О.О.Замков

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

в макро-экономическом анализе

Курс лекций

О.О.Замков

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

в макро- экономическом анализе

Курс лекций

Москва ГУ ВШЭ

2001

УДК 330.43
ББК 22.172
З 26 З

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор *М.И.Лугачев*;
кандидат экономических наук, доцент *В.И.Черняк*

Замков О.О.
З 26 Эконометрические методы в макроэкономическом анализе: Курс лекций. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 122 с.

ISBN 5-7598-0072-8

Данное учебное пособие содержит как начальные теоретические сведения по эконометрике, так и большое количество ее практических приложений в различных областях экономики. Методы оценивания регрессионных зависимостей, построения и развития эконометрических моделей, производственных функций и зависимостей распределенного лага, макроэкономических моделей как систем одновременных уравнений рассматриваются на простых и наглядных конкретных примерах.

Для студентов, аспирантов, преподавателей экономических вузов, факультетов и специальностей.

УДК 330.43
ББК 22.172

ISBN 5-7598-0072-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

К читателю

В основу этой книги положены курсы лекций, читавшиеся автором на экономическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, в Международном институте экономики и финансов Государственного университета – Высшей школы экономики, в рамках программ переподготовки Института Всемирного банка, а также проекта ТЕМПУС, реализованного совместно МГУ им. М.В.Ломоносова и Лондонской школой экономики и политических наук.

Особенностью данной книги является то, что все излагаемые в ней современные методы и подходы эконометрики иллюстрируются проведением расчетов по ряду содержательных макроэкономических моделей с использованием реальных данных по России и США.

Цикл лекций может быть использован автономно, при чтении специальных курсов или как прикладная часть курсов эконометрики и макроэкономики. Он хорошо согласован с теоретическим материалом, представленным в учебнике "Введение в эконометрику" Кр. Доугерти (Dougherty Cr. Introduction to Econometrics), а также с материалом учебника "Математические методы в экономике", написанного в соавторстве с А.В.Толстопятенко и Ю.Н.Черемных.

О.Замков

Лекция 1

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Макроэкономические переменные не меняются во времени независимо друг от друга; они имеют множество взаимосвязей. Исследование этих связей и является предметом макроэкономической науки. Вы знаете, что совокупный спрос зависит от уровня цен, потребление – от располагаемого дохода, инвестиции – от процентной ставки и так далее. Как найти такие связи, как доказать их значимость и как оценить их параметры? Как использовать их в экономическом анализе и прогнозировании? На эти вопросы можно ответить с помощью эконометрики, занимающейся применением методов математической статистики в экономическом анализе.

Взаимосвязи экономических переменных часто близки к линейным. Даже если некоторая зависимость, вообще говоря, не является линейной, часто она может быть приближенно описана как линейная в основном диапазоне наблюдаемых значений своих переменных. С линейными функциями удобно работать; существуют эффективные методы оценки и анализа линейных экономических моделей. Поэтому анализ линейных зависимостей является базовым в прикладной эконометрике.

Взаимосвязь величин реального частного потребления и реального располагаемого дохода в США в 1971–1990 гг. может рассматриваться как пример зависимости, близкой к линейной. Динамика этих переменных показана на рис. 1.1.

На рис. 1.1 линейный характер зависимости вполне очевиден. Тем не менее он нуждается в количественном подтверждении.

Взаимосвязь, очевидно, является не функциональной, а статистической. Прямая линия не может быть точно проведена через все точки наблюдений. В каждом году наблюдалось некоторое отклонение от линейной формулы. Были ли эти отклонения случайными, или же на них влияли вполне определенные факторы? Не приводили ли неучтенные факторы к искажению наклона функции потребления? Как объяснить и количественно оценить часто наблюдаемые различия в краткосрочной и долгосрочной предельной и средней склонности к потреблению? Хотя зависимость объема потребления от располагаемого дохода кажется простой и очевидной, ее анализ не раз ставил эти и другие концептуальные и эконометрические вопросы. Решение этих вопросов приводило не только к совершенствованию инструментария количественного анализа, но и к выдвижению новых макроэкономических концепций (Ф.Модильяни, М.Фридман, С.Кузнец и другие).

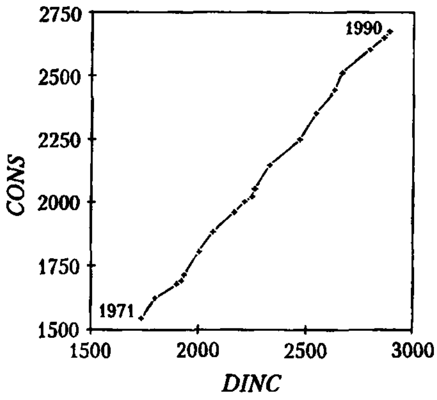


Рис. 1.1

Объем реального частного потребления (*CONS*, *C*) и реального располагаемого дохода (*DINC*, Y_d) в США (1971–1990 гг., млрд. долл. в ценах 1982 г.)

Существуют две формы анализа линейных взаимосвязей:

- корреляционный анализ; он проверяет наличие и значимость линейной зависимости между переменными, без указания зависимой и объясняющих переменных и оценивания формулы связи;
- регрессионный анализ; здесь выделяется зависимая переменная, после чего оценивается и анализируется формула ее зависимости от объясняющих переменных.

Коэффициент корреляции выборки и генеральной совокупности

Коэффициент корреляции является мерой тесноты линейной связи двух переменных. Выборочный коэффициент корреляции переменных x и y $r^*[x,y]$[1] рассчитывается по формуле:

$$r^*[x,y] = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(y_m - \bar{y})^2}}. \qquad (1.1)$$

Его смысл отражен на рис. 1.2.

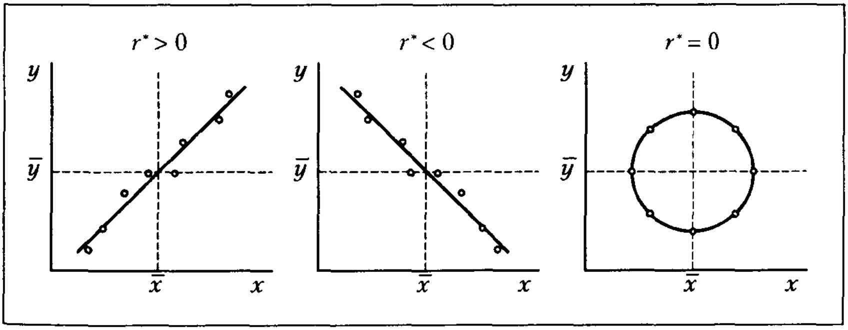


Рис. 1.2

Примеры положительной, отрицательной и нулевой корреляции переменных x и y

Положительная статистическая взаимосвязь (слева) величин x и y означает, что если переменная x *больше*, чем ее среднее $\bar{x}$, то переменная y, скорее всего, также *превышает* свое среднее $\bar{y}$; если переменная x *меньше,* чем ее среднее $\bar{x}$, то переменная y, скорее всего, также *меньше* своего среднего $\bar{y}$. Коэффициент корреляции *положителен*.

[1] Здесь и далее символ * обозначает выборочные характеристики.

Отрицательная статистическая взаимосвязь (в центре) величин x и y означает, что если переменная x *больше*, чем ее среднее, то переменная y, скорее всего, *меньше* своего среднего; если переменная x *меньше*, чем ее среднее, то переменная y, скорее всего, *больше* своего среднего. Коэффициент корреляции *отрицателен*.

Коэффициент корреляции – безразмерная величина. Его значение меняется от -1 (в случае строгой отрицательной линейной зависимости) до $+1$ (в случае строгой линейной положительной зависимости).

Близкий к нулю коэффициент корреляции говорит об отсутствии линейной зависимости между переменными. В этом случае может присутствовать нелинейная связь переменных x и y (рисунок справа), либо отсутствует зависимость вообще.

Если случайные величины x и y статистически независимы, то коэффициент их корреляции для генеральной совокупности $\rho(x,y)$ равен нулю. В числителе выражения для $r^*[x,y]$ находится выборочная ковариация величин x и y:

$$\operatorname{cov}^*[x,y] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}). \qquad (1.2)$$

Коэффициент корреляции для генеральной совокупности равен:

$$\rho[x,y] = \frac{\operatorname{cov}[x,y]}{\sqrt{D[x]}\sqrt{D[y]}};$$

ковариация в его числителе записывается как

$$\operatorname{cov}[x,y] = M[(x - M[x]) \cdot (y - M[y])],$$

где M обозначает математическое ожидание, а D – теоретическую дисперсию $D[x] = \operatorname{cov}[x,x]$. Коэффициент корреляции для выборки r^* является оценкой коэффициента корреляции для генеральной совокупности ρ.

Выборочный коэффициент корреляции между показателями потребления и располагаемого дохода в США в 1971–1990 гг.

(рис. 1.1) равен 0,999. Он подтверждает, что зависимость очень близка к линейной.

Другой пример – взаимосвязь уровней инфляции и безработицы в Германии и Франции в 1980–1990 гг. (рис. 1.3).

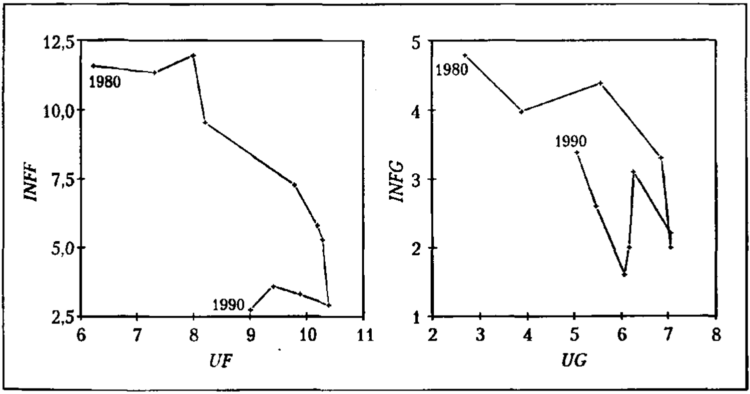


Рис. 1.3

Уровни инфляции и безработицы во Франции (*INFF*, *UF*) и в Германии (*INFG*, *UG*) в 1980–1990 гг. (в процентах)

Оба графика показывают отрицательную связь уровней инфляции и безработицы, но не вполне очевидно, что линейную. Отклонения от любой возможной прямой линии были бы здесь существенными. Выборочные коэффициенты корреляции рассматриваемых показателей равны −0,81 для Франции и −0,73 для Германии. Естественно, возникает вопрос, подтверждают или опровергают такие значения коэффициентов корреляции наличие линейной связи в соответствующих генеральных совокупностях?

Корреляционный анализ: проверка статистических гипотез

Выборочный коэффициент корреляции двух случайных величин является случайной величиной. Как статистическая оценка он отклоняется от истинного значения коэффициента корреляции в генеральной совокупности, но чем больше такое отклонение, тем менее оно вероятно.

Для коэффициента корреляции обычно проверяется статистическая гипотеза о равенстве его нулю. Проверяемая гипотеза называется "нулевой гипотезой" и обозначается H_0. Альтернативная гипотеза H_1 означает в данном случае, что значение ρ отлично от нуля.

Общая логика проверки гипотезы такова:

- предполагается, что коэффициент корреляции в генеральной совокупности ρ равен нулю;
- при $\rho = 0$ выборочный коэффициент корреляции r^* (оценка ρ) при данном числе наблюдений имеет определенное распределение;
- оценки, сильно отличающиеся от нуля, при выполнении H_0 имеют малую вероятность. Для конкретной величины r^* мы находим вероятность получить в выборке такую или большую по модулю ее величину;
- если эта вероятность мала, то есть случилось маловероятное событие, то гипотеза о том, что $\rho = 0$, отвергается. "Критическое", то есть граничное, значение вероятности называется *уровнем значимости*. Чаще всего он устанавливается на уровне 1% или 5%.

Если возможными считаются только положительные или только отрицательные отклонения величины r^* от нуля, то рассматривается одностороннее распределение, или односторонняя альтернативная гипотеза. В противном случае формулируется двусторонняя альтернативная гипотеза.

При проверке нулевой гипотезы рассматривается не сама величина r^*, а ее функция, имеющая известное распределение, удобное для анализа, проводимого с помощью таблиц. Такой функцией для выборочного коэффициента корреляции (при выборке из нормальной генеральной совокупности) является t-статистика, рассчитываемая по формуле:

$$t = r^* \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^{*2}}}. \qquad (1.3)$$

Она имеет распределение Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы. Иллюстрация проверки нулевой гипотезы дана на рис. 1.4.

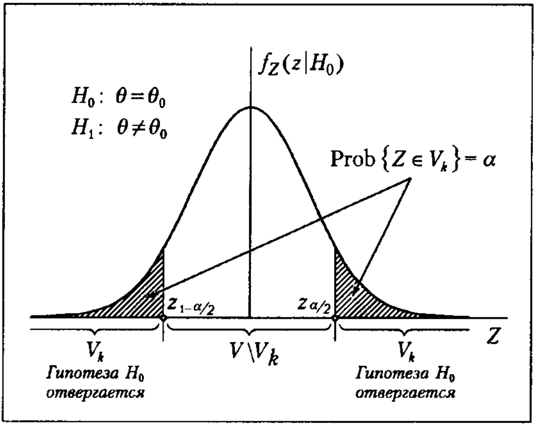


Рис. 1.4

Схема проверки статистической гипотезы

Нулевая гипотеза H_0 означает здесь равенство нулю коэффициента корреляции. Ей соответствует некоторая статистика Z с известным распределением. Если Z принадлежит области V_k, имеющей малую вероятность α (α – уровень значимости), то гипотеза H_0 отвергается. *В этом заключается общая схема проверки статистических гипотез.* Функция f_Z является здесь функцией плотности вероятности распределения Стьюдента. Заштрихованная область на рисунке называется критической областью. Она включает величины большие (по модулю), чем критическое значен $z_{\alpha/2}$. Заштрихованная площадь равна α, то есть уровню значимости.

Пример: проверка нулевой гипотезы для коэффициентов корреляции между показателями инфляции и безработицы во Франции и Германии в 1980–1990 гг.

1) Мы имеем $r^* = -0{,}81$ (для Франции) для $n = 11$ наблюдений; отсюда

$$t = \frac{-0{,}81\sqrt{11-2}}{\sqrt{1-0{,}81^2}} = -4{,}1\,.$$

Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, то есть 1%. Критическая (заштрихованная) область состоит из двух равных "хвостов", площадь каждого из которых равна $0{,}005$. Из таблиц распределения

Стьюдента находим, что критическое значение t равно $3{,}25$. Это означает, что нулевая гипотеза отвергается при $|t| > 3{,}25$. Поскольку в нашем случае $|t| = 4{,}1$, *нулевая гипотеза отвергается*. Иными словами, мы признаем наличие линейной зависимости между переменными.

Если бы мы использовали одностороннюю альтернативную гипотезу (допуская только отрицательную связь уровней инфляции и безработицы), то критическое значение t равнялось бы $2{,}82$. Следовательно, и вывод был бы тем же.

2) Получена оценка $r^* = -0{,}73$ (для Германии) для $n = 11$ наблюдений; отсюда $t = \dfrac{-0{,}73\sqrt{11-2}}{\sqrt{1-0{,}73^2}} = -3{,}20$. Пусть $\alpha = 0{,}01$, и критическое значение t вновь равно 3,25. Нулевая гипотеза отвергается, если $|t| > 3{,}25$. Поскольку в нашем случае $|t| = 3{,}20$, *нулевая гипотеза не может быть отвергнута* при данном уровне значимости. Мы считаем, что не исключено отсутствие линейной связи между переменными. Но если бы мы использовали одностороннюю альтернативную гипотезу или же задали бы уровень значимости больше чем $0{,}01$, то нулевая гипотеза могла бы быть отвергнута.

Вообще говоря, наши данные подтверждают вывод, сделанный на основе кривой Филлипса, о наличии отрицательной линейной связи между уровнями инфляции и безработицы.

Значение t-статистики для рассмотренной взаимосвязи между располагаемым доходом и потреблением в США равно 94,8 (по 20 наблюдениям), и нулевая гипотеза отвергается даже при уровне значимости 0,1% ($t_{крит.} = 3{,}92$).

Общая идея регрессионного анализа. Функция потребления

Корреляционный анализ позволяет проверить гипотезу о наличии линейной связи между переменными. Но этого недостаточно для экономического анализа, поскольку возникают и другие вопросы:

- какие переменные определяют поведение других величин и, следовательно, могут использоваться как объясняющие переменные?

• какова формула зависимости и каков экономический смысл ее коэффициентов?

• присутствует ли в уравнении свободный член и как его можно интерпретировать?

Проиллюстрируем это на примере функции потребления для США. Мы обнаружили выше, что между величинами располагаемого дохода Y_d и потребления C в 1971–1990 гг. существовала статистически значимая линейная связь. Однако мы не выяснили, подтверждают ли статистические данные известные предпосылки Кейнса о функции потребления:

• находится ли предельная склонность к потреблению (MPC) между нулем и единицей?

• убывает ли средняя склонность к потреблению (APC) при росте дохода?

Был ли вывод о стабильности APC в долгосрочном периоде, сделанный С. Кузнецом в 1940 г., верен для последующих десятилетий? Чтобы ответить на эти вопросы, получив оценки MPC, APC и автономного потребления, нужно использовать модель линейной регрессии. Она позволяет найти формулу линейной взаимосвязи переменных.

В следующей лекции будут рассмотрены теоретические основы оценивания и анализа линейной регрессии. Остановимся на некоторых ее идеях и результатах.

Если провести прямую линию, соответствующую множеству точек на рис. 1.1 (о том, как это делается, – в следующей лекции), то мы получаем формулу:

$$C = -217{,}6 + 1{,}007 \cdot Y_d .$$

Здесь и далее в левой части оцененных уравнений стоят не фактические, а теоретические (рассчитываемые по уравнению регрессии) значения соответствующих переменных. Мы не будем вводить для них специальных обозначений, хотя нередко это делают с помощью какого-то специального значка, например $\hat{C}$ вместо C. Со статистической точки зрения, это уравнение почти идеально (об этом – также в следующей лекции). Оно, однако, не подтверждает предпосылок Кейнса. Автономное потребление составляет $C_0 = -217{,}6$.

Это означает, что величина APC не уменьшалась, а росла по мере роста дохода. Величина $MPC = 1{,}007$ несколько превышает единицу, что также не соответствует предпосылкам Кейнса. Это небольшое превышение, однако, могло быть вызвано чисто случайным воздействием и не является статистически значимым.

Если оценить ту же формулу функции потребления для США в 1946–1990 гг. (долгосрочный послевоенный период), то мы получаем:

$$C = -11{,}6 + 0{,}92 \cdot Y_d .$$

Здесь, однако, свободный член $C_0 = -11{,}6$ статистически незначим и вполне мог быть равен нулю. Если предположить изначально его равенство нулю, то формула функции потребления приобретает вид:

$$C = 0{,}913 \cdot Y_d .$$

Здесь $APC = MPC = 0{,}913$. Это подтверждает вывод С.Кузнеца о стабильности APC в долгосрочном периоде.

Графический и статистический анализ показывают, что в течение периода 1946–1990 гг. можно выделить два вида функции потребления с разными постоянными величинами MPC и меняющимися величинами APC. Формула зависимости изменилась примерно в 1971–1973 гг. Функция потребления для 1946–1971 гг. имеет вид:

$$C = 39{,}0 + 0{,}876 \cdot Y_d .$$

Статистическое качество этой зависимости очень высоко, и все ее параметры (включая свободный член) статистически значимы. Эта формула соответствует всем предположениям Кейнса. Она описывает убывающую среднюю склонность к потреблению APC, и для нее $0 < MPC < 1$. Наши расчеты подтверждают выводы о том, что:

- величина потребления является линейной функцией располагаемого дохода;
- в краткосрочном периоде величина APC меняется при изменении Y_d, в долгосрочном периоде величина APC стабильна;
- в краткосрочном периоде величина MPC стабильна, но в рамках долгосрочного периода она время от времени меняется.

Как мы оценили, величина MPC в 1970–1980-е гг. была в США близкой к единице, что отличалось от ее значения 0,87–

0,88 в предшествующие 25 лет. Средняя склонность к потреблению за весь период 1946–1990 гг. составляла примерно 0,91.

Нужно иметь в виду, что при более глубоком анализе и тщательном оценивании функции потребления возникают очень серьезные проблемы, несмотря на внешнюю простоту зависимости. Реально потребление может зависеть от "постоянного", а не наблюдаемого дохода (гипотеза М.Фридмана), входящие в функцию потребления показатели связаны между собой и другими связями и т.д. (некоторые из этих вопросов рассматриваются в книге Кр. Доугерти [1, с. 253–261, 298–302, 322–340]). Поэтому в ходе эконометрического анализа не стоит останавливаться на простейшей оцененной модели, даже если ее параметры полностью Вас устраивают.

Линейные связи экономических переменных: иллюстрация стохастической природы

В целях иллюстрации линейной зависимости для генеральной совокупности и ее оценки для выборки рассмотрим взаимосвязь дохода и расходов потребителя. Пусть 100 семей (генеральная совокупность) имеют доходы на человека пяти размеров X_k $(k = 1,\ldots,5)$, с одинаковой разницей $(X_k - X_{k-1})$. Предположим, что каждая группа включает 20 семей. Пусть Y – размер потребительских расходов на человека. В таком случае мы имеем следующую диаграмму.

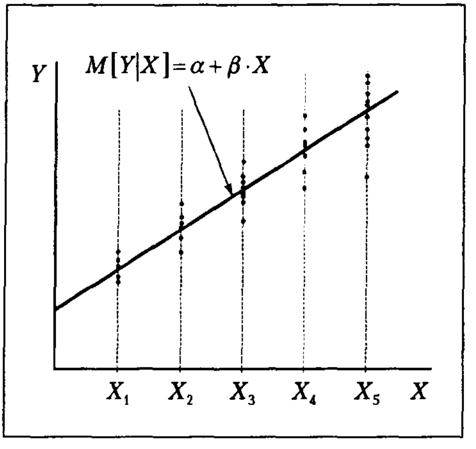


Рис. 1.5

Зависимость расходов потребителя от его доходов в выборке

Из этой диаграммы вытекает следующее:

- душевой доход является основным фактором, определяющим размер душевых расходов;
- средние расходы растут при росте дохода;
- внутри группы с одним и тем же уровнем душевых доходов расходы различны. Эти различия вызваны многими факторами, каждый из которых оказывает небольшое влияние на величину расходов;
- сочетание этих воздействий формирует случайную, или стохастическую, составляющую расходов и делает случайной их общую величину.

Обозначим среднюю величину расходов для k-й доходной группы (в генеральной совокупности) как $M[Y|X_k]$. Тенденция роста расходов при росте дохода может быть описана в форме положительной линейной связи:

$$M[Y|X_k] = \alpha + \beta \cdot X \quad (\beta > 0). \tag{1.4}$$

Для определения не средних, а реальных расходов нужно добавить к этой формуле стохастическое отклонение (случайный член) ε, описывающее распределение расходов внутри каждой группы с данной величиной дохода. Слагаемое ε определяется всеми остальными факторами, влияющими на расходы, помимо среднего дохода. В результате зависимость Y от X имеет вид:

$$Y = \alpha + \beta \cdot X + \varepsilon . \tag{1.5}$$

Эта зависимость связывает индивидуальные расходы и доход в генеральной совокупности.

Предположим, что имеются выборочные данные о расходах, полученные на основе опроса одного представителя из каждой доходной группы. Нанеся точки выборочных наблюдений на график, мы можем определить некоторую линейную функцию $Y = a + b \cdot X$. Коэффициенты a и b могут быть рассчитаны на основе данных наблюдений. Наблюдаемые значения Y_i не лежат в точности на линии регрессии (то есть $Y_i \neq a + b \cdot X_i$); следовательно, можно ввести выборочные отклонения $e_i = Y_i - a - b \cdot X_i$. Отклонения

e_i соответствуют значениям случайного члена ε_i в генеральной совокупности. Таким образом, $Y_i = a + b \cdot X_i + e_i$.

Итак, мы имеем две линейные функции: одна – для генеральной совокупности (коэффициенты обозначены греческими буквами) и другая – для выборки (коэффициенты обозначены латинскими буквами). Параметры α и β неизвестны, а a и b являются их оценками.

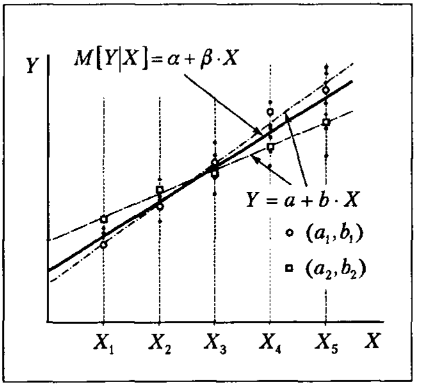


Рис. 1.6

Линии регрессии для разных выборок из одной и той же генеральной совокупности

На рис. 1.6 можно видеть, что линии регрессии имеют разные коэффициенты наклона и разные свободные члены для различных выборок. Следовательно, коэффициенты регрессии являются случайными величинами с определенными математическими ожиданиями, дисперсиями, стандартными отклонениями и другими параметрами распределений. Чтобы проверить статистическую надежность оценок, они должны быть исследованы как случайные переменные.

Некоторые проблемы регрессионного анализа: оценивание функции инвестиций

Оценивание функции потребления на основе данных временных рядов обычно дает, как мы уже видели, статистически значимые результаты. Другой важной зависимостью макроэкономических переменных является инвестиционная функция: $I = c - d \cdot r$, где I – реальные инвестиции; r – реальная процентная ставка.

Здесь существенно то, что функция инвестиций связывает абсолютный показатель I и относительный показатель r. Такая зависимость может быть использована только в статической, краткосрочной модели. Если оценить подобную зависимость по данным временных рядов, результат обычно оказывается неудачным. Абсолютный показатель I зависит от общего масштаба экономики. Показатель r является относительным и не связан непосредственно с масштабом экономики. Следовательно, если это не принимается во внимание, то наблюдаемые объемы инвестиций будут стабильно отклоняться от линии регрессии на различных этапах рассматриваемого периода. Пути решения этой проблемы могут быть следующими:

- включение некоторой дополнительной объясняющей переменной, учитывающей масштаб экономики (например ВНП);
- введение явной зависимости объема инвестиций от времени;
- измерение инвестиционной активности в относительных величинах, каковой является объясняющая переменная r. Например, зависимой переменной может быть доля инвестиций в ВНП (I/Y).

Помимо масштаба экономики, важной объясняющей переменной для масштабов инвестиционной активности может служить предельная производительность капитала (которая обычно меняется во времени). Таким образом, формула, адекватная для описания статических взаимосвязей экономических переменных, может подходить намного меньше в динамическом случае.

Попытки оценить инвестиционную функцию по данным временных рядов в виде $I = c - d \cdot r$, как правило, оказываются неудачными. Вместо нее может быть использована взаимосвязь относительных переменных (I/Y) и r. Например, оценивание такой функции для экономики США в 1949–1980 гг. дает статистически значимую формулу:

$$(I/Y) = 0{,}168 - 0{,}004\,r, \qquad (1.6)$$

где I – реальные инвестиции, Y – реальный ВНП, r – реальная краткосрочная процентная ставка.

Лекция 2

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ В МАКРОЭКОНОМИКЕ: ОЦЕНКА И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В предыдущей лекции была рассмотрена взаимосвязь показателей инфляции и безработицы. Она описывается уравнением кривой Филлипса, не учитывающим инфляционных ожиданий (2.1) и учитывающим их (2.2)[1]:

$$\pi = -\beta(u - u^*), \tag{2.1}$$

$$\pi = \pi^e - \beta(u - u^*), \tag{2.2}$$

где π – фактический и π^e – ожидаемый темпы инфляции (процентов), u – фактический и u^* – естественный уровни безработицы (процентов), β – параметр.

Какая из этих зависимостей лучше соответствует реальной взаимосвязи между уровнями инфляции и безработицы в данной стране в данный период? Если присутствие инфляционных ожиданий здесь существенно, то как они формировались и как влияли на реальную динамику инфляции? Как оценить естественный уровень безработицы с использованием данной модели? Ответить на эти вопросы помогут методы статистики и эконометрики. Никакая экономическая модель не может быть построена, проверена и улучшена без статистического анализа взаимосвязей между ее переменными с использованием реальных статистических данных.

---

[1] См. [3, с. 31–32, 567].

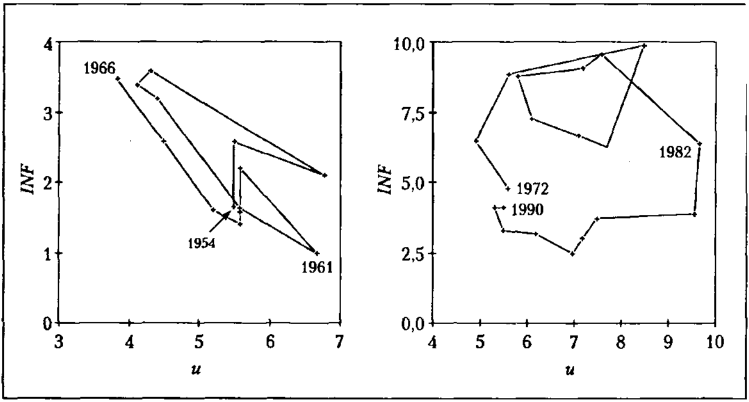


Рис. 2.1

Соотношение уровней инфляции и безработицы в США в 1954–1966 гг. и в 1972–1990 гг. (*INF*, или π, – темп инфляции (изменение дефлятора ВВП), в процентах; u – уровень безработицы, в процентах)

Рассмотрим диаграммы уровней инфляции и безработицы в США в 1954–1966 и в 1972–1990 гг. (рис. 2.1). Эти периоды были выбраны на основе графического анализа динамики уровней инфляции π и безработицы u.

Характер связи между π и u изменился в 1972–1990 гг.; период 1967–1971 гг. можно при этом рассматривать как переходный. В 1954–1966 гг. существовала близкая к линейной, отрицательная связь показателей π и u. Для нее можно оценить уравнение линейной регрессии типа (2.1). В период 1972–1990 гг. взаимосвязь π и u не выглядит линейной. Здесь можно воспользоваться интерпретацией, используемой в [3, с. 31–33], где говорится о сдвигах традиционных краткосрочных кривых Филлипса. Если, однако, мы хотим оценить параметры единой модели связи между инфляцией и безработицей в более длительном периоде, то может быть использована модель линейной регрессии с учетом инфляционных ожиданий. Однако прежде, чем вернуться к анализу макроэкономических зависимостей, рассмотрим некоторые базовые положения и факты регрессионного анализа.

Модель линейной регрессии: некоторые определения и свойства

Предположим, что между переменными x и y существует линейная связь. Случайные отклонения, вызванные не включенными в уравнение факторами и ошибками измерения, делают формулу связи между наблюдаемыми величинами x_i и y_i следующей: $y_i = \alpha + \beta \cdot x_i + \varepsilon_i$. Здесь ε_i – случайные отклонения (или значения случайного члена). При этом значения объясняющей переменной x_i на начальном этапе построения эконометрической теории считаются неслучайными, что существенно упрощает получение многих выводов (многие из которых остаются верными и для случайных x_i). Мы будем считать x_i неслучайными (детерминированными), если не оговаривается обратное.

Проблема оценивания параметров парной линейной регрессии заключается в нахождении оценок α и β в соответствии с наблюдениями $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, обеспечивающих минимум некоторого "критерия близости" Q. Для этого традиционно в качестве исходного применяется метод наименьших квадратов (МНК), использующий в качестве критерия Q минимум суммы квадратов разностей между наблюденными и рассчитанными по уравнению регрессии значениями y. В последнее время в теории и практике также широко применяется метод максимума правдоподобия и другие методы и модификации.

В соответствии с МНК,

$$Q = \sum_i [y_i - (a + bx_i)]^2 \to \min .$$

Здесь x_i и y_i – известные (наблюденные) величины x и y, a и b – оценки (пока еще неизвестные) параметров α и β соответственно. Оцениваемое уравнение регрессии принимает вид $y_i = a + b \cdot x_i + e_i$, где e_i – наблюденные значения величин ε_i.

При использовании МНК к случайным величинам ε_i предъявляются следующие требования, называемые условиями Гаусса – Маркова:

1) математическое ожидание ε_i равно нулю для любого i: $M(\varepsilon_i) = 0$;

2) дисперсия отклонений ε_i постоянна: $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j) = \sigma^2$ для любых i и j;

3) величины ε_i и ε_j статистически независимы при любых разных i, j;

4) величина ε_i статистически независима от x_i для любого i.

Если условия Гаусса – Маркова (1–4) выполняются, то полученные с помощью МНК оценки a и b обладают следующими свойствами.

1) Оценки являются несмещенными, то есть математическое ожидание оценки каждого параметра равно его истинному значению: $M(a) = \alpha$; $M(b) = \beta$. Это означает отсутствие систематической ошибки в положении линии регрессии.

2) Оценки являются состоятельными, то есть $\operatorname{plim}(a) = \alpha$, $\operatorname{plim}(b) = \beta$ (знак plim обозначает "предел по вероятности", см. [1, с. 26–28]). Это означает, что если число наблюдений n достаточно велико, то почти наверняка значение a будет близко к α, а значение b – близко к β.

3) Оценки являются эффективными, то есть они имеют наименьшую дисперсию среди всех несмещенных оценок α и β, линейных относительно значений зависимой переменной. Данное утверждение называется теоремой Гаусса – Маркова; доказательство см. в книге [4, с. 25–27].

Значения a и b могут быть найдены путем минимизации функции Q. Если Q минимально, то его частные производные равны нулю: $Q'_a = 0$; $Q'_b = 0$. Эти условия формируют систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b, значения которых могут быть найдены в ходе ее решения. Решения получаются следующими:

$$b = \frac{\operatorname{cov}^*(x,y)}{D^*(x)} = r^*(x,y)\frac{\sqrt{D^*(y)}}{\sqrt{D^*(x)}}; \quad a = \overline{y} - b\overline{x},$$

где знак *, как и ранее, обозначает выборочные значения соответствующих характеристик, а $\overline{y} = \dfrac{\sum_i y_i}{n}$; $\overline{x} = \dfrac{\sum_i x_i}{n}$ – выборочные средние значения x и y.

Величины y_i, соответствующие данным x_i, являются случайными. Следовательно, оценки a и b также случайны. Их математические ожидания равны соответственно α и β. Чем меньше, при прочих равных, разброс оценок a и b вокруг α и β, или дисперсия, тем более они надежны. Дисперсии оценок a и b рассчитать по данным выборки невозможно, поскольку необходимые для этого значения случайного члена ε_i неизвестны. Однако, заменив их на соответствующие значения e_i, можно получить следующие несмещенные оценки указанных дисперсий:

$$D^*(b) = S_b^2 = \frac{S^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}; \quad D^*(a) = S_a^2 = \frac{S^2 \sum_i x_i^2}{n \sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

где $S^2 = \dfrac{\sum_i e_i^2}{n-2}$ – мера разброса значений зависимой переменной вокруг линии регрессии (необъясненная дисперсия), S_a и S_b – "стандартные ошибки" (следуя терминологии Кр. Доугерти) оценок a и b соответственно.

Проверка статистического качества оцененного уравнения регрессии включает следующие этапы:

- проверка статистической значимости каждого коэффициента регрессии;
- проверка общего качества уравнения регрессии;
- проверка наличия свойств данных, предполагавшихся при оценивании уравнения регрессии.

Если с помощью уравнения регрессии анализируется взаимосвязь экономических переменных, то результаты оценивания должны иметь разумную интерпретацию. Это включает, в частности, ответ на следующие вопросы:

- являются ли статистически значимыми объясняющие факторы, важные с теоретической точки зрения?
- являются ли коэффициенты, показывающие направление воздействия этих факторов, положительными или отрицательными и почему?

- лежат ли оценки коэффициентов регрессии внутри интервалов, предполагаемых из теоретических соображений?

Формальный метод проверки значимости коэффициента регрессии b использует величину отношения b к его стандартной ошибке $S_b = \sqrt{D^*(b)}$. Величина b/S_b, если в модели парной линейной регрессии условия Гаусса – Маркова выполнены и случайный член нормально распределен, при истинности гипотезы $H_0: \beta = 0$, имеет t-распределение (распределение Стьюдента) с $(n-2)$ степенями свободы (где n – число наблюдений). Она называется t-статистикой соответствующего коэффициента:

$$t = \frac{b}{\sqrt{D^*(b)}} = \frac{b}{S_b}.$$

Пример анализа *t*-статистики для модели кривой Филлипса

Для периода 1954–1966 гг. по данным США было оценено уравнение парной регрессии: $\pi = 6{,}29 - 0{,}76 \cdot u$. Стандартная ошибка коэффициента регрессии b равна $S_b = 0{,}163$. Следовательно, $t = -\frac{0{,}76}{0{,}163} \approx -4{,}652$. Пусть уровень значимости равен 0,01 для двусторонней альтернативной гипотезы (это означает, что если $\beta \neq 0$, то оно может быть как положительным, так и отрицательным). По таблицам распределения Стьюдента можно найти, что при $(n-2) = 11$ степенях свободы критическое значение t равно $t_{крит.}^{11;\,0,01} = 3{,}106$. Поскольку $|t| = 4{,}652 > 3{,}106$, нулевая гипотеза отвергается при данном уровне значимости. Это означает, иными словами, что отрицательная линейная связь между уровнями инфляции и безработицы была в США в 1954–1966 гг. значимой.

Проверка значимости коэффициента парной линейной регрессии эквивалентна проверке значимости выборочного коэффициента корреляции переменных x и y.

При оценке статистической значимости коэффициента линейной регрессии можно воспользоваться следующим приближенным правилом. Если стандартная ошибка коэффициента S_b превышает его модуль ($t < 1$), то оценку нельзя признать хорошей (значимой). Если величина S_b меньше, чем модуль коэффициента, но превышает его половину ($1 < t < 2$), то оценка в некоторой степени значима. Доверительная вероятность в этом случае находится примерно между 0,7 и 0,95. Если $\frac{|b|}{2} > S_b > \frac{|b|}{3}$, то есть $2 < t < 3$, то зависимость вполне значима (доверительная вероятность лежит между 0,95 и 0,99). Если $t > 3$, то статистическая значимость оценки очевидна. В каждом частном случае вывод зависит от числа наблюдений: чем оно больше, тем более значима оценка при том же значении t-статистики. Однако при n около 10 или большем разница здесь не очень существенна.

Модель множественной линейной регрессии

На значения экономических переменных обычно влияют многие факторы. В таком случае запись функции $y = f(x)$ означает, что x есть вектор, состоящий из m компонентов: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Оценка линейной связи (регрессии) переменных y и x означает оценивание коэффициентов $y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \varepsilon$, где α – вектор истинных значений параметров линейной связи и ε – случайный член. Предполагается, что значения ε_i нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией; ε_i и ε_j статистически независимы при $i \neq j$.

Итак, необходимо оценить значения $(m+1)$ параметров α_j на основе данных выборки из n наблюдений. Тем самым оценивается линейная зависимость переменной y от x, то есть *множественная линейная регрессия*.

Проблема выражается в нахождении $(m+1)$-мерного вектора a, элементы которого являются оценками соответствующих элементов вектора α. Для ее анализа и решения на начальном этапе, как и в случае парной регрессии, обычно используется метод наименьших квадратов. С его помощью оценивается зависимость $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m + e$, и цель заключается в минимизации суммы квадратов отклонений от линии регрессии: $\min \sum_i e_i^2$.

Для формального решения проблемы необходимо выполнение условия $n \geq m+1$. Положительная разность $(n-m-1)$ называется *числом степеней свободы*.

Если условия Гаусса – Маркова и требование нормальности распределения случайного члена выполняются, то оценки параметров множественной линейной регрессии являются несмещенными, состоятельными и эффективными.

Частные производные квадратичной функции Q по всем a_j в точке ее минимума должны равняться нулю. Они являются линейными функциями величин a_j , и мы получаем систему $(m+1)$ линейных уравнений с $(m+1)$ неизвестными. Она называется *системой нормальных уравнений*. Такая система обычно имеет единственное решение.

При проверке нулевой гипотезы $H_0 : \alpha_j = 0$ отдельно для каждого коэффициента рассчитываются t-статистики: $t = \frac{a_j}{S_{aj}}$. Они имеют распределение Стьюдента с $(n-m-1)$ степенями свободы в случае $\alpha_j = 0$. Процедура проверки статистической значимости коэффициентов множественной линейной регрессии такая же, как и в случае парной регрессии.

Проверка общего качества уравнения регрессии. Коэффициент детерминации R^2

Для проверки общего качества уравнения регрессии обычно используется коэффициент детерминации R^2 . В случае парной регрессии он равен квадрату выборочного коэффициента корреляции $r^*(x,y)$. Формула для R^2 такова:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i (y_i - \overline{y})^2} . \qquad (2.3)$$

Здесь ESS – сумма квадратов отклонений точек на линии регрессии от среднего значения зависимой переменной ("объясненная дисперсия" зависимой переменной), TSS – сумма квадратов отклонений зависимой переменной от ее среднего, а RSS – сумма квадратов остатков, т.е. $\sum e_i^2$. Первое равенство в (2.3) является определением R^2, а два последующих верны при оценивании регрессионной модели по МНК, поскольку в этом случае $ESS + RSS = TSS$ (см. [1, с. 69–70, 109–111]). Метод наименьших квадратов обеспечивает то, что при наличии в модели свободного члена из единицы в формуле (2.3) вычитается положительная величина, не превосходящая единицы, и поэтому $0 \le R^2 \le 1$. Коэффициент детерминации описывает долю дисперсии зависимой переменной, объясненную с помощью регрессии. Величина R^2 является мерой объясняющего качества уравнения регрессии по сравнению с горизонтальной линией $y = \bar{y}$.

Для определения статистической значимости R^2 проверяется нулевая гипотеза для F-статистики. Формула расчета F-статистики такова:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}. \qquad (2.4)$$

Смысл проверяемой нулевой гипотезы заключается в равенстве нулю всех коэффициентов регрессии за исключением свободного члена.

Если условия Гаусса – Маркова и требование нормальности распределения случайного члена выполнены, то при истинности нулевой гипотезы величина F имеет распределение Фишера с $(m; n - m - 1)$ степенями свободы. Это – двухпараметрическое распределение неотрицательной случайной величины, являющейся в частном случае $m = 1$ квадратом случайной величины, имеющей t-распределение Стьюдента. Для распределения Фишера имеются специальные таблицы. При проверке нулевой гипотезы для F по ним находится критическое значение $F_{крит.}$ для данного уровня значимости. Нулевая гипотеза отвергается, если $F > F_{крит.}$. В случае парной линейной регрессии проверка гипотезы $\beta = 0$ с помощью t-статистики эквивалентна проверке данной гипотезы с помощью F-статистики.

Пример: для уравнения $\pi = 6{,}29 - 0{,}76 \cdot u$ (уравнение кривой Филлипса для США, 1954–1966 гг., 13 наблюдений) $R^2 = 0{,}66$. Отсюда следует, что $F = 0{,}66 \cdot 11/0{,}34 \approx 21{,}4$. По таблице F-распределения для (1; 11) степеней свободы мы находим, что при 5%-м уровне значимости (доверительная вероятность 95%) $F_{крит.}$ равно 4,84, при 1%-м – 9,65. Поскольку $F = 21{,}4 > F_{крит.}$, нулевая гипотеза в обоих случаях отвергается.

Проверка некоторых предполагавшихся свойств ε_i

Приведенные формулы расчета стандартных ошибок коэффициентов регрессии, способы тестирования различных статистик корректны для модели линейной регрессии лишь при выполнении условий Гаусса – Маркова и нормальном распределении случайного члена. Поэтому после оценивания уравнения регрессии нужно выяснить, выполняются ли эти свойства. Мы покажем проверку гипотезы о статистической независимости ε_i (свойство 3). Для этого проверяется некоррелированность соседних ε_i (которая необходима, но недостаточна для статистической независимости случайных отклонений). Для проверки гипотезы о некоррелированности соседних ε_i обычно используется статистика Дарбина – Уотсона, DW, в расчете которой используются фактические отклонения e_i и для которой имеются соответствующие таблицы распределения при отсутствии корреляции соседних ε_i. Ее формула такова:

$$DW = \frac{\sum_i (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_i e_i^2}. \qquad (2.5)$$

Величина DW тесно связана с выборочным коэффициентом автокорреляции остатков первого порядка (т. е. соседних) $r^*_{i,i-1}$: $DW \approx 2(1 - r^*_{i,i-1})$.

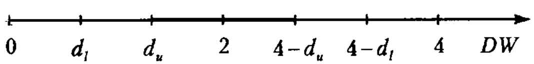
Рассмотрим возможные значения статистики DW. Если бы, например, каждое e_i в точности равнялось e_{i-1}, то DW равнялась бы нулю; если бы было $e_i = -e_{i-1}$, то DW равнялась бы 4, в иных случаях $0 < DW < 4$.

В случае сильной положительной автокорреляции первого порядка между ε_i величина DW обычно близка к нулю;

в случае сильной отрицательной автокорреляции первого порядка между ε_i величина DW обычно близка к 4;

в случае отсутствия автокорреляции первого порядка между ε_i величина DW обычно близка к 2.

Для статистики DW проверяется нулевая гипотеза, заключающаяся в отсутствии автокорреляции остатков ε_i первого порядка. Таблицы распределения DW позволяют при данном числе наблюдений и объясняющих переменных для заданного уровня значимости найти критические значения статистики Дарбина – Уотсона. С помощью таблиц находятся интервалы, внутри которых нулевая гипотеза либо отвергается, либо нет. Здесь существенно наличие двух критических значений статистики Дарбина – Уотсона, меньших 2: нижнего d_l как границы признания наличия положительной автокорреляции остатков и верхнего d_u как границы неотклонения предположения о ее отсутствии. Это связано с тем, что распределение DW-статистики зависит не только от числа наблюдений и объясняющих переменных, но и от значений объясняющих переменных, и поэтому возникает "зона неопределенности" между d_l и d_u. При использовании в качестве альтернативной гипотезы об отрицательной автокорреляции остатков эти два критических значения должны быть симметрично отражены относительно числа 2.



Например, уравнение парной регрессии $\pi = 6{,}29 - 0{,}76 \cdot u$ (уравнение кривой Филлипса для США, 1954–1966 гг., 13 наблюдений) имеет значение $DW = 0{,}965$. Если уровень значимости равен 5%, то мы находим по таблицам $d_l = 1{,}04$; $d_u = 1{,}34$. Нулевая гипотеза здесь не отвергается при $d_u = 1{,}34 < DW < 2{,}66 = 4 - d_u$ и отвергается при $DW < 1{,}04 = d_l$ или $DW > 2{,}96 = 4 - d_l$. Поскольку в нашем случае величина $DW < d_l$, нулевая гипотеза отвергается и признается наличие положительной автокорреляции остатков. Если альтернативной гипотезой является именно наличие положительной автокорреляции остатков первого порядка, то критические значения $d_u = 1{,}34$ и $d_l = 1{,}04$ соответствуют 2,5%-му уровню значимости.

В первом приближении, при достаточном числе наблюдений (не меньшем чем 10–15), при 1–3 объясняющих переменных величина DW должна быть не меньше чем 1 (и не больше чем 3). Иначе мы признаем наличие автокорреляции случайного члена и будем пытаться улучшить формулу зависимости. Признание такой автокорреляции может говорить собственно о статистической связи величин ε_i, и в этом случае оценки коэффициентов регрессии оказываются неэффективными (хотя и несмещенными), а их стандартные ошибки рассчитываются некорректно. Для устранения такой автокорреляции можно воспользоваться, например, авторегрессионным преобразованием (об этом – в следующей лекции). Однако близкая к нулю статистика Дарбина – Уотсона может говорить и о неправильном выборе формулы зависимости или состава объясняющих переменных. В этом случае оценки коэффициентов модели могут быть смещены, и необходимо уточнение спецификации модели.

Нуждаются в проверке и другие требуемые свойства отклонений. Особенно важно выполнение условия 4 Гаусса – Маркова о статистической независимости случайного члена и объясняющих переменных. Нарушение этого свойства приводит к смещению оценок коэффициентов регрессии. Причины такого нарушения могут быть различными – от ошибок измерения объясняющих переменных до наличия в модели обратных связей. Важно также и условие 2 (постоянство дисперсии случайного члена, называемое гомоскедастичностью). Правда, нестабильность дисперсии (гетероскедастичность) считается не столь серьезной проблемой, поскольку в этом случае оценки коэффициентов регрессии оказываются несмещенными (хотя и неэффективными). Тем не менее, существуют различные специальные методы диагностирования и устранения гетероскедастичности [1, с. 201–216].

Дальнейшее оценивание и исследование уравнения кривой Филлипса

Далее в этой лекции мы рассмотрим простейший пример оценки уравнения кривой Филлипса с инфляционными ожиданиями и расчета на его основе значения естественного уровня безработицы. Здесь и далее будут использованы данные базы данных Всемирного банка WinSTARS 4.2 (1999, World Development Indicators), приведенные в таблице 2.1.

Таблица 2.1

	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
π (%)	5,17	5,07	5,61	4,66	6,31	8,54	9,22
u (%)	3,40	4,80	5,80	5,50	4,80	5,50	8,30
	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
π (%)	6,53	6,87	7,60	8,89	9,51	10,33	6,09
u (%)	7,60	6,90	6,00	5,80	7,00	7,50	9,50
	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
π (%)	4,48	4,62	3,52	2,45	3,31	3,83	4,40
u (%)	9,60	7,50	7,20	7,00	6,20	5,50	5,30
	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
π (%)	4,34	3,86	2,66	2,72	2,23	2,00	1,45
u (%)	5,60	6,80	7,50	6,90	6,10	5,60	5,40

Оценив уравнение кривой Филлипса без инфляционных ожиданий для США за 1972–1990 гг., получаем:

$$\begin{aligned} \pi &= 5{,}095 + 0{,}146 \cdot u \\ &\quad (2{,}881)\ \ (0{,}419)\ \ (\text{с.о.}) \\ &R^2 = 0{,}007;\ DW = 0{,}45. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(В скобках под коэффициентами здесь и далее в лекциях 1–5 приведены их стандартые ошибки, или с.о.)

Это уравнение неприемлемо по всем параметрам, что, в совокупности с рис. 2.1, приводит к мысли, что, возможно, инфляционные ожидания играли важную роль в формировании динамики инфляции в США в данный период.

Добавим инфляционные ожидания в уже оцененную линейную модель для 1954–1966 гг. При этом мы отталкиваемся от простейшей формы адаптивных ожиданий, описываемых формулой $\pi^e = \pi(-1)$, приведенной, например, Р.Дорнбушем и С.Фишером [3, с. 506]. Вначале мы рассмотрим более общую формулу $\pi^e = \alpha \cdot \pi(-1)$, но в ряде случаев затем получаются оценки коэффициента α, не отличающиеся значимо от единицы. Оцененное уравнение (построенное на основе (2.2)) имеет вид:

$$\begin{gathered} \pi = 5{,}335 - 0{,}726 \cdot u + 0{,}357 \cdot \pi(-1) \\ (0{,}854)\quad (0{,}141)\qquad (0{,}160)\quad (\text{с.о.}) \\ R^2 = 0{,}775;\ DW = 2{,}21. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Добавление инфляционных ожиданий улучшает модель, особенно в отношении автокорреляции случайного члена. Отметим, что непосредственное применение DW-статистики некорректно, если среди объясняющих переменных присутствует зависимая переменная с лагом (здесь это $\pi(-1)$). Тем не менее, в данном случае применение адекватной для ситуации с лаговой объясняющей переменной статистики Дарбина (см., например, [1, с. 227–228]) приводит к выводу об отсутствии автокорреляции остатков. Здесь и далее мы приводим значения DW, поскольку они выдаются в распечатке результатов и являются одним из компонентов в расчете статистики Дарбина, причем близость DW к двум является одним из факторов, приближающих статистику Дарбина к нулю, что позволяет для большой выборки не отвергнуть гипотезу о некоррелированности случайного члена в модели с лаговой объясняющей переменной. Коэффициенты регрессии здесь статистически значимы, однако коэффициент при $\pi(-1)$ несколько менее значим, чем остальные ($t = 2{,}23$). Этот коэффициент довольно мал, что говорит о том, что инфляционные ожидания играли некоторую, но не слишком большую роль в определении темпов инфляции в США в период 1954–1966 гг. Можно также говорить об ожидании сокращения темпов инфляции в рассматриваемый период времени (если принять модель в целом), поскольку оценка коэффициента α значимо меньше единицы (метод проверки гипотезы о равенстве коэффициента единице рассмотрен на с. 36).

Оценивание естественного уровня безработицы (NAIRU)

В модели кривой Филлипса с инфляционными ожиданиями мы предполагаем существование некоторого "естественного" уровня безработицы, не приводящего к изменению темпов инфляции. Этот уровень называется NAIRU (non-accelerating inflation rate of unemployment). Модель имеет вид:

$$\pi = \beta \cdot (u^* - u) + \alpha \cdot \pi(-1) + \varepsilon \,, \qquad (2.8)$$

где $\pi(-1)$ – темп инфляции в предыдущем году, u – уровень безработицы, u^* – NAIRU, α и β – неизвестные коэффициенты. Здесь $\alpha \cdot \pi(-1)$ – инерционный член модели, описывающий ожидаемую инфляцию. Мы оценили следующее уравнение регрессии по данным для США за 1972–1990 гг.:

$$\begin{aligned} \pi &= \underset{(1{,}453)}{5{,}056} - \underset{(0{,}249)}{0{,}795} \cdot u + \underset{(0{,}146)}{1{,}039} \cdot \pi(-1) \quad \text{(с.о.)} \\ R^2 &= 0{,}762;\ DW = 2{,}25. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Можно видеть, что все статистики данного уравнения вполне хороши. Все t-статистики по модулю превышают 3. Доля объясненной дисперсии зависимой переменной (76,2%) высока, особенно для уравнения с относительными переменными, каковыми являются уровни безработицы и темпы инфляции. Хотя статистика Дарбина – Уотсона в данной модели непосредственно не применима, рассчитываемая с ее помощью статистика Дарбина позволяет здесь не отвергнуть гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков первого порядка при обычно используемых уровнях значимости.

Если мы считаем, что $5{,}056 - 0{,}795 \cdot u = b(u^* - u)$ (b – оценка β), то $b = 0{,}795$, и оценка NAIRU $u^* = 5{,}056/0{,}795 = 6{,}36$ (%). Итак, если принять данную модель инфляции, то естественный уровень безработицы (NAIRU) в США в 1972–1990 гг., видимо, составлял в среднем примерно 6%, что соответствует другим известным оценкам.

Если коэффициент α превышает единицу, то можно говорить об инфляции как о самоускоряющемся процессе, что затрудняет ее регулирование. Здесь, однако, оценка коэффициента α, равная 1,054, не отличается значимо от 1 (то есть нулевая гипотеза $H_0 : \alpha = 1$ не отвергается. Для проверки этой гипотезы рассчитывается t-статистика $t = \dfrac{1 - 1{,}054}{0{,}142} = -0{,}387$, модуль которой меньше соответствующих критических значений). Поэтому можно предположить заранее, что данный коэффициент равен единице. Это означает, что ожидаемый темп инфляции равен темпу инфляции предыдущего года: $\pi^e = \pi(-1)$. После включения этого равенства в модель оценивается уравнение:

$$\begin{aligned} &\pi - \pi(-1) = 5{,}057 - 0{,}759 \cdot u \\ &\qquad\qquad\quad (1{,}413)\ \ (0{,}205) \quad (\text{с.о.}) \\ &R^2 = 0{,}446;\ DW = 2{,}17. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь оценка NAIRU равняется: $u^* = 5{,}057 / 0{,}759 = 6{,}66$ (%). Она не отличается существенно от предыдущей оценки.

Для выяснения вопроса об устойчивости сделанных оценок расширим период оценивания до 1969–1996 гг. на основе той же базы данных Всемирного банка. Получаются следующие результаты. Модель без инфляционных ожиданий приемлемых результатов не дает, как и следовало ожидать, поскольку она не дала их на значительной части рассматриваемого сейчас периода. При оценивании модели (2.8) результат получился следующий:

$$\begin{aligned} &\pi = 3{,}342 - 0{,}582 \cdot u + 1{,}054 \cdot \pi(-1) \\ &\quad (1{,}022)\ (0{,}175) \quad\ (0{,}103) \quad (\text{с.о.}) \\ &R^2 = 0{,}812;\ DW = 2{,}10. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Доля объясненной дисперсии даже выросла; все оценки по-прежнему значимы. Первые два параметра существенно отличаются от полученных ранее, но оценка NAIRU $u^* = 3{,}342 / 0{,}582 = 5{,}74$ (%) от прежней отличается незначительно, как и оценка α, также не отличающаяся значимо от единицы. Таким образом, существенные для нас параметры зависимости оказались устойчивыми, и, кроме того, мы вновь можем перейти к оцениванию модели типа (2.10). Ее параметры здесь оказались следующими:

$$\begin{gathered} \pi - \pi(-1) = \underset{(1{,}107)}{3{,}352} - \underset{(0{,}153)}{0{,}539} \cdot u \qquad (\text{с.о.}) \\ R^2 = 0{,}323;\ DW = 1{,}99. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь оценка NAIRU равняется $u^* = 3{,}352 / 0{,}539 = 6{,}22$ (%) и вновь мало отличается от сделанной для части периода, т.е. она, в отличие от собственно коэффициентов зависимости, оказалась устойчивой. Для оценки NAIRU здесь не рассчитываются непосредственно стандартные ошибки, но степень ее устойчивости можно оценить в случае преобразованного уравнения, когда этот параметр оценивается непосредственно. Степень устойчивости здесь достаточно велика – стандартная ошибка составляет 3–4% от значения оценки параметра.

Таким образом, мы показали, как с помощью простейшей регрессионной модели может быть оценен важный макроэкономический параметр, лежащий в основе целого ряда теорий и моделей. Конечно, современный уровень развития макроэкономики и эконометрики предполагает использование существенно более продвинутых моделей и методов. Приведем лишь некоторые ссылки по оцениванию уравнения кривой Филлипса.

Классическая работа А.У.Филлипса [5], в которой он оценил зависимость между уровнем безработицы и темпами изменения ставок заработной платы в Великобритании в период с 1861 по 1913 гг., была опубликована в 1958 г. С тех пор только в ведущих мировых экономических журналах опубликованы сотни работ о связи между безработицей и темпом изменения ставок заработной платы или тесно связанной с ним инфляцией.

Оценивались как линейные, так и нелинейные (например лог-линейные, дробно-линейные и др.) формулы связи, вводились различные формы инфляционных ожиданий (разного типа адаптивные, рациональные и т.д.), использовались новые объясняющие переменные (наряду с безработицей, это отставание ВВП, реальные предельные издержки и др.), проводилась очистка и выравнивание временных рядов, использовались разные методы оценивания (наряду с разными видами МНК, это метод максимума правдоподобия, обобщенный метод моментов и др.), вводились элементы стохастики и связи между переменными микро- и макроуровня. В качестве примера одной из последних работ, соединяющих некоторые из перечисленных подходов и факторов, укажем работу [6]. Из базовых учебников эконометрики наиболее подробно рассматривает некоторые аспекты оценивания и анализа кривых Филлипса известный учебник Д.Н.Гуджарати [7, с. 174–178, 203–204]. В нем, в частности, приведены оценки параметров (и их анализ) линейных, лог-линейных и дробно-линейной зависимостей кривой Филлипса, линеаризуемой в виде $u_t = \alpha + \beta/\pi_t$, без инфляционных ожиданий для Великобритании за 1950–1966 гг. и простейшей линейной зависимости с инфляционными ожиданиями для США за 1970–1982 гг.

Лекция 3

ФУНКЦИЯ ЧИСТОГО ЭКСПОРТА: ПРИМЕР ОЦЕНКИ И РАЗВИТИЯ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Для демонстрации процесса эконометрического исследования как развития модели множественной линейной регрессии рассмотрим построение функции чистого экспорта для экономики США на различных этапах периода 1931–1990 гг.

В качестве первоначальной спецификации функции чистого экспорта мы рассмотрим уравнение

$$RNX = \alpha + \beta_1 \cdot GNP + \beta_2 \cdot RSR + u\ . \qquad (3.1)$$

Здесь *RNX* – объем реального чистого экспорта (в ценах 1982 г.), млрд. долл.; *GNP* – реальный валовой национальный продукт (ВНП), млрд. долл.; *RSR* – реальная краткосрочная ставка процента, процентов. Функция чистого экспорта данного типа включается в модель *IS–LM* для открытой экономики. В последние годы в качестве обобщающего показателя производства в международной статистике используется обычно не ВНП, а ВВП (валовой *внутренний* продукт). В то же время в модели чистого экспорта в качестве объясняющей переменной взят ВНП, чему есть две причины. Во-первых, на величину чистого экспорта в большей мере влияет не объем *производства,* а объем *дохода* в стране (а для соизмерения доходов основным показателем по-прежнему остается ВНП). Во-вторых, по ВНП имеются более продолжительные и надежные ряды статистических данных.

Коэффициенты β_1 и β_2 называются чувствительностями чистого экспорта к величине дохода и к процентной ставке; в теории их значения предполагаются отрицательными. Первоначальное оценивание дает следующий результат:

$$\begin{gathered} RNX = 21{,}1 - 0{,}017 \cdot GNP + 0{,}411 \cdot RSR \\ (8{,}43)\ (0{,}004) \qquad (0{,}947) \quad (\text{с.о.}) \\ R^2 = 0{,}29;\ DW = 0{,}43. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Отрицательность полученных коэффициентов регрессии соответствует теории. Отношение коэффициента регрессии к его стандартному отклонению, или t-статистика, характеризует статистическую значимость переменной. Здесь коэффициент при GNP статистически значим (поскольку $t_{GNP} = 0{,}017 / 0{,}004 = 4{,}25$), а коэффициент при RSR статистически незначим. Его t-статистика $t_{RSR} = -0{,}411 / 0{,}947 \approx -0{,}434$ слишком мала по абсолютной величине. Чтобы проверить это, используются таблицы распределения Стьюдента. Здесь, однако, все ясно и без таблиц, поскольку $|t_{GNP}| = 4{,}25 >> 3$, а $|t_{RSR}| = 0{,}434 << 1$. Следовательно, объясняющую переменную RSR нужно, по-видимому, попытаться заменить на следующем шаге на другую.

F-статистика оцененного уравнения составляет:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0{,}29}{0{,}71} \cdot \frac{57}{2} \approx 11{,}6\,. \tag{3.3}$$

В таблицах F-распределения с (2; 57) степенями свободы можно найти критическое значение F, которое равно 3,16 при 5%-м уровне значимости и 5,0 при 1%-м уровне значимости. Таким образом, гипотеза об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов регрессии с уверенностью отвергается. Даже небольшая величина $R^2 = 0{,}29$ при достаточно большом числе наблюдений может дать статистически значимое значение F-статистики. В то же время, если величина R^2 рассматривается как критерий качества уравнения регрессии (доля дисперсии зависимой переменной, объясненной с помощью уравнения регрессии), то значение $R^2 = 0{,}29$ не является вполне удовлетворительным. Оно стимулирует поиск новых объясняющих переменных для величины RNX, поскольку введение каждой дополнительной объясняющей переменной увеличивает значение R^2.

Для проверки качества уравнения регрессии необходимо также рассмотреть значение статистики Дарбина – Уотсона DW. В нашем случае она равняется 0,43. Очевидно, здесь присутствует положительная автокорреляция ε_i: величина DW близка к нулю. Проверим теперь значение DW по таблицам для $n = 60$; $m = 2$ при уровне значимости 5%. Критические значения здесь равны $d_l = 1{,}51$; $d_u = 1{,}65$. Поскольку $DW = 0{,}43 < 1{,}51 = d_l$, мы принимаем альтернативную гипотезу о наличии положительной автокорреляции первого порядка значений случайного члена ε_i. Величина DW-статистики говорит здесь о том, что, вполне вероятно, зависимость имеет какую-то другую форму: имеются не включенные в модель важные объясняющие факторы, параметры регрессии меняются во времени, или же сама формула нелинейна.

Недостатки оцененного уравнения регрессии ясно видны на рис. 3.1, где показано изменение во времени фактических и рассчитанных по уравнению регрессии значений RNX, а также разности между ними. По графику видно, что уравнение описывает лишь общий тренд показателя RNX, не объясняя отклонений от него. Очевидно также, что отклонения показателя RNX от линии регрессии не являются независимыми друг от друга, а их дисперсия непостоянна во времени.

Если полученное уравнение регрессии неприемлемо по каким-либо параметрам, то может быть сделан один из перечисленных шагов:

- введение временных лагов (запаздываний) для некоторых объясняющих переменных;
- исключение незначимых переменных и добавление новых объясняющих переменных;
- разбиение рассматриваемого периода времени на части и оценка прежнего или нового уравнения регрессии для каждой из этих частей;
- преобразования данных для устранения их нежелательных свойств;
- выбор нелинейной формулы регрессии с ее последующей линеаризацией или оцениванием параметров нелинейного уравнения;
- исключение части сильно коррелированных факторов (в случае мультиколлинеарности).

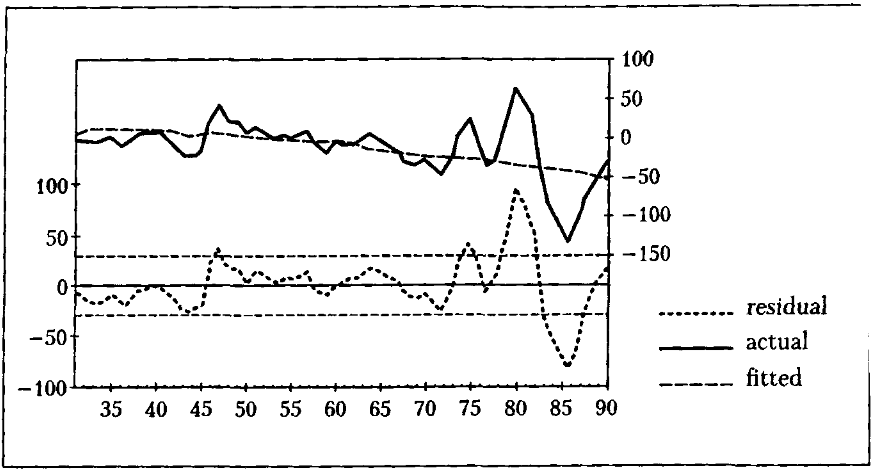


Рис. 3.1

Действительные (actual) и расчетные (fitted) значения RNX; отклонения от линии регрессии (residual). США, 1931–1990 гг., уравнение:
$RNX = 21{,}1 - 0{,}017 \cdot GNP - 0{,}411 \cdot RSR$. По горизонтальной оси отложены годы; показатель RNX (млрд. долл.) – по правой вертикальной оси и отклонения e_t – по левой вертикальной оси

Объясняющие переменные с лагами

Влияние изменений процентной ставки на величину чистого экспорта происходит с задержкой во времени (лагом). При подписании экспортно-импортных контрактов учитывается текущая ситуация, а выполняются они обычно лишь через несколько месяцев. Поэтому представляется разумным не исключать сразу объясняющую переменную RSR, а ввести для нее лаг в один год, то есть заменить RSR на $RSR(-1)$. Получаем следующее уравнение регрессии:

$$RNX = 18{,}9 - 0{,}015 \cdot GNP - 2{,}086 \cdot RSR(-1)$$
$$(8{,}31)\ (0{,}004) \qquad (0{,}911) \quad (\text{с.о.}) \qquad (3.4)$$
$$R^2 = 0{,}35;\ DW = 0{,}46.$$

Здесь коэффициенты при обеих объясняющих переменных статистически значимы на уровне 5%, однако, показатели общего качества модели R^2 и DW здесь не намного лучше, чем прежде.

Уточнение набора объясняющих переменных в регрессионной модели

В качестве следующего шага в развитии модели чистого экспорта мы заменим объясняющую переменную RSR на переменную ER (exchange rate) – обменный курс доллара США по отношению к “корзине” основных иностранных валют. Причиной такой замены является то, что рост (или снижение) процентной ставки влияет на реальный экспорт и импорт косвенно, через изменения валютного курса: для получения более высокого процента деньги сначала нужно обменять. При обеспечении такого обмена экспорт из данной страны растет, а ее импорт падает. Кроме того, существует и прямое влияние обменного курса на экспорт и импорт, не связанное непосредственно с процентной ставкой. Чем выше курс национальной валюты, тем труднее экспортировать из данной страны и тем легче в нее импортировать, независимо от того, где и под какой процент занимаются деньги для экспортно-импортных операций и в банк какой страны кладется выручка. Итак, для денег, обращающихся в международной торговле, процентные ставки не так важны, как обменный курс; следовательно, мы можем ожидать, что обменный курс окажется более важной объясняющей переменной в модели чистого экспорта, чем какая-либо процентная ставка, долгосрочная или краткосрочная, номинальная или реальная.

Поскольку наша модель оперирует реальными (а не номинальными) макроэкономическими показателями, переменная обменного курса также должна быть реальной. В то же время имеющиеся статистические данные отражают взвешенный номинальный курс доллара. В краткосрочном периоде замена реального курса номинальным допустима, поскольку соотношение общих уровней внутренних и мировых цен остается стабильным. Для экономики США это соотношение было достаточно стабильным в течение последних десятилетий, поэтому использование номинального валютного курса в качестве объясняющей переменной модели чистого экспорта приемлемо, что подтверждают и проведенные расчеты.

Оценено следующее уравнение регрессии с переменной ER:

$$RNX = 94{,}2 - 0{,}018 \cdot GNP - 0{,}631 \cdot ER$$
$$\qquad (36{,}4)\ (0{,}004) \qquad (0{,}309) \quad (\text{с.о.}) \qquad (3.5)$$
$$R^2 = 0{,}33;\ DW = 0{,}41.$$

Абсолютная величина t-статистики $|t| = 0{,}631/0{,}309 \approx 2{,}04$ достаточно значимо подтверждает (доверительная вероятность 95,4%), что коэффициент при переменной ER не равен нулю. Однако значения $R^2 = 0{,}33 = 33\%$ и $DW = 0{,}41$ говорят о по-прежнему довольно низком общем качестве уравнения регрессии.

Введем теперь в уравнение регрессии как дополнительную объясняющую переменную обменный курс предыдущего года $ER(-1)$, поскольку имеется примерно полугодовой лаг между величиной ER и экспортно-импортными потоками. Итак, мы получаем следующее уравнение:

$$RNX = 143{,}0 - 0{,}018 \cdot GNP - 1{,}92 \cdot ER(-1) + 0{,}84 \cdot ER$$
$$\qquad (34{,}4)\ (0{,}003) \qquad (0{,}47) \qquad\quad (0{,}46) \quad (\text{с.о.})\ (3.6)$$
$$R^2 = 0{,}50;\ DW = 0{,}54.$$

Здесь все коэффициенты по-прежнему статистически значимы (при уровне значимости 5–6%), и доля объясненной дисперсии RNX выросла до 50%. Нужно пояснить положительный знак коэффициента при ER, поскольку рост обменного курса должен приводить к сокращению, а не увеличению чистого экспорта. Этот момент становится более ясным, если переписать уравнение в следующей форме:

$$RNX = 143{,}0 - 0{,}018 \cdot GNP - 1{,}08 \cdot ER + 1{,}92 \cdot \Delta ER, \qquad (3.7)$$

где $\Delta ER = ER - ER(-1)$.

Здесь коэффициент при переменной ER уже отрицателен, а положительный знак коэффициента при переменной ΔER означает, что чем она больше, тем меньше (при данной ER) величина $ER(-1)$, отрицательно влияющая, наряду с ER, на объем чистого экспорта. Мы могли оценить любую из этих формул, получив при этом эквивалентные результаты.

Уточнение интервала оценивания линейной регрессионной модели

Анализ оцененных уравнений регрессии показывает, что обменный курс стал важным фактором в определении объема чистого экспорта США лишь на рубеже 1960–1970 гг. Это может быть показано на графике отклонений для последнего из оцененных уравнений. Для такого резкого изменения, очевидно, должна быть серьезная причина, заключающаяся в изменении экономической политики или внешнем потрясении. В данном случае объяснением служит то, что с 1971 г. был введен плавающий курс доллара США к другим основным валютам. До этого номинальный обменный курс был фиксированным, что искажало реальный курс и его воздействие на экспортно-импортные потоки. Поэтому роль обменного курса в объяснении поведения показателя RNX в нашей модели в более ранний период играет переменная $RSR(-1)$.

В случае резкого изменения значений параметров регрессионной модели рассматриваемый в ней период времени нужно разбить на подпериоды. Поэтому далее мы разделим период 1931–1990 гг. на части и продолжим развивать полученное уравнение регрессии для той части, где оно работает лучше. Выбор конкретных дат начала и конца того или иного периода может быть сделан на основе рассмотрения графических результатов расчетов. По этим графикам (мы их здесь не приводим) можно заметить, что переменная $RSR(-1)$ позволяет описать не только общий тренд переменной RNX, но и (в некоторой степени) отклонения от него в конце 1940-х – начале 1950-х гг., а переменная ER – во второй половине 1970-х и 1980-х гг.

Вначале выберем период 1946–1962 гг. и оценим для него следующее уравнение:

$$RNX = 49{,}9 - 0{,}032 \cdot GNP - 1{,}538 \cdot RSR(-1)$$
$$(14{,}1)\ (0{,}010) \qquad (0{,}485) \quad (\text{с.о.}) \qquad (3.8)$$
$$R^2 = 0{,}83;\ DW = 2{,}10.$$

Это уравнение показывает пример удачной эконометрической модели с точки зрения всех основных статистик. Коэффициенты регрессии здесь статистически значимы, их t-статистики превышают 3 по абсолютной величине. Доля объясненной дисперсии зависимой переменной (R^2) равна 83%, а статистика Дарбина – Уотсона очень близка к 2, что позволяет не отклонить гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков первого порядка с высокой степенью надежности. В то же время графический анализ остатков показывает, что данная модель действительно очень хороша лишь для первой половины рассматриваемого периода; на его второй половине модель описывает лишь общий тренд показателя RNX и не объясняет отклонения от этого тренда.

Выберем теперь период 1965–1990 гг. и оценим уравнение регрессии RNX на GNP и $ER(-1)$:

$$RNX = 393{,}7 - 0{,}046 \cdot GNP - 2{,}58 \cdot ER(-1)$$
$$(41{,}0)\ (0{,}007) \qquad (0{,}28) \quad (\text{с.о.}) \qquad (3.9)$$
$$R^2 = 0{,}82;\ DW = 0{,}89.$$

Здесь все коэффициенты статистически значимы, их стандартные ошибки в 7–10 раз меньше по модулю, чем сами коэффициенты. Уравнение соответствует теории, согласно которой реальный чистый экспорт отрицательно зависит от реального ВНП и реального обменного курса. График показывает, что в период 1965–1990 гг. расчетные значения показателя RNX весьма близки к его фактическим значениям. Единственная проблема состоит здесь в том, что величина DW существенно меньше двух, и, таким образом, можно попытаться улучшить уравнение. При этом мы надеемся устранить автокорреляцию остатков (приблизив DW к двум), а также увеличить долю объясненной дисперсии показателя $RNX(R^2)$.

Мультиколлинеарность

Сейчас мы сделаем шаг, который впоследствии окажется ошибочным, однако проиллюстрирует явление мультиколлинеарности, очень важное в оценивании уравнений множественной линейной регрессии. *Мультиколлинеарность означает сильную коррелированность двух или нескольких объясняющих переменных в уравнении регрессии.* Эта проблема возникает в модели множественной регрессии, когда оказывается сложным разделить влияние двух или нескольких факторов на зависимую переменную. Она появляется тогда, когда некоторые объясняющие переменные коррелированы и поэтому меняются синхронно.

Природа мультиколлинеарности может быть проиллюстрирована на примере совершенной мультиколлинеарности, то есть точной линейной зависимости. Если, например, в уравнении:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \varepsilon \qquad (3.10)$$

объясняющие переменные x_1 и x_2 связаны линейной зависимостью: $x_2 = \lambda \cdot x_1$, то первоначальное уравнение может быть сведено к следующему уравнению с одной объясняющей переменной:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot \lambda \cdot x_1 + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1' \cdot x_1 + \varepsilon, \qquad (3.11)$$

для которого можно оценить коэффициенты β_0 и $\beta_1' = \beta_1 + \lambda \cdot \beta_2$. Последнее уравнение содержит два неизвестных параметра β_1 и β_2, которые не могут быть найдены по отдельности. Таким образом, при совершенной мультиколлинеарности невозможно оценить коэффициенты регрессии (здесь это β_1 и β_2) и разделить вклад переменных x_1 и x_2 в формирование поведения переменной y. ***Несовершенная мультиколлинеарность,*** то есть стохастическая связь переменных x_1 и x_2, характеризуется величиной их коэффициента корреляции ρ. Чем ближе к единице абсолютная величина ρ, тем ближе мультиколлинеарность к совершенной и тем труднее разделить влияние объясняющих переменных x_1 и x_2 на y и тем менее надежны оценки соответствующих коэффициентов регрессии.

Предположим, что чистый экспорт связан с объемом потребления, поскольку значительная часть импорта идет на потребление. Для этого мы включим в последнее из оцененных уравнений (3.9) еще одну объясняющую переменную $CONS$ (реальные потребительские расходы). Получаем уравнение:

$$RNX = 406{,}6 - 0{,}07 \cdot GNP - 2{,}61 \cdot ER(-1) + 0{,}035 \cdot CONS$$
$$(70{,}1)\ (0{,}110) \qquad (0{,}31) \qquad (0{,}152) \quad (\text{с.о.}) \quad (3.12)$$
$$R^2 = 0{,}82; \ \ DW = 0{,}87.$$

Мы видим здесь, что значения R^2 и DW не стали заметно лучше – переменная $CONS$ практически не добавляет информации для объяснения поведения RNX. Но теперь оказались незначимыми сразу два коэффициента регрессии – коэффициент при переменной $CONS$ и коэффициент при переменной GNP, что требует объяснения, поскольку последний был значимым в предыдущих уравнениях регрессии. Проблема заключается в том, что переменные GNP и $CONS$ сильно коррелированы – по данным 1965–1990 гг. их коэффициент корреляции составил 0,9978. Поэтому даже если на переменную RNX в действительности сильно влияли как GNP, так и $CONS$, мы здесь не смогли бы разделить это влияние. Итак, мы исключаем только что введенную переменную $CONS$ из числа объясняющих.

Вообще говоря, если в оцененном уравнении регрессии оказалось несколько незначимых факторов, то вначале нужно проверить, нет ли среди них сильно коррелированных между собой. Для этого распечатывается корреляционная матрица (это обычно включено в стандартное программное обеспечение) и проверяется статистическая значимость коэффициентов парной корреляции. Если такая корреляция имеет место, то один из сильно коррелированных факторов исключается, либо вместо них вводится некоторая их функция как новая объясняющая переменная. Если статистически незначим лишь один фактор, то он должен быть исключен либо заменен другим показателем.

Дальнейшее развитие модели чистого экспорта. Авторегрессионное преобразование

В качестве следующего шага в развитии модели чистого экспорта (3.9) введем объясняющую переменную $\Delta ER = ER - ER(-1)$, что равносильно добавлению к (3.9) зависимости от текущего обменного курса предыдущего года ER. Для периода 1965–1990 гг. мы получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} RNX = {} & 370{,}5 - 0{,}044 \cdot GNP - 2{,}42 \cdot ER + 3{,}10 \cdot \Delta ER \\ & (42{,}3) \quad (0{,}007) \qquad (0{,}29) \qquad (0{,}42) \quad (\text{с.о.}) \\ & R^2 = 0{,}84;\ DW = 1{,}32. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Значение статистики Дарбина – Уотсона здесь намного лучше, чем у (3.9), но возможность ее улучшения еще сохраняется, как и возможность повышения доли объясненной дисперсии зависимой переменной. Добавление переменной $\Delta GNP = GNP - GNP(-1)$ помогает существенно увеличить значение R^2:

$$\begin{aligned} RNX = {} & 339{,}0 - 0{,}038 \cdot GNP - 0{,}177 \cdot \Delta GNP - 2{,}15 \cdot ER + 2{,}80 \cdot \Delta ER \\ & (34{,}9) \quad (0{,}005) \qquad (0{,}048) \qquad (0{,}24) \qquad (0{,}35) \quad (\text{с.о.}) \\ & R^2 = 0{,}90;\ DW = 1{,}12. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Коэффициент при переменной ΔGNP здесь отрицателен, как и коэффициент при GNP. Последнее понятно, поскольку рост дохода обычно ведет к увеличению импорта. Отрицательность же коэффициента при ΔGNP можно пояснить следующим образом. При данном значении текущего ВНП большее значение ΔGNP означает больший его прирост. Соответственно потребитель прогнозирует больший прирост ВНП и на будущее. Ожидая рост дохода в будущем, он нередко увеличивает потребление импортных товаров уже в текущем году. Соответственно чистый экспорт сокращается. Здесь проявляется различие во влиянии обменного курса и дохода на величину чистого экспорта: важными оказываются обменный курс предыдущего года и ожидаемый доход следующего года.

Теперь проверим гипотезу об одновременном равенстве нулю коэффициентов при двух только что введенных переменных ΔER и ΔGNP. Для этого рассчитывается следующая F-статистика:

$$F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2} \cdot \frac{n - m - k - 1}{k} = \frac{0{,}08}{0{,}096} \cdot \frac{21}{2} = 8{,}75 . \qquad (3.15)$$

Здесь n – число наблюдений, m – исходное число объясняющих переменных, k – число введенных переменных. Если нулевая гипотеза выполняется (то есть в данном случае – оба истинных значения коэффициентов равны нулю), то рассчитанная статистика имеет F-распределение с k и $(n - m - k - 1)$ степенями свободы. Критическое значение ее при 1%-м уровне значимости равно $5{,}78$, и поскольку $8{,}75 > 5{,}78$, нулевая гипотеза отвергается. Таким образом, привносимое двумя новыми переменными увеличение объясняющей способности модели статистически значимо, что находится в соответствии со значимостью каждого из них по отдельности.

Что касается автокорреляции остатков первого порядка, то значение $DW = 1{,}12$ попадает в "зону неопределенности", где невозможно ответить на вопрос, отвергается ли гипотеза об отсутствии такой автокорреляции (здесь при 5%-м уровне значимости $d_u = 1{,}76$; $d_l = 1{,}06$). Все же близость рассчитанной статистики к d_l говорит скорее о целесообразности попытки устранения автокорреляции остатков.

Предположим теперь, что сохраняющаяся автокорреляция остатков вызвана не существованием важных факторов, еще не включенных в модель, и не нелинейностью формулы связи, а внутренними свойствами ряда ε_i. В таком случае можно воспользоваться, например, авторегрессионным преобразованием AR.

Авторегрессионное преобразование и метод скользящих средних

Автокорреляция отклонений e_i свидетельствует об отсутствии некоторых предполагавшихся первоначально свойств данных. Иногда причина заключается в том, что значения случайного члена ε_i связаны между собой авторегрессионной зависимостью. Если это авторегрессия первого порядка, то ее формула такова: $\varepsilon_i = \rho \cdot \varepsilon_{i-1} + u_i$ (ρ – коэффициент авторегрессии, $|\rho| < 1$). Мы предполагаем, что в этой формуле отклонения u_i обладают требуемыми стандартными свойствами, одним из которых является их независимость. Зная значение параметра ρ, можно ввести новые переменные $Y_i' = Y_i - \rho \cdot Y_{i-1}$; $X_i' = X_i - \rho \cdot X_{i-1}$. Это преобразование переменных называется *авторегрессионным* (AR), или преобразованием Бокса – Дженкинса. Предположим, что истинная зависимость с автокоррелированным случайным членом имеет вид:

$$Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i + \varepsilon_i.$$

Тогда

$$Y_i' = Y_i - \rho \cdot Y_{i-1} = \alpha + \beta \cdot X_i + \varepsilon_i - \rho(\alpha + \beta \cdot X_{i-1} + \varepsilon_{i-1}) =$$
$$= \alpha(1-\rho) + \beta(X_i - \rho \cdot X_{i-1}) + \varepsilon_i - \rho \cdot \varepsilon_{i-1} = \alpha(1-\rho) + \beta \cdot X_i' + u_i.$$

Если величины u_i действительно обладают требуемыми свойствами, то в формуле зависимости $Y_i' = \alpha_1 + \beta \cdot X_i' + u_i$ уже не будет автокорреляции случайного члена u_i, и при оценивании ее параметров не возникнет потери эффективности. Оценка коэффициента β из этой зависимости может быть непосредственно использована и для первоначальной формулы, а коэффициент α рассчитывается по формуле $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{1-\rho}$; по аналогичной формуле рассчитывается и его оценка a на основе оценок коэффициентов α и ρ. Проблема состоит в том, что истинное значение ρ неизвестно, и поэтому значения α, β и ρ оцениваются совместно в результате итеративной процедуры. Вначале оценивается уравнение зависимости в исходной форме, затем на основе рассчитываемых значений e_i оценивается коэффициент ρ. После этого с использованием оценки ρ рассчитываются значения новых переменных X' и Y', по которым оцениваются коэффициенты преобразованного уравнения. Далее полученные оценки коэффициентов α и β сравниваются с их предыдущими оценками. Если эти оценки совпадают, то процесс завершен, иначе мы пересчитываем отклонения e_i с использованием новых значений a и b. Далее по e_i производится новое оценивание коэффициента авторегрессии ρ, и этот процесс продолжается до тех пор, пока оценки a и b не совпадут на двух последовательных итерациях. Такая процедура оценки коэффициентов регрессии с автокоррелированным остаточным членом называется методом Кокрана – Оркатта (*Cochrane – Orcutt*; более подробно см. [1, с. 222–225]).

В случае, если отклонения u_i оказались также автокоррелированными, можно вновь применить авторегрессионное преобразование. Для такого преобразования используется обозначение $AR(n)$ вместо $AR(1)$, если применена авторегрессия порядка n.

Если отклонения в новом уравнении u_i некоррелированы, то это подтверждает целесообразность применения авторегрессионного преобразования.

Помимо авторегрессионного преобразования и улучшения формулы регрессии существует еще один метод устранения автокорреляции отклонений. Это метод скользящих средних, или MA (moving averages). В этом случае значения случайного члена ε_i описываются как скользящие средние некоторых действительно обладающих нужными свойствами случайных нормально распределенных величин γ_i: предполагается, что $\varepsilon_i = \gamma_i + \theta_1 \cdot \gamma_{i-1} + \ldots + \theta_q \cdot \gamma_{i-q}$. Это – формула преобразования скользящих средних порядка q, или $MA(q)$. Преобразование $MA(1)$, например, может быть записано как $\varepsilon_i = \gamma_i + \theta_1 \cdot \gamma_{i-1}$. Параметры θ_i, как и в случае авторегрессионного преобразования, могут быть оценены итерационными методами.

Сочетание методов $AR(s)$ и $MA(q)$ во многих случаях позволяет решить проблему автокорреляции отклонений. Однако этот подход применим только в тех случаях, когда автокорреляция остатков имеет свои собственные, автономные причины и не связана с существованием важной объясняющей переменной, не включенной в рассмотрение.

Использование авторегрессионного преобразования $AR(1)$ в модели чистого экспорта действительно подтверждает автокорреляцию первого порядка значений случайного члена. Мы получаем уравнение:

$$RNX = 323{,}3 - 0{,}035 \cdot GNP - 0{,}155 \cdot \Delta GNP - 2{,}15 \cdot ER + 2{,}05 \cdot \Delta ER$$
$$(67{,}2)\ (0{,}014)\qquad (0{,}035)\qquad (0{,}40)\qquad (0{,}31)(\text{с.о.})$$
$$R^2 = 0{,}94;\ DW = 1{,}71. \tag{3.16}$$

Это уравнение приемлемо по всем параметрам и статистикам. Единственное, что можно здесь сделать, – это заменить объясняющие переменные ER и ΔER одной переменной $ER(-1)$, поскольку абсолютные величины коэффициентов при ER и ΔER в уравнении почти одинаковы. Поэтому $(-a \cdot ER + a \cdot \Delta ER) = (-a \cdot ER + a \cdot [ER - ER(-1)]) = -a \cdot ER(-1)$, и мы используем это равенство для сокращения на единицу числа объясняющих переменных. Две или несколько переменных в модели линейной регрессии могут быть объединены, если абсолютные величины их коэффициентов близки между собой и если новая переменная имеет разумную содержательную интерпретацию. В этом случае можно проверить статистическую гипотезу о совпадении коэффициентов. Для этого опять рассчитывается F-статистика, и проверяется соответствующая нулевая гипотеза.

Вновь воспользовавшись преобразованием $AR(1)$ (оценка коэффициента ρ равна здесь 0,71 со стандартным отклонением 0,16), мы получаем уравнение регрессии:

$$RNX = 318{,}6 - 0{,}035 \cdot GNP - 0{,}155 \cdot \Delta GNP - 2{,}09 \cdot ER(-1)$$
$$(54{,}9)\ (0{,}013)\qquad (0{,}033)\qquad (0{,}28)\quad (\text{с.о.}) \tag{3.17}$$
$$R^2 = 0{,}94;\ DW = 1{,}79.$$

Рассчитаем F-статистику для проверки гипотезы о совпадении приравненных нами коэффициентов:

$$F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2} \cdot \frac{n - m - k - 1}{k} = 0{,}114\,, \tag{3.18}$$

что намного меньше соответствующего критического значения как при пяти-, так и при однопроцентном уровне значимости. Следовательно, число объясняющих переменных сокращено нами обоснованно.

Полученное уравнение представляется приемлемым с точки зрения его объясняющей способности и отсутствия автокорреляции остатков. Все его коэффициенты статистически значимы: даже минимальная из абсолютных величин t-статистик ($|t_{GNP}| = -0{,}035 : 0{,}013 = 2{,}7$) близка к трем. Уравнение регрессии объясняет 94% дисперсии зависимой переменной, а близкая к двум статистика Дарбина – Уотсона позволяет не отклонить гипотезу о некоррелированности соседних значений случайного члена. Добавление новой объясняющей переменной практически не может улучшить качество данного уравнения регрессии. Это проиллюстрировано на рис. 3.2, где действительные и расчетные значения RNX очень близки друг к другу, а отклонения от линии регрессии (нижняя часть графика) выглядят случайными.

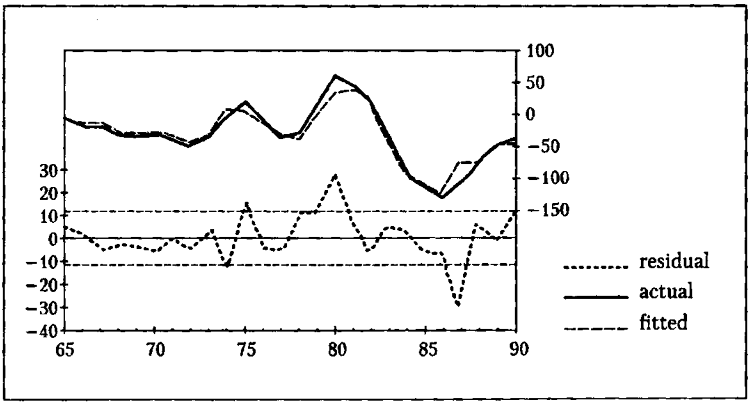


Рис. 3.2

Действительные (actual) и расчетные (fitted) значения RNX; отклонения от линии регрессии (residual, нижняя часть графика). США, 1965–1990 гг., уравнение: $RNX = 318{,}6 - 0{,}035 \cdot GNP - 0{,}155 \cdot \Delta GNP - 2{,}09 \cdot ER(-1)$, с использованием $AR(1)$.

Тем не менее, внимательный взгляд на этот график позволяет уловить еще одну остающуюся проблему – проблему гетероскедастичности. Действительно, отклонения зависимой переменной от линии регрессии в среднем возрастают во времени. При наличии гетероскедастичности полученные с помощью МНК оценки теряют свойство эффективности (хотя и остаются несмещенными и состоятельными). Кроме того, становятся некорректными полученные стандартные ошибки оценок, так как используемые для них формулы предполагают гомоскедастичность. Поэтому рассчитанные стандартные ошибки оценок оказываются заниженными, а соответствующие t-статистики – завышенными. Следовательно, наблюдаемую гетероскедастичность нужно попытаться устранить.

В рассматриваемой модели, как и в ряде других экономических задач, можно предположить, что увеличение средних значений отклонений связано с общим увеличением масштаба моделируемой экономики, измеряемого с помощью ВНП. Поэтому можно предположить, что стандартное отклонение случайного члена пропорционально переменной GNP: $\sigma_i = \sigma \cdot GNP_i$. В этом случае деление всего уравнения на GNP позволяет получить новое уравнение, в котором случайный член будет уже гомоскедастичным. Для проверки гипотезы о гомоскедастичности при альтернативной гипотезе о гетероскедастичности данного типа ($\sigma_i = \sigma \cdot GNP_i$) используется тест Голдфелда – Квандта.

Для проведения теста Голдфелда – Квандта во временном промежутке модели выделяются начальный и конечный подпериоды, охватывающие чуть больше $1/3$ всего временного промежутка каждый (вообще говоря, наблюдения упорядочиваются не по времени, а по значениям одной из объясняющих переменных, в данном случае по значениям GNP, однако, здесь результат упорядочивания тот же). Затем для каждого подпериода оценивается регрессия рассматриваемого вида, и в качестве тестовой статистики рассчитывается отношение сумм квадратов отклонений регрессий для конечного и начального подпериодов. В нашем случае с 26 наблюдениями начальный и конечный подпериоды охватывают по 9 наблюдений, за 1965–1973 и 1982–1990 гг. Оценив для них то же уравнение (для простоты – без использования авторегрессионного преобразования), получаем следующие суммы квадратов отклонений: $RSS_2 = 1244$; $RSS_1 = 19$. Отсюда F-статистика равна:

$$F(n_1 - k - 1; n_1 - k - 1) = \frac{RSS_2}{RSS_1} = \frac{1244}{19} = 65{,}5 = \\ = F(9-3-1; 9-3-1) = F(5; 5) = 65{,}5. \quad (3.19)$$

Критическое значение для $F(5; 5)$ при 1% значимости равно 10,97, и поскольку расчетное значение намного его превосходит, гипотеза о гомоскедастичности отвергается в пользу альтернативной гипотезы о пропорциональности стандартных отклонений случайного члена значениям ВНП.

Теперь сделаем преобразование уравнения регрессии, разделив его на величину GNP. Оценив параметры нового уравнения, получаем:

$$\underset{(37{,}7)}{RNX/GNP = 367{,}6}/GNP - \underset{(0{,}005)}{0{,}041} - \underset{(0{,}049)}{0{,}15} \cdot \Delta GNP/GNP - \underset{(0{,}26)}{2{,}37} \cdot ER(-1)/GNP \quad \text{(с.о.)}$$

$$R^2 = 0{,}86;\ DW = 0{,}58. \quad (3.20)$$

Коэффициенты полученного уравнения в целом близки к предшествующим оценкам, то же касается и их стандартных ошибок. Здесь, однако, решена проблема гетероскедастичности, и остается лишь "разобраться" с автокорреляцией остатков. Применив преобразование $AR(1)$ (оценка коэффициента ρ равна здесь, как и ранее, 0,71, со стандартным отклонением 0,14), получаем уравнение:

$$\underset{(55{,}2)}{RNX/GNP = 316{,}1}/GNP - \underset{(0{,}014)}{0{,}032} - \underset{(0{,}031)}{0{,}15} \cdot \Delta GNP/GNP - \underset{(0{,}29)}{2{,}17} \cdot ER(-1)/GNP \quad \text{(с.о.)}$$

$$R^2 = 0{,}93;\ DW = 1{,}92. \quad (3.21)$$

В последнем уравнении устранены как гетероскедастичность, так и автокорреляция остатков, и хотя полученные результаты очень близки к результатам оценивания уравнения без деления его на GNP, теперь у нас есть большие основания полагаться на полученные оценки коэффициентов и их стандартные ошибки.

В заключение были выполнены расчеты с несколькими вариантами устранения автокорреляции остатков: были использованы преобразования $AR(1)$, $AR(2)$, $MA(1)$, $MA(2)$ и $ARMA(1,1)$. Преобразование $MA(1)$ дает результат, сходный с $AR(1)$, но несколько худший по качеству (с точки зрения значимости оценки коэффициента θ в соотношении $\varepsilon_i = \gamma_i + \theta \cdot \gamma_{i-1}$). Преимущество преобразования $AR(1)$ над $MA(1)$ здесь подтверждает и то, что в модели $ARMA(1,1)$ член $AR(1)$ статистически значим, а член $MA(1)$ – незначим. В то же время хорошие оценки дает преобразование $MA(2)$ (тогда как в $AR(2)$ коэффициент при авторегрессионном члене второго порядка незначим). Преобразование $MA(2)$ обеспечивает $R^2 = 0{,}95$, $DW = 1{,}95$ и дает оценки θ_1 и θ_2 в уравнении $\varepsilon_i = \gamma_i + \theta_1 \cdot \gamma_{i-1} + \theta_2 \cdot \gamma_{i-2}$, равные соответственно 0,69 и 0,77 со стандартными ошибками 0,22 и 0,23. Таким образом, для устранения автокорреляции остатков в рассматриваемой модели чистого экспорта можно использовать либо преобразование $AR(1)$, либо $MA(2)$, которые в определенных случаях близки друг к другу, поскольку преобразование $AR(1)$ эквивалентно преобразованию MA бесконечного порядка с заданной структурой коэффициентов регрессии. Коэффициенты регрессии при объясняющих переменных в модели чистого экспорта с $AR(1)$ и $MA(2)$ статистически значимо не различаются (находясь в пределах двух стандартных ошибок друг от друга).

Лекция 4

ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ В ОЦЕНИВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Как еще один важный пример практического применения модели линейной и нелинейной регрессии рассмотрим оценивание макроэкономических производственных функций (ПФ). Макроэкономическая производственная функция – это статистически значимая связь между совокупным выпуском (доходом) и объемами используемых ресурсов. Под ресурсами обычно понимается капитал K (фактически использованный объем капитала) и труд L (численность занятых или отработанное ими время). В качестве меры выпуска Y рассматривается ВНП, ВВП или национальный доход. При оценивании производственных функций считаются известными ряды переменных Y_t, K_t и L_t.

Итак, необходимо оценить зависимость $Y = F(K,L)$. Может быть также оценена зависимость между темпами прироста величин Y, K, L (они обозначаются соответственно как y, k, l) в форме $y = f(k,l)$. Это выражение называется *производственной функцией в темповой записи.*

В качестве переменных в производственной функции могут быть рассмотрены три типа величин:

- абсолютные (объемные) показатели: выпуск Y_t; капитал K_t; труд L_t;
- абсолютные приросты: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$; $\Delta K_t = K_t - K_{t-1}$; $\Delta L_t = L_t - L_{t-1}$;
- темпы прироста: $y_t = \Delta Y_t / Y_{t-1}$; $k_t = \Delta K_t / K_{t-1}$; $l_t = \Delta L_t / L_{t-1}$.

Производственная функция может также включать описание технического прогресса (ТП) как функцию времени $A(t)$. ТП влияет либо на эффективность отдельного ресурса (в этом случае выпуск растет при фиксированном физическом объеме данного фактора), либо на совокупный выпуск. В этих случаях мы имеем:

$$1)\ Y_t = F(K_t \cdot A(t), L_t);$$

$$2)\ Y_t = F(K_t, L_t \cdot A(t));$$

$$3)\ Y_t = F(K_t, L_t) \cdot A(t).$$

В случае 1 растет производительность капитала (это называется капиталосберегающим ТП, или ТП по Харроду), в случае 2 растет производительность труда (трудосберегающий ТП, или ТП по Солоу), в случае 3 растет совокупная производительность факторов TFP (нейтральный ТП, или ТП по Хиксу). Если темп нейтрального ТП γ постоянен, то $A(t) = e^{\gamma t}$.

Обычно предполагается наличие следующих свойств ПФ:

- выпуск растет при росте затрат каждого фактора: $Y'_K > 0$, $Y'_L > 0$;
- предельная производительность каждого фактора убывает: $Y''_K < 0$, $Y''_L < 0$;
- предельная производительность каждого фактора растет при росте затрат другого фактора: $Y''_{KL} > 0$, $Y''_{LK} > 0$;
- если один из факторов отсутствует, то выпуск равен нулю: $F(K, 0) = F(0, L) = 0$.

Производственная функция Кобба – Дугласа (Cobb – Douglas, или CD)

Функция $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$ (функция Кобба – Дугласа) удовлетворяет всем перечисленным условиям, если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $A > 0$. Функция Кобба – Дугласа может быть оценена с помощью линейной или нелинейной регрессии. Для ее оценки с помощью модели множественной линейной регрессии необходимо прологарифмировать ее левую и правую части:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L.$$

По рядам данных K, L, Y рассчитываются ряды их логарифмов, и для них оценивается уравнение линейной регрессии. При этом обычно предполагается, что ошибки ε_i в первоначальной формуле обладают такими свойствами, что в преобразованном виде (после логарифмирования) они обладают свойствами, необходимыми для оценивания линейной регрессионной модели. Функция CD впервые была оценена Коббом и Дугласом в 1928 г. для экономики США.

Функция Кобба – Дугласа *однородна* со степенью однородности $(\alpha + \beta)$. Это означает, что при росте затрат каждого из факторов в λ раз выпуск возрастает в $\lambda^{\alpha+\beta}$ раз.

Если $(\alpha + \beta) > 1$, то функция CD имеет возрастающую отдачу от масштаба;

если $(\alpha + \beta) < 1$, то функция CD имеет убывающую отдачу от масштаба;

если $(\alpha + \beta) = 1$, то функция CD имеет постоянную отдачу от масштаба.

Если заранее предполагается линейная однородность (постоянная отдача от масштаба), то функция Кобба – Дугласа имеет вид: $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$. Она может быть записана также следующим образом:

$$\frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln A + \alpha \ln\left(\frac{K}{L}\right). \qquad (4.1)$$

Эта функция может быть оценена как зависимость парной линейной регрессии логарифма производительности труда от логарифма капиталовооруженности.

В макроэкономическом анализе очень важны эластичности выпуска по капиталу и труду. Такая эластичность показывает процентное изменение выпуска, вызванное изменением затрат соответствующего фактора на один процент:

$$e_K = \left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right) : \left(\frac{Y}{K}\right) = \left(\frac{\partial Y}{Y}\right) : \left(\frac{\partial K}{K}\right) = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} \approx \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) : \left(\frac{\Delta K}{K}\right); \quad (4.2)$$

$$e_L = \left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right) : \left(\frac{Y}{L}\right) = \left(\frac{\partial Y}{Y}\right) : \left(\frac{\partial L}{L}\right) = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} \approx \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) : \left(\frac{\Delta L}{L}\right). \quad (4.3)$$

В общем случае эластичности e_K и e_L зависят от K и L, но для функции Кобба – Дугласа они постоянны и равны α и β соответственно.

ПФ Кобба – Дугласа *с нейтральным техническим прогрессом* (ТП по Хиксу) имеет вид: $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\gamma t}$ или, после логарифмирования, $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma t$.

Теперь покажем связь между ПФ Кобба – Дугласа в объемной и темповой записи. Предположим, что показатели K_t и L_t являются непрерывно дифференцируемыми функциями времени. В этом случае они измеряют интенсивность затрат факторов во времени. Если прологарифмировать и продифференцировать функцию $Y_t = A \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{\beta} \cdot e^{\gamma t}$, то ее полный дифференциал имеет вид:

$$d \ln Y_t = \alpha \cdot d \ln K_t + \beta \cdot d \ln L_t + \gamma \cdot dt$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \alpha \cdot \frac{dK_t}{K_t} + \beta \cdot \frac{dL_t}{L_t} + \gamma \cdot dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_t' dt}{Y_t} = \alpha \cdot \frac{K_t' dt}{K_t} + \beta \cdot \frac{L_t' dt}{L_t} + \gamma \cdot dt,$$

и после деления обеих частей на dt получаем:

$$\frac{Y_t'}{Y_t} = \alpha \cdot \frac{K_t'}{K_t} + \beta \cdot \frac{L_t'}{L_t} + \gamma. \quad (4.4)$$

Отношения $\frac{Y_t'}{Y_t}$, $\frac{K_t'}{K_t}$, $\frac{L_t'}{L_t}$ являются непрерывными темпами прироста выпуска, капитала и труда соответственно. Если заменить дифференциалы dY_t, dK_t, dL_t (главные линейные части приращений) на приращения ΔY_t, ΔK_t, ΔL_t, то мы получаем приближенную формулу взаимосвязи дискретных темпов прироста $y_t = \alpha \cdot k_t + \beta \cdot l_t + \gamma$, где y_t, k_t, l_t – дискретные темпы прироста выпуска, капитала и труда. Это – *ПФ Кобба – Дугласа в темповой записи*.

Формулы $Y_t = A \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{\beta} \cdot e^{\gamma t}$ и $y_t = \alpha \cdot k_t + \beta \cdot l_t + \gamma$ эквивалентны при непрерывном рассмотрении времени. Однако статистические данные, используемые для оценивания производственных функций, всегда дискретны. В дискретном случае формулы объемной и темповой записи функции Кобба – Дугласа не эквивалентны; фактически они описывают разные производственные функции. Даже если при оценивании используются одни и те же данные (то есть темпы прироста соответствуют объемам), результаты такого оценивания могут быть различными. Различие в оценках связано и с разным представлением случайного члена в приведенных формулах.

Параметр γ ПФ Кобба – Дугласа в темповой записи (свободный член) является темпом нейтрального технического прогресса. Он описывает часть темпа прироста выпуска, обусловленную всеми факторами помимо роста затрат капитала и труда. Если технический прогресс не включается в модель, то ПФ Кобба – Дугласа в темповой записи оценивается как уравнение линейной регрессии без свободного члена.

Использование производственных функций в макроэкономическом анализе

Производственные функции могут использоваться для анализа вклада факторов производства в общий рост выпуска. Мы продемонстрируем метод оценки такого вклада, рассматривающий как факторы роста увеличение затрат капитала K и труда L, а также рост уровня технологии A. Пусть линейно-однородная ПФ имеет вид: $Y = A \cdot F(K,L)$. Мы предполагаем постоянную отдачу от масштаба, поскольку иначе трудно разделить эффект технического прогресса и экономию от масштаба производства. При этом предположении мы фактически рассматриваем экономию от масштаба производства как одну из форм технического прогресса.

В соответствии с формулой полного дифференциала, изменение выпуска может быть приближенно записано следующим образом:

$$\Delta Y = F(K,L)\cdot\Delta A + MPK\cdot\Delta K + MPL\cdot\Delta L, \qquad (4.5)$$

где $MPK = Y'_K$, $MPL = Y'_L$ – предельные производительности капитала и труда соответственно. Разделив обе части этого уравнения на $Y = A\cdot F(K,L)$, получаем:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{MPK}{Y}\cdot\Delta K + \frac{MPL}{Y}\cdot\Delta L. \qquad (4.6)$$

Это уравнение может быть преобразовано путем умножения и деления второго слагаемого в правой части на K, а третьего – на L:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \left(K\cdot\frac{MPK}{Y}\right)\cdot\frac{\Delta K}{K} + \left(L\cdot\frac{MPL}{Y}\right)\cdot\frac{\Delta L}{L}. \qquad (4.7)$$

Выражения в скобках являются эластичностями выпуска по капиталу и труду.

Пусть w – ставка реальной заработной платы, а r – реальная стоимость аренды единицы капитала. В рыночной экономике предельная отдача каждого фактора должна равняться доходу на единицу этого фактора. Это означает, что $MPL\cdot p = w$; $MPK\cdot p = r$, где p – цена единицы выпуска. Следовательно, после умножения обеих частей этих двух равенств на L/Y и K/Y соответственно мы получаем:

$$\left(L\cdot\frac{MPL}{Y}\right)\cdot p = \frac{wL}{Y};\ \left(K\cdot\frac{MPK}{Y}\right)\cdot p = \frac{rK}{Y}$$

$$\text{или } e_L\cdot p = \frac{wL}{Y};\ e_K\cdot p = \frac{rK}{Y}.$$

Здесь выражения в правой части wL/Y и rK/Y являются долями труда и капитала в совокупном доходе.

Для линейно-однородных функций верна теорема Эйлера, утверждающая, что: $MPK\cdot K + MPL\cdot L = Y$. Следовательно, деля обе части на Y, получаем: $e_K + e_L = 1$. Сумма долей факторов в доходе также равна единице, то есть $\frac{wL}{Y} + \frac{rK}{Y} = 1$. Следовательно, $p = 1$, и *доли факторов в доходе равны эластичностям выпуска по факторам.*

Обозначив долю капитала в доходе как θ и долю труда в доходе как $(1-\theta)$, получаем:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \theta \cdot \frac{\Delta K}{K} + (1-\theta) \cdot \frac{\Delta L}{L}. \qquad (4.8)$$

В левой части уравнения (4.8) стоит темп прироста выпуска, слагаемые правой части показывают соответственно вклад технического прогресса и прироста капитала и труда в этот темп. Вклады приращений труда и капитала равняются произведениям темпов их прироста и их долей в совокупном доходе. Слагаемое $(\Delta A/A)$ является темпом технического прогресса, или темпом прироста совокупной производительности факторов.

Выбор конкретной формулы производственной функции позволяет оценить значения параметров θ и $\gamma = (\Delta A/A)$. В линейно-однородной ПФ Кобба – Дугласа параметры α и $(1-\alpha)$ являются эластичностями выпуска по капиталу и труду. Следовательно, если для рыночной экономики оценена статистически значимая ПФ Кобба – Дугласа, то можно считать, что $\theta = \alpha$, то есть использовать α и $(1-\alpha)$ как оценки долей капитала и труда в совокупном доходе. Наоборот, если известны доли θ и $(1-\theta)$, то они могут быть использованы как приближенные значения параметров α и $(1-\alpha)$ в функции Кобба – Дугласа. Если значения α и $(1-\alpha)$ известны, то с помощью модели линейной регрессии можно оценить единственный остающийся неизвестным параметр – темп технического прогресса γ.

Функция Кобба – Дугласа может быть оценена и для централизованно планируемой экономики, однако, в этом случае эластичности α и $(1-\alpha)$ могут отклоняться от долей капитала и труда в доходе. Такое отклонение указывает на неэффективность распределения ресурсов и необходимость их перераспределения.

Первая оценка производственной функции CD, сделанная Коббом и Дугласом для американской промышленности за 1899–1922 гг., дала для функции вида $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$ результат: $a = 0{,}25$ (стандартная ошибка 0,05), $b = 0{,}73$ (стандартная ошибка 0,12), где a – оценка α, b – оценка β. Если условие $\alpha + \beta = 1$ включено заранее, то оценка a равна 0,24. Средняя доля капитала в совокупном доходе за 1909–1918 гг. оценена как 0,26. Это соответствие результатов друг другу подтверждает теорию предельной производительности и применимость в данном случае ПФ Кобба – Дугласа.

Доли капитала и труда в доходе весьма стабильны для экономики США; в 1990 г. они оказались примерно на том же уровне: доля капитала составила около 26,5% от внутреннего дохода [8]. В менее развитых странах доля капитала обычно выше: например, для стран Латинской Америки ее оценки составляют 0,40–0,55. Использование ПФ Кобба – Дугласа является одним из возможных способов оценки и анализа этих долей. Оценки параметров функции Кобба – Дугласа не очень стабильны; для некоторых периодов и по некоторым данным значимых оценок не получается вообще. Иногда оцененные эластичности выпуска отклоняются от долей капитала и труда в доходе по причине неполного соответствия реального взаимодействия капитала и труда предпосылкам ПФ Кобба – Дугласа.

Вклад факторов в прирост выпуска: пример оценки и анализа

Мы оценили параметры ПФ Кобба – Дугласа для экономики бывшего СССР за 1928–1987 гг., использовав сделанные на Западе оценки ВНП СССР и затрат факторов (в соответствии с [9]):

$$Y = 0{,}82 \cdot K^{0{,}40} \cdot L^{0{,}60} \cdot e^{0{,}011t}; \tag{4.9}$$

$$R^2 = 0{,}993;\ DW = 1{,}35.$$

Все t-статистики оценок параметров превышают здесь 2, лишь t-статистика коэффициента γ равна 1,6. Для устранения автокорреляции остатков в данном случае использовано авторегрессионное преобразование $AR(1)$. Сделанные оценки означают, что эластичность выпуска по капиталу здесь равна 0,4, эластичность выпуска по труду равна 0,6, а темп нейтрального технического прогресса составил 1,1%.

За рассматриваемый период средний темп прироста ВНП в бывшем СССР (по тем же данным) составил 4,46%; темп прироста капитала равнялся 6,82%, темп прироста труда был равен 1,86%. В соответствии с этим, вклад прироста капитала в темпы прироста выпуска равнялся $0{,}4 \cdot 6{,}82 = 2{,}73(\%)$; вклад прироста затрат труда составлял $0{,}6 \cdot 1{,}86 = 1{,}12(\%)$, и вклад технического прогресса был равен $\gamma = 1{,}1(\%)$. В соответствии с этими цифрами, темп прироста ВНП должен был составлять $y = 2{,}73 + 1{,}12 + 1{,}1 = 4{,}95(\%)$, что превышает на 0,49 процентных пункта действительный среднегодовой темп прироста ВНП. Это расхождение обусловлено тем, что использованная формула разделения вклада факторов является приблизительной и сравнительно низкой статистической значимостью оценки темпа технического прогресса.

Такая ошибка появляется, в частности, если действительная зависимость выпуска от затрат труда и капитала отличается от функции ПФ Кобба – Дугласа. Некоторые расчеты показывают, что в реальности взаимозаменяемость факторов в экономике бывшего СССР была намного ниже, чем предполагает функция Кобба – Дугласа, и это существенно ограничивало экономический рост.

Производственная функция в темповой записи может быть непосредственно использована для анализа вклада факторов в темпы прироста выпуска. Предположим, что оценена следующая формула функции Кобба – Дугласа в темповой записи:

$$y_t = 0{,}35 \cdot k_t + 0{,}65 \cdot l_t + 1{,}5.$$

Пусть среднегодовой темп прироста затрат труда равнялся 1%, среднегодовой темп прироста капитала составлял 6%, а средний темп прироста выпуска был равен 4,25%. Вклад экстенсивных факторов – роста затрат капитала и труда – составил в этом случае $0{,}35 \cdot 6 = 2{,}1(\%)$ и $0{,}65 \cdot 1 = 0{,}65(\%)$ соответственно. Вклад интенсивных факторов (технического прогресса) составил 1,5 процентных пункта, или $(1{,}5/4{,}25) \cdot 100\% \approx 35{,}3\%$ общего темпа прироста выпуска.

Если в конкурентной экономике доли труда и капитала в доходе $(1-\theta)$ и θ остаются стабильными, а ежегодные темпы прироста выпуска и затрат факторов y_t, k_t, l_t известны, то погодовой темп технического прогресса γ_t можно рассчитать по формуле: $\gamma_t = y_t - \theta \cdot k_t - (1-\theta) \cdot l_t$. Эта величина называется "остатком Солоу". Например, оценки остатка Солоу для США, при $\theta = 0{,}3$, в 1989–1997 гг. составляют (данные взяты на страничке Н.Г.Мэнкью в Internet, по адресу: http:/www.worthpublishers.com/mankiw):

Год	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Остаток Солоу,%	1,2	−0,3	−0,7	1,9	0,8	1,2	0,4	1,6	1,4

Обобщение ПФ Кобба – Дугласа. Производственная функция CES

Как мы отмечали, ПФ Кобба – Дугласа в некоторых случаях не соответствует реальным макроэкономическим данным, и необходима производственная функция более общего типа. Наиболее известным ее обобщением является функция с постоянной эластичностью замещения (constant elasticity of substitution, или CES). Эластичность замещения σ является мерой кривизны линий уровня (изоквант) производственной функции (точнее, такой мерой является $\frac{1}{\sigma}$). Эластичность замещения труда капиталом $\sigma_{LK} = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(Y_L'/Y_K')}$ показывает процентное изменение капиталовооруженности труда $\left(\frac{K}{L}\right)$, вызванное изменением на один процент предельной нормы замены труда капиталом $\left(MRS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Y_L'}{Y_K'}\right)$. Если построить график некоторой изокванты (линии фиксированного уровня выпуска) производственной функции на плоскости KL (рис. 4.1) и пометить ее цифрой 1, то предельная норма замены в точке A равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона данной изокванты.

При движении из точки A к точке B угол наклона меняется, меняется также и капиталовооруженность труда $\left(\frac{K}{L}\right)$. Эта величина постоянна на любой прямой линии, пересекающей точку начала координат (например на линии 2 или 3). Величина $\frac{1}{\sigma}$ показывает относительное изменение тангенса угла наклона изокванты при единичном относительном изменении капиталовооруженности. Очевидно, что изменение наклона изокванты, вызванное движением от точки A к точке B (от линии 2 к линии 3), тем больше, чем больше кривизна изокванты.

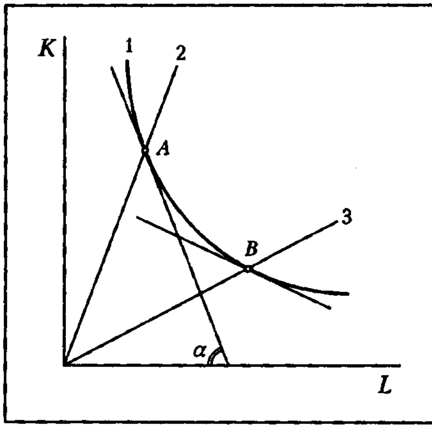


Рис. 4.1

Функция CES: графическая иллюстрация эластичности замещения факторов

Линейная производственная функция $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot L$ имеет нулевую кривизну и бесконечную эластичность замещения. Эластичность замещения в функции Кобба – Дугласа равна единице. У производственной функции Леонтьева нулевая эластичность замещения – факторы производства в ней должны быть использованы в фиксированной пропорции и не могут замещать друг друга. Степень взаимозаменяемости факторов в экономике может быть различной; следовательно, разной может быть и эластичность замещения (а не только равной нулю, единице или бесконечности). Это является причиной рассмотрения производственной функции с постоянной, но произвольной величиной эластичности замещения σ. Такая функция (функция CES) выражается формулой:

$$Y = A \cdot (u \cdot K^{-\rho} + (1-u) \cdot L^{-\rho})^{-n/\rho}. \qquad (4.10)$$

Здесь $\rho \geq -1$; $n > 0$ – степень однородности; $A > 0$; $0 < u < 1$. Для этой функции эластичность замещения σ равна $\dfrac{1}{1+\rho}$. Если $\rho = -1$, то мы имеем функцию с линейными изоквантами (в частности, линейную функцию); если $\rho \to 0$, то предел функции CES есть ПФ Кобба – Дугласа с $\sigma = 1$; если $\rho \to \infty$, то мы имеем функцию Леонтьева. Степень однородности n считается обычно равной 1. Множитель $e^{\gamma t}$, характеризующий технический прогресс, может быть добавлен к функции CES так же, как и к функции Кобба – Дугласа или к любой другой ПФ.

Функция CES нелинейна, и ее нельзя свести к линейной столь же просто, как функцию Кобба – Дугласа. Обычно ее оценивают с помощью модели нелинейной регрессии. Линейно-однородную функцию CES удобнее всего оценить после логарифмирования обеих ее частей и некоторых простых преобразований:

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln A - \left(\frac{n}{\rho}\right) \cdot \ln\left[u \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho} + (1-u)\right] + \gamma \cdot t. \qquad (4.11)$$

В качестве примера оценки ПФ CES приведем некоторые ее оценки для экономики бывшего СССР. Такие оценки делались для разных периодов диапазона 1950–1987 гг. М.Вейтцманом, Н.Баркаловым, А.Гранбергом, У.Истерли и С.Фишером и др. Например, А.Гранберг приводит следующую оценку для 1960–1985 гг.:

$$Y = 0{,}966 \cdot (0{,}4074 \cdot K^{-3{,}03} + 0{,}5926 \cdot L^{-3{,}03})^{-1/3{,}03} \cdot e^{0{,}0252t}; \qquad (4.12)$$

$$R^2 = 0{,}9982;\ DW = 1{,}76$$

(функция CES с постоянной отдачей от масштаба и с техническим прогрессом).

С точки зрения полученных значений коэффициента детерминации R^2 и статистики DW, данная зависимость статистически значима. Эластичность замещения $\sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$ равняется здесь 0,25. Оценки эластичности замещения, полученные другими исследователями, также меньше единицы: 0,4 (М.Вейтцман), 0,37–0,43 для различных периодов (Н.Баркалов), 0,37–0,40 для различных рядов данных (У.Истерли и С.Фишер). В целом можно сказать, что эластичность замещения для экономики бывшего СССР составляла примерно 0,4. Это говорит о низкой взаимозаменяемости труда и капитала. Эта взаимозаменяемость была намного ниже, чем в ПФ Кобба – Дугласа, где σ заранее предполагается равной единице. Итак, ошибочность первоначальной гипотезы относительно степени взаимозаменяемости факторов может служить причиной статистической незначимости оценок ПФ Кобба – Дугласа.

Что касается экономики бывшего СССР, то У. Истерли и С. Фишер [10] считают, что низкая заменяемость капитала трудом была одной из главных причин ее стагнации. При низкой эластичности замещения избыточное накопление капитала не обеспечивает ожидаемого роста выпуска. Труд с устойчиво низкой производительностью стал лимитирующим фактором роста экономики.

Общая идея оценивания нелинейной регрессии

Для непосредственного оценивания формулы нелинейной регрессии может быть использован нелинейный метод наименьших квадратов (NLS). Идея метода наименьших квадратов основана на минимизации суммы квадратов отклонений эмпирических (наблюдаемых) значений зависимой переменной от ее теоретических (рассчитанных по уравнению регрессии) значений. Итак, нам нужно оценить параметры $\{\alpha_j\}$ в функции $f(\alpha,x)$, минимизирующие сумму квадратов отклонений $e_i = y_i - f(a,x_i)$. Для этой цели нужно решить задачу минимизации функции

$$F = \sum_i (y_i - f(a,x_i))^2 \to \min \qquad (4.13)$$

(где a – вектор оценок параметров). Для решения этой задачи есть два возможных пути. Первый из них – это прямая итеративная минимизация функции F. Методы такой минимизации позволяют найти направление скорейшего убывания функции F, двигаться в этом направлении до точки минимума, а затем найти новое направление скорейшего убывания. Основным недостатком здесь является локальность найденного экстремума, не всегда совпадающего с искомым глобальным экстремумом.

Другой путь состоит в решении системы нелинейных уравнений, получаемых из необходимых условий экстремума функции F. Эти условия заключаются в равенстве нулю частных производных функции F по a_j, то есть $F'_{aj} = 0$, $j = 1,\dots,m$. Мы получаем систему уравнений:

$$-2\sum_i (y_i - f(a, x_i)) \cdot f'_{aj}(a, x_i) = 0, \qquad (4.14)$$

$$j = 1,\dots,m,$$

которая нелинейна, поскольку функция f нелинейна относительно величин a_j. Эта система может быть решена различными методами. Например, при использовании итеративных методов последовательно рассчитываются векторы параметров, все меньше нарушающие выполнение уравнений системы. Но, вообще говоря, решение такой системы не является более простой процедурой, чем прямая оптимизация по методу скорейшего спуска.

Отметим, что многократное увеличение мощности компьютеров в последние годы сняло многие проблемы оценивания нелинейных зависимостей, остро стоявшие ранее и требовавшие от разработчиков алгоритмов разнообразных ухищрений.

При оценивании нелинейных уравнений проблема правильного выбора формулы зависимости еще более серьезна, чем в линейном случае. Это связано с тем, что значительно более широким становится само поле выбора. Иногда одна и та же функция может быть оценена с помощью нелинейной регрессии и с помощью ее преобразования в линейную с последующей оценкой параметров линейной регрессии. Результаты могут несколько различаться, даже при использовании одних и тех же исходных данных. Это вызвано разницей в спецификации ошибок.

Например, если ПФ Кобба – Дугласа оценена как линейная: $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \varepsilon_t$, то она эквивалентна формуле $Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta \cdot e^\varepsilon$. Последняя формула отличается описанием случайного члена от формулы $Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta + \varepsilon_t$, которая используется при оценивании нелинейной регрессии с помощью МНК. Случайный член ε_t может обладать необходимыми свойствами в одном из этих двух случаев и не обладать – в другом. Это означает, что один способ оценивания может принести хороший статистический результат, а другой – нет. Следовательно, лучше оценить обе эти формулы, и если по ним получены близкие статистически значимые результаты, то это подтверждает соответствие оцененной формулы реальной взаимосвязи переменных.

Лекция 5

ЛАГИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ: МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В экономике часто встречаются ситуации, когда эффект от принимаемых решений или результат предпринятых действий проявляется не сразу, а с некоторой задержкой во времени (лагом). Например, увеличение денежной массы в обращении в течение нескольких месяцев ускоряет инфляцию, стимулируя рост производства в начальный момент. Инвестиции не сразу ведут к росту производственного потенциала, в первый момент материализуясь лишь в приросте объемов незавершенного строительства. Увеличение дохода потребителя постепенно меняет уровень и структуру его потребления. Подобные примеры легко найти в любой области экономического анализа, что говорит о необходимости изучения не только структурных, но и временных связей между экономическими переменными. Часто воздействие одной экономической переменной на другую распределено во времени; в таких случаях говорят о распределенном лаге.

Переменная X формально считается опережающей по отношению к переменной Y, а переменная Y – запаздывающей по отношению к переменной X, если в следующем уравнении регрессии

$$Y_t = a_0 + a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + \ldots + a_nY_{t-n} + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + \ldots + b_nX_{t-n} + e_t \quad (5.1)$$

совокупность коэффициентов $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ статистически значима при некотором n, или, иначе говоря, если гипотеза об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ может быть отвергнута при некотором данном уровне значимости.

Лаговые модели имеют два важных частных случая: модели с лаговыми независимыми (объясняющими) переменными

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t \tag{5.2}$$

и авторегрессионные модели с лаговыми зависимыми переменными

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \ldots + \gamma_n Y_{t-n} + \varepsilon_t . \tag{5.3}$$

Здесь мы будем рассматривать модели первого типа (описываемые соотношением (5.2)), а также их приложения в анализе инвестиционных процессов.

Распределенные лаги в инвестиционных процессах

Одним из наиболее важных и известных примеров моделирования распределенных лагов являются модели инвестиционных процессов. Инвестиции с определенной задержкой во времени переходят в приращения основного капитала (в отечественной статистике обычно используются категории "капитальные вложения" и "ввод основных фондов"), причем эта задержка неодинакова для разных элементов инвестиций. Поэтому модель распределенного лага является адекватным инструментом для описания связи между инвестициями I_t и приращениями основного капитала ΔK_t.

Мы будем использовать термин "приращения основного капитала", пренебрегая выбытием капитала, которое для изучения инвестиционных лагов несущественно. Далее будет рассмотрен ряд моделей распределенного лага в инвестиционных процессах. Для оценивания параметров этих моделей была подготовлена база данных по России и другим республикам бывшего СССР, включающая показатели инвестиций I_t и ввода основных производственных фондов ΔK_t за 1965–1991 гг. в сметных ценах 1984 г. Для подготовки базы данных были использованы справочники "Народное хозяйство СССР", "Народное хозяйство РСФСР", "Капитальное строительство в СССР", статистические сборники по отдельным республикам. Здесь для иллюстрации будут использованы расчеты лагов по России за 1966–1991 гг. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Инвестиции *I* и приращения основного капитала (ввод основных производственных фондов ΔK) в России в 1965–1991 гг., млрд. руб. (в сметных ценах 1984 г.)

	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
I	37,759	40,131	43,412	47,094	48,579	54,564	58,884
ΔK	35,474	37,096	40,319	41,816	45,239	51,176	54,609
	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
I	63,251	66,325	71,378	78,824	82,968	85,849	91,336
ΔK	56,980	62,604	66,280	72,866	74,958	76,798	83,654
	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
I	92,301	94,299	99,074	102,840	107,293	107,297	110,957
ΔK	83,814	92,488	94,493	100,106	105,455	104,244	106,429
	1986	1987	1988	1989	1990	1991	
I	121,181	128,362	138,250	143,895	143,971	121,676	
ΔK	113,260	122,398	121,601	124,794	121,350	91,500	

При построении модели распределенного лага в инвестиционных процессах используем следующие предпосылки:

- все элементы инвестиций переходят в приросты основного капитала, то есть эти показатели в целом (с учетом сдвига во времени) совпадают;

- временная структура инвестиционных процессов постоянна, то есть распределение во времени инвестиций и приростов основного капитала для каждой группы объектов, строительство которых начинается в очередной момент времени, одинаково.

Последняя предпосылка означает, в частности, что максимальные сроки строительства одинаковы для каждой рассматриваемой группы объектов; пусть они составляют T лет. Предположим, что заданы коэффициенты распределения во времени инвестиций $\{\alpha_\tau\}$ и приростов основного капитала $\{\beta_\tau\}$; $\tau = 1;\ldots;T$. Коэффициент α_τ показывает долю общего объема инвестиций во все объекты, начинаемые в каждый очередной момент времени, приходящуюся на τ-й год строительства. Соответственно, коэффициент β_τ – это доля общего прироста капитала по той же группе объектов (равного общему объему инвестиций), приходящаяся на τ-й год строительства. Очевидно, $\sum_{\tau=1}^{T}\alpha_\tau = \sum_{\tau=1}^{T}\beta_\tau = 1$.
Процесс инвестирования и ввода основного капитала, соответствующий сделанным предпосылкам, можно описать следующим графиком (рис. 5.1).

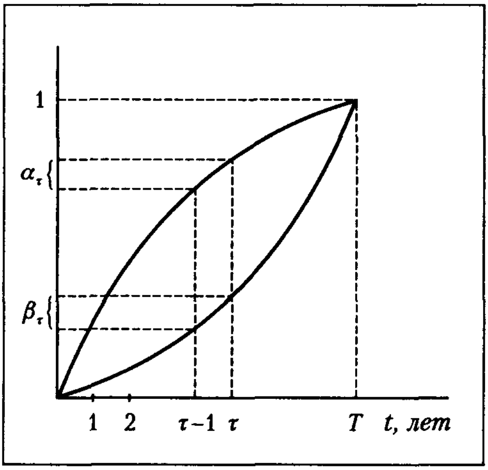


Рис. 5.1

Структура инвестиций и приростов капитала в общей модели распределенного лага

На рис. 5.1 по вертикали показаны накопленные доли инвестиций и приростов капитала по годам для группы всех инвестиционных объектов, начинаемых в момент времени 0. Приращения этих накопленных долей в году τ равны соответственно α_τ и β_τ; в момент T накопленные доли становятся равными единице. График построен для непрерывного распределения во времени моментов инвестирования и приростов основного капитала. При этом считается, что строительство очередных групп объектов начинается в моменты $0; 1; \ldots; \tau; \ldots; T$.

Введем еще ряд обозначений. Пусть I_t – общий объем инвестиций года t, а ΔK_t – приращение капитала в году t. Очевидно, эти показатели частично относятся к объектам, начатым в моменты времени $(t-1)$, $(t-2), \ldots,$ $(t-T)$. Пусть i_t – общая сумма инвестиций по объектам, начинаемым в момент t (то есть в конце года t); такой же будет и сумма приростов капитала по этим объектам. В этом случае

$$I_t = \sum_{\tau=1}^{T} \alpha_\tau i_{t-\tau}, \qquad (5.4)$$

$$\Delta K_t = \sum_{\tau=1}^{T} \beta_\tau i_{t-\tau}. \qquad (5.5)$$

Для года $(t-j)$ из (5.4) получаем

$$I_{t-j} = \sum_{\tau=1}^{T} \alpha_\tau i_{t-j-\tau}, \qquad (5.4a)$$

из (5.5)

$$\Delta K_{t-j} = \sum_{\tau=1}^{T} \beta_\tau i_{t-j-\tau}. \qquad (5.5a)$$

Умножим (5.4a) на β_j, а (5.5a) – на α_j:

$$\beta_j I_{t-j} = \beta_j \sum_{\tau=1}^{T} \alpha_\tau i_{t-j-\tau}, \qquad (5.4b)$$

$$\alpha_j \Delta K_{t-j} = \alpha_j \sum_{\tau=1}^{T} \beta_\tau i_{t-j-\tau}. \qquad (5.5b)$$

Просуммируем (5.4b) и (5.5b) по $j = 1, \ldots, T$:

$$\sum_{j=1}^{T} \beta_j I_{t-j} = \sum_{j=1}^{T} \beta_j \sum_{\tau=1}^{T} \alpha_\tau i_{t-j-\tau} = \sum_{j=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{T} \beta_j \alpha_\tau i_{t-j-\tau}, \qquad (5.4c)$$

$$\sum_{j=1}^{T}\alpha_j \Delta K_{t-j} = \sum_{j=1}^{T}\alpha_j \sum_{\tau=1}^{T}\beta_\tau i_{t-j-\tau} = \sum_{j=1}^{T}\sum_{\tau=1}^{T}\alpha_j \beta_\tau i_{t-j-\tau}. \tag{5.5c}$$

Поскольку правые части (5.4c) и (5.5c) равны, равны и их левые части, то есть:

$$\sum_{j=1}^{T}\beta_j I_{t-j} = \sum_{j=1}^{T}\alpha_j \Delta K_{t-j}, \quad \forall t. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) связывает между собой переменные I_{t-j} и ΔK_{t-j} с различными значениями лага j, поэтому оно называется уравнением общего (или смешанного) распределенного лага. В соответствии с этой моделью, прирост капитала в году t связан с приростами капитала и инвестициями предыдущих $(T-1)$ лет, а также с инвестициями текущего года:

$$\Delta K_t = \frac{1}{\alpha_1}\left\{\sum_{j=1}^{T}\beta_j I_{t-j+1} - \sum_{j=1}^{T}\alpha_j \Delta K_{t-j+1}\right\}. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) можно рассматривать как уравнение множественной линейной регрессии, однако, его оценивание встречается с рядом трудностей. Во-первых, число оцениваемых параметров, равное здесь $2T$, может оказаться довольно большим. Во-вторых, должны выполняться условия $0 \le \alpha_j \le 1$; $0 \le \beta_j \le 1$; $\sum_{j=1}^{T}\alpha_j = 1$; $\sum_{j=1}^{T}\beta_j = 1$, но их автоматическое выполнение отнюдь не гарантировано. В-третьих, уравнение (5.7) не включает свободного члена, что может ухудшить качество оценки. В-четвертых, здесь велика опасность мультиколлинеарности. Поэтому уравнение (5.7) обычно не оценивается непосредственно, а подвергается преобразованиям и упрощениям. Рассмотрим наиболее важные частные случаи модели (5.6–5.7).

Два частных случая общей модели распределенного лага связаны с определенными предпосылками о структуре коэффициентов $\{\alpha_\tau\}$ и $\{\beta_\tau\}$.

Модель L

Все инвестиции по очередной группе объектов делаются на начальном этапе рассматриваемого периода; приросты капитала по-прежнему распределены по T этапам (годам): $\alpha_1 = 1$; $\alpha_j = 0$ при $j = 2,\ldots,T$. Модель (5.6) приобретает вид:

$$\Delta K_t = \sum_{j=1}^{T} \beta_j I_{t-j+1} . \qquad (5.8)$$

Эту модель часто называют моделью "левого" распределенного лага (L), поскольку в причинно-следственном соотношении $(I \to \Delta K)$ распределена во времени его левая часть. В соответствии с этой моделью фиксированные доли $\{\beta_j\}$ инвестиций данного года t переходят в приросты капитала в данном и в каждом из последующих лет.

Модель R

Весь прирост капитала по очередной группе объектов происходит на заключительном этапе рассматриваемого периода; инвестиции распределены по T этапам (годам): $\beta_T = 1$; $\beta_j = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, T-1$. Модель (5.6) приобретает вид:

$$I_t = \sum_{j=1}^{T} \alpha_j \Delta K_{t+T-j} . \qquad (5.9)$$

Эту модель называют моделью "правого" распределенного лага (R), поскольку в причинно-следственном соотношении $(I \to \Delta K)$ распределена во времени его правая часть. В соответствии с этой моделью, фиксированные доли $\{\alpha_j\}$ приростов капитала данного и последующих лет осуществляются за счет инвестиций данного года t. Использование соотношения (5.9) в экономических моделях затрудняется тем, что для расчета инвестиций текущего года требуется знать необходимые приросты капитала последующих T лет. В то же время исходная предпосылка модели (5.9) о распределении во времени инвестиций и приростов капитала по очередной группе объектов более реалистична, чем в модели (5.8).

Модели (5.8) и (5.9) включают вдвое меньше оцениваемых параметров, чем модель (5.7). Однако это число может тоже оказаться слишком большим; сохраняются для них и другие сложности, возникающие при оценивании параметров модели (5.7). Поэтому следующим шагом упрощения общей модели распределенного лага является переход к малопараметрическим распределениям.

Малопараметрические модели распределенного лага

Модели (5.7), (5.8) или (5.9) становятся малопараметрическими, если в них добавляется предпосылка о конкретном виде распределения коэффициентов $\{\alpha_j\}$ и/или $\{\beta_j\}$. Коэффициенты $\{\alpha_j\}$ и/или $\{\beta_j\}$ могут возрастать или убывать по линейной экспоненциальной, полиномиальной или какой-либо другой функции. Различными авторами (Л.Койк, И.Фишер, Д.Лью и др.) предлагались различные типы распределения коэффициентов $\{\alpha_j\}$ и/или $\{\beta_j\}$. Опишем некоторые из них графически, предоставив читателю самому вывести формулы для соответствующих коэффициентов в случае смешанного, "левого" или "правого" распределенного лага, учитывая требования $\sum_{j=1}^{T}\alpha_j = 1$; $\sum_{j=1}^{T}\beta_j = 1$.

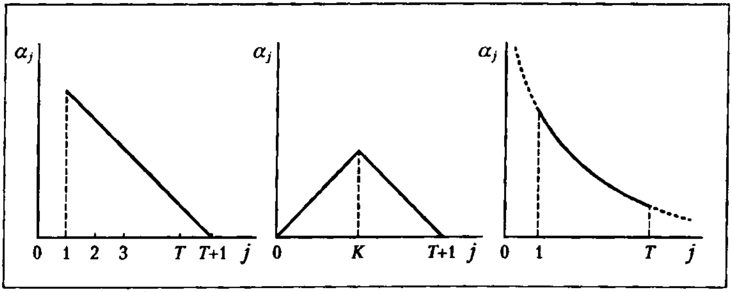


Рис. 5.2

Типы малопараметрических распределенных лагов

Рассмотрим подробно одну из малопараметрических моделей распределенного лага – модель геометрического лага [11].

Геометрически распределенный "левый" лаг предполагает, что в соотношении (5.8) коэффициенты β_j являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\beta_j = \beta_1 \rho^{j-1}$, где $0 < \rho < 1$ – знаменатель прогрессии. При этом период T считается бесконечным. Учитывая, что $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$ или $\beta_1 \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} = 1$, получаем $\beta_1 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1}}$. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} = \dfrac{1}{1-\rho}$, откуда $\beta_1 = (1-\rho)$. Таким образом, из (5.8) получаем:

$$
\begin{aligned}
\Delta K_t &= (1-\rho) \cdot I_t + (1-\rho)\, \rho\, I_{t-1} + \\
&+ (1-\rho)\, \rho^2\, I_{t-2} + \ldots + (1-\rho)\, \rho^k\, I_{t-k} + \ldots = \\
&= (1-\rho) \cdot I_t + \rho\, [(1-\rho)\, I_{t-1} + \\
&+ (1-\rho)\, \rho\, I_{t-2} + \ldots + (1-\rho)\, \rho^{k-1}\, I_{t-k} + \ldots] = \\
&= (1-\rho) \cdot I_t + \rho \cdot \Delta K_{t-1}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Таким образом, распределение является однопараметрическим (поскольку ρ – единственный его параметр), и его формула сводится к зависимости прироста капитала ΔK_t от своего предыдущего значения и текущего объема инвестиций. Для удобства оценивания параметра ρ перепишем (5.10) в следующей форме:

$$
I_t - \Delta K_t = \rho\, (I_t - \Delta K_{t-1})\,. \tag{5.11}
$$

Данное преобразование называется преобразованием Койка.

Уравнение (5.11) может быть оценено как уравнение парной линейной регрессии без свободного члена. Для этого вначале по рядам исходных данных I и ΔK_t рассчитываем ряды

$Y_t = I_t - \Delta K_t$; $X_t = I_t - \Delta K_{t-1}$. При оценивании уравнения (5.11) возникают проблемы спецификации ошибок. Можно предположить, что случайный член u_i в уравнении

$$\Delta K_t = (1-\rho) \cdot I_t + (1-\rho)\rho I_{t-1} + \\ + (1-\rho)\rho^2 I_{t-2} + \ldots + (1-\rho)\rho^k I_{t-k} + \ldots + u_t \qquad (5.10a)$$

удовлетворяет условиям Гаусса – Маркова. После преобразования Койка получаем:

$$\Delta K_t = (1-\rho) \cdot I_k + \rho \cdot (\Delta K_{t-1} - u_{t-1}) + u_t . \qquad (5.10b)$$

Таким образом, в (5.11) мы имеем совокупный случайный член $u'_t = -u_t + \rho \cdot u_{t-1}$, который, очевидно, связан с объясняющей переменной $(I_t - \Delta K_{t-1})$, поскольку ΔK_{t-1} включает u_{t-1}. Это ведет к нарушению четвертого условия Гаусса – Маркова (о статистической независимости объясняющей переменной и случайного члена), что выражается в смещенности и несостоятельности получаемых оценок.

Есть два пути решения указанной проблемы. Во-первых, можно оценить уравнение (5.10a) непосредственно как уравнение нелинейной регрессии (оно нелинейно по параметрам, и любой современный эконометрический пакет позволяет оценивать такие уравнения с сохранением всех связей между параметрами). Однако в данное уравнение можно включить лишь конечное число членов бесконечного ряда. Обычно рекомендуется определять число необходимых членов эмпирически, останавливаясь после того, как прекращают изменяться получаемые оценки. Тем не менее, практически эта рекомендация может быть выполнена лишь для стационарных процессов, продолжающихся бесконечно. Действительно, увеличение числа членов в правой части уравнения потребует либо привлечения дополнительных прошлых наблюдений объясняющей переменной, либо сокращения числа наблюдений зависимой переменной в модели. При работе же с реальными данными (когда процессы не вполне стационарны) это приводит к существенным изменениям значений оценок на каждом шаге, и процесс никогда не заканчивается. Таким образом, рекомендация, которая хороша с теоретической точки зрения, на практике не работает. По указанной процедуре было проведено оценивание с использованием тех же данных по России, что и для других моделей, и мы пришли к описанной ситуации: оценки коэффициентов не стабилизируются, и процесс определения продолжительности лага невозможно остановить.

Другим возможным способом избежать проблемы нарушения условий Гаусса – Маркова является введение предположения о том, что эти условия выполняются не для исходной модели геометрически распределенного лага, а для уравнения (5.11). В действительности может быть так, что они не выполняются полностью ни для той, ни для другой модели, но масштаб их нарушения не очень велик, а смещение оценок допустимо мало и не слишком различается для (5.10а) и (5.11). В дальнейшем мы будем обычно оценивать преобразованные уравнения, предполагая, что условия Гаусса – Маркова выполняются для уравнения типа (5.11).

Параметр ρ, оцененный по (5.11), должен удовлетворять условию $0 < \rho < 1$; автоматически это не гарантировано, но чаще всего выполняется. Если инвестиции превышают приращения капитала ($I_t > \Delta K_t$), то последние растут, и $\Delta K_t > \Delta K_{t-1}$; следовательно, $0 < I_t - \Delta K_t < I_t - \Delta K_{t-1}$ и $0 < \rho < 1$ в (5.11). Оценка уравнения (5.11) для России за 1966–1989 гг. дала следующий результат:

$$I_t - \Delta K_t = \underset{(0,051)}{0,642} \cdot (I_t - \Delta K_{t-1}) \quad \text{(с.о.)} \qquad (5.12)$$

$$R^2 = 0,61;\ DW = 1,96.$$

В скобках приведена стандартная ошибка оценки коэффициента ρ; величина t-статистики для него равна 12,6, что свидетельствует о высокой степени надежности оценки. Значение коэффициента детерминации $R^2 = 0,61$ достаточно высоко для модели данного типа (модели без свободного члена и без явного временного тренда переменных). Нужно отметить, что при использовании коэффициента R^2 в модели без свободного члена его смысл как доли объясненной дисперсии зависимой переменной ESS/TSS здесь теряется; нельзя и выполнять на его основе, скажем, F-тест. В то же время R^2 рассчитывается здесь как $(1 - RSS/TSS)$ и, очевидно, имеет определенный смысл для характеристики общего качества регрессии. При прочих равных, т.е. при заданной размерности задачи и данных значениях зависимой переменной (и соответственно TSS) уменьшение RSS свидетельствует об улучшении качества модели. Таким образом, высокий коэффициент R^2 свидетельствует о качестве регрессионной модели без свободного члена. В случае, если в действительности зависимость должна содержать свободный член, и он исключен необоснованно, то расчетное значение $R^2 = (1 - RSS/TSS)$ может оказаться и меньшим нуля (пояснения см., например, в [12, с.27]).

Близкая здесь к двум статистика DW свидетельствует об отсутствии автокорреляции остатков первого порядка. График наблюдаемых (сплошная линия) и рассчитанных по (5.12) (пунктирная линия) значений $(I_t - \Delta K_t)$ показан в верхней части рис. 5.3; он подтверждает вполне приемлемое качество оцененного уравнения регрессии.

Возвращаясь к исходной форме бесконечного геометрически распределенного "левого" лага, получаем соотношение

$$\Delta K_t = 0{,}358 \cdot I_t + 0{,}230 \cdot I_{t-1} + 0{,}148 \cdot I_{t-2} + \ldots \qquad (5.13)$$

Согласно этому уравнению около 85% осуществляемых инвестиций переходило в приросты капитала в течение данного и двух последующих лет; остальные коэффициенты составляют лишь около 0,15 в сумме.

Отметим, что добавление к модели двух дополнительных наблюдений за 1990 и 1991 гг. резко ухудшает ее качество:

$$\begin{gathered} I_t - \Delta K_t = 0{,}710 \cdot (I_t - \Delta K_{t-1}) \\ (0{,}122) \qquad (\text{с.о.}) \\ R^2 = 0{,}04;\ DW = 0{,}70. \end{gathered} \qquad (5.14)$$

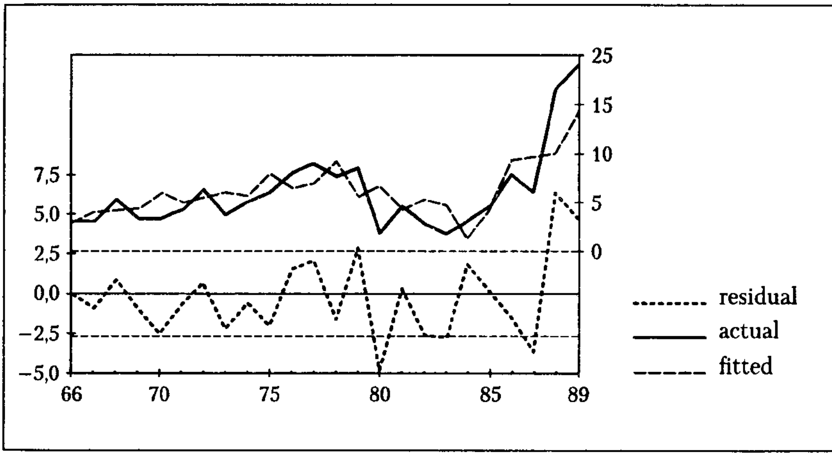


Рис. 5.3

Уравнение "левого" геометрически распределенного лага $\Delta K_t = (1-\rho)\cdot I_t + (1-\rho)\cdot\rho\cdot I_{t-1} + (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot I_{t-2} + \ldots + (1-\rho)\cdot\rho^k\cdot I_{t-k} + \ldots$, оцененное в виде $I_t - \Delta K_t = \rho\cdot(I_t - \Delta K_{t-1})$ для России, 1966–1989 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной $(I_t - \Delta K_t)$ (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

Здесь коэффициент ρ остается статистически значимым и примерно тем же по величине, что и ранее, но статистика DW и особенно R^2 резко уменьшаются. Это объясняется тем, что структура инвестиционных процессов резко изменилась в 1990–1991 гг. в связи с острым кризисом действовавшей системы управления экономикой и провалом концепции "ускорения" в бывшем СССР. Данное изменение показывает, как легко могут испортиться статистические характеристики уравнения регрессии без свободного члена. Тем самым, с другой стороны, нагляднее становится значимость полученных ранее хороших оценок такого уравнения. На рис. 5.4 расхождение модели с действительностью в 1990–1991 гг. показано достаточно наглядно. Величины приращений капитала ΔK_t в эти два года были значительно ниже (и, следовательно, зависимая переменная $(I_t - \Delta K_t)$ была значительно выше), чем можно было ожидать на основании рассматриваемой модели.

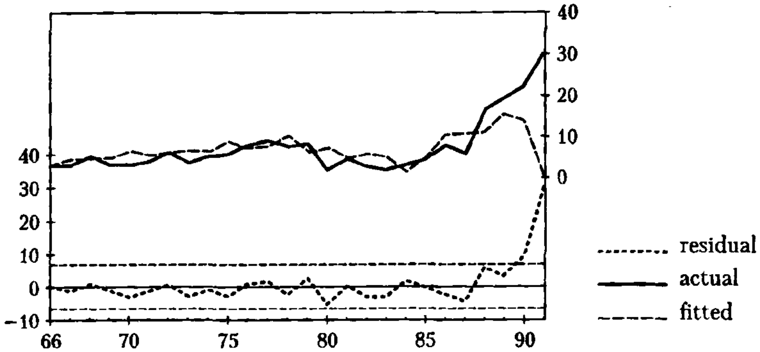


Рис. 5.4

Уравнение "левого" геометрически распределенного лага $\Delta K_t = (1-\rho)\cdot I_t + (1-\rho)\cdot\rho\cdot I_{t-1} + (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot I_{t-2} + \ldots + (1-\rho)\cdot\rho^k\cdot I_{t-k} + \ldots$, оцененное в виде $I_t - \Delta K_t = \rho\cdot(I_t - \Delta K_{t-1})$ для России, 1966–1991 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной $(I_t - \Delta K_t)$ (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

Двухпараметрическая модель

Вернемся теперь к периоду 1966–1989 гг. По графику рис. 5.3 (и, в несколько меньшей степени, рис. 5.4) можно отметить, что хотя общая тенденция изменения зависимой переменной довольно хорошо описывается моделью, колебания фактических и расчетных ее значений вокруг линии этой тенденции постоянно находятся в противофазе. Это может быть связано с тем, что однопараметрическая геометрическая структура лага слишком жестка и не вполне точно отражает соотношение вклада текущих и прошлых инвестиций в прирост капитала. Одним из возможных обобщений модели с целью устранения указанного недостатка является переход от однопараметрической к двухпараметрической модели "левого" геометрического лага. В этой модели коэффициент β_1 в соотношении (5.8) "отцепляется" от остальных коэффициентов β_j, которые по-прежнему образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. В результате соотношение (5.8) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Delta K_t = \beta_1 \cdot I_t + \beta_2 \cdot I_{t-1} + \beta_2 \cdot \rho \cdot I_{t-2} + \\ + \beta_2 \cdot \rho^2 \cdot I_{t-3} + \ldots + \beta_2 \cdot \rho^{k-1} \cdot I_{t-k} + \ldots \end{aligned} \quad (5.15)$$

Очевидно,

$$\Delta K_{t-1} - \beta_1 \cdot I_{t-1} = \beta_2 \cdot I_{t-2} + \beta_2 \cdot \rho \cdot I_{t-3} + \beta_2 \cdot \rho^2 \cdot I_{t-4} + \ldots$$

и поэтому

$$\Delta K_t = \beta_1 \cdot I_t + \beta_2 \cdot I_{t-1} + \rho(\Delta K_{t-1} - \beta_1 \cdot I_{t-1}). \quad (5.16)$$

При этом должно выполняться условие $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$, то есть $\beta_1 + \beta_2(1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = 1$. Вновь воспользовавшись формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем: $\beta_1 + \beta_2/(1-\rho) = 1$, откуда $\beta_2 = (1-\rho) \cdot (1-\beta_1)$. Поэтому из (5.16) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta K_t = \beta_1 \cdot I_t + (1-\rho) \cdot (1-\beta_1) \cdot I_{t-1} + \rho(\Delta K_{t-1} - \beta_1 \cdot I_{t-1}) = \\ = \beta_1 \cdot I_t + (1-\rho-\beta_1) \cdot I_{t-1} + \rho \cdot \Delta K_{t-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Преобразовав (5.17) к удобному для оценивания уравнения линейной регрессии виду, имеем:

$$\Delta K_t - I_{t-1} = \beta_1 \cdot (I_t - I_{t-1}) + \rho \cdot (\Delta K_{t-1} - I_{t-1}). \quad (5.18)$$

Модель (5.18) двухпараметрическая, она включает параметры $0 < \beta_1 < 1$ и $0 < \rho < 1$.

Рассчитав необходимые ряды показателей $(\Delta K_t - I_{t-1})$, $(I_t - I_{t-1})$ и $(\Delta K_{t-1} - I_{t-1})$ для России и оценив по ним множественную линейную регрессию без свободного члена за 1966–1989 гг., получаем:

$$\begin{aligned} &\Delta K_t - I_{t-1} = 0,480 \cdot (I_t - I_{t-1}) + 0,739 \cdot (\Delta K_{t-1} - I_{t-1}) \\ &\qquad\qquad (0,175) \qquad\qquad (0,142) \qquad \text{(с. о.)} \\ &R^2 = 0,51;\ DW = 2,15. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Отсюда получаем $\beta_2 = (1-\rho)\cdot(1-\beta_1) = 0{,}135$, и уравнение (5.15) приобретает вид:

$$\Delta K_t = 0{,}480 \cdot I_t + 0{,}135 \cdot I_{t-1} + 0{,}100 \cdot I_{t-2} + \ldots \qquad (5.20)$$

Сравнив (5.20) с (5.13), можно сделать вывод, что "высвобождение" первого, основного, коэффициента модели из жесткой структуры геометрического лага существенно изменило его значение. Поэтому переход от однопараметрической модели геометрического лага к более общей, двухпараметрической, здесь оправдан. Если бы однопараметрическая модель "работала", то и в двухпараметрическом случае мы получили бы примерно такие же значения коэффициентов, как в (5.13). Уравнение (5.19) приемлемо по всем параметрам, и рис. 5.5 показывает, что противофаза колебаний фактических и расчетных значений зависимой переменной, отмеченная для однопараметрической модели, здесь отсутствует. Мы не можем в данном случае, однако, сравнить оцененные уравнения непосредственно с помощью F-теста, поскольку они не содержат свободного члена и, кроме того, включают разные объясняющие и зависимые переменные.

Как и ранее, расширение периода оценивания двухпараметрической модели "левого" геометрического лага на 2 года (1990–1991 гг.) оказывается неудачным, поскольку в этом случае $\beta_1 = 1{,}017 > 1$, $\rho = 1{,}17 > 1$. Это означает, что здесь вообще не получается бесконечно убывающей геометрической прогрессии, что лишает модель содержательного смысла.

Теперь рассмотрим модель геометрически распределенного "правого" лага. Здесь предполагается, что в соотношении (5.9) коэффициенты α_j являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем ρ. Учитывая условие $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$, имеем

$$\begin{aligned} I_t &= (1-\rho)\cdot\Delta K_t + (1-\rho)\cdot\rho\cdot\Delta K_{t+1} + (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\Delta K_{t+2} + \ldots = \\ &= (1-\rho)\cdot\Delta K_t + \rho\cdot[(1-\rho)\cdot\Delta K_{t+1} + (1-\rho)\cdot\rho\cdot\Delta K_{t+2} + \ldots] = \qquad (5.21) \\ &= (1-\rho)\cdot\Delta K_t + \rho\cdot I_{t+1}. \end{aligned}$$

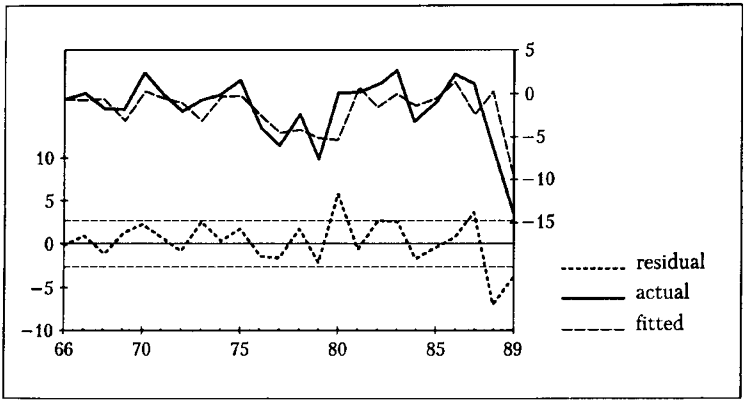


Рис. 5.5

Уравнение "левого" двухпараметрического геометрически распределенного лага $\Delta K_t = \beta_1 \cdot I_t + \beta_2 \cdot I_{t-1} + \beta_2 \cdot \rho \cdot I_{t-2} + \beta_2 \cdot \rho^2 \cdot I_{t-3} + \ldots + \beta_2 \cdot \rho^{k-1} \cdot I_{t-k} + \ldots$, оцененное в виде $\Delta K_t - I_{t-1} = \beta_1 \cdot (I_t - I_{t-1}) + \rho \cdot (\Delta K_{t-1} - I_{t-1})$ для России, 1966–1989 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной ($\Delta K_t - I_{t-1}$) (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

Преобразовав (5.21) в удобную для оценивания форму, имеем:

$$I_t - \Delta K_t = \rho \cdot (I_{t+1} - \Delta K_t). \tag{5.22}$$

Если инвестиции растут во времени и поэтому превышают приросты капитала, то коэффициент ρ удовлетворяет условию $0 < \rho < 1$. Он удовлетворяет данному условию и в том случае, если инвестиции убывают во времени и поэтому меньше приростов капитала соответствующих лет (тогда $\Delta K_t - I_t < \Delta K_t - I_{t+1}$ и $0 < \rho < 1$). Для оценки уравнения регрессии по исходным данным I_t, ΔK_t рассчитаем ряды $X_t = I_t - \Delta K_{t-1}$; $Y_t = I_{t-1} - \Delta K_{t-1}$. Как и раньше, будем предполагать, что случайный член ε_i уравнения (5.22) удовлетворяет условиям Гаусса – Маркова. Оценив уравнение (5.22) для России за 1966–1989 гг., получаем:

$$I_{t-1} - \Delta K_{t-1} = 0,670 \cdot (I_t - \Delta K_{t-1})$$
$$(0,036) \qquad (\text{с. о.}) \qquad (5.23)$$
$$R^2 = 0,67;\ DW = 1,81.$$

Уравнение (5.23), как и аналогичное уравнение "левого" геометрического лага (5.12), приемлемо по всем параметрам; его качество подтверждает рис. 5.6.

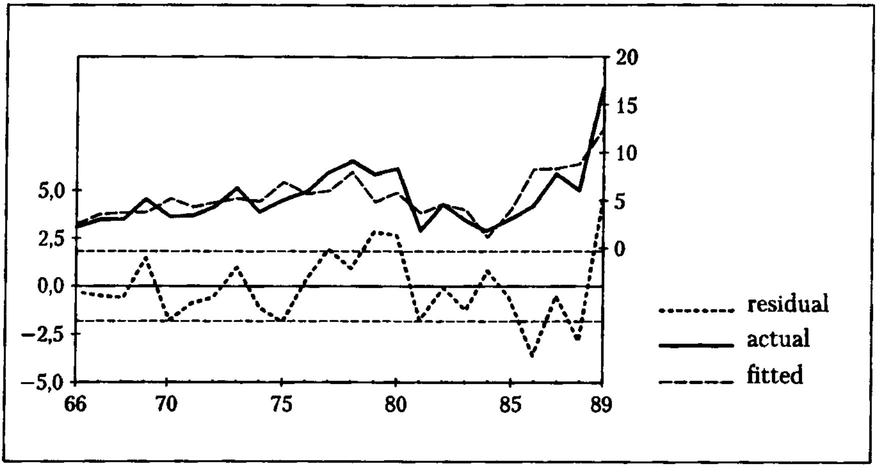


Рис. 5.6

Уравнение "правого" геометрически распределенного лага $I_t = (1-\rho)\cdot\Delta K_t + (1-\rho)\cdot\rho\cdot\Delta K_{t+1} + (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\Delta K_{t+2} + \ldots$, оцененное в виде $I_{t-1} - \Delta K_{t-1} = \rho\cdot(I_t - \Delta K_{t-1})$ для России, 1966–1989 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной $(I_{t-1} - \Delta K_{t-1})$ (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

В исходной форме "правого" геометрического лага уравнение (5.23) приобретает вид:

$$I_t = 0,443 \cdot \Delta K_t + 0,247 \cdot \Delta K_{t+1} + 0,137 \cdot \Delta K_{t+2} + \ldots \qquad (5.24)$$

При продлении здесь периода оценивания до 1991 г. (на 2 наблюдения) R^2 снижается до 0,07, статистика Дарбина – Уотсона до 0,61 при $\rho = 0{,}612$ со стандартной ошибкой 0,091. Рис. 5.7, как и рис. 5.4, подтверждает резкое изменение временной структуры инвестиционных процессов в 1990–1991 гг.

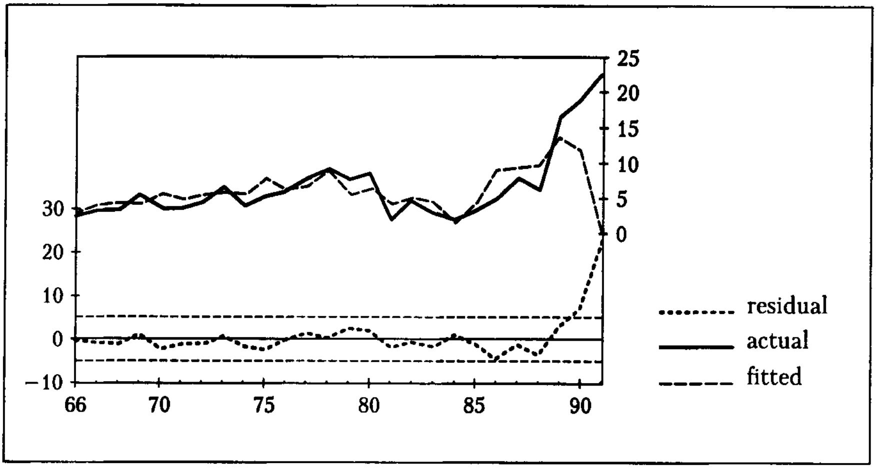


Рис. 5.7

Уравнение "правого" геометрически распределенного лага $I_t = (1-\rho)\cdot\Delta K_t + (1-\rho)\cdot\rho\cdot\Delta K_{t+1} + (1-\rho)\cdot\rho^2\cdot\Delta K_{t+2} + \ldots$, оцененное в виде $I_{t-1} - \Delta K_{t-1} = \rho\cdot(I_t - \Delta K_{t-1})$ для России, 1966–1991 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной $(I_{t-1} - \Delta K_{t-1})$ (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

Хотя при оценивании уравнений "правого" распределенного лага мы не отметили систематических неточностей какого-либо типа, попробуем все же здесь, как и в модели "левого" лага, перейти от однопараметрической модели к более общей, двухпараметрической. В этой модели, как и в аналогичной модели "левого" лага, коэффициент α_1 в соотношении (5.9) "отцепляется" от остальных коэффициентов α_j, которые по-прежнему образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. В результате соотношение (5.9) приобретает вид:

$$I_t = \alpha_1\cdot\Delta K_t + \alpha_2\cdot\Delta K_{t+1} + \alpha_2\cdot\rho\cdot\Delta K_{t+2} + \alpha_2\cdot\rho^2\cdot\Delta K_{t+3} + \ldots \quad (5.25)$$

Очевидно,

$$I_{t+1} - \alpha_1 \cdot \Delta K_{t+1} = \alpha_2 \cdot \Delta K_{t+2} + \alpha_2 \cdot \rho \cdot \Delta K_{t+3} + \alpha_2 \cdot \rho^2 \cdot \Delta K_{t+4} + \quad ,$$

и поэтому, с учетом условия $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$, откуда $\alpha_2 = (1-\rho)\cdot(1-\alpha_1)$, получаем:

$$I_t = \alpha_1 \cdot \Delta K_t + (1-\rho)\cdot(1-\alpha_1)\cdot \Delta K_{t+1} + \rho \cdot (I_{t+1} - \alpha_1 \cdot \Delta K_{t+1}). \quad (5.26)$$

Преобразовав (5.26) к удобному для оценивания уравнения линейной регрессии виду и перейдя от $(t+1)$ к t, имеем:

$$\Delta K_t - I_{t-1} = \alpha_1 \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}) + \rho \cdot (\Delta K_t - I_t). \quad (5.27)$$

Модель (5.27), как и (5.18), двухпараметрическая, она включает параметры $0 < \alpha_1 < 1$ и $0 < \rho < 1$. Рассчитав необходимые ряды показателей $(\Delta K_t - I_{t-1})$, $(\Delta K_t - \Delta K_{t-1})$ и $(\Delta K_t - I_t)$ для России и оценив по ним множественную линейную регрессию без свободного члена за 1966–1989 гг., получаем:

$$\Delta K_t - I_{t-1} = \underset{(0,102)}{0,512} \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}) + \underset{(0,064)}{0,596} \cdot (\Delta K_t - I_t) \quad \text{(с. о.)} \quad (5.28)$$

$$R^2 = 0,76;\ DW = 2,00.$$

Отсюда получаем $\alpha_2 = (1-\rho)\cdot(1-\alpha_1) = 0,197$, и уравнение (5.25) приобретает вид:

$$I_t = 0,512 \cdot \Delta K_t + 0,197 \cdot \Delta K_{t+1} + 0,118 \cdot \Delta K_{t+2} + \ldots \quad (5.29)$$

Коэффициенты двухпараметрической модели правого лага отличаются от соответствующих коэффициентов однопараметрической модели, но различие здесь меньше, чем в случае “левого” лага. Коэффициент детерминации модели (5.28) существенно выше, чем во всех рассмотренных до этого моделях геометрического лага; t-статистики и статистика Дарбина – Уотсона также подтверждают высокое качество этой модели. Все это отражается и на рис. 5.8.

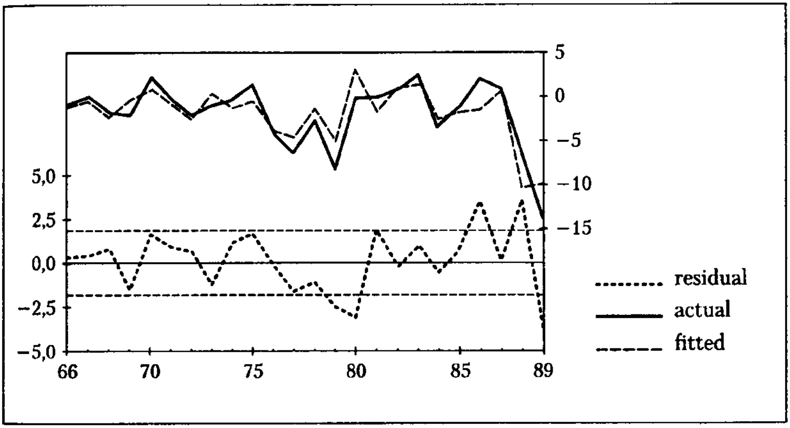


Рис. 5.8

Уравнение "правого" двухпараметрического геометрически распределенного лага $I_t = \alpha_1 \cdot K_t + (1-\rho) \cdot (1-\alpha_1) \cdot \Delta K_{t+1} + (1-\rho) \cdot (1-\alpha_1) \cdot \rho \cdot \Delta K_{t+2} + \ldots$, оцененное в виде $\Delta K_t - I_{t-1} = \alpha_1 \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}) + \rho \cdot (\Delta K_t - I_t)$ для России, 1966–1989 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной ($\Delta K_t - I_{t-1}$) (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

Интересно отметить, что из всех малопараметрических моделей геометрического лага (да и не только из таких моделей) лишь модель "правого" двухпараметрического лага продолжает давать статистически значимые оценки параметров и хорошо описывает реальную динамику переменных при расширении рассматриваемого периода на 1990–1991 гг. Правда, сами значения коэффициентов в этом случае сильно меняются. При оценивании параметров этой модели за 1966–1991 гг. получились следующие результаты:

$$\Delta K_t - I_{t-1} = \underset{(0,066)}{0,859} \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}) + \underset{(0,048)}{0,805} \cdot (\Delta K_t - I_t) \quad \text{(с. о.)} \quad (5.30)$$

$$R^2 = 0,96;\ DW = 2,42.$$

Отсюда получаем $\alpha_2 = (1-\rho)\cdot(1-\alpha_1) = 0{,}027$, и уравнение приобретает вид:

$$I_t = 0{,}859 \cdot \Delta K_t + 0{,}027 \cdot \Delta K_{t+1} + 0{,}022 \cdot \Delta K_{t+2} + \ldots \quad (5.31)$$

Обращает на себя внимание очень высокое значение коэффициента детерминации при высоком уровне t-статистик и близкой к двум статистике Дарбина – Уотсона. Качество модели иллюстрирует рис. 5.9. Особенно ценно то, что модель работает в условиях резкого изменения структуры и интенсивности инвестиционных процессов. Это говорит о том, что она описывает те глубинные характеристики этих процессов, которые остаются стабильными в ходе происходящих изменений. Интересно и то, что коэффициент α_1 здесь приближается к единице, а это означает, что в условиях больших изменений экономической ситуации инвестиционная активность в данном году все больше ориентируется на потребности в приростах капитала в том же году. В нестабильной ситуации те проекты, отдача от которых происходит с запаздыванием, как правило, не осуществляются.

Из более высокого качества модели "правого" геометрически распределенного лага (по сравнению с "левым" лагом) можно сделать вывод о том, что в России в рассматриваемый период инвестиции преимущественно определялись последующими вводами основных фондов (приростами капитала), а не наоборот.

Оценивание моделей геометрически распределенного лага для России за 1966–1989 гг. дало вполне хорошие результаты. В то же время оценка параметров общей модели смешанного, "правого" и "левого" лагов по тем же данным приемлемых результатов не дает. Приведем результаты такой оценки для $T = 2$. Период оценивания иногда будем корректировать на 1–2 года, стремясь получить наилучшие из возможных результаты.

Модель "смешанного" распределенного лага для $T = 2$ приобретает вид:

$$\alpha_1 \cdot \Delta K_t + (1-\alpha_1)\Delta K_{t-1} = \beta_1 \cdot I_t + (1-\beta_1)\cdot I_{t-1}\,. \quad (5.32)$$

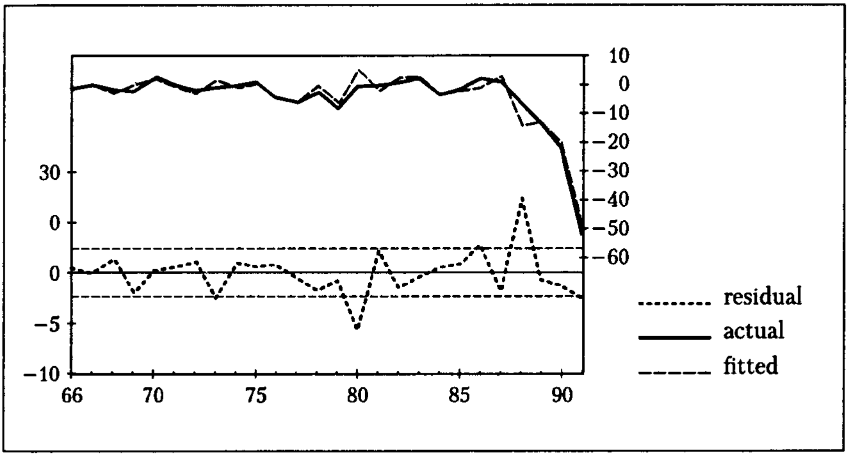


Рис. 5.9

Уравнение "правого" двухпараметрического геометрически распределенного лага $I_t = \alpha_1 \cdot K_t + (1-\rho)\cdot(1-\alpha_1)\cdot\Delta K_{t+1} + (1-\rho)\cdot(1-\alpha_1)\cdot\rho\cdot\Delta K_{t+2} + \ldots$, оцененное в виде $\Delta K_t - I_{t-1} = \alpha_1 \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}) + \rho\cdot(\Delta K_t - I_t)$ для России, 1966–1991 гг. Фактические (actual) и рассчитанные по уравнению регрессии (fitted) значения зависимой переменной ($\Delta K_t - I_{t-1}$) (правая шкала, млрд. руб. в ценах 1984 г.; верхний график). Отклонения от линии регрессии (residual) (левая шкала; нижний график)

Преобразуем его к удобному для оценивания параметров виду:

$$I_{t-1} - \Delta K_{t-1} = \alpha_1 \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}) - \beta_1 \cdot (I_t - I_{t-1}). \qquad (5.33)$$

Рассчитав новые ряды данных $Y = I_{t-1} - \Delta K_{t-1}$; $X_1 = \Delta K_t - \Delta K_{t-1}$; $X_2 = I_t - I_{t-1}$ и оценив по ним уравнение линейной регрессии без свободного члена, получаем за 1966–1988 гг. оценки $\alpha_1 = 0{,}57$ (0,21); $\beta_1 = -0{,}43$ (0,19) (в скобках приведены стандартные ошибки); $R^2 = -0{,}51$; $DW = 1{,}3$.

Таким образом, оцененное уравнение неприемлемо по ряду параметров: коэффициент детерминации R^2 в нем отрицателен, а параметр $\beta_1 < 0$ лишает его содержательного смысла. Отрицательный R^2 в уравнении без свободного члена говорит о том, что данное уравнение хуже описывает поведение зависимой переменной Y, чем просто уравнение $Y = \overline{Y}$ ($\overline{Y}$ – выборочное среднее переменной Y).

Уравнение "левого" лага при $T = 2$ имеет вид:

$$\Delta K_t = \beta_1 \cdot I_t + (1 - \beta_1) \cdot I_{t-1}. \tag{5.34}$$

Для оценивания параметра β_1 оно преобразуется в

$$\Delta K_t - I_{t-1} = \beta_1 \cdot (I_t - I_{t-1}). \tag{5.35}$$

Оценив (5.35) для России за 1966–1987 гг., получаем $\beta_1 = -0{,}001\ (0{,}125)$; $R^2 = -0{,}11$; $DW = 1{,}43$; то есть значимой оценки параметра β не получается.

Уравнение "правого" лага при $T = 2$ имеет вид:

$$I_{t-1} = (1 - \alpha_1) \cdot \Delta K_{t-1} + \alpha_1 \cdot \Delta K_t. \tag{5.36}$$

Для оценивания параметра α_1 оно преобразуется в

$$I_{t-1} - \Delta K_{t-1} = \alpha_1 \cdot (\Delta K_t - \Delta K_{t-1}). \tag{5.37}$$

Оценив (5.37) для России за 1966–1987 гг., получаем $\alpha_1 = 0{,}955\ (0{,}123)$; $R^2 = -0{,}47$; $DW = 1{,}31$. Здесь также $R^2 < 0$, что говорит о неприемлемости использования в этом случае данной модели без свободного члена.

Итак, модели "смешанного", "правого" и "левого" распределенного лага, которые даже при $T = 2$ требуют оценивания существенно большего числа параметров, чем модели геометрического распределенного лага, не дают приемлемых результатов по России за 1966–1988 гг. Не улучшает ситуацию и увеличение периода максимального лага T: число оцениваемых параметров растет, общее качество модели не улучшается и, кроме того, оценки отдельных параметров получаются отрицательными, что не соответствует исходным предположениям. Это является иллюстрацией сложности оценивания параметров лаговых инвестиционных процессов и позволяет должным образом оценить каждый полученный позитивный результат моделирования.

Полиномиальный лаг

Еще одной широко известной моделью распределенного лага является модель полиномиального лага (лага Алмон). Идея полиномиального лага состоит в том, что с помощью полинома можно аппроксимировать поведение любой функции. В данном случае это означает, что поведение нескольких наиболее важных коэффициентов распределенного лага (начальных коэффициентов) может быть описано с помощью полинома достаточно малой степени (что означает малое число параметров, которые требуется оценить).

Рассмотрим "левый" распределенный полиномиальный лаг инвестиционного процесса. Он может быть описан с помощью формулы:

$$\Delta K_t = \alpha + \beta_0 I_t + \beta_1 I_{t-1} + \ldots + \beta_n I_{t-n} + u_t \,, \qquad (5.38)$$

где коэффициенты β являются значениями полинома степени m:

$$\beta_s = \gamma_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \ldots + \gamma_m s^m \,. \qquad (5.39)$$

Так, коэффициент β_0 является значением данного полинома при $s = 0$; β_1 – при $s = 1$ и т.д. Степень данного полинома m, как и продолжительность лага n, должны быть определены в ходе экспериментов. Мы здесь специально вводим свободный член α в уравнение регрессии (хотя он не был включен в общую модель инвестиционного лага) и не требуем равенства единице суммы величин β: эти свойства должны быть проверены в ходе оценивания.

Если взять, например, $n = 3$ и $m = 2$, то

$$\begin{aligned}
\Delta K_t &= \alpha + \gamma_0 I_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) I_{t-1} + \\
&+ (\gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2) I_{t-2} + (\gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2) I_{t-3} + u_t = \\
&= \alpha + \gamma_0 (I_t + I_{t-1} + I_{t-2} + I_{t-3}) + \\
&+ \gamma_1 (I_{t-1} + 2I_{t-2} + 3I_{t-3}) + \gamma_2 (I_{t-1} + 4I_{t-2} + 9I_{t-3}) + u_t = \\
&= \alpha + \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + u_t.
\end{aligned} \qquad (5.40)$$

Чтобы оценить параметры α, β_0, β_1, β_2 и β_3, мы строим новые переменные: $x_0 = I_t + I_{t-1} + I_{t-2} + I_{t-3}$, $x_1 = I_{t-1} + 2I_{t-2} + 3I_{t-3}$,

$x_2 = I_{t-1} + 4I_{t-2} + 9I_{t-3}$; затем оцениваем параметры α, γ_0, γ_1, γ_2 и рассчитываем $\beta_0 = \gamma_0$; $\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$; $\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2$; $\beta_3 = \gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2$.

Оценивание этой модели для России за 1966–1989 гг. дало следующий результат:

$$\Delta K_t = 3,81 + 0,553x_0 - 1,154x_1 + 0,406x_2$$
$$(2,10)\ (0,209)\quad (0,55)\quad (0,182)\quad (\text{с. о.}) \qquad (5.41)$$
$$R^2 = 0,99;\ DW = 1,72.$$

На основе этого получаем: $\beta_0 = \gamma_0 = 0,553$; $\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = -0,195$; $\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = -0,131$; $\beta_3 = \gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2 = 0,745$. Свободный член здесь статистически незначим, и сумма $\beta_0 + \beta_1 + \beta_3 + \beta_3 = 0,972$, то есть близка к 1; таким образом, сделанные ранее предположения о модели распределенного лага инвестирования ($\alpha = 0$; $\sum \beta = 1$) вполне разумны. Однако вызывает вопрос отрицательный знак двух оценок β. Фактически это лишает модель экономического смысла, хотя t-статистики всех оценок (за исключением свободного члена) и другие характеристики модели вполне приемлемы. Оценив данную модель без свободного члена, получаем уравнение с несколько другими коэффициентами:

$$\Delta K_t = 0,622x_0 - 1,167x_1 + 0,394x_2,$$

но с весьма похожими качественными характеристиками: уравнение, приемлемое с формальной точки зрения, но лишенное экономического смысла как модель распределенного инвестиционного лага.

Продолжая экспериментировать, сократим величину лага в модели полиномиального лага на один год ($n = 2$ вместо $n = 3$). Нам нужно теперь оценить уравнение:

$$\Delta K_t = \alpha + \gamma_0 I_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)I_{t-1} + (\gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2)I_{t-2} + u_t. \qquad (5.42)$$

Обозначая затем $x_0 = I_t + I_{t-1} + I_{t-2}$, $x_1 = I_{t-1} + 2I_{t-2}$, $x_2 = I_{t-1} + 4I_{t-2}$, получаем оценки:

$$\Delta K_t = 2,27 + 0,572x_0 - 1,870x_1 + 0,970x_2$$
$$(2,23)\ (0,29)\quad (1,36)\quad (0,68)\quad (\text{с. о.}) \qquad (5.43)$$
$$R^2 = 0,99;\ DW = 1,36.$$

Рассчитав β, находим: $\beta_0 = \gamma_0 = 0{,}572$; $\beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = -0{,}328$; $\beta_2 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0{,}712$. Вновь получаемое уравнение

$$\Delta K_t = 2{,}27 + 0{,}572 \cdot I_t - 0{,}328 \cdot I_{t-1} + 0{,}712 \cdot I_{t-2} \qquad (5.44)$$

лишено экономического смысла как модель распределенного инвестиционного лага, даже если вновь удалить свободный член вследствие его незначимости,несмотря на то, что $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0{,}956 \approx 1$. Итак, модель полиномиального лага не соответствует российским данным в рассматриваемый период; к счастью, как показано выше, намного лучше их описывает модель геометрического лага.

Сделанные нами оценки приводят к выводу о том, что наилучшей моделью из рассмотренных для описания российских данных за 1966–1991 гг. является модель "правого" геометрически распределенного лага. Лишь эта модель достаточно хорошо описывает структуру и механизм инвестиционных процессов в этот период, хотя оцененные значения параметров изменились к концу данного периода вследствие кризиса в управлении инвестициями (и административного управления экономикой в целом). В административной системе будущие ("планируемые") приращения капитала определяют текущую динамику инвестиций, а не наоборот. Проблему того, как определяются эти будущие приращения, мы здесь не затрагиваем (для ее решения предлагались некоторые подходы, представляющиеся разумными с теоретической точки зрения, но которые не работают должным образом на практике).

Разумеется, после 1991 г. механизмы инвестиционных процессов в России изменились в принципе. Поэтому простое распространение на этот период какой-либо из оцененных моделей лишено смысла. В то же время в новых механизмах временная структура и параметры еще не устоялись, и поэтому оценивание здесь моделей распределенного лага – дело будущего.

Лекция 6

ОЦЕНИВАНИЕ И ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ *IS–LM* КАК СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Модель *IS–LM* является моделью равновесия, связывающей основные макроэкономические показатели. Она описывает экономику в краткосрочном периоде, когда совокупный доход определяется совокупным спросом. Модель *IS–LM* описывает равновесие на рынке товаров и денежном рынке, а также общее равновесие, формирующееся в результате взаимодействия этих двух рынков. Здесь мы будем рассматривать проблемы эконометрического оценивания и анализа модели *IS–LM* для открытой экономики.

С эконометрической точки зрения, модель *IS–LM* – это система одновременных уравнений, и, следовательно, при оценивании ее параметров возникают все проблемы оценивания таких моделей.

Основная проблема, возникающая при оценивании модели *IS–LM* с использованием реальных статистических данных, – то, что это – краткосрочная модель, но реальные сопоставимые статистические данные для ее переменных обычно имеются в годовом разрезе. Так, временные ряды для довольно длительных периодов (включающих по крайней мере 15–20 лет) представляют практически единственную реальную статистическую базу для оценки модели, но это – не краткосрочный, а в действительности долгосрочный период. Конечно, краткосрочная модель не отражает все долгосрочные закономерности, и в связи с этим возникают некоторые проблемы. Они будут показаны позже, в процессе оценки и анализа, и ниже будет также сделана некоторая корректировка структуры модели, делающая ее более адекватной долгосрочным процессам. В целом мы можем заранее отметить, что хотя не весь опыт оценивания положителен и дает статистически значимые и экономически интерпретируемые результаты, исследование модели предоставляет ценную информацию и улучшает понимание макроэкономических процессов.

Модель *IS–LM*

Начнем с описания модели. Обычно на первом этапе анализа рассматривается модель *IS–LM* для закрытой экономики. Мы опустим этот вариант модели, поскольку реальные современные экономики открыты (по крайней мере, американская экономика, для которой мы собираемся оценивать параметры), и сразу рассмотрим модель *IS–LM* для открытой экономики. Уравнения, переменные и параметры приводятся ниже.

Основное макроэкономическое тождество:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t\,; \tag{6.1}$$

функция потребления:

$$C_t = \alpha + \beta \cdot Y_t (+u_t)\,; \tag{6.2}$$

инвестиционная функция:

$$I_t = \delta + \varepsilon \cdot R_t (+v_t)\,; \tag{6.3}$$

функция чистого экспорта:

$$X_t = \rho + \sigma \cdot Y_t + \tau \cdot R_t (+w_t)\,; \tag{6.4}$$

уравнение равновесия денежного рынка:

$$M_t = \lambda + \mu \cdot Y_t + \theta \cdot R_t (+z_t)\,. \tag{6.5}$$

Переменные модели

Эндогенные переменные: доход Y, потребление C, инвестиции I, чистый экспорт X, ставка процента R.

Экзогенные переменные: государственные расходы G, предложение денег M.

Все переменные рассчитываются как реальные, то есть измеряются в постоянных ценах.

Модель также включает коэффициенты (параметры), которые предполагаются постоянными в течение расчетного периода, но их значения неизвестны и должны быть оценены. Эти параметры – α, β, δ, ε, ρ, σ, τ, w, λ, μ, θ.

Составляющие u_t, v_t, w_t, z_t – это случайные члены, которые предполагаются удовлетворяющими условиям Гаусса – Маркова.

Уравнения (6.1)–(6.4) описывают равновесие на рынке товаров и услуг, уравнение (6.5) – равновесие на денежном рынке. Индекс t является индексом времени, который важен в том случае, если мы собираемся использовать годовые временные ряды для оценки уравнений модели. Модель IS–LM состоит из 5 линейных уравнений и содержит 5 эндогенных переменных. Поэтому, вообще говоря, она имеет единственное решение, или точку равновесия, для каждого года.

Мы не будем использовать здесь обычно применяемое преобразование данной модели, превращающее ее в систему двух уравнений с переменными Y_t и R_t: уравнение кривой IS и кривой LM (это преобразование очень полезно для графического анализа самой модели, но оно не нужно при оценивании ее параметров). Итак, мы будем рассматривать модель IS–LM в исходной форме, оценивая параметры ее уравнений как по отдельности взятые, так и в качестве элементов единой системы уравнений.

Соотношение (6.1) является тождеством и должно просто проверяться для каждого года. Если оно не выполнено, то это означает присутствие ошибки в данных, и годовые данные для переменных Y, C, I, G и X должны быть дополнительно проверены.

Для определения параметров уравнений (6.2)–(6.5) нужно оценить следующие уравнения:

$$C_t = a + b \cdot Y_t; \qquad (6.2')$$

$$I_t = d + e \cdot R_t; \qquad (6.3')$$

$$X_t = r + s \cdot Y_t + k \cdot R_t\,; \qquad (6.4')$$

$$M_t = l + m \cdot Y_t + n \cdot R_t, \qquad (6.5')$$

где a, b, d, e, r, s, k, l, m и n – оценки α, β, δ, ε, ρ, σ, τ, λ, μ и θ соответственно.

Самый простой путь оценивания параметров модели *IS–LM* заключается в оценивании уравнений (6.2′) – (6.5′) как отдельных уравнений парной (6.2′) – (6.3′) или множественной (6.4′) – (6.5′) линейной регрессии. Однако, если мы считаем, что истинная модель являлась системой одновременных уравнений (6.1′) – (6.5′), то отдельное оценивание уравнений модели может вызвать смещенность и несостоятельность оценок. Для того, чтобы избежать этой проблемы, рассмотрим модель как систему одновременных уравнений, использовав двухшаговый метод наименьших квадратов для оценивания ее параметров. Причины выбора этого метода будут объяснены ниже. Далее мы вначале оценим уравнения (6.2′) – (6.5′) по отдельности, не упуская из вида те проблемы, которые при этом могут возникнуть.

Для оценивания модели была выбрана и подготовлена база данных (источники: программное обеспечение *Macrobytes–2* и *Macrosolve–4*, сопровождающее учебники по Макроэкономике *Mankiw* [13] и *Hall, Taylor* [14]). Данные представляют собой временные ряды для США, погодовые за 1959–1992 гг.; выборка включает 34 наблюдения. Объемные (денежные) показатели измеряются в млрд. долл. США в ценах 1987 г., а выбор периода обусловлен надежностью пересчета текущих значений в эти цены, сделанного различными авторами. Эти объемные показатели включают все переменные за исключением R_t (единственной относительной переменной модели (6.1)–(6.5), измеряемой в процентах). Таким образом, Y_t – это реальный валовой внутренний продукт, C_t – реальное потребление, I_t – реальные инвестиции, M_t – реальное предложение денег (денежный агрегат M1), X_t – реальный чистый экспорт, G_t – реальные государственные расходы, и R_t – реальная краткосрочная ставка процента (ставка процента по 3-месячным государственным облигациям).

Непосредственное оценивание уравнений модели

Непосредственное оценивание уравнений (6.2′) – (6.5′) дало следующие результаты:

$$C_t = -277{,}7 + 0{,}728 \cdot Y_t; \quad R^2 = 0{,}998;\ DW = 0{,}65; \quad (6.2а)$$
$$(-12{,}5)\ (116{,}1) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$I_t = 499{,}0 + 34{,}2 \cdot R_t; \quad R^2 = 0{,}17;\ DW = 0{,}15; \quad (6.3а)$$
$$(16{,}1) \quad (2{,}5) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$X_t = 44{,}2 - 0{,}021 \cdot Y_t - 7{,}27 \cdot R_t; \quad R^2 = 0{,}35;\ DW = 0{,}40; \quad (6.4а)$$
$$(1{,}66)\ (-2{,}62) \quad (-1{,}82) \quad (t\text{-статистики})$$

$$M_t = 408{,}9 + 0{,}06 \cdot Y_t - 4{,}73 \cdot R_t; \quad R^2 = 0{,}59;\ DW = 0{,}21. \quad (6.5а)$$
$$(13{,}1)\ (6{,}51) \quad (-1{,}01) \quad (t\text{-статистики})$$

Относительно этих результатов можно сделать следующие комментарии (забудем на некоторое время о проблеме возможной смещенности оценок).

Уравнение (6.2а) имеет довольно высокую t-статистику и R^2. Лишь близкая к нулю статистика Дарбина – Уотсона показывает присутствие некоторой автокорреляции остатков (это может свидетельствовать здесь о некоторых изменениях параметров функции потребления в течение рассматриваемого периода). Автономное потребление отрицательно, что противоречит предположениям кейнсианской теории потребления. Оценка предельной склонности к потреблению b лежит между 0 и 1 (что соответствует теории), но здесь это – предельная склонность к потреблению относительно общего дохода (а не располагаемого дохода). Дополнительные расчеты показывают, что предельная склонность к потреблению относительно располагаемого дохода не отличается здесь значимо от 1, что несколько велико с точки зрения теории. Более тщательная оценка и анализ функции потребления, включая соответствующий выбор периода оценивания, должны быть сделаны отдельно.

Оцененная инвестиционная функция (уравнение (6.3а)) наиболее проблемна среди полученных результатов. Очень низкий уровень статистики DW, а также R^2 показывают, что, вероятно, формула этой функции другая, и существуют другие объясняющие переменные, пропущенные в нашей модели. Отсутствие значимой объясняющей переменной может вызвать положительную автокорреляцию остатков (и, следовательно, близость к нулю статистики DW), низкую объясняющую способность уравнения (то есть низкий уровень R^2), и смещенность оценок коэффициентов (поскольку объясняющие переменные могут здесь служить в качестве замещающих для пропущенной переменной). В (6.3а) знак коэффициента e противоречит теоретическим представлениям (согласно теории, он был бы отрицательным), и объяснением этому может быть пропуск некоторой значимой объясняющей переменной (переменных) и использование ставки процента R_t как заменителя для них.

Попытаемся теперь понять, какие еще объясняющие переменные должны включаться в инвестиционную функцию, если она оценивается не для краткосрочного, а для более длительного периода. Представим себе экономику, которая пропорционально расширяется во времени, сохраняя неизменными значения всех качественных, относительных параметров. В такой экономике инвестиции должны также пропорционально расти, но ставка процента R_t, которая является относительной переменной, а также коэффициенты инвестиционной функции предполагаются постоянными. Таким образом, мы получаем противоречие, поскольку левая часть инвестиционной функции должна вырасти, но правая часть ее постоянна. Возможное разрешение этого противоречия могло бы состоять во введении еще одной объясняющей переменной, которая должна расти вместе с общим масштабом экономики (это могла бы быть, например, переменная дохода Y_t). В этом случае инвестиционная функция имеет вид: $I_t = \delta + v \cdot Y_t + \varepsilon \cdot R_t$. Другой возможный подход может состоять в замене абсолютной переменной в правой части уравнения некоторой относительной переменной (например долей инвестиций в валовом внутреннем продукте I_t/Y_t). В этом случае инвестиционная функция приобретает вид: $I_t/Y_t = \delta + \varepsilon \cdot R_t$. Первый подход более предпочтителен, если есть причины сохранить линейность модели *IS–LM*, но второй лучше соответствует предположению о пропорциональном росте с постоянными относительными показателями. Могут быть также некоторые другие объясняющие переменные, их можно считать постоянными в краткосрочном периоде, но они могут меняться в долгосрочном периоде: например общая отдача от инвестиций. Таким образом, в долгосрочном периоде инвестиционная функция должна иметь более сложный вид, чем в модели *IS–LM*.

Функция чистого экспорта (6.4а) соответствует теоретической концепции, согласно которой чистый экспорт отрицательно зависит от дохода и ставки процента. Оценки коэффициентов более или менее значимы, но низкие уровни DW и R^2 в совокупности свидетельствуют о том, что, как и в случае с инвестиционной функцией, видимо, пропущена некоторая объясняющая переменная (переменные). К счастью, мы знаем из отдельно проведенного анализа функции чистого экспорта для рассматриваемого набора данных, что в период с 1960-х до 1990-х гг. валютный курс ER_t был значимой объясняющей переменной для функции чистого экспорта США (скорее даже валютный курс предшествующего года ER_{t-1}). Вариант функции чистого экспорта с ER_{t-1} как объясняющей переменной вместо R_t предпочтителен также с точки зрения оценивания модели как системы одновременных уравнений, поскольку эта переменная предопределена для года t и, следовательно, может быть использована в качестве инструментальной переменной. Вариант модели *IS–LM* с этой модификацией будет оценен ниже.

Уравнение равновесия на денежном рынке (6.5а) соответствует теории, согласно которой спрос на деньги зависит положительно от дохода и отрицательно – от ставки процента. Однако низкая статистическая значимость коэффициента при R_t и близкая к нулю статистика Дарбина – Уотсона показывают, что, вероятно, эта объясняющая переменная должна модифицироваться или заменяться в долгосрочной модели некоторой другой (хотя мы и не будем делать этого здесь).

Итак, вариант модели *IS–LM* для более длительного периода, соответствуя в большей степени (хотя, конечно, не полностью) долговременным закономерностям, приобретает форму:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t\,; \tag{6.1b}$$

$$C_t = \alpha + \beta \cdot Y_t(+u_t)\,; \tag{6.2b}$$

$$I_t = \delta + v \cdot Y_t + \varepsilon \cdot R_t(+v_t)\,; \tag{6.3b}$$

$$X_t = \rho + \sigma \cdot Y_t + \tau \cdot E \cdot R_{t-1}(+w_t)\,; \tag{6.4b}$$

$$M_t = \lambda + \mu \cdot Y_t + \theta \cdot R_t(+z_t)\,. \tag{6.5b}$$

Уравнения (6.1b), (6.2b), (6.5b) здесь такие же, как и раньше, а уравнения (6.3b) и (6.4b) несколько модифицированы в соответствии с проведенным анализом.

Непосредственное оценивание (6.3b) и (6.4b) дает результаты:

$$\underset{(0{,}04)}{I_t = 1{,}13} + \underset{(17{,}0)}{0{,}158} \cdot Y_t + \underset{(0{,}79)}{3{,}67} \cdot R_t; \quad R^2 = 0{,}92;\ DW = 0{,}94; \quad (t\text{-статистики}) \tag{6.3b}$$

$$X_t = \underset{(11{,}6)}{423{,}6} - \underset{(-11{,}2)}{0{,}045} \cdot Y_t - \underset{(-10{,}8)}{2{,}76} \cdot ER_{t-1}; \quad R^2 = 0{,}85;\ DW = 1{,}14. \quad (t\text{-статистики}) \tag{6.4b}$$

Значения R^2 и статистики Дарбина – Уотсона здесь резко повысились, и уравнения выглядят не хуже других в модели *IS–LM*. Остается проблема статистической незначимости коэффициента ставки процента в инвестиционной функции (незначимый свободный член в нем легко может быть исключен). Попытка оценить другую предложенную форму инвестиционной функции дает аналогичный результат:

$$I_t/Y_t = \underset{(61{,}0)}{0{,}158} + \underset{(0{,}78)}{0{,}00088} \cdot R_t; \quad (t\text{-статистики}) \tag{6.3c}$$

Коэффициент при ставке процента здесь снова незначим. Попытки заменить R_t на R_{t-1} в различных вариантах инвестиционной функции приносят один и тот же результат: оценка коэффициента становится отрицательной, но остается статистически незначимой. Можно ожидать лучших результатов при использовании в модели долгосрочной ставки процента вместо краткосрочной, поскольку займы для инвестиций обычно даются на сравнительно длительные периоды времени. Тем не менее, использование долгосрочной ставки процента в модели *IS–LM* на рассматриваемом наборе данных дает аналогичный результат, что и при краткосрочной ставке процента: соответствующий коэффициент статистически незначим. Тем не менее, по теоретическим причинам мы сохраним переменную ставки процента в модели при рассмотрении ее как системы одновременных уравнений.

Модель *IS–LM* как система одновременных уравнений

Теперь проанализируем проблемы и методы оценивания модели *IS–LM* как системы одновременных уравнений. Для этого будут использованы косвенный метод наименьших квадратов (КМНК), метод инструментальных переменных (ИП) и двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Прежде чем начать, мы сделаем важное замечание, показывающее условность дальнейшего оценивания. В теории оценивания одновременных уравнений очень важно различие между экзогенными и эндогенными переменными. Значения первых должны быть установлены вне модели заранее, до определения величин эндогенных переменных, соответствующих условиям равновесия. Выясним, так ли это с переменными нашей модели. Величины государственных расходов G_t и предложения денег M_t считаются в модели *IS–LM* экзогенными. Они действительно экзогенны в краткосрочном периоде, поскольку параметры бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики должны приниматься законодательными органами. Но мы работаем с годовыми данными, а в течение года возможны некоторые корректировки расходов бюджета, ставок дисконта и других параметров кредитно-денежной и бюджетно-налоговой политики, если величины дохода отклоняются от предполагавшихся ранее. Например, если доход (и, следовательно, налоговая база) оказался меньшим, чем предполагалось, то возможно уменьшение государственных расходов. Годовой показатель предложения денег в еще меньшей степени является экзогенной переменной, чем государственные расходы. В результате разделение переменных нашей модели на экзогенные и эндогенные довольно условно, и в действительности все они – эндогенные, хотя и в разной степени. В этом случае выигрыш от использования специальных методов оценивания систем одновременных уравнений может быть меньшим, и это будет показано ниже.

Сначала мы проанализируем нашу модель с помощью КМНК. Этот метод предполагает выражение всех эндогенных переменных через экзогенные переменные и параметры модели. Данная процедура называется преобразованием модели из структурной формы в приведенную. В нашем случае это, вообще говоря, может быть сделано, поскольку количества уравнений и эндогенных переменных совпадают. Исходная модель (6.1)–(6.5) после этого приобретает вид (приведенная форма):

$$
\begin{aligned}
Y_t &= a_{10} + a_{11}G_t + a_{12}M_t;\\
C_t &= a_{20} + a_{21}G_t + a_{22}M_t;\\
I_t &= a_{30} + a_{31}G_t + a_{32}M_t;\\
X_t &= a_{40} + a_{41}G_t + a_{42}M_t;\\
R_t &= a_{50} + a_{51}G_t + a_{52}M_t.
\end{aligned}
$$

Из этих уравнений могут быть оценены 15 параметров a_{ij}. Все они являются функциями коэффициентов модели (6.1)–(6.5) α, β, δ, ε, ρ, σ, τ, λ, μ, θ. Значения этих коэффициентов неизвестны, а их связи с уже оцененными величинами a_{ij} образуют систему из 15 уравнений с 10 неизвестными. Такая система, вообще говоря, не имеет решения. Следовательно, модель переопределена (сверхидентифицированна), и КМНК не может быть применен. Он мог бы быть применен лишь в случае наличия у системы одного решения (идентифицированность) или нескольких решений (неидентифицированность). В данном же случае должны использоваться методы ИП или ДМНК, что и будет сделано ниже.

Если мы рассматриваем модель (6.1b)–(6.5b) в несколько скорректированном для условий долгосрочного периода виде, введя в нее еще одну экзогенную для данного года (предопределенную) переменную ER_{t-1}, то приведенная форма модели выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= a_{10} + a_{11}G_t + a_{12}M_t + a_{13}ER_{t-1};\\
C_t &= a_{20} + a_{21}G_t + a_{22}M_t + a_{23}ER_{t-1};\\
I_t &= a_{30} + a_{31}G_t + a_{32}M_t + a_{33}ER_{t-1};\\
X_t &= a_{40} + a_{41}G_t + a_{42}M_t + a_{43}ER_{t-1};\\
R_t &= a_{50} + a_{51}G_t + a_{52}M_t + a_{53}ER_{t-1}.
\end{aligned}
$$

Оценив эти уравнения, мы получим 20 параметров a_{ij}, и, следовательно, 20 уравнений их связи с параметрами структурной формы. Количество этих параметров то же, что и прежде (10), поэтому мы получаем систему из 20 уравнений с 10 неизвестными, и модель (вообще говоря) вновь сверхидентифицированна.

Метод инструментальных переменных

Метод инструментальных переменных позволяет рассматривать отдельные уравнения модели и определять, являются ли они идентифицированными, сверхидентифицированными или неидентифицируемыми (см. [1, с. 327, 330–337]).

По методу инструментальных переменных предполагается использовать экзогенные переменные вместо эндогенных объясняющих переменных. Последние в системе одновременных уравнений могут быть коррелированы со случайным членом вследствие наличия обратной связи со стороны зависимой переменной на эндогенные объясняющие переменные через другие уравнения системы, а сама зависимая переменная включает случайный член как свой элемент. В результате оценка коэффициента оказывается смещенной и несостоятельной. Если эндогенная объясняющая переменная может быть заменена экзогенной, то этот эффект исчезает, поскольку значения экзогенной переменной заданы заранее, и обратная связь отсутствует. Такая замена может быть сделана, если есть экзогенная переменная, которая не включена в уравнение, но которая тесно связана с замещаемой эндогенной переменной. Каждая эндогенная переменная в уравнении должна замещаться некоторой экзогенной переменной, не включенной в уравнение, и поэтому, чтобы уравнение было точно идентифицированно, число таких эндогенных (включенных в уравнение) переменных должно совпасть с числом экзогенных (не включенных в него) переменных. Если число эндогенных переменных превышает число экзогенных, то уравнение неидентифицируемо, в противоположной ситуации оно сверхидентифицированно. В первом случае коэффициенты уравнения не могут быть оценены, во втором же может существовать несколько разных несмещенных и состоятельных оценок, в зависимости от того, какие экзогенные переменные или их линейные комбинации использованы в качестве инструментальных переменных.

Уравнение (6.2) сверхидентифицированно как в модели (6.1)–(6.5), так и в модели (6.1b)–(6.5b), поскольку в них есть соответственно 2 (G_t, M_t) или 3 (G_t, M_t, ER_{t-1}) экзогенные переменные (не включенные в уравнение), способные заменить как инструменты единственную объясняющую эндогенную переменную (Y_t).

Уравнение (6.3) сверхидентифицированно как в модели (6.1)–(6.5), так и в модели (6.1b)–(6.5b), так как в них есть соответственно 2 (G_t, M_t) или 3 (G_t, M_t, ER_{t-1}) экзогенные переменные (не включенные в уравнение), чтобы заменить как инструменты одну (R_t) или две (R_t, Y_t) объясняющие эндогенные переменные.

Уравнение (6.4) идентифицированно в модели (6.1)–(6.5) (две экзогенные переменные, не включенные в уравнение, G_t и M_t, чтобы заменить как инструменты две объясняющие эндогенные переменные, R_t и Y_t). В модели (6.1b)–(6.5b) это уравнение сверхидентифицированно: есть те же две экзогенные переменные, не включенные в уравнение (G_t, M_t), и единственная объясняющая эндогенная переменная (Y_t) в нем, которая должна быть замещена.

Ситуация с уравнением (6.5) более сложная, поскольку зависимая переменная в нем, M_t, сама является экзогенной и, следовательно, не может быть инструментом для этого уравнения. Чтобы проанализировать идентифицируемость этого уравнения, мы должны переписать его как функцию некоторой эндогенной переменной, Y_t или R_t, от другой его эндогенной и одной экзогенной переменной (M_t). После этого в модели (6.1)–(6.5) остается одна экзогенная переменная, не включенная в данное уравнение (G_t), которая может быть инструментом для одной эндогенной объясняющей переменной, и модель идентифицированна. В модели (6.1b)–(6.5b) данное уравнение сверхидентифицированно, так как здесь в такой же ситуации есть еще одна экзогенная (предопределенная) переменная ER_{t-1}, не включенная в уравнение.

Применение двухшагового метода наименьших квадратов

Если некоторое уравнение идентифицированно, то для выбора инструментальных переменных нет альтернативы: экзогенные переменные, не включенные в это уравнение, используются в качестве инструментов, и затем коэффициенты уравнения вычисляются с использованием полученных оценок. Если уравнение сверхидентифицированно, то для инструментов есть выбор, но требование для них быть как можно сильнее коррелированными с заменяемыми ими эндогенными объясняющими переменными ведет к инструментальным переменным, используемым в двухшаговом методе наименьших квадратов. В этом случае оцениваются общие регрессионные зависимости эндогенных объясняющих переменных от всех возможных инструментов, и затем эти регрессии используются для вычисления новых искусственных переменных, которые представляют собой "теоретические" значения соответствующих переменных [1, с. 337–339]. Та же процедура может использоваться и для идентифицированных уравнений, поскольку для них методы КМНК, ИП и ДМНК идентичны.

Теперь применим ДМНК к оцениванию модели (6.1)–(6.5). На первом шаге мы должны оценить регрессии Y_t и R_t (поскольку только эти две эндогенные переменные служат в качестве объясняющих во всех уравнениях) от экзогенных переменных G_t и M_t. Результаты этого оценивания таковы:

$$Y_t = -408{,}1 + 8{,}063 \cdot G_t - 2{,}955 \cdot M_t; \quad R^2 = 0{,}94;\ DW = 0{,}45; \quad (6.6)$$
$$(-1{,}03)\ (13{,}76) \qquad (-2{,}66) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$R_t = 1{,}72 + 0{,}012 \cdot G_t - 0{,}014 \cdot M_t; \quad R^2 = 0{,}22;\ DW = 0{,}48. \quad (6.7)$$
$$(0{,}60)\ (2{,}75) \qquad (-1{,}72) \qquad (t\text{-статистики})$$

Сделанные оценки показывают, что переменные G_t и M_t – не вполне хорошие инструменты для Y_t и R_t, особенно для последней: уравнение для нее объясняет только 22% дисперсии R_t. Статистика Дарбина – Уотсона также очень мала в этих уравнениях, что говорит о неправильной спецификации или о существовании некоторых значимых, но пропущенных объясняющих переменных. Тем не менее, данные инструменты являются единственно возможными в данной версии модели IS–LM, и поэтому мы продолжим работать с ними.

На следующем шаге процедуры ДМНК вычисляются теоретические значения Y_t и R_t, мы обозначаем их как Y_{t1} и R_{t1}:

$$Y_{t1} = -408{,}1 + 8{,}063 \cdot G_t - 2{,}955 \cdot M_t;$$

$$R_{t1} = 1{,}72 + 0{,}012 \cdot G_t - 0{,}014 \cdot M_t.$$

Эти искусственные переменные являются наилучшими возможными инструментами для Y_t и R_t, и на втором этапе ДМНК мы включаем их в оцениваемые уравнения (6.2)–(6.5). Оценивание уравнений (6.2)–(6.5) с новыми объясняющими переменными дает следующие результаты:

$$C_t = -270{,}4 + 0{,}726 \cdot Y_{t1}; \quad R^2 = 0{,}93;\ DW = 0{,}37; \qquad (6.2c)$$
$$(-2{,}23) \quad (91{,}1) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$I_t = 355{,}4 + 143{,}6 \cdot R_{t1}; \quad R^2 = 0{,}65;\ DW = 0{,}81; \qquad (6.3c)$$
$$(12{,}2) \quad (7{,}8) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$X_t = 105{,}6 - 0{,}053 \cdot Y_{t1} + 28{,}74 \cdot R_{t1};\ R^2 = 0{,}36;\ DW = 0{,}35; \ (6.4c)$$
$$(2{,}87) \quad (-3{,}39) \qquad (1{,}79) \quad (t\text{-статистики})$$

$$M_t = 238{,}1 + 0{,}149 \cdot Y_t - 103{,}0 \cdot R_t;\ R^2 = 1;\ DW = 2{,}02. \quad (6.5c)$$
$$(\infty) \quad (\infty) \qquad (\infty) \quad (t\text{-статистики})$$

Коэффициенты уравнения (6.2с) довольно близки к коэффициентам (6.2а). Это может объясняться очень высокими значениями R^2 в (6.2а) и в (6.6). Уравнение (6.3с), наоборот, сильно отличается от (6.3а). Но, тем не менее, оно сохраняет основной недостаток (6.3а): положительный знак коэффициента регрессии, противоречащий теоретическим представлениям. Причиной здесь, очевидно, снова является пропуск некоторой значимой (для долгосрочного периода) объясняющей переменной(ых) инвестиционной функции (эта проблема уже обсуждалась). Коэффициенты уравнения (6.4с) довольно сильно отличаются от коэффициентов (6.4а). Это могло бы считаться улучшением модели вследствие устранения смещенности оценок, но в данном случае это улучшение неочевидно, поскольку коэффициент при показателе ставки процента стал положительным, и модель в своей настоящей форме противоречит предпосылкам экономической теории. Таким образом, новая форма этого уравнения не может быть признана приемлемой, поскольку она вновь включает не ту объясняющую переменную (ставка процента вместо валютного курса), и кроме того (что уже неважно) R_{t1} – не слишком хороший инструмент для R_t. Наконец, уравнение (6.5с) имеет очень странные (на первый взгляд) значения R^2, DW и t-статистик. Причина этого – в том, что данное уравнение идентифицированно, и для него нужна только одна инструментальная переменная G_t (как это объяснено выше), мы же ввели две такие переменные. Переменная M_t уже представлена в уравнении, и этот факт привел к точному выражению с бесконечной t-статистикой и R^2, равным 1. Тем не менее, мы можем принять коэффициенты этого уравнения (они были бы получены в любом случае), и это – единственное уравнение, где наблюдается улучшение.

Теперь применим метод ДМНК для модифицированной модели (6.1b)–(6.5b). У нее есть три экзогенные переменные G_t, M_t и ER_{t-1}, и на первом шаге ДМНК мы должны оценить регрессии эндогенных объясняющих переменных Y_t и R_t на них. Сделав это, получаем следующие результаты:

$$Y_t = 463{,}2 + 7{,}81 \cdot G_t - 2{,}79 \cdot M_t - 7{,}19 \cdot ER_{t-1} \qquad (6.8)$$
$$(0,92)\ (13{,}2)\quad (-2{,}64)\quad (-2{,}53)\quad (t\text{-статистики})$$
$$R^2 = 0{,}95;\ DW = 0{,}55;$$

$$R_t = -3,51 + 0{,}015 \cdot G_t - 0{,}016 \cdot M_t + 0{,}042 \cdot ER_{t-1} \qquad (6.9)$$
$$(-0,92)\ (3{,}28)\quad (-2{,}06)\quad (1{,}98)\ (t\text{-статистики})$$
$$R^2 = 0{,}32;\ DW = 0{,}63.$$

Добавление объясняющей переменной ER_{t-1} в (6.8)–(6.9) немного улучшило качество регрессий, но они все еще не совсем хороши. Тем не менее, мы продолжаем применение ДМНК, и вычисляем, как и ранее, значения инструментальных переменных Y_{t1} и R_{t1} (“теоретические” величины Y_t и R_t):

$$Y_{t1} = 463{,}2 + 7{,}81 \cdot G_t - 2{,}79 \cdot M_t - 7{,}19 \cdot ER_{t-1};$$

$$R_t = -3,51 + 0{,}015 \cdot G_t - 0{,}016 \cdot M_t + 0{,}042 \cdot ER_{t-1}.$$

Затем, на втором шаге ДМНК, мы оцениваем регрессии переменных C_t, I_t, X_t и M_t на Y_{t1} и R_{t1}, получая следующие результаты:

$$C_t = -281{,}9 + 0{,}727 \cdot Y_{t1}; \quad R^2 = 0{,}94;\ DW = 0{,}46; \tag{6.2d}$$
$$(-2,36) \quad (21{,}8) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$I_t = 45,8 + 0{,}137 \cdot Y_{t1} + 18{,}7 \cdot R_{t1}; \quad R^2 = 0{,}80;\ DW = 0{,}93; \tag{6.3d}$$
$$(0{,}85) \quad (6{,}8) \qquad (1{,}17) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$X_t = 414,3 - 0{,}044 \cdot Y_{t1} - 2{,}73 \cdot ER_{t-1}; \quad R^2 = 0{,}78;\ DW = 0{,}96; \tag{6.4d}$$
$$(9{,}1) \quad (-8{,}5) \qquad (-8{,}6) \qquad (t\text{-статистики})$$

$$M_t = 370,1 + 0{,}083 \cdot Y_t - 23{,}6 \cdot R_t; \quad R^2 = 0{,}67;\ DW = 0{,}32. \tag{6.5d}$$
$$(11{,}6) \quad (7{,}0) \qquad (-2{,}51) \qquad (t\text{-статистики})$$

В этой системе есть только два незначимых коэффициента: свободный член и коэффициент при ставке процента в инвестиционной функции (6.3d). Однако они могут легко быть исключены из модели, и это не должно существенно изменить все другие результаты. Оцененная функция (6.3d) показывает, что инвестиции составляли примерно постоянную долю дохода Y_t, и, вероятно, модель $I_t = s \cdot Y_t$ была бы здесь наилучшим вариантом инвестиционной функции. Все другие уравнения имеют значимые оценки коэффициентов и довольно высокий R^2. Знаки всех коэффициентов соответствуют теоретическим представлениям. Проблемой являются сравнительно низкие значения статистики DW во всех оцененных уравнениях. Это, однако, может быть вызвано некоторым изменением значений коэффициентов в течение расчетного периода (опыт показывает, что, скажем, предельная склонность к потреблению или скорость обращения денег обычно изменяются в течение таких длительных периодов, как рассматриваемый 34-летний период). Следующий шаг в развитии модели мог бы состоять в определении наиболее приемлемого охватываемого временного периода для нее (это можно сделать экспериментально, изменяя период и наблюдая за статистикой DW, наряду с другими статистическими параметрами). Сравнивая уравнения (6.2d)–(6.5d) с результатами непосредственного оценивания соответствующих уравнений, можно отметить, что коэффициенты (6.2d) – практически те же, что в (6.2a), а коэффициенты (6.4d) – практически те же, что в (6.4b). Существенные изменения произошли лишь в (6.5d) в сравнении с (6.5a), и эти изменения сопровождались улучшением R^2, а коэффициент при показателе ставки процента стал статистически значимым. То, что изменения, связанные с переходом к оцениванию одновременных уравнений и получением несмещенных оценок, вообще говоря, не столь велики, очевидно, связано с тем указанным выше фактором, что переменные G^t и M^t не полностью экзогенны в модели с годовыми данными. В то же время переменная ER_{t-1} действительно экзогенна (предопределена) для каждого года, и ее включение в модель на самом деле дало положительное изменение качества оценок, которое наиболее сильно выражено в уравнении (6.5d).

ЛИТЕРАТУРА

1. Доугерти Кр. Введение в эконометрику: Пер. с англ. М.: МГУ: ИНФРА-М, 1997.

2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: ДиС, 1999.

3. Дорнбуш Р., Фишер С. Макроэкономика. М.: МГУ: ИНФРА-М, 1997.

4. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело, 1997.

5. Phillips A.W. The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom, 1861–1957// Economica. 1958. November. Vol. 25. P. 283–299.

6. Gali J.,Gertler M. Inflation dynamics: A structural econometric analysis//Journal of Monetary Economics. 1999. N44. P. 195–222.

7. Gujarati D.N. Basic Econometrics. 3rd ed. McGraw-Hill, 1995.

8. Economic Report of the President. Washington: United States Government Printing Office, 1992.

9. Easterly W., Fischer S. The Soviet Economic Decline: Historical and Republican Data: NBER Working Paper, 4735. 1994.

10. Easterly W., Fischer S. The Soviet Economic Decline//World Bank Economic Review 9(3). September. 1995. P. 341–371.

11. Koyck L.M. Distributed Lags and Investment Analysis. Amsterdam: North Holland, 1954.

12. Kennedy P. A Guide to Econometrics. 3rd ed. The MIT Press, 1992.

13. Weil D. Macrobytes 2.0. For Mankiw's Macroeconomics. 2nd ed. Worth Publishers, 1994.

14. King S.R., McConnell R.M. Macrosolve 4.0. For Hall and Taylor's Macroeconomics. 4th ed. W.W. Norton&Co., 1993.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Замков Олег Олегович

Эконометрические методы
в макроэкономическом анализе

Зав. редакцией *Е.А. Рязанцева*
Редактор *О.В. Осипова*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика *И.Н. Олимпиев*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г. продлен до 14 октября 2003 г.
ГУ ВШЭ. 101987, Москва, ул. Мясницкая, 20.
Тел.: (095) 921-79-83; 928-92-90; 921-72-89. Факс: (095) 928-79-31

ИД № 00510 от 01.12.99
Подписано в печать 07.12.2000 Формат $60\times88^1/_{16}$
Печать офсетная Гарнитура "Петербург" Бумага офс. № 1
Печ. л. 7,75 Тираж 5000 экз. Заказ 7701 Изд. № 115

ООО "МАКС Пресс"
107066, г. Москва, Елоховский пр., д. 3, стр. 2
Тел. 939-38-90, 939-38-91, 928-10-42. Тел./Факс 939-38-91

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86

Для заметок