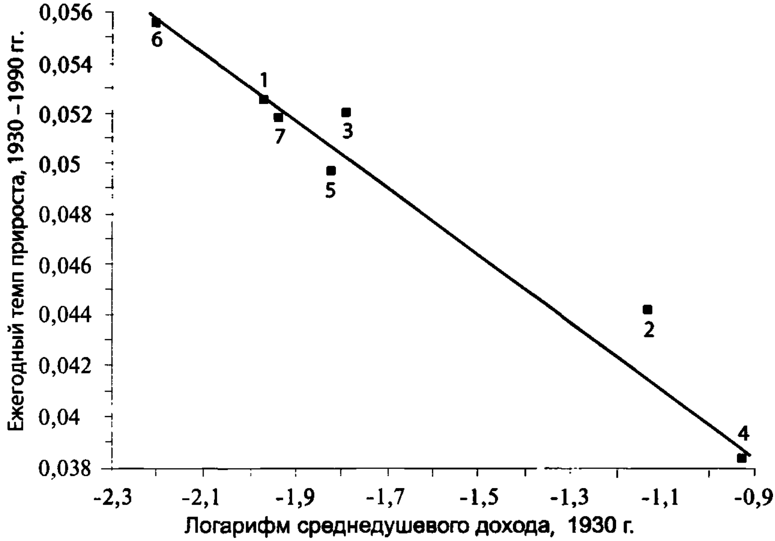


Рис. 11.6. Конвергенция дохода на душу населения в областях Японии: доход 1930 г. и рост дохода за период 1930–1990 гг. Отрицательное соотношение между ростом дохода и начальным доходом, показанное для префектур Японии на рис. 11.5, справедливо также и для средних значений показателей по семи главным регионам, что показано на рис. 11.6

1930 г. показано на рис. 11.6. Коэффициент β, оцененный по данным наблюдениям (и не включенный в таблицу), составляет 0,0261 (0,0079). Следовательно, мы можем утверждать, что скорость конвергенции экономик между регионами такая же, как и внутри регионов.

Во второй и третьей строках табл. 11.2 выборка разбивается на два продолжительных периода: с 1930 по 1955 г. и с 1955 по 1990 г. При оценке базового уравнения регрессии скорость конвергенции для первого периода больше, чем для второго: 0,0358 (0,0035) против 0,0191 (0,0035). То же самое соотношение выполняется и для столбца (2), где в качестве объясняющих переменных включены региональные фиктивные переменные. (Для двух периодов предполагаются различные коэффициенты при фиктивных переменных.) Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что скорость конвергенции после 1955 г. была существенно ниже по сравнению со скоростью между 1930 и 1955 гг. Однако отсутствие данных о секторах экономики в первом периоде не позволяет нам выявить причину этого различия. Поэтому мы ограничиваемся анализом периода после 1955 г.

В следующих семи строках табл. 11.2 выборка разбита на пятилетние периоды, начиная с 1955 г. Для трех из этих периодов знак оценки коэффициента β, полученной на основе базового уравнения, является противоположным к ожидаемому. Скорость конвергенции положительна и значима для периодов с 1960 по 1965 г., с 1970 по 1975 г. и с 1975 по 1980 г. Совместная оценка за эти семь периодов равна 0,0125 (0,0032). Гипотеза о равенстве коэффициентов во времени отклоняется; значение p-статистики равно 0,000.

Предполагается, что в регрессионном анализе с учетом региональных фиктивных переменных (результаты этого анализа представлены во втором столбце) коэффициенты при фиктивных переменных могут различаться в каждый из подпериодов. В таком случае только оценка коэффициента β для периода с 1955 по 1960 г. будет иметь знак минус, и это не столь существенно. Общая оценка равна 0,0232 (0,0034). Однако мы по-прежнему отклоняем гипотезу о равенстве коэффициентов; значение p вновь составляет 0,000.

В столбце (3) добавляется оценка структурного параметра S_{it}, определяемого выражением (11.8). Эта переменная аналогична переменной, построенной для штатов США. Коэффициенты при структурной переменной также могут быть различны для каждого из периодов. В отличие от результатов, представленных в предыдущих двух столбцах, теперь при наличии секторного параметра оценка ни для одного из периодов не имеет отрицательного знака. Совместная оценка для семи периодов составляет 0,0312 (0,0040). Гипотеза о неизменности коэффициентов во времени вновь отвергается: значение p теперь равно 0,002.

Одна из причин неустойчивости оценок коэффициентов β заключается в том, что Токио резко выделялся среди всех остальных префектур Японии в 1980 г.: Токио являлся, безусловно, самой богатой префектурой в своем районе в 1980 г. и характеризовался самым большим темпом прироста за период с 1980 по 1990 г., этот результат не был отражен в структурной переменной, которую мы использовали. Если добавить фиктивную переменную для Токио для 1980-х гг., то полученные оценки коэффициента β составят 0,0218 (0,0112) для периода с 1980 по 1985 г. и 0,0203 (0,0096) для периода с 1985 по 1990 г. При наличии данной фиктивной переменной гипотеза о равенстве коэффициентов теперь отклоняется при значении p, равном 0,010.

Другая причина неустойчивости оценок заложена в периоде с 1970 по 1975 г., в течение которого оценка коэффициента β, равная 0,0661 (0,0118), была существенно выше значения оценок для других периодов. Вероятное объяснение столь высокой оценки β заключается в том, что нефтяной шок 1973 г. оказал особо негативное воздействие на наиболее богатые промышленные области. Предполагалось, что структурная переменная должна взять на себя все влияние этого шока, однако параметр, который мы смогли оценить, оказался не в состоянии захватить это воздействие.

Как и для штатов США, мы повторно оценили уравнения регрессии для префектур Японии с использованием лаговых значений дохода в качестве инструментального параметра. В результате можно вновь сказать, что оценки существенно не изменились. Например, при включении инструментальных переменных для столбца (3) из табл. 11.2 общая оценка β падает с 0,0312 (0,0040) до 0,0282 (0,0042).

11.3.2. σ-конвергенция между префектурами

В данном разделе мы хотим оценить уровень конвергенции между префектурами Японии. Рассчитаем невзвешенное пространственное стандартное отклонение логарифма дохода на душу населения σ_t по 47 префектурам с 1930 по 1990 г. На рис. 11.7 видно, что дисперсия личного дохода возросла с 0,47 для 1930 г. до 0,63 для 1940 г. Одним из объяснений подобного результата является резкое увеличение военных

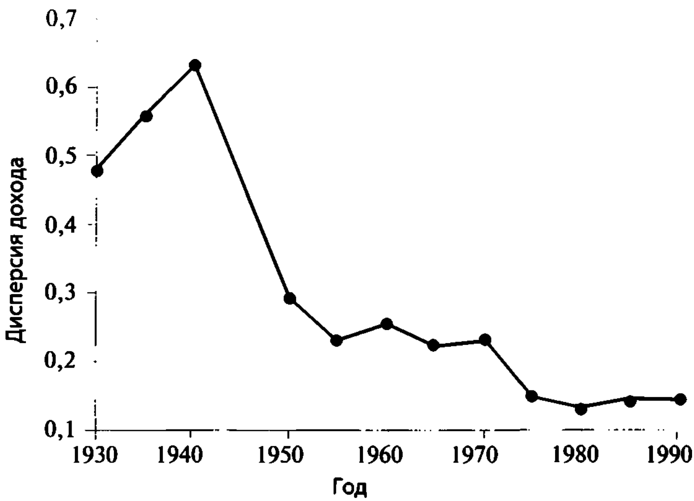


Рис. 11.7. Дисперсия личного дохода в префектурах Японии в период 1930–1990 гг. На рисунке показано стандартное отклонение логарифма дохода на душу населения по 47 префектурам Японии в период с 1930 по 1990 г. Эта оценка дисперсии падает после окончания Второй мировой войны вплоть до 1980 г.

расходов в течение периода. Средние темпы прироста для районов 1 (Хоккайдо-Тохоку) и 7 (Кюсю), которые являются главным образом сельскохозяйственными районами, составляли −2,4% и −1,7% в год соответственно. Напротив, промышленные регионы Токио, Осака и Аити росли с темпом прироста 3,7%, 3,1% и 1,7% в год соответственно.

Дисперсия дохода между префектурами[1)] значительно сократилась в период после Второй мировой войны: ее значение уменьшилось с 0,29 для 1950 г. до 0,25 в 1960 г., затем 0,23 в 1970 г. и достигло минимума 0,12 в 1978 г. После этого дисперсия незначительно увеличилась: σ_t возрос до 0,13 в 1980 г., 0,14 в 1985 г. и 0,15 в 1987 г. Начиная с 1987 г., дисперсия практически не менялась. Таким образом, результаты аналогичны результатам, полученным по штатам США.

11.4. Анализ конвергенции в странах Европы

11.4.1. β-конвергенция

В работе Barro and Sala-i-Martin (1991) представлен анализ конвергенции 90 регионов в восьми странах Европы: 11 регионов Германии, 11 — Великобритании, 20 — Италии, 21 — Франции, 4 — Нидерландов, 3 — Бельгии, 3 — Дании, 17 — Испании. Данные, указанные в Приложении (разд. 11.12), соответствуют ВВП на душу населения для первых семи стран и доходу на душу населения для Испании.

В табл. 11.3 приведены оценки коэффициента β из уравнения (11.6) для периода 1950–1990 гг. Для того чтобы оценить разницу между устойчивыми значениями величин x_i и $\hat{y}_i^*$ в уравнении (11.6), а также в векторе ошибок выделить фиксированные эффекты, характерные для страны в целом, в уравнение регрессии для каждого периода включены фиктивные переменные, обозначающие страну. Страновые фиктивные переменные не представлены в табл. 11.3, однако имеют достаточно важное значение, выступая в качестве объясняющих переменных. В первых четырех строках первой колонки представлены данные по десятилеткам. Оценки β являются достаточно устойчивыми во времени; они находятся в диапазоне от 0,010 (0,004) для 1980-х гг. до 0,023 (0,009) в 1960-е. Совместная оценка для четырех периодов равна 0,019 (0,002). Гипотеза об устойчивости β во времени не может быть отвергнута на общепринятом уровне значимости, значение p составляет 0,18.

На рис. 11.8 для 90 регионов показано соотношение между темпом прироста ВВП (дохода для Испании) на душу населения за период с 1950

[1)] Cross-prefectural dispersion — дисперсия между префектурами. — *Прим. перев.*

Таблица 11.3

Конвергенция в странах Европы

Период	(1) Уравнения с фиктивными страновыми переменными		(2) Уравнения с отраслевыми долями и фиктивными страновыми переменными	
	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$	$\hat{\beta}$	$R^2[\hat{\sigma}]$
1950–1960	0,018	0,83	0,034	0,84
	(0,006)	[0,0099]	(0,009)	[0,0094]
1960–1970	0,023	0,97	0,020	0,97
	(0,009)	[0,0065]	(0,006)	[0,0064]
1970–1980	0,020	0,99	0,022	0,99
	(0,009)	[0,0079]	(0,007)	[0,0077]
1980–1990	0,010	0,97	0,007	0,97
	(0,004)	[0,0066]	(0,005)	[0,0064]
Совместная оценка	0,019	—	0,018	—
за 4 периода	(0,002)		(0,003)	
Статистика отношения правдоподобия	4,9		8,6	
(p-статистика)	(0,179)		(0,034)	

Примечание. В Приложении (разд. 11.12) представлены данные по регионам Европы, в примечании к табл. 11.1 дано уравнение регрессии. Переменная $y_{i,t-T}$ отвечает за ВВП на душу населения (доход для Испании) в регионе i в начальный момент времени. Во всех выборках представлено 90 наблюдений. Значение вероятности дано для проверки гипотезы о равенстве коэффициентов перед логарифмами первоначального уровня ВВП на душу населения или дохода за четыре периода. Значение статистики отношения правдоподобия рассчитывается на основе хи-квадрат-распределения с тремя степенями свободы.

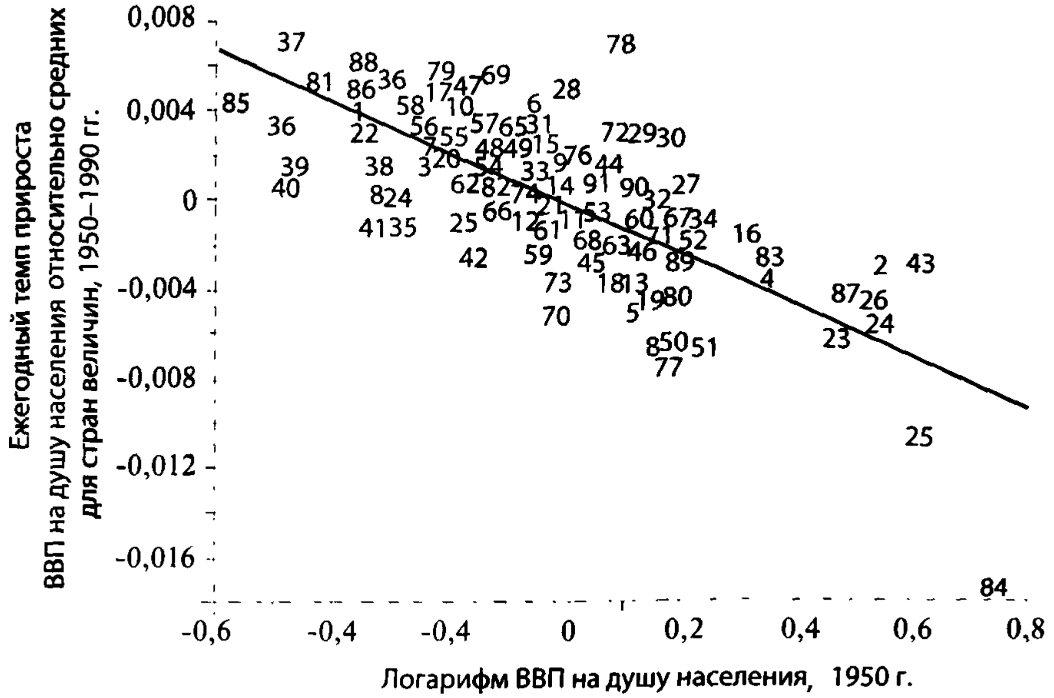


Рис. 11.8. Темпы прироста ВВП на душу населения в период 1950–1990 гг. и ВВП на душу населения 1950 г. для 90 регионов Европы. Темп прироста среднедушевого ВВП за период с 1950 по 1990 г., откладываемый вдоль вертикальной оси, уменьшается с ростом логарифма ВВП на душу населения 1950 г., откладываемого вдоль горизонтальной оси. Темп прироста и уровень ВВП на душу населения оцениваются относительно среднего для страны значения. Следовательно, на графике видно, что безусловная β-конвергенция имеет место во всех восьми странах, т. е. Германии, Великобритании, Италии, Франции, Нидерландах, Бельгии, Дании и Испании. Цифры соответствуют регионам (см. табл. 11.9)

по 1990 г. (с 1955 по 1987 г. для Испании) и логарифмом ВВП или дохода на душу населения в начальный момент времени. Переменные оцениваются относительно средних значений в соответствующих странах.

На графике видна отрицательная зависимость, что совпадает с результатами для штатов США и префектур Японии. Корреляция между темпами прироста и логарифмом первоначального среднедушевого ВВП или дохода для графика 11.8 равна $-0{,}72$. Поскольку соответствующие значения рассчитаны относительно средних по стране величин, то связь на графике 11.8 характеризует β-конвергенцию внутри страны, а не между странами. Поэтому график соответствует оценкам, полученным при включении страновых фиктивных переменных и указанным в столбце (1) табл. 11.3.

При расчете значений, указанных в столбце (2), учитывались доли сельского хозяйства и промышленности в общей занятости или ВВП в начале каждого из рассматриваемых периодов[1]. Переменные, отвечающие за доли, можно включить в проводимый нами анализ данных по регионам Европы в качестве оценок структурных параметров S_{it}, возникающих в выражении (11.8). Предполагается, что коэффициенты при отраслевых долях могут быть специфическими для каждого периода.

Общая оценка β за четыре периода теперь составляет 0,018 (0,003). При тестировании на устойчивость во времени коэффициента β получаем p-статистику, равную 0,034. Таким образом, в противовес результатам, полученным для США и Японии, включение в рассмотрение в качестве переменных отраслевых долей приводит к тому, что коэффициенты β становятся менее устойчивыми во времени. Возможно, лучшая оценка структурной компоненты приведет к лучшим результатам.

Мы также оценили совместную систему по странам Европы с индивидуальными коэффициентами β для пяти крупнейших стран (Германия, Великобритания, Италия, Франция и Испания). Результаты оценивания для четырех периодов представлены во втором столбце табл. 11.3, разница заключается в том, что коэффициент β изменяется от страны к стране (но не от периода к периоду). Эта система включает страновые фиктивные переменные (с различными коэффициентами для каждого периода), а также параметры, указывающие отраслевые доли (с коэффициентами, которые различаются по периодам, но не по странам). В итоге мы получили следующие результаты: Германия (11 регионов) – оценка 0,0224 (0,0067); Великобритания (11 регионов) – оценка 0,0277 (0,0104); Италия (20 регионов) – оценка 0,0155 (0,0037); Франция (21 регион) – оценка 0,0121 (0,0061); Испания (17 регионов) – оценка 0,0182 (0,0048). Отметим, что все индивидуальные точечные оценки близки к 2% в год: оценка варьируется от 1,2% в год для Франции до 2,8% в год для Великобритании.

При проверке гипотезы о равенстве всех значений β для пяти стран p-статистика составляет 0,55. Следовательно, мы не можем отрицать гипотезу о том, что скорость региональной конвергенции в пяти европейских странах одинакова.

Также оценим уравнения регрессии для регионов Европы с учетом лаговых значений среднедушевого ВВП и дохода, используя их в качестве инструментальных переменных. При проведении этого ана-

[1] Значения долей для первых трех периодов основаны на данных о занятости. Для периода 1980–1990 гг. взяты данные по ВВП.

лиза приходится отсечь данные первого периода; таким образом, мы анализируем только три десятилетия с 1960 по 1990 г. Использование инструментальных переменных оказывает незначительное влияние на результаты, полученные при анализе только с использованием страновых фиктивных переменных, что соответствует столбцу (1) табл. 11.3. Общая оценка β меняется с 0,0187 (0,0022) в случае МНК до 0,0165 (0,0023). Если добавляются переменные, обозначающие доли сельскохозяйственного и промышленного секторов, то совместная оценка β изменяется с 0,0153 (0,0034) до 0,0073 (0,0038). Мы полагаем, что такое резкое падение оценки коэффициента β в данном случае отражает несостоятельность использования долевых показателей в качестве оценок структурных сдвигов.

11.4.2. σ-конвергенция

На рис. 11.9 показано поведение σ_i в пяти крупнейших странах Европы: Германии, Великобритании, Италии, Франции и Испании. Страны проранжированы в порядке убывания дисперсии: Италия, Испания, Герма-

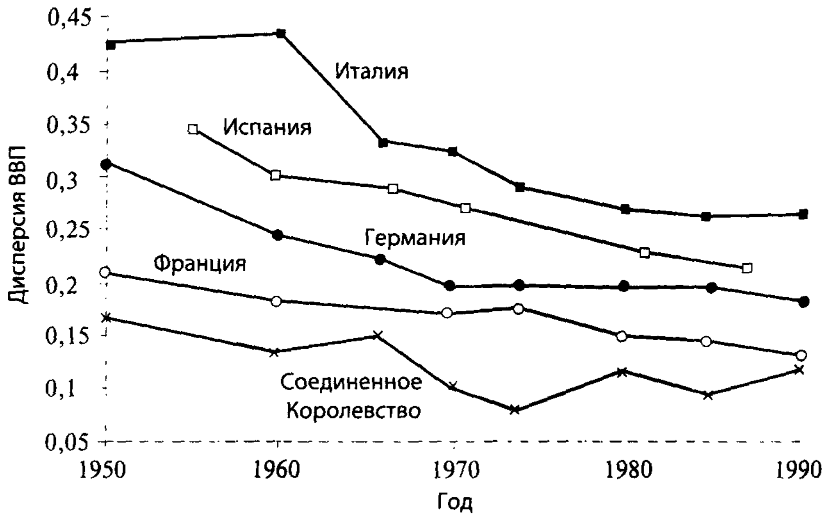


Рис. 11.9. Дисперсия ВВП на душу населения в пяти странах Европы. На графике показано среднеквадратическое отклонение логарифма ВВП на душу населения в пространственной выборке за период с 1950 по 1990 г. для 11 регионов Германии, 11 регионов Великобритании, 20 регионов Италии, 21 региона Франции и 17 регионов Испании. Эта оценка дисперсии снижается в большинстве случаев, однако начиная с 1970 г. практически не меняется для Германии и Великобритании

ния, Франция и Великобритания. На графике наблюдается уменьшение σ_i практически в каждой стране, хотя начиная с 1970 г. лишь незначительные изменения происходят в Германии и Великобритании. Увеличение σ_i в период с 1974 по 1980 г. в Великобритании (единственной из рассматриваемых стран, которая занимается нефтедобычей) отражает влияние нефтяных шоков. К 1990 г. значения σ_i для каждой из стран составляли: 0,27 — в Италии, 0.22 — в Испании (в 1987 г.), 0.19 — в Германии, 0,14 — во Франции, 0,12 — в Великобритании.

11.5. Конвергенция в других странах мира

Многие исследователи изучают региональную конвергенцию и на примерах других странах мира. В работе Coulombe and Lee (1993) показано, что скорость конвергенции между регионами в Канаде практически равна 2% в год, т. е. совпадает с той скоростью, которую мы рассчитали для штатов США, префектур Японии и регионов Европы. Persson (1997) пришел к аналогичным результатам для 24 округов Швеции для периода с 1911 по 1993 г. В работе Cashin and Sahay (1995) доказано наличие безусловной конвергенции между штатами Индии в 1961–1991 гг. За последние годы к исследованиям по региональной конвергенции можно отнести следующие работы: O'Leary (2000) по Ирландии; Petrakos and Saratsis (2000) по Греции; Hossain (2000) по Бангладеш; Utrera and Koroch (1998) по Аргентине; Magalhaes, Hewings and Azzoni (2000) по Бразилии; Cashin (1995) по Океании; Yao and Weeks (2000) по Китаю; Cashin and Loayza (1995) по Южно-Тихоокеанских странам; Gezici and Hewings (2001) по Турции; Sanchez-Robles and Villaverde (2001) по Испании.

11.6. Миграция между штатами США

В данном разделе мы рассмотрим эмпирические факторы, влияющие на потоки чистой миграции между штатами США. Из проведенного в разд. 9.1.3 анализа следует, что годовой показатель чистой миграции в регион i между периодами $t - T$ и t, обозначенный через m_{it}, может быть записан следующим образом:

$$m_{it} = f(y_{i,t-T}, \theta_i \pi_{i,t-T}; \text{переменные, зависящие от } i, \text{ но не от } t). \quad (11.9)$$

где $y_{i,t-T}$ — уровень дохода на душу населения в начале периода; θ_i — вектор заданных условий жизни (таких как климат и другие географические характеристики); $\pi_{i,t-T}$ — плотность населения в регионе i

в начале периода[1]. В число переменных, которые зависят от t, но не зависят от i, входят любые параметры, которые влияют на уровень доходов на душу населения и плотность населения в других экономиках. Также в рассмотрение включаются такие факторы, как технологический прогресс в системе отопления и кондиционирования, поскольку эти факторы влияют на отношение людей к погоде, а значит, и на плотность населения.

Доход на душу населения (как приблизительная оценка заработной платы) будет положительно влиять на миграцию, тогда как плотность населения будет влиять отрицательно. При проведении эмпирического анализа мы используем следующую функцию:

$$m_{it} = a + b \cdot \log y_{i,t-T} + c_1\theta_i + c_2\pi_{i,t-T} + c_3\pi^2_{i,t-T} + v_{it}, \qquad (11.10)$$

где v_{it} - это ошибка[2], $b > 0$, а уравнение включает также квадрат плотности населения $\pi_{i,t-T}$. Предельный эффект, оказываемый $\pi_{i,t-T}$ на m_{it}, будет отрицательным, если $c_2 + 2c_3 < 0$.

Хотя и существует значительное количество исследований относительно того, какие переменные стоит включать в качестве условий жизни θ_i, в текущий анализ включается только логарифм среднего числа дней отопительного периода, обозначенный через $\log(\text{heat}_i)$, этот показатель является антиблагом, поэтому $c_1 < 0$. Параметр $\log(\text{heat}_i)$ выступает в качестве объясняющего фактора миграции между штатами США. В качестве альтернативного параметра мы также рассмотрели погоду, однако этот фактор оказался не столь существенным. Также полезно включить в анализ такую переменную, как миграция после выхода в отставку, этот параметр объяснит наличие отклонений, таких как для штата Флориды. Однако эти преобразования, вероятнее всего, не повлияют на основные выводы о соотношении между чистой миграцией и уровнем доходов на душу населения штата.

Данные о чистой миграции по штатам доступны с 1900 г. для каждого исследуемого года, кроме 1910 и 1930 гг. (см. Barro and Sala-i-Martin (1991)). Мы рассчитываем средний за десять лет ежегодный уровень чистой миграции в штате, для этого мы делим чистое количество мигрантов за период с $t - T$ по t на численность населения штата в момент $t - T$.

---

[1] Некоторые условия жизни, например правительственная политика в области налоговых ставок и нормативов, со временем могут меняться. Но при проведении данного анализа мы не используем подобные переменные.

[2] Error – «ошибка», термин используется в эконометрике. – *Прим. перев.*

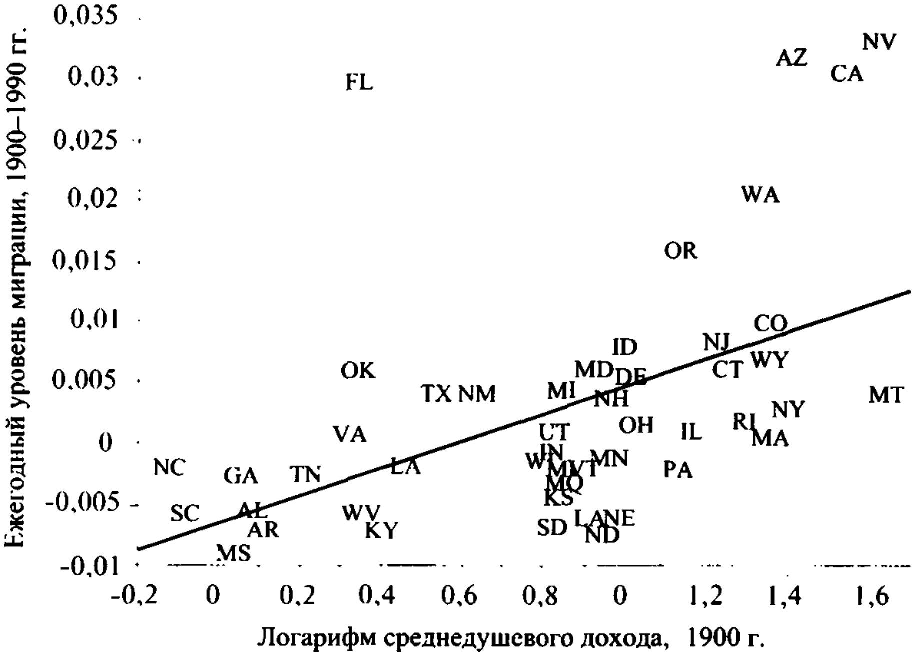


Рис. 11.10. Миграция и первоначальный уровень дохода в штате в 1900–1990 гг. Средний показатель чистой миграции для 48 штатов и территорий США с 1900 до 1990 г., указанный вдоль вертикальной оси, положительно связан с логарифмом первоначального дохода на душу населения, указанного вдоль горизонтальной оси. Флорида, Аризона, Калифорния и Невада характеризуются более высокими значениями уровня чистой миграции по сравнению со значениями, рассчитанными на основе первоначального уровня дохода

На рис. 11.10 показано истинное долгосрочное соотношение между уровнем миграции и логарифмом начального дохода на душу населения[1]. Вдоль горизонтальной оси откладывается логарифм среднедушевого дохода в штате в 1900 г. Положительное соотношение очевидно (корреляция = 0,51). Из общей структуры заметно выделяется Флорида, в которой первоначальный доход на душу населения ниже среднего уровня, а чистый уровень миграции высок и составляет 3% в год.

В табл. 11.4 представлены результаты оценки уравнения регрессии (11.10) для чистой миграции в штатах США. Результаты даны для восьми периодов, начиная с периода с 1900 по 1920 г. Регрессии включают специфические для периода коэффициенты при $\log(y_{i,t-T})$ и при логарифме количества дней отопительного периода. (Гипотеза о неизменности во времени коэффициента при $\log[y_{i,t-T}]$ откло-

[1] Значения по вертикальной оси — это средний ежегодный уровень миграции в штате с 1900 по 1987 г. Значения получены как среднее за каждый из периодов, взвешенное по длине интервала.

Таблица 11.4

Оценка уравнений регрессии для чистой миграции между штатами США (период с 1900 по 1989 г.)

Периоды	Логарифм дохода на душу населения	Количество дней отопительного периода	Плотность населения	Квадрат плотности населения	$R^2[\hat{\sigma}]$
1900–1920	0,0335	−0,0066	−0,0433	0,0307	0,70
	(0,0075)	(0,0037)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0111]
1920–1930	0,0363	−0,0124	−0,0433	0,0307	0,61
	(0,0078)	(0,0027)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0079]
1930–1940	0,0191	−0,0048	−0,0433	0,0307	0,71
	(0,0037)	(0,0014)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0041]
1940–1950	0,0261	−0,0135	−0,0433	0,0307	0,82
	(0,0055)	(0,0022)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0065]
1950–1960	0,0438	−0,0205	−0,0433	0,0307	0,70
	(0,0086)	(0,0031)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0091]
1960–1970	0,0435	−0,0056	−0,0433	0,0307	0,70
	(0,0083)	(0,0025)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0069]
1970–1980	0,0240	−0,0077	−0,0433	0,0307	0,73
	(0,0091)	(0,0024)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0072]

Периоды	Логарифм дохода на душу населения	Количество дней отопительного периода	Плотность населения	Квадрат плотности населения	$R^2[\hat{\sigma}]$
	(0,0091)	(0,0024)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0072]
1980–1989	0,0163	−0,0066	−0,0433	0,0307	0.72
	(0,0061)	(0,0019)	(0,0079)	(0,0095)	[0,0053]
Совместная оценка	0,0260	individual	−0,0427	0,0300	—
для 8 периодов	(0,0023)	coefficients	(0,0079)	(0,0097)	—

Примечание. Значение статистики отношения правдоподобия при тестировании гипотезы о равенстве коэффициентов перед переменной дохода за восемь периодов составляет 17,1 при этом значение p равно 0,017 (исходя из хи-квадрат распределения с семью степенями свободы). Уравнения регрессии оцениваются с помощью итеративного взвешенного МНК и имеют следующий вид:

$$m_{it} = a_t + b_t \cdot \log(y_{i,t-T}) + c_{1t} \cdot \mathrm{Heat}_i + c_2 \cdot \pi_{i,t-T} + c_3 \cdot \pi^2_{i,t-T} + c_{4t} \cdot \mathrm{Region}_i + c_{5t} \cdot S_{it},$$

где m_{it} — это чистый поток мигрантов в штат i за период времени между $t-T$ и t, выраженный по отношению к численности населения в момент $t-T$; Heat_i — это количество дней отопительного периода; $\pi_{i,t-T}$ — плотность населения (тысяч людей на квадратную милю); Region_i — это фиктивная переменная, отвечающая за четыре исследуемых региона; S_{it} — структурная переменная, уже описанная ранее. Оценки a_t, c_{4t} и c_{5t} не показаны. Данные представлены в Приложении (разд. 11.12). Все выборки включают 48 наблюдений. Стандартные ошибки указаны в круглых скобках.

няется на 5%-ном уровне значимости, хотя оценка коэффициентов при $\log[y_{i,t-T}]$ изменяется незначительно, если перед переменной отопления предполагается неизменный коэффициент.) Так как гипотеза о том, что коэффициенты при переменных плотности населения устойчивы во времени, принимается на 5%-ном уровне, мы можем оценить уравнение (11.10), предполагая неизменность коэффициентов при плотности населения и при квадрате плотности. Регрессии также включают специфические для периода коэффициенты при региональных фиктивных переменных и переменных, указывающих структурные доли. (Предполагаемые коэффициенты при региональных и структурных переменных могут быть значимыми, но в целом играют незначительную роль.)

Все оценки коэффициента перед $\log(\text{heat}_i)$ в табл. 11.4 отрицательны, и большинство из них значительно отличается от нуля; при прочих равных, люди предпочитают более теплые штаты. Совместная оценка коэффициента при переменной плотности населения равна −0,043 (0,008) и 0,030 (0,010) при квадрате плотности населения. Эти точечные оценки означают, что предельный эффект, оказываемый плотностью населения на миграцию, отрицателен для всех штатов, за исключением трех штатов с самым высоким уровнем плотности населения: Нью-Джерси, Род-Айленд с 1960 г. и Массачусетс с 1970 г.

Коэффициент при логарифме первоначального уровня дохода на душу населения существенно больше нуля во всех периодах. Совместная оценка равна 0,0260 (0,0023). Однако оценка влияния логарифма начального дохода на миграцию является неустойчивой во времени: значение p при отклонении данной гипотезы составляет 0,017. Главными причинами неустойчивости являются слишком большие коэффициенты при переменной дохода в 1950-х и 1960 гг.: 0,0438 (0,0086) и 0,0435 (0,0083) соответственно.

Однако совместная оценка коэффициента при первоначальном доходе, равная 0,026, хотя и является значимой, но, с точки зрения масштабов экономики, она невелика. Значение коэффициента показывает, что при прочих равных 10%-ная разница в доходе на душу населения приведет к такому росту чистой миграции, что темп прироста населения в регионе возрастет лишь на 0,26% в год. Согласно ранее полученным результатам, разница в доходе на душу населения имеет тенденцию постепенно нивелироваться с незначительной скоростью, примерно 2% в год. Объединив выводы относительно миграции с выводами о конвергенции по доходу, мы получаем, что уровень чистой миграции во времени постоянен. Анализ данных подтверждает этот вывод: корреляция между средним уровнем миграции для периода с 1900 по 1940 г. и уровнем для периода с 1940 по 1989 г. составляет 0,70.

11.7. Миграция между префектурами Японии

Прежде чем анализировать миграцию между префектурами Японии и оценивать уравнение (11.10), необходимо отметить, что одно из существенных различий между типичной префектурой Японии и типичным штатом США заключается в площади. Средняя площадь префектуры Японии – 6394 квадратных километра[1], что составляет примерно половину площади штата Коннектикут. Наибольшая префектура, Хоккайдо, имеет площадь 83 520 км^2, что практически совпадает с площадью Южной Каролины. Вторая по величине префектура, Ивате, имеет площадь 15 277 км^2, что чуть больше, чем Коннектикут, и меньше, чем Нью-Джерси. Для сравнения, средняя площадь штата США равна 163 031 км^2, а площадь наибольшего штата, Техас, составляет 691 030 км^2. Калифорния, площадь которой составляет 411 049 км^2, незначительно больше, чем вся Япония (377 682 км^2).

Разница в площади означает, что префектуры, скорее, похожи на метрополии, а не штаты, так что дневная маятниковая миграция между префектурами может оказаться существенной. Многие исследователи, занимающиеся экономикой городов, например Henderson (1988), отмечают, что люди предпочитают жить в городах по двум причинам. Во-первых, из-за наличия внешних эффектов, влияющих на спрос или потребление. То есть в городах обеспечиваются наилучшие бытовые условия, например в городе есть театры и музеи, которые возникают только при наличии достаточного спроса. Во-вторых, существуют производственные внешние эффекты, которые в больших городах позволяют устанавливать высокую заработную плату. Противодействует этому то, что люди хотят жить вдали от крупных городов, потому что в городах более высокий уровень преступности, менее дружелюбные соседи и (в состоянии равновесия) более высокая стоимость аренды земли или дома (см. Roback, 1982). Таким образом, принятие решения о миграции в город предполагает некий компромисс. Этого компромисса можно избежать, если люди живут в пригороде и ездят на работу в го-

[1] При расчете этого значение не учитывалась площадь префектуры Хоккайдо, почти в пять раз больше любой из других префектур. Средняя площадь с учетом Хоккайдо равна 8036 км^2, что составляет две трети штата Коннектикут.

род. Люди будут более склонны нести высокие транспортные издержки, если плотность населения в центральном городе чрезвычайно высока.

Чтобы эмпирически оценить эти выводы, нам необходимо подобрать меру для оценки плотности населения в соседних префектурах. Мы можем построить такой параметр, оценив каким-то образом плотность населения в соседних префектурах с учетом их отдаленности. Однако на практике можно видеть, что в Японии есть два главных района, где плотность населения чрезмерно высока, — это Токио и Осака. В 1990 г. плотность населения в Токио была 5470 чел./км^2, а в Осаке 4674 чел./км^2, среднее же значение для других префектур составляло 624 чел./км^2 [1]. Поэтому проблемы, которые мы отмечали ранее, вероятнее всего, возникнут только для этих двух префектур. Справедливость данного предположения можно подтвердить, рассмотрев соотношение между дневным и ночным населением, что будет служить своеобразной мерой маятниковой миграции[2]. Значение меньше единицы указывает на то, что люди, живущие в данной префектуре, работают в другой; значение больше единицы означает противоположное. Значение является близким к единице для всех префектур, за исключением тех, которые расположены рядом с Токио и Осакой: соотношение для Токио равно 1,184, для Осаки — 1,053. Значения для префектур рядом с Токио составляют 0,872 для Саитамы, 0,876 для Тибы и 0,910 для Канагавы. Для соседних с Осакой префектур эта цифра составляет 0,955 для Хиого, 0,871 для Нары и 0,986 для Вакаямы[3].

Мы построили параметр, который можно назвать плотностью населения соседей, приписывая префектурам в районе Токио (Токио и его непосредственные соседи — Саитама, Тиба и Канагава) и в районе Осаки (Осака и ее непосредственные соседи — Хиого, Нара и Вакаяма) среднюю плотность их непосредственных соседей. Для других префектур значение параметра совпадает с собственной плотностью населения. Предполагается наличие положительного соотношения между миграцией и параметром, отвечающим за плотность в соседних префектурах, а также отрицательное соотношение между миграцией и плотностью

[1] Для сравнения, в 1990 г. штатом США с наибольшей плотностью населения был Нью-Джерси (плотность 390 чел./км^2).

[2] Источником данных является Служба управления и координации Бюро статистики.

[3] Также существует небольшая маятниковая миграция между префектурами, окружающими Киото и Аити, но масштабы ее не столь значительны: соотношение для Аити равно 1,016 (в соседней префектуре Гифу соотношение равно 0,977), для Киото оно составляет 1,011.

населения внутри самой префектуры. Это соотношение должно показать, что люди предпочитают жить не в местах с большой плотностью населения (им придется платить издержки, возникающие из-за перенаселенности), но близко к этим областям (чтобы они могли пользоваться всеми преимуществами большого города).

Оцениваемое нами уравнение имеет следующий вид:

$$m_{it} = a + b \cdot \log y_{i,t-T} + c_1\theta_i + c_2\pi_{i,t-T} + c_3\pi^{ne}_{i,t-T} + v_{it}, \tag{11.11}$$

где v_{it} — это ошибка; $\pi^{ne}_{i,t-T}$ — плотность населения в соседних префектурах. Чтобы оценить параметр, отвечающий за условия проживания (в данном случае погоду), мы возводим в квадрат разницу между максимальной и средней температурами, прибавляем квадрат разницы между минимальной и средней температурами и затем извлекаем квадратный корень. Таким образом, этот параметр оценивает предельную температуру. Найти значения для переменной, подобные тем, что мы использовали для США (число дней отопительного периода), оказалось невозможно. Мы проводили анализ и с другими погодными параметрами, такими как максимальные и минимальные температуры или среднее количество выпавшего за год снега. Но эти альтернативные параметры также не подошли.

На рис. 11.11 показано соотношение между средним ежегодным уровнем миграции для периода с 1955 по 1987 г. и логарифмом дохода на душу населения в 1955 г. Четкая положительная связь (линейная корреляция равна 0.58) означает, что уровень чистой миграции увеличивается с ростом дифференциации дохода. Важно отметить, что из всей совокупности на графике вверху выделяются Тиба, Саитама и Канагава, т. е. префектуры, окружающие Токио.

В табл. 11.5 даны результаты оценки уравнений вида (11.10) для уровня миграции. В первой строке дан средний уровень миграции за весь период с 1955 по 1990 г. Коэффициент при логарифме первоначального дохода на душу населения равен 0.0126 (0.0061). Как и ожидалось, чистая миграция характеризуется отрицательной зависимостью от плотности населения внутри префектуры (−0.0049 (0.0022)) и положительной — от плотности населения в соседней префектуре (0.0190 (0.0034)). Параметр предельной температуры является незначимым.

В следующих семи строках табл. 11.5 даны результаты для пятилетних периодов, начиная с периода 1955–1960 гг. Оценка коэффициента при значении первоначального дохода существенно больше нуля во всех периодах, за исключением периода с 1975 по 1980 г., в котором коэффициент является положительным, но незначимым. Совместная

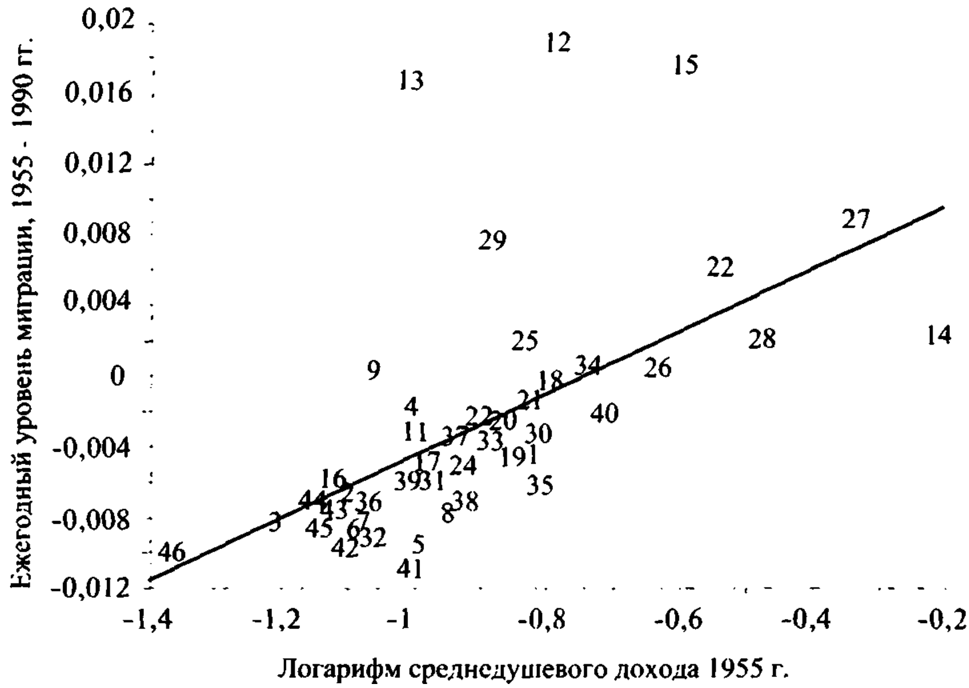


Рис. 11.11. Миграция и первоначальный уровень дохода в префектуре, период с 1955 по 1990 г. Средний уровень чистой миграции для 47 японских префектур с 1955 по 1990 г., откладываемый вдоль вертикальной оси, имеет прямую зависимость с логарифмом дохода на душу населения в 1955 г., откладываемого вдоль горизонтальной оси. Три префектуры, расположенные рядом с Токио (Тиба, Саитама и Канагава), характеризуются существенно более высоким уровнем чистой миграции по сравнению со значениями, рассчитанными исходя из первоначального уровня дохода

оценка равна 0.0188 (0.0019), что означает, что при прочих равных условиях 10%-ное увеличение дохода на душу населения в префектуре приведет к росту чистой миграции настолько, что ежегодный темп прироста населения в префектуре возрастет на 0.19 процентных пункта. Этот результат близок к результату, полученному для штатов США. Гипотеза об устойчивости коэффициентов при параметре дохода во времени отклоняется, значение p равно 0.006.

Параметр плотности населения внутри самой префектуры оказывает значимое отрицательное воздействие, за исключением первого периода, а параметр плотности населения в соседних префектурах влияет положительно во всех периодах (значительно влияет в четырех из семи периодов). Параметр предельной погоды влияет отрицательно, но в целом несущественненно.

Таким образом, погода, скорее всего, не играет важной роли в процессе внутренней миграции в Японии.

Таблица 11.5

Оценка уравнений регрессии для чистой миграции в префектурах Японии с 1955 по 1990 г.

Периоды	Логарифм дохода на душу населения	Предельная температура	Плотность[a] населения в префектуре	Плотность в соседних префектурах	$R^2[\hat{\sigma}]$
1955–1990	0,0126	0,00014	−0,0049	0,0190	0,62
	(0,0061)	(0,00062)	(0,0022)	(0,0034)	[0,0061]
1955–1960	0,0216	−0,00014	0,0060	0,0025	0,85
	(0,0036)	(0,00012)	(0,0013)	(0,0019)	[0,0038]
1960–1965	0,0317	−0,00014	−0,0019	0,0147	0,74
	(0,0058)	(0,00012)	(0,0020)	(0,0031)	[0,0071]
1965–1970	0,0344	−0,00014	−0,0065	0,0142	0,71
	(0,0070)	(0,00012)	(0,0017)	(0,0025)	[0,0066]
1970–1975	0,0194	−0,00014	−0,0064	0,0114	0,53
	(0,0060)	(0,00012)	(0,0015)	(0,0023)	[0,0070]
1975–1980	0,0060	−0,00014	−0,0037	0,0052	0,32
	(0,0067)	(0,00012)	(0,0011)	(0,0014)	[0,0043]
1980–1985	0,0101	−0,00014	−0,0023	0,0037	0,39

[a] В таблице представлены значения коэффициентов, которые являются безразмерными величинами, поэтому единицы измерения плотности населения и температуры не указаны. *Прим. перев.*

Периоды	Логарифм дохода на душу населения	Предельная температура	Плотность населения в префектуре	Плотность в соседних префектурах	$R^2[\hat{\sigma}]$
1985 1990	0.0148	−0,00014	−0,0026	0,0046	0,56
	(0,0040)	(0,00012)	(0.0006)	(0,0084)	[0.0029]
Совместная оценка	0,0188	−0,00040	individual	individual	
для семи периодов	(0.0019)	(0,00015)	coefficients	coefficients	

Примечание. Значение критерия отношения правдоподобия для проверки гипотезы о равенстве коэффициентов перед параметром дохода равно 18,0, значение p составляет 0,006. При анализе используется итеративный взвешенный метод наименьших квадратов, чтобы оценить уравнения регрессии следующего вида:

$$m_{it} = a_t + b \cdot \log(y_{i,t-T}) + c_1 \cdot \mathrm{Temp}_i + c_{2t} \cdot \pi_{i,t-T} + c_{3t} \cdot \pi^{nc}_{i,t-T} + c_{4t} \cdot \mathrm{District}_i + c_{5t} \cdot S_{it},$$

где m_{it} - чистый поток мигрантов в префектуре i за период между $t - T$ и t, выраженный по отношению к численности населения в момент $t - T$; Temp_i - оценка предельной температуры, рассчитанная как отклонение максимальной и минимальной температур от средней температуры; $\pi_{i,t-T}$ - плотность населения (тыс. чел./км^2); $\pi^{nc}_{i,t-T}$ - плотность населения в соседних префектурах (см. описание в данной главе); $\mathrm{District}_i$ - фиктивная переменная, обозначающая регион; S_{it} - структурная переменная, уже описанная ранее. Оценки a_t, c_{4t} и c_{5t} не показаны. Данные представлены в Приложении (разд. 11.12). Все выборки включают 47 наблюдений. (См. примечание к табл. 11.4 для получения дополнительной информации.)

Подводя итог, нужно отметить некоторые важные результаты: уровень чистой внутренней миграции в префектуре отрицательно зависит от плотности населения в этой префектуре и положительно — от плотности населения в соседних префектурах. При прочих равных условиях миграция положительно коррелирует с первоначальным уровнем дохода на душу населения. Важно отметить и схожесть коэффициентов при показателях дохода для Соединенных Штатов и Японии: общая оценка для штатов США составляет 0,026 и 0,019 для префектур Японии.

Напомним, что разница в доходе на душу населения имеет тенденцию нивелироваться с небольшой скоростью от 2,5 до 3% в год для префектур Японии. Анализируя этот результат совместно с результатами по миграции, можно сделать вывод, что уровни чистой миграции устойчивы во времени. Анализ данных подтверждает эту мысль: корреляция между средним уровнем миграции в 1955–1970 гг. и уровнем в 1970–1990 гг. равна 0,60.

11.8. Миграция в странах Европы

В данном разделе мы оценим чувствительность уровня чистой миграции к доходам в регионах для пяти крупнейших стран Европы: Германии, Великобритании, Италии, Франции и Испании. Зависимая переменная — это средний уровень чистой миграции для четырех десятилетий, начиная с 1950 г. Нам не хватает наблюдений по Великобритании в 1950-х и 1980-х гг. и по Франции в 1980-х.

Оцениваем регрессионные уравнения, подобные тем, которые мы использовали для Соединенных Штатов и Японии. Объясняющие переменные — это логарифм ВВП на душу населения или среднедушевого дохода в начале десятилетия, плотность населения в начале десятилетия, секторные переменные (доли сельского хозяйства и промышленности в начале каждого десятилетия в общей занятости или ВВП), переменная температуры и страновые фиктивные переменные. Мы оцениваем систему уравнений для этих пяти стран, при этом накладывая ограничения на коэффициенты при плотности населения и параметрах температуры, считая их неизменными во времени и внутри страны, однако коэффициенты при других переменных могут меняться как во времени, так и от страны к стране.

В табл. 11.6 представлены оценки коэффициентов при логарифме среднедушевого ВВП или дохода. В столбце (1) даны оценки для 1950-х гг., во втором — для 1960-х гг. и т. д.

Таблица 11.6

Оценка уравнения регрессии для чистой миграции в регионах Европы в 1950–1990 гг. Коэффициенты при логарифме ВВП на душу населения

	1950 1960	1960- 1970	1970- 1980	1980- 1990	1950-1990
Германия	0.0311	0.0074	0.0040	0.0024	0.0076
	(0.0121)	(0.0088)	(0.0038)	(0.0086)	(0.0014)
Великобритания	-	0.0049	−0.0069	-	−0,0041
	-	(0.0011)	(0.0013)		(0.0023)
Италия	0.0182	0.0208	0.0089	0.0309	0,0117
	(0.0041)	(0.0027)	(0.0020)	(0.0106)	(0.0018)
Франция	0.0090	--0.0008	0.0097	-	0.0100
	(0,0056)	(0.0095)	(0.0041)		(0.0036)
Испания	0.0126	0.0135	0.0117	0.0031	0,0034
	(0,0068)	(0.0112)	(0.0063)	(0.0070)	(0,0021)
В целом	0.0107	0.0072	0.0046	0.0141	0,0064
	(0.0038)	(0.0040)	(0.0024)	(0.0070)	(0.0021)

В последнем столбце даны оценки в предположении, что коэффициенты не меняются в течение всех периодов. В первой строке даны оценки для Германии, во второй - для Великобритании, в третьей - для Италии, в четвертой - для Франции, и в пятой - для Испании. В последней строке даны оценки коэффициентов при наложении ограничений на коэффициенты для всех пяти стран.

В отличие от Соединенных Штатов и Японии, оценки коэффициентов при логарифме ВВП на душу населения или дохода не являются всегда точно оцененными для европейских стран. Для Германии оценка коэффициента для 1950-х гг. положительна и значима и составляет 0.031 (0.012), тогда как для других трех десятилетий она незначима. Оценки коэффициентов при параметре дохода для Италии значимы и положительны, однако многие из оценок для Великобритании, Франции и Испания являются незначимыми.

Если мы накладываем на коэффициенты ограничение, согласно которому их значение должно оставаться неизменным во времени, но может различаться между странами, то оценки будут равны 0.0076 (0.0014) для Германии, −0.0041 (0.0023) для Великобритании, 0,0117 (0,0018) для Италии, 0.0100 (0.0036) для Франции и 0.0034 (0.0021) для Испании. Если мы накладываем на коэффициенты такое ограничение, согласно которому значения должны быть одинаковы для всех стран, но могут изменяться во времени, то оценки будут равны 0,0107 (0.0038) для 1950-х гг., 0.0072 (0.0040) для 1960-х гг., 0,0046 (0,0024) для 1970-х гг. и 0,0141 (0,0070) для 1980-х гг. Наконец, если мы накладываем ограничение на коэффициенты, согласно которому значение остается неизменным для всех стран и в течение всех периодов, то мы получаем оценку, равную 0,0064 (0,0021). Хотя эта оценка значима и положительна, ее значение оказывается намного меньше по сравнению с сопоставимыми оценками для Соединенных Штатов (0,026) и Японии (0,019). Поэтому главный вывод заключается в том, что уровень миграции для регионов Европы положительно коррелирует с ВВП или доходом в расчете на душу населения, однако эта связь является достаточно слабой, и коэффициенты не могут быть оценены с большой точностью.

11.9. Миграция и конвергенция

В гл. 9 мы установили, что миграция работников с низким человеческим капиталом из бедных экономик в богатые приводит к ускорению процесса конвергенции по доходу и выпуску в расчете на душу населения. Это влияние миграции будет входить в оценки коэффициента конвергенции в уравнениях экономического роста. В данном разделе мы попытаемся оценить воздействие миграции на конвергенцию, включив показатель чистой миграции в число объясняющих переменных в уравнении роста. Если миграция является одной из главных причин конвергенции (и если мы можем рассматривать уровень миграции как экзогенно заданную величину с учетом ошибки в уравнении роста), то оценка коэффициента конвергенции β должна быть меньше, если параметр миграции остается без изменений.

Мы вводим значение показателя чистой миграции за единицу времени в уравнение роста, результаты оценки которого даны в табл. 11.7. В первой строке указана оценка скорости конвергенции β для штатов США. Весь период с 1920 по 1990 г. разделен на семь десятилетних периодов. Регрессия включает специфические для каждого периода константы, фиктивные переменные для четырех исследуемых регионов, а также структурную переменную, описанную ранее. Коэффициент при логарифме первоначального дохода на душу населения предполагается одним и тем же для каждого периода. Этот подход совпадает с подходом при расчете общей оценки, указанной в столбце (3) табл. 11.1, однако теперь отсутствуют два более ранних периода.

В столбце (1) табл. 11.1 дана оценка β, когда уровень миграции не включается в регрессию. Скорость конвергенции равна 0,0196 (0,0025), что близко к уже известным нам 2% в год. В столбце (2) добавляется показатель чистой миграции в качестве регрессора. (Коэффициент при переменной предполагается одинаковым для каждого периода.) Оценка коэффициента при показателе уровня миграции положительна и значима и составляет 0,093 (0,030), а оценка β, равная 0,0231 (0,0028), лишь незначительно выше значения из столбца (1). Таким образом, вопреки ожиданиям, оценка β не уменьшается, если уровень чистой миграции считать постоянным.

На результаты, вероятнее всего, оказала влияние эндогенность уровня чистой миграции. В частности, штаты с более благоприятными перспективами роста (вследствие факторов, которые не считаются постоянными при включении их в качестве объясняющих переменных) будут характеризоваться более высокими среднедушевыми темпами прироста дохода и более высоким уровнем чистой миграции. Мы попытаемся учесть экзогенные сдвиги в миграционном процессе, используя в качестве инструментальных параметров объясняющие переменные, ранее используемые для объяснения уровня чистой миграции в табл. 11.4. В состав этих переменных входят плотность населения и логарифм числа дней отопительного периода. (Предполагается, что эти влияющие на миграцию факторы не входят непосредственно в уравнение роста.) Результаты, представленные в столбце (3) табл. 11.7, показывают, что коэффициент при уровне миграции, равный −0,006 (0,048), является незначимым, а оценка коэффициента β составляет 0,0174 (0,0033), что незначительно ниже, чем значение в первом столбце. Из данных результатов следует, что миграция не оказывает сильного воздействия на β-конвергенцию в штатах США.

Во второй строке табл. 11.7 приведены результаты такого же анализа для Японии. В столбце (1) дана совместная оценка β для семи пятилетних периодов, когда уровень миграции не включается в качестве регрессора. Оценка β, равная 0,0312 (0,0040), та же самая, что и в третьем столбце табл. 11.2. При добавлении уровня миграции во втором столбце табл. 11.7 оценка коэффициента при данном регрессоре положительна и совпадает с оценкой для штатов США, равной 0,0907 (0,0041), а оценка β увеличивается до 0,0340 (0,0044). В столбце (3), в который включаются инструментальные переменные для миграции, оценка коэффициента при миграции равна −0,11 (0,11), но является незначимой, а оценка β, равная 0,0311 (0,0042), практически совпадает со значением в первом столбце. Следовательно, как и для штатов США, миграция оказывается не главным фактором, влияющим на β-конвергенцию между префектурами Японии.

В последних пяти строках табл. 11.7 даны результаты анализа для пяти крупнейших стран Европы. Основные выводы совпадают с выво-

Таблица 11.7

Миграция и конвергенция

	(1) Без учета миграции	(2) С учетом миграции (с помощью МНК)		(3) С учетом миграции (с помощью инструментальных переменных)	
	β	β	Миграция	β	Миграция
США	0,0196	0,0231	0,0931	0,0174	−0,006
1920 1990	(0,0025)	(0,0028)	(0,0305)	(0,0033)	(0,048)
Япония	0,0312	0,0340	0,0907	0,0311	−0,108
1955 1990	(0,0040)	(0,0044)	(0,0041)	(0,0042)	(0,112)
Германия	0,0243	0,0240	−0,014	0,0181	−0,542
1950 1990	(0,0088)	(0,0091)	(0,235)	(0,0093)	(0,429)
Великобритания	0,0176	0,0220	0,116	0,0261	0,222
1960 1980[a]	(0,0132)	(0,0203)	(0,395)	(0,0267)	(0,570)
Италия	0,0206	0,0244	0,166	0,0180	−0,121
1950 1990	(0,0058)	(0,0070)	(0,156)	(0,0098)	(0,370)

[a] Два периода.

	(1) Без учета миграции	(2) С учетом миграции (с помощью МНК)		(3) С учетом миграции (с помощью инструментальных переменных)	
	β	β	Миграция	β	Миграция
Франция	0,0224	0,0172	−0,038	0,0177	−0,084
1950-1980[a]	(0,0265)	(0,0063)	(0,126)	(0,0065)	(0,178)
Испания	0.0245	0,0295	−0,124	0,0268	−0,068
1950–1990	(0,0102)	(0,0096)	(0,102)	(0,0119)	(0,203)

Примечание. Уравнения регрессии для темпов прироста дохода или ВВП на душу населения аналогичны уравнениям для получения общих оценок, представленных в столбце (3) табл. 11.1 для штатов США; в столбце (3) табл. 11.2 для префектур Японии; во втором столбце табл. 11.3 для регионов Европы (с той лишь разницей, что здесь пять европейских стран рассматриваются отдельно). Коэффициенты β относятся к логарифму первоначального дохода или ВВП на душу населения, а коэффициенты миграции относятся к уровню чистой миграции. В столбце (1) уровень миграции не включен в качестве регрессора. В столбце (2) в число регрессоров добавляется уровень миграции и уравнение оценивается с помощью МНК. В столбце (3) используются инструментальные переменные. Инструментальные переменные включаются в качестве регрессоров в уравнения миграции, как это сделано в табл. 11.4 для Соединенных Штатов, табл. 11.5 для Японии и табл. 11.6 для Европы.

[a]Три периода.

дами по США и Японии в том, что оценки коэффициентов β не сильно меняются, если считать уровень миграции постоянным. Один из неожиданных результатов заключается в том, что при оценивании регрессии для регионов Европы с помощью МНК уровень чистой миграции оказывается незначимым, тогда как обычно эндогенность предполагала наличие положительных коэффициентов. Такие результаты могут быть следствием того, что не удается точно оценить региональный уровень чистой миграции в странах Европы, что в итоге создает трудности при оценке уравнений миграции.

В гл. 9 также был сделан вывод о том, что экономики с более высокой чувствительностью чистой миграции к доходу на душу населения будут характеризоваться более высокими коэффициентами конвергенции β. Чтобы проверить этот результат, на рис. 11.12 мы изобразим соотношение между оценками коэффициентов β и оценками коэффициентов при логарифме ВВП или дохода на душу населения из уравнений миграции.

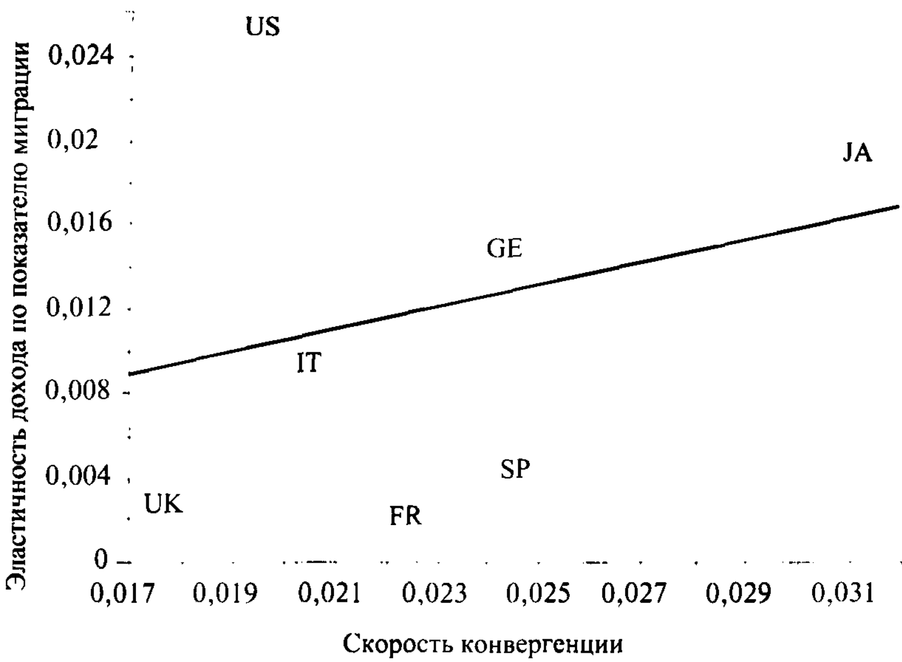


Рис. 11.12. Коэффициент дохода в уравнении миграции и скорость конвергенции. По вертикальной оси откладываются значения оценок коэффициента при логарифме дохода или ВВП на душу населения из уравнений миграции. По горизонтальной оси откладываются значения оценок параметра конвергенции β в уравнениях роста. Семь точек (соответствующие США, Японии, Германии, Великобритании, Италии, Франции и Испании) дают право говорить о наличии положительной связи, как и предполагалось в теории миграции и роста

На графике отображены семь точек, соответствующие США, Японии, Германии, Великобритании, Италии, Франции и Испании. На графике прослеживается слабая положительная зависимость между этими двумя показателями; корреляция составляет 0,27[1]. Неточность оценивания коэффициентов в уравнениях миграции для стран Европы означает, что делать выводы из наличия этой зависимости нужно с большой осторожностью. Для более подробного анализа см. Braun (1993).

11.10. β-конвергенция в панельном анализе с фиксированными эффектами

Вслед за Islam (1995), многие исследователи пытались оценить скорость конвергенции, используя панельные данные и с учетом наличия фиксированных эффектов. В работе Caselli, Esquivel and Laffort (1996), например, используются панельные данные для пространственного анализа стран, в то время как в работе Canova and Marcet (1995) используются региональные данные. Одно из преимуществ панельного анализа, по сравнению с пространственным, заключается в том, что нет необходимости считать устойчивое состояние постоянным, поскольку его можно неявным образом оценить, используя фиксированные эффекты. Главный результат заключается в том, что оценки скорости конвергенции для панельных данных с фиксированными эффектами будут намного больше, чем 2%, полученных при пространственном анализе или при панельном анализе без фиксированных эффектов. Скорость конвергенции в таком случае будет находиться в диапазоне 12–20% в год.

Одна из возможных проблем, возникающих при работе с фиксированными эффектами, заключается в том, что для получения корректных результатов необходимо наличие достаточного количества наблюдений во времени. Эти данные могут быть получены, если сократить периоды времени, за которые рассчитываются темпы прироста. Другими словами, зависимая переменная должна быть ежегодным темпом прироста или темпом прироста за период от двух до пяти лет. Проблема для таких коротких отрезков времени заключается в том, что темпы прироста будут захватывать краткосрочные колебания вокруг линии тренда, а не показывать наличие долгосрочной конвергенции. В част-

[1]Коэффициенты β для Франции и Великобритании оценены для тех периодов, для которых доступны данные о миграции. Коэффициент β, оцененный для всей выборки, будет ниже для Франции и выше для Великобритании. Если мы воспользуемся этими альтернативными оценками β, то корреляция с коэффициентом из уравнения миграции будет немного выше и составит 0,32.

ности, существование деловых циклов будет смещать вверх оценки скорости конвергенции. В таком случае, как показал Shioji (1997), при коррекции оценок с учетом ошибки измерения, возникающей вследствие делового цикла, оценка скорости конвергенции в панельном анализе с фиксированными эффектами будет по-прежнему близка к 2% в год.

11.11. Заключение

В данной главе мы проанализировали конвергенцию по штатам США с 1880 г., по префектурам Японии с 1930 г. и по регионам восьми стран Европы с 1950 г. Результаты показывают наличие безусловной β-конвергенции между регионами в данных экономиках. Таким образом, бедные регионы в этих странах по показателям на душу населения растут быстрее богатых. Конвергенция является безусловной, поскольку она возникает, когда никакие другие объясняющие переменные, за исключением первоначального уровня дохода или выпуска в расчете на душу населения, не считаются постоянными.

Мы можем считать, что результаты соответствуют неоклассической модели роста, описанной в гл. 1 и 2, если регионы внутри каждой страны характеризуются практически одинаковыми системами предпочтений, технологиями и политическими институтами. Эта относительная однородность приводит к одному и тому же устойчивому состоянию. Однако наблюдаемая конвергенция также соответствует моделям распространения технологии, описанным в гл. 8.

Неожиданным стало то, что скорость β-конвергенции оказалась практически одинаковой для всех выборок. Оценка β в разных экономиках составляла примерно 2–3% в год. Такая низкая скорость конвергенции означает, что, для того чтобы сократить разрыв в доходах на душу населения наполовину, потребуется 25–30 лет. Эта цифра отличается от количественной оценки, получаемой в неоклассической модели роста, если доля капитала близка к одной трети. Однако эмпирически это значение будет соответствовать теории, если доля капитала составляет около трех четвертей.

Анализ миграции показал, что уровень чистой миграции положительно соотносится с первоначальным уровнем дохода или выпуска на душу населения, если другие объясняющие переменные считаются постоянными. Эта связь четко прослеживается для штатов США и префектур Японии, но является более слабой для регионов пяти крупнейших стран Европы. Мы также проверили, может ли наличие β-конвергенции по региональным данным быть следствием чистой миграции. Эмпирический анализ не позволяет дать четкий ответ на данный вопрос, однако указывает на то, что миграция играет лишь незначительную роль в процессе конвергенции.

11.12. *Приложение*. Региональные выборки

В данном разделе представлены данные по штатам США, регионам восьми стран Европы (Германии, Великобритании, Италии, Франции, Нидерландов, Бельгии, Дании и Испании) и префектурам Японии. Данные по регионам других стран, таких как Аргентина, Бразилия, Китай, Индия, Мексика и СССР, также являются доступными. Дополнительная информация по городам и графствам также доступна; см., например, Ades and Glaeser (1995).

11.12.1. Данные по штатам США

В табл. 1.8 представлены данные по штатам США (изображенным на карте США на рис. 11.13). Показатели номинального личного дохода и номинального личного дохода на душу населения по штатам США с 1929 г. предоставлены Департаментом торговли США (Бюро экономического анализа, 2002: обновления появляются в изданиях «U.S. Survey of Current Business»). Метод расчета личного дохода, используемый в региональной системе счетов, соответствует методу, используемому в системе национальных счетов. Цифры даны для каждого года, но значения до 1965 г. получены методом интраполяции оценок, рассчитанных для пятилетних интервалов. Данные представлены с учетом и без учета трансфертных платежей. Значения валового продукта штата даны для каждого года, начиная с 1963 г. (издание «U.S. Survey of Current Business»).

Точные данные об уровне цен недоступны на уровне штатов, хотя есть некоторая информация для городов. Мы рассчитывали реальный доход, разделив номинальные уровни личного дохода на национальный индекс потребительских цен (для базового периода 1982–1984 гг. ИПЦ = 1,0). (Для расчета показателя для периода с 1947 г. мы использовали данные из базы Citibase, за исключением данных о жилье. Для периода до 1947 г. мы использовали общий индекс, представленный в отчете Министерства торговли США за 1975 г., серия E135.) Поскольку в каждой момент времени всеми штатами используется один и тот же индекс, то конкретный выбранный индекс не влияет на относительные уровни и темпы прироста в штатах.

Данные по

Штат		Доход на душу населения в 1900 г. (тыс. долл., 1982 1984 базовый период)	Доход на душу населения в 2000 г. (тыс. до 1982 1984 - базовый период)
AL	Алабама	1.00	12.95
AZ	Аризона	3.69	13.79
AR	Арканзас	1.03	12.11
CA	Калифорния	4.20	17.78
CO	Колорадо	3.66	17.90
CT	Коннектикут	3.19	22.55
DE	Делавэр	2.52	17.15
FL	Флорида	1.29	15.36
GA	Джорджия	0.98	15.33
ID	Айдахо	2.54	13.04
IL	Иллинойс	2.99	17.57
IN	Индиана	2.09	14.81
IA	Айова	2.33	14.55
KS	Канзас	2.15	15.12
KE	Кентукки	1.38	13.27

Таблица 11.8

штатам США

...л.,	Темп прироста дохода на душу населения	Население в 1900 г. (млн чел.)	Население в 1990 г. (млн чел.)	Темп прироста населения с 1900 по 1990 г.	Чистая миграция с 1900 по 1989 г. (млн чел.)
	0.0256	1,829	4,046	0,0088	−1,32
	0.0132	0.093	3,681	0.0409	2.03
	0,0246	1.312	2,353	0,0065	−1,14
	0.0144	1.403	29,956	0.0340	16,59
	0,0159	0,529	3,302	0,0203	1,11
	0.0196	0.908	3,290	0.0143	0,76
	0,0192	0,185	0,669	0,0143	0,18
	0.0248	0.529	13.044	0,0356	9.37
	0,0275	2,222	6,504	0,0120	−0,28
	0,0164	0.154	1,011	0,0209	0,04
	0,0177	4.822	11,443	0,0096	−0,17
	0,0196	2.516	5,554	0,0088	−0.30
	0,0183	2,232	2,780	0,0024	−1,41
	0.0195	1,470	2,480	0,0058	−0,65
	0,0226	2.147	3.690	0,0060	−1,54

Штат	Доход на душу населения в 1900 г. (тыс. долл., 1982 1984 базовый период)	Доход на душу населения в 2000 г. (тыс. долл., 1982 1984 базовый период)	Темп прироста дохода на душу населения	Население в 1900 г. (млн чел.)	Население в 1990 г. (млн чел.)	Темп прироста населения с 1900 по 1990 г.	Чистая миграция с 1900 по 1989 г. (млн чел.)
LA Луизиана	1,47	12,71	0,0216	1,382	4,211	0,0124	–0,52
ME Мэн	2,16	14,02	0,0187	0,694	1,231	0,0064	–0,11
MD Мэриленд	2,34	18,55	0,0207	1,188	4,802	0,0155	1,26
MA Массачусетс	3,49	20,81	0,0179	2,850	6,020	0,0083	0,14
MI Мичиган	2,13	16,04	0,0202	2,421	9,314	0,0150	0,62
MN Миннесота	2,38	17,61	0,0200	1,737	4,390	0,0103	–0,34
MS Миссисипи	0,97	11,51	0,0247	1,551	2,574	0,0056	–1,62
MO Миссури	2,16	15,00	0,0194	3,107	5,127	0,0056	–0,83
MT Монтана	4,77	12,44	0,0096	0,226	0,799	0,0140	–0,07
NE Небраска	2,43	15,26	0,0184	1,066	1,580	0,0044	–0,71
NV Невада	4,54	16,31	0,0128	0,035	1,224	0,0395	0,79
NH Нью-Гемпшир	2,46	18,23	0,0200	0,412	1,111	0,0110	0,31
NJ Нью-Джерси	3,19	20,48	0,0186	1,884	7,735	0,0157	2,20
NM Нью-Мексико	1,70	12,08	0,0196	0,180	1,520	0,0237	0,16
NY Нью-Йорк	3,71	19,04	0,0164	7,269	18,002	0,0101	1,13
NC Северная Каролина	0,82	14,81	0,0289	1,894	6,653	0,0140	–0,30
ND Северная Дакота	2,40	13,67	0,0174	0,312	0,637	0,0079	–0,49
OH Огайо	2,55	15,40	0,0180	4,158	10,859	0,0107	0,14
OK Оклахома	1,31	13,01	0,0230	0,670	3,146	0,0172	–0,19
OR Орегон	2,85	15,26	0,0168	0,395	2,861	0,0220	1,27

Штат	Доход на душу населения в 1900 г. (тыс. долл., 1982 1984 - базовый период)	Доход на душу населения в 2000 г. (тыс. долл., 1982 1984 - базовый период)	Темп прироста дохода на душу населения	Население в 1900 г. (млн чел.)	Население в 1990 г. (млн чел.)	Темп прироста населения с 1900 по 1990 г.	Чистая миграция с 1900 по 1989 г. (млн чел.)
PA Пенсильвания	2,88	16,30	0,0173	6,302	11,893	0,0071	–1,99
RI Род-Айленд	3,36	16,09	0,0157	0,429	1,005	0,0095	0,05
SC Южная Каролина	0,86	13,22	0,0273	1,340	3,498	0,0107	–0,75
SD Южная Дакота	2,11	14,34	0,0192	0,381	0,696	0,0067	–0,43
TN Теннеси	1,16	14,28	0,0251	2,021	4,887	0,0098	–0,46
TX Техас	1,58	15,30	0,0227	3,049	17,055	0,0191	3,33
UT Юта	2,11	12,89	0,0181	0,272	1,729	0,0206	0,06
VT Вермонт	2,19	14,85	0,0191	0,344	0,565	0,0055	–0,05
VA Вирджиния	1,27	17,14	0,0260	1,854	6,213	0,0134	0,61
WA Вашингтон	3,40	17,18	0,0162	0,496	4,909	0,0255	2,16
WV Западная Вирджиния	1,35	12,01	0,0219	0,959	1,790	0,0069	–1,10
WI Висконсин	2,05	15,49	0,0202	2,058	4,906	0,0097	–0,33
WY Вайоминг	3,57	15,14	0,0144	0,089	0,452	0,0181	0,03

Примечание. Аббревиатура из двух букв (почтовый индекс) для каждого штата указана перед его названием. Региональная классификация при исследовании такова: Северо-Восток: ME, NH, VT, MA, RI, CT, NY, NJ, PA. Юг: DE, MD, VA, WV, NC, SC, GA, FL, KY, TN, AL, MS, AR, LA, OK, TX. Средний Запад: MN, IA, MO, ND, SD, NE, KS, OH, IN, IL, MI, WI. Запад: MT, ID, WY, CO, NM, AZ, UT, NV, WA, OR, CA.

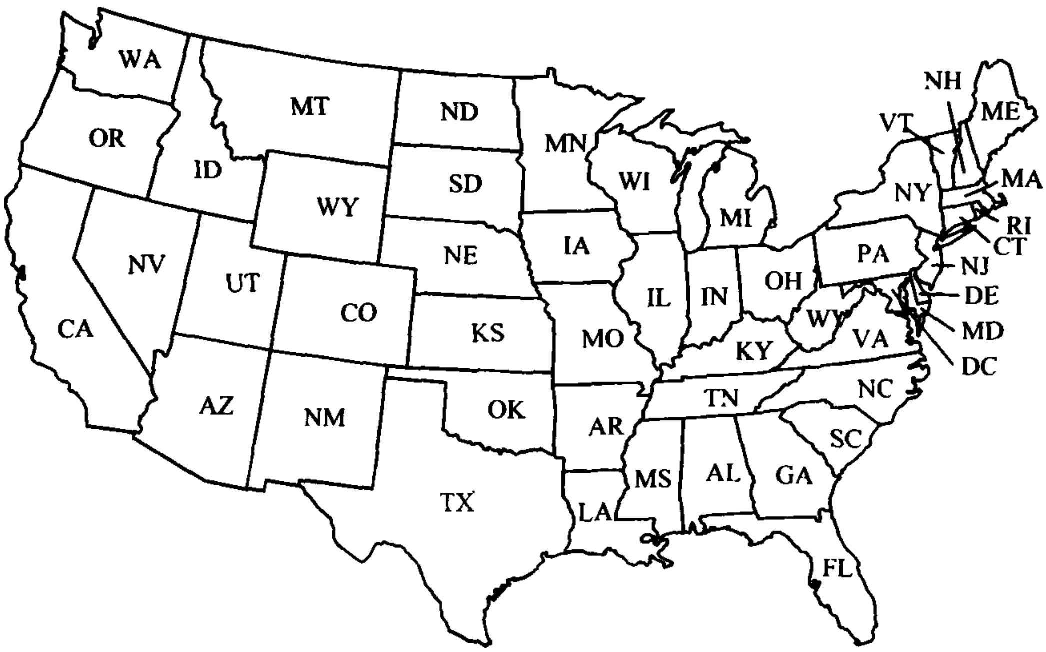


Рис. 11.13. Карта США

Более ранние значения дохода представлены в работе Easterlin (1960a, 1960b) для 1920 г. (48 штатов), для 1900 г. (48 штатов и территорий), для 1880 г. (47 штатов и территорий, исключая Оклахому) и для 1840 г. (29 штатов и территорий). Эти данные не содержат трансфертных платежей, а цифра для 1840 г. не включает все компоненты личного дохода. Оценки индекса потребительских цен по всем компонентам (Министерство торговли США, 1975 г., серия E135) используются, чтобы рассчитать более ранние значения.

Для анализируемого периода, начиная с 1930 г., трудовые доходы (включая доходы от индивидуальной трудовой деятельности) могут быть разделены между девятью секторами: сельское хозяйство; горная промышленность; строительство; общее производство; транспорт и коммунальное обслуживание; оптовая и розничная торговля; финансы, страхование и недвижимость; услуги; государство и государственные предприятия. До 1930 г. доступна информация о доле дохода, приходящегося на сельское хозяйство.

Плотность населения - это отношение численности населения к общей площади (земля плюс вода); данные о площади штатов предоставлены Министерством торговли США, Бюро переписи (1990). Чистые потоки миграции могут быть рассчитаны на основе данных переписи с учетом изменения численности населения за период вычитанием количества рождений и прибавлением количества смертей.

11.12.2. Данные по странам Европы

В табл. 11.9 представлены выборочные данные по регионам стран Европы (см. карту на рис. 11.14). Мы располагаем данными по ВВП, численности населения и по значениям сопутствующих параметров для регионов восьми стран Европы: Германия (11 регионов), Великобритания (11), Италия (20), Франция (21), Нидерланды (4), Бельгия (3), Дания (3), Испания (17 регионов).

Для всех стран, кроме Испании, данные относительно ВВП и численности населения для 1950, 1960 и 1970 гг. взяты из работы Molle, Van Hoist and Smits (1980). Данные для 1966 г. (исключая Францию и Данию), 1970 г. (исключая Данию), 1974, 1980, 1985 и 1990 гг. (исключая Данию) предоставлены Евростатом. Для Испании данные об

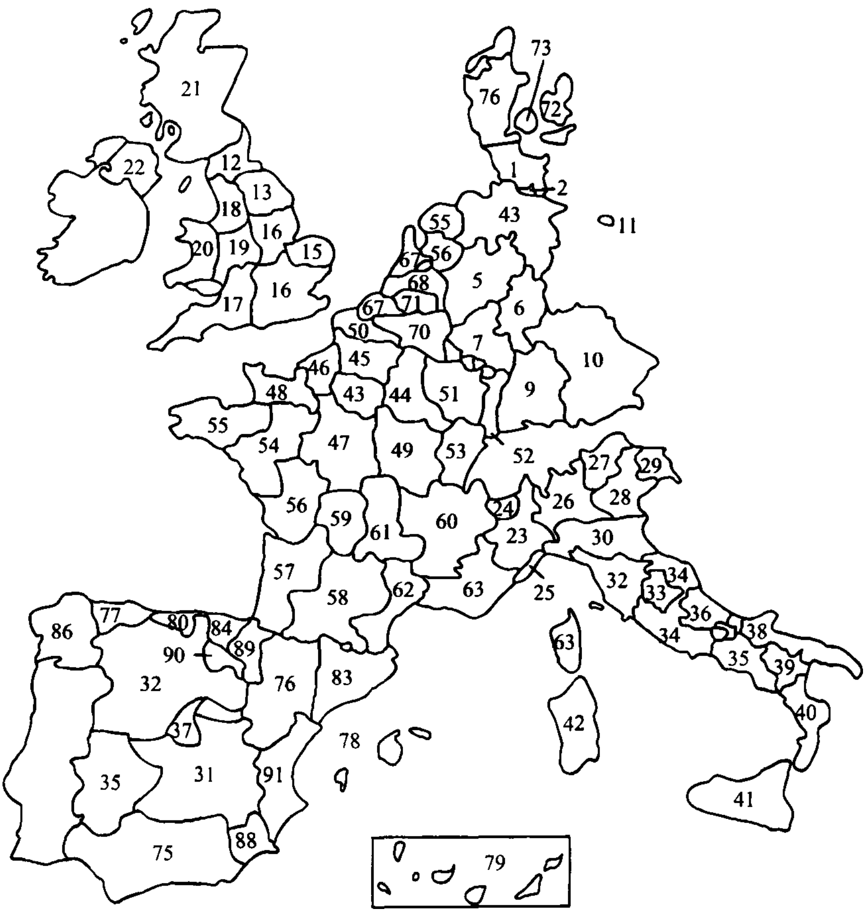


Рис. 11.14. Карта Европы

Таблица 11.9

Данные по регионам Европы

Регион		Реальный ВВП на душу населения в 1950 г. по отношению к среднему для страны значению[a]	Реальный ВВП на душу населения в 1990 г. по отношению к среднему для страны значению[b]	Разница между темпом прироста реального ВВП на душу населения и средним темпом прироста[c]	Численность населения в 1950 г.[d] (млн чел.)	Численность населения в 1990 г.[e] (млн чел.)	Темп прироста населения[f]	Чистая миграция за различные периоды[g] (млн чел.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Германия							
1.	Шлезвиг - Гольштейн	−0,36	−0,20	0,0039	2,595	2,615	0,0002	0,31
2.	Гамбург	0,54	0,42	−0,0029	1,606	1,641	0,0005	0,13
3.	Нижняя Саксония	−0,25	−0,18	0,0019	6,797	7,342	0,0019	0,21

[a] Разница между логарифмом ВВП на душу населения в 1950 г. и средним для страны значением в 1950 г. Для Испании разница рассчитана для 1955 г.

[b] Разница между логарифмом ВВП на душу населения в 1990 г. и средним для страны значением в 1990 г. Для Дании разница рассчитана для 1985 г., для Испании 1987 г.

[c] Разница между ежегодным темпом прироста ВВП на душу населения и средним для страны темпом прироста за период с 1950 по 1990 г. Для Дании представлено значение за период с 1950 по 1985 г., для Испании - с 1955 по 1987 г.

[d] Значения для Испании даны для 1951 г.

[e] Значения для Дании даны для 1986 г.

[f] Ежегодный темп прироста населения с 1950 по 1990 г. Для Дании с 1950 по 1986 г., для Испании - с 1951 по 1990 г.

[g] Периоды даны для Германии с 1961 по 1985 г., для Италии с 1951 по 1987 г., для Франции - с 1954 по 1982 г., для Испании с 1951 по 1987 г.

1	2	3	4
4.	Бремен Бранденбург	0,34	0,20
5.	Северный Рейн Вестфалия	0,12	−0,08
6.	Гессен	−0,06	0,12
7.	Рейнланд Пфальц	−0,25	−0,15
8.	Саар	0,17	−0,10
9.	Баден – Вюртемберг	−0,03	0,02
10.	Бавария	−0,19	−0,01
11.	Берлин (западный)	−0,02	−0,04
	Великобритания		
12.	Север	−0,07	−0,07
13.	Йоркшир – Хамберсайд	0,11	−0,01
14.	Ист-Мидлендс	−0,02	0,04
15.	Восточная Англия	−0,04	0,10
16.	Юго-Восточная Англия	0,30	0,27
17.	Юго-Западная Англия	−0,22	0,03
18.	Северо-Западная Англия	0,08	−0,02
19.	Уест Мидлендс	0,14	−0,01
20.	Уэльс	−0,24	−0,10
21.	Шотландия	−0,03	0,00
22.	Северная Ирландия	−0,35	−0,22
	Италия		
23.	Пьемонт	0,47	0,23
24.	Валле д'Аоста	0,53	0,31
25.	Лигурия	0,61	0,18
26.	Ломбардия	0,52	0,34

5	6	7	8	9
−0,0034	0,559	0,679	0,0049	0,10
−0,0049	13,207	17,248	0,0067	2,05
0,0044	4,324	5,718	0,0070	1,19
0,0023	3,005	3,735	0,0054	0,25
−0,0067	0,955	1,071	0,0029	0,00
0,0014	6,430	9,729	0,0104	1,78
0,0045	9,185	11,337	0,0053	1,52
−0,0005	2,147	2,118	−0,0003	0,26
−0,0008	3,133	3,075	−0,0005	−0,24
−0,0039	4,494	4,952	0,0024	−0,16
0,0005	2,909	4,019	0,0081	0,21
0,0027	1,381	2,059	0,0100	0,34
−0,0016	15,174	17,458	0,0035	−0,45
0,0056	3,238	4,667	0,0091	0,66
−0,0034	6,424	6,389	−0,0001	−0,48
−0,0045	4,422	5,219	0,0041	−0,20
0,0025	2,584	2,881	0,0027	0,08
−0,0002	5,096	5,102	0,0000	−0,45
0,0031	1,371	1,589	0,0037	−0,20
−0,0066	3,504	4,357	0,0054	0,87
−0,0057	0,095	0,116	0,0050	0,02
−0,0106	1,555	1,723	0,0026	0,30
−0,0045	6,433	8,928	0,0082	1,25

1	2	3	4
27.	Трентино Альто Адидже	0,19	0,22
28.	Венетоя	–0,01	0,19
29.	Фриули Венеция Джулия	0,12	0,24
30.	Эмилия Романья	0,17	0,28
31.	Марке	–0,06	0,08
32.	Тоскана	0,16	0,13
33.	Умбрия	–0,04	0,03
34.	Лацио	0,21	0,17
35.	Кампания	–0,29	–0,33
36.	Абруццо	–0,32	–0,10
37.	Молизе	–0,49	–0,20
38.	Апулия	–0,33	–0,26
39.	Базиликата	–0,47	–0,41
40.	Калабрия	–0,48	–0,46
41.	Сицилия	–0,32	–0,37
42.	Сардиния	–0,16	–0,27
	Франция		
43.	Иль-де-Франс	0,61	0,50
44.	Шампань Арденны	0,05	0,11
45.	Пикардия	0,05	–0,05
46.	Верхняя Нормандия	0,13	0,05
47.	Центр	–0,18	0,02
48.	Нижняя Нормандия	–0,14	–0,04
49.	Бургундия	–0,11	–0,01
50.	Север Па-де-Кале	0,17	–0,09

Продолжение табл. 11.9

5	6	7	8	9
0,0007	0.735	0,889	0,0048	−0,03
0,0050	3,841	4,392	0,0034	−0,35
0,0030	1,200	1,202	0,0000	−0,58
0,0027	3,509	3,925	0,0028	0,19
0,0036	1,352	1,433	0,0015	−0,13
−0,0006	3,152	3,562	0,0031	0,29
0,0016	0,806	0,822	0,0005	−0,07
−0,0008	3,322	5,181	0,0111	0,62
−0.0011	4.276	5,831	0,0078	−0,88
0,0054	1,238	1,269	0.0006	−0.27
0.0071	0,398	0,336	−0,0042	−0,14
0,0017	3.181	4.076	0.0062	−0.77
0,0016	0,617	0.624	0,0003	−0,25
0.0005	1.987	2.153	0.0020	−0.79
−0,0012	4,422	5,185	0,0040	−1,08
−0.0027	1,259	1.661	0.0069	−0,23
−0.0026	7.009	10,227	0,0094	1,02
0,0015	1,110	1,341	0,0047	−0.06
−0,0026	1.355	1.804	0,0072	0,04
−0,0020	1,232	1,731	0.0085	0,03
0,0049	1,758	2,363	0.0074	0,30
0,0024	1.145	1,385	0,0048	−0,10
0.0025	1.376	1,602	0,0038	0,10
−0,0067	3,309	3,945	0.0044	−0,39

1	2	3	4	5	6	7	8	9
51.	Лотарингия	0,24	−0,03	−0,0067	1,874	2,293	0,0050	−0,22
52.	Эльзас	0,19	0,14	−0,0014	1,196	1,619	0,0075	0,15
53.	Франш-Конте	0,05	0,03	−0,0005	0,841	1,092	0,0065	0,02
54.	Страна Луары	−0,11	−0,03	0,0020	2,293	3,048	0,0071	0,03
55.	Бретань	−0,20	−0,08	0,0030	2,358	2,784	0,0042	0,03
56.	Пуату Шарант	−0,25	−0,11	0,0035	1,379	1,588	0,0035	−0,03
57.	Аквитания	−0,15	0,00	0,0036	2,206	2,787	0,0058	0,35
58.	Юг Пиренеи	−0,27	0,10	0,0043	1,982	2,423	0,0050	0,29
59.	Лимузен	−0,05	−0,14	−0,0023	0,760	0,719	−0,0014	0,04
60.	Рона Альпы	0,12	0,09	0,0009	3,580	5,338	0,0100	0,77
61.	Овернь	−0,06	−0,09	−0,0009	1,261	1,314	0,0010	0,03
62.	Лангедок Руссильон	−0,18	−0,14	0,0008	1,453	2,119	0,0094	0,48
63.	Прованс Альпы							
64.	Лазурный берег	0,08	−0,01	−0,0021	2,533	4,499	0,0144	1,52
	Корсика							
	Нидерланды							
65.	Север	−0,10	0,04	0,0035	1,215	1,596	0,0068	—
66.	Восток	−0,12	−0,13	−0,0003	1,788	3,050	0,0134	
67.	Запад	0,18	0,12	−0,0015	5,155	6,996	0,0076	—
68.	Юг	0,04	−0,03	−0,0016	2,007	3,306	0,0125	
	Бельгия							
69.	Фландрия	−0,14	0,09	0,0057	3,963	4,486	0,0030	—
70.	Валлония	−0,01	−0,21	−0,0049	2,841	3,251	0,0034	
71.	Брабант	0,15	0,12	−0,0008	1,849	2,248	0,0049	

Окончание табл. 11.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Дания							
72.	Зеландия Лолланн Фальстер Борнхольм	0,08	0,19	0,0031	1,984	1,718	−0,0040	-
73.	Фюн	−0,02	−0,14	−0,0034	0,396	0,586	0,0109	-
74.	Ютландия	−0,06	−0,05	0,0003	1,902	2,817	0,0109	-
	Испания							
75.	Андалусия	−0,29	−0,29	0,0002	5,621	6,920	0,0053	−1,67
76.	Арагон	0,01	0,08	0,0022	1,095	1,213	0,0026	−0,12
77.	Астурия	0,17	−0,06	−0,0074	0,893	1,126	0,0059	−0,02
78.	Балеарские острова	0,08	0,34	0,0080	0,423	0,682	0,0122	0,12
79.	Канарские острова	−0,22	−0,03	0,0059	0,800	1,485	0,0158	0,02
80.	Кантабрия	0,18	0,05	−0,0043	0,406	0,527	0,0067	−0,04
81.	Кастилия Ла-Манча	−0,43	−0,26	0,0052	2,028	1,714	−0,0043	−0,91
82.	Кастилия Леон	−0,13	−0,11	0,0007	2,864	2,626	−0,0022	−0,97
83.	Каталония	0,34	0,25	−0,0029	3,271	6,008	0,0156	1,42
84.	Страна Басков	0,74	0,11	−0,0197	1,075	2,129	0,0175	0,43
85.	Эстремадура	−0,58	−0,43	0,0047	1,366	1,129	−0,0049	−0,70
86.	Галисия	−0,36	−0,20	0,0050	2,604	2,804	0,0019	−0,41
87.	Мадрид	0,48	0,34	−0,0042	1,956	4,876	0,0234	1,40
88.	Мурсия	−0,35	−0,15	0,0062	0,759	1,027	0,0078	−0,16
89.	Наварра	0,19	0,13	−0,0019	0,384	0,521	0,0078	0,00
90.	Риоха	0,11	0,14	0,0008	0,230	0,260	0,0032	−0,03
91.	Валенсия	0,05	0,10	0,0014	2,316	3,787	0,0126	0,54

Примечание. Значения для регионов соответствуют значениям, используемым для построения графика на рис. 11.4.

уровне регионального дохода и ВВП для периода с 1955 по 1987 г. опубликованы в различных изданиях Банка Бильбао (Banco de Bilbao). Данные о численности населения взяты из издания Национального института статистики (INE) *Anuario Estatistico de Espana* (различные выпуски). Первоначально данные относились к 50 провинциям и затем были объединены в 17 регионов.

У нас нет данных относительно уровня цен в регионах. Более того, некоторые значения ВВП иногда представлены в индексной форме и их нельзя сравнить между странами. Поэтому мы концентрируем внимание на значениях регионального ВВП, который выражен как отклонение от среднего значения для соответствующей страны.

Для всех стран, кроме Испании, в работе Molle, Van Hoist and Smits (1980) дана информация о занятости населения в трех секторах экономики (сельском хозяйстве, промышленности и услугах) для 1950, 1960 и 1970 гг. Для других лет в базах данных Евростата также содержится информация о распределении ВВП между этими же тремя секторами. Информация о распределении ВВП между тремя секторами для Испании в различные годы представлена в публикациях Банка Бильбао.

Чистые потоки миграции рассчитаны для пяти наиболее крупных стран исходя из информации относительно численности населения, количества рождений и смертей. Источники данных в самих странах следующие: Германия - статистические федеральные ведомства (Statistischen Bundesamtes), *Statistisches Jahrbuch für die Bundesrepublik Deutschland* (издания различных лет); Великобритания - *Population Trends 51* (весна 1988); Франция – INSEE, *Statistiques etIndicateurs des Regions Francaises* (1978), INSEE, *Donnes de Demographie Regionale* (1982, 1986); Италия — ISTAT, *Sommario Storice di Statistiche Sulla Populazzione: Anni 1951–1987* (1990); Испания – INE, *Anuario Estatistico de Espana* (различные издания).

11.12.3. Данные по префектурам Японии

Данные о префектурах Японии представлены в табл. 11.10 (карта префектур показана на рис. 11.15). Данные о доходе с 1955 г. предоставлены Агентством экономического планирования Японии (Economic Planning Agency EPA). Система счетов построена в соответствии со «стандартизированной с 1983 г. системой счетов префектур», поэтому все значения сопоставимы. Теоретически суммарное значение доходов по 47 префектурам должно совпадать с национальным доходом Японии. Данные собираются ежегодно и издаются в Годовом отчете о бюджете

Таблица 11.10

Данные по префектурам Японии

Префектура	**Реальный ВВП на душу населения в 1955 г.[a] (млн йен, 1985 г. – базовый)**	**Реальный ВВП на душу населения в 1955 г. (млн йен, 1985 г. — базовый)**	**Темп прироста реального дохода на душу населения[b]**	**Численность населения в 1955 г. (млн чел.)**	**Численность населения в 1990 г. (млн чел.)**	**Темп прироста населения**	**Чистая миграция с 1955 по 1990 г.[c] (млн чел.)**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1. Хоккайдо	0.441	2.396	0.0484	4.784	5.644	0.0030	−0.76
2. Аомори	0.326	2,045	0.0525	1.391	1.483	0,0012	−0.36
3. Иватэ	0.298	2.093	0.0557	1,437	1.417	−0,0003	−0.41
4. Мияги	0,367	2,453	0.0543	1,748	2.249	0.0046	−0.11
5. Акита	0.371	2.137	0.0500	1.362	1,227	−0,0019	−0,44
6. Ямагата	0,337	2.206	0,0537	1.370	1.258	−0,0016	−0,38
7. Фукусима	0.339	2.413	0,0561	2.120	2.104	−0,0001	−0.57
8. Ибараки	0.388	2.398	0.0520	2.501	2.475	−0.0002	−0,63
9. Тотиги	0.348	2.648	0,0580	2.099	2,845	0.0055	0.09
10. Гумма	0.518	2.788	0,0561	1.571	1.935	0.0038	−0,13

[a] Значение для префектуры Тотиги взято для 1960 г.

[b] Значение для префектуры Тотиги дано для периода с 1960 по 1990 г.

[c] Значение для префектуры Окинава дано для периода с 1965 по 1990 г.

Продолжение табл. 11.10

1	2	3	4	5	6	7	8
11. Сайтама	0,369	2,640	0,0562	1,624	1,966	0,0035	−0,15
12. Тиба	0,460	2,825	0,0519	2,279	6,405	0,0188	2,41
13. Токио	0,368	2,880	0,0588	2,225	5,555	0,0166	1,93
14. Канагава	0,811	4,238	0,0472	8,016	11,855	0,0071	0,10
15. Ниигата	0,564	2,960	0,0474	2,901	7,980	0,0184	2,58
16. Тояма	0,321	2,557	0,0593	0,819	0,853	0,0007	−0,16
17. Исикава	0,374	2,633	0,0558	2,050	2,157	0,0009	−0,33
18. Фукуи	0,452	2,883	0,0530	2,638	3,671	0,0060	−0,02
19. Яманаси	0,426	2,616	0,0518	1,028	1,120	0,0016	−0,16
20. Нагано	0,412	2,608	0,0527	0,964	1,165	0,0034	−0,09
21. Гифу	0,441	2,551	0,0502	1,599	2,067	0,0047	−0,07
22. Сидзуока	0,579	2,971	0,0467	3,779	6,690	0,0104	0,86
23. Айти	0,406	2,621	0,0533	1,505	1,793	0,0032	−0,11
24. Миэ	0,395	2,429	0,0519	0,758	0,824	0,0015	−0,13
25. Сига	0,434	2,794	0,0532	0,857	1,222	0,0065	0,09
26. Киото	0,531	2,664	0,0461	1,928	2,603	0,0054	0,02
27. Осака	0,709	3,190	0,0430	4,586	8,735	0,0117	1,27
28. Хёго	0,618	2,668	0,0418	3,660	5,405	0,0071	0,29
29. Нара	0,418	2,190	0,0473	0,777	1,375	0,0104	0,30
30. Вакаяма	0,438	2,109	0,0449	1,012	1,074	0,0011	−0,15
31. Тоттори	0,373	2,193	0,0506	0,615	0,616	0,0000	−0,12
32. Симанэ	0,336	2,121	0,0527	0,931	0,781	−0,0032	−0,26
33. Окаяма	0,413	2,555	0,0521	1,716	1,926	0,0021	−0,16
34. Хиросима	0,478	2,678	0,0492	2,180	2,850	0,0049	0,00
35. Ямагути	0,445	2,299	0,0469	1,619	1,573	−0,0005	−0,34
36. Токусима	0,344	2,297	0,0542	0,898	0,832	−0,0014	−0,20

1	2	3	4	5	6	7	8
37. Кагава	0,394	2,524	0,0531	0,951	1,023	0,0013	−0,11
38. Эхимэ	0,397	2,157	0,0483	1,563	1,515	−0,0006	−0,37
39. Коти	0,367	2,025	0,0484	0,917	0,825	−0,0019	−0,18
40. Фукуока	0,490	2,502	0,0466	3,867	4,811	0,0040	−0,28
41. Сага	0,368	2,131	0,0502	0,982	0,878	−0,0020	−0,34
42. Нагасаки	0,369	2,027	0,0487	1,795	1,563	−0,0025	−0,65
43. Кумамото	0,326	2,294	0,0558	1,898	1,840	−0,0006	−0,47
44. Оита	0,316	2,218	0,0556	1,298	1,237	−0,0009	−0,30
45. Миядзаки	0,317	2,078	0,0537	1,155	1,169	0,0002	−0,28
46. Кагосима	0,255	2,019	0,0591	2,084	1,798	−0,0027	−0,68
47. Окинава	0,282	1,880	0,0542	0,801	1,222	0,0077	−0,01

Примечание. Цифры для префектур соответствуют цифрам, используемым при строительстве графика на рис. 11.15. Классификация регионов следующая: Регион 1 (Хоккайдо-Тохоку), префектуры 1–8; Регион 2 (Канто-Кошин), префектуры 9–17; Регион 3 (Тюбу), префектуры 18–24; Регион 4 (Кинки), префектуры 25–30; Регион 5 (Тюгоку), префектуры 31–35; Регион 6 (Сикоку), префектуры 36–39; Регион 7 (Кюсю), префектуры 40–47.

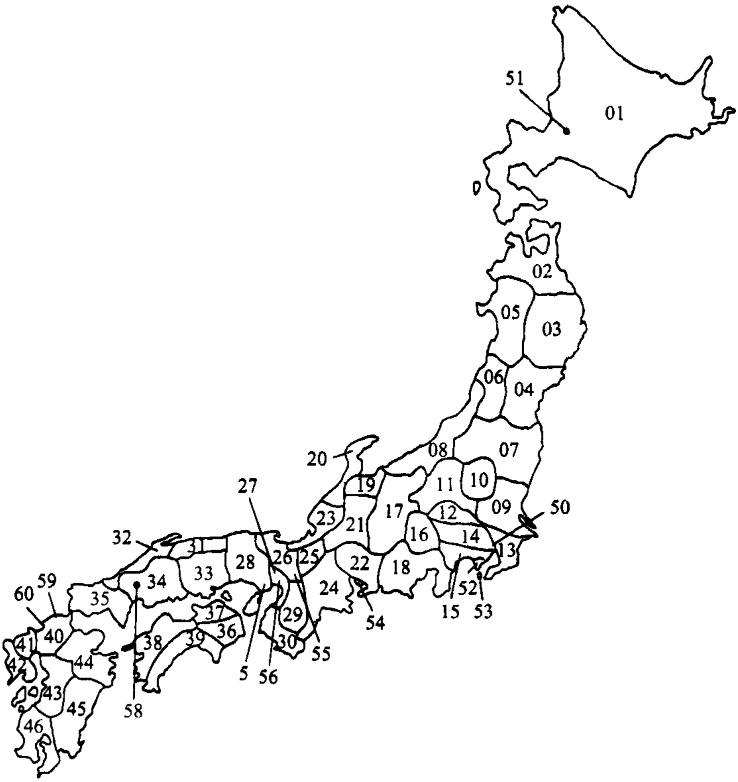


Рис. 11.15. Карта префектур Японии

префектур. Данные о доходе для 1930 г. мы получили из отчета Ассоциации исследований народного хозяйства. У нас нет данных об уровне цен в префектурах, поэтому, чтобы рассчитать реальный доход для каждого региона, мы используем национальный индекс цен.

Данные о численности населения предоставлены Бюро статистики Агентства менеджмента и координации (Management and Coordination Agency). Основным источником этих данных является проводимый раз в пять лет Бюро статистики анализ численности населения.

Данные о миграции также собирает Бюро статистики. Эти данные получены из Основных реестров о количестве резидентов (Basic Resident Registers) и Статистического обзора легальной миграции (Statistical Survey on Legal Migrants). В этих данных не учитываются люди без японского гражданства.

12 Эмпирический анализ данных по странам

Темпы роста экономик на протяжении больших периодов времени варьируются от страны к стране необычайно сильно. На рис. 12.1 (который повторяет рис. В.3 из введения) это различие показано в виде гистограммы темпов прироста подушевого ВВП в 112 странах, по которым доступны данные с 1960 по 2000 г.[1]. Среднее значение темпа прироста составляет 1,8% в год, стандартное отклонение — 1,7. В первом дециле (самом низком) располагается 11 стран с темпами прироста ниже −0,5% в год, а в последнем дециле расположены 11 стран с темпами прироста выше 3,9% в год. При разбиении по квинтилям, наименее успешные результаты у 22 стран с темпами прироста меньше 0,4% в год, а наилучшие — у 22 стран с темпами прироста более 3,0% в год.

Разница между подушевым приростом в −1,3% в год (среднее значение в первом дециле) и приростом в 5,0% в год (среднее значение в последнем дециле) заключается в том, что за 40 лет реальный ВВП на душу населения в первом случае снижается на 41%, а во втором — увеличивается в 7 раз. Даже более того, две наиболее медленно растущие страны, Демократическая Республика Конго (бывший Заир) и Центрально-Африканская Республика, упали с уровня соответственно 980 и 2180 долл. (в долл. 1996 г.) реального ВВП на человека в 1960 г. до 320 и 1120 долл. в 2000 г. (1995 для бывшего Заира). В то же время за период 1960–2000 гг. две наиболее быстро развивавшиеся страны,

[1] Данные по ВВП скорректированы по покупательной способности и взяты из таблиц Penn-Wold Tables version 6.1, опубликованных в работах Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002). Для 11 стран, данные за 2000 г. для которых отсутствуют в данном источнике, темпы роста за 1995–2000 гг. были вычислены из иллюстраций, представленных Всемирным банком. Для Тайваня темп роста за 1995–2000 гг. взят из их же публикаций национальных счетов. Для Демократической Республики Конго (бывшего Заира) данные по темпу роста представлены только за 1960–1995 гг.

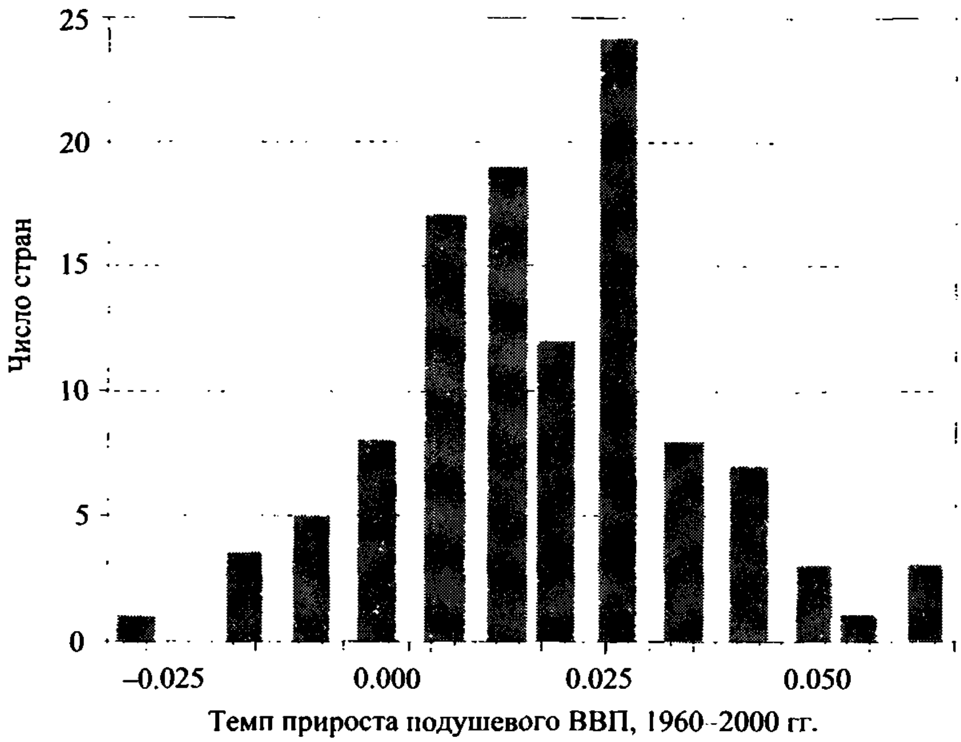


Рис. 12.1. Гистограмма подушевых темпов прироста ВВП с 1960 по 2000 г. Темпы роста для 112 стран рассчитаны на базе значений подушевого ВВП за 1960–2000 гг. (см. рис. В.1 и В.2). Для Демократической Республики Конго (бывшего Заира) темп прироста представлен только за период с 1960 по 1995 г. Данные взяты из таблиц Penn-Wold Tables version 6.1, представленных в работах Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002). Значения ВВП ценным образом взвешены и выражены в долларах США 1996 г. Для всех 112 стран средний темп прироста равен 0.018 в год со стандартным отклонением 0.017. Максимальный темп прироста равен 0.064, а минимальный равен –0.032. На рисунке отмечены репрезентативные страны из каждой группы: *1* – Демократическая республика Конго; *2* – Ангола, Нигер, Никарагуа; *3* – Мозамбик, Нигерия, Замбия; *4* – Мали, Руанда, Сенегал, Венесуэла; *5* – Боливия, Эфиопия, Кот-д'Ивуар, Перу, Танзания; *6* – Аргентина, Гана, Кения, Южная Африка, Швейцария; *7* – Австралия, Иран, Мексика, Швеция, Англия; *8* — Бразилия, Канада, Чили, Египет, Франция, Индия, Израиль, Италия, Пакистан, Турция, США; *9* — Греция, Индонезия, Румыния, Испания; *10* – Китай, Япония, Ирландия, Португалия; *11* – Ботсвана, Кипр, Таиланд; *12* – Гонконг; *13* – Тайвань, Сингапур, Южная Корея

Тайвань и Сингапур, выросли с 1430 и 2160 долл. соответственно до 18 700 и 26 100 долл. Таким образом, Центрально-Африканская Республика в 1960 г. была на 50% богаче Тайваня, но в 2000 г. Тайвань стал впечатляюще богаче Центрально-Африканской Республики — в 17 раз. За 40 лет наблюдаемые различия в темпах прироста привели к колоссальным разрывам в средних уровнях жизни граждан этих стран.

12.1. Проигравшие и победители за период с 1960 по 2000 г.

В табл. 12.1 приведены данные по 20 странам-неудачницам, которые продемонстрировали наименьшие подушевые темпы прироста с 1960 по 2000 г. Страны упорядочены по возрастанию темпов прироста, которые приведены в столбце (2). В эту группу попали 18 стран из Африки, южнее пустыни Сахара, и две из Латинской Америки (Никарагуа и Венесуэла). В таблице также приведены подушевые темпы прироста за три десятилетних периода 1965 1975, 1975 1985 и 1985 1995. Значения в этих столбцах мы обсудим позже.

В табл. 12.2 приведены аналогичные данные по 20 странам-победительницам с наибольшими подушевыми темпами прироста. Эти страны упорядочены по убыванию темпов прироста, значения которых находятся в столбце (2). Группа победителей состоит из девяти стран в Восточной Азии (Тайвань, Сингапур, Южная Корея, Гонконг, Таиланд, Китай, Япония, Малайзия и Индонезия), четырех в Западной Европе (Ирландия, Португалия, Испания и Люксембург) и двух стран Африки южнее Сахары (Ботсваны и Конго-Браззавиля). Также сюда входят Кипр, Барбадос, Румыния и два африканских острова – Кабо-Верде и Маврикий.

Регрессии для подушевых темпов прироста, которые мы рассмотрим далее, будут применяться к трем десятилетним периодам 1965–1975, 1975 1985 и 1985 1995. Отчасти данный эконометрический анализ может рассматриваться как процесс выявления тех присущих стране особенностей, из-за которых она, по всей видимости, и попала в списки победителей или проигравших в табл. 12.1 и 12.2. Подобранные значения, которые приведены в таблицах для трех десятилетних периодов (для тех стран, по которым достаточно данных, чтобы произвести соответствующий статистический анализ), показывают, какое количество значений темпов прироста может быть объяснено регрессиями.

Корреляции темпов прироста между десятилетними периодами положительны, но не очень сильны – 0,43 для прироста за периоды 1975–1985 и 1965–1975 гг., и 0.42 между периодами 1985–1995 и 1975 1985 гг. Следовательно, несмотря на наличие инерции в скорости роста экономик стран, мы видим, что со временем в темпах прироста все-таки возникают существенные изменения. Между пятилетними периодами времени

Таблица 12.1

Темпы прироста 20 самых медленно растущих стран

Страна	Темп прироста 1960–2000 гг.[a]	Темп прироста 1965–1975 гг.	Подобранное значение 1965–1975 гг.	Темп прироста 1975–1985 гг.	Подобранное значение 1975–1985 гг.	Темп прироста 1985–1995 гг.	Подобранное значение 1985–1995 гг.	Темп прироста 1995–2000 гг.[b]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Конго (Киншаса)	−0,032	0,001	0,005	−0,040	−0,003	−0,069	−0,026	
Центральная Африка	−0,017	−0,012		−0,019		−0,035	..	0,004
Нигер	−0,015	−0,041	−0,015	−0,026	0,067	−0,008	−0,004	0,012
Ангола	−0,014	−0,032		−0,011		−0,040		0,021
Никарагуа	−0,012	0,012	0,003	−0,037	−0,009	−0,050	−0,024	−0,006
Мозамбик	−0,011	0,004		−0,081		0,003	−0,001	0,051
Мадагаскар	−0,010	0,004		−0,021		−0,015		0,004

[a] Для Конго (Киншаса) этот темп прироста за период 1960–1995 гг.

[b] Для стран, данные по которым за период 1995–2000 гг. отсутствуют в Penn-Wold Tables version 6 (для Центрально-Африканской Республики и Анголы), значения взяты из публикаций Всемирного банка.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Нигерия	−0,009	0,000		−0,004		−0,010		−0,054
Замбия	−0,008	−0,008	0,021	−0,021	0,007	−0,029	−0,003	0,018
Чад	−0,007	−0,012		−0,004		−0,014		0,003
Коморские острова	−0,005	0,007		−0,005		−0,031		−0,011
Венесуэла	−0,005	−0,019	0,014	−0,019	0,006	0,004	0,004	−0,020
Сенегал	−0,003	−0,008	−0,005	−0,006	−0,003	−0,002	0,005	0,021
Руанда	−0,001	0,015		0,023		−0,037		0,038
Того	−0,001	0,004	−0,005	0,011	0,000	−0,039	0,004	−0,002
Бурунди	−0,001	0,024		−0,004		−0,007		−0,056
Мали	0,000	0,008	0,014	0,002	0,000	−0,006	0,011	0,036
Гвинея	0,001	−0,016		−0,006		0,015		0,015
Экваториальная Гвинея	0,002	0,015		−0,084		−0,041		0,229
Бенин	0,003	−0,013		0,018		−0,009		0,026

Примечания. Данные получены из Penn-Wold Tables version 6.1, приведенных в работах Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002). Подобранные значения взяты из регрессионной системы столбца (2) табл. 12.3.

Таблица 12.2

Темпы прироста 20 самых быстро растущих стран

Страна	Темп прироста 1960–2000 гг.	Темп прироста 1965 1975 гг.	Подобранное значение 1965–1975 гг.	Темп прироста 1975–1985 гг.	Подобранное значение 1975–1985 гг.	Темп прироста 1985–1995 гг.	Подобранное значение 1985–1995 гг.	Темп прироста 1995–2000 гг.[a]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тайвань	0.064	0.069	0.056	0.065	0.050	0.068	0.041	0,047
Сингапур	0,062	0.094	-	0.054	0,074	0,052	0.062	0.028
Южная Корея	0.059	0.071	0.052	0.059	0.048	0.072	0.052	0.032
Гонконг	0.054	0.048	0.062	0,062	0,052	0,053	0,041	0.008
Ботсвана	0.051	0.082	·	0.062	0.027	0.036	0.007	0.043
Таиланд	0,046	0.043	0.046	0,045	0,042	0,073	0,051	0.003
Кипр	0.046	0.012	0.043	0.075	0.036	0.052	0.015	0,029

[a] Для стран, данные по которым за период 1995 2000 гг. отсутствуют в Penn-Wold Tables version 6 (для Сингапура, Ботсваны и Кипра), значения взяты из публикаций Всемирного банка.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Китай	0,043	0,017		0,049	0,055	0,065	0,044	0,057
Япония	0,042	0,065	0,055	0,030	0,033	0,027	0,030	0,012
Ирландия	0,041	0,035	0,027	0,025	0,012	0,046	0,012	0,085
Барбадос	0,039	0,064		0,023		0,028	·	0,036
Малайзия	0,039	0,036	0,031	0,042	0,041	0,047	0,037	0,026
Португалия	0,038	0,049	0,054	0,021	0,026	0,035	0,015	0,040
Маврикий	0,037	0,010		0,038		0,050		0,041
Румыния	0,035	0,072		0,063	-	−0,020		−0,020
Кабо-Верде	0,035	0,022	-	0,076		0,023		0,048
Испания	0,034	0,047	0,047	0,005	0,024	0,033	0,021	0,020
Индонезия	0,034	0,046	0,018	0,047	0,025	0,047	0,014	0,000
Люксембург	0,033	0,022	·	0,021		0,054	·	0,049
Конго (Браззавиль)	0,032	0,041	0,029	0,059	0,018	−0,021	−0,017	0,005

Примечания. Данные получены из Penn-Wold Tables version 6.1, приведенных в работах Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002). Подобранные значения взяты из регрессионной системы столбца (2) табл. 12.3.

корреляции слабее. Например, для семи периодов от 1960–1965 гг. до 1995–2000 гг. средняя корреляция между темпами прироста в соседние периоды времени составляет всего лишь 0.17. Столь низкая корреляция связана с тем, что пятилетние периоды чувствительны к временным факторам, которые обычно ассоциируются с «бизнес-циклами». Последний пятилетний период примечателен особенной не связанностью с историей корреляция темпов прироста в 1995–2000 гг. с темпами прироста в 1990–1995 гг. равна только лишь 0.05.

12.2. Эмпирический анализ темпов прироста

В данном разделе мы рассмотрим эмпирические детерминанты роста, т. е. те результаты регрессионного анализа, которые лежат в основе подобранных значений, представленных в табл. 12.1 и 12.2. Выборка из 87 стран (состоящая из 241 наблюдения по десятилетним периодам времени) покрывает широкий спектр стран — от развитых до развивающихся. Такая выборка стран связана с наличием соответствующих данных по ним.

Здесь сразу же возникает интересный эмпирический вопрос, насколько сильно бедные экономики стремятся к «наверстыванию упущенного», т. е. к более быстрому росту относительно богатых экономик. В этом заключается концепция абсолютной сходимости, которую мы рассматривали в гл. 1 и 2. Однако из рис. 12.2 видно, что концепция эта не находит никакого подтверждения в данных по странам: для 112 стран, по которым эти данные имеются, темп прироста каждой из них в период с 1960 по 2000 г. фактически не связан с логарифмом подушевого ВВП в 1960 г. (На самом деле корреляция есть, и она положительна, где-то около 0.19.) Некоторые исследователи используют это отсутствие корреляции между ростом и начальным уровнем дохода в качестве аргумента против неоклассических моделей роста Солоу–Свэна и Рамсея. Однако в главах 1, 2 и 11 мы показали, что отсутствие абсолютной сходимости между экономиками никак не противоречит неоклассической теории, если разные экономики сходятся к разным стационарным состояниям. Другими словами, неоклассическая модель прогнозирует условную, а не абсолютную сходимость: при постоянных значениях переменных, отвечающих за стационарное состояние, теория прогнозирует отрицательную *частичную* корреляцию между ростом и начальным уровнем дохода. Так что мы должны проверить связь между темпом прироста и начальным состоянием при фиксированных

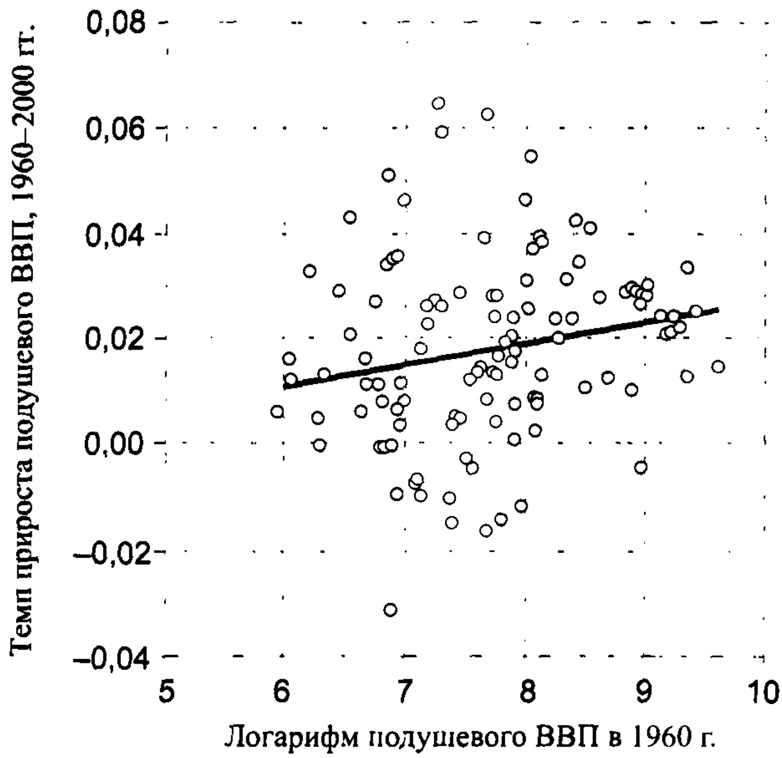


Рис. 12.2. Темп прироста в зависимости от ВВП (простое отношение). Здесь представлены данные для 112 стран, тех же, что и на рис. 12.2. По горизонтальной оси отложены значения логарифма подушевого ВВП в 1960 г., а по вертикальной - темп прироста подушевого ВВП за период с 1960 по 2000 г. Корреляция между этими двумя величинами положительна, но невелика: 0,19. Таким образом, такая широкая выборка стран не обнаруживает абсолютной сходимости

значениях некоторых переменных, которые отличают одну страну от другой.

Мы воспользуемся эмпирической моделью, которая связывает реальный подушевой темп прироста с переменными двух видов: во-первых, с начальными уровнями переменных состояния, таких как объем физического капитала и объем человеческого капитала, причем последний измеряется уровнем образования и здоровья; во-вторых, с переменными управления или окружающей среды (некоторые из которых могут определяться правительствами, а другие - частными экономическими агентами), такими как отношение правительственного потребления к ВВП, отношение внутреннего инвестирования к ВВП, степень международной открытости, развитие условий торговли, коэффициент фертильности, показатели макроэкономической стабильности, меры поддержки нормы права и демократии, и т. п.

Одной из переменных состояния, которая входит в рассмотренные нами модели в виде, предложенном Barro and Lee (2001), является образовательная подготовка на различных уровнях. Для представления уровня здоровья населения мы используем стандартные величины ООН оценки продолжительности жизни в разных возрастных категориях. Средняя продолжительность жизни в возрасте 1 года, как оказалось, имеет наибольшую объясняющую силу. Имеющиеся данные по физическому капиталу представляются нам не очень надежными, особенно для развивающихся стран, и то же касается данных по человеческому капиталу, так как они зависят от произвольных предположений относительно амортизации, а также от неточных измерений базовых объемов и инвестиционных потоков. В качестве альтернативы прямым данным по физическому капиталу, предположим, что при заданных уровнях образования и здоровья большее значение начального подушевого реального ВВП соответствует большему объему физического капитала на человека (или большему количеству природных ресурсов).

Мы можем записать функцию подушевого темпа прироста Dy_t некоторой страны в период времени t в виде

$$Dy_t = F(y_{t-1}, h_{t-1}, \ldots), \tag{12.1}$$

где y_{t-1} начальное значение подушевого ВВП; h_{t-1} – начальное значение человеческого капитала на человека (основанное на мерах уровня образования и здоровья). Переменные, представляющее управление и окружающую среду, опущены, вместо них стоят точки «...». Эти переменные могут включать в себя параметры сбережения и фертильности, правительственные стратегии относительно расходов и рыночные дисторсии и т. п.

12.2.1. Эффекты переменных состояния

Согласно прогнозам моделей Солоу Свэна и Рамсея, при заданных значениях переменных управления и окружающей среды равнопропорциональный прирост y_{t-1} и h_{t-1} приводит к уменьшению Dy_t в уравнении (12.1). То есть из-за наличия убывающей отдачи производственных факторов более богатая экономика (с более высокими уровнями y и h) будет расти медленнее. В этих моделях переменные управления и окружающей среды определяют стационарный уровень выпуска на одного «эффективного» работника. При заданных значениях переменных состояния изменение любой их этих переменных, скажем нормы сбережения или инструмента правительственной политики, или темпа прироста населения, влияет на темп прироста. Например, чем больше норма сбережения, тем больше Dy_t в уравнении (12.1) при заданных значениях y_{t-1} и h_{t-1}.

В модели с человеческим и физическим капиталами в гл. 5 определенное влияние на рост оказывает дисбаланс между физическим и человеческим капиталами. В частности, при заданном y_{t-1}, чем больше h_{t-1} в уравнении (12.1), тем больше темп прироста. Такая ситуация возникает, например, после войны, во время которой разрушается преимущественно физический капитал, а не человеческий. Таким образом, хотя y_{t-1} в уравнении (12.1) имеет отрицательное влияние на Dy_t, эффект h_{t-1} тем не менее положителен.

Для эмпирических оценок нам необходимо ввести начальный уровень подушевого ВВП в уравнение роста в виде $\log(y_{t-1})$, в результате чего коэффициент при этой переменной будет представлять скорость сходимости, т. е. реакцию темпа прироста Dy_t на пропорциональное изменение y_{t-1}[1]. Переменная h_{t-1} в регрессиях представляется средним числом лет, потраченных на получение образования, и средней продолжительностью жизни.

12.2.2. Переменные управления и окружающей среды

В простейшей регрессии, которую мы рассмотрим, мы будем иметь дело со следующими переменными управления и окружающей среды: мера международной открытости экономики,[2] отношение правительственного потребления к ВВП,[3] субъективный показатель поддержки нормы права, субъективный показатель демократии (избирательных прав), логарифм коэффициента общей фертильности, отношение реального ва-

---

[1] Такое отождествление было бы точным, если бы длина интервала наблюдений была ничтожно мала. Предположим, что мы имеем наблюдения за время T, сходимость происходит непрерывно с темпом β и все переменные в правой части уравнения, отличные от $\log(y)$, не меняются со временем. В этом случае из уравнения (2.42) из главы 2 следует, что коэффициент при $\log(y_{t-T})$ в регрессии для среднего темпа прироста

$$\frac{1}{T}\cdot\log\left(\frac{y_t}{y_{t-T}}\right)$$

равен $-(1-e^{-\beta T})/T$. Это последнее выражение стремится к β при стремлении T к 0 и стремится к 0 при стремлении T к бесконечности.

[2] Эта переменная измеряется как отношение экспорта плюс импорта к ВВП, скорректированное на размер страны, от которого данное отношение обычно зависит. Размер страны измеряется логарифмами численности населения и площади.

[3] Данная переменная, используемая в основном тексте книги, получена из стандартной меры правительственного потребления за вычетом расходов на оборону и образование.

лового внутреннего инвестирования к реальному ВВП и уровень инфляции. Данная система также включает в себя одновременное улучшение условий внешней торговли, что связано с усилением международной открытости (измеряется отношением экспорта плюс импорта к ВВП). Мы также учтем возможную эндогенность объясняющих переменных, использовав для этого в качестве инструментария значения с задержкой по времени. Этих взятых с лагом переменных может оказаться вполне достаточно, так как ошибки регрессии в уравнении подушевого темпа прироста обнаруживают небольшую автокорреляцию[1].

В неоклассических моделях роста Солоу—Свэна и Рамсея влияние переменных управления и окружающей среды на темп прироста выражается через их влияние на стационарное состояние. Например, увеличение значения экзогенно заданного показателя правовой нормы в стране приводит к повышению стационарного уровня выпуска на одного эффективного работника. Темп прироста Dy_t также будет соответственно повышаться при заданных значениях переменных состояния. Аналогично более высокое значение отношения правительственного потребления (не связанного с производством) к ВВП приводит к снижению стационарного уровня выпуска на одного эффективного работника и, следовательно, уменьшает темп прироста при заданных значениях переменных состояния.

В неоклассических моделях роста изменение какой-либо переменной управления или окружающей среды влияет на стационарный уровень выпуска на эффективного работника, но не влияет на долгосрочный подушевой темп прироста. Долгосрочный или стационарный темп прироста задается темпом экзогенного технологического прогресса. В противоположность этому в моделях эндогенного роста глав 6 и 7 переменные, воздействующие на интенсивность НИОКР, также влияют и на долгосрочные темпы прироста. Однако даже в моделях Солоу—Свэна и Рамсея, если приведение экономики в новое стационарное состояние занимает много времени (что, кстати, наблюдается на практике), то эффект роста таких переменных, как показатель уровня норм права или удельное правительственное потребление, также сохраняется продолжительное время.

---

[1] Вместо инфляции с лагом эта система содержит фиктивные переменные, связанные с тем, была ли страна колонией Испании или Португалии, или же она была колонией какой-либо другой страны, отличной от Великобритании или Франции. Эти фиктивные переменные, оказывается, имеют большую объясняющую силу инфляции.

Меры уровня образования, которые мы использовали в основном тексте книги, базируются на числе лет обучения и никак не учитывают различия в качестве обучения. А ведь мера качества, основанная на международно-сравнимых тестовых баллах, оказывается, имеет значительно бо́льшую объясняющую силу для роста. Но эта, основанная на тестовых баллах мера качества образования, к сожалению, недоступна для большинства выборок и поэтому исключена из нашей основной системы.

Капитал «здоровье» в нашей основной системе заменен на обратную величину средней продолжительности жизни людей возраста 1. Если бы вероятность смерти не зависела от возраста, то эта обратная величина давала бы вероятность смерти в течение года. Позже мы также рассмотрим показатели смертности младенцев (до возраста 1) и детской смертности (возраста 1 5), а также влияние на смертность конкретной болезни - малярии.

Будем считать, что в переменную правительственного потребления входят те расходы, которые не влияют непосредственно на производительность, но приводят к искажениям при принятии решений частными лицами. Эти искажения могут отражать действия правительства, а также включать в себя неблагоприятные эффекты соответствующих правительственных финансов[1)]. Чем больше значение удельного правительственного потребления, тем меньше стационарный уровень выпуска на одного эффективного работника и, следовательно, тем меньше темп прироста при заданных значениях переменных состояния.

Коэффициент фертильности является важным фактором роста населения, который в неоклассической модели роста негативно воздействует на стационарное значение капитала на одного эффективного работника. Следовательно, констатируем отрицательный эффект коэффициента фертильности на экономический рост. Высокая фертильность отражает также, что на воспитание детей расходуются значительные ресурсы, как это было учтено в модели гл. 9. Это еще одно объяснение тому факту, что высокая фертильность должна, по идее, тормозить рост.

Эффект нормы сбережения в неоклассической модели роста измеряется эмпирически посредством отношения совокупного объема реальных инвестиций к реальному ВВП. Вспомним, что мы в общем-то пытаемся

[1)]Мы могли бы непосредственно сделать постоянными налоговые эффекты, но доступные нам данные по правительственным финансам не подходят для этой цели. См. работу Easterly and Rebelo (1993), где авторы пытаются измерить относящиеся к данному вопросу предельные налоговые ставки.

изолировать влияние нормы сбережения на рост, используя для этого значения с задержкой во времени (в данном случае удельное валовое инвестирование с лагом по времени) в качестве инструментария.

Будем считать, что улучшения в правовой норме, которые измеряются субъективным показателем, разработанным международной консалтинговой фирмой (Political Risk Servises), влекут за собой совершенствование прав собственности и, следовательно, стимулируют увеличение объема инвестиций и рост. В более широком смысле идея здесь состоит в том, что хорошо функционирующие политические и правовые институты помогают поддерживать рост. В некоторых исторических исследованиях сделана попытка связать современные институциональные характеристики, такие как поддержка норм права, с практикой колониальных империй, имевшей место много лет назад. В работе Acemoglu, Johnson, and Robinson (2002) показано, что европейские колонисты предпочитали инвестировать преимущественно в развитие правовых и политических институтов тех регионов, которые были изначально бедны или пустынны, в особенности в современную Канаду и США. Это было связано с тем, что колонизаторы испытывали недостаток в организационном потенциале для разработки месторождений минеральных ресурсов и использования местного населения. Acemoglu, Johnson, and Robinson (2001) подчеркивают, что неблагоприятный опыт, связанный со смертностью поселенцев в Латинской Америке и Африке, мог ограничить институциональные инвестиции в эти колонии. Woodberry (2002) утверждает, что привнесение миссионерами качественного образования в некоторые колонии, возможно, имело длительное влияние на политические институты. В этих исследованиях предполагается наличие инструментальных переменных (из долгосрочной статистики), которые могут быть использованы для получения более надежных оценок эффектов текущих переменных, таких, например, как показатель правовой нормы.

Мы также включаем в рассмотрение еще один субъективный показатель (от Freedom House) уровень демократии в стране, т. е. избирательные права. Теоретически влияние демократии на рост двояко. Негативные эффекты возникают в политических моделях, в которых наблюдается стремление избирателей, получивших большинство голосов на выборах, использовать свою политическую силу в целях перераспределения ресурсов богатого меньшинства в свою пользу. Демократия также может быть эффективна в качестве механизма правительства, обязующегося не конфисковать накопленный частным сектором капитал. В рамках нашего эмпирического анализа член, отвечающий за демократию, может быть линейным и возведенным в квадрат, таким образом, допускается возможность как отрицательного, так и положительного чистого эффекта в зависимости от степени демократизации.

Среди объясняющих переменных также имеется и мера степени международной открытости – отношение экспорта плюс импорта к ВВП. Как известно, открытость зависит от размера страны (большая страна склонна к меньшей открытости в силу того что внутренняя торговля создает большой рынок, который вполне эффективно заменяет международную торговлю). Объясняющая переменная, которую мы используем в нашем исследовании роста, исключает нормальную зависимость (которая оценивается в другой регрессионной системе) международной открытости от логарифмов численности населения и площади. Эта отфильтрованная переменная отражает исключительно влияние правительственных политик, таких как тарифы и торговые ограничения, на международную торговлю.

Мы также включаем в рассмотрение норму улучшения условий торговли за каждые 10 лет, которая измеряется отношением экспортных цен к импортным ценам. Это отношение является продуктом усиления открытости страны, которая в свою очередь измеряется отношением экспорта плюс импорта к ВВП. Эта переменная, отвечающая за условия торговли, измеряет эффект изменений в международных ценах на доходную позицию постоянных жителей страны. Реальная доходная позиция будет расти при росте экспортных цен и падать при росте импортных цен. Мы считаем, что условия торговли определяются на мировых рынках и, в силу этого, экзогенно заданы для отдельной страны. Так как улучшение условий торговли увеличивает реальные доходы страны, то следует ожидать и роста внутреннего потребления. Однако воздействие на производство, т. е. на ВВП, зависит от отклика спроса или предложения или от степени успешности изменения относительных цен. Если рост относительных цен на товары, которые производит данная страна, приводит к созданию большего объема выпуска, т. е. имеет место положительный отклик предложения, то влияние этой переменной на темп прироста будет положительным. Одним из эффектов такого типа является то, что рост относительных цен на нефть, импортируемую во многие страны, приводит к снижению производства товаров, основным сырьем для которых она является.

И наконец, в нашу основную систему входит средний уровень инфляции в качестве меры макроэкономической стабильности. Конечно, можно рассматривать и альтернативные меры стабильности, в том числе фискальные переменные.

12.3. Результаты регрессионного анализа для темпов прироста

12.3.1. Основная регрессия

В табл. 12.3 представлены результаты регрессии для темпа прироста реального подушевого ВВП. Для основной системы, которая приведена в столбце (2), оценка производилась по 72 странам за период 1965–1975, по 86 странам за период 1975–1985 и по 83 странам за период 1985–1995. Средние значения и стандартные отклонения для включенных в различные регрессии переменных приведены в табл. 12.9 Приложения.

Как уже говорилось, при оценивании используются инструментальные переменные, а также допускается, что ошибки регрессии любых двух периодов могут коррелировать, а дисперсии ошибок могут различаться. Предполагается, что ошибки регрессии для разных стран независимы и что дисперсии ошибок одинаковы для всех стран. В систему включены фиктивные переменные, разделяющие разные периоды времени. Поэтому данный анализ не объясняет, почему меняется со временем средний мировой темп прироста экономики. Дальнейшее обсуждение результатов связано с системой, представленной в столбце (2) табл. 12.3.

Начальный подушевой ВВП. Переменная log(ВВП) является наблюдением логарифма реального подушевого ВВП за 1965 г. в регрессии для 1965–1975 гг., за 1975 г. в регрессии для 1975–1985 гг., за 1985 г. в регрессии для 1985–1995 гг. Более ранние значения — за 1960, 1970 и 1980 гг. соответственно — включены в список инструментов. Данная инструментальная процедура понижает склонность к переоценке скорости сходимости, которая могла бы иметь место из-за временной ошибки измерения ВВП. (Например, если бы оценка log(ВВП) в 1965 г. оказалась бы меньше из-за временной ошибки измерения, то темп прироста с 1965 по 1975 г. будет выше в силу того что наблюдение за 1975 г. не будет содержать той же самой ошибки измерения.)

Оценка коэффициента при log(ВВП), равная −0.025 (0.003), означает наличие условной сходимости, которая уже неоднократно была отмечена в различных исследованиях, таких как Barro (1991) и Mankiw, Romer, and Weil (1992). Сходимость условна в том смысле, что более быстрый рост в ответ на более низкий начальный уровень подушевого ВВП прогнозируется только в случае, если другие объясняющие переменные (некоторые из которых имеют сильную корреляцию с по-

Таблица 12.3

Основные регрессии роста по странам

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Объясняющая переменная	**Коэффициент**	**Коэффициент для выборки, состоящей из стран с низким доходом**	**Коэффициент для выборки, состоящей из стран с высоким доходом**	**p-уровень[a]**	**Коэффициент данных по пятилетним периодам**
Логарифм подушевого ВВП	−0,0248 (0,0029)	−0,0207 (0,0052)	−0,0318 (0,0049)	0,12	−0,0237 (0,0029)
Мужское образование верхнего уровня	0,0036 (0,0016)	0,0056 (0,0045)	0,0020 (0,0016)	0,44	0,0023 (0,0015)
1/(Средняя продолжительность жизни в возрасте 1 года)	−5,04 (0,86)	−5,13 (1,18)	−1,28 (1,44)	0,040	−4,91 (0,90)
Логарифм коэффициента общей фертильности	−0,0118 (0,0050)	−0,0209 (0,0120)	−0,0211 (0,0054)	0,99	−0,0160 (0,0048)
Удельное правительственное потребление	−0,062 (0,023)	−0,102 (0,031)	−0,000 (0,031)	0,021	−0,066 (0,021)
Правовая норма	0,0185 (0,0059)	0,0237 (0,0099)	0,0223 (0,0063)	0,90	0,0174 (0,0062)
Демократия	0,079 (0,028)	0,044 (0,049)	0,105 (0,038)	0,32[b]	0,032 (0,017)
Квадрат демократии	−0,074 (0,025)	−0,054 (0,052)	−0,080 (0,031)	0,67	−0,028 (0,016)
Удельная открытость	0,0054 (0,0048)	0,0169 (0,0113)	0,0061 (0,0046)	0,38	0,0094 (0,0043)
Изменение в условиях торговли	0,130 (0,053)	0,181 (0,076)	0,036 (0,070)	0,16	0,029 (0,021)

[a] p-уровни связаны с гипотезой о том, что соответствующие коэффициенты для обеих групп стран с разным доходом одинаковы.

[b] p-уровни для демократии и квадрата демократии совместно равны 0,022.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Удельное инвестирование	0.083 (0.024)	0.109 (0.035)	0.077 (0.027)	0.46	0.058 (0.022)
Уровень инфляции	−0.019 (0.010)	−0.019 (0.012)	−0.019 (0.009)	0.99	−0.031 (0.007)
Константа	0,296 (0.034)	0.294 (0.052)	0.295 (0.052)	0.99[a]	0,306 (0.035)
Фиктивная переменная, 1975-1985	−0,0078 (0.0026)	−0,0078 (0.0038)	−0.0066 (0.0032)	0.81	[b]
Фиктивная переменная. 1985 1995	−0.0128 (0.0034)	−0.0194 (0.0051)	−0.0052 (0.0040)	0.031	
Число наблюдений	72. 86. 83	26. 38. 33	46. 48. 50		72. 79. 86,84. 79. 80, 60
R-квадрат	0.60. 0.49. 0,51	0.78, 0,53. 0,65	0.56, 0,56, 0.40		0,40, 0.26. 0,27, 0,31. 0,46. 0.19, 0.04

Примечания. Оценивание производилось трехшаговым методом наименьших квадратов. В столбце (2) зависимые переменные это темпы прироста подушевого ВВП за 1965 1975 гг., 1975 1985 гг. и 1985 1995 гг. Инструментарий состоит из значений в 1960, 1970 и 1980 гг. логарифма подушевого ВВП, переменной средней продолжительности жизни и переменной фертильности; средних значений за 1960 1964 гг, 1970 1974 гг. и 1980 1984 гг. переменной правительственного потребления и удельного инвестирования; значений в 1965, 1975 и 1985 гг. переменных образования и демократии; переменных открытости и условий торговли (темпы прироста за 1965-1975, 1975-1985 и 1985 1995 гг. взаимосвязаны с соответствующими средними величинами отношения экспорта плюс импорта к ВВП); и наконец, фиктивные переменные для испанских или португальских колоний, и других колоний (за исключением британских и французских). Предполагается, что ошибки могут быть коррелированны между периодами и что они могут иметь различающиеся дисперсии в разные периоды. В столбцах (3) и (4) произведено разделение стран на две выборки, в первой - страны с уровнем подушевого ВВП ниже медианы, во второй - выше (за 1960, 1970 и 1980 гг.). В столбце (6) использованы уравнения экономического роста для семи пятилетних периодов, 1965 1970, ..., 1995 2000 гг.

[a] p-уровни для константы и двух фиктивных переменных совместно равны 0,10.

[b] Коэффициент для фиктивных переменных по пятилетним периодам: −0,0014 (0,0040) для 1970–1975, −0,0000 (0,0040) для 1975-1980, −0,0180 (0,0040) для 1980–1985, −0,0112 (0,0037) для 1985–1990, −0,0184 (0,0045) для 1990-1995 и −0,0165 (0,0042) для 1995-2000.

душевым ВВП) фиксированы на постоянном уровне[1]. Данная оценка коэффициента означает, что сходимость происходит со скоростью 2,5% в год. Исходя из такого значения коэффициента получаем, что отклонение логарифма подушевого ВВП на величину стандартного отклонения (1,03 в 1985 г.) приведет к увеличению темпа прироста на значительные 0,026 единицы. Этот эффект очень велик в сравнении с другими эффектами, которые мы опишем позже, т. е. в итоге получаем, что условная сходимость может иметь весьма существенное влияние на темпы роста.

На рис. 12.3 дано графическое представление данной частичной зависимости между темпом прироста и начальным уровнем подушевого

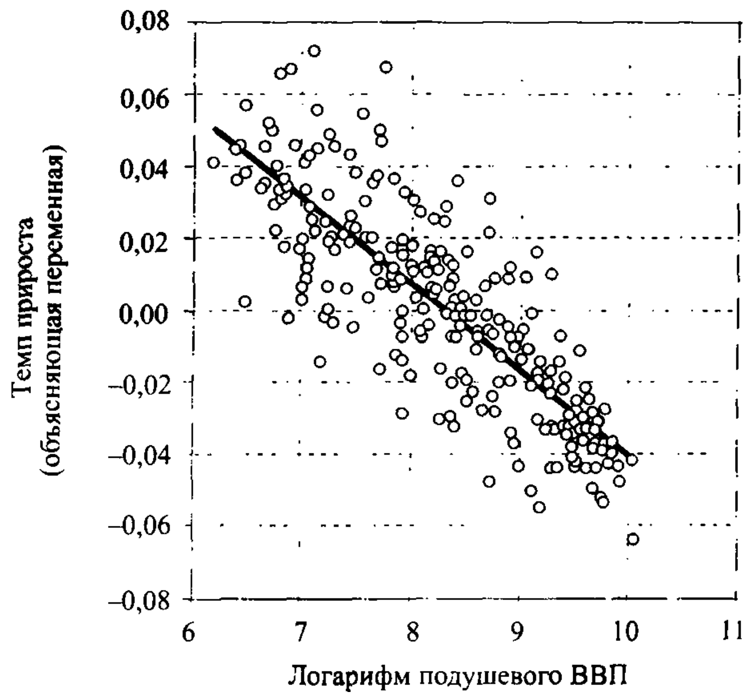


Рис. 12.3. Темп прироста в зависимости от ВВП (частичная зависимость). Логарифм подушевого ВВП за 1965, 1975 и 1985 гг. отложен по горизонтальной оси координат. По вертикальной оси координат отложены соответствующие темпы прироста реального подушевого ВВП за периоды с 1965 по 1975, с 1975 по 1985 и с 1985 по 1995 г. Эти темпы прироста очищены от эффектов объясняющих переменных, отличных от логарифма подушевого ВВП, оценки которых приведены в столбце (2) табл. 12.3. Очищенные значения затем были нормированы таким образом, чтобы их среднее стало нулевым. В итоге получена диаграмма, на которой можно видеть наличие частичной зависимости между темпом прироста подушевого ВВП и логарифмом подушевого ВВП

[1]Для получения этого результата использована формула из сноски (1) на с. 666. Однако этот результат верен, только если остальные независимые переменные регрессии не меняются, несмотря на то что подушевой ВВП меняется.

ВВП. По горизонтальной оси координат отложены значения логарифма подушевого ВВП в первый год каждого из десятилетних периодов: 1965, 1975 и 1985. На вертикальной оси координат отмечены значения темпов прироста подушевого ВВП за последующие 10 лет — за 1965 1975, 1975-1985 и 1985 1995 гг. Эти темпы прироста очищены от влияния объясняющих переменных, отличных от логарифма подушевого ВВП и оценки которых присутствуют в системе, в столбце (2) табл. 12.3. (Кроме того, эти значения были нормированы таким образом, чтобы их среднее было равно нулю.) Таким образом, на рисунке схематично показано ожидаемое влияние логарифма подушевого ВВП на последующий рост, когда все остальные объясняющие переменные — константы. График (см. рис. 12.3) построен в предположении, что оцененная зависимость не определяется какими-либо отдельными наблюдениями и что она не имеет явного отклонения от линейной зависимости. Далее аналогичная конструкция будет использована для каждой объясняющей переменной.

Уровень образования. Переменная, отвечающая за уровень образования и склонная к сильной связи с последующим ростом, представляет собой среднее число лет обучения лиц мужского пола в рамках среднего и высшего образования (далее мы будем называть эти два уровня обучения *образованием верхнего уровня*), и наблюдения по ней берутся за первый год каждого периода, т. е. за 1965, 1975 и 1985 гг. Так как эти переменные предопределены, то они входят в регрессии как свои собственные инструменты. Как будет показано позже, женское начальное образование и начальное образование лиц обоего пола не имеют какой-либо существенной связи с темпами прироста. Оценка соответствующего коэффициента равна 0,0036 (стандартная ошибка равна 0,0016), что означает, что прирост мужского школьного образования верхнего уровня на величину стандартного отклонения (т. е. на 1,3 года, значение для 1985 г., как показано в табл. 12.9) повышает темп прироста всего на 0,005. На рис. 12.4 показана частичная зависимость между экономическим ростом и данным показателем школьного образования.

Средняя продолжительность жизни. Переменная, отвечающая за среднюю продолжительность жизни, - величина, обратная средней продолжительности жизни в возрасте 1 года, — оценивается за 1960, 1970 и 1980 гг. соответственно для трех уравнений роста. Эти значения соответствовали бы годовому коэффициенту смертности, если бы смертность не зависела от возраста (что не реалистично). Величина, обратная средней продолжительности жизни в возрасте 1 года, имеет немного бо́льшую объясняющую силу, нежели переменные, основанные на сред-

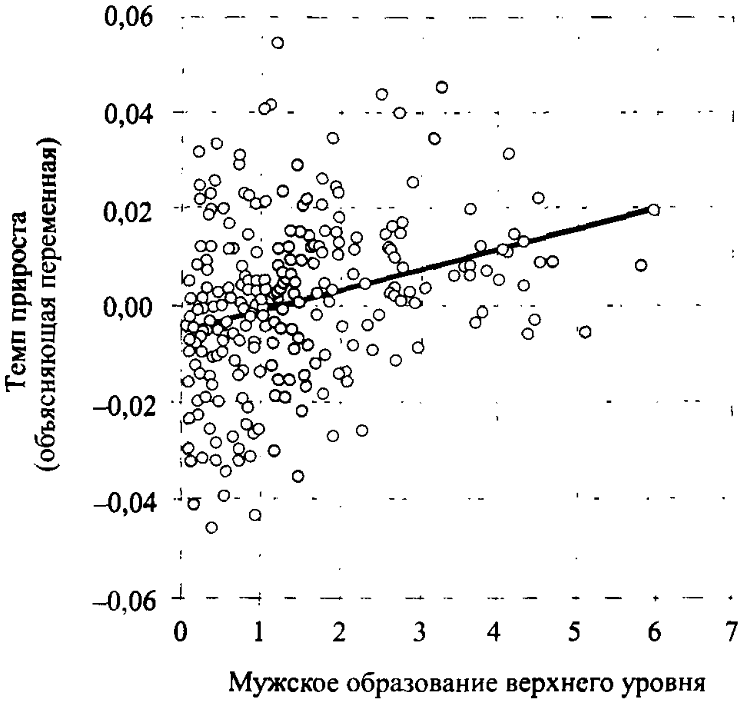


Рис. 12.4. Темп прироста в зависимости от образования (частичная зависимость). На данной диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и средним числом лет школьного образования верхнего уровня лиц мужского пола (среднее неполное плюс среднее образование). Переменная, откладываемая по горизонтальной оси координат, измерена в 1965, 1975 и 1985 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

ней продолжительности жизни в момент рождения или в возрасте 5 лет. (Величины, обратные средней продолжительности жизни в возрасте 1 года, также встречаются в инструментальном списке.) Оценка коэффициента здесь равна −5,0 (стандартная ошибка равна 0,9), т. е. значимость этой переменной очень высока, и отсюда следует, что при лучшем здоровье экономика растет быстрее. Снижение величины, обратной средней продолжительности жизни в возрасте 1 года, на величину стандартной ошибки (на 0,0022 в 1980 г.), согласно оценкам, приводит к увеличению темпа прироста на 0,011. На рис. 12.5 дано графическое представление частичной зависимости между ростом и данным показателем здоровья.

Коэффициент фертильности. Коэффициент фертильности (среднее число детей, рожденных одной женщиной в течение всего срока ее жизни) входит в регрессию прологарифмированным, и данные берутся за 1960, 1970 и 1980 гг. Эти переменные также присутствуют в инструментальном списке. Оценка коэффициента — отрицательная и

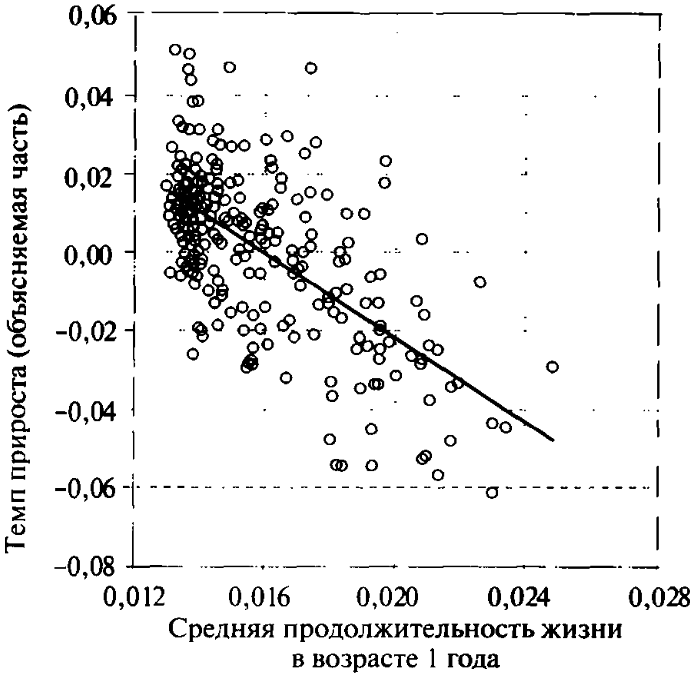


Рис. 12.5. Темп прироста в зависимости от средней продолжительности жизни (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и величиной, обратной средней продолжительности жизни в возрасте 1 года. Переменная, значения которой откладываются по горизонтальной оси координат, оценена за 1960, 1970 и 1980 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

достаточно значимая величина, равная −0,012 (стандартная ошибка равна 0,005). Снижение логарифма коэффициента фертильности на величину стандартной ошибки (на 0,53 в 1980 г.), согласно оценкам, приводит к увеличению темпа прироста на 0,006. Данная частичная зависимость показана на рис. 12.6.

Удельное правительственное потребление. Отношение реального потребления правительства к реальному ВВП[1] было скорректировано вычитанием из числителя этого отношения реальных расходов на оборону и некапитальных реальных затрат на образование. Расходы на оборону и образование (расходные категории, традиционно включенные в стандартные оценки правительственного потребления) были исключены, потому что эти пункты не рассматриваются нами как потребление. В частности, они, скорее всего, будут непосредственно влиять

[1] Эти данные взяты из таблиц Penn-World Tables версии 6.1, которые представлены в работе Summers and Heston (1991).

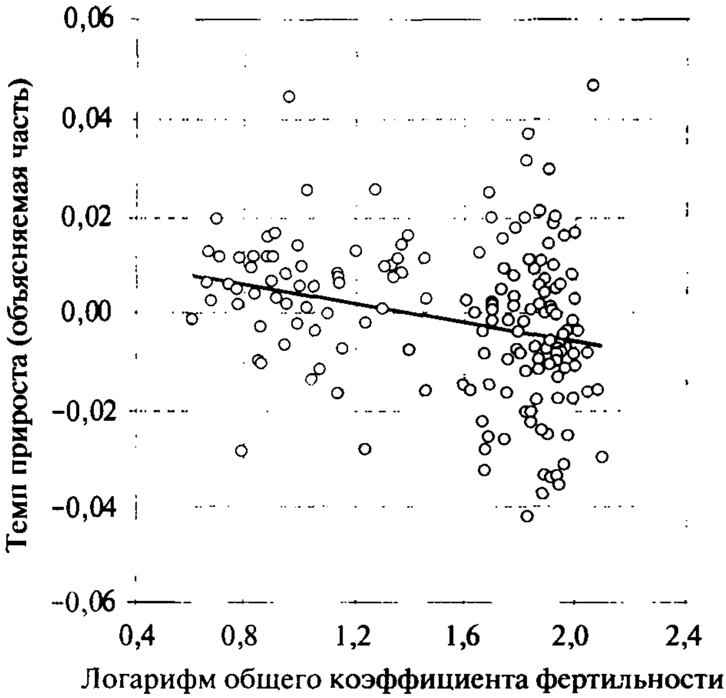


Рис. 12.6. Темп прироста в зависимости от коэффициента фертильности (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и логарифмом общего коэффициента фертильности. Переменная, значения которой отложены по горизонтальной оси координат, оценена за 1960, 1970 и 1980 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

на производительность или на защиту прав собственности. Уравнение роста для периода 1965–1975 включает в себя среднее значение скорректированного удельного правительственного потребления за 1965–1974 гг. в качестве регрессора, а также включает скорректированное удельное правительственное потребление за 1960–1964 гг. в качестве инструмента. Для двух других десятилетних периодов расклад по временным периодам аналогичен.

Значение оцененного коэффициента отрицательно и значимо: −0,062 (0,023). Такая оценка означает, что снижение значения данного отношения правительственного потребления к ВВП на 0,059 (это стандартное отклонение данной величины в 1984–1994 гг.) приведет к увеличению темпа прироста на 0,004. Данная частичная зависимость показана на рис. 12.7.

Норма права. Переменная, ответственная за правовую норму, дается субъективной оценкой, предложенной в *Руководстве по международным страновым рискам*, которое представлено международной

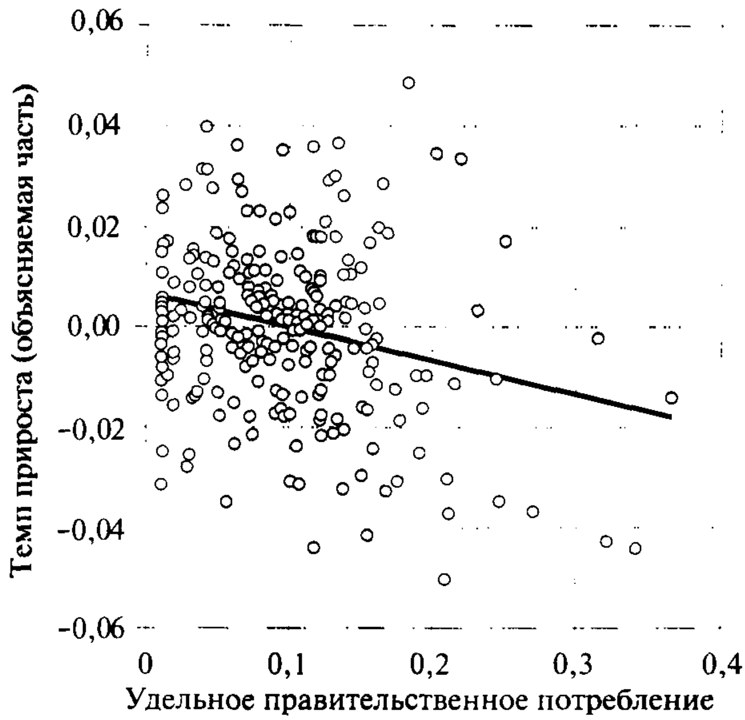


Рис. 12.7. Темп прироста в зависимости от правительственного потребления (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и отношением правительственного потребления к ВВП. Это отношение включает в себя стандартную оценку правительственного потребления за вычетом оценок реальных расходов на оборону и образование. Оценки удельного правительственного потребления являются средним значением за 1965 1974, 1975-1984 и 1985 1994. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

консалтинговой компанией Political Risk Services. Эта переменная была впервые предложена в работе Knack and Keefer (1995). Данные, лежащие в основе оценки этой переменной, табулированы в семи категориях, но мы их здесь свели к [0, 1]-шкале, где 1 соответствует наиболее благоприятной среде для поддержки нормы права. Эти данные имеются только с 1982 г., поэтому в приведенных в табл. 12.3 оценках используются самые ранние из доступных данных (обычно за 1982 г., но иногда и за 1985 г.), причем в уравнениях роста для периодов 1965 1975 и 1975–1985 гг. (Так сделать в данном случае можно в силу того что переменная правовой нормы очень медленно изменяется во времени.) В третьем уравнении в качестве регрессора используется среднее значение нормы права за 1985 1994 гг., а значение за 1985 г. идет по инструментальному списку. Оценка коэффициента положительна и значима: 0,0185 (0,0059). Такая оценка означает, что прирост нормы права на величину одного стандартного отклонения (0,26 за 1985–1994 гг.) приведет к увеличению темпа

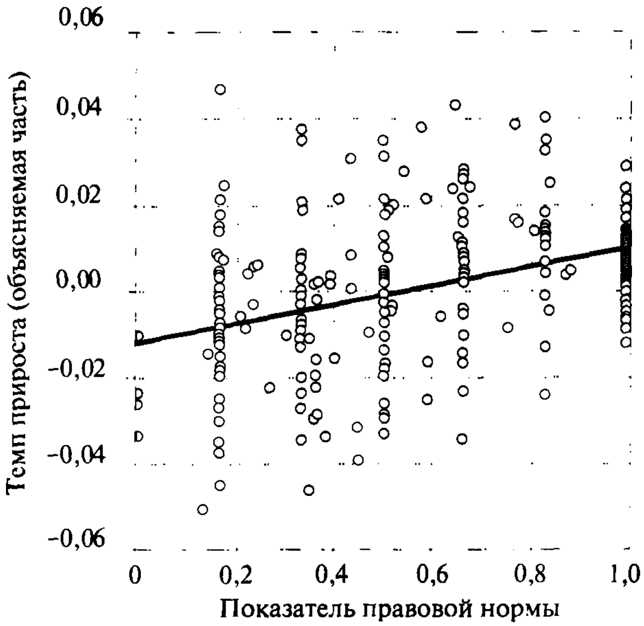


Рис. 12.8. Темп прироста в зависимости от нормы права (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и показатель поддержки нормы права, публикуемый Political Risk Services. Откладываемая по горизонтальной оси координат переменная связана с ростом в 1965-1975 и 1975-1985 гг. и оценена за 1982 или 1985 г. Значение, связанное с ростом в 1985-1995 гг., является средним за 1985 1994 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

прироста на 0.005. Данная частичная зависимость показана на рис. 12.8. (Заметьте, что почти все наблюдения показателя нормы права сосредоточены по семи категориям. Усреднение за 1985 1994 гг. приводит к промежуточным значениям.)

Демократия. Переменная демократии происходит из субъективной оценки, которую дает Freedom House[1]. Эта оценка основана на избирательных правах и используется также для оценки гражданских свобод, которые мы рассмотрим позже. Используемые данные табулированы в семи категориях, которые сведены здесь к [0, 1]-шкале, где 1 соответствует полной представительной демократии, а 0 соответствует полностью тоталитарной системе. Эти данные имеются в наличии с 1972 г., и, кроме того, в работе Bollen (1990) имеются данные за 1960

[1] Одним из ранних всесторонних исследований этого является работа Gastil (1987).

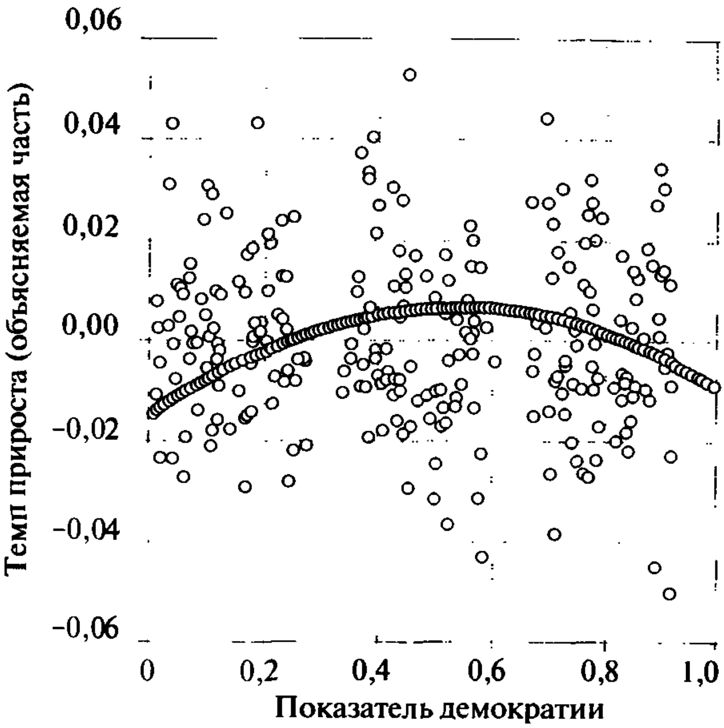


Рис. 12.9. Темп прироста в зависимости от степени демократизации (частичная зависимость). На данной диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и показателем демократии (избирательных прав), публикуемым Freedom House. Откладываемая по горизонтальной оси координат переменная является средним значением за периоды 1965 1974, 1975 1984 и 1985 1994 гг. Сплошная кривая является подобранной зависимостью, т. е. регрессией с подставленными в нее оценками коэффициентов при линейном и квадратичном регрессорах демократии. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

и 1965 гг., которые мы также используем. В систему также включен квадрат демократии, чтобы учесть возможность нелинейного влияния демократии на экономический рост. В первое уравнение роста входит в качестве регрессора среднее значение демократии и среднее значение ее квадрата за период 1965–1974 гг. В инструментальный список входят уровень и квадрат значения этой величины в 1965 г. (в ряде случаев в 1960 г.). В другие два уравнения роста в качестве регрессоров используются средние значения за 1975 1984 и 1985 1994 гг. соответственно, а значения в первый год каждого из этих периодов входят в списки инструментов.

Данные результаты означают, что линейная и квадратичная переменные демократии в регрессии обе статистически значимы: 0,079 (0,028) и –0,074 (0,025) соответственно. *p*-уровень совместной значимости равен 0,011. Из этих оценок вытекает, что если в начальном состоянии имела место полностью тоталитарная политическая система (т. е. переменная демократии принимает нулевое значение), то рост демократии начинает стимулировать рост. Однако, по мере дальнейшего роста демократии, ее положительное влияние на экономику иссякает и достигает нуля, когда данный показатель достигает значения 0.53. (Заметьте, что среднее значение переменной демократии за период 1985-1994 гг. равно 0.64.) Следовательно, оказывается, что демократизация стимулирует рост только в тех странах, которые не очень демократичны, а вот в тех странах, в которых уже достигнут существенный уровень демократии, демократизация вредна, так как подавляет рост. Данная нелинейная зависимость показана на рис. 12.9. Сплошная кривая на рисунке состоит из подобранных значений, задаваемых линейной и квадратичной частью регрессии.

Международная открытость. Степень международной открытости измеряется отношением экспорта плюс импорта к ВВП. Эта мера очень чувствительна к размеру страны, постольку поскольку большие страны склонны относительно больше концентрироваться на внутренней торговле. Учитывая это обстоятельство, отношение экспорта плюс импорта к ВВП было очищено от его зависимости (в контексте регрессии) от логарифмов численности населения и площади страны. Вопрос о том, имеет ли размер страны какую-либо связь с экономическим ростом, мы рассмотрим позже.

Переменная открытости входит в каждое уравнение роста как среднее за соответствующий десятилетний период (1965-1974 гг. и т. д.). В основной системе эти переменные также появляются и в соответствующих инструментальных списках. Такая спецификация хороша в случае, если данное торговое отношение является экзогенным (в значительной степени) по отношению к экономическому росту. Оценка коэффициента при переменной открытости равна 0.0054 (0.0048), т. е. статистически незначима. Следовательно, мы фактически не находим статистического подтверждения тому, чтобы большая международная открытость стимулировала экономический рост. Точечная оценка показывает, что увеличение удельной открытости на величину стандартного отклонения (0.39 в 1985-1994 гг.) приведет к увеличению темпа прироста на 0.002. Эта частичная зависимость между ростом и открытостью графически представлена на рис. 12.10.

Условия торговли. Эта переменная измеряется индексом, который равен произведению темпа прироста условий торговли (условия торговли измеряются отношением экспортных цен к ценам импорта)

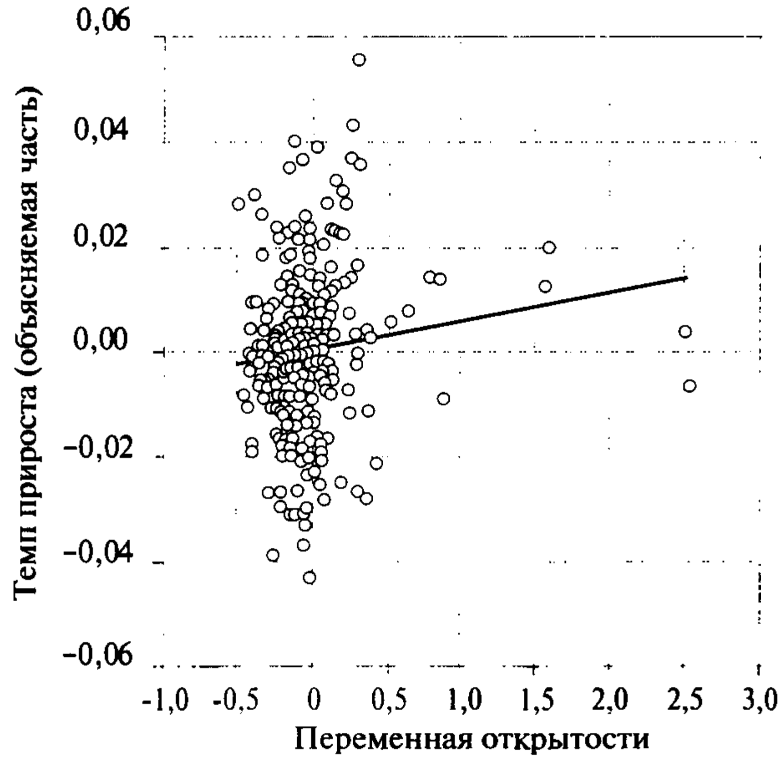


Рис. 12.10. Темп прироста в зависимости от степени открытости (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и удельной открытостью. Эта переменная представляет собой отношение экспорта плюс импорта к ВВП, очищенное от обычной зависимости этого отношения от логарифмов численности населения и площади страны. Откладываемая по горизонтальной оси координат переменная является средним значением за периоды 1965 1974, 1975 1984 и 1985 1994 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

за каждый десятилетний период (1965-1975 гг. и т. д.) на среднее значение отношения экспорта плюс импорта к ВВП за тот же период (1965 1974 гг. и т. д.). Эти переменные также присутствуют и в инструментальных списках. Идея здесь состоит в том, что изменения в условиях торговли зависят в первую очередь от международных договоренностей и посему в значительной степени являются экзогенными по отношению к экономическому росту отдельной страны в этот же период времени[1]. Оценка коэффициента равна 0.13 (0.053), т. е. это значение положительно и статистически значимо. Отсюда вытекает,

[1]Результаты будут фактически такими же, если включить в инструментальной список произведение темпа прироста условий торговли на отношение экспорта плюс импорта к ВВП с лагом по времени, т. е. значение последней величины, отношения экспорта плюс импорта к ВВП, может быть взято за предыдущие (относительно величины темпа прироста условий торговли) годы.

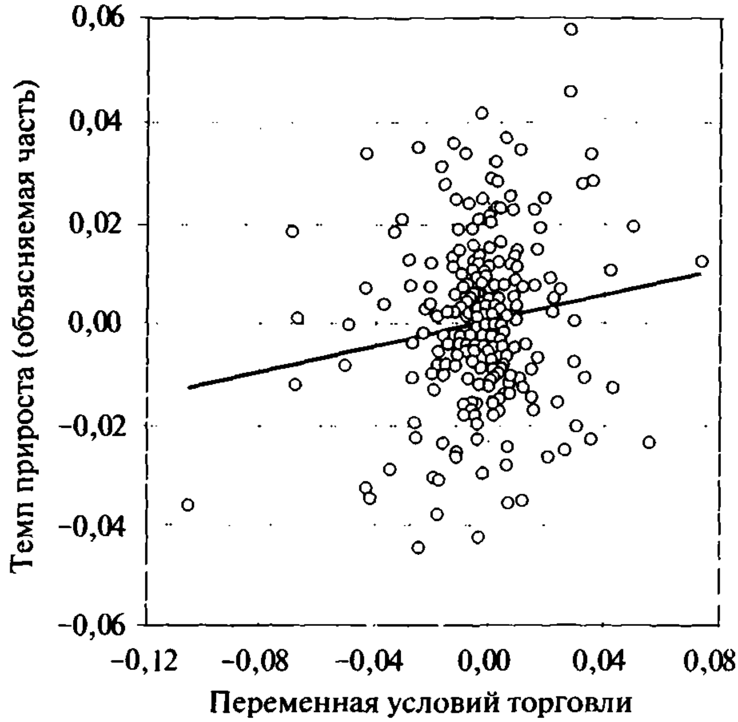


Рис. 12.11. Темп прироста в зависимости от условий торговли (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и переменной условий торговли. Эта переменная представляет собой произведение темпа прироста условий торговли (экспортные цены относительно цен импорта) на среднее значение отношения экспорта плюс импорта к ВВП. Темп прироста условий торговли оценивается за периоды 1965–1975, 1975–1985 и 1985–1995 гг. Отношения экспорта плюс импорта к ВВП – средние за периоды 1965 1974, 1975–1984 и 1985–1994 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

что, оказывается, изменения в условиях торговли действительно имеют значение для роста на протяжении десятилетних периодов. Из этих результатов следует, что увеличение значения данной переменной на величину стандартного отклонения (на 0,017 в 1985 1995 гг.) приведет к увеличению темпа прироста на 0,002. На рис. 12.11 показана данная частичная зависимость между ростом и условиями торговли.

Удельное инвестирование. Отношение валового объема реальных внутренних инвестиций (частные плюс правительственные) к реальному ВВП входит в регрессии в виде средних значений за каждый из десятилетних периодов (1965 1974 и т. д.)[1]. Соответствующий инструмент является средним значением данного отношения за первые

[1] Согласно Summers and Heston (1991), эти данные взяты из Penn-World Tables 6.1.

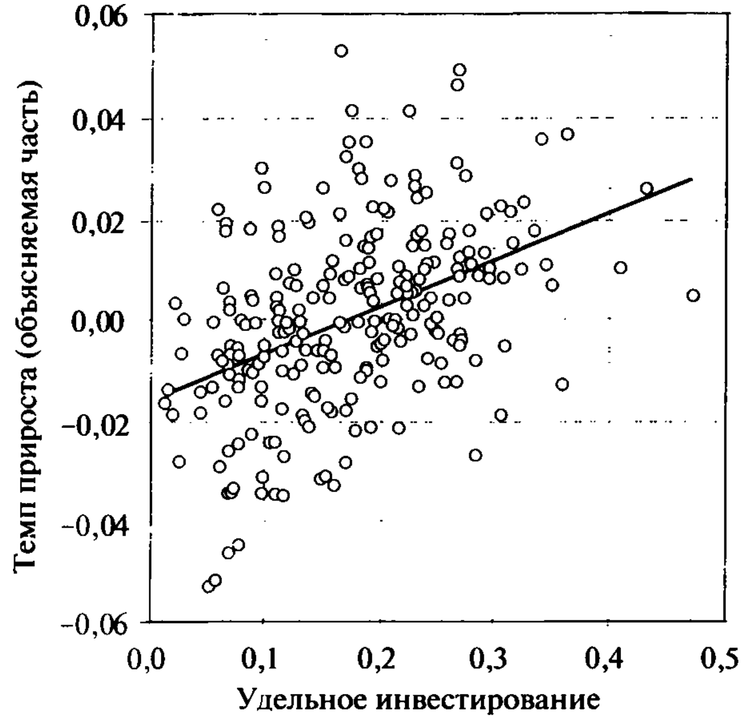


Рис. 12.12. Темп прироста в зависимости от объема инвестиций (частичная зависимость). На данной диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и отношением совокупного объема инвестиций к ВВП. Откладываемая по горизонтальной оси координат переменная является средним значением за периоды 1965 1974, 1975 1984 и 1985 1994 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

пять лет десятилетки (т. е. за 1960 1964, 1970 1974 и 1980 1984 гг.). Оценка коэффициента равна 0,083 (0,024), т. е. положительна и статистически значима. Из этой точечной оценки вытекает, что увеличение удельного инвестирования на величину стандартного отклонения (0,081 в 1985 1994 гг.) приведет к увеличению темпа прироста на 0,007. Графически частичная зависимость роста от данной величины представлена на рис. 12.12.

Уровень инфляции. Переменная инфляции измеряется средним темпом прироста розничных цен за каждый из десятилетних периодов (1965 1975 гг. и т. д.). Межстрановой анализ инфляции наводит на мысль, что в качестве инструментов следует использовать фиктивные переменные колониального статуса в прошлом. В частности, в бывших колониях Испании и Португалии, а также других странах, отличных от Великобритании и Франции, инфляция имела значительную объясняющую силу. Результаты, представленные в табл. 12.3, получены

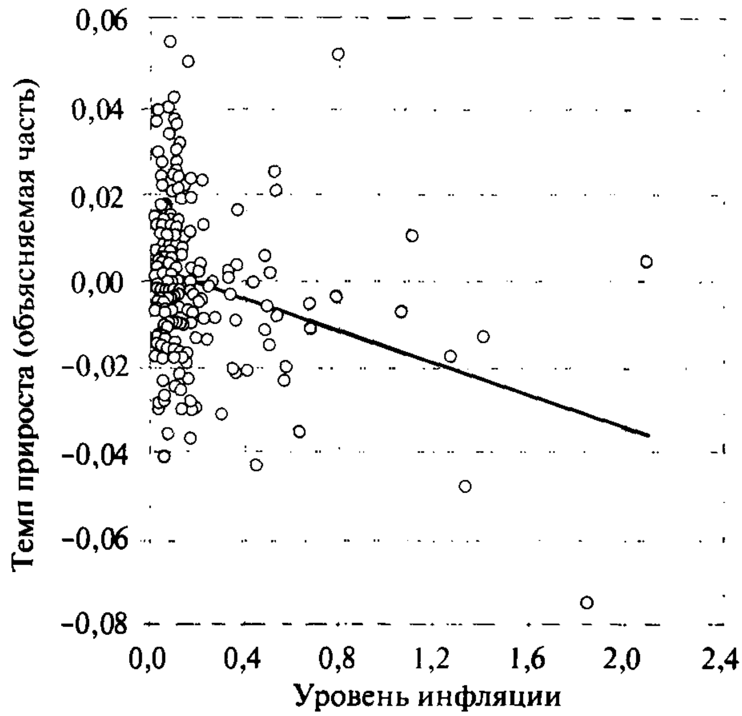


Рис. 12.13. Темп прироста в зависимости от инфляции (частичная зависимость). На диаграмме показана частичная зависимость между темпом прироста подушевого ВВП и средним значением темпа прироста розничных цен. Откладываемая по горизонтальной оси координат переменная берется за 1965–1975, 1975–1985 и 1985–1995 гг. В описании рис. 12.3 приведен общий алгоритм построения такой диаграммы

исходя из предположения, что в инструментальный список входят эти две колониальные фиктивные переменные — переменная бывшей колонии Испании или Португалии и переменная бывшей колонии другой страны (отличной от Великобритании и Франции), но при этом сама инфляция ни за текущий год, ни за предыдущие годы в этот список не входит. Оценка коэффициента, равная −0.019 (0.010), отрицательна и едва статистически значима. Из этой оценки следует, что увеличение уровня инфляции на величину стандартного отклонения (0.38 в 1985–1995 гг.) приводит к снижению темпа прироста на 0.007. Однако отсюда же следует, что небольшие колебания инфляции, наблюдаемые в большинстве стран, скажем изменения, равные примерно 0.05 в год, приводят к тому, что темпы прироста изменяются не более чем на 0.001. На рис. 12.13 дано графическое представление данной частичной зависимости роста от инфляции. Из диаграммы становится ясно, что вклад в оценку данной зависимости вносит динамика в области высоких значений инфляции — преимущественно в районе 20–30% в год.

Если вместо колониальных фиктивных переменных из инструментального списка подставить переменную уровня инфляции за текущий год, то точечная оценка коэффициента при переменной инфляции будет равна −0,018 (0,005), т. е. почти такая же. Однако если внести в инструментальный список инфляцию с лагом по времени (т. е. за предыдущие годы, за 1960–1965, 1970–1975 и 1980–1985 гг.), то оценка коэффициента равна 0,003 (0,009), что почти ноль. Результат этот удивителен тем, что инфляция за предыдущие годы обычно имеет большую объясняющую силу для текущей инфляции.

Постоянные члены регрессии. Во все рассмотренные нами регрессии входит общий для всех постоянный член, а также отдельные фиктивные переменные времени — индикаторы двух последних периодов 1975–1985 и 1985–1995 гг. Эти две фиктивные переменные времени существенно отрицательны: −0,0078 (0,0026) и −0,0128 (0,0034) соответственно. Следовательно, темп прироста мировой экономики, по-видимому, снижался с 1965 по 1995 г.[1].

12.3.2. Проверка коэффициентов на устойчивость

В столбцах (3) и (4) табл. 12.3 представлены результаты оценок с разделением стран на те, у которых для каждого периода подушевой ВВП ниже медианы, и на те, у которых выше. Это разделение было основано на значениях подушевого ВВП в 1960, 1970 и 1980 гг. Так как медиана была подсчитана для всех стран, по которым имеются данные по ВВП, то оказалось, что существенно больше половины стран в регрессионной выборке находятся с той стороны от медианы, где подушевой ВВП больше ее. (Для стран с более высоким доходом более вероятно наличие данных по тем переменным, которые необходимы для включения в данную регрессионную выборку.)

Гипотеза о равенстве коэффициентов в двух разных доходных группах отвергается с очень низким уровнем значимости (p-уровнем). Однако если рассматривать переменные отдельно, то будет наблюдаться значительная стабильность при сравнении групп с низкими и высокими доходами. В частности, для p-уровней из столбца (5) табл. 12.3 немногие значения меньше 0,05 соответствуют переменной средней продолжительности жизни, удельному правительственному потреблению и фик-

---

[1] Среднее значение темпа прироста за каждые 10 лет также зависит и от средних значений регрессоров. Для 70 включенных в регрессии стран за три десятилетних периода средние темпы прироста были равны соответственно 0,0255 для периода 1965–1975 гг., 0,0162 для 1975–1985 гг. и 0,0138 для 1985–1995 гг.

тивной переменной для периода 1985–1995 гг. Особенно примечательно то, что низкодоходные страны проявляют бо́льшую чувствительность роста к средней продолжительности жизни и правительственному потреблению, чем высокодоходные страны. Кроме того, снижение темпа прироста с периода 1965–1975 по 1985–1995 гг. наблюдается по большей части в отношении низкодоходной группы. Помимо этих особенностей, наиболее впечатляющим открытием при анализе результатов столбцов (3)-(5) таблицы являются масштабы разброса аналогичных коэффициентов для бедных и богатых стран.

В столбце (6) табл. 12.3 находятся оценки коэффициентов для случая, когда данные разбиваются по пятилетним периодам, а не по десятилетним, как это было ранее. В случае разбиения по пятилетним периодам мы имеем семь уравнений, в которых зависимые переменные – это темпы прироста подушевого ВВП от 1965–1970 до 1995–2000 гг. В большинстве случаев коэффициенты из столбца (6) при пятилетней спецификации примерно такие же, что и оценки из столбца (2) для случая разбиения по десятилетним периодам. Основные исключения – переменная условий торговли (у которой коэффициент в случае разбиения по пятилетним периодам меньше), переменная открытости (которая в случае разбиения по пятилетним периодам больше и при таком значении уже статистически значима) и переменная демократии (для которой величины по модулю обоих коэффициентов в случае разбиения по пятилетним периодам меньше). Подобранные уравнения, близость которых к реальным данным измеряется коэффициентом детерминации R-квадрат, в случае разбиения по пятилетним периодам заметно хуже, чем в случае разбиения по десятилетним периодам. В данной модели предполагается, что на результаты роста в течение таких коротких периодов, как пятилетние, влияют в основном только краткосрочные и временные силы («бизнес-циклы»), которые не рассматривались в теориях долгосрочного экономического роста. Интересно отметить очень плохие результаты для последнего пятилетнего периода 1995–2000 гг. В этом случае значение R-квадрат равно всего 0,04. Одной из причин этого является то, что несколько восточноазиатских лидеров по итогам предыдущих лет показали очень плохие результаты в 1995-2000 гг. из-за известного финансового кризиса в Азии.

В табл. 12.4 приведены результаты оценок коэффициентов в предположении, что они могут быть различными в разные десятилетние периоды. (При априорном оценивании в разные периоды различались только постоянные члены.) Гипотеза о равенстве всех этих коэффициентов друг другу должна быть отвергнута при малом p-уровне. Однако,

Таблица 12.4

Устойчивость коэффициентов с течением времени в межстрановых регрессиях роста

(1)	Коэффициенты по временным периодам			
	(2)	(3)	(4)	(5)
Объясняющая переменная	1965 1975	1975 1985	1985 1995	p-уровень[a]
Логарифм подушевого ВВП	−0,0222(0,0041)	−0,0231(0,0064)	−0,0338(0,0061)	0,25
Мужское школьное образование верхнего уровня	0,0038(0,0026)	0,0070 (0,0028)	0,0022 (0,0029)	0,13
1/(Средняя продолжительность жизни в возрасте 1 года)	−5,48(1,48)	−3,74(1,59)	−7,94(1,86)	0,13
Логарифм общего коэффициента фертильности	0,0008(0,0079)	−0,0143 (0,0104)	−0,0307 (0,0101)	0,052
Удельное правительственное потребление	−0,060(0,035)	−0,017 (0,035)	−0,099 (0,059)	0,35

[a] p-уровень связан с гипотезой о том, что коэффициенты для всех трех периодов равны друг другу.

	Коэффициенты по временным периодам			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Объясняющая переменная	1965 1975	1975 1985	1985 1995	p-уровень[a]
Правовая норма	0,0262(0,0087)	0,0191 (0,0117)	0,0079 (0,0173)	0,64
Демократия	0,129(0,070)	0,111(0,055)	0,120(0,053)	0,98
Квадрат демократии	−0,127(0,058)	−0,109(0,051)	−0,097(0,048)	0,93
Удельная открытость экономики	−0,0005(0,0123)	0,0043 (0,0095)	0,0028 (0,0079)	0,95
Изменения в условиях торговли	0,063 (0,094)	0,225(0,110)	−0,120 (0.133)	0,16
Удельное инвестирование	0,117 (0,037)	0,068 (0,050)	0,095(0,056)	0,73
Уровень инфляции	0,061(0,031)	−0,046(0,032)	−0,018(0,014)	0,033
Константа	0,239(0,056)	0,252(0,062)	0,428(0,068)	0,046
Число наблюдений	72	86	83	
R-квадрат	0,55	0,48	0.57	

Примечания. В столбцах (2) (4) находятся оценки регрессионной системы из столбца (2) табл. 12.3 при допущении, что коэффициенты регрессии могут меняться от одного из трех периодов (1965 1975, 1975–1985 и 1985 1995 гг.) к другому.

[a] p-уровень связан с гипотезой о том, что коэффициенты для всех трех периодов равны друг другу.

рассматривая переменные по отдельности, обнаруживаем, что p-уровень меньше 0,05 только для инфляции и коэффициента фертильности (см. столбец (5) табл. 12.4). Но главное в таблице — это поразительная стабильность всех оцененных коэффициентов во времени.

12.3.3. Дополнительные объясняющие переменные

Литературы, посвященной эмпирическим исследованиям детерминантов экономического роста, в последнее время стало столь много, что в ней можно обнаружить великое множество дополнительных объясняющих переменных. Некоторые из этих кандидатов в объясняющие переменные вместе с оценками коэффициентов представлены в табл. 12.5: они добавляются по одной в основную регрессию столбца (2) табл. 12.3.

Первая переменная, логарифм населения, предназначена для того, чтобы обнаружить возможное влияние размера страны на результаты ее развития. Эта переменная входит в регрессию за 1960, 1970 и 1980 гг., а также появляется в инструментальном списке. Оценка коэффициента незначима: 0,0004 (0.0009). Следовательно, нет никаких оснований считать, что размер страны имеет значение для ее экономического роста.

Квадрат логарифма подушевого ВВП входит в регрессию для того, чтобы установить зависит ли скорость сходимости от уровня подушевого ВВП. Эта новая переменная имеет тот же временной индекс, что и линейный член логарифма подушевого ВВП. Если бы коэффициент при переменной в квадрате был отрицательным, то скорость сходимости росла бы с ростом подушевого ВВП. Оценка этого коэффициента дает отрицательное и статистически значимое значение −0.0035 (0.0020). Такой результат вступает в противоречие с теорией, согласно которой прирост подушевого ВВП (во время движения в направлении стационарного состояния) понижает скорость сходимости.

Мы рассмотрели несколько альтернативных мер продолжительности обучения, каждая из которых согласована по времени с переменной мужского образования верхнего уровня. Женское образование верхнего уровня имеет отрицательную и статистически незначимую оценку коэффициента, равную −0,0034 (0.0041). Начальное образование для лиц мужского пола и лиц женского пола также имеет статистически незначимые коэффициенты −0,0011 (0.0025) и 0.007 (0.0024) соответственно. Следовательно, основная зависимость между ростом и продолжительностью образования сосредоточена на переменной мужского образования верхнего уровня, которая включена в столбец (2) табл. 12.3. Разделение этой переменной на высшее образование и среднее дает два

Таблица 12.5

Дополнительные объясняющие переменные в межстрановых регрессиях роста

(1) Новая объясняющая переменная	(2) Коэффициент	(3) Дополнительная новая переменная	(4) Коэффициент	(5) p-уровень[a]
Логарифм населения	0.0004 (0.0009)			
Логарифм квадрата подушевого ВВП	−0.0035 (0.0020)			
Женское образование верхнего уровня	−0.0034 (0.0041)			
Мужское начальное образование	−0.0011(0.0025)	Женское начальное образование	0.0007 (0.0024)	0,90
Мужское высшее образование[b]	0.0105 (0.0093)	Мужское среднее образование	0,0024 (0.0020)	0,075
Результаты экзаменационных тестов студентов[c]	0.121 (0.024)			
Коэффициент смертности младенцев	−0,001 (0,057)			
1/(Средняя продолжительность жизни в момент рождения)	−0,97 (2.52)			
1/(Средняя продолжительность жизни в возрасте 5 лет)	0.90 (2.00)			

[a] p-уровень здесь связан с проверкой гипотезы о том, что все коэффициенты при новых объясняющих переменных одновременно равны нулю.

[b] Мужское образование верхнего уровня пропущено; p-уровень здесь равен 0,44 и связан с гипотезой о том, что коэффициенты высшего и среднего образований равны.

[c] Количество наблюдений для данной выборки равно 39, 45 и 44.

(1) Новая объясняющая переменная	(2) Коэффициент	(3) Дополнительная новая переменная	(4) Коэффициент	(5) p-уровень[a]
Число больных малярией	0,0019 (0,0045)			
Уровень должностной коррупции	0,0093 (0,0068)			
Качество бюрократического аппарата	0,0076 (0,0088)			
Показатель гражданских свобод[b]	-0,045 (0,081)	Квадрат показателя гражданских свобод	0,003 (0,070)	0,36
Фиктивная переменная африканской страны, расположенной южнее пояса Сахары[c]	−0,0080 (0,0051)	Фиктивная переменная латиноамериканской страны	0,0031 (0,0039)	0,011
Фиктивная переменная восточноазиатской страны	0,0100 (0,0047)	Фиктивная переменная страны ОЭСР	0,0004 (0,0054)	
Доля населения в возрасте < 15 лет	−0,070 (0,070)	Доля населения в возрасте > 64 лет	−0,080 (0,110)	0,61
Правительственные расходы на образование	-0,057 (0,068)	Правительственные расходы на оборону	0,064 (0,028)	0,069
Логарифм премии черного рынка	−0,0122 (0,0058)			

[a] p-уровень здесь связан с проверкой гипотезы о том, что все коэффициенты при новых объясняющих переменных одновременно равны нулю.

[b] Эта система только для двух периодов 1975–1985 и 1985–1995 гг.

[c] Все эти четыре региональные фиктивные переменные входят в регрессию вместе.

(1) Новая объясняющая переменная	(2) Коэффициент
Фиктивная переменная правовой структуры британского типа	−0,0018 (0,0044)
Абсолютная величина широты (градусы широты от 0 до 90°)	0,066 (0,027)
Фиктивная переменная отсутствия выхода к морю	−0,0088 (0,0032)
Этническая неоднородность	−0,0080 (0,0059)
Лингвистическая неоднородность	−0,0084 (0,0050)
Религиозная неоднородность	−0,0088 (0,0058)
Фиктивная переменная британской колонии[2)]	−0,0064 (0,0043)
Фиктивная переменная испанской или португальской колонии	−0,0019 (0,0053)

Примечание. Каждая новая объясняющая переменная или

[a] *p*-уровень здесь связан с проверкой гипотезы о том, что
равны нулю.

Окончание табл. 12.5

(3) Дополнительная новая переменная	(4) Коэффициент	(5) p-уровень[a]
Фиктивная переменная правовой структуры французского типа	0,0047 (0,0045)	0,10
Квадрат широты	−0,085 (0,044)	0,036
Фиктивная переменная французской колонии	0,0003 (0,0053)	0,39
Фиктивная переменная какой-либо другой колонии	−0,0055 (0,0075)	

·руппа новых переменных добавляется к системе столбца (2) табл. 12.3.

› все коэффициенты при новых объясняющих переменных одновременно положительных коэффициента 0,0105 (0,0093) и 0,0024 (0,0020), которые не сильно отличаются друг от друга (p-уровень гипотезы об их равенстве друг другу равен 0,46).

Все рассмотренные до сих пор образовательные переменные связаны с количеством образования, так как измеряют продолжительность обучения, а не его качество. Положительной мерой качества образования могут служить результаты международно-сравнимых экзаменов. Конечно, экзаменационные тесты могут отражать факторы, отличные от формального образования, например влияние размера семьи. В любом случае основной проблемой здесь является то, что статистические данные по этому вопросу имеются не для всех рассматриваемых нами стран и не для всех периодов времени, для которых мы построили исходную регрессию. Из-за недостаточности данных нам пришлось построить один срез экзаменационных тестов и затем использовать одно и то же значение для каждой страны для всех трех исследуемых нами периодов. (Таким образом, базовые экзаменационные тесты применяются в различные моменты времени в каждом уравнении, так что, в частности, некоторые данные связаны с тестами, которые были сделаны позже тех дат, за которые измеряется темп прироста экономики.) Оценка коэффициента переменной экзаменационных тестов положительна, и статистическая значимость ее очень высока: 0,121 (0,024). Другим результатом данной спецификации является то, что оценка коэффициента мужского школьного образования верхнего уровня оказывается незначимой: 0,0013 (0,0015). Таким образом, все это говорит о том, что качество образования имеет куда более существенное значение для экономического развития, чем продолжительность обучения. К сожалению, отсутствие достаточного объема международных данных, связанных с результатами экзаменационных тестов, приводит к значительным затруднениям с дальнейшими исследованиями в этом направлении.

Другая часть результатов связана с измерением здоровья. Вспомним, что мы уже рассматривали ранее величину, обратную средней продолжительности жизни в возрасте 1 года. (Эта мера имеет бо́льшую объясняющую силу, чем средняя продолжительность жизни в возрасте 1 года или логарифм этой величины.) Если эту переменную зафиксировать, то норма смертности младенцев (рассчитанная для 1960, 1970 и 1980 гг.) будет незначима (оценка коэффициента регрессии равна −0,001, стандартное отклонение равно 0,057). Также незначима величина, обратная средней продолжительности жизни в момент рождения (−0,97, стандартное отклонение равно 2,52) или в возрасте 5 лет (0,90, стандартное отклонение равно 2,00). (Эти переменные также входят в регрессию для

1960, 1970 и 1980 гг.) В работе Gallop and Sachs (1998) представлено множество различных способов измерения эффектов различных болезней. Так как мы не нашли никаких особых связей между заболеваниями и экономическим развитием, то решили рассматривать только одну переменную простую среднюю продолжительность жизни. В качестве примера мы включили переменную вспышки малярии в 1966 г., и она оказалась незначимой, коэффициент равен 0,0019 (0,0045).

Различные варианты показателя нормы права также можно в изобилии встретить в литературе. При сохранении нашей меры нормы права (и других объясняющих переменных, включая демократию) на постоянном уровне показатель масштаба должностной коррупции, публикуемый Political Risk Services, будет положителен, но незначим: 0,0067 (0,0071)[1]. (Заметим, что для данного показателя система тем «лучше», чем меньше должностная коррупция.) Аналогично незначимым оказался показатель качества бюрократии от Political Risk Services, оценка его коэффициента равна 0,0054 (0,0091). Показатели коррупции и качества бюрократии входили в регрессию, будучи синхронизированными по времени с переменной нормы права, которую мы рассмотрели выше.

Переменная демократии (столбец (2) табл. 12.3) является публикуемым Freedom House показателем избирательных прав. Из-за высокой степени корреляции оказалось невозможным эмпирически отличить эту величину от другого показателя Freedom House, связанного с гражданскими свободами. Линейный и квадратичный члены гражданских прав будут незначимыми, если они будут добавлены в систему (p-уровень равен 0,53)[2]. Однако если переменные гражданских свобод уже включены, то линейный и квадратичный члены избирательных прав также оказываются незначимыми (p-уровень равен 0,12).

Выше, в данной главе, мы уже обсуждали вопрос о том, каким образом в группе самых медленнорастущих стран доминируют африканские страны, расположенные южнее пустыни Сахара, а в группе самых быстрорастущих стран доминируют страны Восточной Азии. Возникает естественный вопрос, будет ли распределение результатов роста по регионам таким же в случае, если объясняющие переменные, включенные в основную регрессионную систему столбца (2) табл. 12.3.

---

[1] Вопросы коррупции рассматриваются в работе Mauro (1995).

[2] Эта система охватывает только два десятилетних периода роста (1975 1985 и 1985 1995 гг.), потому что независимых измерений уровней избирательных прав и гражданских свобод до 1972 г. не проводилось. Распределение по времени переменной гражданских свобод такое же, что и для рассмотренного выше показателя избирательных прав.

будут константами. То есть вопрос состоит в том, верно ли, что переменные, которые мы уже включили в регрессию, объясняют результаты роста в зависимости от регионального расположения. Региональные фиктивные переменные, показанные в табл. 12.5, имеют следующие оценки коэффициентов: 0,007 (0,005) – для африканских стран южнее Сахары; 0,006 (0,004) – для стран Латинской Америки; 0,009 (0,005) – для стран Восточной Азии и −0,001 (0,006) – для стран ОЭСР[1]. Таким образом, только фиктивная переменная Восточной Азии значима при обычных критических уровнях. Итак, нашим главным наблюдением здесь является то, что большинство последствий включения экономики в один из указанных регионов уже объясняется переменными, включенными в основную регрессионную систему.

Разумно было бы предполагать, что производительность зависит от возрастной структуры – выпуск на одного работника, по идее, должен быть тем больше, чем большая доля населения приходится на возрастную категорию 15–65 лет и чем меньше на категории 0–15 и более 65 лет. Однако две переменные долей населения (до 15 и после 65 лет), будучи добавленными в регрессионную систему, оказываются совместно незначимыми – p-уровень для обеих совместно равен 0,78. (Значения этих переменных возрастной структуры взяты за 1960, 1970 и 1980 гг.)

В основную систему в качестве меры правительственных расходов включено стандартное определение правительственного потребления за вычетом затрат на оборону и образование. Если эти последние две компоненты правительственных расходов включить в регрессионную систему по отдельности (каждую в виде оценки отношения реальных расходов к реальному ВВП), то оценки коэффициентов будут равны 0,009 (0,074) для образования и 0,033 (0,028) для обороны. Соответствие времени этих переменных такое же, как и для рассмотренной ранее переменной удельного правительственного потребления. Обе переменные совместно незначимы (p-уровень равен 0,4)[2].

Премия черного рынка при обмене иностранной валюты иногда входит в уравнения роста как замена целого класса рыночных дисторсий.

---

[1] Из стран ОЭСР исключена Турция, так как она стала членом этой организации только в 1960-х гг.

[2] Так как переменная, включенная в табл. 12.3, основана на стандартном правительственном потреблении за вычетом расходов на образование и оборону, то нам следует также проверить гипотезу о том, является ли стандартная мера правительственного потребления подходящей мерой для включения ее в системы роста. Эта гипотеза отвергается с p-уровнем 0,022.

Однако данный показатель также может заменить собой и всю макроэкономическую нестабильность, в частности нестабильность, связанную с балансом платежей. Оценка коэффициента при переменной, равной логарифму суммы единицы и премии черного рынка, отрицательна и едва значима: −0,010 (0,006). (Эта переменная входит в регрессию в виде средних значений за периоды 1965–1974, 1975–1984 и 1985–1992 гг. В инструментальный список входят значения за 1960–1964, 1970–1974 и 1980–1984 гг.) Следовательно, все это говорит о том, что данная мера дисторсии имеет обратное прогнозируемое влияние на экономический рост.

В других исследованиях, таких как King and Levine (1993) и Greenwood and Javanovic (1990), отмечена особая роль внутренней финансовой системы как двигателя роста. Сейчас мы рассмотрим два возможных показателя этого финансового развития. Первый из них является отношением к ВВП доверия частной финансовой системе, а второй – мерой объема депозитов в финансовой системе (денежный агрегат M3 минус связанный со спросом на деньги для сделок агрегат M1 в виде отношения, как обычно, к ВВП). Эти переменные измеряются в начале каждого десятилетнего периода: в 1965, 1975 и в 1985 гг. Разумеется, развитие конкретной финансовой системы является эндогенным относительно общего экономического развития. Поэтому указанные финансовые показатели будут, по всей видимости, иметь смысл только в том случае, если они принимают необычные для уровня развития экономики значения, что измеряется эмпирически через подушевой ВВП и некоторые другие объясняющие переменные. В любом случае оценки коэффициентов финансовых показателей не сильно отличаются от нуля: −0,005 (0,007) – для доверительной меры и 0,000 (0,011) – для депозитной меры.

В исследовании La Porta et al. (1998) подчеркивается особая роль правовой структуры страны. В частности, в данной работе утверждается, что британская традиция общего права (неписаного закона) лучше подходит в качестве базиса экономического развития, нежели французская статутная система (писаное право). Данные здесь состоят из фиктивных переменных для пяти типов правовых традиций: британской, французской, скандинавской, немецкой и социалистической. Фиктивные переменные для британской и французской правовых структур, как оказалось, практически не имеют никакой объясняющей рост силы: оценка коэффициента британской фиктивной переменной равна 0,0027 (0,0045), французской – 0,0095 (0,0046). Эти две переменные совместно значимы с p-уровнем равным 0,04, но вопреки основной гипотезе французская система кажется все-таки немного более предпочтительной в плане ее влияния на рост, чем британская (или другие системы). Отметим, впрочем, что эти правовые переменные входят в основную систему столбца (2) табл. 12.3, при том что там уже присутствуют меры нормы права и демократии.

Географические элементы встречаются в исследовании Gallup and Sachs (1998). Одним из повсеместно используемых показателей такого рода является абсолютное значение широты в градусах. Идея здесь состоит в том, что климат в местах, слишком близких к экватору, плох из-за чрезмерных жары и влажности. Так как слишком большое удаление от экватора приводит к чрезмерному холоду, то мы также включаем в систему квадрат широты. В результате получаем, что линейный член (0,065, стандартное отклонение равно 0,028) и квадратичный член (−0,101, стандартное отклонение равно 0,047) совместно почти значимы с p-уровнем, равным 0,07. Точечные оценки дают оптимальное для роста значение абсолютной широты, равное 32 градусам.

Другой географический фактор наличие выходов к морю. Этот фактор может быть важен для роста с точки зрения содействия международной торговле и развитию сообщения с остальным миром. (Отметим, однако, что международная открытость уже присутствует на постоянной основе в основной регрессионной системе.) Оценка коэффициента фиктивной переменной наличия выходов к морю оказывается существенно отрицательной: −0,0110 (0,0033).

Различные меры этнической, лингвистической и религиозной неоднородности населения, как установлено, влияют на принятие политических решений и на конфликты, так что и на экономический рост в итоге тоже. Стандартная мера неоднородности равна единице минус индекс Герфиндаля состава населения (по этническому, лингвистическому или религиозному признаку). Эта мера дает нам вероятность того, что два наугад выбранных человека в стране окажутся из разных групп. Все три меры неоднородности, представленные в табл. 12.5, имеют отрицательные и статистически незначимые коэффициенты в уравнениях роста[1)].

И наконец, установлено, что колониальное наследие имеет влияние на рост. Иногда считают, что это влияние происходит от доставшихся по наследству правовых или монетарных институтов (в таком случае следует отметить, что эти объясняющие переменные уже включены в столбец (2) табл. 12.3). В любом случае фиктивные переменные для че-

---

[1)]Индексы для этнической и лингвистической неоднородности населения взяты из Alesina et al. (2003) и применяются для конца 1990-х гг. Индекс для религиозной неоднородности получен исходя из представленных в работе Barret (1982) данных по религиозной принадлежности в 10 крупнейших группах в 1970 г.

тырех колониальных категорий (британской, французской, испанской, португальской и др.) совместно незначимы для роста с p-уровнем 0,39[1].

12.4. Заключения и выводы относительно экономического роста

Итак, мы установили, что различия в подушевых темпах прироста между странами весьма велики, при этом эти различия систематически объясняются множеством поддающихся количественному определению переменных. Одним из элементов этого множества является величина чистой сходимости, которая представляет собой положительное влияние на рост низкого начального уровня реального подушевого ВВП относительно стартового объема человеческого капитала (измеряемого уровнем образования и средней продолжительностью жизни) и относительно тех объясняющих переменных, которые учитывают правительственную политику и национальные особенности. Мы также установили, что страны с более высоким начальным объемом человеческого капитала сходятся к своим стационарным состояниям быстрее.

Эмпирические заключения относительно условной сходимости полностью согласуются с неоклассической моделью роста глав 1 и 2, а также с эффектом дисбаланса человеческого и физического капиталов, который мы рассматривали в гл. 5. Этот эффект сходимости проявляется также в моделях диффузии технологий, рассмотренных в гл. 8.

При заданных значениях ВВП и человеческого капитала экономический рост имеет положительную зависимость от нормы права и международной открытости и отрицательную – от отношения правительственного потребления к ВВП и уровня инфляции. Рост усиливается при благоприятных изменениях в условиях торговли и ослабевает при увеличении коэффициента фертильности. Зависимость между экономическим ростом и нормой инвестирования прямая, но слабая, особенно когда эти переменные не меняются со временем и если норма инвестирования с задержкой по времени используется в качестве инструмента.

12.5. Робастность

Центральным вопросом эмпирической экономики вообще и экономического роста в частности является вопрос о том, какие объясняющие

[1] В системе столбца (2) табл. 12.3 в инструментальные списки были включены фиктивные переменные Испании или Португалии или других колоний, а меры инфляции в инструментальные списки не входили. В данной же системе добавлены еще две фиктивные переменные, а также уровень инфляции с задержкой по времени.

переменные включать в систему, а какие нет. Проблема в том, что значимая коррелированность с экономическим ростом одних переменных возникает благодаря тому, что некоторые другие переменные мы приравняли к константам. Иными словами, возникает вопрос, какие именно переменные должны быть включены в регрессию роста. Все это время мы имели дело с группами, состоящими из трех десятилетних периодов или семи пятилетних, тем не менее описали задачу и некоторые ее возможные решения в рамках единой межстрановой регрессии. Мы сделали так потому, что старались быть как можно ближе в своем изложении к работам Sala-i-Martin (1997a, 1997b) и Sala-i-Martin, Doppelhoffer, and Miller (2003).

Мы начали с того, что выписали межстрановую регрессию в виде

$$\gamma = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon, \tag{12.2}$$

где γ — вектор темпов экономического роста; $x_1, \ldots, x_n$ — векторы потенциальных объясняющих переменных. Теперь возникает вопрос, какие именно переменные x_j следует включить в эту регрессию. Одна из проблем — то, что экономические теории недостаточно хороши для того, чтобы точно указать на конкретные детерминанты роста. Например, в данной книге мы исследовали ряд теорий роста, в каждой из которых имелся свой собственный набор потенциальных регрессоров. Другая, и может быть, более важная проблема связана с тем, что эти теории нисколько не противоречат друг другу: вполне естественно, что если накопление физического капитала имеет значение для роста, то одновременно с тем же успехом для роста имеют значение человеческий капитал, технологический прогресс, правительственная политика и т. д.

Отметим, что мы не можем включить в одну регрессию все потенциальные переменные, «пусть цифры говорят сами за себя», потому что количество потенциальных наблюдений больше числа стран в мире, так что из-за непомерного объема вычислений производить оценки коэффициентов в такой регрессии невозможно. Методология, которую обычно используют аналитики-эмпирики, исследующие экономический рост, состоит из простого «испытания» переменных, которые представляются им потенциально значимыми детерминантами роста[1].

[1] В типичной статье, посвященной экономическому росту, сначала представляют теорию, за которой следует эмпирический раздел, в котором показывается, что переменная, обозначающая выдвинутое теорией явление, коррелированна с ростом только тогда, когда значения некоторых других переменных зафиксированы на постоянном уровне. Затем в типичной статье показывается, что центральная переменная остается значимой даже после того, как фиксация с других объясняющих переменных снимается.

Однако если начать строить регрессии, комбинируя различные переменные, то может получиться так, что переменная x_1 значима, когда в регрессию входят переменные x_2 и x_3, но она же становится незначимой, если включить еще x_4. Так как априори неизвестно, какие «правильные» переменные нужно включать, то вопрос о том, какие именно переменные «действительно» коррелированны с ростом, остается открытым.

12.5.1. Levine and Renelt (1992)

Впервые ответ на этот вопрос был дан в работе Levine and Renelt (1992). Авторы применили модифицированную версию анализа предельных границ Лимера (Leamer, 1983, 1985) для определения «робастных» (т. е. устойчивых, надежных) эмпирических зависимостей, связанных с экономическим ростом. В двух словах работу их теста предельных границ можно описать следующим образом. Представим себе, что у нас есть некоторое количество K потенциальных переменных и что нас интересует, является ли переменная z «робастной». Будем оценивать регрессии вида

$$\gamma = \alpha_j + \beta_{zj} z + \beta_{zj} x_j + \epsilon, \tag{12.3}$$

где x_j - вектор переменных из совокупности K доступных переменных[1]. Нужно оценить эту регрессию при всех возможных комбинациях x_j. Для каждой модели j находим оценку $\hat{\beta}_{zj}$ и соответствующее стандартное отклонение $\hat{\sigma}_{zj}$. Нижняя предельная граница определяется как наименьшее значение $\hat{\beta}_{zj} - 2\hat{\sigma}_{zj}$ по всем возможным моделям j, и верхняя предельная граница - как наибольшее значение $\hat{\beta}_{zj} + 2\hat{\sigma}_{zj}$. Тест предельных границ для переменной z гласит, что если нижняя предельная граница отрицательна, а верхняя предельная граница положительна, то переменная z «слабая». Затем этот тест повторяется для всех переменных из совокупности.

Заметим, что если оценка коэффициента $\hat{\beta}_{zj}$ близка к нулю хотя бы для одной из миллиона возможных регрессий, то тест предельных границ говорит нам, что эта переменная не робастна. Причина этого в том, что мы говорим «оценка $\hat{\beta}_{zj}$ незначима», когда интервал $[\hat{\beta}_{zj} - 2\hat{\sigma}_{zj}, \hat{\beta}_{zj} + 2\hat{\sigma}_{zj}]$ содержит ноль. Таким образом, каждая регрессия

[1] Следуя Leamer (1983, 1985), Левин и Ренелт также включили некоторое количество «постоянных» переменных, которые включены во все регрессии и не тестируются. Предполагается, что исследователь точно знает, что эти переменные, без сомнения, должны быть в регрессии. Так как мы не знаем, есть ли в нашей совокупности переменных те, которые, без сомнения, должны входить в истинную модель, то мы игнорируем фиксированные переменные в нашем описании метода Levine and Renelt (1992).

имеет «право вето» (несмотря на то что сама эта регрессия может плохо объяснять данные) в том смысле, что если коэффициент β_{zj} для этой частичной регрессии окажется незначимым, то переменная z будет отнесена к неробастным, независимо от того, что скажут остальные миллионы регрессий относительно входящей в них объясняющей переменной z. В итоге, что неудивительно, основным результатом анализа в работе Levine and Renelt (1992) явилось то, что все переменные оказались «слабыми».

12.5.2. Байесовское усреднение классических оценок (BACE, Bayesian averaging of classical estimates)

Тот факт, что одна-единственная регрессия может отнести переменную к неробастным, позволил назвать этот тест был слишком сильным, чтобы быть полезным[1] (Sala-i-Martin, 1997a, 1997b). Сала-и-Мартин предложил отойти от этого «предельного» теста и вместо использования терминов «слабая» или «неслабая» в отношении конкретной переменной использовать термин «уровень доверия» в отношении каждой переменной. Для этого он взял взвешенные средние всех оценок $\hat{\beta}_{zj}$ и их соответствующие стандартные отклонения $\hat{\sigma}_{zj}$, используя при этом веса, пропорциональные правдоподобию каждой модели. Другими словами, оценки $\hat{\beta}_{zj}$ из тех моделей, которые лучше согласуются с реальными данными, будут иметь больший вес во взвешенном среднем МНК-коэффициентов. Для определения уровня значимости Сала-и-Мартин находит взвешенную по правдоподобиям сумму интегральных функций нормального распределения. Далее он обнаруживает, что пессимистический вывод Левина и Ренелта безоснователен и что некоторые переменные весьма сильно коррелированны с ростом. Для удобства дальнейшего сравнения с результатами работы Levine and Renelt (1992) Сала-и-Мартин (Sala-i-Martin, 1997a, 1997b) также допустил, что имеется некоторое множество «постоянных регрессоров», которые входят во все модели, и, кроме того, он ограничил длину всех регрессий семью объясняющими переменными. Одним из недостатков данного подхода является то, что нам практически неизвестны статистические свойства этих взвешенных средних, так как Сала-и-Мартин не вывел их из теории.

[1] Критику теста предельных границ можно найти в работах Durlauf and Quah (1999) и Temple (1999). Granger and Uhlig (1990) предложили использовать модифицированный тест на основе «рациональных» предельных границ, а Doppelhoffer (2000) применил этот тест к регрессиям экономического роста.

Sala-i-Martin, Doppelhoffer, and Miller (2003) (введем сокращение названия этой работы – SDM) показали, что подход Сала-и-Мартина является частным случаем метода усреднения байесовских моделей, который мы сейчас рассмотрим. Самый простой способ описать неопределенность модели – это допустить, что мы не знаем, какая из моделей является «истинной», и поэтому следует ввести вероятность «истинности» каждой модели. Хотя этот подход интуитивно привлекателен, он требует существенного отклонения от классической схемы, в которой важны условия, накладываемые на модель. Данный подход с недавних пор называется «усреднение байесовских моделей», и он согласуется со стандартной байесовской логикой рассуждений: сама идея была выдвинута еще Jeffreys (1961) и затем развита Leamer (1978).

В полном виде байесовский подход применялся при решении различных задач многими авторами. В качестве примера можно привести работу Raftery, Madigan, and Hoeting (1997), а также работу York et al.(1995). В чистом виде байесовский подход подразумевает знание априорных распределений всех рассматриваемых параметров при условии каждой возможной модели. Даже в идеальных условиях установить априорное распределение параметров весьма затруднительно, и это одна из главных причин того, что байесовские подходы остаются относительно непопулярными.

Если количество возможных регрессоров равно K, то количество возможных линейных моделей равно 2^K, так что если K велико, то определить все априорные параметры невозможно. Таким образом, для применения байесовского метода в полном виде нужно задаться хоть какими-нибудь априорными параметрами, которые, по существу, «берутся с потолка». В результате итоговые оценки зависят от произвольно выбранных априорных параметров, и этот выбор с трудом удается объяснить. В известных нам применениях этого метода влияние априорных параметров на итоговые результаты не было ни изучено, ни объяснено.

SMD (2003) использовали байесовский подход для усреднения по моделям, делая это в классическом духе. Они предложили схему усреднения по моделям, которую назвали байесовским усреднением классических оценок (BACE), позволяющую определить «важность» переменных в межстрановых регрессиях роста. Они показали, что метод взвешивания может быть получен как предельный случай стандартного байесовского анализа, когда априорная информация становится «доминируемой» реальными данными. BACE объединяет усреднение оценок по моделям, что является байесовской концепцией, с классическим

OSL-оцениванием, которое исходит из предположения, что априорные параметры размыты.

Полностью BACE-методология представлена в SMD (2003). Здесь же мы изложим ее вкратце. Пусть модель M_j будет статистической моделью роста с некоторым набором объясняющих переменных. Согласно известному из теории вероятностей правилу Байеса, апостериорное распределение параметров представляет собой взвешенное среднее всех возможных условных апостериорных плотностей с весами, равными апостериорным вероятностям каждой из возможных моделей:

$$g(\beta \mid y) = \sum_{j=1}^{2^K} P(M_j \mid y) \cdot g(\beta \mid y, M_j), \tag{12.4}$$

где $g(\beta \mid y)$ – апостериорное распределение β (при условии данных); $g(\beta \mid y, M_j)$ – распределение β при условии данных и при условии модели M_j; $P(M_j \mid y)$ – апостериорная вероятность модели j при условии данных. Если у нас есть K потенциальных объясняющих переменных, то возможных моделей с ними получается 2^K. Если информация об априорных распределениях размыта (т. е. если мы не можем или не готовы их точно определить) и если мы считаем, что любая априорная информация доминируется реальными данными,[1] то апостериорная вероятность j-й модели может быть записана в виде

$$P(M_j \mid y) = P(M_j) \cdot \omega(j), \tag{12.5}$$

где

$$\omega(j) = \frac{T^{-k_j/2} \cdot SSE_j^{-T/2}}{\sum_{i=1}^{2^K} P(M_j) T^{-k_j/2} \cdot SSE_i^{-T/2}};$$

SSE – сумма квадратов остатков для модели j; T – количество наблюдений; k_j – размер (т. е. число регрессоров) модели j. Другими словами, вес каждой модели в уравнении (12.4) является произведением имеющейся у нас априори вероятности $P(M_j)$ и критерия согласия модели j, деленной на критерий согласия всех возможных моделей. Заметьте, что веса в уравнении (12.5) скорректированы относительно степеней свободы (чем больше модель, тем больше штраф) в духе критерия селекции моделей Шварца (Schwarz, 1978).

Теперь нам осталось только выяснить, чему равна априорная вероятность, которую мы приписали модели j, т. е. та вероятность, которую мы сопоставляем каждой из 2^K моделей перед тем, как увидеть данные.

---
[1] См. SDM (2003).

Одним из самых распространенных в литературе подходов к решению этой задачи является предположение, что все модели имеют одинаковую вероятность. Это действительно способ ликвидировать неопределенность: до анализа данных мы не знаем, какая модель более предпочтительна, поэтому считаем, что все они возможны в равной степени. В некоторых случаях эта схема удобна и корректна, но нам она не подходит как минимум по двум причинам. Во-первых, так как мы имеем большое количество потенциальных регрессоров, такая равновероятностная схема приводит к тому, что ожидаемый размер модели (ожидаемое количество регрессоров) оказывается необычно и нежелательно большим. Так, например, если мы собираемся использовать совокупность данных с 67 переменными, то предположение, что все модели равновероятны, означает, что ожидаемое количество объясняющих переменных в межстрановой регрессии равно в среднем 33.5. Во-вторых, нежелательное следствие состоит в том, что ожидаемый размер модели зависит от используемых данных. Если мы используем данные с 32 переменными и считаем, что все модели равновероятны, то в этом случае мы неявно предполагаем, что ожидаемый размер модели равен 16. А если у нас данные для 100 потенциальных регрессоров, то неявно предполагается, что ожидаемый размер равен 50. Так как мы не считаем, что размер регрессии, которая «объясняет» рост, должен зависеть от того, какие данные мы используем, то нам все-таки следует изменить наши априорные представления о каждой модели.

В работе SDM (2003) априорные вероятности каждой модели определяются таким образом, чтобы каждая переменная имела априорную вероятность входа в каждую конкретную регрессию, равную $\bar{k}/K$, где $\bar{k}$ априорный средний размер модели; K - общее количество потенциальных регрессоров[1]. Тогда априорная вероятность $P(M_j)$ для модели размера k_j равна

$$P(M_j) = \left(\frac{\bar{k}}{K}\right)^{k_j} \left(1 - \frac{\bar{k}}{K}\right)^{K - k_j}. \qquad (12.6)$$

[1] Обычно считается, что априорные вероятности включения двух переменных в модель являются зависимыми величинами. Например, если в регрессию роста включена переменная, обозначающая политическую нестабильность, измеряемую, скажем, числом революций, то включение другой переменной, такой как, например, число политических убийств, кажется уже менее вероятным. Хотя такую взаимозависимость достаточно легко учесть в рамках BACE-метода, в работе SDM (2003) этого делать не стали.

Заметим, что «равновероятность каждой возможной модели» является частным случаем этой формулы при $\bar{k} = K/2$. Одной из привлекательных сторон данного подхода является то, что исследователю достаточно определить заранее всего лишь один параметр — «ожидаемый размер модели» $\bar{k}$. А так как нам нужно задать всего лишь один параметр, то мы можем легко тестировать устойчивость переменных, просто меняя этот единственный априорный параметр.

Уравнения (12.4), (12.5) и (12.6) описывают апостериорное распределение β. Если известно само распределение, то можно найти его математическое ожидание, дисперсию и разные моменты. Найдем, например, математическое ожидание (далее будем называть его «среднее значение» или просто «среднее») β, условное распределение которого дается уравнением (12.4), имеем

$$E(\beta \mid y) = \sum_{j=1}^{2^K} P(M_i \mid y) \cdot \hat{\beta}_j, \tag{12.7}$$

где $\hat{\beta}_j = E(\beta \mid y, M_j)$ — МНК-оценка β с регрессорами из модели j. В байесовской терминологии $\hat{\beta}_j$ — это апостериорное среднее при условии модели j. Заметим, что любая переменная, исключенная из некоторой конкретной модели, все равно там присутствует, но с коэффициентом, распределение которого сосредоточено в нуле. Другими словами, ожидаемое значение β равно взвешенному среднему МНК-оценок, с весами, пропорциональными критерию согласия (мере добротности) модели и априорному размеру модели[1].

Апостериорная дисперсия β дается уравнением

$$\begin{aligned} D(\beta \mid y) = &\sum_{j=1}^{2^K} P(M_j \mid y) \cdot D(\beta \mid y, M_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{2^K} P(M_i \mid y) \cdot \left(\hat{\beta}_j - \sum_{j=1}^{2^K} P(M_i \mid y) \cdot \hat{\beta}_j\right)^2. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Исследование уравнения (12.8) показывает, что апостериорная дисперсия включает в себя как оценки дисперсий β для каждой модели, так и дисперсию оценок β по разным моделям.

[1] Отметим, что взвешенное среднее МНК-коэффициентов с весами, пропорциональными мере согласия, аналогично тому взвешенному среднему, которое использовал Sala-i-Martin (1997a, 1997b). И это будет в точности то же самое взвешенное среднее, если все регрессии имеют одинаковый размер.

Наряду с апостериорными средними значениями и дисперсиями есть и другие способы суммирования больших объемов информации, предоставляемой полным апостериорным распределением. Например, интересной статистикой является апостериорная вероятность, с которой отдельная переменная входит в регрессию (т. е. имеет ненулевой коэффициент). В работе SDM (2003) эта вероятность называется апостериорной вероятностью включения переменной, она равна сумме апостериорных вероятностей моделей по всем моделям, в которые входит эта переменная. Найдем апостериорные среднее и дисперсию при условии включения данной переменной. Истинное (безусловное) апостериорное среднее вычисляется с использованием формулы (12.7), а вот апостериорное стандартное отклонение есть не что иное, как квадратный корень дисперсии, которая находится по формуле (12.8). Истинное апостериорное математическое ожидание является взвешенным средним МНК-оценок для всех регрессий, включая регрессии, в которых данная переменная не появляется, т. е. имеет нулевой коэффициент. Следовательно, условное апостериорное среднее равно безусловному среднему, деленному на вероятность апостериорного включения[1].

12.5.3. Основные результаты работы Sala-i-Martin, Doppelhoffer, and Miller (2003)

В работе SDM (2003) применяют BACE к совокупности из 67 переменных. Эти переменные были выбраны с использованием следующих критериев. **(1)** Предпочтение отдается тем переменным, данные по которым максимально близки к началу выборки, т. е. к 1960 г. Это ограничение означает, что некоторые интересные переменные (такие как рассмотренные ранее норма права и коррупция) не включены в их анализ. **(2)** Предпочтение отдается переменным, данные по которым «сбалансированы». Под сбалансированностью мы понимаем одинаковое количество наблюдений для всех регрессий. Таким ограничениям удовлетворяют данные, соответствующие 68 переменным (включая зависимую переменную — темп прироста ВВП на душу населения за период с 1960 по 1996 г.) для 88 стран.

В столбце (1) табл. 12.6 представлены те регрессии, которые значимы на 95%-ном уровне по каждой объясняющей переменной, при комбинировании каждой переменной со всеми возможными остальными 67

[1] Аналогично безусловная дисперсия может быть получена из условной дисперсии следующим образом:

$$\sigma^2_{\text{безусл}} = \left[\sigma^2_{\text{усл}} + \beta^2_{\text{усл}}\right] \cdot (\text{Апостериорная вероятность включения}) - \beta^2_{\text{безусл}}.$$

Таблица 12.6

Базовое оценивание параметров для всех 67 стран

Ранг	Переменная	Доля регрессий с $\lvert t-\text{стат.}\rvert > 2$ (1)	Вероятность апостериорного включения (2)	Апостериорное среднее при условии включения (3)	Апостериорное стандартное отклонение при условии включения (4)	Апостериорное безусловное среднее (3)′	Апостериорное безусловное стандартное отклонение (4)′	Вероятность знакоопределенности (5)
1	Восточноазиатская страна	0,99	0,823	0,021805	0,006118	0,017935	0,010010	0,999
2	Начальное школьное образование в 1960 г.	0,96	0,796	0,026852	0,007977	0,021386	0,012945	0,999
3	Цена инвестиций	0,99	0,774	−0,000084	0,000025	−0,000065	0,000041	0,999
4	ВВП в 1960 г. (логарифм)	0,30	0,685	−0,008538	0,002888	−0,005845	0,004631	0,999
5	Доля площади (или людей) в тропиках	0,59	0,563	−0,014757	0,004227	−0,008312	0,007977	0,997
6	Плотность населения в прибрежных районах в 1960-х гг.	0,85	0,428	0,000009	0,000003	0,000004	0,000005	0,996
7	Распространенность малярии в 1960-х гг.	0,84	0,252	−0,015702	0,006177	−0,003956	0,007489	0,990
8	Средняя продолжительность жизни в 1960 г.	0,79	0,209	0,000808	0,000354	0,000168	0,000366	0,986
9	Доля последователей учения Конфуция	0,97	0,206	0,054429	0,022426	0,011239	0,024275	0,988
10	Африканская страна	0,90	0,154	−0,014706	0,006866	−0,002260	0,005948	0,980
11	Латиноамериканская страна	0,30	0,149	−0,012758	0,005834	−0,001905	0,005075	0,969
12	Доля добычи сырья в ВВП	0,07	0,124	0,038823	0,019255	0,004818	0,014487	0,978
13	Испанская колония	0,24	0,123	−0,010720	0,005041	−0,001320	0,003942	0,972
14	Сколько лет экономика открыта	0,98	0,119	0,012209	0,006287	0,001457	0,004514	0,977
15	Доля мусульман	0,11	0,114	0,012629	0,006257	0,001446	0,004545	0,973

Продолжение табл. 12.6

Ранг	**Переменная**	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(3)′**	**(4)′**	**(5)**
16	Доля буддистов	0,90	0,108	0,021667	0,010722	0,002348	0,007604	0,974
17	Этнолингвистическая неоднородность	0,52	0,105	−0,011281	0,005835	−0,001181	0,003936	0,974
18	Доля правительственного потребления в 1960-х гг.	0,77	0,104	−0,044171	0,025383	−0,004586	0,015761	0,975
19	Плотность населения в 1960 г.	0,01	0,086	0,000013	0,000007	0,000001	0,000004	0,965
20	Отклонения от реального валютного курса	0,92	0,082	−0,000079	0,000043	−0,000006	0,000025	0,966
21	Доля населения, владеющая иностранным языком	0,43	0,080	0,007006	0,003960	0,000559	0,002204	0,962
22	(Импорт + Экспорт)/ВВП	0,67	0,076	0,008858	0,005210	0,000674	0,002754	0,949
23	Политические права	0,35	0,066	−0,001847	0,001202	−0,000121	0,000551	0,939
24	Правительственная доля в ВВП	0,58	0,063	−0,034874	0,029379	−0,002205	0,011253	0,935
25	Высшее образование в 1960 г.	0,10	0,061	−0,069693	0,041833	−0,004282	0,019688	0,946
26	Доля населения в тропиках	0,85	0,058	−0,010741	0,006754	−0,000622	0,002990	0,940
27	Брутто экспорт в 1970 г.	0,75	0,053	−0,011343	0,007520	−0,000604	0,003082	0,926
28	Доля правительственных инвестиций	0,00	0,048	−0,061540	0,042950	−0,002964	0,016201	0,922
29	Доля протестантов	0,29	0,046	−0,011872	0,009288	−0,000544	0,003180	0,909
30	Доля индусов	0,07	0,045	0,017558	0,012575	0,000790	0,004512	0,915
31	Доля населения в возрасте меньше 15 лет	0,24	0,041	0,044962	0,041100	0,001850	0,012216	0,871
32	Воздушное расстояние до больших городов	0,18	0,039	−0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,888
33	Правительственное потребление, с учетом дефлятора ВВП	0,05	0,036	−0,033647	0,027365	−0,001195	0,008087	0,893
34	Абсолютная широта	0,37	0,033	0,000136	0,000233	0,000004	0,000049	0,737
35	Доля католиков	0,16	0,033	−0,008415	0,008478	−0,000278	0,002155	0,837
36	Коэффициенты фертильности в 1960-х гг.	0,46	0,031	−0,007525	0,010113	−0,000232	0,002199	0,767
37	Европейская фиктивная переменная	0,19	0,030	−0,002278	0,010487	−0,000068	0,001858	0,544
38	Внешняя ориентация	0,01	0,030	−0,003296	0,002727	−0,000098	0,000730	0,886
39	Колониальная фиктивная переменная	0,44	0,029	−0,005010	0,004721	−0,000147	0,001169	0,858
40	Гражданские свободы	0,15	0,029	−0,007192	0,007122	−0,000207	0,001705	0,846
41	Революции и перевороты	0,07	0,029	−0,007065	0,006089	−0,000202	0,001565	0,877

Ранг	Переменная
42	Фиктивная переменная британской колонии
43	Месторождения углеводородов в 1993 г.
44	Доля населения старше 65 лет
45	Доля расходов на оборону
46	Население в 1960 г.
47	Развитие условий торговли в 1960-х гг.
48	Правительственные расходы на образование, деленные на ВВП, в 1960-х гг.
49	Фиктивная переменная отсутствия выхода к морю
50	Мера религиозности
51	Размер экономики
52	Социалистическая фиктивная переменная
53	Англоговорящее население
54	Средняя инфляция за 1960 1990 гг.
55	Фиктивная переменная производителя нефти
56	Прирост населения за 1960 1990 гг.
57	Срок независимости
58	Доля суши, прилегающей к судоходным морям и рекам
59	Квадрат инфляции за 1960 1990 гг.
60	Время пребывания в состоянии войны за 1960 1990 гг.
61	Площадь суши
62	Область тропического климата
63	Ранжирование по условиям торговли
64	Капитализм
65	Доля православных
66	Участие в войнах в 1960 1990 гг.
67	Внутренняя плотность

Окончание табл. 12.6

(1)	(2)	(3)	(4)	(3)'	(4)'	(5)
0,09	0,027	0,003654	0,003626	0,000097	0,000835	0,844
0,01	0,025	0,000307	0,000418	0,000008	0,000081	0,773
0,20	0,022	0,019382	0,119469	0,000435	0,018127	0,566
0,26	0,021	0,045336	0,076813	0,000967	0,012992	0,737
0,07	0,021	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,806
0,00	0,021	0,032627	0,046650	0,000693	0,008265	0,752
0,11	0,021	0,129517	0,172847	0,002698	0,031056	0,777
0,04	0,021	–0,002080	0,004206	–0,000043	0,000671	0,701
0,18	0,020	–0,004737	0,007232	–0,000097	0,001233	0,751
0,18	0,020	–0,000520	0,001443	–0,000011	0,000218	0,661
0,00	0,020	0,003983	0,004966	0,000081	0,000903	0,788
0,07	0,020	–0,003669	0,007137	–0,000073	0,001132	0,686
0,01	0,020	–0,000073	0,000097	–0,000001	0,000017	0,784
0,00	0,019	0,004845	0,007088	0,000094	0,001193	0,751
0,21	0,019	0,020837	0,307794	0,000401	0,042787	0,533
0,11	0,019	0,001143	0,002051	0,000022	0,000324	0,716
0,35	0,019	–0,002598	0,005864	–0,000048	0,000875	0,657
0,00	0,018	–0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,736
0,00	0,016	–0,001415	0,009226	–0,000022	0,001176	0,555
0,01	0,016	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,577
0,16	0,016	–0,002069	0,006593	–0,000032	0,000864	0,616
0,23	0,016	–0,003730	0,009625	–0,000058	0,001288	0,647
0,06	0,015	–0,000231	0,001080	–0,000003	0,000136	0,589
0,00	0,015	0,005689	0,013576	0,000086	0,001804	0,660
0,02	0,015	–0,000734	0,002983	–0,000011	0,000377	0,593
0,00	0,015	–0,000001	0,000016	0,000000	0,000002	0,532

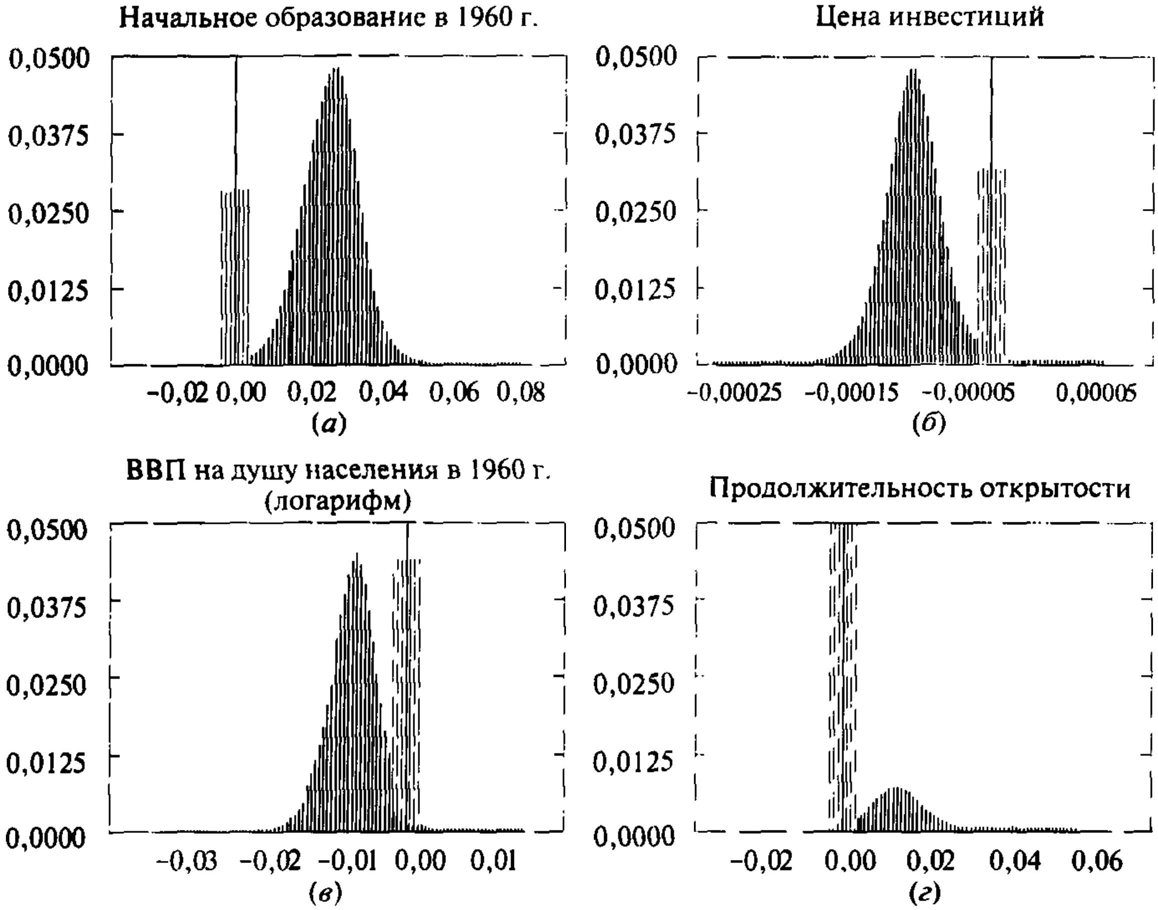


Рис. 12.14. Апостериорные плотности. На данном рисунке показаны апостериорные плотности (аппроксимированные гистограммами) оценок коэффициентов четырех выбранных переменных. На рис. 12.14, *а–г* изображены плотности для начального образования, цены инвестиций, начальный уровень ВВП на душу населения и число лет, на протяжении которых экономика оставалась «открытой», соответственно. Каждое распределение состоит из двух частей: первая, непрерывная часть, является апостериорной плотностью при условии включения данной переменной в модель; вторая часть является дискретной массой в нуле, которая равна вероятности того, что переменная не входит в модель (единица минус вероятность апостериорного включения)

переменными. Заметим, что все переменные незначимы для подмножества моделей. Следовательно, тест предельных границ Левина и Ренелта объявит их всех неустойчивыми.

На рис. 12.14 показаны апостериорные плотности (аппроксимированные гистограммами) оценок коэффициентов для четырех выбранных переменных (цена инвестиций, начальный уровень подушевого ВВП, начальное школьное образование и количество лет, в течение которых экономика была «открытой»)[1]. Следует отметить, что на рис. 12.14

[1] Иллюстрации по всем остальным переменным можно найти в работе SDM (2003).

каждое распределение состоит из двух частей: первая, непрерывная часть, представляет собой плотность при условии включения в модель, а вторая — дискретная масса в нуле, представляет собой вероятность того, что переменная не принадлежит модели (эта вероятность равна единице минус вероятность апостериорного включения).

Базовое оценивание. В данном разделе представлены результаты базового оценивания при априорном ожидаемом размере модели $\bar{k} = 7$. Выбор базового размера модели мотивирован тем фактом, что в большинстве эмпирических исследований роста количество включенных в регрессии переменных невелико. Апостериорный размер модели при базовом оценивании равен 7.46, что очень близко к априорному размеру. В следующем разделе мы проверим устойчивость наших результатов к изменениям в априорном размере модели. Эти результаты получены на основе порядка 89 млн случайным образом составленных регрессий[1)].

В табл. 12.6 представлены результаты: в столбце (2) находятся апостериорные вероятности включения переменной в регрессию роста. Переменные упорядочены по убыванию апостериорной вероятности. Апостериорная вероятность включения переменной равна сумме апостериорных вероятностей всех регрессий, в которые эта переменная входит. Критерий согласия скорректирован таким образом, чтобы штрафовать излишне параметризованные модели в манере критерия Шварца отбора моделей. Таким образом, переменные с большими вероятностями включения в пределе (при стремлении количества наблюдений к бесконечности) дают большой вклад в критерий согласия регрессионной модели.

Мы можем разделить переменные на две части, в зависимости от того, возрастает или убывает вероятность включения относительно априорной вероятности после того, как мы увидели данные. Так как ожидаемый нами размер модели равен 7, то априорная вероятность включения каждой переменной равна $7/67 = 0.104$. Для 18 переменных апостериорная вероятность включения возрастает относительно априорной вероятности после того, как мы оценили все регрессии (эти переменные в табл. 12.6 отделены от остальных горизонтальной чертой). Наша уверенность в том, что эти переменные входят в регрессию, только

[1)] Общее количество возможных регрессионных моделей равно 2^{67}, что равно приблизительно $1.48 \cdot 10^{20}$. Однако сходятся эти оценки довольно быстро: уже после 33 млн случайным образом составленных моделей максимальное изменение оценок коэффициентов, нормированных посредством стандартного отклонения регрессоров, деленного на зависимую переменную, оказывается меньше 10^{-3} на каждые 10 000, а после 89 млн — меньше, чем 10^{-6}. Подробности по выборке и др. изложены в работе SDM (2003).

усиливается после того, как мы увидели данные. Мы можем пометить эти переменные как «сильные» или «устойчивые». Оставшиеся 49 переменных либо имеют слабую поддержку со стороны данных относительно их включения в регрессию, либо не имеют ее вовсе: после того как мы увидели данные, наша и без того умеренная начальная оценка вероятности включения только снижается.

В столбцах (3) и (4) находятся апостериорные средние значения и стандартные отклонения распределений, при условии включения соответствующей переменной в модель. То есть эти средние значения и стандартные отклонения относятся к тем частям распределений, показанных на рис. 12.14, которые имеют форму горного хребта. В столбцах (3′) и (4′) находятся соответствующие безусловные средние значения и дисперсии[1].

Зная апостериорную плотность, мы можем теперь оценить апостериорную вероятность (условную при условии включения соответствующей переменной в модель) того, что коэффициент имеет тот же знак, что и его апостериорное среднее. Эта «вероятность знакоопределенности» в столбце (5) представляет собой еще одну меру значимости переменных. Она равна апостериорной вероятности того, что знак коэффициента совпадает со знаком апостериорного среднего этого коэффициента при условии включения переменной. Как уже упоминалось ранее, для отдельной регрессии апостериорная плотность - это классическое выборочное распределение коэффициента. В классической терминологии, данный коэффициент значим на уровне 5% в двустороннем тесте, если 97,5% вероятности в выборочном распределении находится по ту же сторону от нуля, что и оценка этого коэффициента. Например, если так получилось, что в каждой отдельной регрессии уровень значимости некоторого коэффициента составил в точности 5%, то вероятность знакоопределенности этого коэффициента равна 97.5%. Если мы возьмем те из наших переменных, вероятность знакоопределенности которых равна 0,975 и более, то получим 13 переменных, которые все находятся в группе 18 «сильных» переменных, для которых апостериорная вероятность включения больше, чем априорная вероятность включения. У остальных пяти переменных вероятности знакоопределенности тоже высоки (между 0.970 и 0.975). Заметим, что, в принципе, нет особой причины, по которой переменная могла бы иметь очень высокую апо-

[1] Вспомним, что безусловное среднее равно условному среднему, умноженному на апостериорную вероятность включения и что соотношение между условной и безусловной дисперсиями задается формулой в сноске (1) на с. 708.

стериорную вероятность включения и при этом низкую вероятность знакоопределенности. В частности, так получилось, что в нашем наборе нет ни одной такой переменной[1].

Другой интересной статистикой является апостериорное среднее значение размера модели. При базовом оценивании априорный размер модели был равен семи, а апостериорное среднее значение размера модели равно 7,46. Разумеется, это число зависит от априорного ожидаемого размера модели, и мы рассмотрим этот вопрос чуть позже.

А сейчас мы хотели бы изучить те переменные, которые имеют «сильную» связь с ростом.

Сильно или устойчиво связанные с ростом переменные. Неудивительно, что самой верхней переменной в таблице оказалась фиктивная переменная стран Восточной Азии, которая положительно связана с экономическим ростом. Этот факт отражает необыкновенно быстрый рост восточноазиатских стран в период с 1960 до середины 1990-х гг.[2]. Указанное в столбце (5) значение вероятности знакоопределенности для этой переменной означает, что вероятностная мера плотности слева от нуля равна 0,9992. Заметим, что доля регрессий, для которых восточноазиатская фиктивная переменная имеет t-статистику больше 2 по абсолютной величине, равна 99%.

Вторая переменная — мера человеческого капитала: доля учащихся в начальной школе в 1960 г. Эта переменная положительно связана с ростом и вероятность включения равна 0,80. Апостериорное распределение оценок коэффициента для этой переменной показано на рис. 12.14, *а*. Так как вероятность включения в данном случае относительно высока, то масса в нуле (которая равна единице минус вероятность включения) относительно мала. При условии включения в модель увеличение доли учащихся в начальной школе на 10 процентных пунктов связано с увеличением темпа прироста на 0,27 процентных пункта. Для оценки масштаба этой величины скажем, что средний по выборке темп прироста в период с 1960 по 1996 гг. был равен 1,82%. Вероятность знакоопре-

[1] Такая ситуация могла бы возникнуть, если бы, например, переменная вносила большой вклад в согласие модели, но меняла бы знаки в присутствии другой значимой переменной. Заметим, что BACE-веса в уравнении (12.5) штрафуют включение дополнительных переменных, которые сильно коррелированы с другими включенными регрессорами и не дают никакого дополнительного объяснения колебаниям зависимой переменной.

[2] Заметим, что данная фиктивная переменная такова, несмотря на устойчивую положительную связь с долей населения, исповедующего конфуцианство (19-й номер в таблице).

деленности данной переменной тоже равна 0,999, а доля регрессий с t-статистикой, большей (по модулю) двух, равна 96%.

Третья переменная – средняя цена инвестиционных продуктов в период с 1960 по 1964 г. Ее вероятность включения равна 0,77. На рис. 12.14, *б*, дано графическое представление для этой переменной. Апостериорное среднее коэффициента оказывается однозначно отрицательным, что говорит о том, что относительно высокие цены на инвестиционные продукты в начале выборки весьма сильно и отрицательно связаны с последующим ростом дохода[1]. Значение вероятности знакоопределенности в столбце (5) означает, что вероятностная масса данной плотности слева от нуля равна 0,99. Это можно легко увидеть на рис. 12.14, где почти вся непрерывная плотность лежит слева от нуля.

Следующая переменная – начальный уровень подушевого ВВП, мера условной сходимости. Вероятность включения равна 0,69. На рис. 12.14, *в* показано апостериорное распределение оценок коэффициента для переменной начального дохода. При условии включения переменной в модель апостериорное среднее коэффициента равно $-0{,}009$ (со стандартным отклонением 0,003). Другими словами, этот ассоциированный с условной сходимостью коэффициент оценен очень точно, хотя среднее значение этого коэффициента немного меньше того значения коэффициента сходимости, которое прогнозируется неоклассическими моделями из глав 1 и 2 или моделями диффузии технологий из гл. 8. Вероятность знакоопределенности в столбце (5) равна 0,999. Доля регрессий, в которых коэффициент для начального дохода имеет t-статистику больше 2 (по абсолютной величине), равна всего 30%, так что тест предельных границ легко вносит эту переменную в список неустойчивых.

Следующие переменные отражают слабое экономическое развитие тропических стран: доля площади страны, находящейся в тропиках, и показатель распространенности малярии – обе эти переменные имеют отрицательную связь с экономическим ростом. Еще одна географическая «сильная» переменная – плотность населения в прибрежных районах, она имеет положительную связь с ростом, и это означает, что плотно населенные и близко расположенные к морю регионы действительно демонстрировали высокие темпы роста.

[1] Если относительная цена инвестиционных продуктов включена в группу объясняющих переменных, то доля инвестиций в ВВП в 1961 г. становится незначимой и имеет знак «–», в то же время остальные результаты остаются без изменений. Результаты оценок с включенной долей инвестиций можно узнать у авторов SDM (2003).

Средняя продолжительность жизни в 1960 г., отражающая качество питания, здравоохранение и процент грамотного населения, положительно связана с ростом: страны, население которых имело бо́льшую среднюю продолжительность жизни в 1960 г., росли быстрее на протяжении последующих четырех десятилетий. Вероятность включения для этой переменной равна 0.21.

Фиктивные переменные стран Латинской Америки и стран Африки, расположенных южнее пояса Сахары, связаны с ростом дохода отрицательным образом. Апостериорные условные средние, при условии включения для обеих переменных, отрицательны, в результате чего в странах Африки, расположенных южнее Сахары, и в странах Латинской Америки в период с 1960 по 1996 г. наблюдались темпы прироста подушевого дохода соответственно на 1.47 и 1.28 процентных пункта ниже уровня, который был бы спрогнозирован остальными переменными, характеризующими эти страны. Для сравнения, средний темп прироста по выборке составляет 1.82. Африканская фиктивная переменная значима в 90% регрессий, а вероятность знакоопределенности равна 98%. Хотя латиноамериканская фиктивная переменная значима только в 33% регрессий, ее знакоопределенность настолько же велика, насколько и для африканской переменной: 97%.

Доля добычи сырья в ВВП имеет положительную связь с ростом и вероятность включения равна 0.12. Эта переменная учитывает успех тех стран, которые богато одарены природными ресурсами. Согласно ожиданиям многих экономистов, высокие ставки арендной платы, связанные с большей политической нестабильностью, или погоня за рентой должны снижать экономический рост в этом случае. Однако наше исследование показывает, что экономики с большим сектором добычи сырья развиваются все-таки лучше.

Бывшие испанские колонии растут медленнее, в то время как продолжительность открытости экономики имеет положительное влияние на рост. Доли мусульман и буддистов в населении страны положительно связаны с ростом. Показатель этнической неоднородности связан с ростом отрицательно, и, кроме того, эта переменная устойчива.

И наконец, переменная доли правительственного потребления в ВВП оказывается устойчивой, а ее знак отрицателен. Возможно, единственным сюрпризом во всех этих оценках является то, что коэффициент доли правительственных инвестиций отрицателен. Из табл. 12.6 также следует, что эта переменная неустойчива, когда априорный размер модели равен $\bar{k} = 7$. Однако далее мы увидим, что это одна из тех переменных, которые становятся значимыми в моделях большего размера, хотя знак все равно остается отрицательным.

Переменные, минимально связанные с ростом. Мы имеем три переменные, для которых апостериорные вероятности немного меньше их априорных вероятностей, но, тем не менее, будучи включенными в регрессию роста, они довольно точно оцениваются (т. е. их вероятности знакоопределенности больше 95%). Эти переменные – плотность населения в 1960 г. (положительно связана с ростом), отклонения от реального валютного курса (связана отрицательно) и доля населения, владеющая иностранным языком (связана положительно).

Переменные, неустойчиво связанные с ростом. Оставшиеся 46 переменных демонстрируют почти отсутствие устойчивой частичной корреляции с ростом. Они не вносят существенного вклада в критерий согласия регрессий роста, измеряемого их апостериорными вероятностями включения, и их оценки не обладают свойством устойчивости при различных наборах обусловливающих переменных. Интересно отметить, что некоторые политические переменные, такие как количество революций и правительственных переворотов или показатель политических прав, не связаны устойчивым образом с экономическим ростом. Аналогично уровень развития капитализма или социалистическая фиктивная переменная не имеют сильной связи с ростом[1]. Некоторые макроэкономические переменные, такие как уровень инфляции, тоже оказываются не сильно связанными с ростом. Другие же неожиданно слабые переменные – правительственные расходы на образование, индексы высшего образования, географические показатели, такие как широта, и различные представители «эффектов масштаба», такие как общая численность населения, ВВП или общая площадь страны.

12.5.4. Анализ устойчивости

До сих пор мы были сосредоточены на результатах, полученных при априорном размере модели $\bar{k} = 7$. Как уже обсуждалось ранее, хотя мы и считаем, что это вполне разумный ожидаемый размер модели, но в некотором смысле он произволен. Мы должны изучить, как это априорное предположение влияет на наши выводы. Табл. 12.7 выполняет именно эту задачу, представляя апостериорные вероятности включения и условные апостериорные средние при $\bar{k}$, равном 5, 9, 11, 16 и 22 соответственно. Заметим, что каждому значению $\bar{k}$ соответствует определенное значение вероятности включения, которое находится в первой

[1] Вообще говоря, в нашу совокупность данных не входят ни Советский Союз, ни почти все остальные социалистические страны Восточной Европы, в силу отсутствия данных по ним.

Таблица 12.7

Вероятности апостериорного включения при различных априорных размерах моделей

Ранг	Переменные	$k=5$	$k=7$	$k=9$	$k=11$	$k=16$	$k=22$	$k=28$
	Априорная вероятность включения	0,075	0,104	0,134	0,164	0,239	0,328	0,418
1	Восточноазиатская страна	0,891	0,823	0,757	0,711	0,585	0,481	0,455
2	Начальное образование в 1960 г.	0,709	0,796	0,826	0,862	0,890	0,924	0,950
3	Цена инвестиций	0,635	0,774	0,840	0,891	0,936	0,968	0,985
4	ВВП в 1960 г. (логарифм)	0,526	0,685	0,788	0,843	0,920	0,960	0,978
5	Доля площади (или людей) в тропиках	0,536	0,563	0,548	0,542	0,462	0,399	0,388
6	Плотность населения в прибрежных районах в 1960-х гг.	0,350	0,428	0,463	0,473	0,433	0,389	0,352
7	Распространенность малярии в 1960-х гг.	0,339	0,252	0,203	0,176	0,145	0,131	0,138
8	Средняя продолжительность жизни в 1960 г.	0,176	0,209	0,262	0,278	0,368	0,440	0,467
9	Доля последователей учения Конфуция	0,140	0,206	0,272	0,333	0,501	0,671	0,777
10	Африканская страна	0,095	0,154	0,223	0,272	0,406	0,519	0,565
11	Латиноамериканская страна	0,101	0,149	0,205	0,240	0,340	0,413	0,429
12	Доля добычи сырья в ВВП	0,072	0,124	0,209	0,275	0,478	0,659	0,761
13	Испанская колония	0,130	0,123	0,119	0,116	0,124	0,148	0,182
14	Сколько лет экономика открыта	0,090	0,119	0,124	0,132	0,145	0,155	0,177
15	Доля мусульман	0,078	0,114	0,150	0,178	0,267	0,366	0,450
16	Доля буддистов	0,073	0,108	0,152	0,190	0,320	0,465	0,563
17	Этнолингвистическая неоднородность	0,080	0,105	0,131	0,140	0,155	0,160	0,184
18	Доля правительственного потребления в 1960-х гг.	0,090	0,104	0,135	0,147	0,213	0,262	0,297
19	Плотность населения в 1960 г.	0,043	0,086	$\boxed{0{,}137}$	$\boxed{0{,}175}$	$\boxed{0{,}257}$	0,295	0,316
20	Отклонения от реального валютного курса	0,059	0,082	0,117	0,134	0,205	0,263	0319
21	Доля населения, владеющая иностранным языком	0,052	0,080	0,110	0149	$\boxed{0{,}247}$	$\boxed{0{,}374}$	$\boxed{0{,}478}$
22	(Импорт + Экспорт)/ВВП	0,063	0,076	0,085	0,099	0,131	0,181	0,240
23	Политические права	0,042	0,066	0,082	0,095	0,114	0,130	0,154

Ранг	Переменные	$k = 5$
24	Правительственная доля в ВВП	0,044
25	Высшее образование в 1960 г.	0,059
26	Доля населения в тропиках	0,047
27	Первичный экспорт в 1970 г.	0,047
28	Доля правительственных инвестиций	0,023
29	Доля протестантов	0,035
30	Доля индусов	0,028
31	Доля населения в возрасте меньше 15 лет	0,035
32	Расстояние до больших городов по воздуху	0,024
33	Правительственное потребление, с учетом дефлятора ВВП	0,021
34	Абсолютная широта	0,029
35	Доля католиков	0,019
36	Коэффициенты фертильности в 1960-х гг.	0,020
37	Европейская фиктивная переменная	0,020
38	Внешняя ориентация	0,019
39	Колониальная фиктивная переменная	0,022
40	Гражданские свободы	0,021
41	Революции и перевороты	0,019
42	Фиктивная переменная британской колонии	0,022
43	Месторождения углеводородов 1993 г.	0,015
44	Доля населения старше 65 лет	0,020
45	Доля расходов на оборону	0,016
46	Население в 1960 г.	0,016

$k=7$	$k=9$	$k=11$	$k=16$	$k=22$	$k=28$
0,063	0,087	0,112	0.186	0,252	0,291
0,061	0,066	0,070	0,079	0,103	0,131
0,058	0,061	0,074	0,099	0,132	0,157
0,053	0,065	0,072	0,104	0,137	0162
0,048	0,096	0,151	$\boxed{0{,}0321}$	$\boxed{0{,}525}$	$\boxed{0{,}669}$
0,046	0,055	0,061	0,083	0,120	0,156
0,045	0,059	0,077	0,126	0,179	0,227
0,041	0,045	0,050	0,067	0,093	0,123
0,039	0,054	0,072	0,097	0,115	0,141
0,036	0,056	0,075	0,137	0,225	0,310
0,033	0,040	0,042	0,059	0,086	0,015
0,033	0,042	0,056	0,104	0,163	0,223
0,031	0,043	0,063	0,108	0,170	0,232
0,030	0,043	0,049	0,094	0,148	0,201
0,030	0,043	0,054	0,085	0,134	0,178
0,029	0,039	0,049	0,075	0,105	0,146
0,029	0,037	0,044	0,069	0,106	0,155
0,029	0,038	0,056	0,106	0,188	0,282
0,027	0,034	0,041	0,057	0,085	0,119
0,025	0,035	0,048	0,089	0,143	0,196
0,022	0,029	0,038	0,069	0,119	0,169
0,021	0,027	0,033	0,049	0,073	0,102
0,021	0,040	0,041	0,063	0,092	0,118

Ранг	Переменные	$k=5$	$k=7$	$k=9$	$k=11$	$k=16$	$k=22$	$k=28$
47	Развитие условий торговли в 1960-х гг.	0,015	0,021	0,026	0,033	0,051	0,068	0,104
48	Правительственные расходы на образование, деленные на ВВП, в 1960-х гг.	0,014	0,021	0,027	0,037	0,063	0,102	0,141
49	Фиктивная переменная отсутствия выхода к морю	0,012	0,021	0,029	0,033	0,055	0,080	0,109
50	Мера религиозности	0,012	0,020	0,025	0,037	0,048	0,068	0,092
51	Размер экономики	0,016	0,020	0,026	0,033	0,051	0,076	0,104
52	Социалистическая фиктивная переменная	0,012	0,020	0,024	0,032	0,054	0,091	0,144
53	Англоговорящее население	0,015	0,020	0,025	0,028	0,043	0,063	0,087
54	Средняя инфляция за 1960–1990 гг.	0,015	0,020	0,024	0,030	0,043	0,064	0,100
55	Фиктивная переменная производителя нефти	0,012	0,019	0,025	0,033	0,050	0,071	0,095
56	Прирост населения за 1960–1990 гг.	0,014	0,019	0,023	0,029	0,046	0,074	0,098
57	Срок независимости	0,014	0,019	0,024	0,031	0,048	0,076	0,099
58	Доля суши, прилегающей к судоходным морям и рекам	0,013	0,019	0,024	0,031	0,055	0,092	0,142
59	Квадрат инфляции за 1960–1990 гг.	0,013	0,018	0,022	0,027	0,041	0,063	0,105
60	Время пребывания в состоянии войны за 1960–1990 гг.	0,010	0,016	0,019	0,024	0,039	0,060	0,087
61	Площадь суши	0,010	0,016	0,022	0,026	0,043	0,071	0,103
62	Область тропического климата	0,012	0,016	0,020	0,028	0,042	0,067	0,100
63	Ранжирование по условиям торговли	0,011	0,016	0,019	0,026	0,039	0,063	0,086
64	Капитализм	0,010	0,015	0,020	0,026	0,047	0,084	0,128
65	Доля православных	0,011	0,015	0,020	0,025	0,036	0,059	0,083
66	Участие в войнах в 1960–1990 гг.	0,010	0,015	0,019	0,025	0,040	0,060	0,089
67	Внутренняя плотность	0,010	0,015	0,019	0,023	0,039	0,062	0,085

строке таблицы. Таким образом, для того чтобы понять, увеличивает ли переменная свою вероятность включения относительно априорных ожиданий, мы должны сравнить апостериорную вероятность с соответствующей априорной вероятностью. Те переменные, которые значимы в базовом случае $\bar{k} = 7$ и незначимы при других априорных размерах модели, отделены горизонтальной линией в табл. 12.7. Те переменные, которые незначимы при $\bar{k} = 7$, но становятся значимыми при других размерах, тоже выделены (взяты в рамку).

«Сильные» переменные, которые становятся «слабыми». Заметим, что большинство самых сильных переменных демонстрируют довольно слабую чувствительность к априорному выбору размера модели, причем как в терминах их вероятностей включения, так в плане оценок коэффициентов. Например, для доли добычи сырья в ВВП апостериорная вероятность включения растет с 7% при $\bar{k} = 5$, до 66% при $\bar{k} = 22$. Это означает, что добыча сырья - это такая переменная, для которой требуются другие обусловливающие переменные для того, чтобы выявить ее полную значимость. Доля последователей учения Конфуция и фиктивная переменная принадлежности группе стран южнее пояса Сахары также проявляют себя лучше при наличии большего количества обусловливающих переменных и имеют устойчивые оценки коэффициентов.

Хотя почти все сильные переменные остаются сильными, пять из них все-таки теряют силу при увеличении априорного размера модели. Вот эти переменные: показатель распространенности малярии; о бывшей испанской колонии; сколько лет экономика была открытой; показатель этнолингвистической неоднородности; доля правительственного потребления. Такое свойство переменных означает, что они могут быть поглотителями всевозможных иных эффектов. Например, показатель открытости охватывает различные аспекты торговой открытости страны (тарифные и нетарифные барьеры, премия черного рынка, степень социализма и монополизация экспорта правительством). Остальные 13 переменных, которые были робастными в базовой модели, оказываются таковыми и при других априорных спецификациях размера модели.

«Слабые» переменные, которые становятся «сильными». С другого конца шкалы находятся 46 переменных, которые показали слабую частичную коррелированность при базовом оценивании, при этом большинству из них изменение априорного размера модели никак не помогает. Их апостериорные вероятности включения растут с ростом $\bar{k}$, и это не удивительно, если учесть, что при этом растут их априорные вероятности включения. Но при этом апостериорные вероятности включения меньше априорных, поэтому мы считаем их «слабыми».

Тем не менее есть три переменные, которые «слабы» в базовой модели, но становятся «сильными» с другими априорными размерами модели: это плотность населения; доля населения, говорящего на иностранном языке (мера международного социального капитала и открытости); доля правительственных инвестиций. Как уже упоминалось ранее, доля правительственных инвестиций интересна тем, что эта переменная становится сильной по мере роста априорного размера модели, но знак корреляции отрицателен. То есть бо́льшая доля правительственных инвестиций ассоциируется с меньшими темпами экономического роста.

Мы интерпретируем эти результаты таким образом, что наши базовые результаты, связанные с моделью размера 7, устойчивы к изменению размера модели. Это устойчивость имеет место также и для «вероятностей знакоопределенности», которые мы здесь не рассматривали.

Нелинейности. В литературе часто определяются некоторые переменные так, чтобы они влияли на рост нелинейным образом: например, было установлено, что инфляция имеет существенное негативное влияние на рост, но только при очень больших уровнях инфляции. Для проверки этой гипотезы мы включили в список потенциальных регрессоров средний уровень инфляции в 1960, 1970 и 1980 гг., а также отдельно квадрат среднего уровня инфляции. BACE-метод позволяет включать такие переменные по отдельности, и если бы зависимость была нелинейной, то данные придали бы больший вес таким моделям с высоким уровнем согласия и нелинейностью. Однако апостериорные вероятности включения для инфляции и ее квадрата, как оказалось, очень малы, а условные оценки коэффициентов практически не отличаются от нуля.

12.6. *Приложение*. Долгосрочные данные по ВВП

В Maddison (1991) и в последующих неопубликованных обновленных версиях этой работы приведены долгосрочные данные по реальному ВВП и населению 16 развитых стран. В данной работе оценки постепенно корректируются из-за изменения национальных границ. Данные ежегодные, с 1870–1900 гг. по 1990 г. Значения реального ВВП выражены в долларах США 1985 г. Конвертация внутренних значений реального ВВП осуществлялась на основе эталонных исследований Евростата/ОЭСР, 1985 г. Эти исследования производились по методологии UN's International Comparison Project (ICP), которая аналогична проце-

Таблица 12.8

Страны, включенные в выборку роста (табл. 12.3, столбец (2))

Алжир	Сальвадор	Кения	Южная Африка
Аргентина	Финляндия	Малави	Южная Корея
Австралия	Франция	Малайзия	Испания
Австрия	Гамбия	Мали	Шри-Ланка
Бангладеш	Гана	Мексика	Швеция
Бельгия	Греция	Мозамбик	Швейцария
Боливия	Гватемала	Нидерланды	Сирия
Ботсвана	Гайана	Новая Зеландия	Тайвань
Бразилия	Гаити	Никарагуа	Таиланд
Камерун	Гонконг	Нигер	Того
Канада	Гондурас	Норвегия	Тринидад
Чили	Венгрия	Пакистан	Тунис
Китай	Исландия	Панама	Турция
Колумбия	Индия	Папуа Новая Гвинея	Уганда
Конго (Браззавиль)	Индонезия	Парагвай	Уругвай
Конго (Киншаса)	Иран	Перу	Англия
Коста-Рика	Ирландия	Филиппины	США
Кипр	Израиль	Польша	Венесуэла
Дания	Италия	Португалия	Западная Германия
Доминиканская Республика	Ямайка	Сенегал	Замбия
Эквадор	Япония	Сьерра-Леоне	Зимбабве
Египет	Иордан	Сингапур	

дуре, использованной в работах Summers and Heston (1991) и Heston, Summers, and Aten (2002) для более поздних данных.

Данные по реальному подушевому ВВП приведены с 1870 г. для 13 стран (Австралия, Австрия, Бельгия, Канада, Дания, Финляндия, Франция, Германия, Италия, Норвегия, Швеция, Великобритания и США), с 1885 г. — для Японии, с 1889 г. — для Швейцарии и с 1900 г. — для Нидерландов. В Maddison (1991, табл. A.5) есть также данные за некоторые годы начиная с 1820 г. для 16 стран, кроме Канады, для которой представлены данные только с 1950 г. В этом же источнике есть еще данные для Великобритании за 1700 и 1780 гг. и для Нидерландов за 1700 г.

В табл. 12.10 представлены сведения о подушевом ВВП в долларах США 1985 г. с 20-летними интервалами между данными, начиная с 1870 г., а также соответствующее отношение к подушевому ВВП США и численность населения. Кроме того, в таблице имеются данные по годовому темпу прироста подушевого ВВП и населения в течение каждого периода времени.

Таблица 12.9

Средние значения и стандартные отклонения переменных в основной системе роста

	Регрессия для 1965–1975	**Регрессия для 1975–1985**	**Регрессия для 1985–1995**
Темп прироста	0,026 (0,020)	0,016 (0,024)	0,014 (0,026)
Логарифм подушевого ВВП	8.15(0.94)	8,32(0,97)	8,45(1,03)
Мужское школьное образование верхнего уровня	1.04(0.96)	1,39(1,15)	1,91(1,34)
1/(Средняя продолжительность жизни в возрасте 1 года)	0,0165 (0.0027)	0.0159 (0,0024)	0,0152 (0,0022)
Логарифм общего коэффициента фертильности	1,58 (0,41)	1,50(0.46)	1,31 (0,53)
Удельное правительственное потребление	0,093 (0,061)	0,104 (0,070)	0,091 (0,059)
Показатель правовой нормы	0.56(0,33)	0,55 (0,33)	0,58 (0,26)
Показатель демократии	0.60 (0.32)	0,56 (0,33)	0,64 (0,32)
Квадрат демократии	0,49 (0.37)	0.44 (0,38)	0,52 (0,37)
Удельная открытость	–0.02 (0.18)	–0,01(0,35)	0,00 (0,39)
Переменная условий торговли	–0,004 (0,020)	0.000 (0.021)	–0,003 (0.017)
Удельное инвестирование	0,185 (0.092)	0.179 (0,078)	0,178 (0,081)
Темп инфляции	0.100 (0.110)	0.180(0.209)	0,231 (0,375)
Число наблюдений	72	86	83

Примечание. Здесь представлены средние значения и стандартные отклонения (в скобках) тех же переменных, которые входят в регрессию табл. 12.3, столбец (2). Статистика применяется только к тем выборкам, которые используются для каждого подпериода.

Таблица 12.10

Долгосрочные данные по 16 развитым в настоящее время странам[1]

	ВВП на душу населения (в долл. США 1985 г.)	Отношение к подушевому ВВП США	Темп прироста подушевого ВВП	Население (тыс.)	Темп прироста населения
1	2	3	4	5	6
Австралия					
1870	3143	1,40	-	1620	-
1890	3949	1,27	0,0114	3107	0,0326
1910	4615	1,02	0.0078	4375	0,0171
1930	3963	0,70	−0,0076	6469	0,0196
1950	5970	0,69	0.0205	8177	0.0117
1970	9747	0.76	0.0245	12,507	0.0212
1990	13 514	0.74	0.0163	17,806	0,0177
Австрия					
1870	1412	0.64	--	4520	-
1890	1892	0.61	0.0136	5394	0,0088
1910	2547	0.56	0.0149	6614	0.0102
1930	2776	0,49	0.0043	6684	0,0005
1950	2869	0.33	0.0016	6935	0.0018
1970	7547	0.59	0,0484	7467	0,0037
1990	12 976	0,71	0.0271	7718	0,0017
Бельгия					
1870	2009	0.90		5096	-
1890	2654	0.86	0.0139	6096	0.0090
1910	3146	0.69	0.0085	7498	0.0104
1930	3855	0.68	0.0102	8076	0.0037
1950	4229	0,49	0,0046	8640	0.0034
1970	8235	0,64	0.0333	9638	0.0055
1990	13 320	0.73	0.0240	9967	0,0017
Канада					
1330	0.59	–	3736	–	
1846	0.60	0,0164	4918	0,0137	
3179	0.70	0,0272	7188	0,0190	
3955	0.70	0,0109	10.488	0,0189	

[1] Источник данных - Maddison (1991) с некоторыми уточнениями.

Продолжение табл. 12.10

1	2	3	4	5	6
6112	0.71	0.0218	13.737	0.0135	
10 200	0.80	0.0256	21.324	0.0220	
17 070	0.93	0.0257	26.620	0.0111	
Дания					
1870	1543	0.69	–	1888	
1890	1944	0.63	0.0116	2294	0.0097
1910	2856	0.63	0.0192	2882	0.0114
1930	4114	0,73	0,0182	3542	0.0103
1950	5227	0.61	0.0120	4269	0.0093
1970	9575	0.75	0.0303	4929	0.0072
1990	14 086	0.77	0.0193	5140	0.0021
Финляндия					
1870	933	0.42	–	1754	–
1890	1130	0.36	0.0096	2364	0.0149
1910	1560	0.34	0.0161	2929	0.0107
1930	2181	0.39	0,0168	3449	0.0082
1950	3481	0.40	0.0234	4009	0.0075
1970	7838	0.61	0.0406	4606	0.0069
1990	14 012	0.77	0.0290	4986	0.0040
Франция					
1870	1582	0.70	–	38.440	–
1890	1955	0.63	0.0106	40.107	0,0021
1910	2406	0.53	0.0104	41.398	0.0016
1930	3591	0.64	0.0200	41.610	0.0003
1950	4176	0.49	0.0075	41.836	0.0003
1970	9245	0.72	0.0397	50.772	0.0097
1990	14 245	0.78	0.0216	56.420	0.0053
Западная Германия					
1870	1223	0.55	–	24.870	–
1890	1624	0,52	0.0142	30.014	0.0094
1910	2256	0.50	0.0164	39.356	0.0135
1930	2714	0.48	0.0092	44.026	0.0056
1950	3542	0.41	0.0133	49.983	0.0063
1970	9257	0.72	0.0480	60.651	0,0097
1990	14 288	0.78	0.0217	63.232	0.0021
Италия					
1870	1216	0.54	–	27,888	
1890	1352	0,44	0,0053	31.702	0,0064
1910	1891	0.42	0.0168	36.572	0.0071
1930	2366	0,42	0.0112	40.791	0,0055
1950	2840	0.33	0.0091	47.105	0.0072
1970	7884	0,62	0.0511	53.661	0.0065

Продолжение табл. 12.10

1	2	3	4	5	6
1990	13 215	0.72	0.0258	57.647	0.0036
Япония					
1890	842	0.27	–	40.077	–
1910	1084	0.24	0.0126	49.518	0.0106
1930	1539	0.27	0.0175	64.203	0.0130
1950	1620	0.19	0.0026	83.563	0.0132
1970	8168	0.64	0.0809	104.334	0.0111
1990	16 144	0.88	0.0341	123.540	0.0084
Нидерланды					
1910	2965	0.65	–	5902	–
1930	4400	0.78	0.0197	7884	0.0145
1950	4708	0.55	0.0034	10.114	0.0125
1970	9392	0.73	0.0345	13.194	0.0133
1990	13 078	0.72	0.0166	14.947	0.0062
Норвегия					
1870	1190	0.53		1735	
1890	1477	0.48	0.0108	1997	0.0070
1910	1875	0.41	0.0119	2384	0.0089
1930	3086	0.55	0.0249	2807	0.0082
1950	4541	0.53	0.0193	3265	0.0076
1970	8335	0.65	0.0304	3879	0.0086
1990	15 418	0.84	0.0308	4241	0.0045
Швеция					
1870	1401	0.62		4164	
1890	1757	0.57	0.0112	4780	0.0069
1910	2509	0.55	0.0178	5449	0.0065
1930	3315	0.59	0.0139	6131	0.0059
1950	5673	0.66	0.0269	7015	0.0067
1970	10 707	0.84	0.0318	8043	0.0068
1990	14 804	0.81	0.0162	8559	0.0031
Швейцария					
1910	2979	0.66	-	3735	-
1930	4511	0.80	0.0207	4051	0.0041
1950	6546	0.76	0.0186	4694	0.0074
1970	12 208	0.95	0.0312	6267	0.0145
1990	15 650	0.86	0.0124	6796	0.0041
Великобритания					
1870	2693	1.20		29.312	
1890	3383	1.09	0.0114	35.000	0.0089
1910	3891	0.86	0.0070	41.938	0.0090
1930	4287	0.76	0.0048	45.866	0.0045
1950	5651	0.66	0.0138	50.363	0.0047
1970	8994	0.70	0.0232	55.632	0.0050

Продолжение табл. 12.10

1	2	3	4	5	6
1990	13.589	0.74	0.0206	57,411	0.0016
США					
1870	2244	1.0		40,061	·
1890	3101	1.0	0.0162	63.302	0.0229
1910	4538	1.0	0.0190	92,767	0.0191
1930	5642	1.0	0.0109	123.668	0,0144
1950	8605	1.0	0.0211	152.271	0,0104
1970	12 815	1.0	0.0199	205.052	0,0149
1990	18 258	1.0	0.0177	251.394	0.0102

В Maddison (1989) также имеются долгосрочные данные и для некоторых других стран. Там же, в табл. В-4 и В-5, представлены данные по индексам реального ВВП, начиная с 1900 г. за отдельные годы и ежегодно за период 1950–1987 гг., для девяти стран Азии (Бангладеш, Китай, Индия, Пакистан, Филиппины, Южная Корея, Тайвань и Таиланд) и шести стран Латинской Америки (Аргентина, Бразилия, Чили, Колумбия, Мексика и Перу). Данные по населению приведены в этой работе в табл. С-3 и С-4, а значения реального ВВП на душу населения в табл. А-1 выражены в международных долларах 1980 г. Имеются также данные и для Советского Союза, но события 1990-х наводят на мысль, что эти данные были весьма неточны.

В табл. 12.11 находятся данные по девяти странам Азии и шести странам Латинской Америки за 1900, 1913, 1950, 1973 и 1987 гг. В таблице показаны значения реального подушевого ВВП в международных долларах 1980 г., отношение этих значений к реальному подушевому ВВП США и численность населения, а также годовые темпы прироста реального подушевого ВВП и населения в указанные 20-летние периоды.

В Maddison (1992) приведены долгосрочные данные по нормам сбережения и инвестирования для 11 стран: Австралии, Канады, Франции, Германии, Японии, Нидерландов, Великобритании, США, Индии, Южной Кореи и Тайваня. Ряды этих данных начинаются с 1820 для Франции, с 1870 для Австралии, Канады, Великобритании и США, а для остальных стран данные приводятся, начиная с более поздних лет. Для некоторых стран имеются пропуски в рядах данных. В таблице во введении показаны данные по 20-летним интервалам времени для тех восьми стран, для которых можно построить картину долгосрочного развития.

Таблица 12.11

Долгосрочные данные по 15 наименее развитым в настоящее время странам[1)]

	ВВП на душу населения (в долл. США 1985 г.)	Отношение к подушевому ВВП США	Темп прироста подушевого ВВП	Население (тыс.)	Темп прироста населения
1	2	3	4	5	6
Бангладеш					
1900	349	0,12	-	29,012	-
1913	371	0.10	0.0047	31.786	0.0070
1950	331	0,05	−0,0031	43,135	0,0083
1973	281	0.03	−0.0071	74.368	0.0237
1987	375	0.03	0,0206	102.961	0,0232
Китай					
1900	401	0,14	–	400,000	-
1913	415	0.11	0.0026	430.000	0.0056
1950	338	0,05	−0.0055	546,815	0,0065
1973	774	0.07	0.0360	881,940	0.0208
1987	1748	0.13	0,0582	1.069,608	0.0138
Индия					
1900	378	0.13	-	234.655	–
1913	399	0.11	0.0042	251.826	0.0054
1950	359	0.05	−0,0029	359.943	0.0097
1973	513	0.05	0.0155	579.000	0.0207
1987	662	0.05	0,0182	787.930	0,0220
Индонезия					
1900	499	0.17	-	40.209	–
1913	529	0.14	0.0045	48,150	0,0139
1950	484	0.07	−0.0024	72,747	0,0112
1973	786	0.07	0.0211	124.189	0.0233
1987	1200	0,09	0.0302	170,744	0,0227
Пакистан					
1900	413	0.14	–	19.759	-
1913	438	0.12	0.0045	20,007	0,0010
1950	390	0,06	−0.0031	37,646	0.0171

[1)] Источник данных – Maddison (1989).

Продолжение табл. 12.11

1	2	3	4	5	6
1973	579	0,05	0,0172	67.900	0,0256
1987	885	0,07	0.0303	101.611	0.0288
Филиппины					
1900	718	0,25	–	7324	–
1913	985	0,26	0,0243	9384	0,0191
1950	898	0,13	–0,0025	20.062	0.0205
1973	1400	0,13	0,0193	39.701	0,0297
1987	1519	0.11	0.0058	57.011	0.0258
Южная Корея					
1900	549	0.19	-	8772	·
1913	610	0,16	0,0081	10.277	0.0122
1950	564	0,08	–0.0021	20.557	0.0187
1973	1790	0.16	0.0502	34.103	0.0220
1987	4143	0,31	0.0599	42.512	0.0157
Тайвань					
1900	434	0,15	-	2858	·
1913	453	0,12	0.0033	3469	0.0149
1950	526	0,08	0,0040	7882	0,0222
1973	2087	0.19	0.0599	15.427	0.0292
1987	4744	0.35	0.0587	19.551	0,0169
Таиланд					
1900	626	0.22	-	7320	-
1913	652	0.17	0.0031	8690	0.0132
1950	653	0.10	0.0000	19.442	0.0218
1973	1343	0.12	0.0314	39.303	0.0306
1987	2294	0,17	0.0382	53.377	0.0219
Аргентина					
1900	1284	0.44		4693	-
1913	1770	0.47	0.0247	7653	0.0376
1950	2324	0,35	0.0074	17.150	0,0218
1973	3713	0.34	0.0204	25.195	0.0167
1987	3302	0.24	–0.0084	31.500	0.0160
Бразилия					
1900	436	0,15		17.984	
1913	521	0.14	0.0137	23.660	0,0211
1950	1073	0.16	0.0195	51.941	0.0213
1973	2504	0.23	0.0368	99.836	0.0284
1987	3417	0.25	0,0222	140.692	0.0245
Чили					
1900	956	0,33		2974	-
1913	1255	0,33	0.0209	3491	0.0123
1950	2350	0.35	0.0170	6091	0.0150
1973	3309	0,30	0.0149	9899	0,0211

Продолжение табл. 12.11

1	2	3	4	5	6
1987	3393	0,25	0,0018	12,485	0,0166
Колумбия					
1900	610	0,21		3998	–
1913	801	0.21	0.0210	5195	0.0201
1950	1395	0,21	0,0150	11,597	0,0217
1973	2318	0.21	0,0221	22.571	0.0290
1987	3027	0,22	0.0191	29,496	0,0191
Мексика					
1900	649	0,22	–	13,607	–
1913	822	0.22	0,0182	14,971	0.0073
1950	1169	0.17	0,0095	27,376	0,0163
1973	2349	0.21	0.0303	56.481	0,0315
1987	2667	0,20	0,0091	81,163	0,0259
Перу					
1900	624	0,21	–	3791	–
1913	819	0.22	0,0209	4507	0,0133
1950	1349	0,20	0,0135	7630	0.0142
1973	2357	0,21	0,0243	14.350	0.0275
1987	2380	0,18	0.0007	20.756	0.0264

Математические методы

В данном приложении представлены основные математические методы, использованные в книге. Мы рассмотрим дифференциальные уравнения, статическую оптимизацию, динамическую оптимизацию, некоторые результаты теории матриц и несколько результатов теории дифференциального и интегрального исчисления.

П.1. Дифференциальные уравнения

П.1.1. Введение

Дифференциальное уравнение - это уравнение, которое содержит производные переменных. Если имеется только одна независимая переменная, то такое уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ). *Порядком* ОДУ называется порядок наивысшей производной в нем: т. е. если наивысшая производная в уравнении имеет порядок n, то уравнение является ОДУ n-го порядка. Если функциональная форма уравнения является линейной, то говорят о *линейном ОДУ*. Большинство встречающихся в данной книге дифференциальных уравнений содержат производные функций по *времени*.

Пример дифференциального уравнения:

$$a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) + x(t) = 0, \qquad (\text{П}.1)$$

где точка над $y(t)$ обозначает производную $y(t)$ по времени; $\dot{y}(t) \equiv dy(t)/dt$; a_1 и a_2 - константы; $x(t)$ - известная функция времени. Функция $x(t)$ иногда называется *силовой функцией*. Уравнение (П.1) является линейным ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. Если $x(t) \equiv a_3$ константа, то уравнение называется *автономным*. (Уравнение является автономным, если оно зависит от времени только через переменную $y(t)$.) Если $x(t) = 0$, то уравнение называется *однородным*.

Линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_1 \cdot \ddot{y}(t) + a_2 \cdot \dot{y}(t) + x(t) = 0, \tag{П.2}$$

где a_1, a_2 и a_3 – константы: $\ddot{y}(t) \equiv d^2y(t)/dt^2$. Уравнение

$$a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2(t) \cdot y(t) + x(t) = 0, \tag{П.3}$$

где $a_2(t)$ – известная функция времени, является линейным ОДУ с *переменными коэффициентами*. Уравнение

$$\log \dot{y}(t) + \frac{1}{y(t)} = 0 \tag{П.4}$$

является *нелинейным ОДУ первого порядка*.

Целью решения дифференциального уравнения является отыскание функции $y(t)$, удовлетворяющей этому уравнению. Первый метод решения, который мы используем, – *графический*, метод, который может быть одинаково успешно применен как для решения линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений. Недостаток этого метода в том, что он работает только для автономных уравнений. Второй метод – *аналитический*. В ряде случаев можно найти точную формулу для $y(t)$, даже в случае неавтономного уравнения. Недостатком этого метода является то, что его можно использовать только для ограниченного множества функциональных форм уравнения. Впрочем, одна из них – линейная функция, как в уравнении (П.1). При рассмотрении нелинейных дифференциальных уравнений мы их решение зачастую будем аппроксимировать путем линеаризации уравнения разложением в ряд Тейлора (см. разд. П.6.2).

Третий метод решения дифференциальных уравнений базируется на численном анализе. Большинство современных компьютерных математических пакетов анализа содержат модули численного решения дифференциальных уравнений. Например, Matlab имеет функции ODE23 и ODE45, а Mathematica имеет команду NDSOLVE.

П.1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Графические решения

Построение диаграммы. Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение следующего вида

$$\dot{y}(t) = f[y(t)]. \tag{П.5}$$

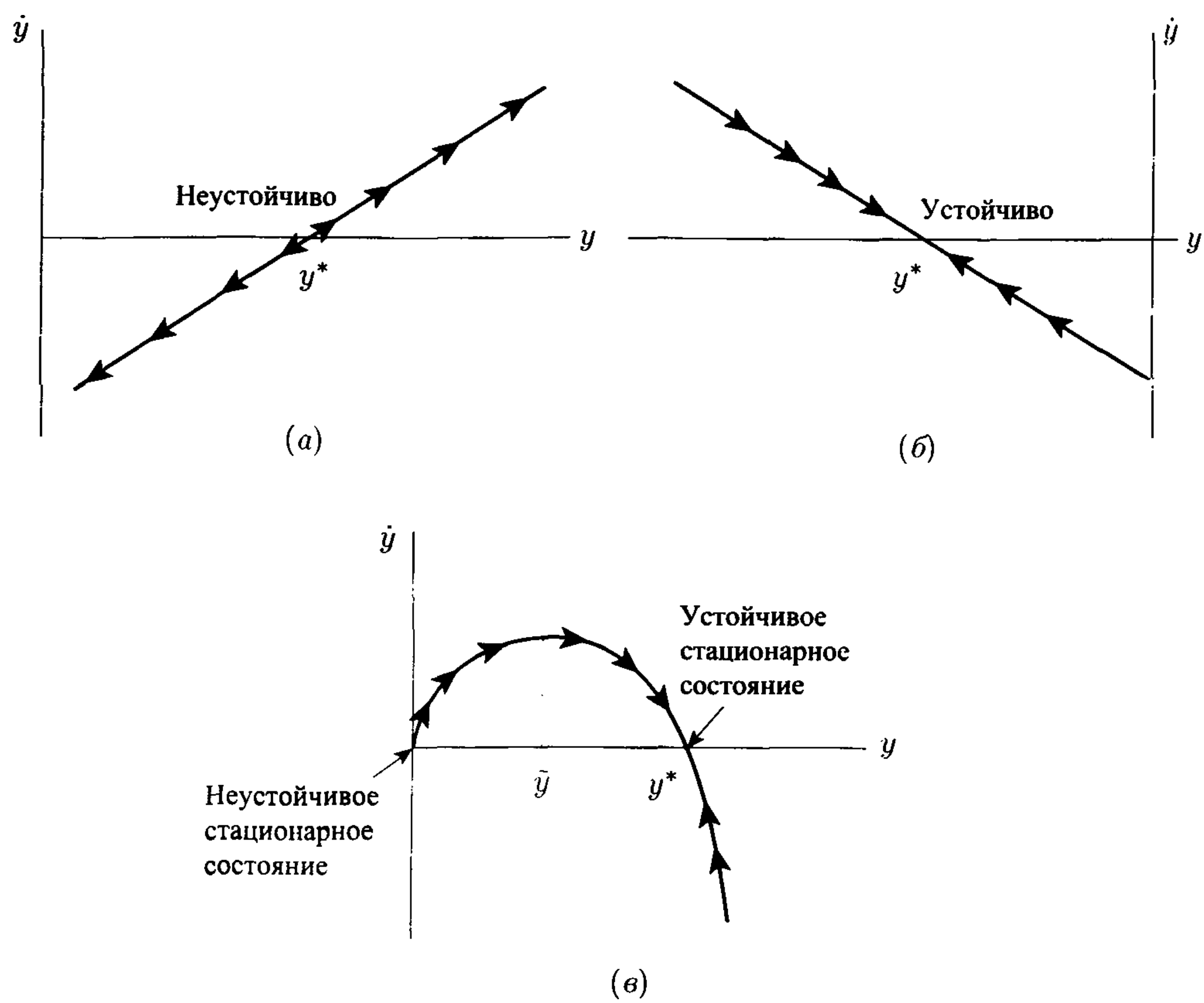


Рис. П.1. (*а*) **Линейное ОДУ.** Если коэффициент a в уравнении (П.6) положителен, то дифференциальное уравнение относительно y будет неустойчивым. (*б*) **Линейное ОДУ.** Если коэффициент a в уравнении (П.6) отрицателен, то дифференциальное уравнение относительно y будет устойчивым. (*в*) **Нелинейное ОДУ.** В уравнении (П.7) угол наклона графика $f(\cdot)$ относительно y изначально положителен, а затем отрицателен. Стационарное состояние в нуле неустойчиво, в то время как в y^* устойчиво

где $f(\cdot)$ известная функция. Уравнение (П.5) является автономным в силу того что функция $f(\cdot)$ не зависит от времени явным образом только через y. Линейности от функции $f(\cdot)$ не требуется.

Для решения уравнения (П.5) графически, изобразим $f(\cdot)$ как функцию y (см. рис. П.1). По горизонтальной оси отложены значения y, а по вертикальной $f(\cdot)$ и $\dot{y}$. Положительным значениям $f(\cdot)$ соответствуют положительные значения $\dot{y}$ в соответствии с уравнением (П.5). Так как $\dot{y}$ является производной y по времени, то положительным значениям $\dot{y}$ соответствуют растущие значения y. Для отображения этого факта мы рисуем стрелки, направленные на восток (возрастание y), при значениях $f(\cdot)$, лежащих выше горизонтальной оси, и стрелки, направленные на запад (убывание y), когда значения $f(\cdot)$ лежат ниже горизонтальной оси. Стрелки показывают направление, в котором y движется с течением времени и, следовательно, дает количественно решение дифференциального уравнения.

Иногда дифференциальное уравнение можно выразить через разность двух функций, например:

$$\dot{y}(t) = f[y(t)] - g[y(t)].$$

Вместо построения графика $f(\cdot) - g(\cdot)$ мы можем изобразить $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ раздельно. Темп изменения $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ в этом случае задается вертикальным расстоянием между $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$. Для значений y, при которых график $f(\cdot)$ лежит выше $g(\cdot)$, $\dot{y}(t)$ положительна и, следовательно, $y(t)$ растет со временем. Верно и обратное, когда $f(\cdot)$ лежит ниже $g(\cdot)$. Стационарное состояние задается точкой (или точками), в которой $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ пересекаются.

В качестве примера рассмотрим линейную функцию $f(\cdot)$

$$\dot{y}(t) = f[y(t)] = a \cdot y(t) - x, \qquad (\text{П.6})$$

где a и x константы, $a > 0$. График $f(\cdot)$ - прямая линия с положительным углом наклона. Эта линия, изображенная на рис. П.1, *а*, пересекает вертикальную ось координат в точке $\dot{y} = -x$ и пересекает горизонтальную ось координат в точке $y^* = x/a$. Для значений y больших y^* функция лежит выше горизонтальной оси. Так что $\dot{y}$ положительна, а y возрастает. Следовательно, справа от y^* мы рисуем стрелки, направленные на северо-восток (см. рис. П.1, *а*). Слева от y^* ситуация противоположна, поэтому в этой области мы рисуем стрелки, направленные на юго-запад.

Если начальное значение $y(0)$ равно y^*, то из уравнения (П.6) следует, что $\dot{y} = 0$, так что y не меняется со временем. Отсюда следует, что $y(t)$ навсегда остается на уровне y^*. Поэтому значение y^* называется *стационарным значением* y.

Если $y(0) > y^*$, то $\dot{y} > 0$, так что y растет со временем. И наоборот, если $y(0) < y^*$, то $\dot{y} < 0$, так что y уменьшается со временем. Качественная динамика $y(t)$ полностью определена на рис. П.1, *а*: после того как начальное значение $y(0)$ определено, дальнейшее движение y показано стрелками. Интересным моментом здесь является то, что если $y(0) = y^*$, то при $a > 0$ из нашего уравнения вытекает удаление y от стационарного состояния. Причем такая динамика наблюдается независимо от того, находятся начальные значения ниже или выше y^*. В этом случае говорят, что данное дифференциальное уравнение *неустойчиво*.

Допустим теперь, что $a < 0$. В этом случае график $f(\cdot)$ представляет собой прямую линию с наклоном вниз, как это изображено на рис. П.1, *б*, которая пересекает вертикальную ось координат в $y^* = -x$ и горизонтальную ось координат в $y^* = -x/a$. Слева от y^* производная $\dot{y}$ положительна, поэтому y растет со временем. Соответственно, стрелки на рисунке направлены на юго-восток. Обратная зависимость имеет место справа от y^*. Заметим, что, несмотря на положение начального значения $y(0)$, динамика уравнения приводит $y(t)$ назад в стационарное состояние y^*. В этом случае мы говорим, что уравнение (П.6) *устойчиво*.

Графический подход может быть также применен при решении более сложных нелинейных уравнений. Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = f[y(t)] = s \cdot [y(t)]^{\alpha} - \delta \cdot y(t), \tag{П.7}$$

где s, δ, α — положительные константы и $\alpha < 1$. В гл. 1 показано, что фундаментальное уравнение модели роста Солоу–Свэна принимает вид уравнения (П.7), где $y(t)$ — капитал. При такой интерпретации в уравнении (П.7) утверждается, что чистый рост капитала равен разности между валовым сбережением и валовой амортизацией. Валовое сбережение предполагается равным постоянной части s выпуска y^{α}, а валовая амортизация пропорциональна имеющемуся объему капитала.

Так как только неотрицательные значения объема капитала имеют экономический смысл, то мы будем рассматривать только первый квадрант на рис. П.1, *с*. При малых значениях y график функции $f(\cdot)$ имеет наклон вверх. Значение функции достигает максимального значения при $s\alpha\tilde{y}^{\alpha-1} = \delta$, после чего при больших значениях y график функции имеет наклон вниз. График функции $f(\cdot)$ пересекает горизонтальную ось координат в двух точках

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = y^* = \left(\frac{\delta}{s}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Справа от y^* производная $\dot{y}$ отрицательна, так что y снижается. Поэтому мы рисуем стрелки на запад. Слева от y^* производная $\dot{y}$ положительна, так что y растет, и мы рисуем стрелки на восток. Отсюда следует, что уравнение имеет два стационарных состояния. Первое из них — y^*, и оно устойчиво, т. е. для любого положительного начального значения $y(0)$ динамика уравнения направляет $y(t)$ к y^*. Второе стационарное состояние (0) неустойчиво: если $y(0) > 0$, то $y(t)$ удаляется от нуля.

Устойчивость. В предыдущем обсуждении предполагалось, что если график $f(\cdot)$ имеет наклон вверх в стационарном значении y^*, то стационарное состоянии неустойчиво. То есть если $y(0) \neq y^*$, то $y(t)$ удаляется от y^*. Причина проста: если график $f(\cdot)$ имеет наклон вверх при $f(y^*) = 0$, то при $y > y^*$ $f(y) > 0$. Следовательно, $\dot{y} > 0$, и y возрастает со временем. С другой стороны, при $y < y^*$ $f(y) < 0$, $\dot{y} < 0$, и y убывает со временем. В итоге имеем: y растет, когда оно уже велико, и уменьшается, когда мало, что является индикатором нестабильности.

Верно обратное: если график $f(\cdot)$ имеет наклон вниз в стационарном значении, y^*, то уравнение устойчиво. В этом случае если $y(0) \neq y^*$, то $y(t)$ сходится к y^* со временем.

Подводя итог вышеизложенному, можно сказать, что если нас интересует устойчивость дифференциального уравнения в окрестности стационарного состояния, то все, что нам нужно сделать, это найти производную $f(\cdot)$ и вычислить ее в стационарной точке y^*:

$$\begin{aligned}
&\text{если } \left.\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\right|_{y^*} > 0, \quad \text{то уравнение локально неустойчиво;}\\
&\text{если } \left.\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\right|_{y^*} < 0, \quad \text{то уравнение локально устойчиво.}
\end{aligned} \tag{П.8}$$

Хотя нелинейные дифференциальные уравнения могут иметь более одного стационарного состояния, локальное свойство устойчивости каждого из этих состояний определяется из (П.8).

Аналитические решения Решение некоторых уравнений может быть найдено непосредственно в силу того что уравнение может быть проинтегрировано. Например, решением $\dot{y}(t) = a$, очевидно, является $y(t) = b + at$, где b - произвольная константа.

Также легко найти решение уравнений, в правой части которых стоит полиномиальная функция времени, например

$$\dot{y}(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_n \cdot t^n$$

имеет решение

$$y(t) = b + a_0 \cdot t + a_1 \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots + a_n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

В общем же случае функциональные формы решений не столь просты. Сейчас мы выведем общее решение линейного ОДУ первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. В общем виде линейное ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\dot{y}(t) + a \cdot y(t) + x(t) = 0, \tag{П.9}$$

где a константа; $x(t)$ известная функция времени. Простейшим способом решения этого уравнения является выполнение следующих шагов.

Во-первых, перенесем все члены уравнения, содержащие y и ее производные, в левую часть уравнения, а остальные – в правую:

$$\dot{y}(t) + a \cdot y(t) = -x(t).$$

Во-вторых, умножим обе части уравнения на e^{at} и проинтегрируем:

$$\int e^{at} \cdot [\dot{y}(t) + a \cdot y(t)]\, dt = -\int e^{at} \cdot x(t)\, dt. \tag{П.10}$$

Член e^{at} называется *интегрирующим множителем.* Смысл умножения на интегрирующий множитель заключается в том, что подынтегральное выражение в левой части уравнения становится производной функции $e^{at} \cdot y(t)$ по времени:

$$e^{at} \cdot [\dot{y}(t) + a \cdot y(t)] = \frac{d}{dt}\,[e^{at} \cdot y(t) + b_0],$$

где b_0 произвольная константа. Заметим, что интеграл в левой части уравнения (П.10) является интегралом производной некоторой функции и, следовательно, равен самой этой функции (см. разд. II.5.5). Отсюда выражение в левой части уравнения (П.10) равно $e^{at} \cdot y(t) + b_0$.

В-третьих, возьмем интеграл в правой части уравнения (П.10), не забыв добавить еще одну константу b_1. Заметим, что этот интеграл является функцией t. Обозначим результат $INT(t) + b_1$. Так как $x(t)$ известная функция времени, то $INT(t)$ тоже является известной функцией времени.

В-четвертых, умножив обе части уравнения на e^{-at}, получим $y(t)$:

$$y(t) = -e^{-at} \cdot \mathrm{INT}(t) + be^{-at}, \tag{П.11}$$

где $b = b_1 - b_0$ - произвольная константа. Уравнение (П.11) представляет собой общее решение ОДУ, описываемое уравнением (П.2).

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение:

$$\dot{y}(t) - y(t) - 1 = 0. \tag{П.12}$$

В этом примере силовая функция $x(t)$ является константой, -1. Для решения этого уравнения выполним описанные выше шаги. Во-первых, перенесем все члены, включающие $y(t)$ и ее производные, в левую часть уравнения, а все остальные члены — в правую. Затем умножим обе части уравнения на e^{-t} и проинтегрируем:

$$\int e^{-t} \cdot [\dot{y}(t) - y(t)]\, dt = \int e^{-t}\, dt. \qquad (\text{П.13})$$

Выражение под интегралом в левой части уравнения является производной функции $e^{-t} \cdot y(t) + b_0$ по времени. Следовательно, интеграл слева равен $e^{-t} \cdot y(t) + b_0$. Выражение в правой части равно $-e^{-t} + b_1$. Следовательно, решение уравнения П.12 имеет вид

$$y(t) = -1 + be^{t}, \qquad (\text{П.14})$$

где $b = b_1 - b_0$ произвольная константа. Мы можем убедиться в том, что (П.14) удовлетворяет уравнению (П.12), если возьмем производные по времени и получим

$$\dot{y}(t) = be^{t} = y(t) + 1.$$

Выражение (П.11) является *общим решением* уравнения (П.2); для получения *частного* или *точного решения* следует специфицировать произвольную константу интегрирования b. Для выделения одной траектории из бесконечного числа возможных нам нужно знать значение $y(t)$ хотя бы в один момент времени. Это граничное условие определит единственное решение дифференциального уравнения.

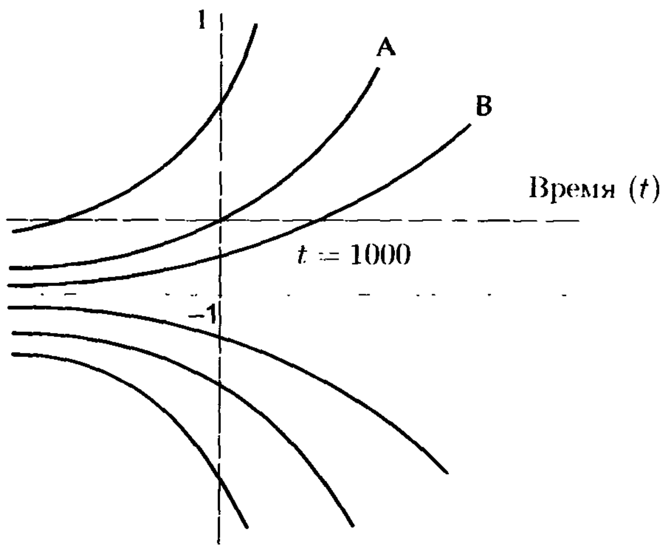


Рис. П.2. Решения дифференциального уравнения. На этом рисунке показано множество решений дифференциального уравнения (П.12)

На рис. П.2 изображено множество решений ОДУ, заданного уравнением (П.12). Для выбора одного решения из этого множества допустим, что нам известно, что $y(t) = 0$ при $t = 0$. Такой тип граничного условия называется *начальным условием*, потому что оно точно определяет путь посредством спецификации значения $y(t)$ на начальную дату. В нашем примере мы можем подставить $t = 0$ и $y(0) = 0$ в уравнение (П.14) и получить

$$y(0) = -1 + be^0 = 0,$$

откуда $b = 1$. Таким образом, мы можем вставить $b = 1$ в уравнение (П.14) и получить частное решение:

$$y(t) = -1 + e^t. \tag{П.15}$$

Это уравнение, которое определяет единственное значение y в каждый момент времени, на рис. П.2 соответствует траектории, обозначенной A.

Вместо знания начального значения функции нам может быть доступно знание значения на некоторую терминальную дату; т. е. у нас может быть *терминальное условие*[1]. В качестве примера предположим, что терминальной датой является $t_1 = 1000$, и значение $y(t)$ в этот период времени равно 0. Таким образом,

$$y(1000) = -1 + b \cdot e^{1000}.$$

Из решения $b = e^{-1000}$ следует

$$y(t) = -1 + (e^{-1000}) \cdot e^t. \tag{П.16}$$

Этот результат соответствует траектории B на рис. П.2.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) + a(t) \cdot y(t) + x(t) = 0, \tag{П.17}$$

где $a(t)$ — известная функция времени, но теперь уже не константа. Применим описанные выше шаги с той лишь разницей, что интегрирующий множитель здесь

$$\exp\left\{ \int_0^t a(\tau) d\tau \right\},$$

[1]Когда мы имеем дело с моделями роста с бесконечным горизонтом, мы можем знать предельное значение переменной при стремлении времени к бесконечности. Такая информация также дает нам терминальное условие.

так что выражение в левой части уравнения становится производной функции

$$y(t) \cdot \exp\left\{ \int_0^t a(\tau) d\tau \right\}^{1)}.$$

Как и ранее, при интегрировании производной функции получаем исходную функцию. Используя эти соображения, находим решение нашего ОДУ:

$$\begin{aligned} y(t) = -\exp\left\{ -\int_0^t a(\tau)\, d\tau \right\} \cdot \int \exp\left\{ \int_0^t a(\tau)\, d\tau \right\} \cdot x(t)\, dt + \\ + b \cdot \exp\left\{ -\int_0^t a(\tau)\, d\tau \right\}, \end{aligned} \tag{П.18}$$

где b - произвольная константа интегрирования. Для определения частного или точного решения следует, как и ранее, использовать граничное условие.

П.1.3. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Изучим теперь систему линейных ОДУ первого порядка вида

$$\dot{y}_1(t) = a_{11} y_1(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) + x_1(t);$$

$$\dots$$

$$\dot{y}_n(t) = a_{n1} y_1(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) + x_n(t).$$

В матричной записи система имеет вид:

$$\dot{y}(t) = A \cdot y(t) + x(t), \tag{П.19}$$

где $y(t)$ - вектор-столбец

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

[1] Нижний предел интегрирования может быть произвольной константой. Согласно правилу Лейбница дифференцирования определенных интегралов,

$$d\left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] / dt = f(t).$$

Отметим, что мы берем производную по верхнему пределу интегрирования. См. разд. П.6.6.

состоящий из n функций времени; $\dot{y}(t)$ – вектор-столбец из n соответствующих производных; A – $n \times n$ квадратная матрица постоянных коэффициентов; $x(t)$ – вектор из n функций.

Мы рассмотрим три способа решения этой системы уравнений. Первый из них основан на графическом представлении, которое называется *фазовой диаграммой.* Этот метод аналогичен рассмотренному выше для одного дифференциального уравнения. Преимуществом использования фазовой диаграммы является простота такого подхода и то, что он дает качественное решение. Более того, этот метод применим и для систем нелинейных уравнений. К недостаткам фазовых диаграмм можно отнести то, что они применимы только для систем размера 2×2 и только для автономных уравнений, имеющих стационарные состояния.

Второй способ – *аналитический.* Преимуществами аналитического подхода являются возможность его использования для больших систем, а также то, что он дает количественные решения. Недостаток метода – он применим, в общем случае, только для линейных уравнений. Впрочем, чуть позже в этом же разделе мы покажем, как можно использовать линейные аппроксимации для нелинейных систем.

Третий способ – *численный.* Далее в настоящем разделе мы опишем численный метод решения нелинейной системы, основанный на исключении из уравнений переменной времени.

Фазовые диаграммы

Диагональные системы. Рассмотрим простой случай, в котором A является диагональной матрицей размера 2×2 и уравнения однородны; т. е. компоненты вектора $x(t)$ равны 0. В этом случае систему можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11} \cdot y_1(t); \\ \dot{y}_2 &= a_{22} \cdot y_2(t), \end{aligned} \tag{П.20}$$

где a_{11}, a_{22} – вещественные числа.

Фазовая диаграмма представляет собой графический инструмент, уже использованный нами в предыдущем разделе, позволяющий визуализировать динамику системы. На рис. П.3 значения y_1 откладываются по горизонтальной оси координат, а y_2 – по вертикальной. Каждая точка в пространстве фазовой диаграммы представляет положение системы (y_1, y_2) в данный момент времени. Представим себе, что в момент времени 0 мы находимся в точке, отмеченной «0» на рисунке; т. е. значение y_1 равно $y_1(0)$, а значение y_2 равно $y_2(0)$. Для того чтобы увидеть, в каком положении окажется экономика в следующее мгновение, можно ввести третье измерение, представляющее время. Но можно

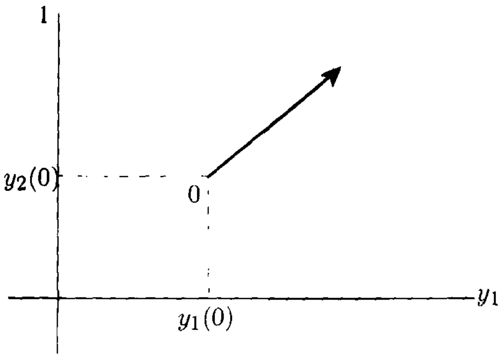


Рис. П.3. Направления движения. На этом рисунке показаны направления движения y_1 и y_2 в диагональной системе, задаваемой уравнением (П.20)

поступить более удобным образом — описать динамику стрелками, указывающими направление движения, точно так же как мы это уже делали в разд. П.1.2. Например, стрелка, направленная на северо-восток в точке «0», означает, что обе переменные y_1 и y_2 растут со временем. Если стрелка направлена на север, то y_2 растет, а y_1 не изменяется, и т. д.

Целью фазовой диаграммы является перевод представленной двумя дифференциальными уравнениями динамики в систему стрелок, которые описывают качественное поведение экономики во времени. В качестве простого примера рассмотрим указанную выше диагональную систему. Динамика зависит от знаков двух диагональных элементов матрицы A. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$. Для построения фазовой диаграммы необходимо сделать следующие шаги.

1. Начнем с того, что изобразим геометрическое место точек, для которых $\dot{y}_1$ равно 0 и которое называется *график* $\dot{y}_1 = 0$ (см. рис. П.4*a*). В нашем случае это геометрическое место точек соответствует $y_1(0) = 0$, т. е. вертикальной оси координат.

2. Проанализируем динамику y_1 в каждой из двух областей, на которую плоскость разбивается графиком $\dot{y}_1 = 0$. Для положительных y_1 (т. е. справа от графика $\dot{y}_1 = 0$) $\dot{y}_1$ положительна, потому что $a_{11} > 0$ и $y_1 > 0$. Следовательно, стрелки направлены на восток. Слева от вертикальной оси координат стрелки направлены в противоположную сторону, потому что здесь производная $\dot{y}_1$ равна произведению положительного числа $a_{11} > 0$ и отрицательного $y_1 < 0$. В результате стрелки направлены на запад.

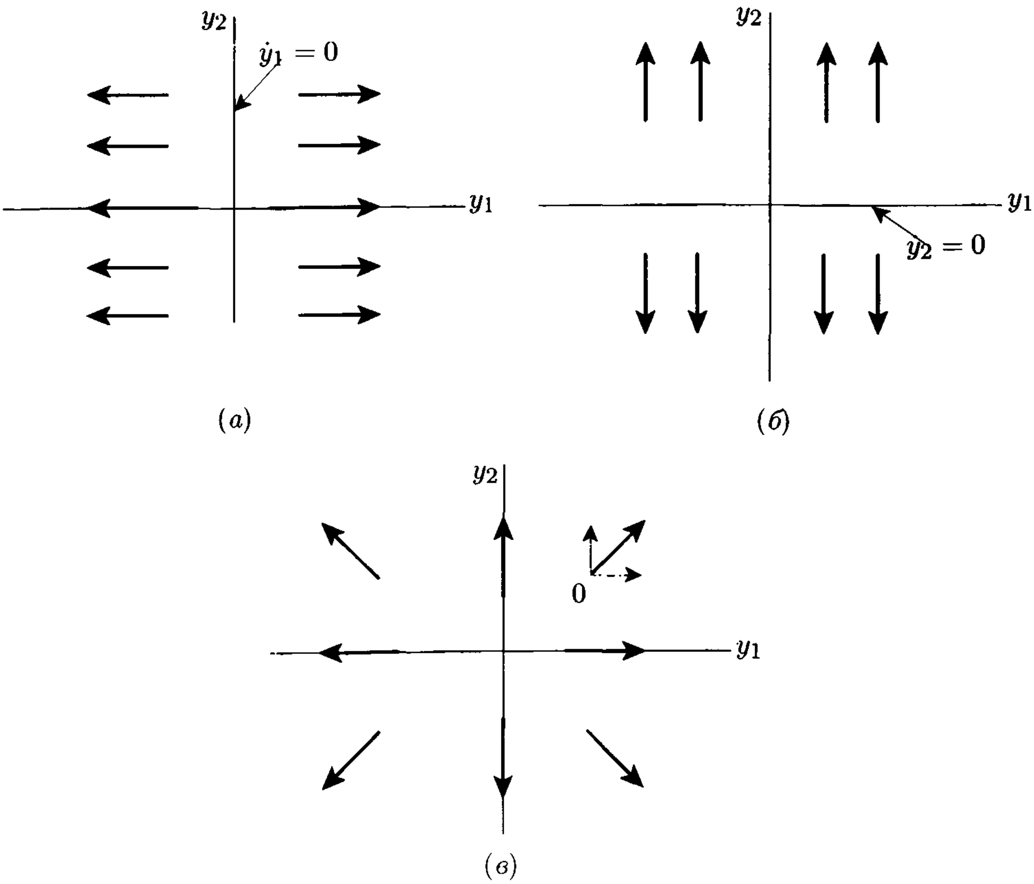


Рис. П.4. (*а*) **График** $\dot{y}_1 = 0$. Здесь показан график $\dot{y}_1 = 0$ (вертикальная ось координат в данном примере) для системы, задаваемой уравнением (П.20) при $a_{11} > 0$. Стрелки показывают направление движения y_1. (*б*) **График** $\dot{y}_2 = 0$. Здесь показан график $\dot{y}_2 = 0$ (вертикальная ось координат в данном примере) для системы, задаваемой уравнением (П.20) при $a_{22} > 0$. Стрелки показывают направление движения y_2. (*в*) **Фазовая диаграмма в неустойчивом случае.** Результаты рис. П.4, *а*, и рис. П.4, *б*, объединены с целью генерации простой фазовой диаграммы. Стрелки показывают направления движения y_1 и y_2 при $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$. Система неустойчива

3. Повторим эту процедуру для $\dot{y}_2$. В нашем примере график $\dot{y}_2 = 0$ является горизонтальной осью координат, как показано на рис. П.4, *б*. Для положительных значений y_2 производная $\dot{y}_2$ равна произведению двух положительных величин и поэтому тоже положительна. Следовательно, y_2 растет и, соответственно, стрелки направлены на север. Аналогично в области отрицательных значений y_2 стрелки направлены на юг.

4. Объединим две картинки, рис. П.4, *а*, и рис. П.4, *б*, в третью, рис. П.4, *в*. Два графика делят пространство на четыре области. (В данном простом случае области соответствуют четырем квадрантам, что в более общем случае не так.) В первом квадранте одна стрелка направлена на запад, а другая на север. Объединим эти две стрелки в одну, направленную на северо-восток. Это означает, что если экономика находится в этой области, то y_1 и y_2 возрастают. Объединение стрелок во втором, третьем и четвертом квадрантах даст стрелки? направленные на северо-запад, юго-запад и юго-восток соответственно. На вертикальной оси координат стрелки направлены на север для положительных y_2 и на юг для отрицательных y_2. На горизонтальной оси координат стрелки направлены на восток для положительных y_1 и на запад для отрицательных y_1. И наконец, в начале координат $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$ равны 0. Следовательно, если экономика окажется в начале координат, то она останется там навсегда. Эта точка — стационарное состояние. Оно неустойчиво в том смысле, что если отклониться от начала координат на небольшую величину в любом направлении, то динамика системы (следуя стрелкам) уведет ее прочь от стационарного состояния.

5. Используем граничное условие для выявления, какая траектория из всего представленного на картинке множества является точным решением. Допустим, например, что в момент времени 0 значение y_1 равно 1, а значение y_2 равно 2. (В этом случае оба граничных условия являются начальными условиями, но в других случаях, которые мы рассматриваем, у нас одно граничное условие может быть начальным, а другое — терминальным, или оба условия могут быть терминальными.) Из начальных условий следует, что система начинает движение из точки «0» на рис. П.4, *в*. Последующая динамика y_1 и y_2 задается траекторией, проходящей через «0», как показано на рис. П.4, *в*.

Случай 2. $a_{11} < 0$ и $a_{22} < 0$. На основании рассуждений, аналогичных представленным в предыдущем разделе, в данном случае график $\dot{y}_1 = 0$, как и ранее, представляет собой вертикальную ось, а график $\dot{y}_2 = 0$ — горизонтальную. Повторяя те же шаги, что и выше, находим (см. рис. П.5), что стрелки направлены на юго-запад в первом квадранте, на юго-восток во втором, на северо-восток в третьем и на северо-запад в четвертом. Стационарное состояние является началом координат, и, в отличие от предыдущего случая, это положение устойчиво, т. е. при любых начальных значениях y_1 и y_2 динамика системы возвращает их в стационарное состояние.

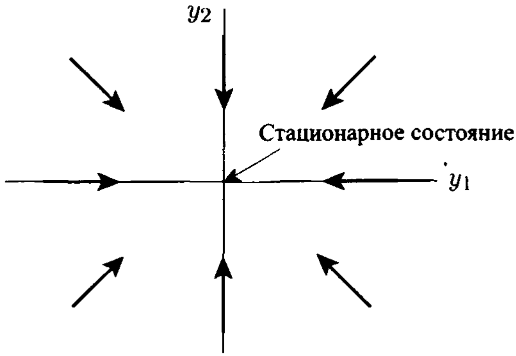


Рис. П.5. Фазовая диаграмма в устойчивом случае. В данном примере в уравнении (П.20) предполагается $a_{11} < 0$ и $a_{22} < 0$. Эта система устойчива

Случай 3. $a_{11} < 0$и $a_{22} > 0$. Так же как и в предыдущих случаях, график $\dot{y}_1 = 0$ является вертикальной осью координат, а график $\dot{y}_2 = 0$ — горизонтальной. Динамика в этом случае показана на рис. П.6, и она, как видим, более сложна, чем в предыдущих двух случаях. Стрелки направлены на северо-запад в первом квадранте, на северо-восток во втором, на юго-восток в третьем и на юго-запад в четвертом. На горизонтальной оси координат стрелки направлены в начало координат, на вертикальной – от начала координат. Начало координат, как и ранее, является стационарным состоянием.

Новым элементом здесь является то, что система ни устойчива, ни неустойчива. Если система находится в стационарном состоянии, то

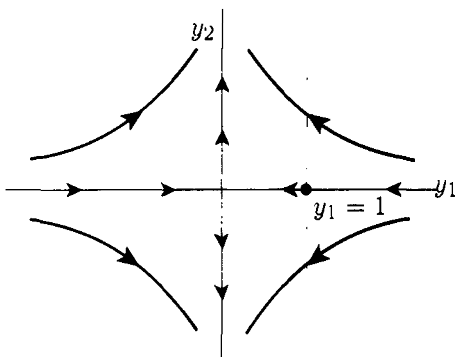


Рис. П.6. Фазовая диаграмма в случае седловой устойчивости. В данном примере в уравнении (П.20) предполагается $a_{11} < 0$ и $a_{22} > 0$. Эта система имеет седловую устойчивость она отсюда не выходит. Если система начинает движение из состояния на горизонтальной оси координат, то динамика системы возвращает ее обратно в стационарное состояние. Но если система стартует из любой точки вне горизонтальной оси, вне зависимости от того, насколько эта точка находится близко к горизонтальной оси, то динамика системы уводит ее прочь от стационарного состояния. Система взрывается в том смысле, что y_2 стремится к бесконечности при t, стремящемся к бесконечности.

Этот случай называется *седловой устойчивостью.* Смысл этого названия в аналогии с шариком на вершине седла. На седле есть только одна точка, на которую можно поставить шарик и он будет неподвижен. Эта точка соответствует стационарному состоянию. На седле есть одна траектория с тем свойством, что если на любую точку этой траектории поставить шарик, то он скатится в стационарное состояние. Если же шарик поставить на любую другую точку седла, то он упадет на землю.

Заслуживают внимания два наблюдения относительно показанных на рис. П.6 траекторий движения. Во-первых, ни одна из траекторий не пересекает другую. Во-вторых, имеется только две траектории, которые проходят через стационарное состояние, одна из них является седловой траекторией (ведущей в стационарное состояние, горизонтальная ось), а вторая - неустойчивая траектория, соответствующая вертикальной оси. Эти траектории называются *устойчивой ветвью* и *неустойчивой ветвью* соответственно.

На рис. П.6 показана динамика экономики для всех возможных точек. Путь, по которому пойдет экономика, зависит от двух граничных условий, которые должны быть определены. Для примера возьмем в качестве начального условия $y_1(0) = 1$, а в качестве терминального $\lim_{t\to\infty}[y_2(t)] = 0$. Начальное условие говорит нам о том, что экономика стартует в любой точке вертикальной прямой $y_1 = 1$ (см. рис. П.6). Среди всех возможных точек на этой прямой только одна на горизонтальной оси -- имеет свойство сходимости y_2 к 0 при стремлении времени к бесконечности. Следовательно, терминальное условие только подтверждает, что стартовой точкой для этой экономики является $y_2(0) = 0$ справа на устойчивой ветви.

Симметричным образом случай $a_{11} > 0$ и $a_{22} < 0$ также демонстрирует седловую устойчивость. Но есть одно отличие: горизонтальная ось будет неустойчивой, а вертикальная - устойчивой.

Ключевым наблюдением данного раздела является то, что если соответствующая системе ОДУ матрица диагональна, то ее устойчивость зависит от знаков коэффициентов: оба положительны — система неустойчива; оба отрицательны — система устойчива. Если они имеют противоположные знаки, то система имеет седловую устойчивость.

Недиагональный пример. В случае недиагональной системы ОДУ, мы делаем точно такие же шаги построения фазовой диаграммы. Рассмотрим пример

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0{,}06 \cdot y_1(t) - y_2(t) + 1{,}4; \\ \dot{y}_2 &= -0{,}04 \cdot y_1(t) + 0{,}04, \end{aligned} \tag{П.21}$$

с граничными условиями

$$y_1(0) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t \to \infty} [e^{-0{,}06t} \cdot y_1(t)] = 0.$$

График $\dot{y}_1 = 0$ является прямой $y_2 = 1{,}4 + 0{,}06 \cdot y_1$ с наклоном вверх. Если начать движение из точки, расположенной на графике $\dot{y}_1 = 0$ и немного увеличить y_1, то правая часть первого уравнения системы (П.21) возрастет. Следовательно, $\dot{y}_1$ становится положительной и y_1 возрастает в данной области. Поэтому стрелки в этой области направлены на восток. Симметричным образом стрелки направлены на запад для точек слева от графика $\dot{y}_1 = 0$.

График $\dot{y}_2 = 0$ представляет собой вертикальную прямую $y_1 = 10$, т. е. местоположение этих точек не зависит от y_2. Из уравнения (П.21) следует, что если y_1 растет, то $\dot{y}_2$ снижается. Следовательно, справа от графика $\dot{y}_2 = 0$ производная $\dot{y}_2$ отрицательна и стрелки направлены на юг. Слева ситуация противоположна.

Указанные две прямые разделяют пространство на четыре области, обозначенные от 1 до 4 на рис. П.7, *а*. Точка пересечения прямых — стационарное состояние, которому соответствуют значения $y_1^* = 10$ и $y_2^* = 2$. В области 1 объединенные стрелки направлены на юго-запад, в области 2 — на северо-запад, в области 3 — на северо-восток, и в области 4 — на юго-восток.

Для того чтобы оценить устойчивость системы, нам, по сути, следует ответить на вопрос: в скольких из указанных четырех областей стрелки ведут систему в направлении стационарного состояния? Если ответ — две, то система имеет седловую устойчивость, а седловая траектория расположена в этих двух областях.

Как следует из рис. П.7, *а*, система может двигаться в направлении стационарного состояния тогда и только тогда, когда она стартует в областях 1 и 3. Поэтому данная система устойчива седловым образом. Седловая траектория, расположенная в областях 1 и 3, проходит через стационарное состояние. Если система стартует на этой траектории, то она сходится к стационарному состоянию. Если же она стартует немного выше седловой траектории в области 3 — скажем, в точке x_0 на рис. П.7. *а*, — то она некоторое время будет двигаться по стрелкам на северо-восток, но затем пересечет прямую $y_1^* = 0$ и далее система будет уходить от стационарного состояния на северо-запад. Аналогично система уходит от стационарного состояния, если она стартует из области 3 ниже устойчивой ветви. На самом деле система уходит от стационарного состояния, стартуя из любой точки вне устойчивой ветви.

Точная траектория, по которой движется система, определяется граничными условиями. В данном примере определено одно начальное условие и одно терминальное. Начальное условие означает, что система стартует из некоторой точки на вертикальной прямой $y_1 = 1$. Терминальное условие означает, что произведение y_1 на множитель, убывающий до 0 с темпом 0.06 в год при стремлении времени t к бесконечности, стремится к 0. Если система окажется в стационарном состоянии, то y_1 будет константой, так что произведение константы и множителя, стремящегося к нулю, будет нулевым. Следовательно, терминальное условие будет выполнено в случае, если y_1 стремится к константе в долгосрочной перспективе. Если система не завершает свое движение в стационарном состоянии, то y_1 будет возрастать или убывать со строго возрастающим темпом. (Стрелки уводят экономику прочь от оси $\dot{y}_1 = 0$, так что значение y_1 увеличивается с возрастающим темпом.) Так как произведение множителя, который уменьшается с темпом 0.06 в год, и множителя, абсолютное значение которого растет со строго возрастающими темпами, не равно 0, то терминальное условие означает требование приведение системы в стационарное состояние. Отсюда следует, что в силу того что $y_1(0)$ находится не в стационарном состоянии, соответствующее значение $y_2(0)$ должно быть таким, чтобы система находилась на устойчивой ветви, как показано на рис. П.7. *а*.

Предположим, что мы стерли нормальные оси и графики $\dot{y}_1 = 0$ и $\dot{y}_2 = 0$, как показано на рис. П.7. *б*. У нас остались устойчивая ветвь (со стрелками, направленными в стационарное состояние) и неустойчивая ветвь (со стрелками, направленными от стационарного состояния). Эти две прямые разбивают пространство на четыре области с соответствующей динамикой, которую представляют стрелки. Отметим похожесть рис. П.7. *б* и П.6. По сути, мы можем считать рис. П.7. *б* искаженной версией рис. П.6. Это позволит нам интерпретировать аналитические решения этих систем.

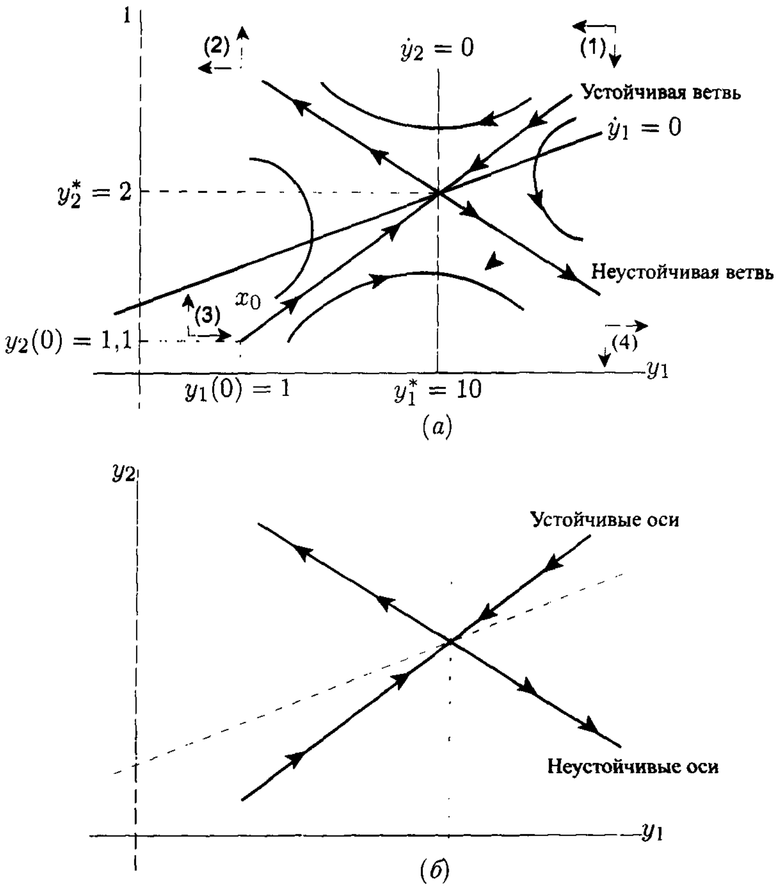


Рис. П.7. (*а*) **Фазовая диаграмма для нелинейного примера с устойчивостью седлового типа.** Здесь показана фазовая диаграмма для системы уравнений (П.21). Система устойчива в седловом смысле. (*б*) **Устойчивая ветвь и неустойчивая ветвь.** Этот рисунок получен из рис. П.7, *а* путем стирания графиков $\dot{y}_1 = 0$, $\dot{y}_2 = 0$ и нормальных осей. Оставлены устойчивая и неустойчивая ветви

Нелинейный пример. В заключение данного раздела, посвященного фазовым диаграммам, приведем нелинейный пример. Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{k}(t) = k(t)^{0,3} - c(t); \tag{П.22}$$

$$\dot{c}(t) = c(t) \cdot [0{,}3 \cdot k(t)^{-0,7} - 0{,}06], \tag{П.23}$$

с граничными условиями

$$k(0) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty}[e^{-0.06t} \cdot k(t)] = 0.$$

Основным отличием этой системы от рассмотренных ранее является то, что теперь мы имеем дело с нелинейными функциональными формами. Однако для построения фазовых диаграмм нелинейных систем необходимо следовать в точности тем же самым шагам, что и ранее.

Кривая $\dot{k} = 0$ задается, как следует из уравнения (П.22), функцией $c = k^{0,3}$. Если мы отложим значения k по горизонтальной оси координат, а значения c — по вертикальной, то данная кривая представляет собой вогнутую кривую с наклоном вверх, как показано на рис. П.8. Рассмотрим точку, расположенную немного правее кривой $\dot{k} = 0$, т. е. с немного большим значением k и тем же значением c. Из уравнения (П.22) следует, что значение правой части немного увеличилось в новой точке; следовательно, производная $\dot{k}$ должна быть положительной. Таким образом, k растет справа от графика $\dot{k} = 0$ и стрелки там направлены на восток. Симметричным образом можно показать, что слева от графика $\dot{k} = 0$ стрелки направлены на запад.

График $\dot{c} = 0$, как следует из уравнения (П.23), задается вертикальной прямой $k = 10$ (см. рис. П.8). Рассмотрим точку справа от $\dot{c} = 0$, т. е. точку с тем же значением c, но большим значением k. Из уравнения (П.23) следует, что $\dot{c} < 0$; следовательно, стрелки направлены на юг. Аналогично слева от $\dot{c} = 0$ стрелки направлены на север.

Теперь мы можем объединить динамику k и c. Стационарным состоянием здесь будет точка пересечения графиков $\dot{k} = 0$ и $\dot{c} = 0$ с координатами $k^* = 10$ и $c^* = 2$. На рис. П.8 показано, что, исходя из направления стрелок, система достигает стационарного состояния только из областей 1 и 3. Из чего мы заключаем, что система имеет устойчивость седлового типа. Устойчивая ветвь в данном случае не является линейной функцией. Однако она, как и прежде, проходит через области 1 и 3 и через стационарное состояние. Неустойчивая ветвь проходит через области 2 и 4.

Как и ранее, используем граничные условия для селекции той траектории, по которой система будет двигаться. Например, граничные условия могут гарантировать, что система начнет движение на устойчивой ветви и, следовательно, достигнет со временем своего стационарно состояния.

Аналитические решения линейных однородных систем. Теперь рассмотрим вопрос об аналитическом решении систем линейных

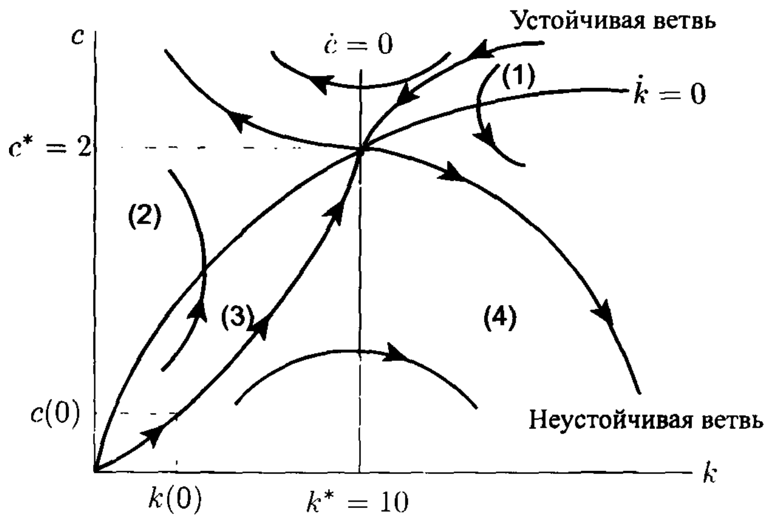


Рис. П.8. Фазовая диаграмма нелинейной модели. Здесь показана фазовая диаграмма для системы уравнений (П.22) и (П.23). Эта система имеет седловую устойчивость

ОДУ. Мы начнем рассмотрение с однородного случая в силу того что решение в общем случае имеет сложную систему обозначений. Однородность означает, что вектор $x(t)$ в уравнении (П.19) равен 0, так что система имеет вид

$$\dot{y} = A \cdot y(t). \tag{П.24}$$

где $y(t)$ - $n \times 1$ вектор-столбец функций времени $y_i(t)$; A - $n \times n$ матрица постоянных коэффициентов; $\dot{y}(t)$ - вектор производных по времени, соответствующих $y(t)$.

Предположим, что существует такая $n \times n$ матрица V, что если мы умножим A на V^{-1} слева и на V справа, то получим диагональную $n \times n$ матрицу:

$$V^{-1}AV = D. \tag{П.25}$$

где D квадратная матрица, в которой все внедиагональные элементы — нули. В разд. П.5 показано, что V и D могут существовать: они являются матрицей собственных векторов и диагональной матрицей собственных значений матрицы A соответственно[1].

Определим переменную $z(t)$ следующим образом:

$$z(t) = V^{-1} \cdot y(t).$$

[1] Достаточным условием того, чтобы матрица A была диагонализируемой, является то, что все собственные значения этой матрицы попарно различны. В этом случае собственные векторы линейно независимы, так что $\det(V) \neq 0$ и V^{-1} существует.

Так как V^{-1} — матрица констант, то $\dot{z}(t) = V^{-1} \cdot \dot{y}(t)$. Тогда мы можем сделать замену переменных в уравнении (П.24):

$$\dot{z}(t) = V^{-1} \cdot \dot{y}(t) = V^{-1}A \cdot y(t) = V^{-1}AVV^{-1} \cdot y(t) = D \cdot z(t). \qquad (\text{П.26})$$

Система состоит из n одномерных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \alpha_1 \cdot z_1(t); \\ \dot{z}_2(t) &= \alpha_2 \cdot z_2(t); \\ &\dots \\ \dot{z}_n(t) &= \alpha_n \cdot z_n(t). \end{aligned} \qquad (\text{П.27})$$

В разд. П.1.2 мы показали, что решение каждого из этих дифференциальных уравнений имеет вид $z_i(t) = b_i \cdot e^{\alpha_i t}$, где каждый коэффициент b_i является произвольной константой интегрирования, т. е. определяется граничными условиями (см. (П.11)). В матричном обозначении это решение имеет вид

$$z(t) = Eb, \qquad (\text{П.28})$$

где E - диагональная матрица с $e^{\alpha_i t}$ на i-м месте диагонали; b – вектор-столбец констант b_i.

Переходя обратно от переменных z к переменным y, т. е. используя равенство $y = Vz$, получаем решение для y:

$$y = VEb,$$

или в нематричной записи

$$y_i(t) = v_{i1}e^{\alpha_1 t} \cdot b_1 + v_{i2}e^{\alpha_2 t} \cdot b_2 + \ldots + v_{in}e^{\alpha_n t} \cdot b_n. \qquad (\text{П.29})$$

Подводя итог, можно сказать, что метод решения системы уравнений вида (П.24) заключается в следующем:

1) находим собственные значения матрицы A, обозначаем их символами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$;
2) находим соответствующие собственным значениям собственные векторы и составляем из них, как из столбцов, матрицу V;
3) решение принимает вид (П.29);
4) используем граничное условие для определения произвольных констант интегрирования (b_i).

Связь между графическим решением и аналитическим. Свяжем теперь графическое и аналитическое решения друг с другом. Вспомним, что когда мы строили фазовую диаграмму, мы обратили внимание на то, что если мы сотрем оси и графики $\dot{y}_i = 0$ и посмотрим на оставшуюся картину на рис. П.7, *б*, то поймем, что перед нами искаженная версия рис. П.6, для которого матрица A диагональна. Мы видели также, что аналитическое решение содержит диагональную матрицу собственных значений. Эти общие черты не случайны: когда мы диагонализируем матрицу, мы неявно находим множество осей координат (или векторов базиса), в которых линейная система, представленная матрицей A, может быть выражена как диагональная матрица (см. разд. П.5). Новые оси координат являются собственными векторами, а элементы соответствующей диагональной матрицы — собственными значениями.

Графическое решение системы уравнений, по сути, то же. Устойчивая и неустойчивая ветви соответствуют двум собственным векторам. Если считать эти две ветви новым набором осей координат, т. е. если стереть старые оси и графики $\dot{y}_i = 0$, то старая матрица A будет записана в виде диагональной матрицы собственных значений. Соответственно фазовая диаграмма для недиагонального случая выглядит как искаженная версия диагонального случая.

Устойчивость. Вернемся теперь к тому, что для диагональных примеров свойства устойчивости зависят от знака диагональных элементов. Поэтому не удивительно, что свойства устойчивости недиагональной системы также зависят от знаков ее собственных значений. При этом возможны следующие случаи.

1. Оба собственных значения *вещественны* и *положительны*. В этом случае система неустойчива.

2. Оба собственных значения *вещественны* и *отрицательны*. В этом случае система устойчива.

3. Два собственных значения *вещественны*, но имеют *противоположные знаки*. В этом случае система устойчива в седловом смысле. Более того, когда система имеет седловую устойчивость, ***устойчивая ветвь соответствует собственному вектору, который связан с отрицательным собственным значением***[1]. Аналогичным образом, неустойчивая ветвь соответствует собственному вектору, который связан с положительным собственным значением. Интуитивно ясно, что оси координат, соответствующие диагональной матрице, задаются собственными векторами. Как мы видели в примерах, когда система диагональна, ось координат, связанная с отрицательной компонентой диагональной мат-

[1] На протяжении всей книги мы будем использовать термин *отрицательный собственный вектор*, подразумевая собственный вектор, который соответствует отрицательному собственному значению.

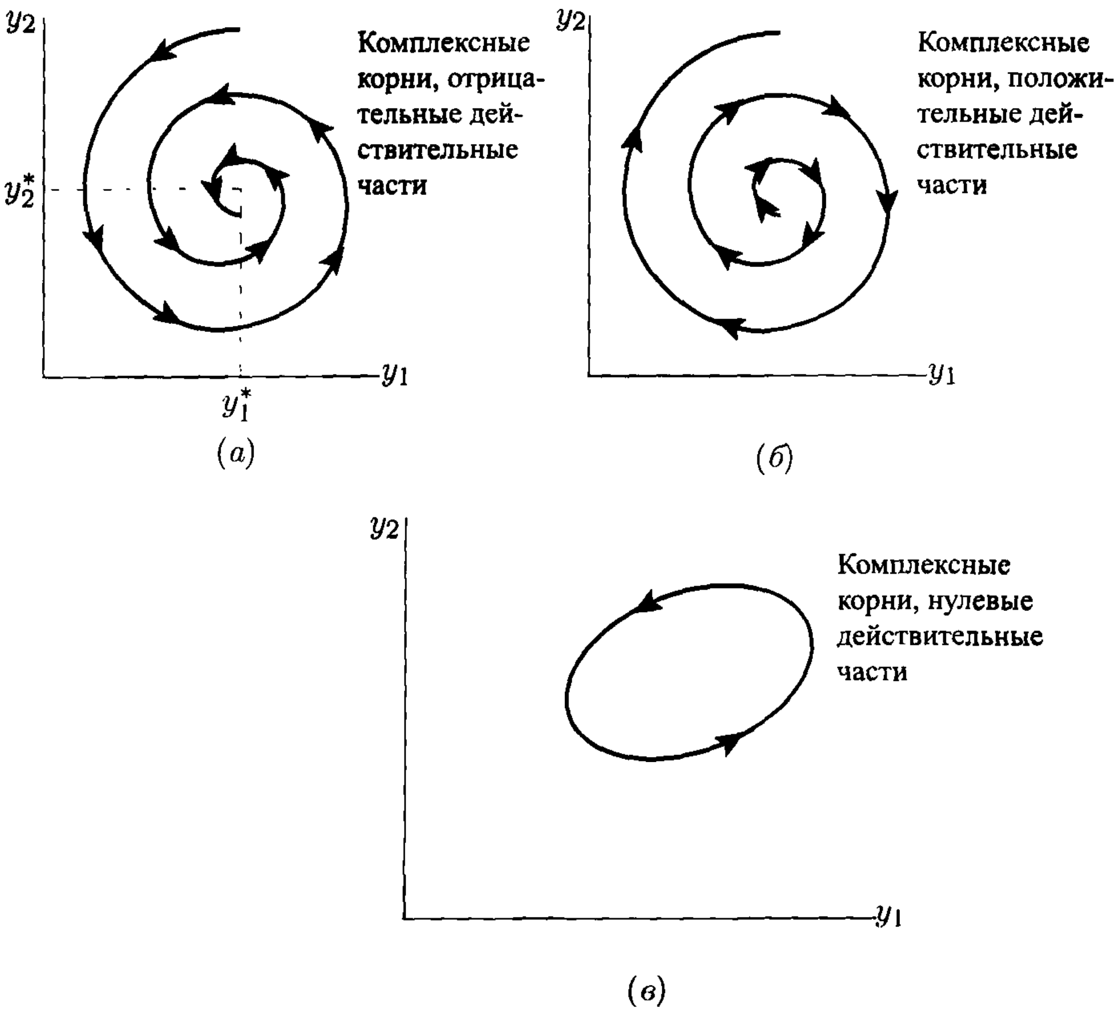


Рис. П.9. (*а*) **Устойчивая осциллирующая динамика.** Если оба собственных значения являются комплексными числами с отрицательными действительными частями, то система сходится к стационарному состоянию, осциллируя. (*б*) **Неустойчивая осциллирующая динамика.** Если оба собственных значения являются комплексными числами с положительными действительными частями, то система удаляется от стационарного состояния, осциллируя. (*в*) **Осциллирующая динамика.** Если оба собственных значения комплексны с нулевыми действительными частями, то все траектории представляют собой эллипсы вокруг стационарного состояния. Эта система не сходится и не расходится

рицы, является устойчивой ветвью, а ось, связанная с положительной компонентой, является неустойчивой ветвью.

4. Оба собственных значения являются *комплексными* числами с *отрицательными действительными частями.* В этом случае система сходится к стационарному состоянию осциллирующим образом (рис. П.9, *а*).

5. Оба собственных значения *комплексны* с *положительными действительными частями*. Система неустойчива и осциллирует, как показано на рис. П.9, *б*.

6. Оба собственных значения *комплексны* с *нулевыми действительными частями*. В этом случае траектории являются эллипсами вокруг стационарного состояния, как показано на рис. П.9, *с*.

7. Собственные значения *равны* друг другу. В этом случае матрица собственных векторов не может быть обращена, так что аналитическое решение, о котором говорилось ранее в данном разделе, здесь нельзя применить. В этом случае решение имеет вид

$$y_i(t) = (b_{i1} + b_{i2} \cdot t) \cdot e^{\alpha t},$$

где b_{i1} и b_{i2} — функции констант интегрирования и коэффициентов матрицы A, а α — собственное значение, которое в данном случае единственно. Решение устойчиво, если $\alpha < 0$ и неустойчиво, если $\alpha > 0$.

Следует отметить, что в нелинейных системах присутствует еще один тип равновесия, называемый *предельный цикл*. Устойчивый предельный цикл — это такой цикл, к которому траектории сходятся, неустойчивый — от которого траектории расходятся.

Свойства устойчивости систем большей размерности аналогичны. Если все собственные значения положительны, то система неустойчива. Если все собственные значения отрицательны, то система устойчива. Если собственные значения имеют разные знаки, то система имеет седловую устойчивость. В силу того что, как было установлено выше, устойчивая ветвь соответствует собственным векторам, связанным с отрицательными значениями, размерность устойчивой ветви равна числу отрицательных собственных значений. Например, для системы с размерами 3×3 с одним отрицательным собственным значением устойчивая ветвь является прямой линией, проходящей через стационарное состояние и соответствующей отрицательному собственному вектору. Если система имеет два отрицательных собственных значения, то стационарное многообразие представляет собой плоскость, проходящую через стационарное состояние. Эта плоскость образуется двумя отрицательными собственными векторами. В случае системы с размерами $n \times n$ устойчивая ветвь (иногда называемая *устойчивым многообразием*) является гиперплоскостью, образованной соответствующими собственными векторами, которая имеет размерность, равную числу отрицательных собственных значений.

Аналитические решения линейных неоднородных систем. Рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}(t) = A \cdot y(t) + x(t), \tag{П.30}$$

где $y(t)$ - $n \times 1$ вектор функций времени; $\dot{y}(t)$ - соответствующий вектор производных по времени; A - $n \times n$ матрица констант; $x(t)$ - $n \times 1$ вектор известных функций времени, которые могут быть константами. Процесс поиска решений уравнения (П.30) подобен тому, что мы использовали для однородного случая. Начнем, как и ранее, с построения матрицы V из собственных векторов матрицы A так, чтобы $V^{-1}AV$ стала диагональной матрицей D, состоящей из собственных значений A. Преобразуем систему посредством умножения всех членов уравнения на V^{-1} слева и, сделав замену $z \equiv V^{-1}y$, имеем:

$$\dot{z} = V^{-1}\dot{y} = V^{-1} \cdot (Ay + x) = V^{-1}AVV^{-1}y + V^{-1}x = Dz + V^{-1}x.$$

Это матричное уравнение определяет систему, состоящую из n линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{z}_i(t) = \alpha_i \cdot z_i(t) + V_i^{-1} \cdot x(t),$$

где V_i^{-1} - i-я строка матрицы V^{-1}. Как мы видели в разд. П.2.2. решение каждого из этих линейных ОДУ с постоянными коэффициентами имеет вид (П.11):

$$z_i(t) = e^{\alpha_i t} \cdot \int e^{-\alpha_i \tau} \cdot V_i^{-1} \cdot x(\tau) \cdot d\tau + e^{\alpha_i t} \cdot b_i.$$

$i = 1, \dots, n$, где b_i - произвольная константа интегрирования. Запишем эти решения в матричном обозначении:

$$z = E\hat{X} + Eb, \tag{П.31}$$

где E - диагональная матрица множителей $e^{\alpha_i t}$; $\hat{X}$ - вектор-столбец, элементами которого являются интегралы вида

$$\int e^{-\alpha_i \tau} \cdot V_i^{-1} \cdot x(\tau) \cdot d\tau;$$

b - вектор-столбец произвольных констант. После того как траектория z найдена, мы можем найти траекторию y умножением z на V слева.

В качестве примера рассмотрим систему ОДУ, заданную уравнением (П.21). В матричной записи эта система может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}06 & -1 \\ -0{,}004 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}04 \end{bmatrix} \tag{П.32}$$

с граничными условиями $y_1(0) = 1$ и

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-0,06t} \cdot y_1(t)] = 0.$$

Здесь x вектор констант. В разд. П.5 мы покажем, как найти собственные значения и собственные векторы матрицы A. Диагональная матрица собственных значений D и матрица собственных векторов V в данном случае имеют вид

$$D = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,04 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$\text{и} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1/0,14 & -1/0,14 \\ 0,04/0,14 & 1/0,14 \end{bmatrix}.$$

Определим

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} = V^{-1} \cdot \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}.$$

Тогда в новых переменных система имеет вид:

$$\dot{z}_1 = 0,1 \cdot z_1 + \frac{10}{14}; \quad \dot{z}_2 = -0,04 \cdot z_2 + \frac{9,6}{14},$$

т. е. в виде системы дифференциальных уравнений, которую мы можем решить (см. разд. П.2.2):

$$z_1(t) = \frac{-100}{14} + b_1 e^{0,1\cdot t}; z_2(t) = \frac{-240}{14} + b_2 e^{-0,04\cdot t},$$

где b_1 и b_2 — константы интегрирования, которые определяются граничными условиями. Вернемся от новых переменных z_1 и z_2 к старым y_1 и y_2 посредством умножения z на V, имеем:

$$y_1 = 10 + b_1 e^{0,1t} + b_2 e^{-0,04t}, \tag{П.33}$$

$$y_2 = 20 - 0,04 \cdot b_1 e^{0,1t} + 0,1 \cdot b_2 e^{-0,04t}. \tag{П.34}$$

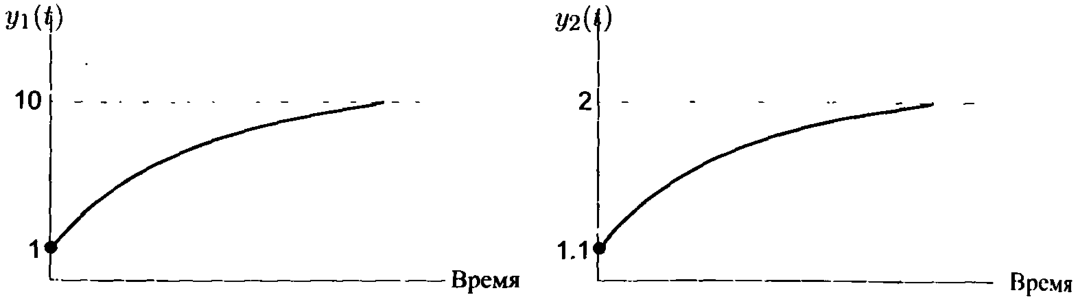
Теперь нам необходимо определить значения констант b_1 и b_2. Из начального условия $y_1(0) = 1$ следует $b_1 + b_2 = -9$. Умножим обе части уравнения (П.33) на $e^{-0,06\cdot t}$, перейдем к пределу, устремив t к бесконечности, и воспользуемся граничным условием

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-0,06t} \cdot y_1(t)] = 0,$$

тогда получим

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-0,06\cdot t} \cdot y_1(t)] = \lim_{t\to\infty}\left[10 \cdot e^{-0,06\cdot t} + b_1 e^{0,04\cdot t} + b_2 \cdot e^{-0,1\cdot t}\right] = 0.$$

Первое и третье слагаемые в промежуточном выражении стремятся к 0 при стремлении t к бесконечности, но второе слагаемое стремится к



(*а*) (*б*)

Рис. П.10. (*а*) **Решение для** $y_1(t)$. На этом рисунке показано решение системы уравнений (П.32) для $y_1(t)$. (*б*) **Решение для** $y_2(t)$. Здесь показано решение системы уравнений (П.32) для $y_2(t)$

бесконечности, если константа b_1 не равна 0. Следовательно, условием для того, чтобы все выражение равнялось нулю, является $b_1 = 0$, из чего следует $b_2 = -9$. В итоге, точное решение системы ОДУ имеет вид

$$y_1(t) = 10 - 9 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t},$$
$$y_2(t) = 2 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}.$$

Отметим, что $y_1(t)$ равно 1 при $t = 0$, растет со временем и асимптотически сходится к своему стационарному значению, $y_1^* = 10$ (см. рис. П.10, *а*). Переменная y_2 равна 1,1 при $t = 0$, растет со временем и асимптотически сходится к своему стационарному значению $y_2^* = 2$ (см. рис. П.10, *б*). Другими словами, граничные условия определяют такое начальное значение y_2, из которого система сходится к своему стационарному состоянию. В терминах рис. П.7, *а* значение $y_2(0)$ выбрано так, чтобы система оказалась на устойчивой ветви. В начальной точке

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$$

вектор, направленный в стационарное состояние, равен

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}1 \end{bmatrix},$$

после нормирования первого элемента единице. Этот собственный вектор соответствует отрицательному собственному значению. Следовательно, как говорилось ранее, устойчивая ветвь проходит через стационарное состояние и соответствует собственному вектору, связанному с отрицательным собственным значением.

Линеаризация нелинейных систем. Многие системы ОДУ, появляющиеся в данной книге, нелинейны. В таком случае мы можем использовать рассмотренный выше метод фазовых диаграмм или линейно аппроксимировать уравнения посредством разложения в ряд Тейлора.

Рассмотрим следующую систему ОДУ:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= f^1[y_1(t), \dots, y_n(t)];\\
\dot{y}_2(t) &= f^2[y_1(t), \dots, y_n(t)];\\
&\dots\\
\dot{y}_n(t) &= f^n[y_1(t), \dots, y_n(t)],
\end{aligned}
\tag{П.35}
$$

где функции $f^1(\cdot), f^2(\cdot), \dots, f^n(\cdot)$ нелинейны. Мы можем использовать разложение этих функций по формуле Тейлора для изучения динамики системы в окрестности стационарного состояния. (Теорема Тейлора описана в разд. П.6.2.) Разложение первого порядка имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= f^1(\cdot) + (f^1)_{y_1}(\cdot)\cdot(y_1 - y_1^*) + \dots +\\
&+ \quad (f^1)_{y_n}(\cdot)\cdot(y_n - y_n^*) + R_1;\\
&\dots\\
\dot{y}_n(t) &= f^n(\cdot) + (f^n)_{y_1}(\cdot)\cdot(y_1 - y_1^*) + \dots +\\
&+ \quad (f^n)_{y_n}(\cdot)\cdot(y_n - y_n^*) + R_n,
\end{aligned}
\tag{П.36}
$$

где $f^1(\cdot), \dots, f^n(\cdot)$ значения функций $f^1(\cdot), \dots, f^n(\cdot)$ в стационарном состоянии, и $(f^1)_{y_i}(\cdot), \dots, (f^n)_{y_i}(\cdot)$ частные производные по y_i в стационарном состоянии. R_i остаточные члены формулы Тейлора. Если система близка к своему стационарному состоянию, то эти остаточные члены малы и их можно отбросить. Преимуществом линеаризации в окрестности стационарного состояния является то, что, по определению стационарного состояния, первый элемент в каждом уравнении — $f^1(\cdot), \dots, f^n(\cdot)$ - равен 0, т. е. стационарное значение производной $\dot{y}_i$ равно 0 для всех i.

Линеаризованная система уравнений (П.36) в матричной записи принимает вид

$$
\dot{y} = A\cdot(y - y^*),
\tag{П.37}
$$

где A $n \times n$ матрица констант, которые являются первыми частными производными, вычисленными в стационарном состоянии. Эта линейная система подобна той, которую мы анализировали в предыдущих разделах.

Рассмотрим пример системы нелинейных уравнений, которую мы уже исследовали графически:

$$\dot{k} = k^{0,3} - c; \tag{П.22}$$

$$\dot{c} = c \cdot (0{,}3 \cdot k^{-0,7} - 0{,}06). \tag{П.23}$$

с граничными условиями

$$k(0) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} [e^{-0.06t} \cdot k(t)] = 0.$$

Стационарные значения $k^* = 0$ и $c^* = 2$. Мы можем линеаризовать эту систему следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= 0{,}3 \cdot (k^*)^{-0,7} \cdot (k - k^*) - (c - c^*) = 0{,}06 \cdot k - c + 1{,}4; \\ \dot{c} &= c^* \cdot [0{,}3 \cdot (-0{,}7) \cdot (k^*)^{-1,7}] \cdot (k - k^*) - 0 \cdot (c - c^*) = \\ &= -0{,}08 \cdot k + 0{,}08. \end{aligned} \tag{П.38}$$

Мы знаем, как решать эту линейную систему: на самом деле мы уже решили ее! Если мы поменяем обозначения k и c на y_1 и y_2 соответственно, то эта система совпадает с системой уравнений (П.32).

Для понимания происходящего, рассмотрим фазовую диаграмму, которую мы построили для нелинейной системы, определяемой уравнениями (П.22) и (П.23), и изображенную на рис. П.8. В окрестности стационарного состояния график $\dot{c} = 0$ представляет собой вертикальную прямую, а график $\dot{k} = 0$ можно аппроксимировать прямой с наклоном вверх. В случае если система близка к стационарному состоянию, такая аппроксимация весьма хороша. Но при удалении от стационарного состояния аппроксимация ухудшается, так как график $\dot{k} = 0$ строго вогнутый. Вблизи стационарного состояния динамика нелинейной системы близка к динамике линейной системы. Действительно, в стационарном состоянии нелинейная устойчивая ветвь соответствует отрицательному собственному вектору линеаризованной системы. Качественно эти две системы имеют схожие динамические свойства, как можно видеть из сравнения рис. П.7, *а*, и рис. П.8.

Метод исключения времени для нелинейных систем. В разд. П.2.3 мы видели, что одним из способов получения качественного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений является фазовая диаграмма. Недостатком графического подхода является то, что он не позволяет просчитать модель количественно. Далее в данном разделе мы получим аналитическое решение линеаризованной версии системы уравнений. Однако недостатком этого подхода является локальность количественных расчетов, допустимых только в виде аппроксимации в окрестности стационарного состояния. В данном разделе описывается метод определения глобального численного решения системы ОДУ. Этот метод дает точное решение при заданной конфигурации параметров.

Вновь рассмотрим систему нелинейных уравнений, состоящую из уравнений (П.22) и (П.23):

$$\dot{k}(t) = k(t)^{0.3} - c(t); \tag{П.22}$$

$$\dot{c}(t) = c(t) \cdot [0{,}3 \cdot k(t)^{-0{,}7} - 0{,}06], \tag{П.23}$$

с граничными условиями

$$k(0) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t \to \infty} [e^{-0.06t} \cdot k(t)] = 0.$$

Фазовая диаграмма этой системы показана на рис. П.8. Если бы мы знали начальные значения $c(0)$ и $k(0)$, то стандартные численные методы решения дифференциальных уравнений позволили бы нам построить полные траектории c и k интегрированием уравнений (П.22) и (П.23) по времени[1].

Проблема в том, что $c(0)$ неизвестно. Вместо этого задано условие трансверсальности, ограничение, согласно которому начальное значение $c(0)$ должно находиться на устойчивой ветви. Необходимо выразить это условие в терминах требуемого значения $c(0)$. Типичный способ решения этой задачи основан на методе *пристрелки*. Метод состоит в следующем. Зададимся некоторым значением $c(0)$ и построим описываемые дифференциальными уравнениями (П.22) и (П.23) траектории.

---

[1] Когда граничные условия задачи имеют вид множества зафиксированных в один момент времени значений всех переменных, тогда мы называем такую задачу *задачей с начальными условиями*. Например, данная задача будет задачей с начальными условиями, если мы заменим условие трансверсальности

$$\lim_{t \to \infty} [e^{-0.06t} \cdot k(t)] = 0$$

на некоторое значение для $c(0)$. В противоположность этому, задача, в которой граничные условия применены в различные моменты времени, называется *задачей с граничными условиями*. Данная система является задачей с граничными условиями, потому что у нас есть начальное условие $k(0) = 1$ при $t = 0$ и терминальное условие

$$\lim_{t \to \infty} [e^{-0.06t} \cdot k(t)] = 0 \quad \text{при} \quad t = \infty.$$

Решать задачи с начальными условиями численными методами существенно легче.

Затем проверим, достигают ли эти траектории стационарного состояния и, следовательно, удовлетворяют условию трансверсальности. Если траектория проходит мимо стационарного состояния — как это и будет, скорее всего, при первой попытке, — то система, в конце концов, уходит от стационарного состояния навсегда. В этом случае скорректируем значение $c(0)$, уменьшив его предполагаемое значение, в случае если оно было слишком большим, и увеличим, если было слишком малым. Многократная итерация в таком духе приведет к аппроксимации правильного значения $c(0)$.

Mulligan and Sala-i-Martin (1991) разработали более эффективный численный метод, называемый *метод исключения времени*. Основой метода является исключение переменной времени из уравнений так же, как мы это делали при построении фазовой диаграммы. Вспомним, что устойчивая ветвь на рис. П.8 выражает c как функцию k. В динамическом программировании эта функция иногда называется *функцией стратегии*. Допустим, что у нас есть функция стратегии в замкнутой форме, $c = c(k)$. В этом случае мы можем использовать уравнение (П.22) для того, чтобы выразить $\dot{k}$ как функцию k: $\dot{k} = k^{0.3} - c(k)$. Так как нам известно $k(0)$, то мы можем использовать стандартные численные методы для решения этого дифференциального уравнения первого порядка относительно k. А раз нам известна траектория движения для k, то мы можем определить и траекторию для c (в силу того что знаем функцию стратегии $c(k)$).

Метод исключения времени представляет собой численный механизм получения функции стратегии $c = c(k)$. Метод основан на том примечании, что угол наклона графика данной функции задается отношением $\dot{c}$ к $\dot{k}$:

$$\frac{dc}{dk} = c'(k) = \frac{\dot{c}}{\dot{k}} = \frac{c(k) \cdot [0.3 \cdot k^{-0.7} - 0.06]}{k^{0.3} - c(k)}. \qquad (\text{П}.39)$$

где мы использовали формулы для $\dot{k}$ и $\dot{c}$ из уравнений (П.22) и (П.23). Переменной времени в уравнении (П.39) нет: отсюда название «метод исключения времени».

Заметим, что уравнение (П.39) является дифференциальным уравнением относительно c, с производной dc/dk по k, а не по t. Для того чтобы решить это уравнение численно стандартными методами, нам понадобится одно граничное условие, т. е. нам необходимо знать одну точку (c, k), которая лежит на устойчивой ветви. Хотя нам неизвестна начальная пара $[c(0), k(0)]$, нам известно, что функция стратегии проходит через стационарное состояние (c^*, k^*). Поэтому мы можем начать движение из этой точки и затем решить уравнение (П.39) численно.

определив всю остальную функцию стратегии[1]. Отметим, что, исключив время, мы преобразовали трудную *задачу с граничными условиями* в более простую *задачу с начальными условиями*.

Прежде чем мы применим этот метод, обратим внимание еще на одну проблему. Угол наклона графика функции стратегии в стационарном состоянии равен

$$c'(k^*) = \frac{(\dot{c})^*}{(\dot{k})^*} = \frac{0}{0},$$

т. е. является неопределенностью. Существует два способа разрешить эту проблему. Первый — использовать правило Лопиталя для вычисления неопределенностей разного вида (см. разд. II.6.3). В данном примере применение правила Лопиталя приводит к

$$c'(k^*) = \frac{[c^* \cdot (-0{,}21) \cdot (k^*)^{-1{,}7}]}{[0{,}3 \cdot (k^*)^{-0{,}7} - c'(k^*)]},$$

откуда вытекает квадратное уравнение относительно $c'(k)$:

$$[c'(k^*)]^2 - [0{,}3 \cdot (k^*)^{-0{,}7}] \cdot c'(k^*) - 0{,}21 \cdot c^* \cdot (k^*)^{-1{,}7} = 0.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\begin{aligned} c'(k^*) &= \frac{1}{2}\Big[0{,}3 \cdot (k^*)^{-0{,}7} - \\ &\quad - \sqrt{[0{,}3 \cdot (k^*)^{-0{,}7}]^2 + 4 \cdot 0{,}21 \cdot c^* \cdot (k^*)^{-1{,}7}}\Big]; \qquad (\text{П}.40) \\ c'(k^*) &= \frac{1}{2}\Big[0{,}3 \cdot (k^*)^{-0{,}7} + \\ &\quad + \sqrt{[0{,}3 \cdot (k^*)^{-0{,}7}]^2 + 4 \cdot 0{,}21 \cdot c^* \cdot (k^*)^{-1{,}7}}\Big]. \qquad (\text{П}.41) \end{aligned}$$

Наличие двух решений связано с тем, что через стационарное состояние проходит две траектории: устойчивая и неустойчивая ветви. Фазовая диаграмма (рис. П.8) утверждает, что устойчивая ветвь имеет наклон вверх, а неустойчивая — вниз. Так как угол наклона устойчивой ветви в стационарном состоянии положителен, то он задается решением (П.41).

Второй способ вычисления стационарного состояния основан на понимании, что в стационарном состоянии функция стратегии соответствует отрицательному собственному вектору. Другими словами, угол

[1] Мы могли бы рассмотреть движение из стационарного состояния обратно во времени и решить исходную систему двух дифференциальных уравнений численно. Однако эта идея не проходит в силу того что $\dot{k}$ и $\dot{c}$ равны 0 в стационарном состоянии. Таким образом, если мы берем старт из стационарного состояния, то мы не знаем, как двигаться обратно во времени, т. е. мы не можем сказать, откуда пришли.

наклона отрицательного собственного вектора совпадает с углом наклона графика функции стратегии в стационарном состоянии. Следовательно, мы можем использовать это значение в качестве начального угла наклона и затем использовать уравнение (П.39) для вычисления всей функции стратегии. Преимущество метода, основанного на собственных значениях, относительно метода, основанного на правиле Лопиталя, в том, что не требуется знания качественной информации о знаке стационарного угла наклона.

Метод исключения времени может быть непосредственно расширен на системы трех дифференциальных уравнений с двумя управляющими переменными и одной переменной состояния (см. Mulligan and Sala-i-Martin, 1991, 1993). Рассмотрим нелинейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= c[c(t), u(t), k(t)]; \\ \dot{u}(t) &= u[c(t), u(t), k(t)]; \\ \dot{k}(t) &= k[c(t), u(t), k(t)], \end{aligned} \qquad (\text{П.42})$$

где $c(t)$, $u(t)$ – переменные управления; $k(t)$ – переменная состояния. Допустим, что заданы начальное значение $k(0)$ и два условия трансверсальности (при $t = \infty$). Предположим, что стационарными значениями являются c^*, u^* и k^*. Как и ранее, если бы мы знали $c(0)$ и $u(0)$, то мы могли бы найти решение уравнения (П.42) прямым интегрированием по времени. Однако нам неизвестны $c(0)$ и $u(0)$.

Временно представим себе, что у нас есть выражения в замкнутой форме для $c(k)$ и $u(k)$ – функции стратегии для данной задачи. В этом случае мы могли бы подставить эти две функции в уравнение $\dot{k}$ и получить одно дифференциальное уравнение относительно k. Так как нам известно $k(0)$, то траектория $k(t)$ для всего временного интервала была бы найдена интегрированием дифференциального уравнения по времени. А раз известна траектория движения k, то уже можно определить траектории для c и u подстановкой $k(t)$ в функции $c(t)$ и $u(t)$.

Метод исключения времени дает простой способ найти $c(k)$ и $u(k)$ численно. Используем ценное правило исчисления для исключения времени из уравнения (П.42) для того, чтобы получить углы наклона графиков функций $c(k)$ и $u(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dk} &= c'(k) = \frac{\dot{c}}{\dot{k}} = \frac{c[c(k), u(k), k]}{k[c(k), u(k), k]}; \\ \frac{du}{dk} &= u'(k) = \frac{\dot{u}}{\dot{k}} = \frac{u[c(k), u(k), k]}{k[c(k), u(k), k]}. \end{aligned} \qquad (\text{П.43})$$

Мы можем решить эту систему численно, используя стационарное состояние (c^*, u^*, k^*) в качестве начального условия. Стационарные углы наклона могут быть найдены с помощью правила Лопиталя или посредством вычисления углов наклона собственных векторов, связанных с отрицательным собственным вектором.

П.2. Статическая оптимизация

П.2.1. Максимизация без ограничений

Рассмотрим одномерную действительную функцию $u(\cdot)$. Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет локальный максимум в $\bar{\bar{x}}$, если для всех x в окрестности $\bar{\bar{x}}$ (т. е. для всех x в интервале $[\bar{\bar{x}} - \varepsilon, \bar{\bar{x}} + \varepsilon]$, где ε — некоторое положительное число) $u(\bar{\bar{x}}) \geqslant u(x)$. Будем говорить, что $u(x)$ имеет абсолютный максимум[1] в $\bar{\bar{x}}$, если для всех x в области определения u выполнено $u(\bar{\bar{x}}) \geqslant u(x)$.

Пусть $u(x)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой в замкнутом интервале $[a, b]$, и пусть $\bar{\bar{x}}$ будет локальным максимумом во внутренней области $[a, b]$. *Необходимым условием* того, чтобы точка $\bar{\bar{x}}$ была внутренним локальным максимумом, является равенство нулю первой производной $u(\cdot)$, взятой в точке $\bar{\bar{x}}$, $u'(\bar{\bar{x}}) = 0$, и неположительность второй производной, $u''(\bar{\bar{x}}) \leqslant 0$. Если $u'(\bar{\bar{x}}) = 0$ и $u''(\bar{\bar{x}}) \leqslant 0$, то $\bar{\bar{x}}$ является внутренним локальным максимумом. То есть если целевая функция строго вогнута (отрицательная вторая производная), то необходимое условие $u'(\bar{\bar{x}}) = 0$ является также и *достаточным условием*.

На практике для того чтобы найти максимум функции в некотором интервале, следует вычислить первую производную этой функции и найти такие значения x, для которых $u'(\bar{\bar{x}}) = 0$. Это условие дает нам некоторое количество подозрительных на экстремум точек, которые называются *критическими точками*. Затем мы берем вторую производную $u(\cdot)$ и вычисляем ее в критических точках. Если производная отрицательна, то критическая точка является локальным максимумом. Затем мы сравниваем значение $u(\bar{\bar{x}})$ со значениями функции на концах интервала a и b. Абсолютный максимум $u(\cdot)$ в интервале $[a, b]$ достигается в одной из критических точек $\bar{\bar{x}}$, a или b в зависимости от того, в какой точке значение функции больше.

---

[1] Функция $u(\cdot)$ достигает минимума в точке x, если $-u(\cdot)$ достигает максимума в этой точке. Следовательно, исследование минимума функции $u(\cdot)$ сводится к исследованию максимума $-u(\cdot)$.

В многомерном случае ситуация аналогична рассмотренному только что одномерному случаю. Рассмотрим функцию $u : R^n \to R$, дважды непрерывно дифференцируемую. Необходимым условием локального максимума функции $u(x)$ в $\bar{\bar{x}}$ (где x теперь n-мерный вектор, $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$) является равенство всех частных производных, вычисленных в $\bar{\bar{x}}$, нулю. Другими словами, так же как и в одномерном случае, функции «имеют плоско-горизонтальные вершины».

Необходимые условия не являются достаточными, так как локальные минимумы и седловые точки также удовлетворяют им. По аналогии с одномерным случаем, достаточным условием является строгая вогнутость функции u в критической точке[1].

П.2.2. Классическое нелинейное программирование: ограничения в виде равенств

Предположим, что мы хотим найти максимум функции $u : R^n \to R$ при наличии ограничения, которое заключается в том, что выбираемая точка лежит на плоскости, задаваемой уравнением $g(x) = a$, где $g : R^n \to R$ и x – n-мерный вектор $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$. То есть задача записывается следующим образом:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} [u(x_1, \ldots, x_n)] \quad \text{при наличии ограничения} \quad g(x_1, \ldots, x_n) = a. \tag{П.44}$$

Будем считать, что $u(\cdot)$ и $g(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Простейший способ решения этой задачи основан на том факте, что указанное ограничение является отдельной функцией $x \equiv \tilde{x}_1(x_2, \ldots, x_n)$. (Будем считать, что данное ограничение определяет единственное значение x_1 для заданных значений $x_2, \ldots, x_n$.) Мы можем подставить x_1

---

[1] Одним из способов проверки строгой вогнутости функции является исследование определенности матрицы Гессе (гессиана – матрицы вторых производных): если гессиан отрицательно определен, то функция u строго вогнута. Матрица *отрицательно определена* тогда и только тогда, когда все ее собственные значения отрицательны. Матрица *отрицательно полуопределена* тогда и только тогда, когда все ее собственные значения неположительны. Матрица *положительно определена* тогда и только тогда, когда все ее собственные значения положительны. Матрица *положительно полуопределена* тогда и только тогда, когда все ее собственные значения неположительны. Матрица не определена тогда и только тогда, когда ее собственные значения имеют не одинаковые знаки. Как мы уже обсуждали в предыдущем разделе, если мы хотим узнать знаки собственных значений, нам не обязательно вычислять их. Например, в случае 2×2 матрицы, если определитель матрицы отрицателен, то собственные значения имеют разные знаки, потому что определитель этой матрицы равен произведению ее собственных значений.

в $u(x)$ и получить функцию переменных $(x_2, \ldots, x_n)$:

$$u[\tilde{x}_1(x_2, \ldots, x_n), (x_2, \ldots, x_n)] \equiv \tilde{u}(x_2, \ldots, x_n). \tag{П.45}$$

Как мы только что упомянули, необходимым условием максимума в задаче без ограничений является равенство нулю всех частных производных функции. Взяв частные производные $u(\cdot)$ по каждому из аргументов x_i, $i = 2, \ldots, n$, мы обнаруживаем, что $u(\cdot)$ зависит от x_i как явно, так и неявно, через зависимость x_1 от x_i. Следовательно, необходимым условием максимума в задаче с ограничением является

$$\frac{\partial \tilde{u}(\cdot)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i} = 0, \tag{П.46}$$

$i = 2, \ldots, n$. Мы можем вычислить частные производные $\partial \tilde{x}_1 / \partial x_i$ воспользовавшись теоремой о неявной функции (см. разд. П.6.1),

$$\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_i} = - \frac{[\partial g(\cdot) \partial x_i]}{[\partial g(\cdot)/\partial x_1]}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (П.46), имеем

$$\frac{\partial g(\cdot)/\partial x_i}{\partial g(\cdot)/\partial x_1} = \frac{\partial u(\cdot)/\partial x_i}{\partial u(\cdot)/\partial x_1}. \tag{П.47}$$

Для того чтобы эти условия были выполнены, можно потребовать, чтобы каждая частная производная g по x_i была пропорциональна частной производной u по x_i, где коэффициент пропорциональности μ одинаков для всех i. Эти условия в матричной записи имеют вид

$$Du(x) = \mu \cdot Dg(x), \tag{П.48}$$

где x — n-мерный вектор; Dg и Du — векторы частных производных g и u по каждому их аргументу ($Dg \equiv [\partial g(\cdot)/\partial x_1, \ldots, \partial g(\cdot)/\partial x_n]$, и аналогично для Du). Векторы Dg и Du называются *градиентами* функций g и u соответственно. Градиент функции $u(\cdot)$ в точке $\bar{\bar{x}}$ — это вектор, перпендикулярный касательной линии к графику функции в этой точке (см. рис. П.11). В уравнении (П.48) утверждается, что необходимым условием того, чтобы в $\bar{\bar{x}}$ достигался максимум задачи с ограничением, является пропорциональность градиента ограничения градиенту целевой функции в этой точке. Коэффициент пропорциональности часто называется *множителем Лагранжа* μ. Если $u(\cdot)$ — функция полезности, $g(\cdot) = a$ — бюджетное ограничение (валовые расходы $g(\cdot)$ равны валовому доходу a), то уравнение (П.48) есть не что иное, как знакомое нам равенство предельных норм замещения предельным нормам преобразования (или относительным ценам).

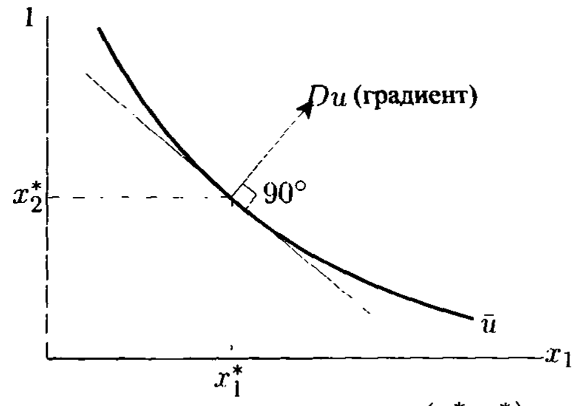


Рис. П.11. Решение задачи максимизации при ограничениях типа равенств. Рисунок иллюстрирует решение уравнения (П.48), содержащего множитель Лагранжа μ

Удобным способом вывода этих условий первого порядка является использование *функции Лагранжа* (*лагранжиана*), которая состоит из целевой функции плюс константа μ, умноженная на ограничение:

$$L(\cdot) = u(x_1, \ldots, x_n) + \mu \cdot [a - g(x_1, \ldots, x_n)]. \qquad (\text{П.49})$$

Условия первого порядка из уравнения (П.48) получаются посредством взятия производных функции Лагранжа по всем ее аргументам. Заметим, что производная по множителю Лагранжа дает нам исходное ограничение.

Чтобы дать экономическую интерпретацию множителю Лагранжа, рассмотрим изменение функции полезности $u(\cdot)$ при изменении дохода a. Общее изменение функции полезности дается формулой

$$\frac{du(\cdot)}{da} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial a},$$

где $\partial \bar{\bar{x}}_i / \partial a$ - изменение оптимального значения $\bar{\bar{x}}_i$ при ослаблении ограничения на величину ∂a. Мы можем использовать условия первого порядка (П.48), чтобы переписать данное выражение в виде

$$\frac{du(\cdot)}{da} = \sum_{i=1}^{n} \mu \cdot \frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial a}. \qquad (\text{П.50})$$

Если продифференцировать выражение для бюджетного ограничения по a, то получим

$$\frac{dg(\cdot)}{da} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\cdot)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial a = 1}.$$

Подставляя это уравнение в уравнение (П.50), имеем

$$\frac{du(\cdot)}{da} = \mu. \tag{П.51}$$

Другими словами, множитель Лагранжа μ представляет собой дополнительную полезность, которую получает экономический агент при ослаблении бюджетного ограничения на одну единицу. Множитель Лагранжа, в силу этого, часто называют *теневой ценой* или *скрытой стоимостью ограничения*. Эта интерпретация важна и часто упоминается в данной книге.

П.2.3. Ограничения в виде неравенств: условия Куна—Таккера

Допустим теперь, что экономический агент имеет m ограничений в виде неравенств

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Считаем, что все функции $g(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы, а все a_i константы. Задача может быть записана в виде

$$\begin{aligned} &\max x_1, \ldots, x_n \left[u(x_1, \ldots, x_n)\right] \text{ при ограничениях:} \\ &g_1(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a_1; \\ &\ldots \\ &g_m(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a_m. \end{aligned} \tag{П.52}$$

Большинство экономических ограничений можно записать в виде (П.52). Например, бюджетное ограничение не означает, что экономический агент должен тратить весь свой доход, но означает, что он не может потратить больше, чем его доход.

Простой способ решить систему (П.52) основан на использовании теоремы Куна-Таккера (Kuhn—Tucker, 1951). В теореме утверждается, что если $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$ является решением задачи (П.52)[1], то суще-

[1] Дополнительным условием здесь является требование линейной независимости градиентов ограничений.

ствует множество m множителей Лагранжа, таких что

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad Du(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot [Dg_i(\cdot)];\\
&(b) \quad g_i(\cdot) \leqslant a_i, \quad \mu_i \geqslant 0;\\
&(c) \quad \mu_i \cdot [a_i - g_i(\cdot)] = 0.
\end{aligned}
\tag{П.53}
$$

Условие (a) в (П.53) означает, что градиент целевой функции должен быть линейной комбинацией градиентов ограничений. Весовые коэффициенты в этой линейной комбинации суть множители Лагранжа. В частном случае, когда наличествует только одно ограничение, $m = 1$, это условие эквивалентно уравнению (П.48). Условие (b) в (П.53) означает, что для того, чтобы вектор $\bar{\bar{x}}$ был оптимумом, необходимо, чтобы он удовлетворял ограничениям и чтобы теневые цены были неотрицательны. То есть $Du(\cdot)$ принадлежит конусу, порожденному $Dg_i(\cdot)$.

Условие (c) в (П.53) называется обычно *условием дополняющей нежесткости*. Оно означает, что произведение теневой цены на ограничение равно 0. Это, в свою очередь, означает, что если ограничение $g_i(\cdot) - a_i$ не связывающее (т. е. оно не выполнено как равенство), то нулю должна быть равна теневая цена. То есть $Dg_i(\cdot)$ не имеет никакого веса в линейной комбинации, порождающей $Du(\cdot)$. И наоборот, если теневая цена строго положительна, то соответствующее ей ограничение должно быть связывающим[1].

Рассмотрим пример на рис. П.12. Здесь присутствуют два ограничения $g_1(\cdot) \leqslant a_1$ и $g_2(\cdot) \leqslant a_2$. Первое ограничение выделяет множество точек в пространстве, которое лежит между кривой, обозначенной g_1, и осями координат. Аналогично второе ограничение выделяет область между кривой g_2 и осями координат. Целевая функция может быть представлена множеством кривых безразличия, обозначенных u_i, которые возрастают в направлении северо-востока. Градиенты этих двух ограничений (направление которых перпендикулярно касательной в данной точке) обозначены Dg_1 и Dg_2. Условие (a) означает, что если $\bar{\bar{x}}$ точка оптимума, то градиент $u(\cdot)$ должен быть линейной комбинацией двух градиентов Dg_1 и Dg_2. Условие (b) означает, что весовые коэффициенты в линейной комбинации должны быть неотрицательны. Графически эти условия означают, что градиент u должен принадлежать конусу, образованному градиентами этих двух ограничений.

[1] Экономический смысл условия дополняющей нежесткости состоит в том, что если ограничение не связывающее (т. е. если оно не существенно) и мы ослабили его на одну единицу, то итоговая полезность не изменится.

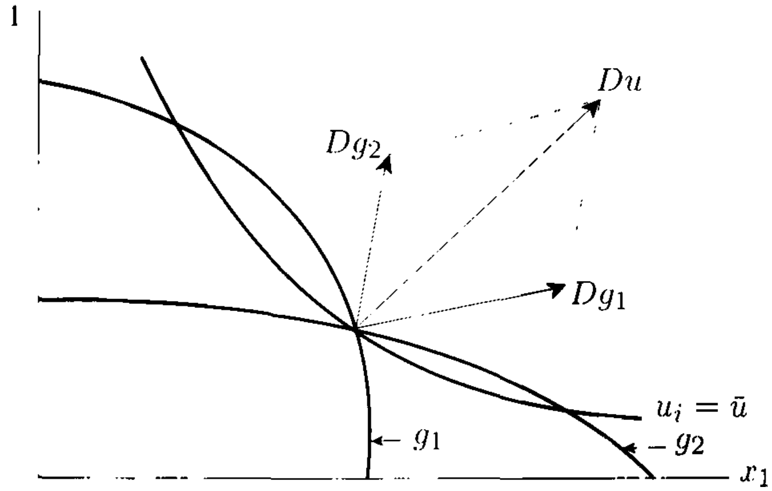


Рис. П.12. Решение задачи максимизации при ограничениях вида неравенств. На этом рисунке показано решение задачи максимизации (П.53) с двумя ограничениями в виде неравенств

Для того чтобы понять смысл условия дополняющей нежесткости, представим себе, что функция полезности двух видов благ имеет форму колокола (рис. П.13, *а*). Кривые безразличия представляют собой окружности вокруг точки, которая приносит максимальную полезность. (Эта точка в данном случае соответствует уровню насыщения, за пределы которого экономические агенты уже не захотят выходить независимо от цен.) Предположим, что бюджетное ограничение расположено слева от этой точки насыщения (см. рис. П.13, *б*).

Экономический агент хотел бы потребить как можно больше обоих благ, но бюджетное ограничение не позволяет ему этого сделать. Следовательно, это ограничение связывающее. Теорема Куна- Таккера утверждает, что градиент целевой функции в точке оптимума пропорционален градиенту ограничения. Так как градиент перпендикулярен линии уровня функции, то это условие означает, что максимум достигается в точке касания.

Посмотрим теперь, что получится в случае, если точка насыщения лежит полностью внутри бюджетного множества (рис. П.13, *в*). Индивидуум, очевидно, получает максимум полезности, оставаясь внутри бюджетного ограничения. Другими словами, в силу того что в этом случае ограничение не связывающее, экономический агент ведет себя так, как если бы ограничения не было вовсе. Согласно теореме Куна—Таккера, в точке оптимума градиент целевой функции пропорционален градиенту ограничения. Из условия дополняющей нежесткости следует, что если ограничение не связывающее, то коэффициент пропорциональности ра-

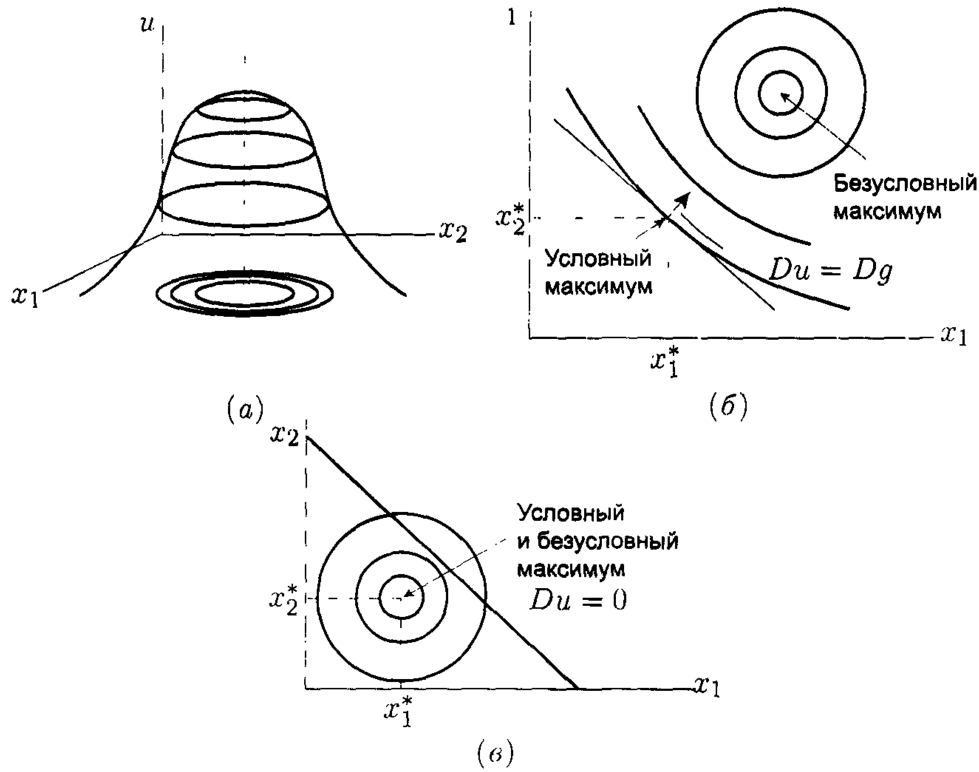


Рис. П.13. (*а*) **Выбор из двух благ.** Предполагается, что функция полезности имеет вид колокола, тогда кривые безразличия для x_1 и x_2 образуют окружности. (*б*) **Максимизация полезности при условии связывающего ограничения в виде неравенства.** В данном примере бюджетное ограничение для x_1 и x_2 является связывающим. (*в*) **Максимизация полезности при условии несвязывающего ограничения в виде неравенства.** В данном примере бюджетное ограничение для x_1 и x_2 не связывающее

вен 0. Следовательно, градиент целевой функции должен быть равен 0, что является условием максимума в задаче без ограничений. Таким образом, из условия дополняющей нежесткости следует, что если ограничение не является связывающим, то оно не влияет на оптимальный выбор.

Условия Куна–Таккера можно истолковать по-другому, если записать функцию Лагранжа в виде

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_m) = \\ = u(x_1, \dots x_n) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot [a_i - g_i(x_1, \dots, x_n)]. \tag{П.54}$$

Условие (*а*) в (П.53) означает, что необходимым условием для того, чтобы вектор $\bar{\bar{x}}$ был точкой максимума в задаче без ограничений, является максимизация им также и соответствующего лагранжиана. Условия (b) и (c) в (П.53) означают, что в точке оптимума лагранжиан имеет минимум по вектору $\mu \equiv (\mu_1, \ldots, \mu_m)$. (Условие ($b$) означает, что обе компоненты в (c) неотрицательны; следовательно, их произведение минимально в 0.) Совместно условия (a)–(c) в (П.53) означают, что необходимым условием того, чтобы вектор $\bar{\bar{x}}$ был оптимальным решением, является наличие у лагранжиана седловой точки $(\bar{\bar{x}}, \mu)$: т. е. максимум по x и минимум по μ.

Условия (a)–(c) в (П.53) представляют собой набор необходимых условий из теоремы Куна—Таккера: если некоторая точка является точкой оптимума, то она должна удовлетворять им. Если целевая функция $u(\cdot)$ вогнута, а ограничения формируют выпуклое множество, то необходимые условия также являются и достаточными[1].

П.3. Динамическая оптимизация в непрерывном времени

П.3.1. Введение

Математики уже давно имеют дело с динамическими задачами. Общеизвестно, что первым человеком, решившим одну из этих задач в 1696 г., был Бернулли. Над динамическими проблемами работали также Эйлер и Лагранж. В основном их теоретические изыскания имели применение в физике, особенно это касается принципа наименьшего действия Гамильтона. Экономисты интересуются динамическими задачами как минимум начиная с работы Хотеллинга и Рамсея в 1920-е гг. Однако только с 1960-х гг. математические методы решения динамических задач начали широко использоваться в экономической теории, в основном в работах теоретиков неоклассического роста.

Методология, которую классические математики используют для решения динамических задач, известна под наименованием *вариационное исчисление*. Этот подход постепенно был обобщен в два направления. В рамках первого Ричард Белман, американский математик, разработал в 1950-х гг. метод *динамического программирования*. Этот метод особенно удобен для дискретно-временных задач и, в частности, полезен для стохастических моделей. В рамках второго направления, также в 1950-х гг., группа русских математиков под руководством Л. Понтрягина разработала *принцип максимума оптимального управления*.

[1] Чуть менее ограничивающие достаточные условия получены в работе Arrow and Enthoven (1961): достаточно, чтобы целевая функция была квазивогнутой, т. е. чтобы для любого вещественного числа c множество $\{x : f(x) \geqslant c\}$ было выпуклым.

(Правда, первый перевод этой работы на английский язык появился только в 1962 г.)

В данной главе мы продемонстрируем, как применять метод Понтрягина. Принцип максимума является обобщением классического вариационного исчисления, так как дает решение также и для задач, в которых одно или более ограничений может содержать производные переменных состояния. Именно такой тип ограничений наиболее важен для теории экономического роста.

Хотя нашей целью в данном разделе не является доказательство принципа максимума, тем не менее мы представим его эвристический вывод параллельно описанию процедуры, которой мы будем следовать при применении решений. Этот подход дает нам набор инструментов, который позволит нам находить решения в различных динамических моделях, которые мы будем рассматривать в данной книге[1)].

П.3.2. Типичная задача

Типичная задача, которую мы хотим решить, формулируется следующим образом. Экономический агент имеет возможность выбирать или контролировать некоторое количество переменных, называемых *переменными управления*[2)], с целью максимизировать целевую функцию при наличии некоторых ограничений. Эти ограничения - динамические в том смысле, что они описывают эволюцию состояния экономики во времени, и это состояние задается *переменными состояния*. Таким образом, задача записывается в следующем виде:

$$\max_{c(t)} V(0) = \int_0^T v[k(t), c(t), t]\, dt \quad \text{при наличии ограничений}$$

$$\begin{aligned} &(a) \quad \dot{k}(t) = g[k(t), c(t), t]; \\ &(b) \quad k(0) = k_0 > 0; \\ &(c) \quad k(T) \cdot e^{-\bar{r}(T)\cdot T} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{П.55}$$

где $V(0)$ - значение целевой функции, наблюдаемое из начального момента времени 0; $\bar{r}(t)$ - средняя ставка дисконтирования за период времени от 0 до t; T - терминальная дата планирования, которая может быть как конечной, так и бесконечной. Мы обсудим различие между конечным и бесконечным временным горизонтами в разд. II.4.7.

[1)]Полное доказательство принципа максимума можно посмотреть в работе Pontryagin et al. (1962).

[2)]Понтрягин называл эти переменные управления *управляющими переменными.*

Переменная $k(t)$, входящая в уравнение (a) системы (П.55) вместе со своей производной, является переменной состояния, а переменная $c(t)$ — переменной управления. Каждая из этих переменных является функцией времени. Целевая функция в (П.55) представляет собой интеграл функций мгновенной полезности $v(\cdot)$[1] по интервалу от 0 до T. Эти функции полезности зависят от переменных состояния и управления $k(t)$ и $c(t)$, а также от времени t.

Ограничение (П.55, a), описывающее процесс накопления, является дифференциальным уравнением относительно $k(t)$; это ограничение показывает, как выбор переменной управления $c(t)$ отразится на структуре движения переменной состояния $k(t)$. Это выражение для $\dot{k}(t)$ называется *уравнением перехода* или *уравнением движения*. Хотя у нас здесь только одно уравнение перехода, оно по сути доставляет континуум ограничений, по одному на каждый момент времени в интервале от 0 до T[2]. Начальное условие (П.55, b) означает, что переменная состояния $k(t)$ начинает движение из заданного значения k_0. Терминальное ограничение (П.55, c) означает, что конечное значение $k(T)$ должно быть выбрано таким образом, чтобы, будучи дисконтированным по ставке $\bar{r}(T)$, оно оказалось не меньше нуля. Для конечных значений T это ограничение означает $k(T) \geqslant 0$, поскольку дисконтирующая ставка $\bar{r}(T)$ положительна и конечна. Если $k(t)$ представляет собой чистые активы индивидуума и T время жизни индивидуума, то ограничение (П.55, c) предотвращает наличие долга к моменту смерти. Если горизонт планирования бесконечен, то данное условие означает, что чистые активы могут быть отрицательны и увеличиваться со временем в размерах, до тех пор пока темп их роста меньше $\bar{r}(t)$. Это ограничение исключает долговые схемы типа «цепные письма» или «схемы Понци» (т. е. цепные заимствования, при которых происходит бесконечное рефинансирование и увеличение долга).

В качестве экономического примера динамической задачи данного вида рассмотрим модель роста, в которой $v(\cdot)$ функция мгновенной

[1] Примерами функций полезности являются функции полезности потребителей, функции прибыли фирм, целевые функции правительств. Для определенности в данной главе будем идентифицировать их с потребительскими функциями полезности.

[2] Это уравнение процесса накопления можно было бы записать в виде неравенства, $\dot{k} \leqslant g(\cdot)$. Однако обычно индивидуумы не считают для себя оптимальной ситуацию, в которой это ограничение выполнено как строгое неравенство, потому что в таком случае они могут извлечь выгоду из увеличения $c(t)$, что приведет к увеличению текущего потока полезности, или извлечь выгоду из увеличения $k(t)$, что приведет к росту будущих потоков полезности. В силу этого мы оставим ограничение как есть, в виде равенства.

полезности, которая зависит от уровня потребления и дисконтирована коэффициентом временного предпочтения,

$$v(k, c, t) = e^{-\rho t} \cdot u[c(t)]. \tag{П.56}$$

В этом примере $v(\cdot)$ не зависит от объема капитала $k(t)$ и зависит только от времени напрямую, через дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$. Это ограничение описывает накопление переменной $k(t)$. Если считать, что $k(t)$ - физический капитал, то примером такого ограничения может служить следующее уравнение:

$$\dot{k} = g[k(t), c(t), t] = f[k(t), t] - c(t) - \delta \cdot k(t), \tag{П.57}$$

где δ - доля физического капитала, выбывающего в каждое мгновение. Уравнение (П.57) означает, что прирост объема капитала (чистый совокупный объем инвестиций) равен валовому сбережению минус амортизация. Валовое сбережение, в свою очередь, равно разности между выпуском $f(\cdot)$ и потреблением $c(t)$. Зависимость производства от t при фиксированном $k(t)$ может отражать состояние технологии или знания в данный момент времени.

П.3.3. Эвристический вывод условий первого порядка

В данной книге мы не будем рассматривать формальное доказательство принципа максимума, но приведем его эвристический вывод. Читатели, которых интересует только процедура нахождения условий первого порядка, но не ее вывод, могут пропустить разд. П.3.3–П.3.9 и перейти сразу к разд. П.3.10.

Отправной точкой нам послужит статический метод решения нелинейных оптимизационных задач, теорема Куна–Таккера. Эта теорема, описанная в разд. П.2.3, предлагает нам построить лагранжиан вида

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T v[k(t), c(t), t]\, dt + \\ &+ \int_0^T \left\{ \mu(t) \cdot \left(g[k(t), c(t), t] - \dot{k}(t) \right) \right\} dt + \nu \cdot k(T) \cdot e^{r(T) \cdot T}, \end{aligned} \tag{П.58}$$

где $\mu(t)$ - множитель Лагранжа, связанный с ограничением (П.55, a); ν - множитель, связанный с ограничением (П.55, c)[1]. Так как (П.55, a)

[1] По идее, еще должно быть ограничение $c(t) \geqslant 0$, но из наших предположений относительно вида функции полезности следует, что это ограничение не будет связывающим ни при каких условиях. Поэтому в данном контексте мы эти ограничения в виде неравенств игнорируем.

представляет собой континуум ограничений для каждого мгновения t в интервале между 0 и T, то $\mu(t)$ — соответствующий континуум множителей Лагранжа, которые называются *сопряженные переменные* или *динамические множители Лагранжа*. По аналогии со стационарным случаем эти сопряженные переменные могут интерпретироваться как теневые цены: $\mu(t)$ – цена или стоимость одной дополнительной единицы капитала в момент времени t в единицах полезности в момент времени 0. Так как каждое из ограничений $g(\cdot) - \dot{k}$ равно 0, то каждое из произведений $\mu(t) \cdot [g(\cdot) - \dot{k}]$ также равно 0. Отсюда следует, что «сумма» всех ограничений равна 0:

$$\int_0^T \left\{\mu(t) \cdot \left(g[k(t), c(t), t] - \dot{k}(t)\right)\right\} dt = 0.$$

Это выражение наблюдается в середине уравнения (П.58).

Чтобы найти множество необходимых условий первого порядка в статической задаче, нам следует максимизировать L по $c(t)$ и $k(t)$ для всех t от 0 до T. Однако здесь возникает одна проблема: мы не знаем, как взять производную $\dot{k}$ по k. Для того чтобы обойти эту проблему, проинтегрируем член $\mu(t) \cdot \dot{k}(t)$ в лагранжиане по частям, после чего имеем[1]:

$$L = \int_0^T \left(v[k(t), c(t), t] + \mu(t) \cdot g[k(t), c(t), t]\right) dt + \\ + \int_0^T \dot{\mu}(t) \cdot k(t)\, dt + \mu(0)k_0 - \mu(T) \cdot k(T) + \nu \cdot k(T) \cdot e^{r(T) \cdot T}. \qquad (\text{П.59})$$

[1] Для интегрирования $\int_0^T (\dot{k}) \cdot \mu\, dt$ по частям начнем с уравнения $\frac{d}{dt} \cdot (\mu k) = \dot{\mu} k + \dot{k}\mu$. Проинтегрируем обе части этого уравнения от 0 до T и заметим, что

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\mu k)\, dt = \mu(T) \cdot k(T) - k(0) \cdot \mu(0).$$

Вычитая интеграл от $k\dot{\mu}$ из этого выражения, получаем

$$\int_0^T (\dot{k}) \cdot \mu\, dt = k(T) \cdot \mu(T) - k(0) \cdot \mu(0) - \int_0^T (\dot{\mu}) \cdot k\, dt,$$

т. е. уравнение, которое мы использовали для получения (П.59). Более подробно это рассмотрено в разд. П.5.4 и П.5.5.

Выражение внутри первого интеграла называется *функцией Гамильтона* (*гамильтонианом*).

$$H(k, c, t, \mu) \equiv v(k, c, t) + \mu \cdot (k, c, t). \tag{П.60}$$

У гамильтониана есть экономическая интерпретация (см. Dorfman, 1969). В некоторый момент времени экономический агент потребляет $c(t)$ и владеет капиталом $k(t)$. Эти две переменные воздействуют на уровень полезности двумя способами. Во-первых, непосредственный вклад потребления и, возможно, капитала в полезность описывается первым слагаемым гамильтониана (П.60). Во-вторых, выбор уровня потребления влияет на изменение в объеме капитала в соответствии с уравнением перехода для $\dot{k}$ в (П.55, *a*). Величина этого изменения в объеме капитала есть слагаемое $\mu \cdot g(\cdot)$ в (П.60). Следовательно, при заданной теневой цене μ гамильтониан описывает полное воздействие выбора $c(t)$ на уровень полезности.

Перепишем функцию Лагранжа (П.59) в виде

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T \left\{ H[k(t), c(t), t] + \dot{\mu}(t) \cdot k(t) \right\} dt + \\ &+ \mu(0)k_0 - \mu(T) \cdot k(T) + \nu \cdot k(T) \cdot e^{r(T) \cdot T}. \end{aligned} \tag{П.61}$$

Пусть $\bar{\bar{c}}(t)$ и $\bar{\bar{k}}(t)$ будут оптимальными траекториями для переменных управления и состояния соответственно. Если мы возмутим оптимальную траекторию $\bar{\bar{c}}(t)$ посредством произвольной функции возмущения $p_1(t)$, то получим возмущенную траекторию для переменной управления:

$$c(t) = \bar{\bar{c}}(t) + \epsilon \cdot p_1(t).$$

Когда $c(t)$ возмущена таким образом, то соответствующее возмущение, возникающее как в $k(t)$, так и в $k(T)$, должно удовлетворять бюджетному ограничению

$$\begin{aligned} k(t) &= \bar{\bar{k}}(t) + \epsilon \cdot p_2(t); \\ k(T) &= \bar{\bar{k}}(T) + \epsilon \cdot dk(T). \end{aligned}$$

Если начальные траектории оптимальны, то $\partial L / \partial \epsilon$ должно быть равно 0. Но перед тем как вычислять эту производную, запишем данный лагранжиан с выделенной переменной ϵ:

$$\bar{\bar{L}}(\cdot,\epsilon) = \int_0^T \{H[k(\cdot,\epsilon); c(\cdot,\epsilon)] + \dot{\mu}(\cdot)\cdot k(\cdot,\epsilon)\}\,dt +$$

$$+ \mu(0)\cdot k_0 - \mu(T)\cdot k(T,\epsilon) + \nu\cdot k(T,\epsilon)\cdot e^{-\bar{r}(T)\cdot T}.$$

Теперь мы можем взять производную лагранжиана по ϵ и приравнять ее 0:

$$\frac{\partial \bar{\bar{L}}}{\partial \epsilon} = \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial \epsilon + \dot{\mu}\cdot\partial k}\,\partial\epsilon\right] dt + [\nu e^{-\bar{r}(T)\cdot T} - \mu(T)]\cdot\frac{\partial k(T,\epsilon)}{\partial \epsilon}.$$

Исходя из правила дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial c}\cdot p_1(t) + \frac{\partial H}{\partial k}\cdot p_2(t)$$

и

$$\frac{\partial k(T,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = dk(T).$$

Используя эти формулы и переставляя члены в выражении для $\partial\bar{\bar{L}}/\partial\varepsilon$, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \int_0^T \left\{\frac{\partial H}{\partial c}\cdot p_1(t) + \frac{\partial H}{\partial k + \dot{\mu}}\cdot p_2(t)\right\} dt + \tag{П.62}$$

$$+ [\nu\cdot e^{-r(t)\cdot T} - \mu(T)]\cdot dk(T) = 0.$$

Уравнение (П.62) может быть выполнено для всех траекторий возмущения $p_1(t)$, $p_2(t)$ и $dk(T)$ только тогда, когда каждая из компонент в уравнении обнуляется, т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0; \tag{П.63}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} + \dot{\mu} = 0; \tag{П.64}$$

$$\nu\cdot e^{-\bar{r}(T)\cdot T} = \mu(T). \tag{П.65}$$

Условие первого порядка относительно переменной управления, т. е. уравнение (П.63), означает что если $\bar{\bar{c}}(t)$ и $\bar{\bar{k}}(t)$ – решения динамической задачи, то производная гамильтониана по управлению c равна 0 при всех t. Вот этот результат и называется ***принципом максимума.***

Уравнение (П.64) означает, что частная производная гамильтониана по переменной состояния равна производной множителя Лагранжа, взятой с минусом, т. е. $-\dot{\mu}$. Это уравнение, а также уравнение перехода (П.55, *a*) часто называются *уравнениями Эйлера*. И наконец, уравнение (П.65) означает, что значение сопряженной переменной в конечный момент времени μ равно ν, статическому множителю Лагранжа, связанному с неотрицательным ограничением на k в конечный момент времени, дисконтированному по ставке $\bar{r}(T)$.

П.3.4. Условия трансверсальности

В разд. П.2.3 показано, что необходимые условия первого порядка Куна–Таккера включают в себя условие дополняющей нежесткости, связанное с ограничениями типа неравенств. В статической задаче эти условия означали, что если ограничение не связывающее, то связанная с ним теневая цена равна 0. В данной динамической задаче наличествует ограничение в виде неравенства, которое ограничивает нас следующим образом: дисконтированный по ставке $\bar{r}(T)$ остаток капитала в конце периода планирования не должен быть отрицательным, т. е. $k(T)\cdot e^{-\bar{r}(T)\cdot T}$. Условие, связанное с этим ограничением, имеет вид $\nu\cdot k(T)\cdot e^{-\bar{r}(T)\cdot T}=0$ при $\nu\geqslant 0$. Из уравнения (П.65) следует, что мы можем переписать условие дополняющей нежесткости в виде

$$\mu(T)\cdot k(T)=0. \tag{П.66}$$

Это граничное условие часто называется *условием трансверсальности*. Оно означает, что если в терминальный момент времени остается положительный объем капитала, $k(T)>0$, то его цена должна быть равна 0, $\mu(T)=0$. Либо если в конечный момент времени капитал имеет положительную стоимость $\mu(T)>0$, то экономический агент должен остаться без капитала, т. е. $k(T)=0$. Позже мы обсудим смысл уравнения (П.66), когда T бесконечно.

П.3.5. Поведение гамильтониана во времени

Для изучения динамики оптимального значения гамильтониана возьмем полную производную H по t, имеем

$$\frac{dH(k,c,\mu,t)}{dt}=\frac{\partial H}{\partial k}\cdot\dot{k}+\frac{\partial H}{\partial c}\cdot\dot{c}+\frac{\partial H}{\partial \mu}\cdot\dot{\mu}+\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{П.67}$$

Из условия первого порядка (П.63) следует, что в оптимуме $\partial H/\partial c=0$; следовательно, второе слагаемое в правей части уравнения (П.67) равно 0. Уравнение (П.64) требует, чтобы $\partial H/\partial k=-\dot{\mu}$. Так как

$\partial H/\partial\mu = g = \dot{k}$, то первое и третье слагаемые в правой части уравнения аннулируют друг друга. Следовательно, в оптимуме полная производная гамильтониана по времени равна частной производной $\partial H/\partial t$. Если задача автономна, т. е. ни целевая функция, ни ограничения не зависят явно от времени, то производная гамильтониана по времени равна 0. Другими словами, гамильтонианы автономных задач постоянны по времени. Эти результаты относительно динамики гамильтониана будут использованы нами далее в следующих разделах.

П.3.6. Достаточные условия

В статической нелинейной задаче необходимые условия Куна Таккера также являются и достаточными в случае, если целевая функция вогнута, а ограничения образуют выпуклое множество. Mangasarian (1966) расширяет этот результат на динамические задачи и показывает, что если функции $v(\cdot)$ и $g(\cdot)$ в (П.55) вогнуты по k и c, то необходимые условия также являются и достаточными. Этот результат прост в применении, но условия все равно слишком жесткие.

Более общие достаточные условия были получены в работе Arrow and Kurz (1970). Пусть $H^0(k, \mu, t)$ – максимум $H(k, c, \mu, t)$ по c, при заданных k, μ и t. Согласно теореме Эрроу- Курца, если $H^0(k, \mu, t)$ вогнута по k при заданных μ и t, то необходимые условия являются также и достаточными. Вогнутости $v(\cdot)$ и $g(\cdot)$ достаточно, но не необходимо для того, чтобы было выполнено условие Эрроу—Курца. Недостатком этого более общего результата является то, что проверка свойств производной функции такой, как H^0, оказывается значительно более сложным делом, чем проверка свойств $v(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

П.3.7. Бесконечные горизонты планирования

Большинство рассматриваемых в данной книге моделей, предполагают наличие экономических агентов с бесконечными горизонтами планирования. Типичная задача имеет вид

$$\max_{c(t)} V(0) = \int_0^T v[k(t), c(t), t]\, dt \quad \text{при ограничениях:}$$

$$\begin{aligned}
&(a)\quad \dot{k}(t) = g[k(t), c(t), t]; \\
&(b)\quad k(t) = k_0, \\
&(c)\quad \lim_{t\to\infty} [k(t) \cdot e^{-\bar{r}(t)\cdot t}] \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{П.68}$$

Единственным различием между системами (П.68) и (П.55) является то, что горизонт планирования — верхний предел интегрирования — в (П.68) равен бесконечности, в то время как ранее было $T < \infty$. Условия первого порядка для задачи с бесконечным горизонтом планирования те же, что и в случае конечного горизонта, т. е. это уравнения (П.63) и (П.64). Ключевым отличием здесь является то, что условие трансверсальности (П.66) записывается не для конечного T, а в виде предела при T, стремящемся к бесконечности. Другими словами, условие трансверсальности теперь имеет вид

$$\lim_{t \to \infty} [\mu(t) \cdot k(t)] = 0. \tag{П.69}$$

Смысл этого условия в том, что объем капитала должен асимптотически сходиться к 0. Или же, если объем капитала $k(t)$ асимптотически положителен, то его стоимость $\mu(t)$ должна асимптотически сходится к 0. Если $k(t)$ растет все время с положительным темпом (как и получается в некоторых моделях, изучаемых в данной книге), то цена $\mu(t)$ должна стремиться к 0 более быстрым темпом, так чтобы произведение $\mu(t) \cdot k(t)$ стремилось к 0.

Хотя (П.69) выглядит как предельная версия уравнения (П.66), на самом деле здесь возникает существенное различие в условиях, при которых предел (П.69) является действительно необходимым условием для задачи с бесконечным горизонтом (П.68). Вспомним, что единственный аргумент, который мы привели в качестве обоснованности того, что это условие является необходимым, была аналогия с условием трансверсальности в случае с конечным горизонтом. Ряд исследователей нашли контрпримеры, в которых предел (П.69) не является условием для оптимизации. В разд. П.3.9 мы обсудим один такой пример.

Одно из условий трансверсальности, которое всегда должно быть выполнено, было найдено Michel (1982). Он доказал, что для того чтобы было выполнено условие трансверсальности, необходимо, чтобы значение гамильтониана сходилось к 0 при стремлении t к бесконечности:

$$\lim_{t \to \infty} [H(t)] = 0. \tag{П.70}$$

Следуя Michel, это условие выводится путем представления задачи с бесконечным горизонтом в виде множества задач, в которых экономический агент выбирает конечную дату планирования T. Если мы изменим конечную дату T в уравнении (П.61) на величину $\epsilon \cdot dT$, то обнаружим, что предел интегрирования теперь зависит от ϵ. Взяв производную лагранжиана по ϵ, находим, что одно из слагаемых уравнения (П.62) есть $H(T) \cdot dT$. Это слагаемое возникает от взятия производной предела интегрирования $T(\epsilon)$ по ϵ. Вместе с остальными слагаемыми уравнения (П.62) это слагаемое будет равно 0 в оптимуме. Если конечная дата фиксирована, так что $dT = 0$, то $H(T)$ может принять любое значение. Но если конечная дата T варьируется, так что dT не равно 0, то $H(T)$ обнуляется. Если мы устремим T к бесконечности, то получим условие трансверсальности (П.70). Впрочем, это условие избыточно для большинства моделей в данной книге в силу того что оно выполнено, если выполнено (П.69). Так что в большинстве случаев мы можем использовать условие (П.69) и не обращать внимания на (П.70).

П.3.8. Пример. Неоклассическая модель роста

Рассмотрим пример неоклассической модели роста с производственной функцией Кобба–Дугласа. (Более подробно – в гл. 2.) Предположим, что экономические агенты выбирают траектории потребления $c(t)$ и капитала $k(t)$ таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию,

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log[c(t)]\, dt$$

$$\begin{aligned} &(a) \quad \dot{k}(t) = [k(t)^\alpha - c(t) - \delta \cdot k(t)]; \\ &(b) \quad k(0) = 1; \\ &(c) \quad \lim_{t\to\infty} [k(t) \cdot e^{-\bar{r}(t)\cdot t} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{П.71}$$

где α – константа, $0 < \alpha < 1$. Нормируем начальное значение $k(0)$ к единице. Процентная ставка $r(t)$ равна чистому предельному продукту капитала $\alpha \cdot k(t)^{\alpha-1} - \delta$, а средняя процентная ставка $\bar{r}(t)$ равна

$$\frac{1}{t} \cdot \int_0^t r(v)\, dv.$$

Экономического агента можно представлять себе как домохозяйство-производитель, который хочет максимизировать полезность, представленную текущей дисконтированной стоимостью потоков мгновенных полезностей. Каждая из этих полезностей зависит от мгновенного потока потребления. В системе (П.71) функция мгновенной полезности предполагается логарифмической. Дисконтирующая ставка $\rho > 0$. Экономический агент имеет доступ к технологии (Кобба–Дугласа, мы обсуждали этот вид производственной функции в гл. 1), которая преобразует капитал в выпуск согласно зависимости $y(t) = [k(t)]^\alpha$. Условие накопления (П.71, a) означает, что валовой выпуск делится между потреблением $c(t)$, амортизацией $\delta \cdot k(t)$ и накоплением капитала $\dot{k}(t)$. Начальное условие (П.71, b) означает, что объем капитала в момент 0 равен 1. Ограничение (П.71, c) означает, что объем капитала, оставшийся на момент «конец горизонта планирования», дисконтированный по средней ставке, $\bar{r}(t)$, неотрицателен. (Если $k(t)$ представляет активы домохозяйства, то это условие исключает стратегию цепных писем, при которой долг накапливается безостановочно с темпом не меньшим, чем процентная ставка.)

Для решения оптимизационной задачи запишем гамильтониан:

$$H(c, k, t, \mu) = e^{-\rho t} \log c + \mu \cdot (k^{\alpha} - c - \delta k). \tag{П.72}$$

Из уравнения (П.63) и (П.64) следует, что условия первого порядка имеют вид

$$H_c = e^{-\rho t} \cdot \frac{1}{c} - \mu = 0; \tag{П.73}$$

$$H_k = \mu \cdot (\alpha k^{\alpha-1} - \delta) = -\dot{\mu}, \tag{П.74}$$

а из (П.69) следует, что условие трансверсальности записывается так:

$$\lim_{t \to \infty} [\mu(t), k(t)] = 0. \tag{П.75}$$

Уравнение (П.74) и уравнение перехода (П.71, a) формируют систему ОДУ, в которой $\dot{\mu}$ и $\dot{k}$ зависят от μ, k и c. Уравнение (П.73) связывает μ с c, так что мы можем исключить одну из этих двух переменных из системы. Для исключения μ прологарифмируем (П.73) и возьмем производную по времени, тогда получим

$$-\rho - \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\mu}}{\mu}.$$

Мы можем подставить это выражение в уравнение (П.74), исключив, таким образом, $\dot{\mu}/\mu$, имеем

$$\frac{\dot{c}}{c} = \alpha k^{\alpha-1} - \delta. \tag{П.76}$$

Это условие означает, что потребление накапливается с темпом, равным разности между чистым предельным продуктом капитала $\alpha k^{\alpha-1} - \delta$ и дисконтной ставкой ρ.

Уравнения (П.71, a) и (П.76) образуют систему нелинейных ОДУ относительно переменных k и c. В стационарном состоянии член $\alpha k^{\alpha-1}$ равен $\rho + \delta$, что определяет стационарный объем капитала как

$$k^* = \left[\frac{(\rho + \delta)}{\alpha}\right]^{-1/(1-\alpha)}.$$

Тогда уравнение (П.71, *a*) определяет стационарный уровень потребления как $c^* = (k^*)^\alpha - \delta k^*$. Из уравнения (П.74) следует, что при стремлении t к бесконечности $\dot{\mu}/\mu$ стремится к $-\rho$, так что $\mu(t)$ стремится к $\mu(0) \cdot e^{-\rho t}$. Следовательно, условие трансверсальности (П.75) может быть записано как

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-\rho t} \cdot k(t)] = 0. \tag{П.77}$$

Уравнение (П.77) является предельным условием, которое совместно с начальным условием $k(0) = 1$ определяет точное решение системы ОДУ. Если мы возьмем $\rho = 0{,}06$, $\delta = 0$ и $\alpha = 0{,}3$, то эта система соответствует нелинейной системе (П.22) и (П.23), которую мы изучили в разд. П.1.3 и линеаризовали позже в том же разделе в виде уравнения (П.38). Следовательно, как мы уже знаем, эта система имеет седловую устойчивость, а начальное и терминальное условия гарантируют, что экономика стартует точно на устойчивой ветви.

И наконец, можно убедиться в том, что из рассматриваемых условий следует равенство стационарного значения гамильтониана нулю:

$$\lim_{t\to\infty}[H(t)] = \lim_{t\to\infty}\{e^{-\rho t} \cdot \log[c(t)]\} + \lim_{t\to\infty}\{\mu(t) \cdot [k(t)^\alpha - c(t) - \delta \cdot k(t)]\} =$$
$$= \log(c^*) \cdot \lim_{t\to\infty}(e^{-\rho t}) + 0 \cdot \lim_{t\to\infty}[\mu(t)] = 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, выполнено уравнение (П.70). Следовательно, несмотря на то что необходимым условием оптимальности по существу является (П.70), оно также вытекает и из других условий.

П.3.9. Условия трансверсальности в задачах с бесконечным горизонтом

Условие трансверсальности (П.75) не является общепринятым в качестве необходимого условия в задаче с бесконечным горизонтом. Halkin (1974) привел пример в котором оптимум не удовлетворяет данному условию трансверсальности[1]. Значительно более известным контрпримером является неоклассическая модель роста Рамсея (Ramsey, 1928). Разница между оригинальной моделью Рамсея и моделью, описанной в предыдущем разделе, состоит в том, что Рамсей предполагал отсут-

[1] Этот пример был впервые представлен в работе Arrow and Kurz (1970, p.46). Однако в данной работе указано, что идея предложена Халкиным, который опубликовал свой результат позже в *Econometrica*.

ствие дисконтирования. Его версия модели:

$$U(0) = \int_0^\infty \log[c(t)]\,dt$$

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \dot{k}(t) = [k(t)^\alpha - c(t) - \delta \cdot k(t)], \\
&(b) \quad k(0) = 1, \\
&(c) \quad \lim_{t\to\infty} [k(t)] \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{П.78}$$

Главным отличием от раннее представленной нами версии (П.71) является то, что ρ теперь равно 0. Промежуточной проблемой, возникающей при рассмотрении задачи (П.78), является неограниченность полезности в случае, если $c(t)$ асимптотически сходится к константе (как и в предыдущей задаче). Для разрешения этой проблемы Рамсей переписал подынтегральное выражение в виде отклонения от «точки полезности». Если отклонение от точки полезности сходится к 0 достаточно быстрым темпом, то такая модификация даст в итоге ограниченную полезность.

В предыдущем разделе мы обнаружили, что потребление в стационарном состоянии сходится к константе, задаваемой уравнением $c^* = (k^*)^\alpha - \delta k^*$, где k^* удовлетворяет уравнению

$$\alpha \cdot (k^*)^{\alpha-1} = (\rho + \delta).$$

В силу этого мы начнем с гипотезы, что стационарное потребление в данной модели определяется уравнением $\tilde{c} = \tilde{k}^\alpha - \delta\tilde{k}$, где $\tilde{k}$ удовлетворяет $\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} = \delta$. Соответствующая целевая функция Рамсея имеет вид

$$U(0) = \int_0^\infty \left(\log[c(t)] - \log[\tilde{c}]\right) dt. \tag{П.79}$$

Для решения задачи максимизации $U(0)$, задаваемой уравнением (П.79), запишем гамильтониан:

$$H(c, k, \mu) = (\log c - \log\tilde{c}) + \mu \cdot (k^\alpha - c - \delta k). \tag{П.80}$$

Условия первого порядка:

$$H_c = \frac{1}{c} - \mu = 0; \tag{П.81}$$

$$H_k = \mu \cdot (\alpha k^{\alpha-1} - \delta) = -\dot{\mu} \tag{П.82}$$

соответствуют уравнениям (П.73) и (П.74).

Если c стремится к $\tilde{c}$ при t, стремящемся к бесконечности, то из уравнения (П.81) следует

$$\lim_{t\to\infty}[\mu(t)] = \frac{1}{\tilde{c}} > 0. \tag{П.83}$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}[k(t)] = \tilde{k} > 0,$$

то отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}[\mu(t)\cdot k(t)] \neq 0;$$

поэтому обычное условие трансверсальности (П.75) не выполнено.

В литературе имеется ряд таких примеров, в которых стандартное условие трансверсальности не является необходимым условием в оптимизационной задаче. Так, в работе Pitchford (1977) отмечено, что во всех известных случаях такого рода отсутствует временное дисконтирование. Weitzman (1973) показал, что для задач с дискретным временем условие трансверсальности, аналогичное предельному уравнению (П.75), является необходимым в случае, если наличествует временное дисконтирование и целевая функция сходится. В работе Benvensite and Scheinkman (1982) показано, что этот результат верен и в непрерывном времени.

Во всех моделях, обсуждаемых в данной книге, имеется временное дисконтирование и целевая функция сходится. В силу этого, мы предполагаем, что именно условие трансверсальности (П.75) является необходимым условием для оптимизации в наших задачах с бесконечным горизонтом.

П.3.10. Пошаговый алгоритм получения условий первого порядка

Вместо того чтобы каждый раз, когда мы имеем дело с динамической задачей, проходить через весь процесс дифференцирования, мы будем использовать следующую простую пошаговую процедуру.

Шаг 1. Строим функцию Гамильтона путем добавления к функции полезности $v(\cdot)$ множителя Лагранжа, умноженного на правую часть уравнения перехода:

$$H = v(k,c,t) + \mu(t)\cdot g(k,c,t). \tag{П.84}$$

Шаг 2. Берем производную гамильтониана по переменной управления и приравниваем ее нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{\partial v}{\partial c} + \mu\cdot\frac{\partial g}{\partial c} = 0. \tag{П.85}$$

Шаг 3. Берем производную гамильтониана по переменной состояния (это та переменная, над которой стоит точка в уравнении перехода) и приравниваем ее к производной по времени множителя Лагранжа, взятой с отрицанием:

$$\frac{\partial H}{\partial k} \equiv \frac{\partial v}{\partial k} + \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial k} = -\dot{\mu}. \tag{П.86}$$

Шаг 4. (Условие трансверсальности.)

Случай 1. Конечный горизонт. Приравниваем произведение теневой цены на объем капитала в конечный момент времени нулю:

$$\mu(T) \cdot k(T) = 0. \tag{П.87}$$

Случай 2. Бесконечный горизонт с дисконтированием. Условие трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} [\mu(T) \cdot k(T)] = 0. \tag{П.88}$$

Случай 3. Бесконечный горизонт без дисконтирования. Контрпример, задаваемый моделью Рамсея, показывает, что предел (П.88) не равен нулю. В таком случае мы применяем условие Мишеля:

$$\lim_{t\to\infty} [H(T)] = 0. \tag{П.89}$$

Если мы объединим уравнения (П.85) и (П.86) с уравнением перехода (П.55), a, то получим систему двух дифференциальных уравнений с переменными μ и k. Или можно использовать уравнение (П.85) для преобразования ОДУ для $\dot{\mu}$ в ОДУ для $\dot{c}$. Для окончательного определения системы нам необходимы еще два граничных условия. Одно начальное условие задается начальным значением переменной состояния $k(0)$. Одно терминальное условие задается условием трансверсальности: одним из уравнений (П.87), (П.88) или (П.89) в зависимости от природы задачи.

П.3.11. Приведенные и текущие значения гамильтонианов

Большинство моделей, с которыми мы имеем дело в данной книге, имеют целевые функции вида

$$\int_0^T v[k(t), c(t), t]\, dt = \int_0^T e^{-\rho t} \cdot u[k(t), c(t)]\, dt, \tag{П.90}$$

где ρ — постоянная ставка дисконтирования; $e^{-\rho t}$ · дисконтирующий множитель. Поскольку имеется дисконтирующий множитель, то функция мгновенной полезности не зависит напрямую от времени. При тех же, что и ранее, ограничениях мы можем решить задачу, используя гамильтониан

$$H = e^{-\rho t} \cdot u(k, c) + \mu \cdot g(k, c, t).$$

В данной формулировке теневая цена $\mu(t)$ представляет собой значение капитала в момент времени t в единицах полезности в момент времени 0.

Иногда бывает удобно переформулировать задачу в текущих ценах, т. е. в ценах капитала в период времени t в единицах полезности t-времени. Для того чтобы это сделать, перепишем гамильтониан в виде

$$H = e^{-\rho t} \cdot [u(k, c) + q(t) \cdot g(k, c, t)],$$

где $q(t) \equiv \mu(t) \cdot e^{\rho t}$. Переменная $q(t)$ — *текущее значение теневой цены.* Обозначим $\hat{H} \equiv He^{\rho t}$ *текущее значение Гамильтониана*:

$$\hat{H} = u(k, c) + q(t) \cdot g(k, c, t). \tag{П.91}$$

Условия первого порядка остаются прежними $H_c = 0$ и $H_k = -\dot{\mu}$. Впрочем, их можно записать в обозначениях текущего гамильтониана и текущих цен:

$$\hat{H}_c = 0; \tag{П.92}$$

$$\hat{H}_k = \rho q - \dot{q}. \tag{П.93}$$

Условие трансверсальности $\mu(T) \cdot k(T) = 0$ выражается следующим образом:

$$q(T) \cdot e^{-\rho T} \cdot k(T) = 0. \tag{П.94}$$

Интересно отметить, что уравнение (П.93) выглядит как формула оценки стоимости активов: q · стоимость капитала в единицах текущей полезности; $\hat{H}_k$ — дивиденд, полученный экономическим агентом (предельный вклад капитала в полезность); $\dot{q}$ — доход от прироста стоимости капитала (за счет изменения цены актива); ρ — норма доходности альтернативного актива (потребление). Уравнение (П.93) означает, что в оптимуме экономическому агенту неважно, в какой из двух видов активов инвестировать, так как общая норма доходности капитала $(\hat{H}_k + \dot{q})/q$ равна доходности потребления ρ.

П.3.12. Кратные переменные

Рассмотрим более общую динамическую задачу с n переменными управления и m переменными состояния. Нужно найти $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$, максимизирующие

$$\int_0^T u[k_1(t),\ldots,k_m(t);c_1(t),\ldots,c_n(t);t]\,dt. \quad \text{при ограничениях:}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{k}_1(t) = g^1[k_1(t),\ldots,k_m(t);c_1(t),\ldots,c_n(t);t];\\
&\dot{k}_2(t) = g^2[k_1(t),\ldots,k_m(t);c_1(t),\ldots,c_n(t);t];\\
&\ldots\\
&\dot{k}_m(t) = g^m[k_1(t),\ldots,k_m(t);c_1(t),\ldots,c_n(t);t];\\
&k_1(0) > 0, \quad \ldots, \quad k_m(0) > 0, \quad \text{заданы.}\\
&k_1(T) \geqslant 0, \quad \ldots, \quad k_m(T) \geqslant 0, \quad \text{свободны.}
\end{aligned} \tag{П.95}$$

Решение этой задачи аналогично рассмотренному ранее случаю с одной переменной управления и одной переменной состояния. Гамильтониан имеет вид

$$H = u[k_1(t),\ldots,k_m(t);c_1(t),\ldots,c_n(t);t] + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot g^i(\cdot). \tag{П.96}$$

Необходимые условия первого порядка для максимума имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial c_i(t)} = 0, \qquad i = 0,\ldots,n; \tag{П.97}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_i(t)} = 0, \qquad i = -\dot{\mu}_i,\ldots,m, \tag{П.98}$$

и условия трансверсальности:

$$\mu_i(T)\cdot k_i(T) = 0, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{П.99}$$

П.4. Полезные результаты из матричной алгебры: собственные значения, собственные векторы, диагонализация матриц

Пусть задана квадратная матрица A порядка n. Мы можем найти значения скалярной величины α и соответствующие ненулевые вектор-столбцы v такие, что

$$(A - \alpha I)\cdot v = 0, \tag{П.100}$$

где I — n-мерная единичная матрица. Заметим, что уравнение (П.100) представляет собой систему n однородных линейных уравнений (т. е. свободный член равен 0 для всех уравнений). Если мы ищем нетривиальное решение, т. е. $v \neq 0$, то определитель матрицы $(A - \alpha I)$ должен быть равен нулю:

$$\det(A - \alpha I) = 0. \tag{П.101}$$

Уравнение (П.101) задает полиномиальное уравнение степени n по α и называется *характеристическим уравнением*. Обычно существует n решений этого уравнения. Эти решения называются *характеристическими корнями* или *собственными значениями*.

Каждое собственное значение α_i соответствует некоторому вектору v_i (определяемому с точностью до скалярного множителя), который удовлетворяет

$$Av_i = v_i\alpha_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{П.102}$$

Вектор v_i называется характеристическим вектором или собственным вектором. Для каждого α_i из уравнения (П.102) определяется $n \times 1$ вектор-столбец v_i (A имеет размеры $n \times n$, v_i – $n \times 1$, а α_i – 1×1). Из этих вектор-столбцов можно составить матрицу V с размером $n \times n$, так что получится

$$AV = VD, \tag{П.103}$$

где V – квадратная матрица собственных векторов размера $n \times n$, D – диагональная матрица размера $n \times n$, диагональными элементами которой являются собственные значения.

Если $\det(V) \neq 0$, что выполнено в случае, если собственные векторы линейно независимы, то V обратима и уравнение (П.103) может быть записано в виде

$$V^{-1}AV = D. \tag{П.104}$$

Другими словами, если умножить матрицу A на V^{-1} слева и на V справа, то получим диагональную матрицу с собственными значениями на диагонали. Эта процедура называется диагонализацией матрицы A и полезна при решении дифференциальных уравнений.

По существу, когда мы диагонализируем матрицу, мы находим такое множество осей (*базис векторов*), относительно которых исходная линейная система, которую представляет матрица A, имеет вид диагональной матрицы. Новые оси соответствуют собственным векторам. Линейная система в этих преобразованных осях задается диагональной матрицей собственных значений.

Приведем два важных результата. Во-первых, если все собственные значения различны, то матрица собственных векторов является невырожденной: т. е. $\det(V) \neq 0$. В этом случае V^{-1} существует и, следовательно, матрица A может быть диагонализирована.

Во-вторых, согласно другой теореме, определитель и след (сумма элементов главной диагонали) диагональной матрицы равны соответственно определителю и следу исходной матрицы. Этот результат полезен в тех случаях, когда требуется узнать знаки собственных значений.

Предположим, например, что A является матрицей второго порядка, и мы хотим знать, имеют ли два ее собственных значения одинаковый знак или нет. Если определитель A отрицателен, то и определитель D также будет отрицательным, но так как D — диагональная матрица, то ее определитель есть просто произведение двух собственных значений. Следовательно, два собственных значения имеют противоположные знаки.

В качестве примера рассмотрим собственные значения, собственные векторы и диагональную матрицу, соответствующие матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0.06 & -1 \\ -0.004 & 0 \end{bmatrix}.$$

Начнем с построения системы уравнений:

$$(A - \alpha I) \cdot v = \begin{bmatrix} 0{,}06 - \alpha & -1 \\ -0{,}004 & 0 - \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(П.105)}$$

Для получения нетривиального решения $v \neq 0$ должно быть выполнено:

$$\begin{vmatrix} 0{,}06 - \alpha & -1 \\ -0{,}004 & 0 - \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство определяет характеристическое уравнение

$$\alpha^2 - 0{,}06 \cdot \alpha - 0{,}004 = 0,$$

которому удовлетворяют два значения α:

$$\alpha_1 = 0{,}1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -0{,}04.$$

Следовательно, диагональная матрица, соответствующая A, имеет вид:

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы найти собственный вектор, соответствующий положительному собственному значению $\alpha_1 = 0{,}1$, подставим α_1 в уравнение (П.105):

$$\begin{bmatrix} 0{,}06 - 0{,}1 & -1 \\ -0{,}004 & -0{,}1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Это уравнение определяет два связывающих v_{11} и v_{21} условия: $-0{,}04 \cdot v_{11} - v_{21} = 0$ и $-0{,}004 \cdot v_{11} - 0{,}1 \cdot v_{21} = 0$. Второе условие является линейно зависимым от первого, так что мы его игнорируем. Итоговое решение для v_{11} и v_{21} в таком случае будет единственным только лишь с точностью до произвольного скалярного множителя каждого значения. Если нормализовать v_{11} до 1, то $v_{21} = -0{,}04$. Тогда первый собственный вектор равен

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.004 \end{bmatrix}.$$

Если повторить эту процедуру для $\alpha_2 = -0{,}04$, то получим следующую связь между v_{12} и v_{22}: $0{,}1 \cdot v_{12} - v_{22} = 0$. Если нормализовать v_{12} до 1, то получим $v_{22} = 0{,}1$, то второй собственный вектор:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Два собственных вектора линейно независимы, а матрица нормированных собственных векторов имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}04 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Можно убедиться в том, что $V^{-1}AV = D$, обратив предварительно матрицу V:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1/0.14 & -1/0{,}14 \\ 0{,}04/0.14 & 1/0{,}14 \end{bmatrix}.$$

Теперь легко проверить, что $V^{-1}AV$ является диагональной матрицей D, которая записана выше.

П.5. Полезные результаты теории дифференциального и интегрального исчисления

П.5.1. Теорема о неявной функции

Пусть $f(x_1, x_2)$ – функция двух переменных в вещественном пространстве. Предположим, что $f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $\phi(x_1, x_2) = 0$ – уравнение, в которое переменные x_1 и x_2 входят только через функцию $f(x_1, x_2)$ и которое неявно определяет x_2 как функцию x_1: $x_2 = \tilde{x}_2(x_1)$. Пример: $\phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - a = 0$, где a константа. В теореме о неявной функции говорится, что наклон графика функции $\tilde{x}_2(x_1)$ определяется выражением

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dx_1} = -\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}. \qquad (\text{П.106})$$

Причем это верно независимо от того, существует ли решение для $\tilde{x}_2(x_1)$ в явном или замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2$ и уравнение $\phi(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2 - 1 = 0$. В этом случае мы можем найти явную функцию $\tilde{x}_2(x_1) = 3x_1^2 - 1$. Если мы применим теорему о неявной функции (уравнение (П.106)), то получим

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dx_1} = -\frac{6x_1}{-1} = 6x_1.$$

На самом деле в этом примере необходимости применять теорему о неявной функции для нахождения $d\tilde{x}_2/dx_1$ не было, так как можно было просто продифференцировать $\tilde{x}_2(x_1) = 3x_1^2 - 1$ непосредственно и получить $6x_1$. Теорема полезна в случае, если для $\tilde{x}_2(x_1)$ нет решения в замкнутом виде.

Рассмотрим другой пример:

$$f(x_1, x_2) = \log(x_1) + 3 \cdot (x_1)^2 \cdot x_2 + e^{x_2}$$

и уравнение

$$\phi(x_1, x_2) = \log(x_1) + 3 \cdot (x_1)^2 \cdot x_2 + e^{x_2} - 17 = 0,$$

которое неявно определяет x_2 как функцию x_1. В явном виде функцию $\tilde{x}_2(x_1)$ записать нельзя. Однако, используя теорему о неявной функции, мы можем вычислить производную этой функции

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dx_1} = -\frac{(1/x_1) + 6x_1x_2}{3 \cdot (x_1)^2 + e^{x_2}}.$$

Также существует многомерная версия теоремы о неявной функции. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – функция n переменных в вещественном пространстве. Предположим, что $f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ – уравнение, в которое переменные $x_1, \ldots, x_n$ входят только через функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и которое неявно определяет x_n как функцию $x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$: $x_n = \tilde{x}_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Из теоремы о неявной функции имеем производные функции $\tilde{x}_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$:

$$\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_i} = -\frac{\partial f(\cdot)/\partial x_i}{\partial f(\cdot)/\partial x_n}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{П.107}$$

П.5.2. Теорема Тейлора

Пусть $f(x)$ – функция одной переменной в вещественном пространстве. Теорема Тейлора утверждает, что мы можем аппроксимировать эту функцию в окрестности точки x^* полиномами степени n следующего вида:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x^*) &+ \left(\frac{df}{dx}\right)\bigg|_{x^*} \cdot (x - x^*) + \\
&+ \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)\bigg|_{x^*} \cdot (x - x^*)^2 \cdot \left(\frac{1}{2!}\right) + \\
&+ \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)\bigg|_{x^*} \cdot (x - x^*)^3 \cdot \left(\frac{1}{3!}\right) + \cdots + \\
&+ \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)\bigg|_{x^*} \cdot (x - x^*)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}\right) + R_n,
\end{aligned}
\qquad (\text{П.108})
$$

где $(d^n f/dx^n)\,|_{x^*}$ · n-я производная функции f по x в точке x^*; $n!$ – n факториал, т. е. $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$; R_n – остаточный член. Выражение в уравнении (П.108) без R_n называется *разложением* $f(x)$ *в ряд Тейлора* в окрестности x^*. Наличие остатка R_n в уравнении означает, что разложение в ряд Тейлора не является точной формулой для $f(x)$. Теорема Тейлора описывает условия, при которых данная аппроксимация тем точнее, чем больше n.

Мы можем проверить точность формулы Тейлора (т. е. величину R_n), аппроксимировав ею полином. Если формула верна, то она должна в точности воспроизвести полином. Например, если мы запишем полином степени 3 для аппроксимации x^3 в окрестности 1, то получим

$$
\begin{aligned}
x^3 &= 1^3 + (3 \cdot 1^2) \cdot (x - 1) + \frac{(6 \cdot 1) \cdot (x-1)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-1)^3}{6} + R_3 = \\
&= 1 + (3x - 3) + 3 \cdot (x^2 - 2x - 1) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + R_3 = x^3.
\end{aligned}
$$

Остаток R_3 в данном случае равен нулю.

В качестве другого примера запишем полином 4-го порядка для аппроксимации нелинейной функции e^x в окрестности 0:

$$
\begin{aligned}
e^x &= e^0 + e^0 \cdot x + e^0 \cdot \frac{x^2}{2} + e^0 \cdot \frac{x^3}{6} + e^0 \cdot \frac{x^4}{24} + R_4 = \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4.
\end{aligned}
$$

Эта аппроксимация (без R_n) тем точнее, чем больше n.

Если для аппроксимации функции в окрестности точки x^* используется полином первого порядка, то говорят, что эта функция *линеаризуется* в окрестности x^*. Можно также лог-линеаризовать функцию $f(x)$ путем аппроксимации разложением в ряд Тейлора первого порядка функции $\log(x)$ в окрестности $\log(x^*)$. Лог-линеаризации часто используются в данной книге и весьма полезны для эмпирических исследований.

Двумерная версия теоремы Тейлора формулируется следующим образом. Пусть $f(x_1, x_2)$ - дважды непрерывно-дифференцируемая вещественная функция. Тогда можно аппроксимировать $f(x_1, x_2)$ в окрестности точки (x_1^*, x_2^*) разложением второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1^*, x_2^*) + f_{x_1}(\cdot) \cdot (x_1 - x_1^*) + f_{x_2}(\cdot) \cdot (x_2 - x_2^*) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[f_{x_1 x_2}(\cdot) \cdot (x_1 - x_1^*)^2 + 2 \cdot f_{x_1 x_2}(\cdot) \cdot (x_1 - x_1^*) \cdot (x_2 - x_2^*) + \right. \\ &\qquad \left. + f_{x_2 x_2}(\cdot) \cdot (x_2 - x_2^*)^2 \right] + R_2, \end{aligned} \qquad (\Pi.109)$$

где $f_{x_i}(\cdot)$ – частная производная $f(\cdot)$ по x_i, вычисленная в точке (x_1^*, x_2^*); $f_{x_i x_j}(\cdot)$ – вторая частная производная $f(\cdot)$ по x_i в точке (x_1^*, x_2^*). Линейная аппроксимация $f(\cdot)$ в окрестности (x_1^*, x_2^*) задается первыми тремя членами в правой части уравнения (П.109).

П.5.3. Правило Лопиталя

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - две вещественные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Пусть пределы обеих функции при стремлении x к x^* равны 0, т. е.

$$\lim_{x \to x^*} [f(x)] = \lim_{x \to x^*} [g(x)] = 0.$$

Допустим, нас интересует предел отношения $f(x)/g(x)$ при стремлении x к x^*. В этом случае это отношение является неопределенностью вида 0/0 при стремлении x к x^*. Правило Лопиталя гласит:

$$\lim_{x \to x^*} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to x^*} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right] \qquad (\Pi.110)$$

при условии, что предел в правой части уравнения существует. Если же выражение в правой части уравнения все еще равно 0/0, мы можем применить правило Лопиталя снова, до тех пор, пока не получим результат, отличный от неопределенности. Помимо неопределенности вида 0/0, правило Лопиталя работает также и для неопределенности вида ∞/∞. Однако данное правило не срабатывает в случае, если $f(x)/g(x)$ стремится к бесконечности при стремлении x к x^*.

В качестве примера рассмотрим функции $f(x) = 2x$ и $g(x) = x$. Предел отношения $f(x)/g(x)$ при стремлении x к 0 вычисляется следующим образом:

$$\lim_{x \to x^*} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{0}{0} = \lim_{x \to x^*} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right] = \frac{2}{1} = 2.$$

П.5.4. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям основано на том, что производная произведения двух функций времени v_1 и v_2 имеет вид

$$d[v_1 v_2] = v_2\,dv_1 + v_1\,dv_2,$$

где $dv_1 = v_1'(t)\,dt$ и $dv_2 = v_2'(t)\,dt$. Взятие интеграла от обеих частей уравнения выше дает

$$v_1 v_2 = \int v_2\,dv_1 + \int v_1\,dv_2.$$

Переставив члены в этом уравнении, получаем формулу для интегрирования по частям:

$$\int v_2\,dv_1 = v_1 v_2 - \int v_1\,dv_2. \qquad (\text{П.111})$$

В качестве примера найдем интеграл

$$\int te^t\,dt.$$

Обозначим $v_1 = t$ и $dv_2 = e^t dv$. Интегрируя dv_2, получаем: $v_2 = e^t$. Взяв производную v_1, получаем $dv_1 = 1$. Используя формулу интегрирования по частям (П.111), получаем:

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = e^t \cdot (t-1).$$

П.5.5. Фундаментальная теорема исчисления

Пусть $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если $F(t) = \int f(t)\,dt$ – неопределенный интеграл $f(t)$, так что $F'(t) = f(t)$, то определенный интеграл принимает вид

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad (\text{П.112})$$

Интерпретацией определенного интеграла является площадь под функцией $f(t)$ между точками a и b (см. рис. П.14).

П.5.6. Правила дифференцирования интегралов

Дифференцирование по переменной интегрирования. Из условия $F'(t) = f(t)$ следует, что производной неопределенного интеграла по переменной интегрирования t, является сама функция $f(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dt}[F(t)] = F'(t) = f(t). \qquad (\text{П.113})$$

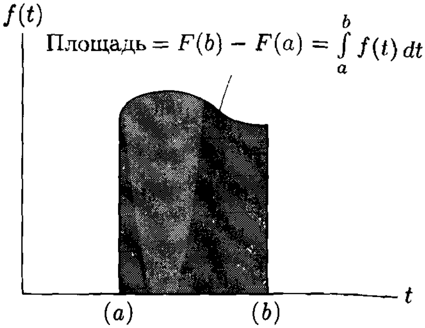


Рис. П.14. Определенный интеграл. Определенный интеграл соответствует площади области под кривой между пределами интегрирования

Правило Лейбница для дифференцирования определенных интегралов. Пусть $F(a,b,c)$ - - функция, представляющая собой определенный интеграл функции $f(c,t)$, где a и b – нижний и верхний пределы интегрирования соответственно, а c – параметр функции $f(\cdot)$:

$$F(a,b,c) = \int_a^b f(c,t)\,dt. \tag{П.114}$$

Предположим, что $f(c,t)$ имеет непрерывную частную производную по c, $f_c(\cdot) \equiv \partial f(\cdot)/\partial c$. Производная $F(\cdot)$ по c имеет вид

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial c} = \int_a^b f_c(c,t)\,dt. \tag{П.115}$$

Производные $F(\cdot)$ по пределам интегрирования задаются следующими формулами:

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left\{\int_a^b f_c(c,t)\,dt\right\} = f(c,t)|_{t=b} = f(c,b); \tag{П.116}$$

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left\{\int_a^b f_c(c,t)\,dt\right\} = -f(c,t)|_{t=a} = -f(c,a). \tag{П.117}$$

Из уравнений (П.115) -(П.117) и вытекает правило Лейбница. Предположим, что a и b являются функциями c:

$$F(c) = \int_{a(c)}^{b(c)} f(c,t)\,dt. \qquad (\text{П}.118)$$

Тогда правило Лейбница дифференцирования определенных интегралов записывается следующим образом:

$$\frac{dF(c)}{dc} = \int_{a(c)}^{b(c)} f(c,t)\,dt + f(c,b[c]) \cdot b'(c) - f(c,a[c]) \cdot a'(c). \qquad (\text{П}.119)$$

Литература

[1] Abel, Andrew, and Olivier Blanchard (1983). «An Intertemporal Equilibrium Model of Saving and Investment». *Econometrica,* 51, May, 675–692.

[2] Acemoglu, Daron (2002). «Labor- and Capital-Augmenting Technical Change». Unpublished, MIT, November.

[3] Acemoglu, Daron, Simon Johnson, and James A. Robinson (2001). «The Colonial Origins of Comparative Development: An Empirical Investigation». *American Economic Review,* 91, December, 1369–1401.

[4] Acemoglu, Daron, Simon Johnson, and James A. Robinson (2002). «Reversal of Fortune: Geography and Institutions in the Making of the Modern World Income Distribution». *Quarterly Journal of Economics,* 117, November, 1231–1294.

[5] Ades, Alberto F., and Edward L. Glaeser (1995). «Trade and Circuses: Explaining Urban Giants». *Quarterly Journal of Economics,* 110, February, 195–227.

[6] Aghion, Philippe, Nicholas Bloom, Richard Blundell, Rachel Griffith, and Peter Howitt (2002). «Competition and Innovation: An Inverted U Relationship». National Bureau of Economic Research, working paper 9269, October.

[7] Aghion, Philippe, Christopher Harris, Peter Howitt, and John Vickers (2001). «Competition, Imitation, and Growth with Step-by-Step Innovation». *Review of Economic Studies,* 68, July, 467–92.

[8] Aghion, Philippe, and Peter Howitt (1992). «A Model of Growth Through Creative Destruction». *Econometrica,* 60, March, 323–351.

[9] Aghion, Philippe, and Peter Howitt (1998). *Endogenous Growth Theory.* Cambridge MA: MIT Press. Ainslie, George W. (1992). *Picoeconomics.* Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Alesina, Alberto, Amaud Devleeschauwer, William Easterly, Sergio Kurfat, and Romain Wacziarg (2003). «Fractionalization». Unpublished, Harvard University, January.

[11] Arnold, Lutz (1997). «Stability of the Steady-State Equilibrium in the Uzawa-Lucas Model: A Simple Proof». *Zeitschrift fur Wirtschafts- und Sozialwissenschaften,* 117, January, 197–207.

[12] Arrow, Kenneth J. (1962). «The Economic Implications of Learning by Doing». *Review of Economic Studies,* 29, June, 155–173.

[13] Arrow, Kenneth J., Hollis B. Chenery, Bagicha S. Minhas, and Robert M. Solow (1961). «Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency». *Review of Economics and Statistics,* 43, August, 225–250.

[14] Arrow, Kenneth J., and Alain C. Enthoven (1961). «Quasiconcave Programming». *Econometrica,* 29, October, 779–800.

[15] Arrow, Kenneth J., and Mordecai Kurz (1970). «Optimal Growth with Irreversible Investment in a Ramsey Model». *Econometrica,* 38, March, 331–344.

[16] Asher, H. (1956). *Cost-Quantity Relationships in the Airframe Industry.* R-291. Santa Monica, CA: Rand Corporation.

[17] Banco de Bilbao (various issues). *Renta Nacional de Espafia y su Distribucion Provincial.* Bilbao, Banco de Bilbao-Vizcaya.

[18] Barrett, David B. (1982). *World Christian Encyclopedia,* 1st ed. Oxford: Oxford University Press.

[19] Barro, Robert J. (1974). «Are Government Bonds Net Wealth?» *Journal of Political Economy,* 81, December, 1095–1117.

[20] Barro, Robert J. (1984). *Macroeconomics,* 1st ed. New York: Wiley.

[21] Barro, Robert J. (1987). «Government Spending, Interest Rates, Prices, and Budget Deficits in the United Kingdom, 1701–1918». *Journal of Monetary Economics,* 20, September, 221–247.

[22] Barro, Robert J. (1990a). «The Stock Market and Investment». *Review of Financial Studies,* 3, 115–130.

[23] Barro, Robert J. (1990b). «Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth». *Journal of Political Economy,* 98, October, part II, S103-S125.

[24] Barro, Robert J. (1991). «Economic Growth in a Cross Section of Countries». *Quarterly Journal of Economics,* 106, May, 407–443.

[25] Barro, Robert J. (1997). *Macroeconomics,* 5th ed. Cambridge, MA: MIT Press.

[26] Barro, Robert J. (1999). «Laibson Meets Ramsey in the Neoclassical Growth Model». *Quarterly Journal of Economics,* 114, November, 1125–1152.

[27] Barro, Robert J., and Gary S. Becker (1989). «Fertility Choice in a Model of Economic Growth». *Econometrica,* 57, March, 481–501.

[28] Barro, Robert J., and Jong-Wha Lee (1994). «Sources of Economic Growth». *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy.*

[29] Barro, Robert J., and Jong-Wha Lee (2001). «International Data on Educational Attainment: Updates and Implications». *Oxford Economic Papers,* 53, July, 541–563.

[30] Barro, Robert J., N. Gregory Mankiw, and Xavier Sala-i-Martin (1995). «Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth». *American Economic Review,* 85, March, 103–115.

[31] Barro, Robert J., and Xavier Sala-i-Martin (1991). «Convergence across States and Regions». *Brookings Papers on Economic Activity,* no. 1, 107–182.

[32] Barro, Robert J., and Xavier Sala-i-Martin (1992a). «Convergence». *Journal of Political Economy,* 100, April, 223–251.

[33] Barro, Robert J. and Xavier Sala-i-Martin (1992b). «Regional Growth and Migration: A Japan-United States Comparison». *Journal of the Japanese and International Economies,* 6, December, 312–346.

[34] Barro, Robert J., and Xavier Sala-i-Martin (1992c). «Public Finance in Models of Economic Growth». *Review of Economic Studies*, 59, October, 645-661.

[35] Barro, Robert, and Xavier Sala-i-Martin (1997). «Technological diffusion, convergence, and growth». *Journal of Economic Growth*, 2, March, 1-26.

[36] Baumol, William J. (1986). «Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Data Show». *American Economic Review*, 76, December, 1072-1085.

[37] Becker, Gary S. (1965). «A Theory of the Allocation ofTime». *Economic Journal*, 75, September, 493-517.

[38] Becker, Gary S. (1991). «The Demand for Children», chapter 5 in *Treatise on the Family*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[39] Becker, Gary S., and Robert J. Barro (1988). «A Reformulation of the Economic Theory of Fertility». *Quarterly Journal of Economics*, 103, February, 1-25.

[40] Becker, Gary S., Kevin M. Murphy, and Robert Tamura (1990). «Human Capital, Fertility, and Economic Growth». *Journal of Political Economy*, 98, October, part II, S12-S37.

[41] Behrman, Jere R. (1990). «Women's Schooling and Nonmarket Productivity: A Survey and a Reappraisal». Unpublished, University of Pennsylvania.

[42] Benhabib, Jess, and Roger E. A. Farmer (1996). «Indeterminacy and Sector-Specific Externalities». *Journal of Monetary Economics*, 37, 397-419.

[43] Benhabib, Jess, Richard Rogerson, and Randall Wright (1991). «Homework in Macroeconomics: Household Production and Aggregate Fluctuations». *Journal of Political Economy*, 99, December, 1166-1187.

[44] Benveniste, Lawrence M., and Jose A. Scheinkman (1982). «Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case». *Journal of Economic Theory*, 27, June, 1-19. Bernheim, B. Douglas, and Kyle Bagwell (1988). «Is Everything Neutral?» *Journal of Political Economy*, 96, April, 308-338.

[45] Bhalla, Surjit S. (2002). *Imagine There's No Country: Poverty, Inequality and Growth in the Era of Globalization*. Washington, DC: Institute for International Economics.

[46] Blanchard, Olivier (1985). «Debt, Deficits, and Finite Horizons». *Journal of Political Economy*, 93, April, 223–247. Blanchard, Olivier, and Stanley Fischer (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, MA: MIT Press. Blanchard, Olivier, Changyong Rhee, and Lawrence H. Summers (1993). «The Stock Market, Profit, and Investment». *Quarterly Journal of Economics*, 108, February, 115-136.

[47] Boldrin, Michele, and Aldo Rustichini (1994). «Growth and Indeterminacy in Dynamic Models with Externalities». *Econometrica*, 62, March, 323-343.

[48] Bollen, Kenneth A. (1990). «Political Democracy: Conceptual and Measurement Traps». *Studies in Comparative International Development*, Spring, 7-24.

[49] Bond, Eric, Ping Wang, and C. K. Yip (1996). «A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics». *Journal of Economic Theory,* 68, 149-173.

[50] Boijas. George J. (1992). «Ethnic Capital and Intergenerational Mobility». *Quarterly Journal of Economics,* 107, February, 123–150.

[51] Boijas. George J.. Stephen G. Bronars. and Stephen J. Trejo (1992). «Self-Selection and Internal Migration in the United States». *Journal of Urban Economics,* 32, September. 159–185.

[52] Borts, George H., and Jerome L. Stein (1964). *Economic Growth in a Free Market.* New York. Columbia University Press.

[53] Bowman, Larry W. (1991). *Mauritius: Democracy and Development in the Indian Ocean,* Boulder, CO: Westview.

[54] Brainard, William C., and James Tobin (1968). «Pitfalls in Financial Model Building». *American Economic Review,* 58, May, 99–122.

[55] Braun, Juan (1993). *Essays on Economic Growth and Migration.* Ph.D. dissertation. Harvard University.

[56] Bresnahan, Tim, and Manuel Trajtenberg (1995). «General Purpose Technologies" -Engines of Growth?» *Journal of Econometrics,* 65, 1, 83 108.

[57] Brezis, Elise, Paul Krugman, and Daniel Tsiddon (1993). «Leapfrogging in International Competition: A Theory of Cycles in National Technological Leadership». *American Economic Review,* 83, December, 1211–1219.

[58] Brock, William A. (1975). «A Simple Perfect Foresight Monetary Model». *Journal of Monetary Economics,* 1, April, 133–150.

[59] Caballe, Jordi, and Manuel S. Santos (1993). «On Endogenous Growth with Physical and Human Capital». *Journal of Political Economy,* 101, December, 1042 1067.

[60] Caballero, Ricardo J., and Adam B. Jaffe (1993). «How High are the Giants' Shoulders: An Empirical Assessment of Knowledge Spillovers and Creative Destruction in a Model of Economic Growth». In *NBER Macroeconomics Annual, 1993,* 15–74. Cambridge, MA: MIT Press.

[61] Cannon, Edmund S. (2000). «Economies of Scale and Constant Returns to Capital: A Neglected Early Contribution to the Theory of Economic Growth». *American Economic Review,* 90, March, 292–295.

[62] Canova, Fabio, and Albert Marcet (1995). «The Poor Stay Poor: Non-Convergence across Countries and Regions». Unpublished, Universitat Pompeu Fabra.

[63] Caselli, Francesco, and Wilbur John Coleman (2001). «Cross-Country Technology Diffusion: The Case of Computers». National Bureau of Economic Research, working paper 8130, February.

[64] Caselli, Francesco, Gerardo Esquivel, and Fernando Lefort (1996). «Reopening the Convergence Debate: A New Look at Cross-Country Growth Empirics». *Journal of Economic Growth,* 1996.

[65] Caselli. Francesco. and Jaume Ventura (2000). «A Representative Consumer Theory of Distribution». *American Economic Review,* 90. September. 909-926.

[66] Cashin. Paul (1995). «Economic Growth and Convergence across Seven Colonies of Australasia: 1861-1991». *The Economic Record.* 71. 213 June. 132-144.

[67] Cashin. Paul. and Norman Loayza (1995). «Paradise Lost? Growth. Convergence and Migration in the South Pacific». IMF working paper no. 95/28. International Monetary Fund.

[68] Cashin. Paul. and Ratna Sahay (1995). «Internal Migration. Center-State Grants and Economic Growth in the States of India». IMF working paper.

[69] Cass. David (1965). «Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation». *Review of Economic Studies,* 32. July. 233-240.

[70] Chamley. Christophe (1992). «The Last Shall Be First: Efficient Constraints on Foreign Borrowing in a Model of Endogenous Growth». *Journal of Economic Theory.* 58. December. 335-354.

[71] Chiswick, Barry R. (1978). «The Effect of Americanization on the Earnings of Foreign-Born Men». *Journal of Political Economy.* 86. October. 897-921.

[72] Christensen, Laurits R., Dianne Cummings, and Dale W. Jorgenson (1980). «Economic Growth, 1947-1973: An International Comparison». In John W. Kendrick and Beatrice Vaccara, eds., *New Developments in Productivity Measurement and Analysis.* NBER Conference Report. Chicago: University of Chicago Press.

[73] Chua. Hak B. (1993). «Regional Spillovers and Economic Growth». Ph.D. Dissertation, Harvard University.

[74] Coase. Ronald W. (1960). «The Problem of Social Cost». *Journal of Law and Economics.* 3. October. 1-44.

[75] Coe. David T.. and Elhanan Helpman (1995). «International R&D Spillovers». *European Economic Review.* 39. 859-887.

[76] Cohen. Daniel. and Jeffrey Sachs (1986). «Growth and External Debt under Risk of Debt Repudiation». *European Economic Review.* 30. June. 526-560.

[77] Collins. Susan M.. and Won Am Park (1989). «External Debt and Macroeconomic Performance in South Korea». In Jeffrey D. Sachs. ed.. *Developing Country Debt and the World Economy.* 121-140. Chicago: University of Chicago Press.

[78] Connolly. Michelle (1999). «North-South Technological Diffusion: A New Case for Dynamic Gains from Trade». Unpublished. Duke University. September.

[79] Coulombe. Serge. and Frank C. Lee (1993). «Regional Economic Disparities in Canada». Unpublished. University of Ottawa. July.

[80] David. Paul A. (1991). «Computer and Dynamo: The Modern Productivity Paradox in a Not-Too-Distant Mirror». In *Technology and Productivity: The Challenge for Economic Policy.* Paris: OECD.

[81] DeLong. J. Bradford (1988). «Productivity Growth. Convergence. and Welfare: Comment». *American Economic Review.* 78. December. 1138-1154.

[82] Denison, Edward F. (1962). «Sources of Growth in the United States and the Alternatives Before Us». Supplement Paper 13. New York: Committee for Economic Development.

[83] Denison, Edward F. (1967). *Why Growth Rates Differ.* Washington, DC: Brookings Institution.

[84] Denison, Edward F. (1974). *Accounting for United States Economic Growth, 1929-1969.* Washington, DC: Brookings Institution.

[85] Diamond, Peter (1965). «National Debt in a Neoclassical Growth Model». *American Economic Review,* 55, December, 1126–1150.

[86] Diewert, W. Erwin (1976). «Exact and Superlative Index Numbers». *Journal of Econometrics,* 4, May, 115–146.

[87] Dinopoulos, Elias, and Peter Thompson (1998). «Schumpeterian Growth Without Scale Effects». *Journal of Economic Growth,* 3, December, 313–335.

[88] Dixit, Avinash K., and Joseph E. Stiglitz (1977). «Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity». *American Economic Review,* 67, June, 297–308.

[89] Dolado, Juan, Alessandra Goria, and Andrea Ichino (1994). «Immigration, Human Capital, and Growth in the Host Country: Evidence from Pooled Country Data». *Journal of Population Economics,* 7, June, 193–215.

[90] Domar, Evsey D. (1946). «Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment». *Econometrica,* 14, April, 137–147.

[91] Doppelhofer, Gernot (2000). «Three Essays on the Determinants of Economic Growth». Unpublished Ph.D. dissertation, Columbia University.

[92] Dorfman, Robert (1969). «An Economic Interpretation of Optimal Control Theory». *American Economic Review,* 59, December, 817–831.

[93] Dougherty, Christopher (1991). «A Comparison of Productivity and Economic Growth in the G-7 Countries». Ph.D. dissertation, Harvard University.

[94] Douglas, Paul H. (1972). *In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas.* New York, Harcourt Brace Jovanovich.

[95] Dowrick, Steve, and Duc Tho Nguyen (1989). «OECD Comparative Economic Growth, 1950–85: Catch-Up and Convergence». *American Economic Review,* 79, December, 1010–1030.

[96] Duczynsti, Petr (2001). «Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth». *American Economic Review.* 90, June, 687–694.

[97] Durlauf, Steven N., and Danny T. Quah (1999). «The New Empirics of Economic Growth». In *Handbook of Macroeconomics,* vol. 1, ed. John B. Taylor and Michael Woodford. Amsterdam: North Holland.

[98] Easterlin, Richard A. (1960a). «Regional Growth of Income: Long-Run Tendencies». In Simon Kuznets, Ann Ratner Miller, and Richard A. Easterlin, eds., *Population Redistribution and Economic Growth, United States, 1870–1950. II: Analyses of Economic Change.* Philadelphia: American Philosophical Society.

[99] Easterlin, Richard A. (1960b). «Interregional Differences in Per Capita Income, Population, and Total Income, 1840–1950». In *Trends in the*

American Economy in the Nineteenth Century. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[100] Easterly, William (1993). «How Much Do Distortions Affect Growth?» *Journal of Monetary Economics,* 32, November, 187–212.

[101] Easterly, W., and Ross Levine (1997). «Africa's Growth Tragedy: Politics and Ethnic Divisions». *Quarterly Journal of Economics,* 112(4), 1203–1250.

[102] Easterly, William, and Sergio Rebelo (1993). «Fiscal Policy and Economic Growth: An Empirical Investigation». *Journal of Monetary Economics,* 32, December, 417–458.

[103] Elias, Victor J. (1990). *Sources of Growth: A Study of Seven Latin American Economies.* San Francisco: ICS Press.

[104] Ethier, Wilfred J. (1982). «National and International Returns to Scale in the Modern Theory of International Trade». *American Economic Review,* 72, June, 389–405.

[105] Faig, Miguel (1995). «A Simple Economy with Human Capital Accumulation: Transitional Dynamics, Technology Shocks, and Fiscal Policies». *Journal of Macroeconomics,* 17, summer, 421–446.

[106] Feenstra, Robert C., and James R. Markusen (1995). «Accounting for Growth with New Intermediate Inputs». *International Economic Review,* 35, May, 429–447.

[107] Fischer, Stanley (1979). «Anticipations and the Nonneutrality of Money». *Journal of Political Economy,* 87, April, 225–252.

[108] Fishbum, Peter C., and Ariel Rubinstein (1982). «Time Preference». *International Economic Review,* 23, October, 677–693.

[109] Fisher, I. (1930). *The Theory of Interest.* New York: Macmillan.

[110] Frankel, Marvin (1962). «The Production Function in Allocation and Growth: A Synthesis». *American Economic Review.* 52, December, 995–1022.

[111] Galor, Oded, and Harl E. Ryder (1989). «Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibrium in an Overlapping- Generations Model with Productive Capital». *Journal of Economic Theory,* 49, December, 360–375.

[112] Galor, Oded, and David N. Weil (1996). «The Gender Gap, Fertility, and Growth». *American Economic Review,* 86, June, 374–387.

[113] Galor, Oded, and David N. Weil (2000). «Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond». *American Economic Review,* 90, September, 806–828.

[114] Galor, Oded, and Joseph Zeira (1993). «Income Distribution and Macroeconomics». *Review of Economic Studies,* 60, January, 35–52.

[115] Gallup, John L., and Jeffrey D. Sachs (1998). «Geography and Economic Development». National Bureau of Economic Research, working paper no. 6849, December.

[116] Gastil, Raymond D. (1987). *Freedom in the World.* Westport, CT: Greenwood Press.

[117] Geary, Robert C. (1950–51). «A Note on "A Constant Utility Index of the Cost of Living"». *Review of Economic Studies,* 18, 1, 65–66.

[118] Gezici, Ferhan, and Geoffrey Hewings (2001). «Regional Convergence and the Economic Performance of Peripheral Areas in Turkey». Mimeograph. University of Illinois at Urbana-Champaign.

[119] Goldman, Steven M. (1980). «Consistent Plans». *Review of Economic Studies,* 47, April, 533–537.

[120] Granger, Clive, and Harold Uhlig (1990). «Reasonable Extreme-Bounds Analysis». *Journal of Econometrics,* 44, 159–170.

[121] Greenwood, Jeremy, and Zvi Hercowitz (1991). «The Allocation of Capital and Time over the Business Cycle». *Journal of Political Economy,* 99, December, 1188–1214.

[122] Greenwood, Jeremy, and Boyan Jovanovic (1990). «Financial Development, Growth, and the Distribution of Income». *Journal of Political Economy,* 98, October, 1076–1107.

[123] Greenwood, Michael J. (1975). «Research on Internal Migration in the United States: A Survey». *Journal of Economic Literature,* 13, June, 397–433.

[124] Griliches, Zvi (1957). «Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change». *Econometrica,* 25, October, 501–522.

[125] Griliches, Zvi (1964). «Research Expenditures, Education, and the Aggregate Agricultural Production Function». *American Economic Review,* 54, December, 961–974.

[126] Griliches, Zvi (1973). «Research Expenditures and Growth Accounting». In B. R. Williams, ed., *Science and Technology in Economic Growth.* New York: Macmillan.

[127] Griliches, Zvi (1979). «Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth». *Bell Journal of Economics,* 10(1), 92–116.

[128] Griliches, Zvi (1988). «Productivity Puzzles and R&D: Another Explanation». *Journal of Economic Perspectives,* 2, Fall, 9–21.

[129] Griliches, Zvi (1997). «The Simon Kuznets Memorial Lecture». Unpublished, Harvard University, October.

[130] Griliches, Zvi, and Frank Lichtenberg (1984). «R&D and Productivity Growth at the Industry Level: Is There Still a Relationship». In Zvi Griliches, ed., *R&D, Patents, and Productivity.* Chicago: University of Chicago Press.

[131] Grossman, Gene M., and Elhanan Helpman (1991). *Innovation and Growth in the Global Economy.* Cambridge, MA: MIT Press.

[132] Gulhati, Ravi, and Raj Nallari (1990). «Successful Stabilization and Recovery in Mauritius». EDI Development Policy Case Series, Analytical Case Studies, no. 5. Washington, DC: World Bank.

[133] Halkin, Hubert (1974). «Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons». *Econometrica,* 42, March, 267–272.

[134] Hansen, Gary D., and Edward C. Prescott (2002). «Malthus to Solow». *American Economic Review,* 92, September, 1205–1217.

[135] Harrod. Roy F. (1939). «An Essay in Dynamic Theory». *Economic Journal,* 49. June. 14–33.

[136] *Harrod. Roy F. (1942). Toward a Dynamic Economics: Some Recent Developments of Economic Theory and their Application to Policy. London: Macmillan.*

[137] Hart. Peter E. (1995). «Galtonian Regression Across Countries and the Convergence of Productivity». *Oxford Bulletin of Economics and Statistics,* 57. August. 287–293.

[138] Hatton. Timothy J., and Jeffrey G. Williamson (1994). «What Drove the Mass Migrations from Europe in the Late Nineteenth Century?» *Population and Development Review,* 20. September, 1–27.

[139] Hayashi. Fumio (1982). «Tobin's Marginal$q$ and Average$q$: A Neoclassical Interpretation». *Econometrica,* 50. January. 213–224.

[140] Heckman. James J. (1976). «A Life-Cycle Model of Earnings. Learning. and Consumption». *Journal of Political Economy,* 84. August. Part 2. S1 1-S44.

[141] Henderson. J. Vernon (1988). *Urban Development: Theory. Fact. and Illusion.* Oxford: Oxford University Press.

[142] Heston. Alan. Robert Summers. and Bettina Aten (2002). *Penn World Table Version 6.1.* Center for International Comparisons at the University of Pennsylvania (CICUP). October.

[143] Hicks. John (1932). *The Theory of Wages.* London: Macmillan.

[144] Hirshleifer. Jack (1987). *Economic Behavior in Adversity.* Chicago: University of Chicago Press.

[145] Jiossain. Akhtar (2000). «Convergence of Per Capita Output Levels Across Regions of Bangladesh. 1982–97».

[146] IMF working paper.

[147] Hsieh. Chang-Tai (2002). «What Explains the Industrial Revolution in East Asia? Evidence from the Factor Markets». *American Economic Review,* 92. June. 502–526.

[148] Inada. Ken-Ichi (1963). «On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization». *Review of Economic Studies.* 30. June. 119–127.

[149] International Currency Analysis (1991). *World Currency Yearbook, 1988–89.* Brooklyn. NY.

[150] International Monetary Fund (1991). *International Financial Statistics Yearbook.* Washington. DC. International

[151] Monetary Fund.

[152] Jaumotte. Florence (1999). «Technological Catch-up and the Growth Process». Unpublished. Harvard University. November.

[153] Jeffreys. Harold (1961). *Theory of Probability.* 3rd ed. Oxford: Oxford University Press.

[154] Jones. Charles I. (1995). «R&D-Based Models of Economic Growth». *Journal of Political Economy.* 103. August. 759–784.

[155] Jones. Charles I. (1999). «Growth: With or Without Scale Effects». *American Economic Review,* 89. May. 139–144.

[156] Jones, Charles I. (2001). «Was an Industrial Revolution Inevitable? Economic Growth over the Very Long Run». *Advances in Economics*, 1(2). Article 1.

[157] Jones, Larry E., and Rodolfo E. Manuelli (1990). «A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications». *Journal of Political Economy*, 98, October, 1008–1038.

[158] Jorgenson, Dale W., Frank M. Gollop, and Barbara M. Fraumeni (1987). *Productivity and U. S. Economic Growth.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[159] Jorgenson, Dale W., and Zvi Griliches (1967). «The Explanation of Productivity Change». *Review of Economic Studies*, 34, July, 249–280.

[160] Jorgenson, Dale, and Eric Yip (2001). «Whatever Happened to Productivity Growth?» In E. R. Dean, M. J. Harper, and C. Hulten, eds., *New Developments in Productivity Analysis*, 205–246. Chicago: University of Chicago Press.

[161] Jovanovic, Boyan, and Saul Lach (1991). «The Diffusion of Technological Inequality among Nations». Unpublished, New York University.

[162] Jovanovic, Boyan, and Yaw Nyarko (1996). «Learning by Doing and the Choice of Technology». *Econometrica*, 64, November, 1299–1310.

[163] Judd, Kenneth L. (1985). «On the Performance of Patents». *Econometrica*, 53, May, 567–585.

[164] Judson, Ruth (1998). «Economic Growth and Investment in Education: How Allocation Matters». *Journal of*

[165] *Economic Growth*, 3, December, 337–359.

[166] Kaldor, Nicholas (1963). «Capital Accumulation and Economic Growth». In Friedrich A. Lutz and Douglas C. Hague, eds., *Proceedings of a Conference Held by the International Economics Association.* London: Macmillan.

[167] *Kamien, Morton I., and Nancy L. Schwartz (1991). Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, 2nd ed. Amsterdam: North Holland.*

[168] Kendrick, John W. (1961). *Productivity Trends in the United States.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

[169] Kendrick, John W. (1976). *The Formation and Stocks of Total Capital.* New York: Columbia University Press.

[170] Kimball, Miles S. (1987). «Making Sense of Two-Sided Altruism». *Journal of Monetary Economics*, 20, September, 301–326.

[171] King, Robert G., and Ross Levine (1993). «Finance, Entrepreneurship, and Growth: Theory and Evidence». *Journal of Monetary Economics*, December, 513–542.

[172] King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio Rebelo (1988a). «Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model». *Journal of Monetary Economics*, 21, 2 3 (March May), 195 232.

[173] King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio Rebelo (1988b). «Production, Growth and Business Cycles: II. New Directions.« *Journal of Monetary Economics*, 21, March–May, 309–341.

[174] King, Robert G., and Sergio Rebelo (1993). «Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model.« *American Economic Review*, 83, September, 908–931.

[175] Knack, Stephen, and Philip Keefer (1995). «Institutions and Economic Performance: Cross-Country Tests Using Alternative Institutional Measures.« *Economics and Politics*, 7, 207–228.

[176] Knight, Frank H. (1944). «Diminishing Returns from Investment». *Journal of Political Economy*, 52, March, 26–41.

[177] Koopmans, Tjalling C. (1960). «Stationary Ordinal Utility and Impatience». *Econometrica*, 28, April, 287–309.

[178] Koopmans, Tjalling C. (1965). «On the Concept of Optimal Economic Growth». In *The Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North Holland, 1965.

[179] Kremer, Michael (1993). «Population Growth and Technological Change: One Million **B. C.** to 1990». *Quarterly Journal of Economics*, 108, August, 681–716.

[180] Kremer, Michael, and James Thomson (1998). «Why Isn't Convergence Instantaneous? Young Workers, Old Workers, and Gradual Adjustment». *Journal of Economic Growth*, 3, March, 5–28.

[181] Krugman, Paul (1979). «A Model of Innovation, Technology Transfer, and the World Distribution of Income». *Journal of Political Economy*, 87, April, 253–266.

[182] Krugman, Paul (1991). «History Versus Expectations». *Quarterly Journal of Economics*, 106, May, 651–667.

[183] Kuhn, Harold W., and Albert W. Tucker (1951). «Nonlinear Programming». In J. Neyman, ed., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 481–492. Berkeley: University of California Press.

[184] Kurz, Mordecai (1968). «The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes». *Review of Economic Studies*, 35, April, 155–174.

[185] Kuznets, Simon (1961). «Economic Growth and the Contribution of Agriculture: Notes on Measurement». *International Journal of Agrarian Affairs*, 3, April, 56–75.

[186] Kuznets, Simon (1973). «Modern Economic Growth: Findings and Reflections». *American Economic Review*, 63, June, 247–258.

[187] Kuznets, Simon (1981). «Modern Economic Growth and the Less Developed Countries». *Conference on Experiences and Lessons of Economic Development in Taiwan*. Taipei: Institute of Economics, Academia Sinica.

[188] Kydland, Finn E., and Edward C. Prescott (1982). «Time to Build and Aggregate Fluctuations». *Econometrica*, 50, November, 1345–1370.

[189] Laibson, David (1994). «Self-Control and Saving». Unpublished, Harvard University, May.

[190] Laibson, David (1996). «Hyperbolic Discount Functions, Undersaving, and Savings Policy». National Bureau of Economic Research, working paper no. 5635, June.

[191] Laibson, David (1997a). «Golden Eggs and Hyperbolic Discounting». *Quarterly Journal of Economics,* 112, May, 443–477.

[192] Laibson, David (1997b). «Hyperbolic Discount Functions and Time Preference Heterogeneity». Unpublished, Harvard University, March.

[193] La Porta, Rafael, Florencio Lopez-de-Silanes, Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny (1998). «Law and Finance». *Journal of Political Economy,* 106, December, 1113–1155.

[194] Learner, Edward E. (1978). *Specification Searches.* New York: John Wiley and Sons.

[195] Learner. Edward E. (1983). «Let's Take the Con Out of Econometrics». *American Economic Review,* 73, March, 31–43.

[196] Learner. Edward E. (1985). «Sensitivity Analysis Would Help». *American Economic Review,* 75, June, 308–313.

[197] Leontief, Wassily (1941). *The Structure of the American Economy, 1919–1929.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[198] Levine, Ross, and David Renelt (1992). «A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions». *American Economic Review*; 82, September, 942–963.

[199] Lewis, William Arthur (1954). «Economic Development with Unlimited Supplies of Labor». *Manchester School of Economics and Social Studies,* 22, May, 139–191.

[200] Loewenstein, George, and Drazen Prelec (1992). «Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation». *Quarterly Journal of Economics,* 107, May, 573–598.

[201] Lucas, Robert E., Jr. (1988). «On the Mechanics of Economic Development». *Journal of Monetary Economics,* 22, July, 3–42.

[202] Lucas, Robert E. (2002). «The Industrial Revolution: Past and Future». In *Lectures in Economic Growth.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

[203] Maddison, Angus (1982). *Phases of Capitalist Development.* Oxford: Oxford University Press.

[204] Maddison, Angus (1989). The World Economy in the Twentieth Century. Paris: OECD.

[205] Maddison, Angus (1991). *Dynamic Forces in Capitalist Development.* Oxford: Oxford University Press.

[206] Maddison, Angus (1992). «A Long-Run Perspective on Saving». *Scandinavian Journal of Economics,* 94, 2, 181–196.

[207] Magalhaes, Andre, Geoffrey Hewings, and Carlos Roberto Azzoni (2000). «Spatial Dependence and Regional Convergence in Brazil». Mimeograph, University of Illinois at Urbana-Champaign.

[208] Malthus, Thomas R. (1798). *An Essay on the Principle of Population.* London: W. Pickering, 1986.

[209] Mangasarian, O. L. (1966). «Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems». *SI AM Journal of Control,* 4, February, 139–152.

[210] Mankiw. N. Gregory. David Romer. and David N. Weil (1992). «A Contribution to the Empirics of Economic Growth». *Quarterly Journal of Economics*. 107. May. 407–437.

[211] Mansfield. Edwin (1965). «Rates of Return from Industrial R&D». *American Economic Review*. 55. March. 310–322.

[212] Mansfield. Edwin (1985). «How Rapidly Does New Industrial Technology Leak Out?» *Journal of Industrial Economics*. 34. December. 217–223.

[213] Mansfield. Edwin. Mark Schwartz. and Samuel Wagner (1981). «Imitation Costs and Patents: An Empirical Study». *Economic Journal*. 91. December. 907–918.

[214] Mas-Colell. Andreu. and Assaf Razin (1973). «A Model of Intersectoral Migration and Growth». *Oxford Economic Papers*. 25. March. 72–79.

[215] Matsuyama. Kiminori (1991). «Increasing Returns. Industrialization. and the Indeterminacy of Equilibrium». *Quarterly Journal of Economics*. 106. May. 617–650.

[216] Mauro. Paolo (1995). «Corruption and Growth». *Quarterly Journal of Economics*. 110. August. 681–712.

[217] McCallum. Bennett T. (1984). «Are Bond-Financed Deficits Inflationary? A Ricardian Analysis». *Journal of Political Economy*. 92. February. 123–135.

[218] McCallum. Bennett T. (1989). «Real Business Cycle Models». In Robert J. Barro. ed.. *Modern Business Cycle Theory*. Cambridge. MA: Harvard University Press.

[219] Michel. Philippe (1982). «On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems». *Econometrica*. 50. July. 975–985.

[220] Minasian. Jora R. (1962). «The Economics of Research and Development». In Richard R. Nelson. ed.. *The Rate and Direction of Inventive Activity*. NBER Special Conference Series. Princeton. NJ: Princeton University Press.

[221] Mino. Kazuo (1996). «Analysis of a Two-Sector Model of Endogenous Growth with Capital Income Taxation». *International Economic Review*. 37. February. 227–251.

[222] Molle. Willem. Bas Van Hoist. and Hans Smits (1980). *Regional Disparity and Economic Development in the European Community*. Westmead. England: Saxon House.

[223] Mulligan. Casey B. (1993). «On Intergenerational Altruism. Fertility. and the Persistence of Economic Status». Ph.D. dissertation. University of Chicago.

[224] Mulligan. Casey B.. and Xavier Sala-i-Martin (1991). «A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Economic Models». National Bureau of Economic Research Technical Working Paper no. 116. November.

[225] Mulligan. Casey B.. and Xavier Sala-i-Martin (1993). «Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth». *Quarterly Journal of Economics*. 108. August. 737–773.

[226] Murphy, Kevin M., Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny (1989). «Industrialization and the Big Push». *Quarterly Journal of Economics*. 106. May. 503–530.

[227] Murphy. Kevin M.. and Finis Welch (1990). «Empirical Age-Earnings Profiles». *Journal of Labor Economics*, 8. April. 202–229.

[228] Nelson. Richard R., and Edmund S. Phelps (1966). «Investment in Humans. Technological Diffusion, and Economic Growth». *American Economic Review*. 56. May. 69–75.

[229] Ohyama. Michihiro. and Ronald W. Jones (1993). «Technology Choice. Overtaking and Comparative Advantage». Unpublished. University of Rochester. December.

[230] O'Leary, Eoin (2000). «Convergence of Living Standards Across Irish Regions: The Role of Demography and Productivity: 1960–1996». Mimeograph. University College Cork.

[231] Peretto, Pietro (1998). «Technological Change and Population Growth». *Journal of Economic Growth*, 3. December. 283–311.

[232] Persson, Joakim (1997). «Convergence across the Swedish counties. 1911 1993». *European Economic Review*, 41. December. 1835 1852.

[233] Petrakos, George. and Yannis Saratsis (2000). «Regional Inequalities in Greece». *Papers in Regional Science*. 79. 57 74.

[234] Phelps, Edmund S. (1962). «The New View of Investment: A Neoclassical Analysis». *Quarterly Journal of Economics*. 76. November. 548–567.

[235] Phelps. Edmund S. (1966). *Golden Rules of Economic Growth*. New York: Norton.

[236] Phelps. Edmund S., and Robert A. Pollak (1968). «On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth». *Review of Economic Studies*, 35. April. 185–199.

[237] Pitchford, John D. (1977). *Applications of Control Theory to Economic Analysis*. Amsterdam: North Holland.

[238] Pollak. Robert A. (1968). «Consistent Planning». *Review of Economic Studies*, 35. April. 201–208. Pontryagin. Lev S.. et al. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Interscience Publishers.

[239] Quah, Danny (1993). «Galton's Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis». *Scandinavian Journal of Economics*. 95. 4. 427–443.

[240] Quah. Danny (1996). «Twin Peaks: Growth and Convergence in Models of Distribution Dynamics». *Economic Journal*. 106. July. 1045–1055.

[241] Raftery. Adrian E.. David Madigan. and Jennifer A. Hoeting (1997). «Bayesian Model Averaging for Linear Regression Models». Journal of the American Statistical Association. 92. 179 191.

[242] Ramsey, Frank (1928). «A Mathematical Theory of Saving». *Economic Journal*. 38. December. 543 559.

[243] Rapping. Leonard (1965). «Learning and World War II Production Functions». *Review of Economics and Statistics*. Al. February. 81–86.

[244] Rebelo, Sergio (1991). «Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth». *Journal of Political Economy*. 99. June. 500–521.

[245] Reinganum, Jennifer F. (1989). «The Timing of Innovation: Research, Development, and Diffusion». In Richard Schmalensee and Robert D. Willig, eds., *Handbook of Industrial Organization*, vol. 1. New York: North Holland.

[246] Ricardo, David (1817). *On the Principles of Political Economy and Taxation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1951.

[247] Rivera-Batiz, Luis A., and Paul M. Romer (1991). «Economic Integration and Endogenous Growth». *Quarterly Journal of Economics*, 106, May, 531–555.

[248] Roback, Jennifer (1982). «Wages, Rents, and the Quality of Life». *Journal of Political Economy*, 90, December, 1257–1278.

[249] Robinson, Joan (1938). «The Classification of Inventions». *Review of Economic Studies*, 5, February, 139–142.

[250] Romer, Paul M. (1986). «Increasing Returns and Long-Run Growth». *Journal of Political Economy*, 94, October, 1002–1037.

[251] Romer, Paul M. (1987). «Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization». *American Economic Review*, 77, May, 56–62.

[252] Romer, Paul M. (1990). «Endogenous Technological *Change*». *Journal of Political Economy*, 98, October, part II, S71-S102.

[253] Romer, Paul M. (1992). «Two Strategies for Economic Development: Using Ideas and Producing Ideas». In World Bank, *Annual Conference on Economic Development*. Washington, DC.

[254] Romer, Paul M. (1993). «Idea Gaps and Object Gaps in Economic Development». *Journal of Monetary Economics*, 32, December, 543–573.

[255] Rybczynski, T.M. (1955). «Factor Endowments and Relative Commodity Prices». *Economica*, 22, November, 336–341.

[256] Saint-Paul, Gilles (1992). «Fiscal Policy in an Endogenous Growth Model». *Quarterly Journal of Economics*, 107, November, 1243–1259.

[257] Sala-i-Martin, Xavier (1990). «On Growth and States». Unpublished Ph.D. dissertation, Harvard University.

[258] Sala-i-Martin, Xavier (1997a). «I Just Ran Four Million Regressions». National Bureau of Economic Research working paper no. 6252, November.

[259] Sala-i-Martin, Xavier (1997b). «I Just Ran Two Million Regressions». *American Economic Review*, 87, December, 178–183.

[260] Sala-i-Martin, Xavier (2003a). «The World Distribution of Income, 1970–2000». Unpublished, Columbia University.

[261] Sala-i-Martin, Xavier (2003b). «Estimating Consumption Poverty and the World Distribution of Consumption, 1970–2000». Unpublished, Columbia University.

[262] Sala-i-Martin, Xavier, Gernot Doppelhofer, and Ronald Miller (2003). «Determinants of Long-Term Growth: A Bayesian Averaging of Classical Estimates (BACE) Approach». Unpublished, Columbia University.

[263] Samuelson, Paul A. (1954). «The Pure Theory of Public Expenditure». *Review of Economics and Statistics*, 36, November, 387–389.

[264] Samuelson, Paul A. (1958). «An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money». *Journal of Political Economy,* 66, December, 467–482.

[265] Sanchez-Robles, Blanca, and Jose Villaverde (2001). «Polarizacion, Convergencia y Movilidad entre las provincias espanolas, 1955–1997». *Revista Asturiana de Economia,* May. 259–270.

[266] Schmookler, Jacob (1966). *Invention and Economic Growth.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[267] Schultz, T. Paul (1989). «Returns to Women's Education». PHRWD Background Paper 89-001, World Bank, Population, Health, and Nutrition Department, Washington, DC.

[268] Schumpeter, Joseph A. (1934). *The Theory of Economic Development.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[269] Schwarz, Gideon (1978). «Estimating the Dimension of a Model». *The Annals of Statistics,* 6, 461–464.

[270] Searle, Allan D. (1946). «Productivity Changes in Selected Wartime Shipbuilding Programs». *Monthly Labor Review.*

[271] Segerstrom, Paul S. (1991). «Innovation, Imitation, and Economic Growth». *Journal of Political EconomJjA* August, 807–827.

[272] Segerstrom, Paul S. (1998). «Endogenous Growth Without Scale Effects». *American Economic Review,* 88, 1 December, 1290–1310.

[273] Shell, Karl (1967). «A Model of Inventive Activity and Capital Accumulation». In Karl Shell, ed., *Essays on thm Theory of Optimal Economic Growth,* 67–85. Cambridge, MA: MIT Press.

[274] Sheshinski, Eytan (1967). «Optimal Accumulation with Learning by Doing». In Karl Shell, ed., *Essays on* riel *Theory of Optimal Economic Growth,* 31–52. Cambridge, MA: MIT Press.

[275] Shioji, Etruso (1997). «It's Still 2%: Evidence on Convergence from 116 Years of the US States Panel Da&l Working Paper Universitat Pompeu Fabra.

[276] Sidrauski, Miguel (1967). «Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy». *American Economic Review,* 57, May, 534–544.

[277] Smith, Adam (1776). An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. New York: Random House, 1937.

[278] Solow, Robert M. (1956). «A Contribution to the Theory of Economic Growth». *Quarterly Journal of Economic* 70, February, 65–94.

[279] Solow, Robert M. (1957). «Technical Change and the Aggregate Production Function». *Review of EconomiamJl Statistics,* 39, August, 312–320.

[280] Solow, Robert M. (1969). «Investment and Technical Change». In Kenneth J. Arrow et al., eds., *MathemrtU Methods in the Social Sciences.* Palo Alto, CA: Stanford University Press.

[281] Spence, Michael (1976). «Product Selection, Fixed Costs, and Monopolistic Competition». *Review of Economic Studies,* 43, June, 217–235.

[282] Srinivasan, T. N. (1964). «Optimal Savings in a Two-Sector Model of Growth». *Econometrica,* 32, July, 358-3131

[283] Stiglitz. Joseph E. (1969). «Distribution of Income and Wealth among Individuals». *Econometrica,* 37. Jul):] 382–397.

[284] Stone. Richard (1954). «Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand». *Economic Journal,* 64. September. 511-527.

[285] Streissler. Erich (1979). «Growth Models as Diffusion Processes: II». *Kyklos.* 32. 3. 571–586.

[286] Strotz. Robert H. (1956). «Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization». *Review of EconomI Studies.* 23. 165–180.

[287] Summers. Lawrence H. (1981). «Taxation and Corporate Investment: A q-Theory Approach». *Brookings Papem on Economic Activity,* no. 1. 67-127.

[288] Summers. Robert. and Alan Heston (1991). «The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of InternatkriB Comparisons. 1950–1988». *Quarterly Journal of Economics.* 106. May. 327–368.

[289] Swan. Trevor W. (1956). «Economic Growth and Capital Accumulation». *Economic Record.* 32. Novembfl 334–361.

[290] Teece. David J. (1977). «Technological Transfer by Multinational Firms: The Resource Cost of TransferaB Technological Know-How». *Economic Journal.* 87. June. 242-261.

[291] Temple. Jonathan (1999). «The New Growth Evidence». *Journal of Economic Literature,* 37. March. 112-156.1 Temple, Robert (1986). *The Genius of China.* New York: Simon and Schuster.

[292] Terleckyj. Nestor E. (1958). «Factors Underlying Productivity: Some Empirical Observations». *Journal of the American Statistical Association.* 53. June.

[293] Thaler. Richard (1981). «Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency». *Economics Letters,* 8. 201 207.

[294] Thompson. Earl A. (1976). «Taxation and National Defense». *Journal of Political Economy.* 82. August. 755 782.

[295] Thörnqvist. Leo (1936). «The Bank of Finland's Consumption Price Index». *Bank of Finland Monthly Bulletim* no. 10. 1–8.

[296] U.S. Department of Commerce. Bureau of the Census (1975). *Historical Statistics of the United States. Colonial Times to 1970.* Washington. DC: U.S. Government Printing Office.

[297] U.S. Department of Commerce. Bureau of the Economic Analysis (2002). *State Personal Income. 1929-87.* Washington. DC: U.S. Government Printing Office.

[298] U.S. Department of Commerce. Bureau of the Census (1990). *Statistical Abstract ofthe United States.* Washington. DC: U.S. Government Printing Office.

[299] Utrera. Gaston Ezequiel. and Javier Adolfo Koroch (1998). «Convergencia: Evidencia empirica para las provincias argentinas (1953-1994)». In *Anales de la XXXIll Reunion Anual de la Asociacidn Argentina de Economi Politico,* November.

[300] Uzawa, Hirofumi (1961). «Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium». *Review of Economic Studies*, 28, February, 117 124.

[301] Uzawa, Hirofumi (1964). «Optimal Growth in a Ttoo-Sector Model of Capital Accumulation » *Review of Economic Studies*, 31 (January), 1 24.

[302] Uzawa, Hirofumi (1965). «Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth». *International Economic Review*, 6, January, 18-31.

[303] Uzawa, Hirofumi (1968). «Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings». In J. N. Wolfe, ed., *Value, Capital, and Growth*. Chicago, Aldine.

[304] Ventura, Jaume (1997). «Growth and Interdependence». *Quarterly Journal of Economics*, 112, February, 57–84.

[305] Von Furstenberg, George M. (1977). «Corporate Investment: Does Market Valuation Matter in the Aggregate?» *Brookings Papers on Economic Activity*, no. 2, 347-397.

[306] Von Neumann, John (1937). «Uber ein Okonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouw- erschen». *Ergebnisse eines Mathematische Kolloquiums*, 8, translated by Karl Menger as «A Model of General Equilibrium», *Review of Economic Studies* (1945), 13, 1 9.

[307] Wahl, Jenny Bourne (1985). «Fertility in America: Historical Patterns and Wealth Effects on the Quantity and Quality of Children». Ph.D. dissertation, University of Chicago.

[308] Weil, Philippe (1987). «Love Thy Children: Reflections on the Barro Debt Neutrality Theorem». *Journal of Monetary Economics*, 19, May, 377 391.

[309] Weil, Philippe (1989). «Overlapping Families of Infinitely Lived Agents». *Journal of Public Economics*, 38, March, 183 198.

[310] Weitzman, Martin L. (1973). «Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models». *Management Science*, 19, 783 789.

[311] Woodberry, Robert D. (2002). «The Shadow of Empire: Church-State Relations, Colonial Policy, and Democracy in Postcolonial Societies». Unpublished, University of North Carolina, November. World Bank (1990). *World Development Report, 1990*. Washington, DC: World Bank.

[312] Wright, Theodore P. (1936). «Factors Affecting the Cost of Airplanes». *Journal of the Aeronautical Sciences*, 3, 122–128.

[313] Xie, Danyang (1992). «Three Essays on Economic Growth and Development». Ph.D. dissertation, University of Chicago.

[314] Yaari, Menahem E. (1965). «Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer». *Review of Economic Studies*, 32, April, 137–150.

[315] Yao, Yudong, and Melvyn Weeks (2000). «Provincial Income Convergence in China, 1953 1997: A Panel Data Approach». Mimeograph, University of Cambridge.

[316] York, Jeremy C., David Madigan, I. Ivar Heuch, and Rolv Teije Lie (1995). «Estimating a Proportion of Birth Defects by Double Sampling: A Bayesian Approach Incorporating Covariates and Model Uncertainty». *Applied Statistics*, 44, 227 242.

[317] Young, Allyn (1928). «Increasing Returns and Economic Progress». *Economic Journal,* 38, December, 527–542.
[318] Young, Alwyn (1989). «Hong Kong and the Art of Landing on One's Feet: A Case Study of a Structurally Flexible Economy». Ph.D. dissertation, Fletcher School, Tiifts University, May.
[319] Young, Alwyn (1992). «A Tale of Two Cities: Factor Accumulation and Technical Change in Hong Kong and Singapore». *NBER Macroeconomics Annual, 1992,* 13–54. Cambridge, MA: MIT Press.
[320] Young, Alwyn (1993). «Invention and Bounded Learning by Doing». *Journal of Political Economy,* 101, June, 443–472.
[321] Young, Alwyn (1995). «The Tyranny of Numbers: Confronting the Statistical Realities of the East Asian Growth Experience». *Quarterly Journal of Economics,* 110, August, 641–680.
[322] Young, Alwyn (1998). «Growth Without Scale Effects». *Journal of Political Economy,* 106, February, 41–63. 1

Оглавление