З. С. Агаларов, А. И. Орлов

ЭКОНОМЕТРИКА

УЧЕБНИК

«Дашков и К°» Издательско-торговая корпорация

З.С. Агаларов, А.И. Орлов

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебник

Рекомендовано
Учебно-методическим советом по высшему образованию
в качестве учебника для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент»,
«Инноватика», «Прикладная математика»

Москва
Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
2021

УДК 519.2:330.4(075.8)
ББК 65.04я73
А23

Рецензенты:

С.Г. Фалько — заведующий кафедрой «Экономика и организация производства» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, доктор экономических наук, профессор;

Е.В. Луценко — профессор кафедры компьютерных технологий и систем Кубанского государственного аграрного университета, доктор экономических наук, кандидат технических наук, профессор.

Агаларов З.С.

А23 Эконометрика: учебник / З.С. Агаларов, А.И. Орлов. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2021. — 380 с.

ISBN 978-5-394-04075-7

На современном уровне представлена эконометрика — наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей. В учебник включены основные эконометрические методы: выборочные исследования, метод наименьших квадратов, анализ динамики цен. Большое внимание уделено экспертным технологиям. Подробно разобраны методы анализа экспертных упорядочений. Теория измерений нацелена на выбор адекватных методов расчетов. Проанализированы методы построения интегральных показателей (рейтингов). Дано представление о математических методах анализа экспертных оценок в рамках статистики нечисловых данных.

Каждая глава учебника — это введение в большую область эконометрики. Приведенные литературные ссылки помогут выйти на передний край теоретических и прикладных работ, познакомиться с доказательствами теорем, включенных в учебник. Материал учебника соответствует курсам лекций, которые авторы читают в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана и Российском государственном геологоразведочном университете им. Серго Орджоникидзе.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент», «Инноватика», «Прикладная математика», а также слушателей бизнес-школ, программ MBA, институтов повышения квалификации и структур второго образования, менеджеров, экономистов, инженеров, специалистов по прикладной математике, научных и практических работников, связанных с эконометрическим анализом экономических и управленческих данных.

ISBN 978-5-394-04075-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эконометрика — наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей.

Во вводных монографиях по экономической теории, как правило, выделяют в качестве ее разделов макроэкономику, микроэкономику и эконометрику. Статистические методы анализа экономических данных называют эконометрикой, что буквально означает: наука об экономических измерениях. Действительно, термин «эконометрика» состоит из двух частей: «эконо-» — от «экономика» и «-метрика» — от «измерение». О месте эконометрики среди экономических наук ярко говорит то, что восьми эконометрикам присуждены нобелевские премии по экономике.

Эконометрика — эффективный инструмент научного анализа и моделирования в профессиональной деятельности экономиста, менеджера и инженера. Настоящий учебник дает этот инструмент в руки будущим специалистам.

Содержание учебника. Рассмотрены основные эконометрические методы. *Глава 1* посвящена организации выборочных исследований и методам анализа собранных данных. Построены модели случайных выборок, разобраны процедуры доверительного оценивания доли и проверки однородности двух биномиальных выборок. Проанализированы прикладные выборочные исследования, в том числе оценивание функции спроса и маркетинговые опросы потребителей.

Непараметрический метод наименьших квадратов в *главе 2* позволяет восстановить линейную зависимость между двумя переменными. Рассмотрены коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена и основы линейного регрессионного анализа. Пример применения — прогнозирование в отрасли лома черных металлов. Обсуждаются и более глубокие проблемы — выбор вида регрессионной модели, непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых, модель с периодической составляющей (последние две темы основаны на научных публикациях 2008 г.).

Эконометрическому анализу инфляции посвящена *глава 3*. Рассмотрены практически используемые потребительские корзины и соответствующие индексы инфляции, в том числе корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики и результаты расчетов индексов инфляции по независимо собранной информации за 1993–2020 гг. Проанализированы свойства индексов инфляции и возможности их использования в экономических расчетах. Обсуждается динамика цен на продовольственные товары в нашей стране.

Экспертные оценки — один из основных видов эконометрических инструментов при разработке, принятии и реализации управленческих решений. Примеры процедур экспертных оценок даны в *главе 4*. Значительное внимание уделено методам и технологиям сбора и анализа мнений экспертов, применению экспертных оценок Рассмотрены индивидуальные и коллективные экспертные оценки, методы оценки и выбора вариантов с помощью экспертов, процедуры экспертного прогнозирования, место экспертных оценок в теории и практике принятия решений на современном этапе. Дано представление об организационной стороне работы экспертной комиссии. Обсуждаются основные стадии экспертного опроса, в том числе выбор цели экспертизы и подбор экспертов. Выделены основания для классификации экспертных методов. Роль интуиции эксперта сопоставлена с использованием информационных технологий. Экспертные технологии пока недостаточно представлены в литературе, поэтому мы вынуждены уделить им большое внимание.

Важные конкретные процедуры экспертного оценивания разобраны в *главе 5*. Для нахождения коллективного мнения по экспертным ранжировкам предложены методы средних арифметических рангов и медиан рангов, а также процедура согласования кластеризованных ранжировок.

Теория измерений и ее применение для обоснования экспертных процедур — предмет *главы 6*. Введены основные шкалы измерения (наименований, порядка, интервалов, отношений, разностей, абсолютная). Поставлена задача поиска инвариантных алгоритмов. В качестве примера разобраны методы усреднения. Дан анализ различных видов средних, введены средние по Коши и средние по Колмогорову. Установлено, какими средними величинами следует пользоваться при анализе данных, измеренных в порядковой шкале (из средних по Коши), шкалах интервалов и отношений (из средних по Колмогорову).

Построению рейтингов (обобщенных показателей) посвящена *глава 7*. В начале главы рассмотрены широко применяющиеся простые методы принятия решений. Разобраны подходы в стратегическом менеджменте, оперативные приемы, способы декомпозиции задач принятия решения. В качестве основной модели для дальнейшего обсуждения выбраны бинарные рейтинги, тесно связанные с теорией классификации (диагностики, дискриминации, распознавания образов). В задачах сравнения рейтингов основное внимание уделено линейным рейтингам. Обосновано применение прогностической силы как показателя качества алгоритма диагностики, построена асимптотическая теория для этого показателя и разработаны методы проверки обоснованности пересчета на модель линейного дискриминантного анализа.

Глава 8 посвящена современному быстро растущему разделу эконометрики — статистике нечисловых данных. На основе систем аксиом введены расстояния между экспертными мнениями. Итоговое мнение экспертной комиссии предложено определять с помощью медианы Кемени. Коэффициенты корреляции и конкордации рассмотрены в связи с проверкой согласованности мнений экспертов.

В конце каждой главы приведены списки литературных источников, контрольные вопросы и задачи, а также темы заданий на проведение исследовательских работ. Нумерация таблиц, рисунков, формул, теорем, литературных источников дана по главам.

Методические комментарии. Теоретическую базу эконометрики составляют математические дисциплины — общий курс (математический анализ, линейная алгебра), теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика, исследование операций. Полезно знание основ экономической теории и статистики (общей теории статистики, экономической статистики). Чтобы полностью овладеть материалом, представленным в учебнике, желательно знать базовые понятия и результаты указанных выше типовых учебных курсов.

Целью изучения учебной дисциплины «Эконометрика» является овладение современными эконометрическими методами анализа конкретных экономических и управленческих данных на уровне, достаточном для использования в практической деятельности менеджера, экономиста, инженера. В учебник включены как классические научные результаты, так и недавно полученные. В качестве примеров применения эконометрических методов описан ряд конкретных прикладных работ, выполненных под руководством авторов. Можно утверждать, что учебник позволяет выйти на современный уровень теоретических и прикладных эконометрических исследований.

Он нацелен на подготовку студентов вузов, обучающихся в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент», «Инноватика», «Прикладная математика». Студенты найдут весь необходимый материал для изучения различных вариантов эконометрических курсов. Особенно хочется порекомендовать учебник тем, кто получает наиболее ценимое в настоящее время образование — на экономических факультетах в технических вузах. Слушатели вечерних отделений, в том числе получающие второе образование по экономике и менеджменту, смогут изучить основы эконометрики и познакомиться с основными вопросами ее практического использования. Менеджерам, экономистам и инженерам, изучающим эконометрику самостоятельно или в бизнес-школах и институтах повышения квалификации, в том числе по программам MBA («Мастер делового администрирования»), учебник позволит познакомиться с ее ключевыми идеями и выйти на мировой уровень образования. Специалистам по теории вероятностей и математической статистике эта книга также может быть интересна и полезна, в ней описан современный взгляд на статистические методы и их применение в экономике, основные подходы и результаты в этой области (касающиеся, в частности, непараметрических постановок и статистики нечисловых данных), открывающие большой простор для дальнейших математических исследований. Преподаватели эконометрики найдут в учебнике как теоретические результаты, так и примеры их практического использования — объеме, достаточном для разработки собственных программ обучения. Материалы учебника можно использовать также при чтении и изучении курсов «Организационно-экономическое моделирование», «Математические методы прогнозирования», «Теория принятия решений», «Прикладная статистика» и др.

В отличие от учебной литературы по математическим дисциплинам, в настоящей книге практически отсутствуют доказательства. В нескольких случаях мы сочли целесообразным их привести. При первом чтении доказательства теорем можно пропустить.

О роли литературных ссылок в учебнике необходимо сказать достаточно подробно. Прежде всего, эта книга представляет собой замкнутый текст, не требующий для своего понимания ничего, кроме знания стандартных учебных курсов по высшей математике. Зачем же нужны ссылки? Доказательства всех приведенных в учебнике теорем приведены в ранее опубликованных статьях и монографиях. Дотошный читатель, в частности, при подготовке рефератов и при желании глубже проникнуть в материал, может обратиться к приведенным в каждой главе спискам цитированной литературы. Каждая глава учебника — это введение в большую область эконометрики. Приведенные литературные ссылки помогут читателям выйти на передний край теоретических и прикладных работ, познакомиться с доказательствами теорем, включенных в учебник. За многие десятилетия накопились большие книжные богатства, и их надо активно использовать.

Настоящая книга выполнена в рамках отечественной научной школы в области эконометрики (см.: *Орлов А.И.* Отечественная научная школа в области эконометрики // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 121. С. 235–261; *Орлов А.И.* Отечественная научная школа в области организационно-экономического моделирования, эконометрики и статистики // Контроллинг. 2019. № 73. С. 28–35).

Включенные в учебник материалы прошли многолетнюю и всестороннюю проверку. Кроме Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, они использовались при преподавании во многих других отечественных и зарубежных образовательных структурах, в частности в Московском физико-техническом институте (МФТИ), Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (РАНХиГС), в Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова, Рижском институте мировой экономики. Наряду с дневным образованием, преподавание велось в структурах второго образования, повышения квалификации, в бизнес-школах (программы MBA).

Настоящий учебник продолжает традицию ранее выпущенного четырьмя изданиями учебника «Эконометрика», составленного одним из авторов (*Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. М.: Экзамен, 2002 (1-е изд.), 2003 (2-е изд.), 2004 (3-е изд.). 576 с.; *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. Изд. 4-е, доп. и перераб. Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. 572 с.).

Учебник подготовлен в соответствии с рекомендациями созданной в 1990 г. Всесоюзной статистической ассоциации и ее наследников — Российской ассоциации статистических методов и Российской академии статистических методов, а также разработками Института высоких статистических технологий и эконометрики и Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

С базовыми публикациями (более 20 книг и 200 статей) и текущей научной информацией по эконометрике можно познакомиться на сайте «Высокие статистические технологии» http://orlovs.pp.ru и его форуме http://forum.orlovs.pp.ru, а также на странице Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге http://www.ibm.bmstu.ru/nil/lab.html (на сайте научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана). Достаточно большой объем информации содержит еженедельник «Эконометрика» — электронная газета кафедры «Экономика и организация производства» научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана http://subscribe.ru/catalog/science.humanity.econometrika (выходит с июля 2000 г.).

Включенный в учебник материал дает представление об эконометрике, соответствующее общепринятому в мире. Изложение доведено до современного уровня научных исследований в этой области. Конечно, возможны различные точки зрения по тем или иным частным вопросам. Авторы будут благодарны читателям, если они направят свои вопросы и замечания по адресу издательства или непосредственно авторам по электронной почте на адрес prof-orlov@mail.ru (или поместят их на форуме http://forum.orlovs.pp.ru сайта «Высокие статистические технологии»).

Глава 1. ВЫБОРОЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Термин «выборочные исследования» применяют, когда невозможно изучить все единицы представляющей интерес совокупности. Приходится знакомиться с частью совокупности — с выборкой, а затем с помощью вероятностно-статистических методов и моделей переносить выводы с выборки на всю совокупность. Выборочные исследования — способ получения статистических данных и важный раздел эконометрики и прикладной статистики [5].

1.1. Организация выборочных исследований

В качестве примера рассмотрим выборочные исследования предпочтений потребителей, которые часто проводят специалисты по маркетингу (изучению рынка).

Оценивание функции спроса. Функция спроса часто встречается в учебниках по экономической теории, но при этом обычно не рассказывается, как она получена. Между тем оценить ее по эмпирическим данным не так уж трудно. Например, можно выяснять ожидаемый спрос с помощью следующего простого приема — спрашиваем потенциальных потребителей: «Какую максимальную цену Вы заплатили бы за такой-то товар?» Пусть для определенности выборка состояла из 20 опрошенных. Они назвали следующие максимально допустимые для них цены:

$$40, 25, 30, 50, 35, 20, 50, 32, 15, 40,$$
$$20, 40, 45, 30, 50, 25, 35, 20, 35, 40.$$

Сначала названные опрошенными величины упорядочим в порядке возрастания. Результаты представлены в табл. 1.1. В первом столбце — номера различных численных значений (в порядке возрастания), названных потребителями. Во втором столбце приведены сами значения цены, названные ими. В третьем столбце указано, сколько раз названо то или иное значение.

Таблица 1.1

Эмпирическая оценка функции спроса и ее использование

№ п/п (i)	Цена p_i	Повторы N_i	Спрос $D(p_i)$	Прибыль (p_i-10) $D(p_i)$	Прибыль (p_i-15) $D(p_i)$	Прибыль (p_i-25) $D(p_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	15	1	20	100	0	-
2	20	3	19	190	95	-
3	25	2	16	240	160	0
4	30	2	14	280	210	70
5	32	1	12	264	204	84
6	35	3	11	275	220	110
7	40	4	8	240	200	120
8	45	1	4	140	120	80
9	50	3	3	120	105	75

Таким образом, 20 потребителей назвали 9 конкретных значений цены (максимально допустимых или приемлемых для них значений), каждое из значений, как видно из третьего столбца, названо от 1 до 4 раз. Теперь легко построить выборочную функцию спроса в зависимости от цены. Она будет представлена в четвертом столбце, который заполним снизу вверх. Спрос как функция от цены p (от англ. *price* — цена) обозначен $D(p)$ (от англ. *demand* — спрос). Если мы будем предлагать товар по цене свыше 50 руб., то его не купит никто из опрошенных. При цене 50 руб. появляются 3 покупателя. Записываем 3 в четвертый столбец в девятую строку. А если цену понизить до 45? Тогда товар купят четверо — тот единственный, для кого максимально возможная цена — 45, и те трое, кто был согласен на более высокую цену — 50 руб. Таким образом, легко заполнить столбец 4, действуя по правилу: значение в клетке четвертого столбца равно сумме значений в находящейся слева клетке третьего столбца и в лежащей снизу клетке четвертого столбца. Например, за 30 руб. купят товар 14 человек, а за 20 руб. — 19.

Зависимость спроса от цены — это зависимость четвертого столбца от второго. Таблица 1.1 дает нам девять точек такой зависимости. Зависимость можно представить на рисунке, в координатах «спрос — цена». Если абсцисса — это спрос, а ордината — цена, то девять точек на кривой спроса, перечисленные в порядке возрастания абсциссы, имеют вид:

$$(3;\,50),\,(4;\,45),\,(8;\,40),\,(11;\,35),\,(12;\,32),$$
$$(14;\,30),\,(16;\,25),\,(19;\,20),\,(20;\,15).$$

Эти девять точек можно использовать для построения кривой спроса каким-либо графическим (сделайте чертеж!) или расчетным способом, например методом наименьших квадратов (см. ниже главу 3). Кривая спроса, как и следует ожидать согласно учебникам экономической теории, убывает, имея направления от левого верхнего угла чертежа к правому. Однако заметны отклонения от гладкого вида функции, связанные, в частности, с естественным пристрастием потребителей к круглым числам. Заметьте, все опрошенные, кроме одного, назвали числа, кратные 5 руб.

Расчет оптимальной цены. Данные табл. 1.1 могут быть использованы для выбора цены продавцом-монополистом. Или организацией, действующей на рынке монополистической конкуренции. Пусть расходы на изготовление или оптовую покупку единицы товара равны 10 руб. По какой цене ее продавать на том рынке, функцию спроса для которого мы только что нашли? Для ответа на этот вопрос вычислим суммарную прибыль, т. е. произведение прибыли на одной единице товара (p – 10) на число проданных (точнее, запрошенных) экземпляров $D(p)$. Результаты приведены в пятом столбце табл. 1.1. Видно, что максимальная прибыль, равная 280 руб., достигается при цене 30 руб. за единицу товара. При этом из 20 потенциальных покупателей окажутся в состоянии заплатить за книгу 14, т. е. 70%.

Если же удельные издержки производства, приходящиеся на одну единицу товара (или оптовая цена), повысятся до 15 руб., то данные столбца 6 табл. 1.1 показывают, что максимальная прибыль, равная 220 руб. (она, разумеется, меньше, чем в предыдущем случае), достигается при более высокой цене — 35 руб. Эта цена доступна 11 потенциальным покупателям, т. е. 55% от всех возможных покупателей. При дальнейшем повышении издержек, скажем, до 25 руб., как вытекает из данных столбца 7 табл. 1.1, максимальная прибыль, равная 120 руб., достигается при цене 40 руб. за единицу товара, что доступно 8 лицам, т. е. 40% покупателей. Отметьте, что при повышении оптовой цены на 10 руб. оказалось выгодным увеличить розничную лишь на 5, поскольку более резкое повышение привело бы к такому сокращению спроса, которое перекрыло бы эффект от повышения удельной прибыли (т. е. прибыли, приходящейся на одну проданную единицу товара).

Замечание. При более строгом подходе к использованию терминов надо вместо «прибыли» говорить о «маржинальной прибыли», а вместо «удельных издержек» — о «переменных издержках» (на одну единицу продукции), поскольку постоянные издержки не учитываем. Кроме того, спрос целесообразно выражать не в числе потребителей, а в процентах от общего числа потенциальных потребителей. Пересчет сделать нетрудно — достаточно умножить значения в столбце «Спрос» на 100 / 20 = 5. Мы не сочли необходимым придерживаться подобных уточнений, поскольку цель настоящей главы — в демонстрации возможности использования в маркетинговых исследованиях подходов, основанных на эконометрике.

Представляет интерес анализ оптимального объема выпуска при различных значениях удельных издержек (табл. 1.2).

В табл. 1.2 звездочками указаны максимальные значения прибыли при том или ином значении издержек, не включенном в табл. 1.1. Для легкости обозрения результаты об оптимальных объемах выпуска и соответствующих ценах из табл. 1.1 и 1.2 приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.2

Прибыль при различных значениях издержек

№ п/п (i)	Цена p_i	Спрос $D(p_i)$	Прибыль (p_i-5) $D(p_i)$	Прибыль (p_i-20) $D(p_i)$	Прибыль (p_i-30) $D(p_i)$	Прибыль (p_i-35) $D(p_i)$	Прибыль (p_i-40) $D(p_i)$
1	15	20	200	-	-	-	-
2	20	19	285	0	-	-	-
3	25	16	320	80	-	-	-
4	30	14	350*	140	0	-	-
5	32	12	324	144	24	-	-
6	35	11	330	165*	55	0	-
7	40	8	280	160	80*	40	0
8	45	4	160	100	60	40	20
9	50	3	135	90	60	45*	30*

Таблица 1.3

Зависимость оптимального выпуска и цены от издержек

Издержки	5	10	15	20	25	30	35	40
Оптимальный выпуск	14	14	11	11	8	8	3	3
Цена	30	30	35	35	40	40	50	50

Как видно из табл. 1.3, с ростом издержек оптимальный выпуск падает, а цена растет. При этом изменение издержек на 5 единиц может вызывать, а может и не вызывать повышения цены. В этом проявляется влияние микроструктуры функции спроса — небольшое повышение цены может привести к тому, что значительные группы покупателей откажутся от покупок, и прибыль упадет.

Этот эффект напоминает известное в экономической теории разделение налогового бремени между производителем и потребителем. Неверно говорить, что производитель перекладывает издержки, или, конкретно, налоги, на потребителя, повышая цену на их величину, поскольку при этом сокращается спрос (и выпуск), а потому и прибыль производителя.

Дальнейшее ясно — если оптовая цена будет повышаться, то и дающая максимальную прибыль розничная цена также будет повышаться, и всё меньшая доля покупателей сможет приобрести товар. Крайняя точка — оптовая цена, равная 45 руб. Тогда только трое (15%) купят товар за 50 руб., а прибыль продавца составит только 15 руб. Наглядно видно, что повышение издержек производства приводит к ориентации производителя на наиболее богатые слои населения. Но и повышение цен (до оптимального для монополиста-производителя уровня) не приводит к повышению прибыли, напротив, она снижается, и при этом большинство потенциальных потребителей не в состоянии купить товар.

Отметим, что рыночные структуры не в состоянии обеспечить всех желающих — это просто невыгодно. Так, из 20 опрошенных лишь 14, т. е. 70%, могут рассчитывать на покупку, даже при минимальных издержках и ценах. Если общество желает каким-либо благом обеспечить всех граждан, оно должно раздавать это благо бесплатно, как это делается, например, с учебниками в школах, в библиотеках вузов.

Описанный здесь метод оценивания спроса был разработан в Институте высоких статистических технологий и эконометрики (Москва) в 1993 г.

Для изучения предпочтений потребителей часто используют более изощренные методы. Рассмотрим некоторые из них.

Маркетинговые опросы потребителей. Потенциального покупателя интересует не только цена, но и качество товара, красота упаковки (например, для подарочных наборов конфет) и многое другое. Хочешь узнать, чего желает потребитель, — спроси его. Эта простая мысль объясняет популярность маркетинговых опросов.

Бесспорно, что основная цель производственной и торговой деятельности — удовлетворение потребностей людей. Как получить представление об этих потребностях? Очевидно, необходимо опросить потребителей. В американском учебнике по рекламному делу [6] подробно рассматриваются различные варианты опроса потребителей и обработки результатов с помощью методов эконометрики. Расскажем о результатах опроса потребителей растворимого кофе. Исследование проведено Институтом высоких статистических технологий и эконометрики по заказу АОЗТ «Д-2» в апреле 1994 г. в Москве.

Сбор данных. Один из важнейших разделов прикладной статистики — сбор данных. Обсудим постановку задачи в случае опроса потребителей растворимого кофе. Заказчика интересуют предпочтения как продавцов кофе (розничных и мелкооптовых), так и непосредственно потребителей. В результате совместного обсуждения было признано целесообразным использовать для опроса и тех и других одну и ту же анкету из 14 основных и 4 социально-демографических вопросов с добавлением двух вопросов специально для продавцов. Анкета была разработана совместно представителями заказчика и исполнителя и утверждена заказчиком. В табл. 1.4 приведен несколько сокращенный вариант этой анкеты.

Таблица 1.4

Анкета для потребителей растворимого кофе (в сокращении)

Дорогой потребитель растворимого кофе,

Институт высоких статистических технологий и эконометрики просит Вас ответить на несколько простых вопросов о том, какой кофе Вы любите. Ваши ответы позволят составить объективное представление о вкусах российских любителей кофе и будут способствовать повышению качества этого товара на российском рынке.

1. Часто ли Вы пьете растворимый кофе? (здесь и далее подчеркните нужное)	Иногда, каждый день 1 чашку, 2-3 чашки, больше, чем 3 чашки
2. Что Вы цените в кофе?	Вкус, аромат, крепость, цвет, отсутствие вредных для здоровья веществ, что-либо еще (сообщите нам, что именно) ____________________
3. Как часто покупаете кофе?	По мере надобности, по возможности
4. Какую марку растворимого кофе Вы обычно покупаете?	
5. Какой объем упаковки Вы предпочитаете?	В пакетиках, маленькая банка, средняя банка, большая банка, обязательно стеклянная банка, все равно
6. Где покупаете растворимый кофе?	В ларьках, в продуктовых магазинах, в специализированных отделах и магазинах, все равно, где купить, где-либо еще (опишите, пожалуйста) ____________________
7. Были ли случаи, когда купленный Вами кофе оказывался низкого качества?	Да, нет

8. Согласны ли Вы, что за высокое и гарантированное качество продукта можно и заплатить несколько дороже?	Да, нет
9. На сколько дороже Вы готовы платить за экологически безопасный кофе?	
10. Считаете ли Вы нужным, чтобы вредные для здоровья вещества, в частности ионы тяжелых металлов, не проникали из материала упаковки в растворимый кофе?	Да, нет

Мы планируем сравнить потребительские предпочтения различных категорий жителей нашей страны. Поэтому просим ответить еще на несколько вопросов.

11. Пол	Женский, мужской
12. Возраст	До 20, 20–30, 30–50, более 50
13. Род занятий	Учащийся, работающий, пенсионер, инженер, врач, преподаватель, служащий, менеджер, предприниматель, научный работник, рабочий, другое (пожалуйста, расшифруйте) __________________
14. Вся Ваша семья любит растворимый кофе или же Вы — единственный любитель этого восхитительного напитка современного человека?	Вся семья, я один (одна)

Спасибо за Ваше содействие работе по повышению качества продуктов на российском рынке!

Выбор метода опроса. Широко применяются разнообразные процедуры опроса, когда *респонденты* (так социологи и маркетологи называют тех, от кого получают информацию, т. е. опрашиваемых) самостоятельно заполняют анкеты (розданные им или полученные по почте), а также дают личные и телефонные интервью. Из этих процедур нами было выбрано личное интервью по следующим причинам.

Возврат почтовых анкет сравнительно невелик (в данном случае можно было ожидать не более 5–10%), оттянут по времени и искажает структуру совокупности потребителей (наиболее динамичные люди вряд ли найдут время и желание для ответа на подобную анкету).

Самостоятельное заполнение анкеты, как показали специально проведенные эксперименты, не позволяет получить полные ответы на поставленные вопросы. Респондент утомляется или отвлекается, отказывается отвечать на часть вопросов, иногда не понимает их или отвечает не по существу. Некоторые категории респондентов, например продавцы в киосках, отказываются заполнять анкеты, но готовы устно ответить на вопросы.

Телефонный опрос искажает совокупность потребителей, поскольку наиболее активных индивидуумов трудно застать дома (при звонке на стационарный телефон), а также уговорить ответить на вопросы анкеты. Репрезентативность нарушается также и потому, что на один номер телефона может приходиться различное количество продавцов и потребителей растворимого кофе, а некоторые из них не имеют телефонов вообще. Анкета достаточно длинна, и разговор по домашнему и тем более служебному телефону респондента может быть прекращен досрочно по его инициативе. Иногородних продавцов и потребителей растворимого кофе, приехавших в Москву, по телефону опросить практически невозможно. Некоторые из перечисленных сложностей снимаются при опросе по мобильным телефонам, а также путем использования квотной выборки, в которой заранее зафиксировано число мужчин и женщин, лиц того или иного возраста и т. п. Однако заполнение квот будет происходить неравномерно, одни заполнятся раньше других, и в заключительной части опроса на одно полноценное интервью будет приходиться несколько несостоявшихся, когда интервьюер будет вынужден отказаться от беседы, поскольку соответствующие собеседнику квоты уже заполнены.

Метод личного интервью лишен перечисленных недостатков. Соответствующим образом подготовленный интервьюер, получив согласие на интервью, удерживает внимание собеседника на анкете, добивается получения ответов на все ее вопросы, контролируя при этом соответствие ответов реальной позиции респондента. Ясно, что успех интервьюирования зависит от личных качеств и подготовки интервьюера. Однако расходы на получение одной анкеты при использовании этого метода больше, чем для других рассмотренных методов.

Формулировки вопросов. В маркетинговых и социологических опросах используют три типа вопросов — закрытые, открытые и полузакрытые, они же полуоткрытые. При ответе на закрытые вопросы респондент может выбирать лишь из сформулированных составителями анкеты вариантов ответа. В качестве ответа на открытые вопросы респондента просят изложить свое мнение в свободной форме. Полузакрытые (полуоткрытые) вопросы занимают промежуточное положение — кроме перечисленных в анкете вариантов, респондент может добавить свои соображения.

В социологических публикациях, посвященных выборочным исследованиям, продолжается дискуссия по поводу «мягких» и «жестких» форм сбора данных. То есть фактически о том, какого типа вопросы более целесообразно использовать — открытые или закрытые (см., например, статью известного социолога В.А. Ядова [7]).

Преимущество открытых вопросов состоит в том, что респондент может свободно высказать свое мнение так, как сочтет нужным. Их недостаток — в сложности сопоставления мнений различных респондентов. Для такого сопоставления и получения сводных характеристик организаторы опроса вынуждены сами шифровать ответы на открытые вопросы, применяя разработанную ими схему шифровки.

Преимущество закрытых вопросов в том и состоит, что такую шифровку проводит сам респондент. Однако при этом организаторы опроса уподобляются древнегреческому мифическому персонажу Прокрусту. Как известно, Прокруст приглашал путников заночевать у него. Укладывал их на кровать. Если путник был маленького роста, он вытягивал его ноги так, чтобы они доставали до конца кровати. Если же путник оказывался высоким и ноги его торчали — он обрубал их так, чтобы достигнуть стандарта: «рост» путника должен равняться длине кровати. Так и организаторы опроса, применяя закрытые вопросы, заставляют респондента «вытягивать» или «обрубать» свое мнение, чтобы выразить его с помощью приведенных в формулировке вопроса возможных ответов.

Ясно, что для обработки ответов респондентов по группам и сравнения групп между собой нужны формализованные данные, и фактически речь может идти лишь о том, кто — респондент или маркетолог (социолог, психолог и др.) — будет шифровать ответы. В проекте «Потребители растворимого кофе» практически для всех вопросов варианты ответов можно перечислить заранее, т. е. можно широко использовать закрытые вопросы. В отличие от опросов с вопросами типа: «Одобряете ли Вы идущие в России реформы?», в которых естественно просить респондента расшифровать, что он понимает под «реформами» (открытый вопрос). Поэтому в используемой в описываемом проекте анкете использовались в основном закрытые и полузакрытые вопросы. Как показали результаты обработки, этот подход оказался правильным — лишь в небольшом числе анкет оказались вписаны свои варианты ответов. Вместе с тем демонстрировалось уважение к мнению респондента, не выдвигалось требование обязательного выбора из заданного множества ответов — респондент мог добавить свое, но редко пользовался этой возможностью (не более чем в 5% случаев).

В последнем вопросе анкеты респонденту предлагалось стать постоянным участником опросов о качестве товаров народного потребления. Ряд респондентов откликнулись на это предложение, в результате стало возможным развертывание постоянной сети «экспертов по качеству», подобной аналогичным в США и других странах.

1.2. Модели случайных выборок

Статистические методы выборочных исследований основаны на вероятностных моделях, описывающих получение ответов опрашиваемых на вопросы анкет. В случае ответов типа «да» — «нет» наиболее распространенными являются две вероятностные модели — биномиальная и гипергеометрическая.

В биномиальной модели предполагается, что ответы n опрашиваемых можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, где $X_i = 1$, если i-й респондент сказал «да», и $X_i = 0$, если его ответ — «нет». Тогда число X ответов «да» в выборке равно

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n. \tag{1.1}$$

Из формулы (1.1) и Центральной предельной теоремы теории вероятностей вытекает, что при увеличении объема выборки n распределение X сближается с нормальным распределением. Известно, что распределение X имеет вид

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k, а p — доля ответов «да» в генеральной совокупности, т. е. $p = P(X_i = 1)$. Формула (1.2) задает биномиальное распределение, часто используемое при вероятностном моделировании реальных явлений и процессов.

Гипергеометрическое распределение соответствует иной схеме — случайному отбору респондентов в выборку. Пусть среди N лиц, составляющих генеральную совокупность, имеется D лиц, чье мнение — «да». Случайность отбора респондентов в выборку означает, что каждое лицо имеет одинаковые шансы быть отобранным. Мало того, ни одна пара потенциальных респондентов не должна иметь при отборе в выборку преимущества перед любой другой парой. То же самое — для троек, четверок и т. д. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда каждое из C_N^n сочетаний по n лиц из N имеет одинаковые шансы быть отобранным в качестве выборки. Вероятность того, что будет отобрано заранее заданное сочетание, равна, очевидно, $1 / C_N^n$.

Пусть Y — число сказавших «да» лиц в случайной выборке, организованной таким образом. Известно, что тогда $P(Y = k)$ — гипергеометрическое распределение, т. е.

$$P(Y = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Отбор случайной выборки согласно описанным правилам организуют при проведении различных лотерей. Например, отбирают 6 номеров из 49. Тогда генеральная совокупность состоит из 49 единиц (номеров), а выборка — из 6. В этом случае отбирают номера, а не респондентов, но вероятностная модель — та же. Удобно говорить, что генеральная совокупность и выборка состоят из единиц (статистических единиц). В одном случае единицы — это люди (лица, потенциальные респонденты), в другом — номера. В статистических методах управления качеством рассматриваются единицы продукции — детали или изделия.

Замечательный математический факт состоит в том, что биномиальная модель (1.2) и гипергеометрическая модель (1.3) *весьма близки* (с практической точки зрения совпадают), когда объем генеральной совокупности (партии) по крайней мере в 10 раз превышает объем выборки. Другими словами, можно принять, что

$$P(X = k) = P(Y = k), \tag{1.4}$$

если объем выборки мал по сравнению с объемом партии. При этом в качестве p в левой части формулы (1.4) берут D / N.

Близость результатов, получаемых с помощью биномиальной и гипергеометрической моделей, весьма важна не только с практической, но и с методологической точки зрения. Дело в том, что эти модели исходят из принципиально различных методологических предпосылок. В биномиальной модели случайность *присуща каждому респонденту*. Он с какой-то вероятностью отвечает «да», а с какой-то — «нет» (сумма этих вероятностей, очевидно, равна 1). В то же время в гипергеометрической модели ответ респондента полностью определен, а случайность проявляется лишь *в отборе*, вносится социологом или маркетологом при составлении выборки.

В науках о человеке противоречие между рассматриваемыми моделями выборки четко выражено. В среде специалистов, изучающих человека (маркетологов, социологов, психологов, политологов и др.) давно идет дискуссия о роли случайности в поведении человека. А именно, о том, есть ли случайность в поведении отдельно взятого человека или же случайность проявляется лишь в отборе выборки из генеральной совокупности.

Биномиальная модель предполагает, что поведение человека, в частности, выбор им определенного варианта при ответе на вопрос, определяется с участием случайных причин. Например, человек может случайно сказать «да», случайно — «нет». Некоторые философы отрицают случайность, присущую поведению человека согласно биномиальной модели. Они верят в причинность и считают поведение конкретного человека практически полностью детерминированным (его взглядами, психофизиологическими особенностями, прежним опытом, генетикой, социальным положением и др.). Поэтому они принимают гипергеометрическую модель и считают, что случайность отличия ответов в выборке от ответов во всей генеральной совокупности определяется всецело случайностью, вносимой при отборе единиц наблюдения в выборку.

Сформулированные выше математические результаты (соотношение (1.4)) показывают, что позиция в этой давней дискуссии практически не влияет на алгоритмы обработки данных. Следовательно, во многих случаях нет необходимости принимать чью-либо сторону в этом споре, поскольку обе модели дают близкие численные результаты.

Отличия проявляются *лишь* при обсуждении вопроса о том, какую выборку считать *представительной*. В терминах контроля качества продукции — является ли таковой выборка, составленная из 20 изделий, лежащих сверху в первом вскрытом ящике? В биномиальной модели вполне допустим ответ «да», в гипергеометрической — только «нет».

Биномиальная модель легче для теоретического изучения, поэтому будем ее рассматривать в дальнейшем. Однако при реальном опросе лучше формировать выборку, исходя из гипергеометрической модели. Это делают, выбирая респондентов из списка избирателей (для включения в выборку) с помощью компьютерных датчиков псевдослучайных чисел (т. е. применяют метод Монте-Карло, он же метод статистических испытаний). Алгоритмы формирования выборки встраивают во все современные программные продукты, предназначенные для поддержки проведения маркетинговых или социологических опросов, организации статистического контроля качества и др.

Обоснование объема выборки и проведение опроса. Вернемся к анализу результатов опроса потребителей растворимого кофе, о котором шла речь в предыдущем разделе. Как уже говорилось, модели выборочных исследований часто опираются на предположение о том, что реальную выборку можно *описывать как «случайную выборку из* конечной совокупности». Типа той, когда из списков избирателей с помощью датчика псевдослучайных чисел отбирается необходимое число номеров для формирования жюри присяжных заседателей. В рассматриваемом исследовании нельзя обеспечить формирование подобной выборки — не существует реестра потребителей растворимого кофе. Однако в этом и нет необходимости. Поскольку гипергеометрическое распределение хорошо приближается биномиальным, если объем выборки по крайней мере в 10 раз меньше объема всей совокупности (в рассматриваемом случае это так), то правомерно использование биномиальной модели, согласно которой мнение респондента (ответы на все вопросы анкеты) рассматривается как случайный вектор, а все такие вектора независимы между собой.

1.3. Доверительное оценивание доли

Зачем проводятся выборочные исследования? Чтобы получить необходимую информацию о генеральной совокупности. Для этого необходимо перенести выводы с выборки на генеральную совокупность. Как и с какой точностью можно это сделать?

Рассмотрим эту проблему для простейшего случая одного вопроса с двумя возможными ответами — «да» и «нет».

Рассмотрим биномиальную модель выборки. Напомним, что она как раз и применяется для описания ответов на закрытые вопросы, имеющие две подсказки, например «да» и «нет». Конечно, пары подсказок могут быть иными. Например, «согласен» и «не согласен». Или при опросе потребителей кондитерских товаров первая подсказка может иметь такой вид: «Больше люблю «Марс», чем «Сникерс». А вторая тогда такова: «Больше люблю «Сникерс», чем «Марс».

Пусть объем выборки равен n. Тогда ответы опрашиваемых можно представить как $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_i = 1$, если i-й респондент выбрал первую подсказку, и $X_i = 0$, если i-й респондент выбрал вторую подсказку, $i = 1, 2, \ldots, n$. В вероятностной модели предполагается, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены. Поскольку эти случайные величины принимают два значения, то ситуация описывается одним параметром p — долей выбирающих первую подсказку во всей генеральной совокупности. Тогда

$$P(X_i = 1) = p,\ P(X_i = 0) = 1 - p,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Оценкой вероятности p является частота $p^* = m/n$. При этом математическое ожидание $M(p^*)$ и дисперсия $D(p^*)$ имеют вид

$$M(p^*) = p,\ D(p^*) = p(1-p)/n.$$

По закону больших чисел (ЗБЧ) теории вероятностей (в данном случае — по теореме Бернулли) частота p^* сходится (т. е. безгранично приближается) к вероятности p при росте объема выборки. Это означает, что оценивание проводится тем точнее, чем больше объем выборки. *Точность оценивания можно указать.* Займемся этим.

По теореме Муавра — Лапласа теории вероятностей

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где $\pi = 3{,}1415925\ldots$ — отношение длины окружности к ее диаметру, а $e = 2{,}718281828\ldots$ — основание натуральных логарифмов. График плотности стандартного нормального распределения, т. е. функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

был очень точно изображен на германской денежной банкноте в 10 немецких марок (до введения евро). Банкнота посвящалась великому немецкому математику Карлу Гауссу (1777–1855), среди основных работ которого есть относящиеся к нормальному распределению. Эта подробность демонстрирует, что в Германии (и тем более в англосаксонских странах) гораздо шире распространено знакомство с основами теории вероятностей и математической статистики, чем в нашей стране.

В настоящее время нет необходимости вычислять функцию стандартного нормального распределения и ее плотность по приведенным выше формулам, поскольку давно составлены подробные таблицы (см., например, [1]), а распространенные программные продукты содержат алгоритмы нахождения этих функций.

С помощью теоремы Муавра — Лапласа могут быть построены доверительные интервалы для неизвестной статистику вероятности. Сначала заметим, что из этой теоремы непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{-x \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x) - \Phi(-x).$$

Поскольку функция стандартного нормального распределения симметрична относительно 0, т. е. $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, то справедливо полезное равенство $\Phi(x)-\Phi(-x)=2\Phi(x)-1$.

Зададим характеристику надежности переноса выводов с выборки на генеральную совокупность — доверительную вероятность γ, близкую к 1. Пусть функция $U(\gamma)$ удовлетворяет условию

$$\Phi(U(\gamma))-\Phi(-U(\gamma))=\gamma,$$

т. е.

$$U(\gamma)=\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$

Из приведенного выше предельного соотношения следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{p^*-U(\gamma)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\le p\le p^*+U(\gamma)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right\}=\gamma.$$

К сожалению, это соотношение нельзя непосредственно использовать для доверительного оценивания, поскольку верхняя и нижняя границы зависят от неизвестной вероятности. Однако с помощью метода наследования сходимости (см. [3, п. 2.4] или [5, п. 4.3]) можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}P\{p^*-U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}\le p\le p^*+U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}\}=\gamma.$$

Следовательно, нижняя доверительная граница имеет вид

$$p_{нижн}=p^*-U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}},$$

в то время как верхняя доверительная граница такова:

$$p_{верх}=p^*+U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}.$$

Наиболее распространенным (в прикладных исследованиях) значением доверительной вероятности является $\gamma=0,95$. Иногда употребляют термин «95%-ный доверительный интервал». Тогда $U(\gamma)$ = 1,96.

Пример 1. Пусть $n = 500$, $m = 200$. Тогда $p^* = 0{,}40$. Найдем доверительный интервал для $\gamma = 0{,}95$:

$$p_{нижн} = 0{,}40 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{500}} = 0{,}40 - 0{,}043 = 0{,}357,$$

$$p_{верх} = 0{,}40 + 0{,}043 = 0{,}443.$$

Таким образом, хотя в достаточно большой выборке 40% респондентов говорят «да», можно утверждать лишь, что во всей генеральной совокупности таких от 35,7% до 44,3% — крайние значения отличаются на 8,6%.

Замечание. С достаточной для практики точностью можно заменить 1,96 на 2.

Величина

$$U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}$$

называется ошибкой выборки. Обычно, как в примере 1, используют значение доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и множитель $U(\gamma) = 1{,}96$.

Удобные для использования в практической работе специалиста по выборочным исследованиям, маркетолога и социолога таблицы точности оценивания разработаны во ВЦИОМ (Всероссийском центре по изучению общественного мнения). Приведем здесь несколько модифицированный вариант одной из них.

Таблица 1.5

Допустимая величина ошибки выборки (в %)

Доля p^*	**Объем группы n**					
	1000	**750**	**600**	**400**	**200**	**100**
Около 10% или 90%	2	3	3	4	5	7
Около 20% или 80%	3	4	4	5	7	9
Около 30% или 70%	4	4	4	6	9	10
Около 40% или 60%	4	4	5	6	8	11
Около 50%	4	4	5	6	8	11

В условиях рассмотренного выше примера надо взять вторую снизу строку. Объема выборки 500 нет в таблице, но есть объемы

400 и 600, которым соответствуют ошибки в 6% и 5% соответственно. Следовательно, в условиях примера целесообразно оценить ошибку как ((5 + 6) / 2)% = 5,5%. Эта величина несколько больше, чем рассчитанная выше (4,3%). С чем связано это различие? Дело в том, что таблица ВЦИОМ связана не с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$, а с доверительной вероятностью $\gamma = 0,99$, которой соответствует множитель $U(\gamma) = 2,58$. Расчет ошибки по приведенным выше формулам дает 5,65%, что практически совпадает со значением, найденным по табл. 1.5.

Необходимый объем выборки. В биномиальной модели выборки оценивание характеристик происходит тем точнее, чем объем выборки больше. Часто спрашивают: «Какой объем выборки нужен?» Разработан ряд методов определения необходимого объема выборки. Они основаны на разных подходах. Либо на задании необходимой точности оценивания параметров. Либо на явной формулировке альтернативных гипотез, между которыми необходимо сделать выбор. Либо на учете погрешностей измерений (методы статистики интервальных данных). Ни один из этих подходов нельзя применить в рассматриваемом случае.

Минимальный из обычно используемых объемов выборки n в маркетинговых или социологических исследованиях — 100, максимальный — до 5000 (обычно в исследованиях, охватывающих ряд регионов страны, т. е. фактически разбивающихся на ряд отдельных исследований — как в ряде исследований ВЦИОМ). По данным Института социологии Российской академии наук [2], среднее число анкет в социологическом исследовании не превышает 700. Поскольку стоимость исследования растет, по крайней мере, как линейная функция объема выборки, а точность повышается как квадратный корень из этого объема, то верхняя граница объема выборки определяется обычно из экономических соображений. Объемы пилотных исследований (т. е. проводящихся впервые, предварительно или как первые в сериях подобных) обычно ниже, чем объемы исследований по обкатанной программе.

Нижняя граница определяется тем, что в минимальной по численности анализируемой подгруппе должно быть несколько десятков человек (не менее 30), поскольку по ответам попавших в эту подгруппу необходимо сделать обоснованные заключения, например, о предпочтениях соответствующей подгруппы в совокупности всех потребителей растворимого кофе. Учитывая деление опрашиваемых на продавцов и покупателей, на мужчин и женщин, на четыре градации по возрасту и восемь — по роду занятий, наличие 5–6 подсказок во многих вопросах, приходим к выводу о том, что в рассматриваемом проекте объем выборки должен быть не менее 400–500. Вместе с тем существенное превышение этого объема было признано нецелесообразным, поскольку исследование являлось пилотным.

Поэтому в проекте «Потребители растворимого кофе» объем выборки был выбран равным 500. Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что в соответствии с целями исследования выборку следует считать репрезентативной.

1.4. Два прикладных выборочных исследования

Продолжим обсуждение выборочного исследования потребителей растворимого кофе.

Организация опроса. Интервьюерами работали молодые люди — студенты первого курса экономико-математического факультета Московского государственного института электроники и математики (технического университета) и лицея № 1140, проходившие обучение по экономике, — всего 40 человек, имеющих специальную подготовку по изучению рынка и проведению маркетинговых опросов потребителей и продавцов (в объеме 8 часов). Опрос продавцов проводился на рынках г. Москвы, действующих в Лужниках, у Киевского вокзала и в других местах. Опрос покупателей проводился на рынках, в магазинах, на улицах около киосков и ларьков, а также в домашней и служебной обстановке.

Большое внимание уделялось качеству заполнения анкет. Интервьюеры были разбиты на шесть бригад, бригадиры персонально отвечали за качество заполнения анкет. Второй уровень контроля осуществляла специально созданная «группа организации опроса», третий происходил при вводе информации в базу данных. Каждая анкета заверена подписями интервьюера и бригадира, на ней указано место и время интервьюирования. Поэтому необходимо признать высокую достоверность собранных анкет.

Обработка данных. В соответствии с целью исследования основной метод первичной обработки данных — построение частотных таблиц для ответов на отдельные вопросы. Кроме того, проводилось сравнение различных групп потребителей и продавцов, выделенных по социально-демографическим данным, с помощью критериев проверки однородности выборок (см. ниже). При более углубленном анализе применялись различные методы статистики объектов нечисловой природы (более 90% маркетинговых и социологических данных имеют нечисловую природу [4]). Использовались средства графического представления данных.

Итоги опроса. Итак, по заданию одной из торговых фирм были изучены предпочтения покупателей и мелкооптовых продавцов растворимого кофе. Совместно с представителями заказчика был составлен опросный лист (анкета типа социологической) из 16 основных вопросов и 4 дополнительных, посвященных социально-демографической информации. Опрос проводился в форме интервью с 500 покупателями и продавцами кофе. Места опроса — рынки, лотки, киоски, продуктовые и специализированные магазины. Другими словами, были охвачены все виды мест продаж кофе. Интервью проводили более 40 специально подготовленных (примерно по 8-часовой программе) студентов, разбитых на 7 бригад. После тщательной проверки бригадирами и группой обработки информация была введена в специально созданную базу данных. Затем проводилась разнообразная статистическая обработка, строились таблицы и диаграммы, проверялись статистические гипотезы и т. д. Заключительный этап — осмысление и интерпретация данных, подготовка итогового отчета и предложений для заказчиков.

Технология организации и проведения маркетинговых опросов лишь незначительно отличается от технологии социологических опросов, многократно описанной в литературе. Так, мы предпочли использовать полуоткрытые вопросы, в которых для опрашиваемого дан перечень подсказок, а при желании он может высказать свое мнение в свободной форме. Не уложившихся в подсказки оказалось около 5%, их мнения были внесены в базу данных и анализировались дополнительно. Для повышения надежности опроса о наиболее важных с точки зрения маркетинга моментах спрашивалось в нескольких вопросах. Были вопросы-ловушки, с помощью которых контролировалась «осмысленность» заполнения анкеты. Например, в вопросе: «Что Вы цените в кофе: вкус, аромат, крепость, наличие пенки...» ловушкой является включение «крепости» — ясно, что крепость зависит не от кофе самого по себе, а от его количества в чашке. В ловушку никто из

500 не попался — никто не отметил «крепость». Этот факт свидетельствует о надежности выводов проведенного опроса. Мы считали нецелесообразным задавать вопрос об уровне доходов (поскольку в большинстве случаев отвечают «средний», что невозможно связать с определенной величиной). Вместо такого вопроса мы спрашивали: «Как часто Вы покупаете кофе: по мере надобности или по возможности?». Поскольку кофе не является дефицитным товаром, первый ответ свидетельствовал о наличии достаточных денежных средств, второй — об их ограниченности (потребитель не всегда имел возможность позволить себе купить банку растворимого кофе).

Стоимость подобных исследований — 5–10 долларов США на одного обследованного. При этом трудоемкость (и стоимость) начальной стадии — подготовки анкеты и интервьюеров, пробный опрос и др. — 30% от стоимости исследования. Стоимость непосредственно опроса — тоже 30%, ввод информации в компьютер и проведение расчетов, построение таблиц и графиков — 20%, интерпретация результатов, подготовка итогового отчета и предложений для заказчиков — 20%. Таким образом, стоимость собственно опроса в два с лишним раза меньше стоимости остальных стадий исследования. И в выполнении работы участвуют различные специалисты. На первой стадии в основном нужны высококвалифицированные аналитики. На второй — многочисленные интервьюеры, в роли которых могут выступать студенты и школьники, прошедшие конкретный курс обучения в 8–10 часов. На третьей — требуется работа с компьютером (надо уметь строить и обсчитывать электронные таблицы или базы данных, использовать статистические пакеты, составлять и печатать таблицы и диаграммы и т. п.). На четвертой — опять в основном нужны высококвалифицированные аналитики.

Приведем некоторые из полученных результатов.

1. В отличие от западных потребителей, отечественные не отдавали предпочтения стеклянным банкам по сравнению с жестяными. Поскольку жестяные банки дешевле стеклянных, то можно было порекомендовать (в 1994 г., когда проходил опрос) с целью снижения расходов закупку кофе в жестяных банках.

2. Отечественные потребители готовы платить на 10–20% больше за экологически безопасный кофе более высокого качества, имеющий сертификат Минздрава и символ экологической безопасности на упаковке.

3. Средний объем потребления растворимого кофе одной семьей — 850 г в месяц.

4. Потребители растворимого кофе могут быть разделены на классы (в другой терминологии — кластеры). Есть «продвинутые» потребители, обращающие большое внимание на качество и экологическую безопасность, марку и страну производства, терпимо относящиеся к изменению цены. Эти «тонкие ценители» — в основном женщины от 30 до 50 лет, служащие, менеджеры, научные работники, преподаватели, врачи (т. е. лица с высшим образованием), пьющие кофе как дома, так и на работе, причем «кофейный ритуал» зачастую входит в процедуру деловых переговоров или совещаний. Противоположный по потребительскому поведению класс состоит из мужчин двух крайних возрастных групп — школьников и пенсионеров. Для них важна только цена, что очевидным образом объясняется недостатком денег.

Результаты были использованы заказчиком в рекламной кампании. В частности, обращалось внимание на сертификат Минздрава и на экологическую безопасность упаковки.

Оценивание функции спроса и моделирование рынка. Выпускник программы «Топ-менеджер» Академии народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации (ныне РАНХиГС) А.А. Пивень в 2003 г. оценил функцию спроса на продукцию своего предприятия. Расчет и установление оптимальной цены на изделие с точки зрения максимизации прибыли был произведен по описанному выше (в начале настоящей главы) методу. В табл. 1.6 приведена функция ожидаемого спроса в зависимости от цены. Как подсчитал А.А. Пивень, уровень издержек на производство 1 изделия составляет 42 824,7 руб. (1350 у. е.). Для удобства все расчеты будем производить в условных единицах.

Таблица 1.6

Функция ожидаемого спроса в зависимости от цены

№ п/п	Цена, у. е.	Объем продаж в год, шт.	Издержки на объем производства	Выручка, у. е.	Прибыль, у. е.
1	1400	1600	2 160 000	2 240 000	80 000
2	1500	1500	2 025 000	2 250 000	225 000
3	1600	1200	1 620 000	1 920 000	300 000
4	1700	1000	1 350 000	1 700 000	350 000

Окончание табл. 1.6

№ п/п	Цена, у. е.	Объем продаж в год, шт.	Издержки на объем производства	Выручка, у. е.	Прибыль, у. е.
5	1800	720	972 000	1 246 000	324 000
6	1900	500	675 000	950 000	275 000
7	2000	320	432 000	640 000	208 000
8	2100	170	229 500	357 000	127 500
9	2200	110	148 500	242 000	93 500

Как видно из приведенных расчетов, оптимальная цена на подъемник должна находиться в диапазоне 1600–1700 у. е.

На основе многомерной регрессионной зависимости методом наименьших квадратов (см. ниже главу 2) была построена математическая модель рынка. Она довольно точно отражает реальное положение дел. При исходной цене 1650 у. е. продажи ориентировочно должны составить 1010 шт. На рис. 1.1 приведена кривая спроса.

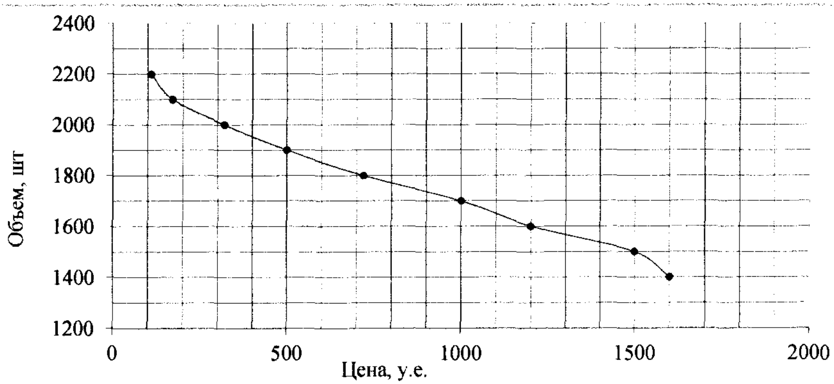

Рис. 1.1. Кривая спроса на изделие

Эти расчеты были сделаны при допущении, что издержки не меняются в течение длительного промежутка времени. Однако в реальных условиях постоянный рост стоимости энергоресурсов и непрекращающаяся инфляция издержек (рост затрат на сырье, материалы, комплектующие изделия, рабочую силу) приводит к увеличению издержек. Поэтому А.А. Пивень проанализировал оптимальный объем выпуска при их различных значениях. Данные его расчетов приведены в табл. 1.7. Поскольку инфляция в нашей стране (см. ниже главу 3) заметно искажает стоимостные характеристики, используем для их описания условные единицы (у. е.).

Таблица 1.7

Прибыль в зависимости от цены и издержек

№ п/п	Цена, у. е.	Объем продаж, шт.	Прибыль (тыс. у. е.) при издержках на единицу продукции, у. е.							
			1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700
1	1400	1600	80	0	–	–	–	–	–	–
2	1500	1500	225	150	75	0	–	–	–	–
3	1600	1200	300	240	180	120	60	0	–	–
4	1700	1000	350	300	250	200	150	100	50	0
5	1800	720	324	288	252	216	180	144	108	72
6	1900	500	275	250	225	200	175	150	125	100
7	2000	320	208	192	176	160	144	128	112	96
8	2100	170	127,5	119	110,5	102	93,5	85	76,5	68
9	2200	110	93,5	88	82,5	77	71,5	66	60,5	55

Для удобства рассмотренные результаты оптимальных объемов производства при соответствующих ценах приведены в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Оптимальные выпуск и цена в зависимости от издержек

Показатель	Издержки							
	1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700
Оптимальный выпуск	1000	1000	720	720	720	500	500	500
Цена	1700	1700	1800	1800	1800	1900	1900	1900

Как видно из табл. 1.8, увеличение издержек ведет к снижению оптимального выпуска при росте цены. Хотя изменение издержек на 50 у. е. может не сразу привести к изменению цены. Необоснованная цена может «переключить» большую группу потребителей на другое, аналогичное изделие, имеющее сходный по уровню набор технических характеристик, но более низкую рыночную цену.

По данным функции спроса (см. табл. 1.7) проведем расчет эластичности спроса по цене. Под ценовой эластичностью спроса понимается степень реагирования рыиочного спроса на изменение цен. В классическом понимании эластичность спроса по цене показывает, насколько изменится объем спроса при изменении цены на 1%. Спрос квалифицируется как эластичный, если понижение цены вызывает такой рост оборота, при котором увеличение объема продаж с лихвой компенсирует более низкие цены. Если же понижение цены, приводя к некоторому увеличению объема продаж тем не менее не ведет к увеличению оборота или даже уменьшает его, то такой спрос называется неэластичным. Коэффициент ценовой эластичности спроса определяется по формуле

$$К_{ЦЭС} = \frac{(Q_1 - Q_2) / (Q_1 + Q_2)}{(P_1 - P_2) / (P_1 + P_2)},$$

где Q_1, Q_2 — значения объема продаж; P_1, P_2 — значения цены изделия.

В рассматриваемом случае $К_{ЦЭС}$ будет различен на протяжении всей функции спроса (рис. 1.1). Однако, произведем расчет на той части кривой (в том диапазоне), где присутствует расчетная цена подъемника, а именно: $Q_1 = 1200$ шт.; $Q_2 = 720$ шт.; $P_1 = 1600$ у. е.; $P_2 = 1800$ у. е. В этом случае

$$К_{ЦЭС} = \frac{(1200 - 720)/(1200 + 720)}{(1600 - 1800)/(1600 + 1800)} = -4{,}25.$$

Коэффициент $К_{ЦЭС}$ имеет отрицательный знак и абсолютную величину, значительно превышающую 1. Это говорит о сильной обратной зависимости объемов продаж от цены. Спрос на подъемник эластичен. Валовая выручка увеличивается при снижении цены и уменьшается при ее повышении. Компании необходимо быть готовой к тому, что покупатели очень чутко реагируют на всякое повышение цены на изделие значительным снижением объемов закупок. Как отмечает А.А. Пивень, снижение эластичности спроса на изделие возможно только при общем росте благосостояния населения страны и, в частности, значительного роста доходной части бюджетов промышленных предприятий.

1.5. Проверка однородности двух биномиальных выборок

Проверка однородности — одна из базовых проблем, решаемых статистическими методами. Она часто обсуждается в литературе, а методы проверки однородности применяются при решении многих практических задач. Например, как сравнить две группы — мужчин и женщин, молодых и пожилых и т. п.? В маркетинге это важно для сегментации рынка. Если две группы не отличаются по ответам, значит, их можно объединить в один сегмент и проводить по отношению к ним одну и ту же маркетинговую политику, в частности осуществлять одни и те же рекламные воздействия. Если же две группы различаются, то и относиться к ним надо по-разному. Это — представители двух разных сегментов рынка, требующих разного подхода при борьбе за их завоевание.

Обсуждаемая далее постановка задачи в статистических терминах такова. Рассматривается вопрос с двумя возможными ответами, например «да» и «нет». Принимаем биномиальные модели выборок. В первой группе из n_1 опрошенных m_1 человек сказали «да», а во второй группе из n_2 опрошенных m_2 сказали «да». В вероятностной модели предполагается, что m_1 и m_2 — биномиальные случайные величины $B(n_1, p_1)$ и $B(n_2, p_2)$ соответственно. Запись $B(n, p)$ означает, что случайная величина m имеет биномиальное распределение с параметрами n — объем выборки и p — вероятность определенного ответа (скажем, ответа «да»). Такая случайная величина может быть представлена в виде суммы $m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, где случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены, принимают два значения — 1 и 0, причем $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Однородность двух групп означает, что соответствующие им вероятности равны, неоднородность — что эти вероятности отличаются. В терминах прикладной математической статистики задача ставится так: необходимо проверить гипотезу однородности

$$H_0 : p_1 = p_2$$

при альтернативной гипотезе о наличии эффекта

$$H_1 : p_1 \neq p_2.$$

(Иногда представляют интерес односторонние альтернативные гипотезы $H_1' : p_1 > p_2$ и $H_1'' : p_1 < p_2$.)

Оценкой вероятности p_1 является частота $p_1^* = m_1 / n_1$, а оценкой вероятности p_2 является частота $p_2^* = m_2 / n_2$. Даже при совпадении вероятностей p_1 и p_2 частоты, как правило, различаются. Как говорят, «по чисто случайным причинам». Рассмотрим случайную величину $p_1^* - p_2^*$. Тогда

$$M(p_1^* - p_2^*) = p_1 - p_2,\ D(p_1^* - p_2^*) = p_1(1 - p_1) / n_1 + p_2(1 - p_2) / n_2.$$

Из теоремы Муавра — Лапласа и теоремы о наследовании сходимости (см. [3, п. 2.4] или [5, п. 4.3]) следует, что

$$\lim_{n_1\to\infty, n_2\to\infty} P\left\{\frac{p_1^* - p_2^* - M(p_1^* - p_2^*)}{\sqrt{D(p_1^* - p_2^*)}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Для практического применения этого соотношения следует заменить неизвестную статистику дисперсию разности частот на оценку этой дисперсии:

$$D^*(p_1^* - p_2^*) = p^*_1(1 - p^*_1) / n_1 + p^*_2(1 - p^*_2) / n_2.$$

(Могут использоваться и другие оценки рассматриваемой дисперсии, например, при справедливости нулевой гипотезы — по объединенной выборке, но это приведет к критериям проверки статистической гипотезы, отличным от рассмотренного здесь.) С помощью указанной выше математической техники можно показать, что при такой замене предельное распределение не меняется:

$$\lim_{n_1\to\infty, n_2\to\infty} P\left\{\frac{p_1^* - p_2^* - M(p_1^* - p_2^*)}{\sqrt{D^*(p_1^* - p_2^*)}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

При справедливости гипотезы однородности (т. е. при отсутствии эффекта) $M(p_1^* - p_2^*) = 0$. Поэтому правило принятия решения при проверке однородности двух выборок выглядит так:

1. Вычислить статистику

$$Q = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{\frac{p_1^*(1 - p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1 - p_2^*)}{n_2}}}.$$

2. Сравнить значение модуля статистика $|Q|$ с граничным значением K. Если $|Q| \le K$, то принять гипотезу однородности H_0. Если же $|Q| > K$, то заявить об отсутствии однородности и принять альтернативную гипотезу H_1.

Граничное значение K определяется выбором уровня значимости статистического критерия проверки однородности. Из приведенных выше предельных соотношений следует, что при справедливости гипотезы однородности H_0 для уровня значимости $\alpha = P(|Q| > K)$ имеем (при $n_1 \to \infty, n_2 \to \infty$)

$$\alpha \to 1 - \Phi(K) + \Phi(-K) = 2 - 2\Phi(K).$$

Следовательно, граничное значение в зависимости от уровня значимости целесообразно выбирать из условия

$$K = K(\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Здесь $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции стандартного нормального распределения. В социально-экономических исследованиях наиболее распространен 5% уровень значимости, т. е. $\alpha = 0{,}05$. Для него $K = 1{,}96$.

Пример 2. Пусть в первой группе из 500 опрошенных мужчин ответили «да» 200, а во второй группе из 700 опрошенных женщин сказали «да» 350. Есть ли разница по доле отвечающих «да» между генеральными совокупностями, представленными этими двумя группами?

Для установления взаимопонимания с маркетологом уберем из формулировки примера относящийся к теории статистики термин «генеральная совокупность». Получим следующую постановку.

Пусть из 500 опрошенных мужчин ответили «да, я люблю пепси-колу» 200, а из 700 опрошенных женщин 350 сказали «да, я люблю пепси-колу». Есть ли разница между мужчинами и женщинами по доле отвечающих «да» на вопрос о любви к пепси-коле? (Таким образом, одна генеральная совокупность — это мужчины, а вторая — женщины.)

В рассматриваемом примере нужные для расчетов величины таковы: $n_1 = 500, p_1^* = 200/500 = 0{,}4; n_2 = 700, p_2^* = 350/700 = 0{,}5$. Вычислим статистику

$$Q = \frac{0{,}4 - 0{,}5}{\sqrt{\dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{500} + \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{700}}} = \frac{-0{,}1}{\sqrt{\dfrac{0{,}24}{500} + \dfrac{0{,}25}{700}}} =$$

$$= \frac{-0{,}1}{\sqrt{0{,}00048 + 0{,}0003571}} = \frac{-0{,}1}{\sqrt{0{,}0008371}} = \frac{-0{,}1}{0{,}029} = -3{,}45.$$

Поскольку $|Q| = 3{,}45 > 1{,}96$, то необходимо отклонить нулевую гипотезу и принять альтернативную. Таким образом, мужчины и женщины отличаются по рассматриваемому признаку — любви к пепси-коле.

Необходимо отметить, что результат проверки гипотезы однородности зависит не только от частот, но и от объемов выборок. Предположим, что частоты (доли) зафиксированы, а объемы выборок растут. Тогда числитель статистики Q не меняется, а знаменатель уменьшается, значит, вся дробь возрастает. Поскольку знаменатель стремится к 0, то дробь возрастает до бесконечности и рано или поздно превзойдет любую границу. Есть только одно исключение — когда в числителе стоит 0. Следовательно, при строгом подходе к формулировкам вывод статистика должен выглядеть так: «различие обнаружено» или «различие не обнаружено». Во втором случае различие, возможно, было бы обнаружено при увеличении объемов выборок.

Как и для доверительного оценивания вероятности, во ВЦИОМ разработаны две полезные таблицы, позволяющие оценить вызванные чисто случайными причинами допустимые расхождения между частотами в группах. Эти таблицы рассчитаны при выполнении нулевой гипотезы однородности и соответствуют ситуациям, когда частоты близки к 50% (табл. 1.9) или к 20% (табл. 1.10). Если наблюдаемые частоты — от 30% до 70%, то рекомендуется пользоваться первой из этих таблиц, если от 10% до 30% или от 70% до 90% — то второй. Если наблюдаемые частоты меньше 10% или больше 90%, то теорема Муавра — Лапласа и основанные на ней асимптотические формулы дают не очень хорошие приближения, целесообразно применять иные, более продвинутые математические средства, в частности приближения с помощью распределения Пуассона.

В условиях разобранного выше примера табл. 1.9 дает допустимое расхождение 7%. Действительно, объем первой группы 500 отсутствует в таблице, но строки, соответствующие объемам 400 и 600, совпадают для первых двух столбцов слева. Эти столбцы соответствуют объемам второй группы 750 и 600, между которыми расположен объем 700, данный в примере. Он ближе к 750, поэтому берем величину расхождения, стоящую на пересечении первого столбца и второй (и третьей) строк, т. е. 7%. Поскольку реальное расхождение (10%) больше, чем 7%, то делаем вывод о наличии значимого различия между группами. Естественно, этот вывод совпадает с полученным ранее расчетным путем.

Таблица 1.9

Допустимые расхождения (в %) между частотами в двух группах, когда наблюдаются частоты от 30% до 70%

Объем группы	750	600	400	200	100
750	6	7	7	10	12
600	7	8	8	11	13
400	7	8	10	11	14
200	10	11	11	13	16
100	12	13	14	16	18

Таблица 1.10

Допустимые расхождения (в %) между частотами в двух группах, когда наблюдаются частоты от 10% до 30% или от 70% до 90%

Объем группы	750	600	400	200	100
750	5	5	6	8	10
600	5	6	7	8	10
400	6	7	8	9	11
200	8	8	9	10	12
100	10	10	11	12	14

Как и в случае табл. 1.5, значения в табл. 1.9 и 1.10 несколько больше, чем рассчитанные по приведенным выше формулам. Дело в том, что таблицы ВЦИОМ связаны не с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, а с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$, которому соответствует граничное значение 2,58.

Допустимое расхождение $\Delta = \Delta(\alpha)$ между частотами нетрудно получить расчетным путем. Для этого достаточно воспользоваться формулой для статистики Q и определить, при каком максимальном расхождении частот все еще делается вывод о том, что верна гипотеза однородности. Следовательно, допустимое расхождение $\Delta = \Delta(\alpha)$ находится из уравнения

$$K(\alpha) = \frac{\Delta(\alpha)}{\sqrt{\dfrac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \dfrac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}}.$$

Таким образом,

$$\Delta(\alpha)=K(\alpha)\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1}+\frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}.$$

Для данных примера 2 $\Delta=\Delta(\alpha)=1{,}96\times 0{,}029=0{,}057$, или 5,7%, для уровня значимости 0,05.

Для других уровней значимости надо использовать другие коэффициенты $K(\alpha)$. Так, $K(0{,}01)$ = 2,58 для уровня значимости 1% и $K(0{,}10)$ = 1,64 для уровня значимости 10%. Для данных примера $\Delta=\Delta(\alpha)=2{,}58\times 0{,}029=0{,}7482\approx 0{,}075$, или 7,5%, для уровня значимости 0,01. Если округлить до ближайшего целого числа процентов, то получим 7%, как при использовании табл. 1.9 выше.

Анализ табл. 1.9 и 1.10 показывает, что для обнаружения эффекта (констатации различия генеральных совокупностей) частоты должны отличаться не менее чем на 6%. А при некоторых объемах выборок — более чем на 10%, например, при объемах выборок 100 и 100 — на 19%. Если же частоты отличаются на 5% или менее, можно сразу сказать, что статистический анализ приведет к выводу о том, что различие не обнаружено (для выборок объемом не более 750).

В связи со сказанным возникает вопрос: каково типовое отличие частот в двух выборках из одной и той же совокупности? Разность частот в этом случае имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=\frac{p(1-p)(n_1+n_2)}{n_1 n_2}.$$

Величина $p(1-p)$ достигает максимума при $p = 1/2$, и этот максимум равен 1/4. Если $p = 1/2$, а объемы двух выборок совпадают и равны 500, то дисперсия разности частот равна

$$\sigma^2=\frac{0{,}25\times 1000}{500\times 500}=\frac{250}{250\times 1000}=\frac{1}{1000}.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение σ равно 0,032, или 3,2%. Поскольку для стандартной нормальной случайной величины в 50% случаев ее значение не превосходит по модулю 0,67 (а в 50% случаев — больше 0,67), то типовой разброс равен произведению $0{,}67\sigma$, а в рассматриваемом случае — 2,1%.

Приведенные соображения дают возможность построить метод контроля правильности (корректности) проведения повторных опросов. Если частоты излишне устойчивы, значения при повторных опросах слишком близки — это подозрительно! Возможно, нарушены правила проведения опросов, выборки не являются случайными, ответы фальсифицированы и т. д.

Литература

1. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

2. Опыт применения ЭВМ в социологических исследованиях. — М.: Институт социологических исследований АН СССР, Советская социологическая ассоциация, 1977. — 158 с.

3. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

4. *Орлов А.И.* Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях: [Сб. ст.]. — М.: Наука, 1985. — С. 58–92.

5. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

6. *Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К.* Реклама: теория и практика: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1989. — 630 с.

7. *Ядов В.А.* Стратегии и методы качественного анализа данных // Журнал «Социология: методология, методы, математические модели». — 1991. — № 1. — С. 14–31.

Контрольные вопросы и задачи

1. Почему выборочные исследования необходимы для решения многих практических задач?

2. Из партии продукции объемом $N = 100$ изделий, содержащей $D = 10$ дефектных изделий, извлекают выборку объемом $n = 5$. Для биномиальной и гипергеометрической моделей выборки рассчитайте распределения числа дефектных изделий в выборке, постройте и сравните функции распределения.

3. Какова роль теоремы Муавра — Лапласа в теории выборочных исследований?

В задачах 4–8 выберите наиболее подходящий вариант ответа.

4. При какой цене максимальна прибыль в условиях раздела 1.1 настоящей главы, если издержки (оптовая цена товара) равны 12?

А) 30; Б) 32; В) 35.

5. При исследовании предпочтений потребителей открытые вопросы:

А) труднее для опрашиваемых, но легче для обработки;

Б) легче для опрашиваемых, но труднее для обработки.

6. Пусть из 657 опрошенных 289 сказали «да». Доверительный интервал для доли отвечающих «да» в генеральной совокупности, соответствующий доверительной вероятности 0,95, таков:

А) [0,245; 0,398]; Б) [0,435; 0,445]; В) [0,405; 0,556];
Г) [0,402; 0,478]; Д) [0,247; 0,633].

7. Из 513 юношей 193 любят «Сникерс», а из 748 девушек — 327. Значение статистического критерия Q для проверки гипотезы о равенстве вероятностей равно:

А) 3,38; Б) -2,176; В) 0,25; Г) 12,56; Д) -0,173.

8. В условиях задачи 7 гипотеза об одинаковой привлекательности «Сникерса» для юношей и девушек (на уровне значимости 0,05):

А) принимается; Б) отклоняется.

9. Как понятие допустимого расхождения между частотами можно использовать при планировании выборочных исследований?

10. Рассчитайте коэффициент ценовой эластичности спроса по данным табл. 1.1 при цене $p = 35$ и при цене $p = 40$.

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Проведите выборочное исследование с целью построения оценки функции ожидаемого спроса на выбранный Вами товар (услугу).

2. Найдите адекватное приближение функции спроса в табл. 1.1 с помощью метода наименьших квадратов.

3. Постройте экономико-математическую модель оптимизации цены при заданных функциях спроса (в зависимости о цены) и издержек (в зависимости от выпуска).

4. Сопоставьте теорию квотной выборки с теорией простой случайной выборки.

5. Рассмотрите статистическую теорию доверительного оценивания и проверки гипотез о равенстве вероятностей в случае нескольких (более чем двух) возможных ответов (соответственно, с использованием мультиномиального распределения вместо биномиального).

6. В каких случаях может быть использована теория малых выборок (теорема Пуассона) для доверительного оценивания вероятности определенного ответа?

Глава 2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Одним из наиболее важным этапов эконометрического моделирования является восстановление (выявление) зависимости между переменными на основе статистических данных, которая затем используется при организационно-экономическом моделировании, в частности для прогнозирования, оптимизации, принятия решений.

2.1. Восстановление линейной зависимости между двумя переменными

Начнем с задачи точечного и доверительного оценивания линейной функции одной переменной $x(t) = at + b$.

Исходные данные — набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции (см. главу 3), курс доллара США, объем месячного производства или размер дневной выручки торговой точки). Предполагается, что переменные связаны линейной зависимостью

$$x_k = a\,t_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Обычно оценивают параметры a и b линейной зависимости методом наименьших квадратов, как показано ниже. Затем восстановленную зависимость используют, например, для точечного и интервального прогнозирования.

Оценки метода наименьших квадратов. Немецкий математик Ф. Клейн, тщательно изучавший научное наследство своего великого соотечественника К. Гаусса, пишет, что метод наименьших квадратов был разработан К. Гауссом в 1795 г. [4, с. 37]. (Как много позже сказано в [8, с. 181], «Гаусс указывает две даты: 1794 г. и 1795 г. Современные исследователи склонны считать, что верная дата — это 1794 г.») Согласно этому методу для расчета наилучшей функции, приближающей линейным образом зависимость x от t, следует рассмотреть функцию двух переменных

$$f(a,b)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-at_k-b)^2 .$$

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения a^* и b^*, при которых функция $f(a, b)$ достигает минимума по всем значениям аргументов.

Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a, b)$ по аргументам a и b, приравнять их к 0, затем из полученных уравнений найти оценки. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=\sum_{k=1}^{n}2(x_k-at_k-b)(-t_k),$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=\sum_{k=1}^{n}2(x_k-at_k-b)(-1).$$

Преобразуем правые части полученных соотношений. Вынесем за знак суммы общие множители 2 и (–1). Затем рассмотрим слагаемые. Раскроем скобки в первом выражении, получим, что каждое слагаемое разбивается на три. Во втором выражении также каждое слагаемое есть сумма трех. Значит, каждая из сумм разбивается на три суммы. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=(-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_it_i-a\sum_{i=1}^{n}t_i^2-b\sum_{i=1}^{n}t_i\right),$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=(-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\sum_{i=1}^{n}t_i-bn\right).$$

Приравняем частные производные к 0. Тогда в полученных уравнениях можно сократить множитель (–2). Оценки метода наименьших квадратов находим из системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\sum_{i=1}^{n}x_it_i-a\sum_{i=1}^{n}t_i^2-b\sum_{i=1}^{n}t_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-a\sum_{i=1}^{n}t_i-bn=0.$$

Запись решения этой системы будет более компактной, если использовать не суммы, а средние арифметические:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{xt} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i t_i, \quad \overline{t^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 .$$

Разделив обе части уравнений на n, перейдем к системе:

$$\overline{xt} - a\overline{t^2} - b\bar{t} = 0,$$
$$\bar{x} - a\bar{t} - b = 0.$$

Из второго уравнения получаем, что

$$b = \bar{x} - a\bar{t}.$$

Подставим в первое уравнение:

$$\overline{xt} - a\overline{t^2} - (\bar{x} - a\bar{t})\bar{t} = 0.$$

Раскрыв скобки, решаем это линейное уравнение с одной переменной a. Получаем оценки метода наименьших квадратов:

$$a^* = \frac{\overline{xt} - \bar{x}\bar{t}}{\overline{t^2} - (\bar{t})^2}, \quad b^* = \bar{x} - a^*\bar{t}. \tag{2.1}$$

Следовательно, восстановленная функция имеет вид

$$x^*(t) = a^*t + b^*.$$

Замечание. С точки зрения теории оптимизации равенство частных производных 0 — необходимое условие минимума, но недостаточное. Однако в силу единственности решения системы линейных уравнений равенства (2.1) дают точку минимума, поскольку существование минимума вытекает из того, что в качестве области определения непрерывной функции $f(a, b)$ может рассматриваться некоторое ограниченное замкнутое множество. Если же имеются априорные ограничения на параметры, то формулы (2.1) не всегда применимы. Например, пусть $x(t)$ — издержки производства при выпуске продукции объема t. Тогда параметры линейной зависимости имеют экономическую интерпретацию: b — постоянные издержки (вне зависимости от объема производства), a — переменные издержки (на одну единицу выпущенной продукции). Очевидно, постоянные издержки неотрицательны: $b \geq 0$. Однако при расчетах по формулам (2.1) при «неудачных» исходных данных может быть получено значение $b^* < 0$. Очевидно, отрицательным значением постоянных издержек пользоваться нельзя. В таком случае можно порекомендовать принять в исходной модели $b = 0$ и методом наименьших квадратов найти наилучшую оценку единственного параметра — переменных издержек a.

Пример 1 (*оценивание по методу наименьших квадратов*). Чтобы не отвлекать внимание читателя на содержательную интерпретацию исходных данных и результатов расчетов, рассмотрим условный пример. Пусть даны $n = 6$ пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, 6$, представленных во втором и третьем столбцах табл. 2.1 (строки 1–6). Расчеты по методу наименьших квадратов удобно проводить с помощью таблицы, подобной табл. 2.1, последовательно заполняя ее столбцы либо вручную, либо на компьютере с помощью электронной таблицы EXCEL или иного программного продукта.

Таблица 2.1

Расчет по методу наименьших квадратов при восстановлении линейной функции одной переменной

№ п/п	i	t_i	x_i	t_i^2	$t_i x_i$	$a^* t_i$	$\hat{x}_i$	$x_i - \hat{x}_i$	$(x_i - \hat{x}_i)^2$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	12	1	12	3,14	12,17	–0,17	0,03
2	2	3	20	9	60	9,42	18,45	1,55	2,40
3	3	4	20	16	80	12,56	21,59	–1,59	2,53
4	4	12	32	49	224	21,98	31,01	0,99	0,98
5	5	9	35	81	315	28,26	37,29	–2,29	5,24
6	6	10	42	100	420	31,40	40,43	1,57	2,46
7	Σ	34	161	256	1111			0,06	13,64
8	$\frac{\Sigma}{n}$	5,67	26,83	42,67	185,17				2,27
9		$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\overline{t^2}$	$\overline{xt}$				(σ^2)

В соответствии с формулами (2.1) для вычисления оценок метода наименьших квадратов необходимо рассчитать четыре величины $\bar{t}, \bar{x}, \overline{t^2}, \overline{xt}$. Для получения первых двух из них достаточно найти суммы чисел, представленных во втором и третьем столбцах табл. 2.1.

Соответствующие суммы записаны в седьмой строке (обозначена символом $\sum$), а средние арифметические — в восьмой строке. Для удобства читателя в девятой строке приведены обозначения средних величин, стоящих строкой выше.

Для расчета двух оставшихся средних заполнены клетки четвертого и пятого столбцов, а затем проведено суммирование по этим столбцам. Все необходимые операции — поэлементное возведение в квадрат, перемножение столбцов, суммирование по столбцам — легко осуществить с помощью электронной таблицы EXCEL.

Остальные столбцы табл. 2.1 используются ниже при дальнейшем развертывании алгоритмов метода наименьших квадратов.

В соответствии с формулами (2.1) оценки метода наименьших квадратов для приведенных в табл. 2.1 данных таковы:

$$a^* = \frac{185{,}17 - 26{,}83 \times 5{,}67}{42{,}67 - (5{,}67)^2} = \frac{33{,}04}{10{,}52} = 3{,}14, \quad b^* = 26{,}83 - 3{,}14 \times 5{,}67 = 9{,}03,$$

а восстановленная зависимость имеет вид

$$x^*(t) = 3{,}14\, t + 9{,}03.$$

Варианты оценок метода наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов рассматривается во многих литературных источниках, и формулы для оценок параметров зачастую имеют различный вид. Однако все они переходят друг в друга в результате тождественных преобразований.

Для развертывания вероятностно-статистической теории нам понадобится другая параметризация линейной зависимости, а именно

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}\,) + d + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где a и d — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость. Среднее арифметическое моментов времени $\bar{t}$ введено в модель для облегчения математико-статистических выкладок.

Для оценивания параметров a и d необходимо согласно методу наименьших квадратов минимизировать функцию

$$F(a,d) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - a(t_i - \bar{t}) - d)^2 .$$

Как и раньше, вычисляем частные производные и приравниваем их к 0. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})=0, \tag{2.2}$$

уравнения приобретают вид

$$\sum_{k=1}^{n}x_i(t_i-\bar{t})-a\sum_{k=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k-dn=0.$$

Следовательно, оценки метода наименьших квадратов имеют вид

$$a^*=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k(t_k-\bar{t})}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2},\quad d^*=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k. \tag{2.3}$$

В силу соотношения (2.2) оценку a^* можно записать в более симметричном виде:

$$a^*=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(t_k-\bar{t})}{\sum_{k=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}.$$

Эту оценку нетрудно преобразовать и к виду

$$a^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_it_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ii}\sum_{i=1}^{n}t_i}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2}. \tag{2.4}$$

Следовательно, восстановленная функция, с помощью которой можно прогнозировать и интерполировать, имеет вид

$$x^*(t)=a^*(t-\bar{t})+d^*.$$

Обратим внимание на то, что использование $\bar{t}$ в последней формуле ничуть не ограничивает ее общность. Сравним с ранее рассмотренной моделью вида

$$x_k = c\,t_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что

$$c = a,\ \ b = d - a\bar{t}.$$

Аналогичным образом связаны оценки параметров:

$$c^* = a^*,\ \ b^* = d^* - a^*\bar{t}.$$

Для данных табл. 2.1 в соответствии с формулой (2.3) $d^* = 26{,}83$, а согласно формуле (2.4)

$$a^* = \frac{1111 - \frac{1}{6}161 \times 34}{256 - \frac{1}{6}(34)^2} = \frac{1111 - 912{,}33}{256 - 192{,}67} = \frac{198{,}67}{63{,}33} = 3{,}14.$$

Следовательно, прогностическая функция (т. е. восстановленная зависимость) имеет вид

$$x^*(t) = 3{,}14(t - 5{,}67) + 26{,}83 = 3{,}14t - 3{,}14 \times 5{,}67 + 26{,}83 =$$
$$= 3{,}14t - 17{,}80 + 26{,}83 = 3{,}14t + 9{,}03.$$

Естественно, результат тот же, что и при использовании первоначальной параметризации (формы линейной зависимости).

Восстановленные значения и оценка точности приближения. Следующий (второй) этап анализа данных — оценка точности восстановления (приближения) зависимости (функции) методом наименьших квадратов. Сначала рассматриваются так называемые восстановленные значения

$$\hat{x}_i = x^*(t_i),\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Это те значения, которые полученная в результате расчетов прогностическая функция принимает в тех точках, в которых известны истинные значения зависимой переменной x_i.

Вполне естественно сравнить восстановленные и истинные значения. Это и сделано в шестом — восьмом столбцах табл. 2.1. Для простоты расчетов в шестом столбце представлены произведения a^*t_i, седьмой отличается от шестого добавлением константы $b^* = 9{,}03$ и содержит восстановленные значения. Восьмой столбец — это разность третьего и седьмого.

Непосредственный анализ восьмого столбца табл. 2.1 показывает, что содержащиеся в нем числа сравнительно невелики по величине по сравнению с третьим столбцом (на порядок меньше по величине). Кроме того, знаки «+» и «–» чередуются. Эти два признака свидетельствуют о правильности расчетов. При использовании метода наименьших квадратов знаки не всегда чередуются. Однако если сначала идут только плюсы, а потом только минусы (или наоборот, сначала только минусы, а потом только плюсы), то это верный показатель того, что в вычислениях допущена ошибка (неправильно оценен коэффициент a).

Верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. Справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{x}_i\right) = 0.$$

Доказательство этой теоремы оставляем читателю в качестве упражнения.

Однако сумма по восьмому столбцу дает 0,06, а не 0. Незначительное отличие от 0 связано с ошибками округления при вычислениях. Близость суммы значений зависимой переменной и суммы восстановленных значений — практический *критерий правильности расчетов.* В соответствии с ним сумма элементов восьмого столбца должна быть мала по сравнению с элементами этого столбца.

Представляет интерес относительная погрешность восстановления. В точке t_k это величина

$$\left|\frac{x_k - \widehat{x}_k}{x_k}\right|.$$

Для данных табл. 2.1 это величины

$$\frac{0{,}17}{12}, \frac{1{,}55}{20}, \frac{1{,}59}{20}, \frac{0{,}99}{32}, \frac{2{,}29}{35}, \frac{1{,}57}{42}.$$

Максимальной из них является 1,59 / 20 = 0,08. Точность восстановления естественно выразить в процентах:

$$\max_{1\le k\le n}\left|\frac{x_k-\hat{x}_k}{x_k}\right|\times 100\% = 8\%.$$

В социально-экономических исследованиях точность восстановления 10–15% признается хорошей. Конечно, в астрономических вычислениях, например при восстановлении орбиты астероида Церера (именно для решения этой задачи К. Гаусс разработал метод наименьших квадратов), точность должна быть гораздо выше (т. е. рассматриваемый показатель — максимум модуля относительных погрешностей — должен быть гораздо меньше).

Непараметрическая вероятностная модель. Перейдем к третьему этапу анализа данных. Для получения оценок параметров и прогностической функции нет необходимости обращаться к какой-либо вероятностной модели. Однако для того, чтобы изучать погрешности оценок параметров и восстановленной функции, т. е. строить доверительные интервалы для a^*, b^* и $x^*(t)$, подобная модель необходима.

Формулировка модели такова. Пусть значения независимой переменной t детерминированы, а погрешности e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, неизвестной статистику. В остальном функция распределения погрешностей e_k произвольна.

Поскольку не предполагается, что эта функция входит в то или иное параметрическое семейство, то рассматриваемая модель является непараметрической. Хорошо известно, что распределения реальных данных, как правило, ненормальны и не входят в какое-либо иное параметрическое семейство распределений [18, п. 5.1].

В дальнейшем неоднократно будем использовать Центральную предельную теорему (ЦПТ) теории вероятностей (для разнораспределенных слагаемых) для величин e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ (с весами), поэтому для выполнения ее условий необходимо предположить, например, что погрешности e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, финитны (т. е. с вероятностью 1 не превосходят по абсолютной величине некоторую константу) или имеют конечный третий абсолютный момент. Каждое конкретное слагаемое (с учетом веса) должно быть бесконечно малым относительно всей суммы. Однако заострять здесь внимание на этих внутриматематических «условиях регулярности» нет необходимости (см., например, [18, п. 4.2]).

Асимптотические распределения оценок параметров. Из формулы (2.3) следует, что

$$d^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) + d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k . \qquad (2.5)$$

Согласно ЦПТ оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием d и дисперсией σ^2 / n, оценка которой приводится ниже. С точки зрения математической статистики вектор оценок (a^*, d^*) обладает более простыми свойствами и легче поддается изучению, чем вектор оценок (a^*, b^*), что и является причиной введения в рассмотрение модели вида $x_k = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k$.

Из формул (2.3) и (2.5) вытекает, что

$$x_k - \bar{x} = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k - d - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = a(t_k - \bar{t}) + e_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k ,$$

$$(x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t}) = a(t_k - \bar{t})^2 + e_k(t_k - \bar{t}) - \frac{(t_k - \bar{t})}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k .$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по k обращается в 0, поэтому из приведенных выше формул для a^* следует, что

$$a^* = a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \frac{(t_k - \bar{t})}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} . \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) показывает, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием a и дисперсией

$$D(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(e_k) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} .$$

Отметим, что многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (2.6) мало сравнительно со всей суммой, т. е. когда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\le k\le n}|t_k-\bar{t}\,|}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t}\,)^2}}=0.$$

Из формул (2.5) и (2.6) и исходных предположений о погрешностях вытекает также то, что математические ожидания оценок равны оцениваемым параметрам (в терминах математической статистики — оценки параметров являются несмещенными).

Несмещенность и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы (аналогично границам для долей в главе 1 выше) и проверять статистические гипотезы, например о равенстве определенным значениям, прежде всего 0. Предоставляем читателю возможность выписать формулы для расчета доверительных границ и сформулировать правила проверки упомянутых гипотез.

Асимптотическое распределение прогностической функции. Поскольку

$$x^*(t)=\left(a+\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\right)(t-\bar{t}\,)+d+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k=a(t-\bar{t}\,)+d+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k+\frac{1}{n}\right)e_k,$$

то в силу ЦПТ случайная величина $x^*(t)$ имеет асимптотически нормальное распределение. Из формул (2.5) и (2.6) следует, что

$$M(x^*(t))=M\{a^*(t-\bar{t}\,)+d^*\}=M(a^*)(t-\bar{t}\,)+M(d^*)=$$
$$=a(t-\bar{t}\,)+d=x(t),$$

т. е. рассматриваемая оценка прогностической функции является несмещенной. Поэтому

$$x^*(t)-Mx^*(t)=(a^*-a)(t-\bar{t}\,)+d^*-d.$$

Следовательно, дисперсия оценки имеет вид

$$D(x^*(t))=D(a^*)(t-\bar{t}\,)^2+2M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\bar{t}\,)\}+D(d^*).$$

При этом, поскольку погрешности e_k независимы в совокупности и имеют нулевое математическое ожидание, то $M(e_k e_j)=0,\ k\neq j$ и

$$M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\bar{t})\}=M\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k\right)(t-\bar{t})\right\}=$$

$$=(t-\bar{t})\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}c_k\left(\sum_{j=1}^{n}M(e_k e_j)\right)\right)=\frac{1}{n}(t-\bar{t})\sum_{k=1}^{n}c_k M(e_k^2)=\frac{1}{n}(t-\bar{t})\sigma^2\sum_{k=1}^{n}c_k=0.$$

Таким образом, с учетом найденных ранее выражений для дисперсий параметров получаем, что

$$D(x^*(t))=\frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}(t-\bar{t})^2+0+\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2\left\{\frac{1}{n}+\frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}\right\} \qquad (2.7)$$

Итак, оценка $x^*(t)$ прогностической функции является несмещенной и асимптотически нормальной. Для практического использования ее асимптотического распределения с целью построения доверительных прогностических интервалов необходимо уметь оценивать остаточную дисперсию $M\left(e_i^2\right)=\sigma^2$.

Оценивание остаточной дисперсии. В точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $x^*(t_k)$. Рассмотрим естественную характеристику расхождения между исходными и восстановленными значениями:

$$SS=\sum_{k=1}^{n}(x^*(t_k)-x_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\left\{(a^*-a)(t_k-\bar{t})+(d^*-d)-e_k\right\}^2.$$

Величина SS называется остаточной суммой квадратов (SS — от *sum of squares* — сумма квадратов).

В соответствии с формулами (2.5) и (2.6)

$$SS=\sum_{k=1}^{n}\left\{(t_k-\bar{t})\sum_{j=1}^{n}c_j e_j+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e_j-e_k\right\}^2=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]e_j-e_k\right\}^2=\sum_{k=1}^{n}SS_k,$$

где

$$SS_k = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[c_j(t_k - \bar{t}) + \frac{1}{n} \right] e_j - e_k \right\}^2, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M(SS_k) = M\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[c_j(t_k - \bar{t}) + \frac{1}{n} \right] e_j - e_k \right\}^2 = M\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[c_j(t_k - \bar{t}) + \frac{1}{n} \right] e_j \right\}^2 -$$

$$- 2M\left(\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[c_j(t_k - \bar{t}) + \frac{1}{n} \right] e_j \right\} e_k \right) + M\left(e_k^2\right) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ c_j(t_k - \bar{t}) + \frac{1}{n} \right\}^2 \sigma^2 -$$

$$- 2\left\{ c_k(t_k - \bar{t}) + \frac{1}{n} \right\} \sigma^2 + \sigma^2.$$

Из сделанных ранее предположений вытекает, что при $n \to \infty$ имеем $M\left(SS_i\right) \to \sigma^2$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Оценив дисперсию случайной величины SS / n, можно показать, что статистика SS / n является состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

В последнем, девятом столбце табл. 2.1 приведены квадраты значений из восьмого столбца. Их сумма — это остаточная сумма квадратов $SS = 13{,}64$. В соответствии со сказанным выше рассчитанными по исходным данным табл. 2.1 значениями состоятельных (в смысле математической статистики) оценок дисперсии погрешностей и их среднего квадратического отклонения являются

$$(\sigma^2)^* = \frac{SS}{n} = \frac{13{,}64}{6} = 2{,}27; \qquad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} = \sqrt{\frac{13{,}64}{6}} = 1{,}51.$$

Доверительные границы для прогностической функции. Получение состоятельной оценки дисперсии погрешностей дает возможность завершить последовательность задач, связанных с рассматриваемым простейшим вариантом метода наименьших квадратов. Исходим из установленной ранее асимптотической нормальности точечного прогноза $x^*(t)$. Не представляет труда выписывание верхней $x_{\text{В}}(t)$ и нижней $x_{\text{Н}}(t)$ границ для прогностической функции:

$$x_{\text{в}}(t) = x^*(t) + \delta(t), \quad x_{\text{н}}(t) = x^*(t) - \delta(t),$$

где погрешность прогноза $\delta(t)$ имеет вид

$$\delta(t) = U(p)\sqrt{Dx^*(t)}.$$

Оценив дисперсию $x^*(t)$ с помощью формулы (2.7), в которую вместо неизвестной исследователю дисперсии погрешностей σ^2 подставлена ее оценка, получаем окончательный вид формулы для расчета полуширины доверительного интервала:

$$\delta(t) = U(p)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t-\overline{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})^2}}, \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}}.$$

Здесь p — доверительная вероятность, $U(p)$, как и в предыдущих главах, — квантиль нормального распределения порядка $(1 + p) / 2$, т. е.

$$\Phi(U(p)) = \frac{1+p}{2}, \quad U(p) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right).$$

При $p = 0{,}95$ (наиболее применяемое значение) имеем $U(p) = 1{,}96$. Для других доверительных вероятностей соответствующие значения квантилей можно найти в статистических таблицах (см., например, наилучшее в этой сфере издание [2]).

Пример 2. Продолжим анализ данных табл. 2.1, исходя из описанной выше вероятностно-статистической модели.

Рассмотрим распределения оценок параметров. Оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием d и дисперсией, которая оценивается как $(\sigma^2)^* / n = 2{,}27 / 6 = 0{,}38$ (здесь считаем, что 6 — «достаточно большое» число, что, конечно, можно обосновать, изучив точность приближения методом статистических испытаний (Монте-Карло) или иным). Оценкой среднего квадратического отклонения является 0,615. Следовательно, при доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для параметра d имеет вид $(26{,}83 - 1{,}96 \times 0{,}615; 26{,}83 + 1{,}96 \times 0{,}615) = (25{,}625; 28{,}035)$.

В формулах для дисперсий участвует величина, которую можно представить двумя способами:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - t_{\text{ср}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^2 - 2t_i t_{\text{ср}} + t_{\text{ср}}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2t_{\text{ср}}\sum_{i=1}^{n} t_i + nt_{\text{ср}}^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{\text{ср}}^2.$$

Подставив численные значения (табл. 2.1), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{\text{ср}}^2 = 256 - 6(5,67)^2 = 63,1.$$

Дисперсия оценки a^* коэффициента при линейном члене прогностической функции оценивается как 2,27 / 63,1 = 0,036, а среднее квадратическое отклонение — как 0,19. Следовательно, при доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для параметра a имеет вид (3,14 – 1,96 × 0,19; 3,14 + 1,96 × 0,19) = (2,77; 3,51).

Прогностическая функция с учетом погрешности имеет вид (при доверительной вероятности 0,95)

$$x^*(t) = 3,14t + 9,03 \pm 1,96 \times 1,51\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(t-5,67)^2}{63,1}}.$$

В этой записи сохранено происхождение различных составляющих. Упростим:

$$x^*(t) = 3,14t + 9,03 \pm 2,96\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(t-5,67)^2}{63,1}}. \qquad (2.8)$$

Например, при $t = 12$ эта формула дает

$$x^*(12) = 46,71 \pm 2,65.$$

Следовательно, нижняя доверительная граница — это 44,06, а верхняя доверительная граница — это 49,36.

Насколько далеко можно прогнозировать? Обычный ответ таков — до тех пор, пока сохраняется тот стабильный комплекс условий, при котором справедлива рассматриваемая зависимость. Изобретатель метода наименьших квадратов Карл Гаусс исходил из задачи восстановления орбиты астероида (малой планеты) Церера. Движение подобных небесных тел может быть рассчитано на сотни лет вперед. А вот параметры комет (например, срок возвращения) не поддаются столь точному расчету, поскольку за время пребывания в окрестности Солнца сильно меняется масса кометы. В социально-экономической области горизонты надежного прогнозирования еще менее определены. В частности, они сильно зависят от решений государственных органов.

Чтобы выявить роль погрешностей в прогностической формуле, рассмотрим формальный предельный переход $t \to \infty$. Тогда входящие в формулу (2.8) величины 9,03; 1/6; 5,67 становятся бесконечно малыми, и

$$x^*(t) \approx 3{,}14t \pm \frac{2{,}96}{\sqrt{63{,}1}} t = (3{,}14 \pm 0{,}37)t.$$

Таким образом, в асимптотике погрешности составляют около

$$\frac{100 \times 0{,}37}{3{,}14}\% = 11{,}8\%$$

от тренда (математического ожидания) прогностической функции. В социально-экономических исследованиях подобные погрешности считаются вполне приемлемыми.

Краткое сравнение параметрического и непараметрического подходов. Во многих литературных источниках рассматривается параметрическая вероятностная модель метода наименьших квадратов. В ней предполагается, что погрешности имеют нормальное распределение. Это предположение позволяет математически строго получить ряд выводов. Так, распределения статистик вычисляются точно, а не в асимптотике, соответственно, вместо квантилей нормального распределения используются квантили распределения Стьюдента, а при оценивании дисперсии погрешностей остаточная сумма квадратов SS делится не на n, а на $(n-2)$. Ясно, что при росте объема данных различия стираются.

Рассмотренный выше непараметрический подход не использует нереалистическое предположение о нормальности погрешностей. Платой за это является асимптотический характер результатов. В случае простейшей модели метода наименьших квадратов оба подхода дают практически совпадающие рекомендации (поскольку квантили распределения Стьюдента при росте объема выборки приближаются к квантилям нормального распределения). Это не всегда так, не всегда два подхода дают близкие результаты. Например, известно, что в задаче обнаружения выбросов методы, опирающиеся на нормальное распределение, нельзя считать обоснованными, поскольку выводы на их основе не являются устойчивыми к переходу от одного распределения к другому, мало отличающемуся. Это их неприятное свойство было обнаружено с помощью непараметрического подхода (см. [17, п. 4.2], [18, п. 7.2]).

Об общих принципах эконометрического моделирования. Ход проведенного в настоящем разделе исследования позволяет кратко сформулировать несколько общих принципов построения, описания и использования эконометрических методов, в частности в области прикладной статистики. Во-первых, должны быть четко сформулированы исходные предпосылки, т. е. полностью описана используемая вероятностно-статистическая модель. Во-вторых, не следует принимать предпосылки, которые редко выполняются на практике. В-третьих, алгоритмы расчетов должны быть корректны с точки зрения математико-статистической теории. В-четвертых, алгоритмы должны давать полезные для практики выводы.

Применительно к задаче восстановления зависимостей это означает, что целесообразно применять непараметрический подход, что и сделано выше. Однако предположение нормальности, хотя и очень сильно сужает возможности применения, с чисто математической точки зрения зачастую позволяет продвинуться дальше. Поэтому для первоначального изучения ситуации, так сказать, «в лабораторных условиях», нормальная модель может оказаться полезной.

2.2. Основы линейного регрессионного анализа

Метод наименьших квадратов, рассмотренный выше в простейшем случае, допускает различные обобщения. Например, метод наименьших квадратов дает алгоритм расчетов, если исходные данные — по-прежнему набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, ..., n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции), но восстанавливать надо не линейную зависимость, а квадратическую:

$$x(t) = at^2 + bt + c.$$

Следует рассмотреть функцию трех переменных

$$f(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - at_k^2 - bt_k - c\right)^2.$$

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения параметров a^*, b^* и c^*, при которых функция $f(a, b, c)$ достигает минимума по всем значениям аргументов. Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a, b, c)$ по аргументам a, b и c, приравнять их к 0, затем из полученных уравнений найти оценки. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}(x_k-at_k^2-bt_k-c)^2=\sum_{k=1}^{n}2(-t_k^2)(x_k-at_k^2-bt_k-c)\ .$$

Приравнивая частную производную к 0, получаем линейное уравнение относительно трех неизвестных параметров a, b, c:

$$a\sum_{k=1}^{n}t_k^4+b\sum_{k=1}^{n}t_k^3+c\sum_{k=1}^{n}t_k^2=\sum_{k=1}^{n}t_k^2x_k.$$

Приравнивая частную производную по параметру b к 0, аналогичным образом получаем уравнение

$$a\sum_{k=1}^{n}t_k^3+b\sum_{k=1}^{n}t_k^2+c\sum_{k=1}^{n}t_k=\sum_{k=1}^{n}t_kx_k.$$

Наконец, приравнивая частную производную по параметру c к 0, получаем уравнение

$$a\sum_{k=1}^{n}t_k^2+b\sum_{k=1}^{n}t_k+cn=\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим оценки метода наименьших квадратов.

Другие задачи, рассмотренные в предыдущем разделе (доверительные границы для параметров и прогностической функции и др.), также могут быть решены для квадратической зависимости. Соответствующие алгоритмы более громоздки. Для их записи полезен аппарат матричной алгебры (см., например, одну из лучших в этой области монографий [23]). Для реальных расчетов используют соответствующие компьютерные программы.

Линейный регрессионный анализ. Раздел прикладной статистики, посвященный восстановлению зависимостей, называется регрессионным анализом. Термин «линейный регрессионный анализ» используют, когда рассматриваемая функция линейно зависит от оцениваемых параметров (от независимых переменных зависимость может быть произвольной). Теория оценивания неизвестных параметров хорошо развита именно в случае линейного регрессионного анализа. Если же линейности нет и нельзя перейти к линейной задаче, то, как правило, хороших свойств от оценок метода наименьших квадратов ожидать не приходится.

Продемонстрируем подходы в случае зависимостей различного вида. Если зависимость имеет вид многочлена (полинома)

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_m t^m,$$

то коэффициенты многочлена могут быть найдены путем минимизации функции

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - a_0 - a_1 t_k - a_2 t_k^2 - a_3 t_k^3 - \ldots - a_m t_k^m\right)^2.$$

Функция от t не обязательно должна быть многочленом. Можно, например, добавить периодическую составляющую, соответствующую сезонным колебаниям. Хорошо известно, например, что инфляция (рост потребительских цен) имеет четко выраженный годовой цикл. А именно, в среднем цены быстрее всего растут зимой, в декабре — январе, а медленнее всего (иногда в среднем даже падают) летом, в июле — августе (подробнее проблемы измерения инфляции рассмотрены в главе 3). Пусть для определенности

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_m t^m + A \sin Bt,$$

тогда неизвестные параметры могут быть найдены путем минимизации функции

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, A, B) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - a_0 - a_1 t_k - a_2 t_k^2 - a_3 t_k^3 - \ldots - a_m t_k^m - A \sin Bt_k\right)^2.$$

Если время измеряется в годах, то в качестве периодической составляющей (с периодом год) естественно взять $A\cos(2\pi t)$. В этом случае модель будет линейной по параметрам.

Преобразования переменных. Пусть $I(t)$ — индекс инфляции в момент t. Принцип стабильности условий приводит к гипотезе о постоянстве темпов роста средних цен, т. е. индекса инфляции. Таким образом, естественная модель для индекса инфляции — это

$$I(t) = Ae^{Bt}.$$

Эта модель не является линейной, метод наименьших квадратов непосредственно применять нельзя. Однако если прологарифмировать обе части предыдущего равенства:

$$\ln I(t) = \ln A + Bt,$$

и ввести новую переменную $x = \ln I(t)$, то получим линейную зависимость x от t, процедура (алгоритм) оценивания параметров которой рассмотрена выше.

В главе 1 был описан метод оценивания функции спроса по экспериментальным данным. Естественно восстановить зависимость по наборам пар чисел (p_i, $D_i = D(p_i)$), $i = 1, 2, \ldots, n$. На центральной части диапазона изменения цены вполне естественно использовать линейную зависимость (поскольку, как отметили еще Ньютон и Лейбниц, любую гладкую функцию на небольшом интервале можно с достаточной точностью приблизить линейной функцией, при этом график функции приближается касательной). Однако по краям диапазона (т. е. при малых ценах и при больших ценах) линейную зависимость применять нельзя, поскольку ее график выходит за пределы первого квадранта. Естественно использовать степенную зависимость

$$D = D(p) = Cp^{-\alpha},$$

где $C > 0, \alpha > 0$. Эта зависимость нелинейна, метод наименьших квадратов непосредственно применить нельзя. Но можно преобразовать переменные с целью приведения зависимости к линейной. Логарифмируя, получим:

$$\ln D = \ln C - \alpha \ln p.$$

Следовательно, если ввести переменные $x = \ln D,\ t = \ln p$, то между этими переменными имеется линейная зависимость, параметры которой оценивать умеем.

Итак, во многих случаях путем преобразования переменных удается перейти от нелинейных зависимостей к линейным с целью обеспечения корректного применения метода наименьших квадратов. Например, если

$$y = \sqrt{at + b},$$

то такой переход осуществляется путем введения переменной $x = y^2$. А если

$$y = \frac{1}{at + b},$$

то замена $z = 1/y$ приводит к линейной зависимости $z = a + bx$. Если $y = (a + bx)^2$, то замена $z = \sqrt{y}$ приводит к линейной зависимости $z = a + bx$. Для каждого конкретного случая подбирают свое преобразование.

Многомерная регрессия. Независимых переменных может быть не одна, а несколько. Пусть, например, по исходным данным (x_k, y_k, z_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, требуется оценить неизвестные параметры a и b в зависимости

$$z = ax + by + \varepsilon,$$

где ε — погрешность. Это можно сделать, минимизируя функцию

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k)^2.$$

Зависимость от независимых переменных x и y не обязательно должна быть линейной. Важна лишь линейность по параметрам. Предположим, что из каких-то соображений известно, что зависимость должна иметь вид

$$z = ax + by + cx^2 y + dxy + ey^3 + \varepsilon,$$

тогда для оценки пяти неизвестных параметров a, b, c, d, e необходимо минимизировать функцию

$$f(a,b,c,d,e) = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k - ax_k - by_k - cx_k^2 y_k - dx_k y_k - ey_k^3\right)^2.$$

Более подробно рассмотрим важный пример из микроэкономики. В одной из оптимизационных моделей поведения фирмы используется так называемая производственная функция $f(K, L)$, задающая объем выпуска в зависимости от затрат капитала K и труда L. В качестве конкретного вида производственной функции часто используется так называемая функция Кобба — Дугласа

$$f(K,L)=K^{\alpha}L^{\beta}.$$

Однако откуда взять значения параметров α и β? Естественно предположить, что они — одни и те же для всех предприятий отрасли. Поэтому целесообразно собрать информацию в виде трехмерных векторов $(f_k, K_k, L_k), k=1, 2, \ldots, n$, где f_k — объем выпуска на k-м предприятии, K_k — объем затрат капитала на k-м предприятии, L_k — объем затрат труда на k-м предприятии (в кратком изложении не пытаемся дать точных определений используемым понятиям из экономики предприятия). По собранной информации естественно попытаться оценить параметры α и β. Но они входят в зависимость нелинейно, поэтому сразу применить метод наименьших квадратов нельзя. Помогает логарифмирование:

$$\ln f(K,L)=\alpha\ln K+\beta\ln L.$$

Следовательно, целесообразно сделать *замену переменных*

$$x_k=\ln K_k, y_k, z_k=\ln f_k, k=1, 2, 3, \ldots, n,$$

а затем находить оценки параметров α и β, минимизируя функцию

$$g(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{n}(z_k-\alpha x_k-\beta y_k)^2.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\sum_{k=1}^{n}2(z_k-\alpha x_k-\beta y_k)(-x_k),$$

$$\frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\sum_{k=1}^{n}2(z_k-\alpha x_k-\beta y_k)(-y_k).$$

Приравняем частные производные к 0, сократим на 2, раскроем скобки, перенесем свободные члены вправо. Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \beta\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \cdot \alpha\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \beta\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k,$$

Таким образом, для вычисления оценок метода наименьших квадратов необходимо найти пять сумм

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2,\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,\ \sum_{k=1}^{n} y_k^2,\ \sum_{k=1}^{n} x_k z_k,\ \sum_{k=1}^{n} y_k z_k.$$

Для упорядочения расчета этих сумм может быть использована таблица типа той табл. 2.1, что применялась выше. Отметим, что рассмотренная в начале главы постановка (восстановление линейной функции одной независимой переменной) переходит в разбираемую сейчас при $y_k = 1$, $k = 1, 2, ..., n$.

Решая систему линейных уравнений, получаем оценки метода наименьших квадратов α^* и β^*.

Что может дать сравнение исходных f_k с восстановленными

$$\hat{f}_k = f^*(K_k, L_k) = K_k^{\alpha^*} L_k^{\beta^*}\ ?$$

Если $f_k > \hat{f}_k$, то это означает, что предприятие работает лучше, чем в среднем по отрасли (из-за различной исходной фондовооруженности нельзя сравнивать предприятия непосредственно, необходимо сначала восстановить зависимость выпуска от факторов производства с помощью модели Кобба — Дугласа). Это — заслуга руководства предприятия. Следовательно, вышестоящие структуры имеют основания продвигать и награждать топ-менеджеров этого предприятия. Деловые партнеры имеют основания для налаживания долговременных отношений. Банки имеют основания давать льготные кредиты.

Если $f_k < \hat{f}_k$, то ситуация прямо противоположная. Предприятие работает хуже, чем в среднем по отрасли, т. е. хуже, чем можно было бы ожидать при имеющихся у него ресурсах. Это — вина руководства предприятия. Следовательно, вышестоящим структурам целесообразно наказать директора и его заместителей, например, «укрепить руководство предприятия», заменив часть или всех топ-менеджеров. Деловым партнерам надо учесть, что выполнение договорных отношений находится под угрозой срыва. Из-за повышенного риска банки повысят процент платы за кредит, ужесточат требования к обеспечению возврата кредитов, в частности, беря имущество предприятия в залог.

Случай $f_k = \hat{f}_k$ — промежуточный между двумя описанными. Предприятие работает на уровне, среднем для отрасли. Нет оснований ни хвалить его руководство, ни применять санкции.

Как можно использовать восстановленную зависимость? Например, проектируем новое предприятие. Определяем для него величины факторов производства K_0 и L_0. Тогда можем рассчитывать на выпуск продукции в объеме $f^*(K_0, L_0)$.

Пример практического использования линейного регрессионного анализа. Руководитель маркетинговой службы завода ГАРО (г. Великий Новгород) А.А. Пивень применил его для построения математической модели рынка легковых подъемников. Требуется выявить факторы (показатели), оказывающие наибольшее влияние на объем продаж подъемников, найти зависимость объема продаж от этих факторов и использовать эту зависимость для прогнозирования объема продаж.

Зависимая переменная — объем продаж V, независимые переменные:

- грузоподъемность ($X1$),
- цена ($X2$),
- наличие напольной рамы ($X3$),
- наличие синхронизации ($X4$),
- количество двигателей ($X5$),
- суммарная мощность двигателей ($X6$),
- высота подхвата в нижнем положении ($X7$),
- максимальная высота подъема ($X8$),
- скорость подъема ($X9$),
- гарантийный срок ($X10$),
- срок службы ($X11$),
- время на рынке ($X12$),
- внешний вид ($X13$),
- срок поставки ($X14$),
- уровень сервисного обслуживания ($X15$),
- наличие системы смазки ($X16$),
- масса ($X17$).

Для восстановления зависимости использовалась линейная регрессионная модель. По результатам пошагового анализа из рассмотрения последовательно исключались независимые переменные (параметры подъемника), имеющие (в линейной модели) коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, иными словами, мало отличающиеся от 0 в сравнении с их дисперсией. Для этого использовался пакет STATISTICA 6.0, конкретно модуль «Множественная регрессия» (*Multiple regression*).

В результате расчетов получена зависимость объема продаж подъемника П3-Т от 12 факторов:

$$V = -1769.77 - 65.09\ X1 - 0.03\ X2 + 68.79\ X3 + 147.54\ X4 + \\ + 156.28\ X5 + 2.53\ X7 + 1.06\ X8 + 25.75\ X12 - \\ - 132.26\ X13 - 12.41\ X14 + 107.78\ X15 + 397\ X16.$$

Влияние остальных пяти факторов оказалось незначимым.

Исходя из расчетов, прогнозное значение продаж подъемников на второй год продаж составит ориентировочно 1010 шт. С вероятностью 95% можно утверждать, что объем продаж будет лежать в границах [695, 1332] шт.

2.3. Коэффициенты корреляции

Прежде чем восстанавливать зависимость, целесообразно убедиться, что переменные связаны между собой. Термин «корреляция» и означает «связь». В области статистических методов этот термин обычно используется в сочетании «коэффициенты корреляции». Рассмотрим линейный и непараметрические парные коэффициенты корреляции.

Обсудим способы измерения связи между двумя случайными переменными. Пусть исходными данными является набор случайных векторов $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \dots n$. Выборочным коэффициентом корреляции, более подробно, выборочным линейным парным коэффициентом корреляции К. Пирсона, как известно, называется число

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Если $r_n = 1$, то $y_i = ax_i + b$, причем $a > 0$. Если же $r_n = -1$, то $y_i = ax_i + b$, причем $a < 0$. Таким образом, близость коэффициента корреляции к 1 (по абсолютной величине) говорит о достаточно тесной линейной связи.

Если случайные вектора $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \ldots n$, независимы и одинаково распределены, то выборочный коэффициент корреляции сходится к теоретическому при безграничном возрастании объема выборки:

$$r_n \to \rho = \frac{M(x_1 - M(x_1))(y_1 - M(y_1))}{\sqrt{D(x_1)}\sqrt{D(y_1)}}$$

(сходимость по вероятности).

Более того, выборочный коэффициент корреляции является асимптотически нормальным. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{r_n - \rho}{\sqrt{D_0(r_n)}} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $D_0(r_n)$ — асимптотическая дисперсия выборочного коэффициента корреляции. Она имеет довольно сложное выражение, приведенное в классической монографии [5, с. 393]:

$$D_0(r_n) = \frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2} + \frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} + \frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}^2} - \frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}} - \frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}\right).$$

Здесь под μ_{km} понимаются теоретические центральные моменты порядка k и m, а именно,

$$\mu_{km} = M(x_1 - M(x_1))^k (y_1 - M(y_1))^m.$$

Коэффициенты корреляции типа r_n используются во многих алгоритмах многомерного статистического анализа. В теоретических рассмотрениях часто считают, что случайные вектора $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \ldots n$, имеют двумерное нормальное распределение. Распределения реальных данных, как правило, отличны от нормальных (см. [17, 18]). Почему же распространено представление о двумерном нормальном распределении? Дело в том, что теория в этом случае проще. В частности, равенство 0 теоретического коэффициента корреляции эквивалентно независимости случайных величин. Поэтому проверка независимости сводится к проверке статистической гипотезы о равенстве 0 теоретического коэффициента корреляции. Эта гипотеза принимается, если $|r_n| < C(n, \alpha)$, где $C(n, \alpha)$ — некоторое граничное значение, зависящее от объема выборки n и уровня значимости α.

Если предположение о двумерной нормальности не выполнено, то из равенства 0 теоретического коэффициента корреляции не вытекает независимость случайных величин. Нетрудно построить пример случайного вектора, для которого коэффициент корреляции равен 0, но координаты зависимы. Кроме того, для проверки гипотез о коэффициенте корреляции нельзя пользоваться таблицами, рассчитанными в предположении нормальности. Можно построить правила принятия решений на основе асимптотической нормальности выборочного коэффициента корреляции. Но есть и другой путь — перейти к непараметрическим коэффициентам корреляции, одинаково пригодным при любом непрерывном распределении случайного вектора.

Для расчета непараметрического *коэффициента ранговой корреляции Спирмена* необходимо сделать следующее. Для каждого x_i рассчитать его ранг r_i в вариационном ряду, построенном по выборке $x_1, x_2, \ldots x_n$. Для каждого y_i рассчитать его ранг q_i в вариационном ряду, построенном по выборке $y_1, y_2, \ldots y_n$. Для набора из n пар (r_i, q_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, вычислить линейный коэффициент корреляции. Он называется коэффициентом ранговой корреляции (Спирмена), поскольку определяется через ранги. В качестве примера рассмотрим данные из табл. 2.2 (см. [6]).

Таблица 2.2

Данные для расчета коэффициентов корреляции

i	1	2	3	4	5
x_i	5	10	15	20	25
y_i	6	7	30	81	300
r_i	1	2	3	4	5
q_i	1	2	3	4	5

Для данных табл. 2.2 коэффициент линейной корреляции равен 0,83, непосредственной линейной связи нет. А вот коэффициент ранговой корреляции равен 1, поскольку увеличение одной переменной однозначно соответствует увеличению другой переменной. Во многих экономических задачах, например при выборе инвестиционных проектов, достаточно именно монотонной зависимости одной переменной от другой.

Поскольку суммы рангов и их квадратов нетрудно подсчитать, то *коэффициент ранговой корреляции Спирмена* равен

$$\rho_n = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - q_i)^2}{n^3 - n}.$$

Отметим, что *коэффициент ранговой корреляции Спирмена* остается постоянным при любом строго возрастающем преобразовании шкалы измерения результатов наблюдений. Другими словами, он является адекватным в порядковой шкале (см. главу 5), как и другие ранговые статистики, например статистики Вилкоксона, Смирнова, типа омега-квадрат для проверки однородности независимых выборок [2, 18].

Широко используется также коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла, коэффициент ранговой конкордации Кендалла и Б. Смита (речь идет о сумме попарных коэффициентов ранговой корреляции Кендалла в случае более чем двух переменных) и др. Наиболее подробное обсуждение этой тематики содержится в монографии [3], необходимые для практических расчетов таблицы имеются в справочнике [2]. Дискуссия о наиболее адекватном выборе вида коэффициентов корреляции продолжается и в настоящее время [6].

2.4. Прогнозирование в отрасли лома черных металлов[1]

Среди статистических методов прогнозирования [19] основной — метод наименьших квадратов. Продемонстрируем его практическую

---

[1] Раздел 2.3 составлен по материалам статьи [7] ведущего менеджера отдела маркетинга ЗАО «Профит» Е.М. Крюковой, подготовленной в 2007 г. и использованной при подготовке кандидатской диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук под руководством профессора А.И. Орлова, защищенной в 2011 г.

пользу на примере исследования [7], посвященного решению задач прогнозирования цены лома черных металлов — сырья для Магнитогорского металлургического комбината.

Как показано в [7], в настоящее время для мировой и российской металлургии одна из наиболее актуальных проблем — повышение эффективности использования ресурсов лома черных металлов. Каждая промышленно развитая страна стремится максимально увеличить долю использования металлолома в сталеплавильном производстве, решая таким образом не только вопросы экологии, но и проблему дефицита рудного сырья, коксующихся углей, которые постоянно дорожают.

В России производство стали ежегодно возрастает. За период 2001–2006 гг. суммарный прирост выплавки согласно [25] составил свыше 28% (рис. 2.1). По мере увеличения выплавки стали возрастает масса необходимой для ее производства металлической шихты. Одним из главных составляющих шихты выступает металлолом. Его потребление определяется структурой сталеплавильного производства, развитием новых технологий выплавки, разливки и прокатки стали.

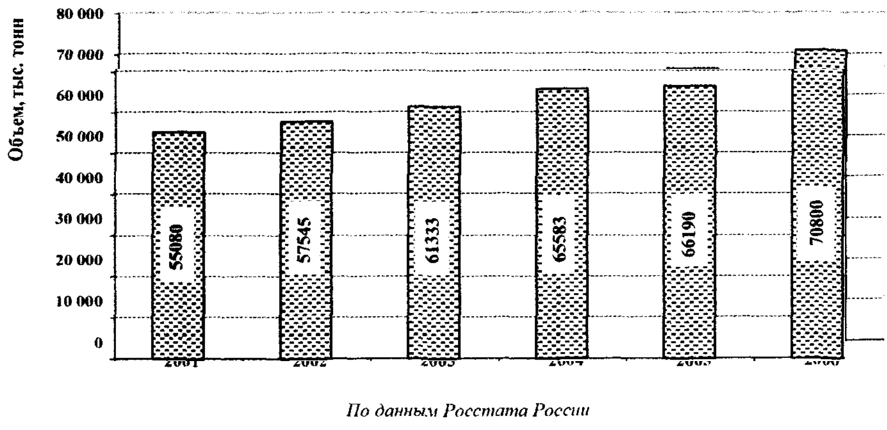

Рис. 2.1. Выплавка стали в России

На смену мартеновскому производству стали в мировой металлургии пришли другие технологии — кислородно-конвертерный и электросталеплавильный процессы. Если первый имеет ограничение по применению металлолома, то второй базируется преимущественно на потреблении стального лома [9].

Современные конвертерный и электросталеплавильный процессы ориентированы на 100% непрерывную разливку стали, что существенно сокращает образование оборотного лома в процессе производства. В настоящее время потребность черной металлургии в ресурсах лома практически в 2 раза превышает объем внутризаводского оборота металлолома [9]. Все это ведет к значительному росту потребности металлургической промышленности в ломе черных металлов, поставляемом специализированными ломоперерабатывающими предприятиями, усилению конкуренции за лом на российском рынке.

Увеличение спроса, естественно, сопровождается ростом цен на лом черных металлов. За период 2002–2006 гг. средневзвешенные цены на металлолом на российском рынке увеличились более чем в 2 раза (табл. 2.3). Рост цен на лом увеличивает привлекательность ломоперерабатывающего бизнеса.

Таблица 2.3

Изменение среднегодовой цены на лом черных металлов на внутреннем рынке в 2002–2006 гг.

Период	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ*	Изм., руб./т	Изм., %	Индекс инфляции, ед.**	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ (сопоставимые цены на 2002 г. — без учета влияния инфляции)	Изм., %
2002	1812				1812	
2003	3039	1226	167,7	1,12	2713	149,7
2004	4169	1130	137,2	1,117	3332	122,8
2005	4349	1181	104,3	1,109	3135	94,1
2006	5559	1210	127,8	1,09	3676	117,3

* Средневзвешенная цена на лом черных металлов (по крупнейшим металлургическим комбинатам России), НДС — налог на добавленную стоимость, ЖДТ — железнодорожный тариф.

** По данным Росстата РФ.

Структуру рынка лома можно представить в виде взаимосвязи трех важнейших участников рынка: ломосдатчиков, ломопереработчиков и потребителей лома (рис. 2.2). Ломосдатчики — это юридические лица и физические лица, которые либо списывают машины, оборудование, либо находят их «на земле», проводят демонтаж и отгружают ломопереработчикам. Ломопереработчики в свою очередь подразделяются на предприятия, имеющие собственные ломозаготовительные площадки и осуществляющие на них сбор и переработку лома, и на транзитные организации, которые не имеют собственных площадок, а просто осуществляют транспортировку и реализацию металлолома. Замыкают эту цепочку потребители лома — металлургические комбинаты и заводы, которые осуществляют приемку, складирование лома в копровых цехах и подготовку для сталеплавильного процесса.

Система ценообразования на рынке лома выглядит следующим образом. Потребители лома устанавливают цены на материал, исходя из потребности производства и наличия остатков на складах. В свою очередь ломоперерабатывающие предприятия устанавливают цены «на земле», то есть цены закупа лома у ломосдатчиков. Задача ломопереработчика — устанавливать в разные периоды такие цены, которые обеспечат им максимальную рентабельность. Таким образом, эффективность деятельности ломопереработчика зависит от оценки рыночной конъюнктуры, характеристики влияния рыночных факторов и прогноза дальнейшей динамики закупочных цен сталепроизводителей на лом черных металлов.

Динамика цен на лом черных металлов имеет свои особенности.

Во-первых, это изменение носит сезонный характер. Рост цен ежегодно начинается в марте-апреле, это связано с «подъеданием» зимних запасов на складах металлургических предприятий и ростом потребности сталепроизводителей в привозном металлоломе. К маю в связи с окончанием зимних условий увеличивается ломозаготовка и подход лома на склады, что ведет к снижению закупочных цен на лом. В конце лета вновь начинается рост: потребность предприятий в ломе возрастает в связи с началом накопления зимних запасов материала на складах. После достижения максимума цен в сентябре-октябре, следует понижение. Данная тенденция с небольшими сдвигами повторяется из года в год.

Во-вторых, последние годы очевидна тенденция сглаживания цен в течение года, цена изменяется равномерно без резких скачков и «провалов» (рис. 2.3а, 2.3б).

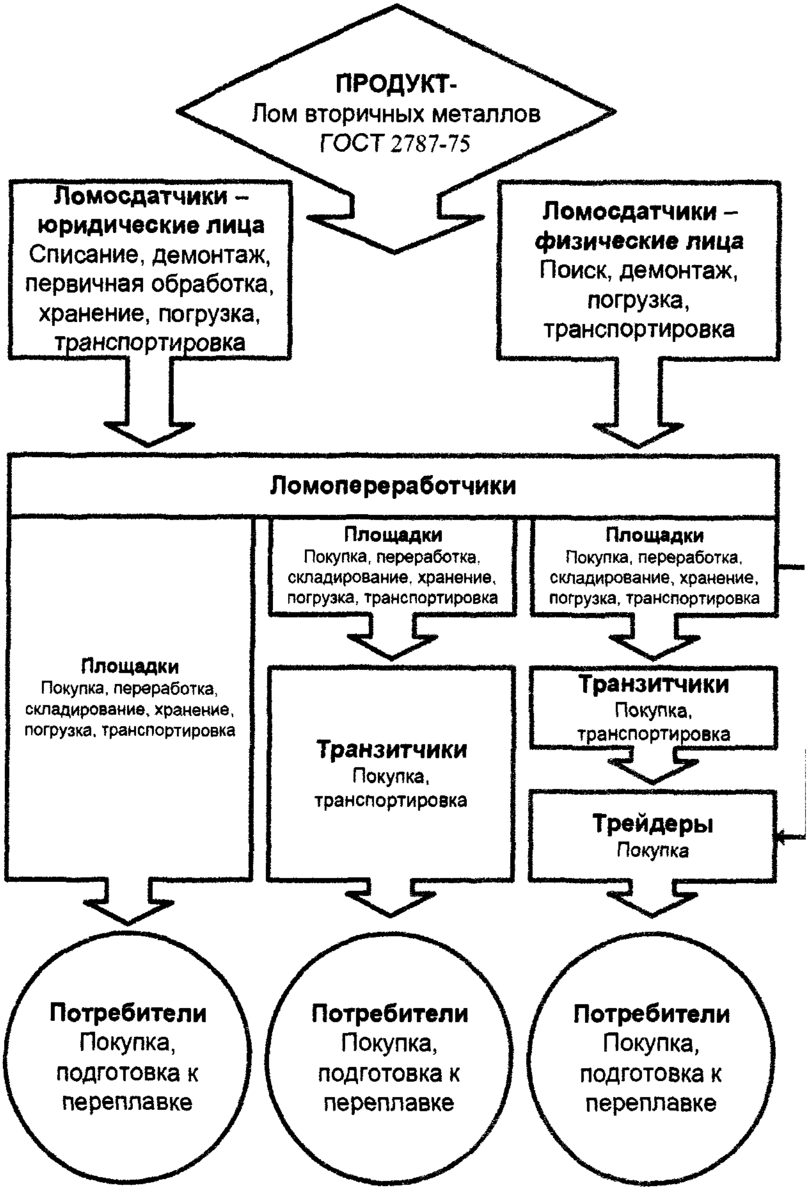

Рис. 2.2. Структура участников рынка, каналы сбыта

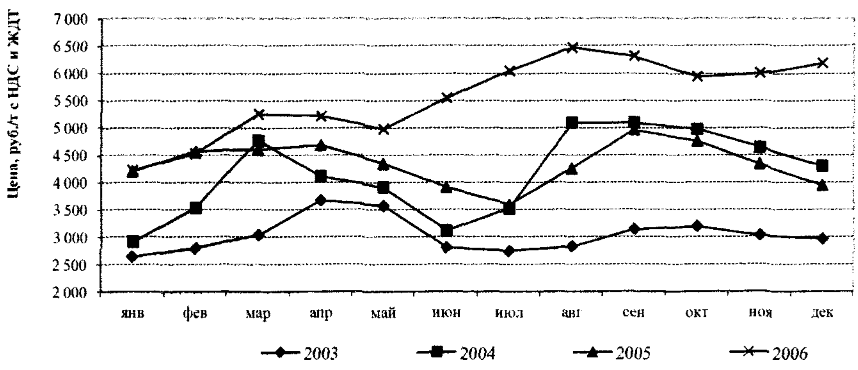

Рис. 2.3а. Динамика средних цен на лом марки 3А

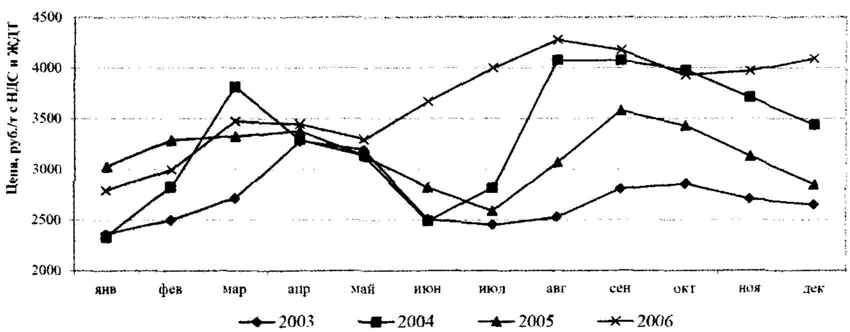

Рис. 2.3б. Динамика средних цен на лом марки 3А с учетом инфляции

Наконец, цена на лом зависит от множества факторов, таких как:

— *Потребность металлургического предприятия в ломе черных металлов (месячные планы поставки) и остатки лома на складах копровых цехов комбинатов.* Чем выше потребность сталепроизводителя в ломе на текущий месяц, тем большую цену он готов заплатить за сырье. С помощью цен потребители регулируют потоки материала в сторону комбината: невыполнение запланированных показателей ведет к увеличению закупочных цен на металлолом; перевыполнение, напротив, как правило, приводит к понижению цен. Последнее связано в первую очередь с ограниченными производственными мощностями копровых цехов комбинатов (перегрузочная техника, железнодорожные тупики), которые не могут обеспечить своевременную выгрузку и складирование всего поступающего объема металлолома.

— *Суммарный объем потребления внутреннего рынка.* Как уже было сказано выше, потребление лома черных металлов носит сезонный характер: потребность сталепроизводителей существенно возрастает в периоды формирования остатков лома на складах. Это ведет к росту конкуренции за сырье на рынке и, как следствие, к росту среднерыночных цен.

— *Объемы поставки российского лома на экспорт и цены на мировых рынках.* Значительные объемы металлолома по-прежнему отвлекаются на экспорт. Крупнейшим импортером российского металлолома является Турция. Поэтому, когда турецкие заводы дают высокие цены на металлолом, возрастают закупочные цены экспортеров в российских портах, что неизбежно ведет к ответному повышению цен производителями внутреннего рынка.

— *Цены на готовую продукцию металлургических комбинатов.* Важнейшим фактором изменения цен на сырье являются цены на готовую продукцию. Так как значительные объемы металлопродукции российских сталезаводов направляются на экспорт, в качестве индикаторов в [7] выбраны цены на арматуру в портах Черного и Балтийского морей. Как видно из рис. 2.4, динамика цен на лом черных металлов в течение года повторяет динамику цен на арматуру.

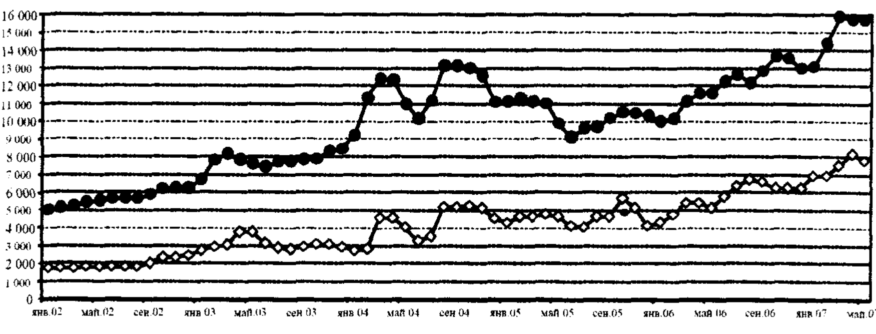

Рис. 2.4. Динамика цен на арматуру и металлолом

От оценки рыночной конъюнктуры, характеристики влияния рыночных факторов и прогноза дальнейшей динамики цен на лом черных металлов зависит эффективность деятельности ломопереработчика.

Рассмотрим эконометрическую модель прогноза закупочных цен на лом на примере ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» (ММК). Адекватность модели во многом зависит от выбора факторов, их точности и достоверности. В [7] отобраны следующие факторы для построения модели:

— Поставка на внутренний рынок, тыс. тонн (X1).

— Поставка на экспорт, тыс. тонн (X2).

— Цены на лом, Турция, cif, руб./т [21] (X3).

— Поставка на ММК, тыс. тонн (X4).

— Остаток лома на ММК, тыс. тонн (X5).

— Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т [21] (X6).

Исходя из понимания того, что реальные данные всегда имеют распределение, отличное от нормального, для восстановления зависимости целесообразно применять непараметрический подход, включая доверительное оценивание параметров вероятностной модели и прогностической функции [17]. Этот подход подробно описан в первом разделе настоящей главы.

Предполагается, что переменные связаны линейной регрессионной зависимостью вида:

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_nx_n,$$

где Y — зависимая переменная (цена на лом марки 3А), x_i — независимые переменные (факторы), b_i — регрессионные коэффициенты.

Исходные данные за период 2003–2005 гг. приведены в табл. 2.4.

С помощью модуля «Множественная регрессия» пакета STATISTICA определены регрессионные коэффициенты (табл. 2.5) [1, 24] и коэффициенты линейной корреляции Пирсона (табл. 2.5, 2.6).

Наиболее сильные связи можно отметить между ценами на лом и такими факторами, как цены на арматуру в портах, цены на импортируемый лом в Турции и объемы поставки на внутренний рынок России и на экспорт.

При этом необходимо отметить существенную взаимозависимость между такими факторами, как поставка на внутренний рынок и поставка на ММК (табл. 2.6). Это связано с тем, что периоды роста объемов закупа лома и накопления зимних запасов по разным комбинатам (которые и задают совокупный рост внутреннего рынка) часто совпадают.

Таблица 2.4

Исходные данные для построения модели расчета цен ПАО «ММК» на лом марки 3А

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб/т**	Поставка на ММК, тыс. т*	Остаток лома на ММК, тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ММК на лом, руб./т*
	X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**Y**
янв. 03	662	256	4464	65 810	77 849	6745	**2750**
фев. 03	715	212	5092	85 046	67 695	7830	**2950**
мар. 03	842	416	5033	104 212	33 533	8178	**3050**
апр. 03	1209	482	4760	166 203	34 091	7865	**3800**
май. 03	1492	542	4267	247 723	109 589	7637	**3800**
июн. 03	1298	628	3860	247 555	217 976	7468	**3150**
июл. 03	1057	667	4250	168 568	264 461	7742	**2900**
авг. 03	1126	725	4460	125 541	281 170	7798	**2825**
сен. 03	1144	702	4884	116 449	282 234	7863	**2950**
окт. 03	1244	802	4826	119 978	282 971	7903	**3100**
ноя. 03	1123	717	4923	123 509	296 580	8347	**3100**
дек. 03	1034	924	5521	86 707	282 933	8481	**2950**
янв. 04	719	869	6547	40 027	224 376	9234	**2761**
фев. 04	789	847	7520	27 144	143 178	11 348	**2824**
мар. 04	1210	969	7562	207 303	97 722	12 413	**4602**
апр. 04	1199	1141	6454	78 375	112 797	12 335	**4602**
май. 04	1554	1256	4584	137 042	197 946	10 987	**4050**
июн. 04	1179	1231	5135	216 765	244 032	10 189	**3298**
июл. 04	1230	1189	6732	188 504	232 936	11 196	**3540**
авг. 04	1447	1340	6975	120 708	222 165	13 146	**5201**
сен. 04	1359	1400	7086	134 830	319 025	13 150	**5201**
окт. 04	1649	1318	7795	261 497	374 111	13 030	**5268**
ноя. 04	1423	1394	7579	191 016	398 175	12 584	**5141**
дек. 04	1247	1405	6557	152 518	409 001	11 106	**4543**
янв. 05	733	926	7142	58 251	319 696	11 148	**4307**
фев. 05	957	816	6771	56 763	219 397	11 338	**4661**
мар. 05	1132	1032	7328	75 006	149 786	11 133	**4661**
апр. 05	1542	1429	6578	123 000	100 000	11 014	**4779**

Окончание табл. 2.4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y
май. 05	1740	1437	5501	294 793	242 233	9891	**4661**
июн. 05	1599	1252	4952	295 934	397 205	9148	**4130**
июл. 05	1307	968	6026	161 804	353 555	9642	**4071**
авг. 05	1427	1189	6834	137 785	357 436	9710	**4660**
сен. 05	1942	1466	7095	207 267	404 595	10 217	**4660**
окт. 05	2005	1214	6055	272 533	529 378	10 539	**5723**
ноя. 05	1532	980	6126	155 956	513 734	10 470	**5133**
дек. 05	1301	1210	5905	141 797	496 039	10 341	**4130**

* Фактические данные ПАО «ММК».

** По данным аналитического агентства «Металл-Курьер».

Таблица 2.5

Характеристика связи цены и факторов

Независимые переменные		**Регрессионные коэффициенты**	**Коэффициенты корреляции**
X1	Поставка на внутренний рынок, тыс. т	2,009	0,772
X2	Поставка на экспорт, тыс. т	–1,076	0,806
X3	Цены на лом, Турция, cif, руб./т	0,136	0,768
X4	Поставка на ММК, тыс. т	–0,925	0,644
X5	Остаток лома на ММК, тыс. т	0,708	0,393
X6	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т	0,326	0,837

Примечание. Для осуществления расчетов применяем пакет STATISTICA, а именно модуль «Множественная регрессия» (*Multiple Regression*).

Таблица 2.6

Взаимозависимость факторов

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	–	–0,089	0,004	–0,452	–0,035	0,001
X2	–0,089	–	0,001	0,056	–0,102	–0,021
X3	0,004	0,001	–	0,038	–0,016	–0,008
X4	–0,452	0,056	0,038	–	–0,028	–0,005
X5	–0,035	–0,102	–0,016	–0,028	–	0,018
X6	0,001	–0,021	–0,008	–0,005	0,018	–

Результаты прогнозирования приведены в табл. 2.7 Коэффициент детерминации для модели составляет $R^2 = 0{,}91$. (Коэффициент детерминации — это квадрат коэффициента линейной корреляции между зависимой переменной и прогностической функцией.) Это означает, что отобранные факторы на 91% объясняют дисперсию зависимой переменной — цены на лом черных металлов.

Таблица 2.7

Прогноз закупочных цен ММК на лом черных металлов

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т	Поставка на экспорт, тыс. т	Цены на лом, Турция, cif, руб./т	Поставка на ММК, тыс. т	Остаток лома на ММК, тыс. т	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т	Прогноз цен ММК на лом, руб./т	Закупочные цены ММК на лом, руб./т	Отклонения	
	Коэффициенты регрессии									
	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y			
	2,01	–1,08	0,14	–0,93	0,71	0,33	–1570,3		руб./т	%
янв. 06	532	576	5937	51	354	10 037	3164	**4336**	**1172**	**27,03**
фев. 06	875	364	6569	53	256	10 178	4142	**4773**	**631**	**13,21**
мар. 06	1346	573	6829	91	174	11 150	5122	**5430**	**308**	**5,68**
апр. 06	1652	925	7308	204	180	11 583	5464	**5430**	**–34**	**–0,63**
май. 06	1776	1199	7036	300	292	11 583	5371	**5133**	**–238**	**–4,64**
июн. 06	1816	1298	7717	295	345	12 277	5707	**5800**	**93**	**1,60**
июл. 06	1980	1301	7536	371	470	12 650	6150	**6372**	**222**	**3,49**
авг. 06	2128	1588	6771	410	609	12 177	5942	**6726**	**784**	**11,65**
сен. 06	2171	974	7248	393	714	12 864	7066	**6608**	**–458**	**–6,93**
окт. 06	2037	757	7334	443	827	13 700	7350	**6281**	**–1069**	**–17,01**
ноя. 06	1815	901	7386	390	881	13 575	6804	**6281**	**–523**	**–8,32**
дек. 06	1692	1008	7525	275	814	13 013	6336	**6281**	**–55**	**–0,87**

На рис. 2.5 видно, что математическая модель достаточно точно показывает динамику цен в течение года, есть основания использовать ее для долгосрочного прогнозирования. Прогнозирование на краткосрочные периоды требует ежемесячного пересчета для уточнения модели.

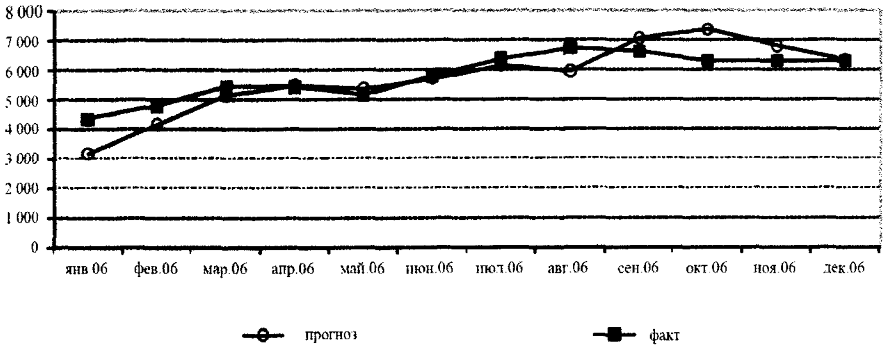

Рис. 2.5. Сопоставление прогнозных и фактических закупочных цен ПАО «ММК» на лом черных металлов в 2006 г.

Наиболее высокие ошибки прогноз показывает в январе-феврале (27%), августе (12%) и октябре (17%). Средняя абсолютная ошибка прогноза составляет 466 руб./т, средняя относительная ошибка — 8,4%, среднеквадратическая ошибка прогноза — 593 руб./т.

Ошибки (т. е. отклонения факта от прогноза) объясняются воздействием неучтенных в модели факторов. В частности, отклонение в январе-феврале связано с суровыми зимними условиями в 2006 г., которые привели к осложнению и практическому прекращению ломосбора на территории России. В результате первые месяцы года сталепроизводители работали в основном за счет накопленных накануне остатков на складах, поступление лома было минимальным, что привело к существенному росту цен.

По аналогии с прошлыми годами в июле-августе 2006 г. прогноз показывает снижение цен на рынке, а в сентябре-октябре, наоборот, рост. Однако летом 2006 комбинаты повели себя иначе. Низкий уровень ломосбора на территории страны в первой половине года (в связи с затяжной зимой) и недостаточные объемы поступления металлолома потребителям явились причиной того, что к концу первого полугодия на складах комбинатов оставалось не более 30–40% необходимого уровня складских запасов. В результате уже в июле потребители приступили к формированию зимних запасов на складах, что повлекло за собой рост цен. Ценовой максимум в 2006 г. был достигнут не в октябре, как в предыдущие годы, а в августе, и в сентябре уже началось постепенное снижение уровня цен.

Еще одним фактором такой динамики послужил существенный рост потребления на рынке в связи с вводом новых производственных мощностей. В частности, ММК в 2006 г. запустил две электросталеплавильные печи, в результате потребность в привозном металлоломе выросла с 1,9 млн тонн в 2005 г. до 3,2 млн тонн в 2006 г., прирост составил 65,4%. Рост потребности ведет к обострению конкуренции на рынке, и, так как цена является основным рычагом привлечения лома, комбинаты начинают вести активную ценовую политику, стараясь регулировать потоки лома.

Кроме того, на рыночную конъюнктуру оказывают влияние политические факторы, реализация различных государственных программ — лицензирование поставщиков металлолома, изменение экспортных пошлин, изменение правил налогообложения ломозаготовительных организаций (например, введение льготного режима по налогу на добавленную стоимость для ломоперерабатывающих организаций). Также значительное влияние на цены оказывает внутренняя политика организации — волевые решения менеджеров, наличие оборотных средств для осуществления расчетов с поставщиками и формирования запасов на складах.

Таким образом, одной из основных сложностей в получении точных прогнозов экономических показателей являются неожиданные и важные сдвиги в ключевых экономических факторах, а также влияние социально-экономических факторов, которые невозможно учесть с помощью математики. Очевидно, что для корректировки математического прогноза, для принятия обоснованных решений в области ценообразования важно также опираться на опыт, знания и интуицию специалистов [17]. Для этих целей используются методы экспертных оценок (см. главу 4 ниже). В состав экспертной комиссии целесообразно включить, во-первых, высококвалифицированных опытных специалистов, непосредственно участвующих в процессе ценообразования и занимающихся реализацией лома черных металлов (руководителей отделов сбыта, маркетинга и сотрудников данных отделов), а также независимых аналитиков, оказывающих информационные и консультационные услуги на рынке (представителей аналитических агентств). Сбор экспертной информации для целей прогнозирования цен на лом предлагается проводить ежемесячно. Прогнозные оценки экспертов могут быть получены на 1 месяц вперед и на длительный период — до 1 года. Полученная от экспертов информация позволяет скорректировать прогноз, полученный с помощью метода наименьших квадратов, и выработать «грамотную» ценовую стратегию и стратегию поведения на рынке (подходящих моментов для закупа и реализации металлолома).

Таким образом, в ходе анализа реальных данных установлено, что эконометрическая регрессионная модель достаточно точно описывает динамику цен на рынке лома в течение года, поэтому есть основания использовать ее для долгосрочного прогнозирования. С другой стороны, можно отметить существенные отклонения в отдельные периоды, что связано в первую очередь с действием неучтенных в модели факторов. Учесть их влияние и скорректировать результаты, полученные с помощью метода наименьших квадратов, возможно с помощью метода экспертных оценок. Применение статистических и экспертных методов в совокупности для целей прогнозирования цен на лом черных металлов позволяет ломоперерабатывающему предприятию своевременно реагировать на изменения рыночных факторов и строить с учетом этого свою ценовую политику.

2.5. О выборе вида регрессионной модели

Одни и те же данные можно обрабатывать различными способами. Например, как уже отмечалось, функцию спроса можно приближать линейной зависимостью или степенной. Можно пробовать применить квадратическую зависимость или многочлен третьего порядка и т. д. Какую же эконометрическую модель использовать? Очевидно, ту, которая лучше других соответствует реальным данным. Но что значит «лучше соответствует»? Как измерять качество модели?

Основной показатель качества регрессионной модели. На первый взгляд, показателем отклонений данных от модели может служить остаточная сумма квадратов SS. Чем этот показатель меньше, тем приближение лучше, значит, и модель лучше описывает реальные данные. Однако это рассуждение годится только для моделей с одинаковым числом параметров. Ведь если добавляется новый параметр, по которому можно минимизировать, то и минимум, как правило, оказывается меньше.

В качестве основного показателя качества регрессионной модели используют оценку остаточной дисперсии (т. е. дисперсии погрешностей e_k), скорректированную на число m параметров, оцениваемых по наблюдаемым данным:

$$\widehat{\sigma}^2(m) = \frac{SS}{n-m},$$

где, как и раньше, n — объем данных (число векторов, по которым восстанавливается зависимость). В случае задачи восстановления линейной функции одной переменной, рассмотренной в начале главы, оценка остаточной дисперсии имеет вид

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SS}{n-2},$$

поскольку число оцениваемых параметров $m = 2$.

Почему эта формула отличается от приведенной в разделе 2.1? Там в знаменателе n, а здесь — $(n - 2)$. Дело в том, что там была рассмотрена непараметрическая теория при большом объеме данных (при $n \to \infty$). А при безграничном возрастании n разница между n и $(n - 2)$ сходит на нет; точнее, отношение этих величин стремится к 1).

Однако *при подборе вида модели* знаменатель дроби, оценивающей остаточную дисперсию, приходится корректировать на число параметров. Если этого не делать, то придется заключить, что всегда многочлен второй степени лучше соответствует данным, чем линейная функция, многочлен третьей степени лучше приближает исходные данные, чем многочлен второй степени, и т. д. В конце концов доходим до многочлена степени $(n - 1)$ с n коэффициентами, который проходит через все заданные точки (существование такого многочлена доказывают в курсе высшей алгебры). Но его прогностические возможности, скорее всего, существенно меньше, чем у линейной функции. *Излишнее усложнение статистических моделей вредно.*

Типовое поведение скорректированной оценки остаточной дисперсии

$$\nu(m) = \widehat{\sigma}^2(m),$$

в зависимости от числа оцениваемых параметров m в случае расширяющейся системы моделей выглядит так. Сначала наблюдаем заметное убывание. Затем оценка остаточной дисперсии колеблется около некоторой константы (теоретического значения дисперсии погрешности).

Поясним ситуацию на примере модели восстановления зависимости, выраженной многочленом:

$$x(t) = a \ + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... + a_{m-1} t^{m-1}$$

(в этой модели число оцениваемых параметров, очевидно, равно m). Пусть эта модель справедлива при $m = m_0$. При $m < m_0$ в скорректированной оценке остаточной дисперсии учитываются не только погрешности измерений, но и соответствующие (старшие) члены многочлена (предполагаем, что коэффициенты при них отличны от 0). При $m \geq m_0$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \nu(m) = \sigma^2.$$

Следовательно, скорректированная оценка остаточной дисперсии будет колебаться около указанного предела. Поэтому в качестве оценки неизвестной статистику степени многочлена (полинома) можно использовать, например, первый локальный минимум скорректированной оценки остаточной дисперсии, т. е.

$$m^* = \min\{m : \nu(m-1) > \nu(m), \quad \nu(m) \leq \nu(m+1)\}.$$

В работе [14] найдено предельное распределение этой оценки степени многочлена.

Теорема 2.2. При справедливости некоторых внутриматематических условий регулярности

$$\lim_{n \to \infty} P(m^* < m_0) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} P(m^* = m_0 + u) = \lambda(1-\lambda)^u, \quad u = 0, 1, 2, ...,$$

где

$$\lambda = \Phi(1) - \Phi(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \approx 0,68268.$$

Таким образом, предельное распределение оценки m^* степени многочлена (полинома) является геометрическим (одно из известных в теории вероятностей параметрических семейств распределений). Это означает, в частности, что оценка не является состоятельной. При этом вероятность получить меньшее значение, чем истинное, исчезающе мала. Далее имеем:

$$P(m^*=m_0)\to 0{,}68268,\quad P(m^*=m_0+1)\to 0{,}68268(1-0{,}68268)=0{,}21663,$$

$$P(m^*=m_0+2)\to 0{,}68268(1-0{,}68268)^2=0{,}068744,$$

$$P(m^*=m_0+3)\to 0{,}68268(1-0{,}68268)^3=0{,}021814...$$

Разработаны и иные методы оценивания неизвестной степени многочлена, например, путем многократного применения процедуры проверки адекватности регрессионной зависимости с помощью статистики Фишера [14]. Предельное поведение оценок — таково же, как в приведенной выше теореме, только значение параметра λ иное. Разработаны также состоятельные оценки степени полинома [15].

Регрессия как условное математическое ожидание. Во всех рассмотренных выше постановках вид регрессионной зависимости задавался исследователем. Это линейная функция, или многочлен, или элемент иного параметрического семейства. Однако откуда уверенность, что семейство выбрано правильно? А если исследователь ошибся? Тогда к случайным ошибкам добавляется методическая. Например, данные приближаются линейной функцией, а на самом деле зависимость квадратическая. Тогда разность между этими функциями (тоже квадратическая функция) и есть методическая ошибка.

Избежать методической ошибки можно, не задавая априори вид регрессионной зависимости. Продемонстрируем это на примере оценивания условного математического ожидания.

Рассмотрим общее понятие регрессии как условного математического ожидания. Пусть случайный вектор $(x(\omega), y(\omega))$ (здесь ω — элементарный исход опыта) имеет плотность $p(x, y)$. Как известно из любого курса теории вероятностей, плотность условного распределения $y(\omega)$ при условии $x(\omega)=x_0$ имеет вид

$$p(y|x)=p\left(y|x(\omega)=x_0\right)=\frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy}.$$

Условное математическое ожидание, т. е. регрессионная зависимость y от x, имеет вид

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yp(y|x)dy=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy}.$$

Таким образом, для нахождения оценок регрессионной зависимости достаточно найти оценки совместной плотности распределения вероятности $p_n(x,y)$ такие, что

$$p_n(x,y)\to p(x,y)p_n(x,y)\to p(x,y)$$

при $n\to\infty$. Тогда непараметрическая оценка регрессионной зависимости, построенная с помощью замены неизвестной исследователю плотности совместного распределения на непараметрическую состоятельную оценку этой плотности, т. е.

$$f_n(x)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} yp_n(x,y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,y)dy},$$

при $n\to\infty$ является состоятельной оценкой регрессии как условного математического ожидания:

$$f_n(x)\to f(x).$$

Общий подход к построению непараметрических оценок плотности распределения вероятностей развит в [18].

Регрессионному анализу (т. е. методам восстановления зависимостей) посвящена огромная литература (по нашей оценке, актуальны (т. е. не устарели) не менее 100 тыс. книг и статей на различных языках). Он хорошо представлен в программных продуктах по анализу данных, особенно та его часть, которая связана с методом наименьших квадратов.

2.6. Непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых

Рассмотрим несколько конкретных практически важных задач регрессионного анализа. Они нужны для решения организационно-экономических проблем прогнозирования на промышленном предприятии [12]. В настоящем разделе в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели (т. е. без предположения о нормальности распределения погрешностей) получим асимптотическое распределение точки пересечения (встречи) двух регрессионных линейных зависимостей. Для этого на основе метода линеаризации выпишем выражения для асимптотической дисперсии точки встречи и границ доверительного интервала для нее [13].

Постановка задачи. Пусть зависимость от времени t некоторого показателя $x_1(t)$ технического уровня или качества продукции предприятия «Альфа» описывается линейной функцией

$$x_1(t) = a_1 t + d_1.$$

Пусть аналогичный показатель у его конкурента (ПАО «Бета») также описывается линейной функцией, но с другими коэффициентами:

$$x_2(t) = a_2 t + d_2.$$

Предположим, что предприятие «Альфа» находится в положении догоняющей стороны. Это значит, что в рассматриваемый момент времени t_0 (например, «сегодня») значение показателя у его продукции ниже: $x_1(t_0) < x_2(t_0)$, но темп роста у предприятия «Альфа» выше, чем у конкурента: $a_1 > a_2$.

Возникает естественный вопрос — когда предприятие «Альфа» догонит конкурента? Другими словами, в какой момент времени будет выполнено равенство $x_1(t) = x_2(t)$? Решая относительно t уравнение

$$a_1 t + d_1 = a_2 t + d_2,$$

получаем, что встреча произойдет в момент

$$t_{\text{В}} = \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}.$$

Представляют интерес еще две величины. Во-первых, уровень качества, при котором предприятие «Альфа» сравняется с конкурентом, т. е. общий уровень качества в момент встречи:

$$x = x_1\left(t_{\text{В}}\right) = x_2\left(t_{\text{В}}\right) = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2}.$$

Во-вторых, временной лаг, т. е. величина отставания предприятия «Альфа» в рассматриваемый момент времени t_0. В какой (более ранний) момент времени t_k конкурент имел тот уровень качества, которого предприятие «Альфа» достигло сейчас? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение $x_2(t) = x_1(t_0)$. Решением является

$$t_k = \frac{x_1\left(t_0\right) - d_2}{a_2}.$$

Следовательно, предприятие «Альфа» отстает на

$$L = t_0 - t_k = \frac{\left(a_2 - a_1\right)t_0 + d_2 - d_1}{a_2} = \frac{x_2\left(t_0\right) - x_1\left(t_0\right)}{a_2}$$

единиц времени (лет).

В реальных ситуациях линейные зависимости неизвестны. Однако известны исходные данные $(t_{i1}; x_{i1})$, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, для предприятия «Альфа» и $(t_{j2}; x_{j2})$, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, для предприятия-конкурента. При этом значения показателя $x_1(t_{i1}) = x_{i1}$ у предприятия «Альфа» в моменты времени t_{i1} представляются в виде

$$x_1(t_{i1}) = x_{i1} = a_1 t_{i1} + d_1 + e_{i1},\ i = 1, 2, \ldots, n(1),$$

где коэффициенты a_1 и d_1 неизвестны статистику, а e_{i1} — погрешности измерения (невязки). Будем считать, что e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D\left(e_{i1}\right) = \sigma_1^2$, неизвестной статистику.

Для предприятия-конкурента справедливо аналогичное представление

$$x_2(t_{j2}) = x_{j2} = a_2 t_{j2} + d_2 + e_{j2},\ j = 1, 2, \ldots, n(2),$$

где коэффициенты a_2 и d_2 неизвестны статистику, а e_{j2} — погрешности измерения (невязки). Примем, что e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D\left(e_{j2}\right)=\sigma_2^2$, неизвестной статистику.

Примем, что две совокупности случайных величин e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, независимы между собой. В каждой совокупности случайные величины одинаково распределены, но функции распределения, соответствующие разным совокупностям (т. е. предприятию «Альфа» и предприятию-конкуренту), могут различаться между собой.

Подчеркнем, что в рассматриваемой вероятностно-статистической модели не предполагается, что эти функции распределения входят в какое-либо параметрическое семейство распределений (в частности, не предполагаем, что невязки имеют нормальное распределение). Это и значит, что рассматривается непараметрическая постановка. Однако считаем, что объемы данных $n(1)$ и $n(2)$ достаточно велики, так что можно применять Центральную предельную теорему и приближать совместное распределение оценок метода наименьших квадратов с помощью многомерного нормального распределения.

Итак, решение задачи о точке встречи получим в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели. Весьма частный случай, когда невязки e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, имеют нормальное распределение, рассмотрен в [26].

Метод решения. Рассмотрим метод решения задачи о встрече. Вместо неизвестных статистику зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будем использовать их оценки $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$, полученные методом наименьших квадратов. Для этого необходимо оценить коэффициенты по правилам, полученным в разделе 2.1, а затем рассчитать оценки момента встречи $t_{\text{В}}^*$, уровня качества в момент встречи $x^* = x_1^*\left(t_{\text{В}}^*\right) = x_2^*\left(t_{\text{В}}^*\right)$ и временного лага (величины отставания)

$$L^* = \frac{x_2^*(t_0) - x_1^*(t_0)}{a_2^*},$$

используя оценки коэффициентов зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ вместо неизвестных истинных коэффициентов.

Полезным является, как и в разделе 2.1, использование центрирования средними значениями независимой переменной при параметризации зависимостей:

$$x_1(t) = a_1(t - t_{\text{ср}}(1)) + b_1 = a_1 t + d_1,$$

$$x_2(t) = a_2(t - t_{\text{ср}}(2)) + b_2 = a_2 t + d_2,$$

где

$$t_{\text{ср}}(1) = \frac{t_{11} + t_{21} + \ldots + t_{n(1)1}}{n(1)}, \quad t_{\text{ср}}(2) = \frac{t_{12} + t_{22} + \ldots + t_{n(2)2}}{n(2)}. \tag{2.9}$$

Таким образом,

$$d_k = b_k - a_k t_{\text{ср}}(k), k = 1, 2.$$

Дело в том, что асимптотическое описание совместного распределения коэффициентов проще в случае центрированной зависимости, в частности, оценки коэффициентов $a_k^*, b_k^*, k = 1, 2,$ асимптотически независимы.

Как известно (раздел 2.1), оценки метода наименьших квадратов имеют вид

$$a_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n(k)} x_{ik}\left(t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right)}{\sum_{i=1}^{n(k)}\left(t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right)^2}, \tag{2.10}$$

$$b_k^* = x_{\text{ср}}(k) = \frac{x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{n(k)k}}{n(k)}, \quad k = 1, 2. \tag{2.11}$$

Точечные оценки момента встречи $t_{\text{В}}^*$, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^* выражаются через оценки коэффициентов линейных зависимостей так:

$$t_{\text{В}}^* = \frac{d_2^* - d_1^*}{a_1^* - a_2^*} = \frac{b_2^* - b_1^* + a_1^* t_{\text{ср}}(1) - a_2^* t_{\text{ср}}(2)}{a_1^* - a_2^*}, \tag{2.12}$$

$$x^* = \frac{a_1^* d_2^* - a_2^* d_1^*}{a_1^* - a_2^*} = \frac{a_1^* b_2^* - a_2^* b_1^* + a_1^* a_2^* \left(t_{\text{ср}}(1) - t_{\text{ср}}(2)\right)}{a_1^* - a_2^*}, \qquad (2.13)$$

$$L^* = \frac{\left(a_2^* - a_1^*\right) t_0 + d_2^* - d_1^*}{a_2^*} = \frac{\left(a_2^* - a_1^*\right) t_0 + b_2^* - b_1^* + a_1^* t_{\text{ср}}(1) - a_2^* t_{\text{ср}}(2)}{a_2^*}, \qquad (2.14)$$

Из приведенных формул вытекает, что

$$t_{\text{В}}^* = f_1\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*\right), \quad x^* = f_2\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*\right), \quad L^* = f_1\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*\right),$$

где

$$f_1\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \frac{z_4 - z_3 + z_1 t_{\text{ср}}(1) - z_2 t_{\text{ср}}(2)}{z_1 - z_2}$$

$$f_2\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \frac{z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 \left(t_{\text{ср}}(1) - t_{\text{ср}}(2)\right)}{z_1 - z_2},$$

$$f_3\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \frac{\left(z_2 - z_1\right) t_0 + z_4 - z_3 + z_1 t_{\text{ср}}(1) - z_2 t_{\text{ср}}(2)}{z_2}.$$

Поскольку все входящие в полученные формулы моменты времени предполагаются заданными (детерминированными), то интересующие нас оценки задаются гладкими функциями от четырехмерного вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ оценок метода наименьших квадратов коэффициентов в линейных зависимостях.

Рассмотрим асимптотическое распределение вектора оценок МНК в рамках описанной выше непараметрической вероятностно-статистической модели (см. раздел 2.1). Оценки $a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*$ являются несмещенными, их дисперсии таковы:

$$D\left(a_k^*\right) = \frac{\sigma_k^*}{\sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right)^2}, \quad D\left(b_k^2\right) = \frac{\sigma_k^2}{n(k)}, \quad k = 1, 2.$$

Отметим, что в соответствии с принятыми предположениями все четыре дисперсии стремятся к 0 при безграничном росте $n(1)$ и $n(2)$.

Все ковариации вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ равны 0. Для пар координат с различающимися нижними индексами это вытекает из предположения о независимости между собой совокупностей невязок, соответствующим измерениям значений двух разных линейных функций. Для пар координат с одинаковыми нижними индексами, т. е. для пар (a_1^*, b_1^*) и (a_2^*, b_2^*), это установлено в разделе 2.1. Таким образом, в ковариационной матрице вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ отличны от 0 только элементы, стоящие на главной диагонали, т. е. дисперсии.

Каждый из векторов (a_1^*, b_1^*) и (a_2^*, b_2^*) является суммой $n(1)$ и $n(2)$ слагаемых соответственно. Если каждое из слагаемых мало по сравнению со всей суммой, т. е. если

$$\lim_{n(k)\to\infty} \max_{1\le i\le n(k)} \left|t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right| / \left\{\sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right)^2\right\}^{1/2} = 0, \quad k = 1, 2,$$

то при больших $n(1)$ и $n(2)$ распределение вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ приближается нормально распределенным случайным вектором с независимыми координатами. Математические ожидания и дисперсии координат приближающего вектора совпадают с одноименными характеристиками вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$. Другими словами, вектор $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ является асимптотически нормальным с указанными выше параметрами.

Рассмотрим распределение функции от вектора оценок МНК. Если функция $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ достаточно гладкая, то согласно методу линеаризации (см. [18, п. 4.4])

$$f(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) - f(a_1, a_2, b_1, b_2) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(a_1^* - a_1\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(a_2^* - a_2\right) + \frac{\partial f}{\partial z_3}\left(b_1^* - b_1\right) + \frac{\partial f}{\partial z_4}\left(b_2^* - b_2\right)$$

с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка.

Как показано выше, правая часть последней формулы приближается суммой четырех независимых нормально распределенных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Следовательно, функция $f(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ от вектора оценок МНК является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $f(a_1, a_2, b_1, b_2)$, совпадающим с теоретическим значением, и дисперсией

$$Df(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 D(a_1^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 D(a_2^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^2 D(b_1^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 D(b_2^*).$$

Подставив приведенные выше значения дисперсий, получаем, что

$$Df(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n(1)} \left(t_{i1} - t_{\text{ср}}(1)\right)^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n(2)} \left(t_{i2} - t_{\text{ср}}(2)\right)^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{n(1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{n(2)}.$$

Асимптотическое решение. Рассмотрим асимптотическое распределение момента встречи. Начнем с функции $t_{\text{в}}^* = f_1(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$. Имеем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{z_3 - z_4 + z_2\left(t_{\text{ср}}(2) - t_{\text{ср}}(1)\right)}{(z_1 - z_2)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \frac{z_4 - z_3 + z_1\left(t_{\text{ср}}(1) - t_{\text{ср}}(2)\right)}{(z_1 - z_2)^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_3} = -\frac{1}{z_1 - z_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = -\frac{1}{z_1 - z_2}\ldots$$

В приведенных выше формулах частные производные можно брать как в точке (a_1, a_2, b_1, b_2), так и в точке $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$. Различие — бесконечно малые величины более высокого порядка. Поскольку истинные значения коэффициентов линейных зависимостей неизвестны, частные производные будем брать в точке.

Из последних формул с помощью несложных преобразований получаем, что

$$D(t_B^*) = \left(\frac{b_1^* - b_2^* + a_2^*(t_{ср}(2) - t_{ср}(1))}{(a_1^* - a_2^*)^2}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n(1)} (t_{i1} - t_{ср}(1))^2} +$$

$$+\left(\frac{b_1^* - b_2^* + a_1^*(t_{ср}(2) - t_{ср}(1))}{(a_1^* - a_2^*)^2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n(2)} (t_{i2} - t_{ср}(2))^2} + \frac{1}{(a_1^* - a_2^*)^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{n(1)} + \frac{\sigma_2^2}{n(2)}\right). \qquad (2.15)$$

Для практического применения полученных результатов остается заменить неизвестные дисперсии невязок σ_1^2 и σ_2^2 на их состоятельные оценки. При больших объемах данных $n(1)$ и $n(2)$ используют оценки дисперсий невязок

$$\sigma_1^2 * = \frac{SS(1)}{n(1)}, \quad \sigma_2^2 * = \frac{SS(2)}{n(2)},$$

где $SS(1)$ и $SS(2)$ — соответствующие остаточные суммы квадратов,

$$SS(k) = \sum_{i=1}^{n(k)} \left(x_{ik} - x_k^*(t_{ik})\right)^2, \quad k = 1, 2. \qquad (2.16)$$

Иногда рекомендуют применение несмещенных оценок дисперсий невязок

$$(\sigma_1^2)** = \frac{SS(1)}{n(1) - 2}, \quad (\sigma_2^2)** = \frac{SS(2)}{n(2) - 2}. \qquad (2.17)$$

Ясно, что с ростом объемов данных $n(1)$ и $n(2)$ различие между двумя последними формулами исчезает.

На основе полученных результатов легко указать методы доверительного оценивания и проверки гипотез для момента встречи $t_В$. Так, асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p, имеет вид

$$\left[t_В^* - U(p)\{D^*(t_В^*)\}^{1/2};\ t_В^* + U(p)\{D^*(t_В^*)\}^{1/2}\right]. \qquad (2.18)$$

Здесь $D^*(t_{\text{в}}^*)$ — только что описанная оценка дисперсии случайной величины $t_{\text{В}}$ (с использованием той или иной оценки дисперсий невязок), $U(p)$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $(1+p)/2$, т. е. $\Phi(U(p)) = \frac{1+p}{2}$, где $\Phi(w)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Пример. В качестве примера рассмотрим показатели технического уровня продукции (в условных единицах) двух предприятий — ПАО «Альфа» и ПАО «Бета». Приведенные в табл. 2.8 данные показывают, что в 1999 г. первое предприятие отстает от второго, но постепенно сокращает разрыв, более быстрыми темпами наращивая показатель технического уровня. Когда же оно догонит второе предприятие?

Таблица 2.8

Показатели технического уровня продукции двух предприятий
(в условных единицах, на конец года)

Показатель	Годы						
	1999	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**
Условные моменты времени $t_{i1} = t_{i2}$	1	2	3	4	5	6	7
Показатели ПАО «Альфа» x_{i1}	0,1	0,2	0,6	0,5	0,8	0,9	1,3
Восстановленные значения (предприятие «Альфа»)	0,06	0,25	0,44	0,63	0,82	1,01	1,2
Показатели ПАО «Бета» x_{i2}	0,6	0,95	0,8	1,2	1,1	1,2	1,4
Восстановленные значения (предприятие «Бета»)	0,71	0,82	0,93	1,04	1,15	1,26	1,37

Для проведения расчетов естественным образом введем условные моменты времени (табл. 2.8). Методом наименьших квадратов восстановим линейные независимости. По формуле (2.9) получаем, что $t_{\text{ср}}(1) = t_{\text{ср}}(2) = 4$. По формулам (2.10) и (2.11) находим оценки коэффициентов линейных зависимостей

$$\dot{a}_1^* = 0{,}19,\ \dot{a}_2^* = 0{,}11,\ \hat{a}_1^* = 0{,}63,\ \hat{a}_2^* = 1{,}04.$$

Восстановленные зависимости имеют вид

$$x_1^*(t) = 0{,}19(t-4) + 0{,}63, \quad x_2^*(t) = 0{,}11(t-4) + 1{,}04.$$

Восстановленные значения приведены в табл. 2.2.

Оценку момента встречи $t_в^*$ определим по формуле (2.12)

$$t_{\text{В}}^* = \frac{1{,}04 - 0{,}63 + 0{,}19 \cdot 4 - 0{,}11 \cdot 4}{0{,}19 - 0{,}11} = 9{,}13.$$

Другими словами, значения показателей технического уровня предприятий сравняются в начале 2008 г. Это общее значение найдем по формуле (2.13):

$$x^* = \frac{0{,}19 \cdot 0{,}6 - 0{,}11 \cdot (-0{,}13) + 0{,}19 \cdot 0{,}11(4-4)}{0{,}19 - 0{,}11} = 1{,}6.$$

Для определения временного лага, т. е. величины, показывающей на сколько ПАО «Альфа» отстает от предприятия-конкурента, для определенности, в 2004 г., воспользуемся формулой (2.14)

$$L^* = \frac{(0{,}11 - 0{,}19) \cdot 6 + 0{,}6 - (-0{,}13)}{0{,}11} = 2{,}27.$$

Рассчитаем по формуле (2.18) асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $p = 0{,}95$. Для этого значения несмещенных оценок дисперсий невязок найдем по формуле (2.17), а значения остаточной суммы квадратов $SS(1)$ и $SS(2)$ определим по формуле (2.16). Получаем $\sigma_1^2 = 0{,}01382$, $\sigma_2^2 = 0{,}0157$. Асимптотическую дисперсию момента встречи найдем по формуле (2.15): $D(t_{\hat{a}}^*) = 4{,}379$. Поскольку $U(p) = 1{,}96$ при $p = 0{,}95$, то доверительный интервал таков (рис. 2.6):

$$\left[9{,}13 - 1{,}96\sqrt{4{,}379};\quad 9{,}13 + 1{,}96\sqrt{4{,}379}\right] = [5{,}028; 13{,}23].$$

Таким образом, возможно, что обгон уже состоялся (в 2004 или 2005 г.), но это не отражено в табл. 2.8 из-за погрешностей, искажающих зависимости.

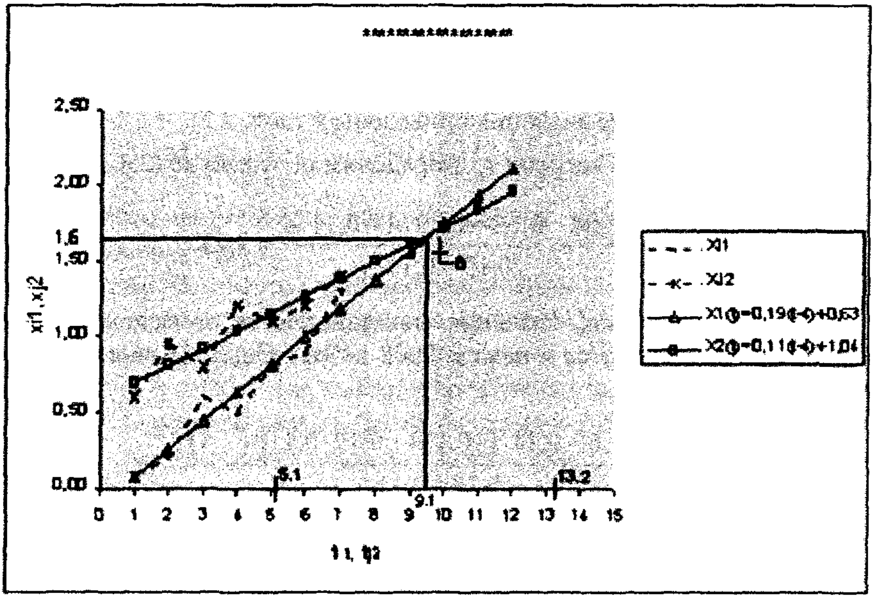

Рис. 2.6. Динамика показателей технического уровня двух предприятий, восстановленные зависимости и доверительное оценивание момента встречи

О практическом применении статистических оценок точки встречи. Необходимость получения приведенных выше результатов, касающихся оценок момента встречи $t_в^*$, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^*, была выявлена в результате решения прикладных проблем, возникших при разработке системы автоматического проектирования (САПР) стандартов на продукцию [10]. В этой системе реализуются функции информационного обеспечения и анализа данных о характеристиках качества группы отечественных и зарубежных образцов (марок, моделей) аналогичной продукции, требований нормативно-технической документации на эту продукцию, а также поддерживаются функции интерактивного (человеко-машинного) принятия решений по управлению качеством, сертификации и стандартизации.

Статистические методы в САПР стандартов используются для анализа распределений показателей качества продукции, исследования взаимосвязей показателей, выявления группировок продукции по уровню качества, анализа временных рядов и прогнозирования качества продукции. Основные проблемы программной реализации этих методов связаны с обеспечением интерактивного решения задач пользователями (инженерами по стандартизации и техническому регулированию), не имеющими специальной подготовки по статистическим методам. Кроме того, возникли специфические задачи, требующие совершенствования статистического аппарата, в частности задача сравнительного анализа тенденций развития отечественной и зарубежной групп продукции, решению которой и посвящены предыдущие страницы. Разработанное математическое и программное обеспечение применялось для анализа данных о характеристиках качества изделий электронной техники.

Разработанные в настоящем разделе методы могут быть использованы при решении различных практических задач, связанных с интервальной оценкой точки пересечения двух регрессионных прямых. В частности, они использованы для получения асимптотических дисперсий уровня качества в момент встречи и временного лага (величины отставания) и разработки методов доверительного оценивания этих величин, используемых в системах управления промышленными предприятиями [11].

2.7. Модель с периодической составляющей

Рассмотрим задачу восстановления зависимости $x = x(t)$ на основе набора n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — значения независимой переменной, а x_k — соответствующие им значения зависимой переменной.

При анализе экономических данных возникает необходимость использования моделей временных рядов, включающих три составляющие: трендовую (T), периодическую, или циклическую (S) и случайную (E). Рассматривают [22] аддитивную модель $T + S + E$ и мультипликативную модель $T \times S \times E$.

Простейшая аддитивная модель имеет вид

$$x_k = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k = a(t_k - \bar{t}) + d + f(t_k) + E_k,\ k = 1, 2, \ldots, n. \quad (2.19)$$

Здесь трендовая составляющая — линейная функция $a(t_k - \bar{t}) + d$ (как и в разделе 2.1, такая запись тренда предпочтительнее для облегчения выкладок); периодическая составляющая $f(t)$ обычно описывает сезонность, т. е. период известен (в зависимости от моделируемой организационно-экономической ситуации он равен году, неделе, суткам и т. п.); случайная составляющая представлена слагаемыми E_k, которые являются реализациями независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, неизвестной статистику. В модели (2.19) имеем:

$$e_k = f(t_k) + E_k, = 1, 2, \ldots, n.$$

В отличие от модели, изученной в разделе 2.1, отклонения от линейного тренда e_k в модели (2.19) не являются одинаково распределенными. Однако их распределения отличаются лишь сдвигами (на значения детерминированной периодической составляющей).

Соответствующая мультипликативная модель имеет вид

$$y_k = \left[Bt_k^a\right] \times f_1(t_k) \times \left[1 + \varepsilon_k\right], \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.20}$$

В (2.20) сомножители имеют описанный выше смысл. При логарифмировании модель (2.20) переходит в аналог модели (2.19), следовательно, достаточно рассматривать модель (2.19).

Практическая значимость этой модели очевидна. Однако расчетные методы, описанные в [22], являются эвристическими. Цель настоящего раздела — ***построить непараметрическую вероятностно-статистическую теорию прогноза временного ряда на базе линейного тренда с учетом аддитивной периодической составляющей.*** Изложение следует работе [20].

Следуя эвристическому подходу [22], изучим асимптотическое поведение оценок МНК a^* и d^*, заданных формулами (2.3), установим их асимптотическую нормальность в предположениях модели (2.19), а затем состоятельно оценим периодическую составляющую $f(t)$ и построим интервальный прогноз для $x(t)$. В частности, выявится целесообразность анализа данных за полное число лет (периодов). В отличие от [16] (см. также [17, п. 6.3], [18, п. 10.2]), длину периода оценивать не требуется, поскольку она задана из содержательных соображений (например, для данных раздела 2.4 — один год).

Асимптотические распределения оценок параметров. Из формулы (2.3) следует, что в принятых выше предположениях и обозначениях настоящего раздела

$$d^* = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \bar{t}\right) + d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = $$
$$= d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k. \tag{2.21}$$

Согласно Центральной предельной теореме оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием $d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right)$ и дисперсией σ^2 / n, оценка которой приводится ниже.

Из формул (2.3) и (2.21) вытекает, что

$$x_k - \bar{x} = a\left(t_k - \bar{t}\right) + d + e_k - d - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = a\left(t_k - \bar{t}\right) + e_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k,$$

$$\left(x_k - \bar{x}\right)\left(t_k - \bar{t}\right) = a\left(t_k - \bar{t}\right)^2 + e_k\left(t_k - \bar{t}\right) - \frac{\left(t_k - \bar{t}\right)}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по k обращается в 0, поэтому

$$a^* = a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k + a + \sum_{k=1}^{n} c_k f\left(t_k\right) + \sum_{k=1}^{n} c_k E_k, \quad c_k = \frac{\left(t_k - \bar{t}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \bar{t}\right)^2}. \tag{2.22}$$

Формулы (2.22) показывают, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием $a + \sum_{k=1}^{n} c_k f\left(t_k\right)$ и дисперсией

$$D\left(a^*\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D\left(E_k\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \bar{t}\right)^2}.$$

Отметим, что согласно условиям Центральной предельной теоремы многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (2.22) мало сравнительно со всей суммой, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \max\left|t_k - \bar{t}\right| / \left\{\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \bar{t}\right)^2\right\}^{1/2} = 0. \tag{2.23}$$

Условие (2.23) выполнено, если t_k образуют (полную, т. е. без пропусков) арифметическую прогрессию, число членов которой безгранично растет.

Итак, дисперсии оценок МНК параметров a^* и b^* линейного тренда — те же, что и при отсутствии сезонных искажений (см. раздел 2.1). А вот их математические ожидания зависят от периодической составляющей. Однако в случае

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n}\left(t_k-\overline{t}_{\text{ср}}\right)f(t_k)=0 \tag{2.24}$$

оценки a^* и b^* являются несмещенными.

Условия (2.24) — принципиально важные. Они являются необходимыми и достаточными для несмещенности и состоятельности оценок, рассмотренных в настоящем разделе.

Справедливости первого из условий (2.21) можно добиться, изменив в случае необходимости свободный член d в модели (2.19). Некоторая проблема состоит в том, какую сумму значений периодической составляющей приравнивать к 0 — за период (например, за год) или за всё время наблюдений (как и записано в (2.24)). С организационно-экономической точки зрения естественнее первое (т. е. приоритет отдается свойствам за период, интервал наблюдений может меняться, например, расширяться со временем). Когда оба варианта дают одно и то же?

Первое из условий (2.24) можно считать выиолненным, если t_i образуют (полную, т. е. без пропусков) арифметическую прогрессию, причем целое число шагов составляет один период (например, если измерения проводятся ежемесячно или раз в квартал, а период — год), и, кроме того, данные взяты за целое число периодов. Действительно, тогда естественно принять, что сумма значений периодической составляющей за период равна 0, поскольку в противном случае, как уже отмечалось, можно было бы скорректировать свободный член (т. е. по тем же соображениям, по которым принято условие нулевого математического ожидания случайных составляющих E_i).

Для справедливости второго из условий (2.24) достаточно добавить к сказанному предположения симметричности множества $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ относительно $\overline{t}$ (например, начала года) и четности периодической составляющей $f(t)$ относительно той же точки. Последнее выполнено, если, например, график $f(t)$ симметричен относительно середины года.

Несмещенность (в предположениях (2.24)) и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы и проверять статистические гипотезы, например о равенстве определенным значениям, прежде всего 0.

Асимптотическое распределение трендовой составляющей. Из формул (2.21) и (2.22) следует, что при справедливости (2.24)

$$M\left\{a^*\left(t-\bar{t}\right)+d^*\right\}=M\left(a^*\right)\left(t-\bar{t}\right)+M\left(d^*\right)=a\left(t-\bar{t}\right)+d,$$

т. е. оценка $y^*(t) = a^*(t_k - \bar{t}) + d^*$ трендовой составляющей $y(t) = a(t - \bar{t}) + d$ рассматриваемой зависимости является несмещенной. Поэтому

$$D\left(y^*(t)\right)=D\left(a^*\right)\left(t-\bar{t}\right)^2+2M\left\{\left(a^*-a\right)\left(d^*-d\right)\left(t-\bar{t}\right)\right\}+D\left(d^*\right).$$

При этом, поскольку погрешности E_k независимы в совокупности и $M(E_k) = 0$, то

$$M\left\{\left(a^*-a\right)\left(d^*-d\right)\left(t-\bar{t}\right)\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k\left(t-\bar{t}\right)M\left(E_k^2\right)=\frac{1}{n}\left(t-\bar{t}\right)\sigma^2\sum_{k=1}^{n}c_k=0.$$

Таким образом,

$$D\left(y^*(t)\right)=\sigma^2\left\{\frac{1}{n}+\frac{\left(t-\bar{t}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(t_k-\bar{t}\right)^2}\right\}. \tag{2.25}$$

Итак, оценка $y^*(t)$ является несмещенной и асимптотически нормальной. Для ее практического использования (построения доверительных интервалов, проверки статистических гипотез) необходимо уметь оценивать остаточную дисперсию $M\left(E_k^2\right)=\sigma^2$.

В частности, не представляет труда выписывание нижней и верхней границ для трендовой составляющей прогностической функции:

$$y_{\text{нижн}}(t)=a^*\left(t-\bar{t}\right)+d^*-\delta(t),\quad y_{\text{верх}}(t)=a^*\left(t-\bar{t}\right)+d^*+\delta(t),$$

где полуширина доверительного интервала $\delta(t)$ имеет вид

$$\delta(t)=U(\gamma)\sqrt{D(y^*(t))}=U(\gamma)\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}}. \qquad (2.26)$$

Здесь γ — доверительная вероятность, $U(\gamma)$ — квантиль нормального распределения порядка $\frac{1+\gamma}{2}$, т. е.

$$U(\gamma)=\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$$

где $\Phi(x)$— функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. При γ = 0,95 (наиболее применяемое значение) имеем $U(\gamma)=$ 1,96. В формуле (2.26) $D(y^*(t))$ — состоятельная оценка дисперсии $y^*(t)$. В соответствии с (2.25) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_k на известную статистику детерминированную функцию от t.

Математическое ожидание остаточной суммы квадратов. В точках t_k, k = 1, 2, ..., n, имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $y^*(t_k)$. Рассмотрим остаточную сумму квадратов

$$SS=\sum_{k=1}^{n}(y^*(t_k)-x_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\{(a^*-a)(t_k-\bar{t})+(d^*-d)-f(t_k)-E_k\}^2.$$

Напомним, что при отсутствии периодической составляющей используют (см. раздел 2.1 и [17, пп. 5.1, 5.2] состоятельные оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей, построенные на основе остаточной суммы квадратов

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{SS}{n}} \text{ или } \sigma^*=\sqrt{\frac{SS}{n-2}}.$$

В соответствии с формулами (2.21) и (2.22) при справедливости условий (2.24)

$$SS=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(t_k-\bar{t}\right)\sum_{j=1}^{n}c_jE_j+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E_j-f\left(t_k\right)-E_k\right\}^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j-f\left(t_k\right)-E_k\right\}^2=\sum_{k=1}^{n}SS_k.$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M\left(SS_k\right)=M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j-f\left(t_k\right)-E_k\right\}^2=$$

$$=M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}\left(f\left(t_k\right)+E_k\right)+$$

$$+M\left(f\left(t_k\right)-E_k\right)^2.$$

Поскольку E_k независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание, то

$$M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}^2=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right\}^2\sigma^2.$$

Далее,

$$-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}^2\left(f\left(t_k\right)+E_k\right)=-2\left\{c_k\left(t_k-\bar{t}\right)+\frac{1}{n}\right\}\sigma^2.$$

Наконец,

$$M\left(f\left(t_k\right)-E_k\right)^2=f^2\left(t_k\right)+\sigma^2.$$

На основе трех последних равенств можно показать, что при выполнении условия асимптотической нормальности (2.23)

$$\lim_{n\to\infty}M\left(SS_k\right)=f^2\left(t_k\right)+\sigma^2.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{SS}{n}\right)=\sigma^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2(t_k). \qquad (2.27)$$

В правой части (2.27) первое слагаемое соответствует вкладу случайной составляющей, второе — вкладу периодической составляющей.

В некоторых случаях второе слагаемое в правой части (2.27) может быть известно из предыдущего опыта или же оценено экспертами, однако в большинстве ситуаций целесообразно исходить из оценки периодической составляющей.

Оценивание сезонной компоненты. Рассматривают как параметрические, так и непараметрические подходы. Популярный метод исходит из того, что достаточно гладкую функцию можно разложить в ряд Фурье и получить хорошее приближение с помощью небольшого числа гармоник. В простейшем случае — это одна гармоника. Так, динамику индекса инфляции можно попытаться изучать с помощью модели

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}\,) + d + f(t_k) + E_k =$$

$$a\,(t_k - \bar{t}\,) + d + g\cos(2\pi t_k) + E_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

(время t измеряется в годах). Тогда неизвестные параметры a, b, g оцениваются методом наименьших квадратов.

Однако обычно нет оснований предполагать, что периодическая составляющая входит в то или иное параметрическое семейство функций. Приходится строить непараметрические оценки. Опишем одну из возможных постановок.

Пусть в согласии с предположениями (2.24) рассматривается целое число периодов, т. е. $n = mq$, где n — объем наблюдений, m — количество периодов, q — число наблюдений в одном периоде. Тогда в соответствии с определением периодической составляющей справедливы равенства

$$f(t_s)=f(t_{q+s})=f(t_{2q+s})=\ldots=f\left(t_{(m-1)q+s}\right),\quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ q. \qquad (2.28)$$

Если наблюдения проводятся ежемесячно в течение m лет, то число наблюдений в одном периоде q = 12, общий объем наблюдений

$n = 12m$, далее, s — номер месяца в году, $s = 1, 2, \ldots, 12$. Пусть g_s — общее значение в (2.28). Требуется оценить $g_1, g_2, \ldots, g_q$.

Естественный подход состоит в том, чтобы усреднить m значений x_k — $y^*(t_k)$, соответствующих моментам времени, отстоящим друг от друга на целое число периодов. Другими словами, усреднить «очищенные» от трендовой составляющей исходные данные, соответствующие одноименным месяцам различных лет. Речь идет об оценках

$$g_s^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{s+(j-1)q} - y^*\left(t_{s+(j-1)q}\right)\right), \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ q. \tag{2.29}$$

Оценка периодической составляющей распространяется на весь интервал наблюдений очевидным образом:

$$f^*(t_s) = f^*\left(t_{q+s}\right) = f^*\left(t_{2q+s}\right) = \ldots = f^*\left(t_{(m-1)q+s}\right) = g_s^*, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ q. \tag{2.30}$$

Сложив восстановленные значения трендовой и периодической оставляющей, получим оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей

$$x^*(t) = y^*(t) + f^*(t) = a^*\left(t - \overline{t}\right) + d^* + f^*(t). \tag{2.31}$$

Здесь оценки a^* и d^* находят по формулам (2.3), а оценки $f^*(t)$ — по формулам (2.29) – (2.30).

С помощью формулы (2.31) можно строить точечный прогноз, используя ее вне интервала наблюдений. Для этого достаточно распространить сезонную составляющую $f^*(t)$ вплоть до рассматриваемого момента времени по правилу (2.30) и суммировать ее с прогнозом трендовой составляющей $y^*(t)$. Интерполяция и экстраполяция на моменты времени t, не входящие в исходное множество $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ и множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов, может быть осуществлена путем линейной интерполяции ближайших значений или иным методом сглаживания.

Обсудим свойства оценок (2.29) – (2.31).

При безграничном росте объема данных и справедливости условий (2.23) и (2.24) оценки a^* и d^* параметров трендовой составляющей являются состоятельными и несмещенными, а потому, как можно показать, в рассматриваемых в настоящем разделе условиях суммы

(2.29) оценивают периодическую составляющую состоятельно (при $m \to \infty$) и несмещенно. Как следствие,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f^*(t_k)\right]^2-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^2(t_k)\to 0 \tag{2.32}$$

по вероятности при $n \to 0$. В соответствии с (2.27) последнее соотношение дает возможность оценить σ^2, а затем построить интервальный прогноз для трендовой составляющей согласно (2.26).

Отметим, что в рассматриваемой ситуации, как правило, n растет, увеличиваясь на величины, кратные q — числу наблюдений в одном периоде. Как следствие, уменьшаемое в (2.32) — константа, зависимости от n нет. Эти особенности связаны с тем, что выполнение условий (2.24) предполагает рассмотрение целого числа периодов.

Рассмотрим оценки (2.29) подробнее. Как вытекает из (2.19), (2.28) и (2.29),

$$g_s^*=f(t_s)-(a^*-a)\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(t_{s+(j-1)q}-\bar{t}\right)-(d^*-d)+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}E_{s+(j-1)q},\ s=1,\ 2,\ ...,\ q$$

С учетом (2.21), (2.22) и (2.24) получаем, что

$$g_s^*=f(t_s)-\left(\sum_{k=1}^{n}c_kE_k\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}t_{s+(j-1)q}-\bar{t}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E_k+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}E_{s+(j-1)q},\ s=1,\ 2,\ ...,q.$$

Таким образом,

$$g_s^*=f(t_s)+\sum_{k=1}^{n}h_{ks}E_k,\quad s=1,\ 2,\ ...,\ q. \tag{2.33}$$

где $h_{ks}=-c_kr_s-\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$, если $k\in\{s+(j-1)q, j=1,\ 2,\ ...,\ m\}$, и $h_{ks}=-c_kr_s-\frac{1}{n}$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, и $r_s=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(t_{s+(j-1)q}-\bar{t}\right)$.

Соотношение (2.33) означает, что рассматриваемые оценки есть суммы независимых случайных величин, а потому с помощью Центральной предельной теоремы можно построить доверительные интервалы для рассматриваемых значений периодической составляющей (в предположении справедливости условий (2.23)).

Интервальный прогноз. Точечный прогноз строят по формуле (2.28) на основе $x^*(t)$ — оценки зависимости, «очищенной» от случайной составляющей, но включающей трендовый и периодический компоненты. Если выполнены условия (2.24), то

$$Mx^*(t) = x(t) = a\,(t - \bar{t}\,) + d + f(t),$$

т. е. оценка $x^*(t)$ является несмещенной.

При справедливости условий (2.24) с учетом (2.21), (2.22) и (2.33) получаем, что для момента времени t, входящего в исходное множество $\{t_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ или в множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов,

$$x^*(t) - x(t) = (t - \bar{t}) \sum_{k=1}^{n} c_k E_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=1}^{n} h_{ks} E_k . \qquad (2.34)$$

В (2.34) при определении значений коэффициентов h_{ks} в качестве s следует взять номер наименьшего из исходных моментов времени $\{t_k, k = 1, 2, \dots, n\}$, отстоящих от рассматриваемого момента t на целое число периодов. С помощью (2.33) заключаем, что

$$x^*(t) - x(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{ks} E_k ,$$

где $w_{ks} = c_k (t - \bar{t} - r_s) + \dfrac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1, 2, \dots, m\}$, и $w_{ks} = c_k (t - \bar{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, и r_s — то же, что и в формуле (2.33).

В правой части формулы (2.34) стоит сумма независимых случайных величин, поэтому оценка $x^*(t)$ является асимптотически нормальной (при справедливости условий (2.23)) с математическим ожиданием $x(t)$ и дисперсией

$$D(x(t)) = \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 D(E_k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 . \qquad (2.35)$$

Следовательно, нижняя $x_{\text{нижн}}(t)$ и верхняя $x_{\text{верх}}(t)$ доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид:

$$x_{\text{нижн}}(t)=a^*(t-\bar{t})+d^*+f^*(t)-\Delta(t),\ x_{\text{верх}}(t)=a^*(t-\bar{t})+d^*+f^*(t)+\Delta(t),$$

где

$$\Delta(t)=U(\gamma)\sqrt{D^*(x^*(t))}=U(\gamma)\sigma^*\sqrt{\sum_{k=1}^{n}w_{ks}^2}\,. \qquad (2.36)$$

Здесь γ — доверительная вероятность, $U(\gamma)$ — квантиль нормального распределения порядка $\frac{1+\gamma}{2}$. В формуле (2.36) $D^*(x^*(t))$ — состоятельная оценка дисперсии точечного прогноза $x^*(t)$. В соответствии с (2.35) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_k на известную статистику детерминированную функцию от t. Величину σ^* рассчитывают согласно (2.27) и (2.32).

Подведем итоги. По сравнению с эвристическими алгоритмами, разобранными в [22] и других литературных источниках, разработанная в настоящем разделе теория позволила:

1) дать общее обоснование этим алгоритмам в рамках асимптотических методов математической статистики и указать условия их применимости (формула (2.23));

2) выявить принципиально важные условия (2.24), необходимые и достаточные для несмещенности и состоятельности рассматриваемых оценок;

3) построить доверительные интервалы для зависимости (прогностической функции) и ее трендовой составляющей.

В рамках математической статистики удается провести анализ не всех распространенных эвристических алгоритмов. Так, довольно часто рекомендуют вначале провести сглаживание («выравнивание») временного ряда, например, методом скользящих средних [22, с. 137]. При этом периодическая (сезонная) составляющая меняется, а погрешности (отклонения от суммы трендовой и периодической составляющих) становятся зависимыми случайными величинами, что делает невозможным применение описанных в настоящем разделе методов.

Пример применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей. Обработаем фактические данные ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» о закупочных ценах на лом черных металлов (табл. 2.4). Как показывают обсуждения в разд. 2.4, может быть использована рассмотренная в настоящем разделе аддитивная модель (2.19) линейного тренда с периодической составляющей. *Для облегчения понимания оставим из каждого* квартала данные только по одному месяцу. Введем условные моменты времени, а именно, будем измерять время в кварталах, начиная с первого квартала 2003 г. Исходные данные для демонстрации примера применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей — пары чисел (t_k, x_k), k = 1, 2, ..., 12, — представлены в табл. 2.9 в столбцах (3) и (4) соответственно.

Таблица 2.9

Построение модели прогнозирования цен на лом марки 3А

№ п/п	Период	Условные моменты времени	Закупочные цены, руб./т	Оценка тренда	Отклонения от оценки тренда	Восстановленные значения	Кажущиеся невязки
k		t_k	x_k	$y^*(t_k)$	$x_k - y^*(t_k)$	x_k^*	$x_k - x_k^*$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	янв. 03	1	2750	2800	–50	2424	326
2	апр. 03	2	3800	3012	788	3545	255
3	июл. 03	3	2900	3224	–324	2655	245
4	окт. 03	4	3100	3437	–337	3848	–748
5	янв. 04	5	2761	3649	–888	3273	–512
6	апр. 04	6	4602	3861	741	4394	208
7	июл. 04	7	3540	4073	–533	3504	36
8	окт. 04	8	5268	4286	982	4697	571
9	янв. 05	9	4307	4498	–191	4122	185
10	апр. 05	10	4779	4710	69	5243	–464
11	июл. 05	11	4071	4922	–851	4353	–280
12	окт. 05	12	5723	5135	588	5546	177

По формулам (2.3) найдем оценки параметров a^* и d^*, что позволяет построить оценку трендовой составляющей

$$y^*(t) = a^*(t - \bar{t}\,) + d^* = 212{,}26\,(t - 6{,}5) + 3967{,}17 = 212{,}26\,t + 2587{,}48.$$

Численные значения трендовой составляющей приведены в столбце (5) табл. 2.9.

Рассчитав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей (столбец (6) табл. 2.9), возведя их в квадрат и сложив, получаем остаточную сумму квадратов $SS = 4\,539\,214$ и $SS/n = SS/12 = 378\,267{,}82$.

Сгруппировав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей по месяцам (табл. 2.10), наглядно убеждаемся в наличии периодической составляющей. Взяв среднее арифметическое отклонений от тренда за конкретный месяц, рассчитываем оценку $f^*(t_s)$ периодической составляющей (в соответствии с формулой (2.29)). Результаты приведены в табл. 2.10.

Таблица 2.10

Оценивание периодической составляющей

Номер квартала s	**Месяц**	**Отклонения от тренда**			**Оценка $g_s^* = f^*(t_s)$ периодической составляющей**
		в 2003 г.	**в 2004 г.**	**в 2005 г.**	
1	Январь	-50	-888	-191	-376
2	Апрель	788	741	69	533
3	Июль	-324	-533	-851	-569
4	Октябрь	-337	982	588	411

Рассчитав по формуле (2.30) оценки периодической составляющей на весь интервал времени и сложив их с оценками трендовой составляющей, получаем в соответствии с формулой (2.31) оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей, т. е. восстановленные значения (столбец (7) табл. 2.9). Кажущиеся невязки, т. е. отклонения исходных значений закупочных цен от восстановленных значений, приведены в столбце (8) табл. 2.9. Сравнивая столбцы (6) и (8), убеждаемся в целесообразности введения в модель периодической составляющей. В 9 случаях из 12 абсолютные величины отклонений уменьшились, в остальных трех, хотя и возросли, но лишь до среднего уровня среди остальных.

Возведя в квадрат оценки периодической составляющей (табл. 2.10), сложив эти квадраты, умножив на число лет и поделив на n, получаем, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 229\,537.$$

В соответствии с формулой (2.27) оценкой дисперсии случайной составляющей является

$$(\sigma^*)^2 = \frac{SS}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 378\,267{,}83 - 229\,537 = 148\,731,$$

а оценкой среднего квадратического отклонения

$$\sigma^* = \sqrt{148731} = 385{,}7\,.$$

В соответствии с формулами (2.21) и (2.22) оценим дисперсии оценок параметров

$$D^*(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D^*(E_k) = \frac{(\sigma^*)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{143731}{143} = 1040,$$

$$D^*(d^*) = \frac{(\sigma^*)^2}{n} = \frac{143731}{12} = 12394.$$

Средние квадратические отклонения a^* и d^* оцениваются как 32,25 и 111,33 соответственно, а доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности 0,95, таковы:

$$[a_{\min}; a_{\max}] = [149{,}05; 275{,}47],\ [d_{\min}; d_{\max}] = [3748{,}96; 4185{,}38].$$

Первое из условий (2.24) выполнено в силу построения оценок периодической составляющей по целому числу периодов. Действительно, согласно данным табл. 2.10 сумма оценок периодической составляющей для 12 точек наблюдений равна (–3), незначительное отклонение от 0 вызвано ошибками округления.

В соответствии с формулой (2.22) смещение оценки a^* оценивается как

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f^*(t_k) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})f^*(t_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{5568}{143} = 38{,}94\,.$$

Таким образом, смещение имеет тот же порядок, что и среднее квадратичное отклонение оценки a^*, и заведомо меньше, чем полуширина доверительного интервала. Дальнейшее сравнение может быть проведено на основе оценки дисперсии смещения — случайной величины

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}.$$

Алгоритм вычисления дисперсии Z аналогичен таковым для периодической составляющей и интервального прогноза (см. (2.33) и (2.35) соответственно), но более сложен, поэтому не включен в учебник.

Таким образом, можно считать, что предположения (2.24) модели (2.19) выполнены для данных табл. 2.9.

Перейдем к оценке дисперсий значений периодической составляющей. Как следует из равенства (2.33),

$$D(g_s^*) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} h_{ks}^2, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ q,$$

где $h_{ks} = -c_k r_s - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, и $h_{ks} = -c_k r_s - \dfrac{1}{n}$ при иных значениях индекса суммирования k, и $r_s = \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{s+(j-1)q} - \bar{t})$.

Начнем со значения $s = 1$ (периодическая составляющая для января). Тогда $r_1 = \dfrac{1}{3}\big((1 - 6{,}5) + (5 - 6{,}5) + (9 - 6{,}5)\big) = -1{,}5$. Понадобятся значения

$$c_k = \frac{t_k - \bar{t}}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{t_k - 6{,}5}{143} = \frac{k - 6{,}5}{143}.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Расчет дисперсии периодической составляющей

k	$t_k - \bar{t}$	$c_k r_1$	$-1/n$	$+1/m$	h_{k1}	h_{k1}^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	–5,5	0,0577	–0,0833	0,3333	0,3077	0,09468
2	–4,5	0,0472	–0,0833	–	–0,0361	0,00130
3	–3,5	0,0367	–0,0833	–	–0,0466	0,00217
4	–2,5	0,0262	–0,0833	–	–0,0571	0,00326
5	–1,5	0,0157	–0,0833	0,3333	0,2657	0,07060
6	–0,5	0,0052	–0,0833	–	–0,0781	0,00610
7	0,5	–0,0052	–0,0833	–	–0,0885	0,00783
8	1,5	–0,0157	–0,0833	–	–0,0990	0,00980
9	2,5	–0,0262	–0,0833	0,3333	0,2238	0,05009
10	3,5	–0,0367	–0,0833	–	0,1200	0,01440
11	4,5	–0,0472	–0,0833	–	0,1305	0,01703
12	5,5	–0,0577	–0,0833	–	0,1410	0,01988

В таблице 2.11 столбец (3) получен из столбца (2) умножением на $\frac{r_1}{143} = \frac{-1,5}{143} = -0,01049$, каждый элемент столбца (6) равен сумме элементов столбцов (3), (4) и (5), стоящих в той же строке, а в столбце (7) стоят квадраты соседних элементов из столбца (6). Цель построения табл. 2.11 — расчет суммы элементов столбца (7). Эта сумма равна 0,28275. Следовательно,

$$\sqrt{D^*(g_1^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k1}^2} = 385,7 \times \sqrt{0,28275} = 204,8 .$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в январе (–376 – 1,96 × 204,8; –376 + 1,96 × 204,8) захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 не значимо (на уровне значимости 0,05).

Аналогичный случай для значения $s = 2$ (периодическая составляющая для апреля) дает

$$\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2 = 0,25524, \quad \sqrt{D^*(g_2^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2} = 385,7 \times \sqrt{0,25524} = 194,86 .$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в апреле (533 – 1,96 × 194,86; 533 + 1,96 × 194,86) = (533 – 381,93; 533 + 381,93) не захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 значимо (на уровне значимости 0,05).

Приступим к завершающему этапу анализа данных табл. 2.9 — построению интервального прогноза. Необходимо рассчитать величины $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s) + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1, 2, ..., m\}$, и $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, где r_s — то же, что и в формуле (2.33), поскольку точечный прогноз $x^*(t)$ является несмещенным, асимптотически нормальным, а его дисперсия оценивается согласно (2.35) так:

$$D^*(x^*(t)) = (\sigma^*)^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 .$$

Начнем с прогноза на январь 2006 г. (по данным за 2003–2005 гг.). Тогда $t = 13$, $s = 1$, $r_1 = -1{,}5$, $w_{k1} = 8c_k + \frac{1}{3}$, если $k \in \{1 + 4(j-1), j = 1, 2, 3\}$, и $w_{k1} = 8c_k$ при всех остальных значениях индекса суммирования. При этом

$$8c_k = 8\frac{k - 6{,}5}{143} = \frac{8k - 52}{143}.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Расчет дисперсии прогностической функции

k	$\frac{8k-52}{143}$	$1/m$	w_{k1}	w_{k1}^2
1	–0,3077	0,3333	0,0256	0,00066
2	–0,2517	–	–0,2517	0,06336
3	–0,1958	–	–0,1958	0,03834
4	–0,1399	–	–0,1399	0,01957
5	–0,0839	0,3333	0,2494	0,06220
6	–0,0280	–	–0,0280	0,00078
7	0,0280	–	0,0280	0,00078

Окончание табл. 2.12

k	$\frac{8k-52}{143}$	$1/m$	w_{k1}	w_{k1}^2
8	0,0839	–	0,0839	0,00700
9	0,1399	0,3333	0,4732	0,22392
10	0,1958	–	0,1958	0,03834
11	0,2517	–	0,2517	0,06336
12	0,3077	–	0,3077	0,09468

Сумма значений, стоящих в последнем столбце табл. 2.12, равна 0,61299. Согласно формуле (2.36)

$$\Delta(13) = U(0,95)\sqrt{D^*(x^*(13))} = 1,96 \times 385,7 \times \sqrt{0,61299} = 591,88.$$

Согласно (2.31) точечный прогноз таков:

$$x^*(13) = a^*(13-\bar{t}) + d^* + f^*(13) = 212,26 \times 13 + 2587,48 + (-376) = 4971.$$

Нижняя и верхняя доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющей) имеют вид:

$$x_{\text{нижн}}(13) = 4971 - 592 = 4379, \quad x_{\text{верх}}(13) = 4971 + 592 = 5563.$$

Реальное значение (табл. 2.7) — 4336. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{\text{нижн}}(13)$. Прогноз оправдался.

Аналогичные расчеты для апреля 2006 г. (t = 14, s = 2, $r_2 = -0,5$) дают

$$\Delta(14) = 1,96 \times 385,7 \times \sqrt{0,72480} = 643,60.$$

Точечный прогноз равен $x^*(14)$ = 6092, а нижняя и верхняя доверительные границы таковы: $x_{\text{нижн}}(14) = 5448$, $x_{\text{верх}}(14) = 6736$. Реальное значение (табл. 2.7) — 5430. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{\text{нижн}}(14)$. Как и в предыдущем случае, прогноз оправдался.

Как показано в настоящей главе, метод наименьших квадратов — мощный инструмент эконометрического моделирования. Этот раздел эконометрики приносит ощутимую пользу экономистам и управленцам (менеджерам).

Литература

1. *Бобровиков В.* STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: для профессионалов. — 2-е изд. — СПб.: Питер, 2002. — 688 с.

2. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1982. — 416 с.

3. *Кендэл М* Ранговые корреляции. — М.: Статистика, 1975. — 216 с.

4. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. — М.-Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. — 432 с.

5. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

6. *Красильников В.В.* Статистика объектов нечисловой природы. — Набережные Челны: Изд-во Камского политехнического института, 2001. — 144 с.

7. *Крюкова Е.М.* Применение методов организационно-экономического прогнозирования в отрасли лома черных металлов // Заводская лаборатория. — 2008. — Т. 74. — № 7. — С. 67–72.

8. *Майстров Л.Е.* Теория вероятностей: Исторический очерк. — М.: Наука, 1967. — 320 с.

9. *Макаров Л.П.* Образование и потребление лома черных металлов // Рынок вторичных металлов. — 2002. — № 5. — С. 7–9.

10. *Медведев В.Н., Орлов А.И.* Программно-алгоритмическое обеспечение статистических методов в САПР стандартов // Тезисы докладов III Всесоюзной школы-семинара «Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа». — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1987. — С. 313–314.

11. *Муравьева В.С.* Точка встречи: асимптотическое распределение уровня качества и временного лага // Заводская лаборатория. — 2008. — Т. 74. — № 2. — С. 70–72.

12. *Муравьева В.С., Орлов А.И.* Организационно-экономические проблемы прогнозирования на промышленном предприятии // Управление большими системами. Выпуск 17. — М.: ИПУ РАН, 2007. — С. 143–158.

13. *Муравьева В.С., Орлов А.И.* Непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2008. — Т. 74. — № 1. — С. 63–68.

14. *Орлов А.И.* Оценка размерности модели в регрессии // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. Ученые записки по статистике. — Т. 36. — М.: Наука, 1980. — С. 92–99.

15. *Орлов А.И.* Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии // Прикладная статистика. Ученые записки по статистике. — Т. 45. — М.: Наука, 1982. — С. 260–265.

16. *Орлов А.И.* Метод оценивания длины периода и периодической составляющей сигнала // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1999. — С. 38–49.

17. *Орлов А.И.* Эконометрика. — Изд. 3-е, перераб. и дополн. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

18. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

19. *Орлов А.И.* Статистические методы прогнозирования // Малая российская энциклопедия прогностики. — М.: Институт экономических стратегий, 2007. — С. 148–152.

20. *Орлов А.И.* Непараметрический метод наименьших квадратов: учет сезонности // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 21. — Пермь: Перм. ун-т, 2008. — С. 135–148.

21. *Плотников А.Ю.* Базисные условия поставки международных контрактов Инкотермс-2000. — М.: Экономика, 2002.

22. Практикум по эконометрике: Учебное пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. — М.: Финансы и статистика. 2001. — 192 с.

23. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

24. *Сидельников Ю.В., Танасова А.С.* Прогнозирование знака разности между ценой металла и форвардного контракта на него (на примере меди, алюминия, никеля) // Заводская лаборатория. — 2006. — № 11. — С. 59–65.

25. *Супрун И.В.* Российский рынок лома и прогноз цен на 2007 год // Рынок вторичных металлов. — 2005. — № 6. — С. 10–12.

26. *Robinson D.E.* Estimates for the points of intersection of two polynomial regressions // Journal of American Statistical Association. — 1964. — V. 19. — № 2. — P. 214–238.

Контрольные вопросы и задачи

1. Имеются данные за несколько лет о торговом обороте Y западногерманского предприятия и его расходах на рекламу X. Данные представлены в табл. 2.13.

Таблица 2.13

Расходы на рекламу и торговый оборот предприятия

Показатель	Годы, t							
	68	69	70	71	72	73	74	75
Расходы на рекламу $X(t)$, тыс. марок	4	4	5	6	8	8	10	11
Торговый оборот $Y(t)$, млн марок	4	5	6	6	8	10	12	13

С помощью метода наименьших квадратов определите коэффициенты линейной регрессии $Y = aX + b$. Постройте график (заданные точки (x_i, y_i) и прямую $Y = a^*X + b^*$). Найдите доверительные границы для регрессионной зависимости (при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$). Нанесите доверительные границы на график. Сделайте точечный и интервальный прогноз для торгового оборота при расходах на рекламу, равных 15 (тыс. марок ФРГ).

Аналогичным образом изучите зависимости расходах на рекламу X и торгового оборота Y от времени t (за начало отсчета целесообразно взять 1971 год).

2. Исходные данные (табл. 2.14) — набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции). Предполагается, что переменные связаны зависимостью

$$x_k = a\,t_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Таблица 2.14

Исходные данные для расчетов по методу наименьших квадратов

t_k	1	3	4	7	9	10
x_k	12	20	20	32	35	42

Методом наименьших квадратов оцените параметры a и b линейной зависимости. Выпишите восстановленную зависимость.

Вычислите восстановленные значения зависимой переменной, сравните их с исходными значениями (найдите разности) и проверьте условие точности вычислений (при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных).

Найдите остаточную сумму квадратов и оцените дисперсию погрешностей.

Выпишите точечный прогноз, а также верхнюю и нижнюю доверительные границы для него (для доверительной вероятности 0,95).

Рассчитайте прогнозное значение и доверительные границы для него для момента $t = 12$.

Как изменятся результаты, если доверительная вероятность будет увеличена? А если она будет уменьшена?

3. Покажите, что формулы (2.1), (2.3) и (2.4) задают одну и ту же оценку a^* параметра a.

4. Выведите формулы расчета асимптотических доверительных границ для параметров a и d (с заменой в выражениях для дисперсий оценок a^* и d^* неизвестной величины σ^2 на ее состоятельную оценку).

5. Разработайте методы проверки статистических гипотез о равенстве параметров a и d определенным значениям, прежде всего 0.

6. Как в методе наименьших квадратов используются преобразования переменных?

7. Как связаны коэффициент линейной корреляции Пирсона и непараметрический коэффициент ранговой корреляции Спирмена?

8. Как метод наименьших квадратов используется для прогнозирования цен в отрасли лома черных металлов?

9. Как метод линеаризации позволяет построить доверительный интервал для точки пересечения двух регрессионных прямых?

10. Сравните модели порождения данных при наличии периодической составляющей (разд. 2.7) и без таковой (разд. 2.1). Что при расчетах по методу наименьших квадратов является общим и в чем проявляется различие?

11. Примените методы раздела 2.7 к данным табл. 2.4 (шесть вариантов — соответственно зависимым переменным $X1$–$X6$). Образец расчетов приведен в примере в конце раздела 2.7.

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Примеры практического использования метода наименьших квадратов.

2. Для непараметрической модели метода наименьших квадратов в случае линейной функции одной переменной разработайте алгоритмы:

а) расчета доверительных границ для коэффициентов модели;

б) проверки гипотез относительно этих коэффициентов.

3. Докажите, что сумма исходных значений зависимой переменной должна быть равна сумме восстановленных значений.

4. Критерии качества регрессионной модели.

5. Доказательство теоремы о предельном геометрическом распределении первого локального минимума остаточной дисперсии как оценки степени многочлена, описывающего зависимость.

6. Состоятельные оценки степени многочлена, описывающего регрессионную зависимость.

7. Использование непараметрических оценок плотности для восстановления зависимости.

8. Статистические методы прогнозирования и роль в них метода наименьших квадратов (на основе [19]).

9. Разработайте способы проверки условий применимости методов раздела 2.7 (условий (2.24)). Для этого изучите распределение случайной величины

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t}) f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2}.$$

Докажите асимптотическую нормальность случайной величины Z, найдите ее математическое ожидание и дисперсию, проведите вычисления для данных табл. 2.9.

10. Методы выявления информативного подмножества признаков в регрессионном анализе (на основе [23]).

11. Проблема мультиколлениарности в регрессионном анализе (на основе [23]). (Мультиколлинеарность (multicollinearity) — ситуация, при которой одна или более независимых переменных, входящих в уравнение регрессии, являются точными линейными функциями от

одной или более других независимых переменных того же уравнения. При приближении к такой ситуации оценки параметров модели становятся неустойчивыми. Чтобы сделать их более устойчивыми, применяют специальные приемы, например гребневую регрессию.)

12. Варианты метода наименьших квадратов в нелинейных (по параметрам) моделях.

13. Применение матричной алгебры в линейном регрессионном анализе.

14. Регрессионный анализ в статистике нечисловых данных.

15. Регрессионный анализ интервальных данных.

16. Регрессионный анализ нечетких переменных.

Глава 3. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНФЛЯЦИИ

Каждый день мы встречаемся с такими экономическими величинами, как цены на товары и услуги. Как правило, они изменяются с течением времени. Вполне естественно подвергнуть динамику цен на товары и услуги анализу с позиций эконометрики.

Под инфляцией в настоящей главе, как и в учебнике [17], понимаем повсеместно наблюдаемый рост цен. Инфляция приводит к тому, что покупательная способность денежных единиц (рублей, евро, долларов США и др.) падает. Следовательно, при анализе экономических процессов, протяженных во времени, для сравнения стоимостных характеристик необходимо переходить к сопоставимым ценам. Это невозможно сделать без расчета индекса роста цен, т. е. индекса инфляции. Проблема состоит в том, что цены на разные товары растут с различной скоростью, и необходимо эти скорости усреднять. Продемонстрируем свойства индекса инфляции и алгоритмы его расчета на примере минимальной потребительской корзины продовольственных товаров, которая была разработана в Институте высоких статистических технологий и эконометрики на основе физиологических норм потребления. Затем разберем различные варианты применения индексов инфляции в экономических расчетах.

3.1. Определение и расчет индекса инфляции

Краткая история инфляции в России на рубеже тысячелетий. Цены на продовольственные товары (хлеб, молоко и т. п.) в СССР определялись государственными органами и не менялись в течение десятилетий — с начала 60-х. Конец этого периода — 2 апреля 1991 г., когда Постановлением Правительства СССР цены на основные потребительские товары были подняты в 2–3 раза. По сообщению Государственного комитета по статистике, к концу 1991 г. (к моменту развала СССР) цены выросли в 2,6 раза. С 2 января 1992 г. началась — уже в Российской Федерации — так называемая либерализация цен, в ходе которой торговые организации стали самостоятельно устанавливать цены. В результате за год цены выросли в 26,1 раза. С тех пор рост цен не прекращался. К июлю 2007 г. цены выросли примерно в 60 000 раз, а к декабрю 2008 г. — в 100 000 раз. К маю 2020 г. — в 250 000 раз [30]. Однако в январе 1998 г. была проведена так называемая деноминация, во всех записях стоимостных характеристик были отброшены три нуля, т. е. цены (и доходы) формально уменьшились в 1000 раз. Как следствие, цены июля 2007 г. в среднем в 60 раз превысили цены марта 1991 г. (и предыдущих лет), цены декабря 2008 г. — соответственно в 100 раз, цены мая 2020 г. — примерно в 250 раз.

Итак, цены к июлю 2007 г. выросли в 60 раз, т. е. покупательная способность рубля сократилась в 60 раз. Другими словами, 60 руб. июля 2007 г. соответствуют 1 руб. 1990 г. Это простое соотношение позволяет сопоставлять доходы и расходы, разделенные 17 годами. А 250 руб. 2020 г. по покупательной способности соответствуют 1 руб. 1990 г.

Замечание. С течением времени любая конкретная дата уходит в прошлое. А вместе с ней — и все конкретные численные значения экономических величин. Примем для сравнения цен март 1991 г. и июль 2007 г. Первая из этих дат — конец стабильности цен в СССР, вторая — начало мирового экономического кризиса, прервавшего рост российской экономики в период стабильности (1999–2007). Читатель сможет перейти к интересующему его моменту с помощью эконометрических методов, разобранных в настоящей главе.

Пример приведения к сопоставимым ценам. Рассмотрим часто обсуждаемый экономический показатель — среднюю заработную плату в России. По данным государственных статистических органов, средняя заработная плата в декабре 1990 г. составляла 303 руб., а в апреле 2007 г. – 12 510 руб. Рост — в 41,29 раза. Однако цены выросли в 60 раз, поэтому нынешние 12 510 руб. соответствуют 12 510 / 60 = = 208,50 руб. 1990 г., т. е. в настоящее время реальная средняя заработная плата составляет $208{,}50 / 303 \times 100\% = 68{,}81\%$ от уровня 1990 г., другими словами, сократилась в 1,45 раза. При этом способе расчета мы привели данные 2007 г. к сопоставимым ценам 1990 г. В 2020 г. средняя заработная плата в РФ — 46,3 тыс. руб., цены выросли в 250 раз, реальная средняя заработная плата равна 46 300 / 250 = = 185,2 руб. в сопоставимых ценах 1990 г., т. е. 61,12% от уровня 1990 г. (сократилась в 1,64 раза).

Можно поступить и противоположным образом — привести данные 1990 г. к сопоставимым ценам 2007 г. А именно, если проиндексировать заработную плату 1990 г., т. е. умножить ее на индекс инфляции, показывающий рост цен (в рассматриваемом случае — на 60), то получим 303 × 60 = 18 180 руб. — вот такой должна была бы быть средняя заработная плата в 2007 г., если бы она росла теми же темпами, что и цены. Проиндексированная заработная плата в 18 180 / 12510 = 1,45 раза выше реально начисленной, т. е. реальная средняя заработная плата уменьшилась за 17 лет в 1,45 раза, как и было получено при предыдущем расчете.

Рост цен для различных товаров и услуг. Цены на те или иные товары и услуги растут с различной скоростью. Например, в табл. 3.1 приведены данные о ценах в 1990 и 2007 гг. на несколько видов товаров и услуг.

Таблица 3.1

Примеры цен (в руб.) товаров и услуг в 1990 и 2007 гг. (Москва)

№ п/п	Наименование товара (услуги)	Цены		Рост цен
		1990	2007	
1	Одна поездка в метро	0,05	17,00	340
2	Батон белого хлеба «Нарезной»	0,13	9,50–11,80	73–91
3	Газета	0,03	2,00–6,60	67–220
4	Водка среднего качества (0,5 л)	10,00	80,00–120,00	8–12
5	Электроэнергия (1 кВт·ч)	0,04	2,08	52

Наблюдаем значительное различие в темпах роста цен — в десятки раз. Поэтому для получения сводного показателя необходимо усреднять темпы роста цен для отдельных товаров и услуг. Этот факт подчеркивает и названия рассматриваемых в настоящей главе показателей — индексы инфляции, индексы потребительских цен. Введем используемые в дальнейшем понятия.

Индексы и их применение. Индекс (лат. *index* — показатель, список) — это статистический относительный показатель, характеризующий соотношение во времени (динамический индекс) или в пространстве (территориальный индекс) социально-экономических явлений. Речь идет о ценах на товары и услуги, объемах производства, себестоимости, объемах продаж и др. Индексы делятся на индивидуальные и сводные. Так, индивидуальный динамический индекс описывает изменение тех или иных явлений во времени. Например, изменения цены на отдельный товар, объема выплавки стали, урожайности картофеля. Для вычисления индивидуального индекса значение измеряемой величины в текущем периоде делят на ее значение в базисном периоде. Сводный индекс служит для сопоставления непосредственно не соизмеримых, разнородных явлений, например объемов продаж различных продовольственных товаров (в килограммах). Для требуемого сопоставления необходимо составные элементы несоизмеримых явлений сделать соизмеримыми, выразив их общей мерой: стоимостью, трудовыми затратами и т. д. Сводные индексы обычно имеют один из трех видов:

$$I_1 = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}, \quad I_2 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_2}, \quad I_3 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0},$$

где x — индексируемая величина, f — веса индексов, 0 и 1 — знаки соответственно базисного и текущего периодов, суммирование ведется по одному и тому же множеству «индексов суммирования» [27, с. 154], обычно по $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, индексы зависят от двух наборов переменных — значений индексируемой величины x и весов индексов f.

Обратите внимание на то, что в статистических методах согласно традиции термин «индекс» может использоваться во многих разных смыслах. Индекс суммирования i меняется от нижней границы 1 до верхней границы n и, в отличие от математики, не всегда указывается в сводных индексах типа описанных выше.

Определение понятия «индекс инфляции». В качестве примера построения и использования индексов рассмотрим индекс потребительских цен, он же — индекс инфляции.

Наблюдаем, что цены на различные товары меняются поразному. Как усреднить темпы роста цен? Одна из основных проблем в современной экономике — проблема агрегирования с целью сжатия информации (см., например, монографию [15]). Как свести к одной величине темпы роста цен различных товаров и услуг?

Уровень цен выражается в виде индекса. Он является измерителем соотношения между совокупной ценой определенного набора товаров, называемого потребительской корзиной (или иногда рыночной корзиной), для данного (текущего) момента времени, и совокупной ценой идентичной либо сходной группы товаров в базовый момент времени.

Первое, что приходит в голову, — усреднить индексы для отдельных товаров и услуг. Но какое среднее взять? Среднее арифметическое? Среднее геометрическое? Среднее гармоническое? Среднее квадратическое? В экономике используется много различных видов средних (см., например, главу 5 ниже). Опишем наиболее распространенный подход.

Рассмотрим конкретного покупателя товаров и услуг, т. е. конкретного экономического субъекта: физическое лицо, домохозяйство или предприятие. Он покупает не один товар, а много. Обозначим через n количество типов товаров или услуг (далее кратко — товаров), которые он хочет и может купить. Пусть

$$Q_i = Q_i(t),\ i = 1, 2, ..., n, \text{—}$$

объемы покупок этих товаров в момент времени t по ценам

$$p_i = p_i(t),\ i = 1, 2, ..., n$$

(имеется в виду цена за единицу измерения соответствующего товара, например, за штуку или килограмм).

Подход к измерению роста цен основан на выборе и фиксации потребительской корзины $(Q_1(t), Q_2(t), ..., Q_n(t))$, ***не меняющейся со временем,*** т. е. $(Q_1(t), Q_2(t), ..., Q_n(t)) \equiv (Q_1, Q_2, ..., Q_n)$. Стоимость $S(t)$ потребительской корзины в момент времени t такова:

$$S(t) = \sum_{1 \le i \le n} p_i(t) Q_i.$$

Затем необходимо сравнить стоимости $S(t_1)$ и $S(t_2)$ потребительской корзины $(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ в старых $p_i(t_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и новых $p_i(t_2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ценах.

Определение. Индексом инфляции называется

$$I(t_1, t_2) = \frac{S(t_1)}{S(t_2)} = \frac{\sum_{1 \le i \le n} p_i(t_2) Q_i}{\sum_{1 \le i \le n} p_i(t_1) Q_i}.$$

Здесь индексируемая величина — цены, а весами служат объемы потребления, зафиксированные в принятой исследователем потребительской корзине.

С математической точки зрения индекс инфляции — это функция двух переменных, а именно, двух моментов времени — начального, или базового, момента t_1 и конечного, или текущего, момента t_2. Когда говорят об инфляции за определенный промежуток времени, то t_1 — начало этого промежутка (года, месяца), а t_2 — его конец. Обычно $t_1 < t_2$, хотя в приведенном выше определении это не требуется.

Подчеркнем, что каждой конкретной потребительской корзине соответствует свой индекс инфляции. Потребительская корзина — это *инструмент экономиста или управленца (менеджера)*, предназначенный для усреднения индивидуальных индексов инфляции

$$I_i(t_1,t_2) = \frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)}, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n, \ —$$

темпов роста цен отдельных товаров (услуг). Потребительская корзина не имеет прямого отношения к реальному потреблению экономического субъекта. В частности, структура реального потребления в соответствии с законом Энгеля меняется в зависимости от дохода этого субъекта, в то время как потребительская корзина, используемая для расчета индекса инфляции, зафиксирована и никак не связана с доходом субъекта.

Обсудим подробнее различие понятий «реальное потребление» и «фиксированная потребительская корзина, используемая при расчете индекса инфляции». Расходы на покупки товаров и услуг некоторого экономического субъекта

$$C = C(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t) Q_i(t)$$

следует сопоставлять с его доходом D. Если $D - C > 0$, то экономическое положение субъекта благоприятно, его доход больше расходов, он может часть доходов направить на сбережение, в частности на инвестиции. Если же $D - C < 0$, то его положение неблагоприятно, доход меньше расходов. Это означает, что он расходует ранее накопленные средства, делает долги (в частности, берет кредиты) и т. д.

Из сказанного вытекает, что величина расходов $C(t)$ обязательно регулируется экономическим субъектом в соответствии с его доходом. Изменение (рост) цен $p_i(t)$ с течением времени t делает невозможным сохранение прежней структуры потребления (Q_1, Q_2, ..., Q_n), если рост дохода отстает от роста цен. Структура потребления изменяется, сокращается потребление относительно дорогих товаров и услуг, в порядке компенсации увеличивается потребление относительно дешевых. Например, уменьшается потребление мяса и увеличивается — хлеба и картофеля. При быстром росте цен возможен и другой эффект — «бегство от рубля». В связи с обесцениванием сбережений экономические субъекты направляют доход на текущее потребление, ценой отказа от накопления средств на приобретение дорогостоящих товаров длительного пользования.

Таким образом, реальное потребление товаров и услуг определяется как действующими ценами, так и величиной доходов экономических субъектов. Чтобы измерять рост цен, нужно избавиться от влияния изменения доходов. Именно для этого зафиксирована потребительская корзина, используемая для измерения инфляции.

Замечание. Приведем выписку из «Экономического словаря» (http://abc.informbureau.com). «Закон Энгеля — зависимость доли расходов на продукты питания в доходах семьи от их уровня, установленная в XIX в. немецким статистиком и экономистом Эрнстом Энгелем (1821–1896). Согласно этому закону по мере роста доходов семьи падает доля расходов на продовольствие, почти не меняется удельный вес затрат на жилище, отопление, освещение, одежду; зато растет доля расходов на прочие нужды (прежде всего на сбережения). Выведенная Энгелем эмпирическая зависимость подтверждается длительным опытом экономического развития. Статистические ряды показывают, что в структуре расходов американских семей за 1909–1985 гг. устойчиво снижается доля физических и материально-вещественных потребностей (продуктов питания — на 35%, расходов на жилище — на 5,5%, предметов домашнего обихода — на 26%, расходов на одежду и обувь — на 47%). В то же время систематически возрастает удельный вес более высоких «гуманитарных» потребностей в образовании, медицинском обслуживании, организации досуга и отдыха. Об этом же свидетельствует и статистика семейных бюджетов в СССР (табл. 3.2).

Современная западная наука существенно дополнила развитые Энгелем положения, используя для этого новый аналитический аппарат. На основе формулы эластичности спроса по доходам подсчитано, что в конце 1980-х гг. в США с ростом дохода на 1% спрос на продукты питания возрастал на 0,77%, на одежду — на 0,32%, на транспортные средства — на 1,1%, на жилище — на 0,89%, на медицинские услуги — на 1,9%, на предметы роскоши — на 3,6%, на спортивные товары — на 3,7%, на услуги такси — на 2,8%» (http://abc.informbureau.com/html/caeii_yiaaess.html).

Таблица 3.2

Расходы на питание в СССР (1963 г.)

Совокупный доход в месяц, руб.	Расходы на питание, %
До 75	51,5
75–100	42,7
100–150	35,8
150–200	31,9
Свыше 200	28,4
Все семьи	34,3

Разброс цен в пространстве. В определении индекса инфляции участвуют цены $p_i(t)$. Однако цены меняются при переходе от одной торговой точки к другой. Это отражено и в табл. 3.1. Два полностью идентичных батона хлеба могут продаваться по разной цене даже в соседних магазинах. Обсудим эффект разброса цен в пространстве и его учет при расчете индекса инфляции.

В конкретном акте купли-продажи цена товара или услуги полностью определена. Однако в современных условиях, когда в большинстве случаев продавец, а иногда и покупатель могут влиять на цену товара или услуги, эта цена зачастую меняется от одного акта купли-продажи к другому. Можно выделить несколько вариантов.

1. Конкретный продавец меняет цену в зависимости от поведения конкретного покупателя. Пример: индивидуальный продавец на базаре.

2. В конкретном магазине цена фиксирована, но от магазина к магазину она меняется. Примеры: большинство товаров (продаваемых в магазинах и киосках), цены которых указаны для сведения покупателей.

3. Единые цены в регионе, например, на электроэнергию, услуги транспорта и почтовой связи.

В первом и втором случаях имеет место разброс цен на однотипный товар. Этот эффект проявляется как в нашей стране, так и за рубежом. Например, в современной Франции или в современной Москве цены на определенный товар в фешенебельных центральных магазинах и в окраинных непрестижных супермаркетах могут отличаться в несколько раз. Это — одно из проявлений так называемой ценовой диверсификации.

Какие же цены использовать при расчете индекса инфляции? Возможны два подхода к проведению эконометрического исследования — средней цены и фиксированного маршрута.

Подход на основе средней цены предполагает проведение обширного статистического исследования, позволяющего с достаточной степенью точности установить распределение цены определенного товара (рассматриваемой как случайная величина). По распределению рассчитывается средняя цена. Нужные данные получают, например, в ходе проводимого органами Росстата бюджетного обследования нескольких тысяч семей, при котором ежедневно фиксируют все их расходы. Тогда достаточно получить среднее арифметическое всех цен при покупках рассматриваемого товара, осуществленных в определенный день, взвешивая их по объему покупок. В другом варианте планирования исследования на основе анализа расходов семей устанавливают доли покупок (по объему), приходящиеся на торговые организации различных типов (базары, магазины, супермаркеты и т. п.), а затем специально подготовленные наблюдатели снимают цены, действующие в этих торговых организациях.

Подход, основанный на использовании фиксированного маршрута, предполагает постоянное слежение за ценами в торговых точках, расположенных вдоль раз и навсегда выбранного маршрута (в идеальном варианте — в одном и том же магазине, в котором продаются все товары, включенные в потребительскую корзину). С помощью такой методики измерения удается избавиться от разброса цен в пространстве и сосредоточиться на изучении их динамики во времени. Именно так собирали цены сотрудники Института высоких статистических технологий и эконометрики, на основе исследовательского опыта которого подготовлен учебный материал, представленный в настоящей главе и — несколько подробнее — в учебнике [17, гл. 7]. Могут быть использованы данные с сайта определенного магазина или торговой сети.

Из сказанного следует, что понятие «рыночная цена» не является прозрачным, поскольку такая цена не является непосредственно эмпирически определенной. Если в конкретном акте купли-продажи цена полностью определена, то «рыночная цена» — это результат расчетов по определенным правилам, т. е. «условная величина». Она может быть полезной при подготовке управленческого решения, но в итоговом акте купли-продажи может появиться цена, отличная от рыночной.

3.2. Практически используемые потребительские корзины и соответствующие индексы инфляции

Каждый человек, семья (домохозяйство), предприятие, выбрав подходящую потребительскую корзину, может без больших трудозатрат оценивать влияние роста цен на свое экономическое положение (подробнее — в разделе 3.4 ниже).

Однако обычно индекс инфляции рассматривают для более или менее обширной совокупности экономических субъектов — для жителей региона или страны, предприятий определенной отрасли и т. д. При этом потребительскую корзину (Q_1, Q_2, ..., Q_n) стараются приблизить к суммарным объемам потребления для рассматриваемой совокупности, а в качестве цен рассматриваются средневзвешенные цены в осуществленных актах купли-продажи.

Пример. В макроэкономике используют так называемый дефлятор валового внутреннего продукта (ВВП) — обратную величину к индексу цен на все произведенные в течение года конечные товары и услуги, составляющие объем ВВП, используемую для учета влияния инфляции на величину номинального ВВП. Номинальный ВВП исчисляется в текущих рыночных ценах. Чтобы определить реальную величину ВВП с целью сравнения ВВП за разные годы, необходимо выразить его в сопоставимых ценах базисного года. Для этого применяется индекс инфляции, который отражает изменение среднего уровня цен максимально широкой группы товаров и услуг (охватывающей все составляющие ВВП) за рассматриваемый период.

Согласно принятому определению, индекс инфляции определяется номенклатурой (т. е. набором, перечнем) товаров и услуг, для которых он вычисляется, объемами потребления и ценами этих товаров и услуг на начальный и на текущий моменты времени. Отсюда вытекает, в частности, что индекс инфляции для продовольственных товаров отличается, вообще говоря, от такового для промышленных товаров, для услуг и от индекса инфляции оптовых цен; индекс инфляции для москвича отличается от такового для жителя Краснодара (хотя бы потому, что климат различается, а потому и объем потребляемой энергии различен); индекс инфляции для машиностроительной продукции не совпадает с индексом инфляции в строительстве; этот индекс для семей (домохозяйств) меняется в зависимости от индивидуальных структур потребления в семьях и т. д. Для адекватного рассматриваемому экономическому субъекту определения индекса инфляции необходимо знать типовые объемы купли-продажи и цены в соответствующих актах купли-продажи, иначе можно говорить только о той или иной оценке этого индекса.

Конкретизация задачи вычисления индекса инфляции. Прежде всего необходимо сформулировать цель экономического анализа роста цен. Для определенности будем ориентироваться на положение основной массы населения. Это означает, в частности, что персональные компьютеры (в 2001 г. их имели 6% российских семей) и автомашины иностранных марок (в 2001 г. их имели 0,5% российских семей) в потребительскую корзину, предназначенную для использования на рубеже тысячелетий, включать нецелесообразно.

Как показывают бюджетные исследования, количество видов товаров и услуг, потребляемых физическими лицами, измеряется тысячами (а в классификаторах промышленной продукции указаны миллионы марок различных товаров). Поэтому первый шаг — ограничение номенклатуры товаров и услуг, используемых для вычисления индекса инфляции.

На рубеже тысячелетий существенная часть доходов населения России (зачастую не менее половины) идет на покупку продовольственных товаров (что по классическому закону Энгеля — см. также, например, учебник нобелевского лауреата по экономике П. Самуэльсона [25] — свидетельствует о сравнительно низком жизненном уровне). Поэтому представляется естественным рассчитать индекс инфляции для продовольственных товаров.

Потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры. В первой половине 90-х гг. Центр экономической конъюнктуры (ЦЭК) при Правительстве Российской Федерации и Государственный комитет Российской Федерации по статистике следили за движением цен по фиксированному набору товаров (табл. 3.3), которые относительно постоянно бывают в магазинах (по различным причинам время от времени этот набор меняется).

Таблица 3.3

Объемы годового потребления продовольственных товаров (потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры в сравнении с компонентами потребительской корзины ИВСТЭ)

№ п/п	Продукты питания, кг	Потребительские корзины	
		ЦЭК на 1993 г.	ИВСТЭ
1	Хлеб ржаной	92,0	65,3
2	Хлеб пшеничный	86,7	59,8
3	Пшено	18,1	4,9
4	Вермишель	7,3	4,9
5	Сахар	24,8	19,0
6	Масло растительное, л	10,0	3,8
7	Масло животное	3,6	2,5
8	Говядина	42,0	4,4
9	Колбаса вареная	2,2	0,7
10	Колбаса полукопченая	1,1	0,7
11	Молоко, л	184,3	110,0
12	Сметана	4,2	1,6
13	Сыр твердый	2,0	2,3
14	Яйца, шт.	183	152
15	Картофель	146,0	124,2
16	Капуста свежая	29,8	30,4
17	Лук репчатый	10,2	27,9
18	Яблоки	11,0	15,1
19	Сигареты, пачки	96	-

Потребительская корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики (ИВСТЭ) на основе данных Института питания РАМН. Однако приведенный в табл. 3.3 набор ЦЭК не полностью соответствует перечню продуктов питания, рекомендованному медиками. И дело не только в сигаретах.

Рассмотрим минимальную потребительскую корзину физиологически необходимых продовольственных товаров, разработанную в 1993 г. ИВСТЭ на основе исходных данных Института питания Российской академии медицинских наук (РАМН). Эти данные использовались также Министерством труда Российской Федерации. Рассматриваемую минимальную потребительскую корзину обозначим сокращенно «корзина ИВСТЭ». В отличие от приведенной выше корзины Центра экономической конъюнктуры в ней содержание белков, жиров и углеводов соответствует (минимальным) медицинским нормам. В корзине ИВСТЭ продукты питания разделены на 11 групп:

1. Хлеб и хлебопродукты.
2. Картофель.
3. Овощи.
4. Фрукты и ягоды.
5. Сахар.
6. Мясопродукты.
7. Рыба и рыбопродукты.
8. Молоко и молочные продукты.
9. Яйца.
10. Масло растительное и маргарин.
11. Прочие.

Общая стоимость «прочих» видов продуктов — до 6% от стоимости первых 10 групп продуктов данной потребительской корзины.

На основе физиологических норм потребления Института питания РАМН в ИВСТЭ в 1994 г. составлена минимальная потребительская корзина, т. е. указан годовой объем потребления по основным продовольственным товарам, необходимый для поддержания нормальной жизнедеятельности человеческого организма (табл. 3.4). При разработке корзины специалисты Института питания исходили из трех принципов:

1. Суммарное содержание белков, жиров, углеводов и калорий должно быть не менее нормативов, определяющих согласно науке о питании (как части медицины) возможность продолжения существования человеческого организма без физиологического вырождения.

2. На основе включенных в корзину продуктов может быть разработано меню трехразового питания на год.

3. Стоимость корзины должна быть минимальна.

Первый и третий принципы позволяют сформулировать задачу оптимизации (линейного программирования). Ее решение таково (в расчете на день): 812 г черного хлеба, 705 г картофеля, 180 г молока и 10 г сыра. Хотя этот набор продуктов обеспечивает необходимое количество белков, жиров, углеводов и калорий, ежедневно питаться таким образом невозможно. Второй принцип обеспечивает человека полноценным трехразовым питанием. Но стоимость корзины возрастает примерно на четверть.

Потребительская корзина, представленная в табл. 3.4, не описывает реальное потребление большинства граждан. Например, типовой москвич покупает значительно больше колбасы, сала, копченостей, чем включено в корзину, и в несколько раз меньше муки. Корзина табл. 3.4 предназначена прежде всего для измерения инфляции. Однако еще одно ее использование — оценка (снизу) минимально допустимых расходов на продовольственные товары, обеспечивающих нормальную жизнедеятельность человеческого организма. Таковы расходы в некоторых закрытых учреждениях — больницах, тюрьмах, приютах, домах престарелых.

Таблица 3.4

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены для потребительской корзины ИВСТЭ

Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 13.03.91	Цена на 13.03.94	Рост цен, раз
1. Хлеб и хлебопродукты				
1.1 Мука пшеничная	18,5	0-46	646	1404
1.2 Рис	3,5	0-88	620	705
1.3 Другие крупы	4,9	0-62	750	1210
1.4 Хлеб пшеничный	59,8	0-50	720	1440
1.5 Хлеб ржаной	65,3	0-20	390	1950
1.6 Макаронные изделия	4,9	0-70	1200	1714
2. Картофель	124,2	0-10	490	4900
3. Овощи				
3.1 Капуста	30,4	0-20	500	2500
3.2 Огурцы и помидоры	2,8	0-85	2500	2941
3.3 Столовые корнеплоды	40,6	0-20	450	2250
3.4 Прочие (лук и др.)	27,9	0-50	900	1800
4. Фрукты и ягоды				
4.1 Яблоки свежие	15,1	1-50	960	640
4.2 Яблоки сушеные	1,0	3-00	1900	633
5. Сахар и кондитерские изделия				
5.1 Сахар	19,0	0-90	650	722
5.2 Конфеты	0,8	4-50	3500	778
5.3 Печенье и торты	1,2	1-40	14700	3357
6. Мясо и мясопродукты				
6.1 Говядина	4,4	2-00	2700	1350

Окончание табл. 3.4

Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 13.03.91	Цена на 13.03.94	Рост цен, раз
6.2 Баранина	0,8	1-80	1940	1078
6.3 Свинина	1,4	2-00	2300	1150
6.4 Субпродукты (печень)	0,5	1-40	3500	2500
6.5 Птица	16,1	2-40	2600	1083
6.6 Сало	0,7	2-40	3300	1375
6.7 Копчености	0,7	3-70	15000	4054
7. Рыба и рыбопродукты				
7.1 Свежая (минтай)	10,9	0-37	2200	5946
7.2 Сельди	0,8	1-40	2500	1786
8. Молоко и молочные продукты				
8.1 Молоко, кефир, л	110,0	0-32	520	1625
8.2 Сметана, сливки	1,6	1-70	2500	1471
8.3 Масло животное	2,5	3-60	4000	1111
8.4 Творог	9,8	1-00	2000	2000
8.5 Сыр и брынза	2,3	3-60	6000	1667
9. Яйца, шт.	152,0	0-09	100	1111
10. Масло растительное, маргарин				
10.1 Масло растительное, л	3,8	1-80	2000	1111
10.2 Маргарин	6,3	1-20	2000	1667
11. Прочие (6% от стоимости товаров групп 1–10)				

Примечания. 1. Пункт 1.3 — геркулес (в этой таблице и далее).

2. Запись типа 1–20 означает 1 руб. 20 коп. в системе обозначений, принятой в начале 1990-х гг.

Расчет стоимости минимальной потребительской корзины продовольственных товаров. Чтобы получить индекс инфляции, рассчитаем стоимость минимальной потребительской корзины продовольственных товаров, исходя из объемов потребления, заданных в разработках Института питания РАМН, и цен по состоянию на март 1991 г. (т. е. до первого значительного повышения цен в апреле 1991 г. и их «либерализации» в январе 1992 г.) и — в качестве примера — на март 1994 г. (очевидно, расчеты могут быть проведены и на любой иной момент времени) с целью установить динамику цен за полные три года.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 3.4. Мы видим, что темпы роста цен на различные продукты питания существенно отличаются друг от друга. Минимальный рост цен — в 633 раза (яблоки сушеные), максимальный — в 5946 раз (минтай).

Для нахождения расходов на определенные продукты питания (в расчете на год) достаточно умножить цены на объемы потребления, как это сделано в табл. 3.5. Там же приведены годовые расходы для каждой из 11 товарных групп.

Таблица 3.5

Годовые расходы на покупку продуктов (в рублях)

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 13.03.91	Годовые расходы по ценам на 13.03.94
1. Хлеб и хлебопродукты		
1.1 Мука пшеничная	8-51	11 951
1.2 Рис	3-08	2170
1.3 Прочие крупы	3-04	3675
1.4 Хлеб пшеничный	29-90	43 056
1.5 Хлеб ржаной	13-06	25 467
1.6 Макаронные изделия	3-43	5880
Всего по группе 1:	61-02	92 199
2. Картофель	12-42	60 858
3. Овощи		
3.1 Капуста	6-08	15 200
3.2 Огурцы и помидоры	2-38	7000
3.3 Столовые корнеплоды	8-12	18 270
3.4 Прочие (лук и др.)	13-95	25 110
Всего по группе 3:	30-53	65 580
4. Фрукты и ягоды		
4.1 Яблоки свежие	22-65	14 496
4.2 Яблоки сушеные	3-00	1900
Всего по группе 4:	25-65	16 396
5. Сахар и кондитерские изделия		
5.1 Сахар	17-10	12 350
5.2 Конфеты	3-60	2800
5.3 Печенье и торты	1-68	5640
Всего по группе 5:	22-38	20 790

Окончание табл. 3.5

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 13.03.91	Годовые расходы по ценам на 13.03.94
6. Мясо и мясопродукты		
6.1 Говядина	8-80	11 880
6.2 Баранина	1-44	1552
6.3 Свинина	2-80	3220
6.4 Субпродукты (печень)	0-70	1750
6.5 Птица	38-64	41 860
6.6 Сало	1-68	2310
6.7 Копчености	2-59	10 500
Всего по группе 6:	56-65	73 072
7. Рыба и рыбопродукты		
7.1 Свежая (минтай)	4-03	23 980
7.2 Сельди	1-12	2000
Всего по группе 7:	5-15	25 980
8. Молоко и молочные продукты		
8.1 Молоко, кефир	35-20	57 200
8.2 Сметана, сливки	2-72	4000
8.3 Масло животное	9-00	10 000
8.4 Творог	9-80	19 600
8.5 Сыр и брынза	8-28	13 800
Всего по группе 8:	65-00	104 600
9. Яйца	13-68	15 200
10. Масло растительное, маргарин		
10.1 Масло растительное	6-84	7600
10.2 Маргарин	7-56	12 600
Всего по группе 10:	14-40	20 200
Всего по 10 группам:	306-89	490 675
11. Прочие (6% от стоимости товаров групп 1–10)	18-41	29 441
Суммарная стоимость минимальной потребительской корзины продуктов питания в расчете на год	325-30	520 116
Ее стоимость в расчете на месяц	27-11	43 499

Как вытекает из табл. 3.5, индекс инфляции (роста цен) по продуктам питания исходя из минимальной потребительской корзины

ИВСТЭ, составленной по физиологическим нормам потребления продуктов питания для города Москвы (согласно разработкам Института питания РАМН и Министерства труда РФ), за три года (13.03.91 — 13.03.94) составил (520 116-00) / (325-30) = 1598,88 (т. е. цены выросли на 100(1598,88 – 1)% = 159 788%).

Таблицы типа приведенных выше (табл. 3.4 и 3.5) могут быть составлены любым исследователем (студентом, менеджером или иным заинтересованным гражданином, сотрудником той или иной фирмы, органа власти, профсоюзной организации) с целью изучения динамики реального экономического положения. В табл. 3.6 приведены рассчитанные сотрудниками ИВСТЭ по независимо собранной информации значения стоимости потребительской корзины и индекса инфляции за 1991–2007 гг.

Таблица 3.6

Стоимость потребительской корзины ИВСТЭ и индекс инфляции

№ п/п	Дата снятия цен t	Стоимость потребительской корзины $S(t)$ (руб.)	Индекс инфляции $I(31.03.91; t)$
1	31.03.91	26.60	1.00
2	13.08.93	17,691.00	665.08
3	15.11.93	28,050.00	1053.51
4	13.03.94	40,883.00	1536.95
5	13.03.94	44,441.00	1670.71
6	28.03.94	47,778.00	1796.17
7	26.05.94	52,600.00	1977.44
8	08.09.94	58,613.00	2203.53
9	06.10.94	55,358.00	2081.13
10	10.11.94	72,867.00	2739.36
11	01.12.94	78,955.00	2968.23
12	29.12.94	97,897.00	3680.34
13	02.02.95	129,165.00	4855.83
14	02.03.95	151,375.00	5690.79
15	30.03.95	160,817.00	6045.75
16	27.03.95	159,780.00	6006.77
17	01.06.95	167,590.00	6300.38
18	29.06.95	170,721.00	6418.08
19	27.07.95	175,499.00	6597.71
20	31.08.95	173,676.00	6529.17
21	28.09.95	217,542.00	8178.27

№ п/п	Дата снятия цен t	Стоимость потребительской корзины $S(t)$ (руб.)	Индекс инфляции $I(31.03.91;\ t)$
22	26.10.95	243,479.00	9153.35
23	30.11.95	222,417.00	8361.54
24	28.12.95	265,716.00	9989.32
25	01.02.96	287,472.55	10,807.24
26	05.03.96	297,958.00	11,201.43
27	05.03.96	304,033.44	11,429.83
28	08.05.96	305,809.55	11,496.60
29	05.06.96	302,381.69	11,367.73
30	03.07.96	306,065.21	11,506.21
31	03.08.96	308,963.42	11,615.17
32	07.09.96	288,835.07	10,858.46
33	01.10.96	278,235.35	10,459.98
34	05.11.96	287,093.77	10,793.04
35	03.12.96	298,023.76	11,203.94
36	03.01.97	314,287.16	11,815.31
37	03.02.97	334,738.24	12,583.14
38	03.01.98	345.72	12.997
39	03.01.99	630.07	20.395
40	05.01.00	737.80	27.737
41	03.01.01	886.84	33.340
42	03.01.02	1051.79	39.541
43	03.01.03	1210.62	45.512
44	03.01.04	1355.91	50.974
45	13.05.2004	1369.10	51,470
46	11.01.05	1463.98	55.037
47	10.01.06	1525.62	57.354
48	26.11.06	1571.26	59,070
49	10.01.07	1580.89	59.432
50	02.07.07	1643.38	61.819
51	30.12.07	2286.54	85.960
52	26.03.2018	6777.95	254. 81
53	28.03.2019	69646.68	261.83

Примечание. В табл. 3.6 целая часть отделяется от дробной десятичной точкой, а запятая используется для деления числа по разрядам. Учитывается проведенная 01.01.98 деноминация рубля. Стоимость потребительской корзины приводится без включения группы «прочие». Данные за 2018–2019 гг. приводятся по статье [30].

3.3. Свойства индексов инфляции

Перед тем как переходить к рассмотрению примеров использования индексов инфляции в экономических расчетах, целесообразно рассмотреть некоторые их свойства.

Соотношение индексов инфляции для трех моментов времени. Рассмотрим три произвольных момента времени t_1, t_2, t_3 и соответствующие индексы инфляции $I(t_1,t_2)$, $I(t_2,t_3)$ и $I(t_1,t_3)$. Из определения индекса инфляции как отношения стоимостей потребительской корзины в соответствующие моменты времени вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1 (теорема умножения). Для любых трех моментов времени t_1, t_2, t_3 справедливо равенство

$$I(t_1,t_3)=I(t_1,t_2)I(t_2,t_3).$$

Доказательство. По определению индекса инфляции

$$I(t_1,t_2)=\frac{S(t_2)}{S(t_1)},\ I(t_2,t_3)=\frac{S(t_3)}{S(t_2)}.$$

где $S(t)$ — стоимость потребительской корзины в момент времени t. Следовательно,

$$I(t_1,t_2)I(t_2,t_3)=\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\frac{S(t_3)}{S(t_2)}.$$

В числителе и знаменателе стоит одно и то же выражение $S(t_2)$. Сократим на него, получим

$$I(t_1,t_2)I(t_2,t_3)=\frac{S(t_3)}{S(t_1)}.$$

Выражение справа — это по определению индекс инфляции $I(t_1,t_3)$. Теорема 3.1 доказана.

Пусть, например, t_1 — это 31 декабря 2004 г., t_2 — это 31 декабря 2005 г., t_3 — это 31 декабря 2006 г. Тогда $I(t_1,t_2)$ — это индекс инфляции за 2005 г., равный 10,9% (официальные данные Росстата).

А $I(t_2,t_3)$ — это индекс инфляции за 2006 г., согласно тому же источнику, он равен 9%. Теорема умножения дает возможность рассчитать по этим данным индекс инфляции за два года (2005–2006), т. е. с 31 декабря 2004 г. по 31 декабря 2006 г.

Согласно приведенному определению индекс инфляции — действительное число. Если цены постоянны, то индекс инфляции равен 1. Если цены растут, то индекс инфляции больше 1. Однако часто приводят индекс инфляции в процентах. При этом в процентах выражают отклонение от ситуации постоянных цен, т. е. отклонение от 1. Обозначим через $a = a(t_1, t_2)$, или $a\% = a(t_1, t_2)\%$ индекс инфляции в процентах за интервал времени (t_1, t_2). Тогда

$$a(t_1,t_2)\% = \left(I(t_1,t_2)-1\right)\times 100\%, \quad I(t_1,t_2) = 1+\frac{a(t_1,t_2)}{100}.$$

Или в сокращенной форме:

$$a\% = 100(I-1)\%, \quad I = 1+\frac{a\%}{100}.$$

Чтобы перейти к выражению индекса инфляции в процентах, надо значение в «разах» уменьшить на 1 и результат умножить на 100. Наоборот, чтобы от процентов перейти к «разам», надо значение в «процентах» поделить на 100 и результат увеличить на 1.

Таким образом, 1,25 и 25% — это две записи одного и того же значения индекса инфляции. Инфляция 9% за 2006 г. означает, что цены выросли в среднем в 1,09 раза. Рост цен в 1992 г. в 26,1 раза означает, что индекс инфляции за этот год составил (26,1 – 1) × 100% = 2510%.

Итак, используют два основных способа записи индекса инфляции — в «разах» и в «процентах». В «разах» — это именно тот способ, который дан в определении индекса инфляции как отношения стоимостей потребительской корзины в два момента времени. Однако в средствах массовой информации предпочитают приводить инфляцию в «процентах».

В теореме умножения индексы инфляции выражены в «разах». Следовательно, для расчета индекса инфляции за два года надо от «процентов» перейти к «разам». Индекс инфляции за 2005 г. составляет

$$I(t_1,t_2) = 1+\frac{10{,}9}{100} = 1{,}109,$$

а индекс инфляции за 2006 г. равен

$$I(t_2,t_3)=1+\frac{9}{100}=1,09.$$

По теореме умножения индекс инфляции за два года таков:

$$I(t_1,t_3)=I(t_1,t_2)I(t_2,t_3)=1,109\times1,09=1,20881.$$

Переведем в проценты:

$$I(t_1,t_3)=100(1,20881-1)\%=20,881\%.$$

С достаточной для практики точностью можно округлить: $I(t_1,t_3)=20,9\%$.

Обратите внимание, что при сложении индексов инфляции, выраженных в «процентах», получим 10,9% + 9% = 19,9%, что меньше правильного результата 20,881% почти на 1%. К сожалению, неверная рекомендация о сложении «процентов» (вместо умножения «разов») иногда встречается в литературных источниках.

Теорема умножения позволяет переходить от индексов инфляции за отдельные недели к индексам инфляции за месяц (четыре недели), от помесячных индексов инфляции — к квартальным и годовым, от годовых — к индексам инфляции за несколько лет. Например, индекс инфляции за второй квартал — с 01.03.94 по 01.07.94 — т. е. I(01.03.94, 01.07.94), выражается через индексы инфляции за апрель I(01.03.94, 01.05.94), май I(01.05.94, 01.06.94) и июнь I(01.06.94, 01.07.94) соответственно как произведение этих индексов, т. е. находится по формуле

$$I(01.03.94,\ 01.07.94) =$$
$$= I(01.03.94,\ 01.05.94)\,I(01.05.94,\ 01.06.94)\,I(01.06.94,\ 01.07.94).$$

Аналогично индекс инфляции за год равен произведению двенадцати индексов инфляции: за январь, февраль, март и остальные девять месяцев.

Насколько велика ошибка от сложения индексов инфляции «в процентах»? Найдем ее в общем виде. Поскольку для любых чисел x и y справедливо тождество

$$(1+x)(1+y)=1+x+y+xy,$$

то, как легко проверить, для индексов инфляции «в процентах»

$$i(t_1,t_2)=100\left(I(t_1,t_2)-1\right)$$

(в прежних обозначениях $i(t_1,t_2)$ $i(t_1,t_2)=a$) справедливо тождество

$$i(t_1,t_3)=i(t_1,t_2)+i(t_2,t_3)+\frac{i(t_1,t_2)i(t_2,t_3)}{100}.$$

Если индексы инфляции «в процентах» $i(t_1,t_2)$ и $i(t_2,t_3)$ малы, т. е. индексы инфляции «в разах» $I(t_1,t_2)$ и $I(t_2,t_3)$ мало отличаются от единицы, то справедлива приближенная формула

$$i(t_1,t_3)=i(t_1,t_2)+i(t_2,t_3).$$

Погрешность этой формулы, измеряемая в процентах, равна

$$\frac{i(t_1,t_2)i(t_2,t_3)}{100}.$$

Эта величина становится заметной, если сомножители — порядка десятков и сотен (процентов). Если формула применяется несколько раз, то погрешность накапливается. Противоположный случай — при малых индексах инфляции погрешность приближенной формулы мала (является бесконечно малой более высокого порядка).

Период удвоения цен. Рассмотрим пример. В известном учебнике экономической теории [10] рассмотрена связь между ежегодным увеличением цен и числом лет, необходимых для увеличения цен вдвое. Приведено правило, которое вначале выглядит совершенно непонятным:

(приблизительное количество лет, необходимое для удвоения) =
= 70 / (темп ежегодного увеличения уровня цен в %).

Действительно, пусть n — количество лет, необходимое для удвоения цен, а x — темп ежегодного увеличения уровня цен (в % — $100x$%). При «подходе профана» рост за n лет составит $100nx$, а потому срок удвоения цен должен находиться из условия

$$100nx = 100,\ n = 100 / (100x),$$

т. е. в числителе дроби должно стоять число 100, а не 70. В чем дело?

А дело в том, что рост описывается не линейной функцией, а экспоненциальной, надо не складывать, а возводить в степень. За n лет рост цен составит $(1+x)^n$. Период удвоения находится из уравнения

$$(1+x)^n = 2.$$

Тогда

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+x)}.$$

Воспользуемся приближенной формулой математического анализа

$$ln(1 + x) = x + O(x^2),$$

тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$n = 100\, ln\, 2 \,/\, 100\, x.$$

Остается заметить, что

$$100\, ln\, 2 = 100 \times 0{,}69314718,$$

т. е. с достаточной для подобных расчетов точностью $100\, ln\, 2 = 70$. «Таинственное» правило полностью обосновано.

Следствия теоремы умножения. Эта теорема позволяет без труда сменить начало отсчета (базовый момент времени). Например, в табл. 3.6 начальный момент времени — 31 марта 1991 г. (можно заменить на 1990 г., поскольку цены до 2 апреля 1991 г. были постоянными). Поскольку по теореме умножения

$$I(t_2,t) = \frac{I(t_1,t)}{I(t_2,t_2)},$$

то без труда можно перейти к отсчету инфляции от первого дня третьего тысячелетия. Действительно, в соответствии со строкой 41 табл. 3.6 имеем:

$$I(01.01.01,t) = \frac{I(31.03.91,t)}{I(31.03.91,01.01.01)} = \frac{I(31.03.91,t)}{33{,}34}.$$

Например, получаем, что инфляция за 6 лет (2001–2006) составляет

$$I(01.01.01, 10.01.07) = \frac{59,432}{33,340} = 1,7826,$$

т. е. 78,26%.

Обсудим соотношение инфляции по месяцам и за год, а также понятие среднего темпа роста цен и среднемесячной инфляции. Пусть I_1 — индекс инфляции за январь (в разах), I_2 — за февраль, I_3 — за март, ..., I_{12} — за декабрь, а $I_{\text{год}}$ — за год в целом. Тогда согласно теореме умножения

$$I_{\text{год}} = I_1 I_2 I_3 \dots I_{12}.$$

Как ввести понятие среднего индекса инфляции? Естественно исходить из требования, чтобы при подстановке среднего индекса инфляции вместо всех усредняемых величин итог не изменялся. Пусть I_1 I_2 I_3 ... I_k — индексы инфляции за k последовательных интервалов времени, а $I_{\text{ср}}$ — средний индекс инфляции для этой совокупности. Тогда исходное требование — это требование выполнения равенства

$$I_1 I_2 I_2 \dots I_k = I_{\text{ср}}^k.$$

Таким образом,

$$I_{\text{ср}} = \sqrt[k]{I_1 I_2 I_2 \dots I_k},$$

т. е. средний индекс инфляции рассчитывается как среднее геометрическое. Например, средний индекс инфляции за 2005–2006 гг. равен (по официальным данным)

$$I_{\text{ср}} = \sqrt{1,109 \times 1,09} = 1,09946.$$

Отметим, что всегда среднее геометрическое меньше среднего арифметического

$$\sqrt[k]{I_1 I_2 I_3 \dots I_k} < \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_k}{k},$$

за исключением единственного случая, когда все усредняемые величины равны между собой (и равны их среднему арифметическому и среднему геометрическому). Среднее арифметическое индексов инфляции за 2005 г. и 2006 г. равно (1,109 + 1,09) / 2 = 2,199 / 2 = 1,0995, что больше среднего геометрического 1,09946, хотя превышение и невелико.

Среднемесячная инфляция, как и средний темп роста для любого временного ряда, рассчитывается в предположении, что ежемесячный рост цен не меняется от месяца к месяцу. Для данных табл. 3.5 она равна

$$\sqrt[36]{1598{,}88} = 1{,}2274, \text{ или } 22{,}74\%.$$

Другими словами, с 13.03.91 по 13.03.94 цены каждый месяц увеличивались в среднем на 22,74%.

Примеры ошибок при расчетах с индексами инфляции. Информация об индексах инфляции и рассуждения, связанные с ними, постоянно появляются на страницах печати и обсуждаются в иных средствах массовой информации. К сожалению, достаточно широко распространены ошибки.

Так, в одной из экономических (!) газет была помещена публикация, в которой основной исходный материал для обсуждения — индексы инфляции по месяцам (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Индексы инфляции по месяцам

Месяц	Индекс инфляции	Месяц	Индекс инфляции	Месяц	Индекс инфляции
Январь	1,00	Май	1,29	Сентябрь	1,22
Февраль	1,23	Июнь	1,30	Октябрь	1,19
Март	1,19	Июль	1,23	Ноябрь	1,23
Апрель	1,25	Август	1,22	Декабрь	1,25

Автору публикации были нужны индексы инфляции за несколько месяцев. Рассчитывая их, он без каких-либо сомнений пользовался ранее рассмотренной приближенной формулой (сложение индексов «в процентах») вместо точной (перемножение индексов инфляции, выраженных «в разах»). В результате он получил для периода январь — декабрь (т. е. за год) значение индекса инфляции 3,60 (поскольку 0% + 23% + 19% + 25% + 29% + 30% + 23% + 22% + 22% + 19% + + 23% + 25% = 260%), в то время как на самом деле индекс инфляции, рассчитанный в результате перемножения индексов по месяцам, равен 10,23. Допущенная ошибка в 10,23 / 3,60 = 2,84 раза существенно исказила дальнейшие расчеты (фонда оплаты труда, средней зарплаты и других экономических характеристик) в рассматриваемой публикации, названной в специализированной экономической газете не как-нибудь, а «консультацией»!

В еженедельнике «Аргументы и факты» в апреле 1994 г. в рубрике «Прогноз» помещена беседа журналистки Татьяны Коростиковой с первым заместителем министра экономики России Яковом Уринсоном [7], в которой Я. Уринсон прогнозирует:

«...Мы предполагаем рост цен за 1994 г. в 5 раз...

В месяц — 7–8%...».

Сказанное противоречиво. Если индекс инфляции за год равен 5,0, то за месяц, очевидно, рост цен равен в среднем

$$\sqrt[12]{5,0} = 1,1435,$$

т. е. 14,35% в месяц, а не 7–8%. Если же рост цен составляет 7–8% в месяц, то индекс инфляции за год лежит между

$$(1,07)^{12} = 2,25 \text{ и } (1,08)^{12} = 2,52,$$

т. е. по крайней мере в два раза меньше, чем названный в беседе достаточно реальный прогноз — рост в 5 раз. Остается неясным, кто дезориентировал читателя многотиражного издания — чиновник или журналист. Наш запрос об этом в редакцию «Аргументов и фактов» остался без ответа.

Покажем на примере этих данных накопление погрешностей при использовании приближенной формулы, основанной на суммировании индексов инфляции «в процентах». Если в месяц рост на 14,35%, то за год по приближенной формуле — на 14,35 × 12 = 172,2% (вместо 400% — рост в 5 раз). Если в месяц — на 7%, то за год — на 7 × 12 = 84% (вместо 125%). Если в месяц — на 8%, то за год — на 8 × 12 = 96% (вместо 152%).

Приведенных примеров достаточно для констатации того, что к сообщениям в средствах массовой информации, посвященным росту цен, следует относиться с известной осторожностью.

Теорема сложения. Целью введения индекса инфляции была выдвинута необходимость усреднения индивидуальных темпов роста цен (индивидуальных индексов инфляции)

$$I_i(t_1,t_2)=\frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Однако индекс инфляции был определен не как среднее таких величин, а как отношение стоимостей потребительских корзин. Тем не менее индекс инфляции действительно является средним взвешенным арифметическим индивидуальных индексов инфляции, как показывает следующая теорема.

Теорема 3.2 (теорема сложения). Существуют положительные весовые коэффициенты β_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, такие, что

$$I(t_1,t_2)=\sum_{1\le i\le n}\beta_i I_i(t_1,t_2),$$

причем $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=1$. При этом β_i — это доля стоимости потребительской корзины, приходящаяся на соответствующий (i-й) товар (услугу) в начальный (базовый) момент времени,

$$\beta_i=\frac{p_i(t_1)Q_i}{S(t_1)}=\frac{p_i(t_1)Q_i}{\sum\limits_{1\le k\le n}p_k(t_1)Q_k}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Доказательство дается следующей последовательностью преобразований:

$$\sum_{1\le i\le n}\beta_i I_i(t_1,t_2)=\sum_{1\le i\le n}\frac{p_i(t_1)Q_i}{S(t_1)}\times\frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)}=$$

$$=\sum_{1\le i\le n}\frac{p_i(t_2)Q_i}{S(t_1)}=\frac{1}{S(t_1)}\sum_{1\le i\le n}p_i(t_2)Q_i=\frac{S(t_2)}{S(t_1)}=I(t_1,t_2).$$

(сокращаются выражения $p_i(t_1)$, оказывающиеся как в числителе, так и в знаменателе i-го слагаемого).

Теорема сложения справедлива и в случае, когда вместо индивидуальных коэффициентов инфляции стоят групповые (доказательство опущено). Например, при расчете индекса инфляции по потребительской корзине ИВСТЭ (табл. 3.4) можно сначала рассчитать индексы инфляции по 10 группам, выделенным в этой корзине (хлеб и хлебопродукты, овощи, сахар и кондитерские изделия и др.), а затем объединить их в единый индекс с помощью весовых коэффициентов согласно теореме сложения. Аналогично можно, получив индексы инфляции отдельно по продовольственной корзине, отдельно по товарам повседневного спроса, длительного спроса, отдельно по различным видам услуг (жилищно-коммунальных, транспортных, информационных и др.), получить итоговый индекс инфляции по объединенной корзине. Большое значение имеет теорема сложения при расчетах дефлятора валового внутреннего продукта (с целью приведения его к сопоставимым ценам), поскольку потребительская корзина при этом должна охватывать весь спектр конечных товаров и услуг, производимых на территории страны за год.

3.4. Использование индекса инфляции в экономических расчетах

Хорошо известно, что в любой стране стоимость ее денежных единиц со временем меняется. Например, на один доллар США в 1930-х гг. можно было купить примерно в восемь раз больше материальных ценностей (например, продовольствия), чем в 1990-х (см. таблицу пересчета в учебнике [10]), а если сравнивать с временами Тома Сойера — в 100 раз больше. Причем стоимость денежных единиц с течением времени, как правило, падает. Этому есть две основные причины — банковский процент и инфляция. В экономике есть инструменты для учета изменения стоимости денежных единиц с течением времени. Один из наиболее известных — расчет *NPV* (*Net Present Value*) — чистой текущей стоимости. Однако бухгалтерский учет и построенный на данных баланса предприятия экономический анализ финансово-хозяйственной деятельности российского предприятия пока что, как правило, игнорируют сам факт наличия инфляции. Отличие финансиста от бухгалтера проявляется, в частности, в том, что бухгалтер имеет дело с величинами, выраженными в номинальных денежных единицах (поскольку в документах первичного бухгалтерского учета используются именно они), а финансист не может игнорировать изменение покупательной способности денежных единиц во времени.

В настоящем разделе обсудим некоторые возможности использования индекса инфляции в экономических расчетах в процессе подготовки и принятия решений. Чтобы избежать непродуктивных эмоций при обсуждения современного экономического положения, отнесем большинство рассматриваемых примеров к ушедшей в историю середине 1990-х гг.

Будем пользоваться как данными ИВСТЭ (табл. 3.6), так и официальными (табл. 3.8). Сравнение столбцов (4) и (5) показывает, что официальная статистика занижала реальную инфляцию в 1,5–2,0 раза. Именно это было причиной того, что ИВСТЭ по заказу Минобороны РФ в 90-е гг. проводил сбор и анализ данных о динамике цен. Заказчика интересовали размеры финансирования НИР в реальных (сопоставимых) ценах. Часть полученных результатов была опубликована [5, 11, 21]. Мониторинг цен продолжается [20, 22, 31].

Необходимо отметить, что в начале XXI в. темпы роста цен, фиксируемые независимыми исследователями (в частности, ИВСТЭ) и официальной статистикой, достаточно близки. Прежние расхождения были порождены реалиями 90-х гг. и остались в основном в прошлом тысячелетии. Однако начиная с 2007 г. проявились расхождения нового типа (см. ниже). Специалисты отмечают нерешенные проблемы в области измерения инфляции, имеющиеся расхождения в подходах, отсутствие прозрачности в деятельности официальных статистических органов [23].

Таблица 3.8

Индексы инфляции в РФ (1992–2007 гг.)
(по данным официальных статистических органов)

Год	Индекс инфляции	Индекс инфляции в %	Накопленная инфляция с января 1992	Накопленная инфляция с марта 1991	Данные ИВСТЭ к столбцу (4)
(1)		(2)	(3)	(4)	(5)
1991				2,6	–
1992	26,1	25100	26,1	67,86	–
1993	9,4	840	245,34	637,88	1235,42
1994	3,15	215	772,82	2009,33	3680,34
1995	2,31	131	1785,22	4641,56	9989,32
1996	1,218	21,8	2174,39	5653,42	11815,31
1997	1,11	11,0	2413,58	6274,30	12997
1998	1,844	84,4	4,451	11,572	20,395
1999	1,365	36,5	6,075	15,795	27,737
2000	1,202	20,2	7,303	18,986	33,340

Окончание табл. 3.8

Год	Индекс инфляции	Индекс инфляции в %	Накопленная инфляция с января 1992	Накопленная инфляция с марта 1991	Данные ИВСТЭ к столбцу (4)
2001	1,186	18,6	8,661	22,517	39,541
2002	1,151	15,1	9,968	25,917	45,512
2003	1,12	12,0	11,164	29,028	50,974
2004	1,117	11,7	12,471	32,424	55037
2005	1,109	10,9	13,830	35,958	57,354
2006	1,09	9,0	15,075	39,194	59,342
2007	1,119	11,9	17,830	46,358	85,960

Примечание. Накопленные индексы инфляции с 1998 г. даются с учетом деноминации.

Переход к сопоставимым ценам. Индекс инфляции даст возможность перехода к сопоставимым ценам, расходам, доходам и другим экономическим величинам. Например, по данным ИВСТЭ (ср. табл. 3.6, в которой приведены значения индекса инфляции на 02.03.95 и 30.03.95), индекс инфляции за 4 года — с 13.03.91 г. по 16.03.95 г. — составил 5936. Это означает, что покупательной способности 1 рубля марта 1991 г. соответствует примерно 6000 (а точнее 5936) рублей марта 1995 г.

Рассмотрим приведение доходов к неизменным ценам. Пусть Иван Иванович Иванов получал в 1990 г. 300 руб. в месяц, а в начале мая 1995 г. ему выдали 1 млн руб. за апрель (т. е. за предыдущий месяц). Увеличились его доходы или уменьшились?

Номинальная заработная плата выросла в 1 000 000 / 300 = = 3333 раза. Однако индекс инфляции на 18 мая 1995 г. составлял 6180 (дата взята исходя из того, что средства, полученные в начале мая, Иван Иванович Иванов тратит в течение этого месяца). Это значит, что 1 руб. 1990 г. соответствовал по покупательной способности 6180 руб. в ценах на 18.05.95 г. Следовательно, в ценах 1990 г. доход И.И. Иванова составлял 1 000 000 / 7080 6180 = 161 руб. 81 коп., т. е. 53,9% от дохода в 1990 г.

Можно поступить наоборот, привести доход 1990 г. к ценам на 18 мая 1995 г. Для этого достаточно его проиндексировать, т. е. умножить его на индекс инфляции: доход 1990 г. соответствует 300 × 6180 =

= 1 млн 854 тыс. руб. в ценах мая 1995 г., что в 1 854 000 / 100 000 = = 1,854 раза больше, чем месячный доход в 1990 г. Следовательно, доход мая 1995 г. составляет 100(1 / 1,854)% = 53,9% от дохода 1990 г. Нетрудно показать, что оба способа расчетов приводят к одному и тому же результату.

Средняя зарплата. Сопоставим инфляцию со средней заработной платой. В марте 1991 г. она равнялась приблизительно 300 руб. в месяц, т. е. минимальная продуктовая корзина ИВСТЭ составляла около 8,9% от средней заработной платы. В марте 1994 г. среднемесячная зарплата в Москве составила 206 076 руб. (данные Московского городского статистического комитета), следовательно, стоимость корзины ИВСТЭ составляла 4 349 900 / 206 076% = 21,11% от нее. Если судить по ценам на продукты, за три года уровень жизни основной массы населения понизился в 21,1 / 11,4 = 1,85 раза.

В октябре 1995 г. в Москве средняя заработная плата составляла 520 тыс. руб., а стоимость потребительской корзины ИВСТЭ — 196,6 тыс. руб., т. е. 37,8% от средней зарплаты, падение уровня жизни — в 4,2 раза.

По данным Госкомстата РФ, средняя заработная плата составляла в 1990 г. 303 руб., в октябре 1993 г. — 93 тыс. руб., в январе 1995 г. — 303 тыс. руб. Поскольку зарплата тратится в основном в следующем месяце после получки, то рассмотрим индексы инфляции на 15.11.93 г. и 02.02.95 г., равные 1054 и 4856 соответственно (см. табл. 3.6). В ценах 1990 г. средняя зарплата составила 88 руб. 24 коп. и 62 руб. 40 коп. в ценах 1990 г. соответственно, т. е. 26,48% и 20,59% от зарплаты 1990 г.

Среднемесячная заработная плата в РФ (номинальная и в процентах от уровня 1990 г.) представлена в табл. 3.9. Она составлена по данным Пенсионного фонда РФ, использующего сведения о средней заработной плате при расчете величин пенсий. Обратим внимание, что средняя заработная плата в декабре 1994 г. (354 тыс. руб.) больше, чем в январе 1995 г. (303 тыс. руб.). Проявляется эффект конца года — дополнительные выплаты по итогам года в сочетании с некоторым затишьем производственной деятельности в начале следующего года.

Средняя зарплата рассчитывается путем деления фонда оплаты труда на число работников. При этом объединяются доходы и низкооплачиваемых лиц, и сравнительно высокооплачиваемых. Известно, что распределение доходов резко асимметрично, большому числу низкооплачиваемых работников соответствует малое число лиц с вы-

Таблица 3.9

Среднемесячная заработная плата в РФ

№ п/п	Дата	Среднемесячная заработная плата в РФ (по данным Пенсионного фонда РФ, ноябрь 2004), руб.	Индекс инфляции $I(31.3.91; t)$	Среднемесячная заработная плата в РФ, в % от уровня 1990 г.
1	1990	303 (за 1990 г.)	1,00	100
2	Август 1993	65 400	665,08	32,45
3	Декабрь 1994	354 200	3680,34	32,08
4	Декабрь 1995	735 500	9989,32	24,30
5	Декабрь 1996	1 017 000	11815,31	28,32
6	Декабрь 1997	760 000	12997,00	19,30
7	Декабрь 1998	760,0	23,395	10,72
8	Декабрь 1999	1086,0	32,004	10,97
9	Декабрь 2000	1584,0	35,684	14,80
10	Декабрь 2001	1671,0	43,321	12,73

сокими доходами. За 1991–1995 гг. дифференциация доходов резко увеличилась. Это означает, что доходы основной массы трудящихся сдвинулись влево относительно средней зарплаты. По нашей оценке 50% получают не более 70% от средней зарплаты (медиана распределения), т. е. не более 212 100 руб. по состоянию на январь 1995 г., а наиболее массовой является оплата в 50% от средней (мода распределения), т. е. около 150 тыс. руб. в месяц.

Известно, что типичное распределение доходов таково, что мода величин доходов весьма меньше медианы, которая в свою очередь существенно меньше среднего арифметического (центральная часть функции распределения доходов — за исключением больших доходов — хорошо приближается функцией логарифмически нормального распределения). Дифференциация доходов в России быстро нарастала вплоть до второй половины 1990-х гг. и сильно превзошла уровень всех так называемых промышленно развитых стран. Правда, уровень Бразилии и Кении пока не достигнут, но и климат в этих странах существенно иной, так что минимальное жизнеобеспечение требует существенно меньших затрат.

Доходы отдельных слоев трудящихся снизились еще существеннее. Зарплата профессора Московского государственного института электроники и математики (технического университета) составляла в марте 1994 г. — 42 руб. 92 коп. (в ценах 1990 г.), в июле 1995 г. — 43 руб. 01 коп., т. е. с 1990 г. (400 руб.) снизилась в 9,3 раза, дошла до уровня прежней студенческой стипендии. А студенческие стипендии снизились примерно в той же пропорции и составляли 4–5 руб. в ценах 1990 г.

Кроме того, необходимо учесть, что Госкомстат (и Росстат) учитывает начисленную зарплату, а не выплаченную. В отдельные периоды отечественной истории выплата заработной платы откладывалась надолго. И всегда вычитался налог на доходы физических лиц, следовательно, выплаченная зарплата была примерно на 13% меньше начисленной.

Минимальная зарплата и прожиточный минимум. Минимальная зарплата в сентябре 1994 г. (22 500 руб.) и в мае 1995 г. (43 700 руб.) составляла 38% и 23,4% соответственно от стоимости минимальной физиологически необходимой продовольственной корзины. После подъема до 55 тыс. руб. она в сентябре 1995 г. составляла около 26,34% от стоимости корзины, т. е. реально уменьшилась в 1,44 раза по сравнению с сентябрем 1994 г. В дальнейшем уменьшение стало еще более заметным.

Минимальная зарплата вместе с единой тарифной сеткой во многом определяла зарплату работников бюджетной сферы. Учитывая снижение коэффициентов тарифной сетки, проведенное весной 1995 г., снижение в 1,5 раза покупательной способности минимальной зарплаты, необходимо заключить, что в сентябре 1995 г. доход бюджетников был в 2 раза меньше, чем год назад.

Оценим прожиточный минимум. Бюджетные обследования в 1990 г. показали, что для лиц с низкими доходами расходы на продовольствие составляют около 50% всех расходов, т. е. на промтовары и услуги идет около 50% доходов. Это соотношение подтвердило и проведенное ИВСТЭ бюджетное обследование конца 1995 г. Исходя из него, среднедушевой прожиточный минимум можно оценить, умножая на 2,0 стоимость минимальной продовольственной корзины ИВСТЭ (этот метод расчета прожиточного минимума разработан американской исследовательницей бедности польского происхождения М. Оршански [29]). Например, на 28 декабря 1995 г. — 531 432 руб. (см. табл. 3.6). То есть прожиточный уровень для семьи из трех человек — муж, жена и ребенок — должен был на 28 декабря 1995 г. составлять 1,594 млн руб. (в месяц). Например, муж должен получать 900 тыс. руб., жена — 700 тыс. руб. в месяц (чистыми, т. е. после вычета подоходного налога). В декабре 1995 г. средняя заработная плата составляла 735 500 руб. (табл. 3.9). Сопоставление приведенных численных значений показывает, что среднеоплачиваемые работники не могли обеспечить прожиточный минимум для своей семьи (муж и жена суммарно могли заработать лишь 1,471 млн «грязными», что заметно меньше прожиточного минимума).

Как уже сказано, М. Оршански предложила рассчитывать прожиточный минимум (ПМ) по формуле

$$ПМ = C\,S(t),$$

где C — стоимость минимальной физиологически необходимой продовольственной корзины, а $S(t)$ — коэффициент, равный отношению всех расходов к расходам на продовольствие, рассчитанный для бедных семей. Этот коэффициент был оценен нами в ходе бюджетного обследования семей студентов Московского государственного института электроники и математики. При этом бедными семьями считались те, для которых среднедушевой доход оказался меньше 90% от медианного. Оказалось, что с достаточной точностью можно принять $C = 2$.

Согласно данным табл. 3.6, прожиточный минимум в марте 1990 г. (и ранее) составлял 2 × 26,60 = 53,20 руб., а в марте 2019 г. — 2 × 26,60 × 261,83 = 13 876,99 руб., т. е. округленно 14 тыс. руб. (на человека в месяц).

Численные значения стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции рассчитаны ИВСТЭ в основном по ценам на продукты в Москве и Подмосковье. Однако для других регионов численные значения отличаются мало (в рассматриваемый период времени). Для Москвы индекс инфляции на 27.07.95 г. — 6598, а для Иванова на 1.08.95 г. — 7542. Поскольку потребительская корзина на 13.03.91 г. в областном центре г. Иванове была на 95 коп. дешевле, то и на 1.08.95 г. она несколько дешевле, чем была бы при том же индексе инфляции в Москве, и равна 193 452 руб., а прожиточный минимум равен 386 905 руб. Этот и другие подобные расчеты показывают, что приведенные выше численные значения для Москвы в качестве первого приближения можно использовать для различных регионов России.

Индексы инфляции с помощью описанной выше методики можно рассчитать для любого региона, профессиональной или социальной группы, отдельного предприятия или даже конкретной семьи. Эти значения могут быть эффективно использованы на трехсторонних переговорах между профсоюзами, работодателями и представителями государства.

Проценты по вкладам в банк, плата за кредит и инфляция. Рассмотрим банк, честно выполняющий свои обязательства. Пусть он дает 10% в месяц по депозитным вкладам. Тогда 1 руб., положенный в банк, через месяц превращается в 1,1 руб., а через 2 — по формуле сложных процентов — в $1{,}1^2 = 1{,}21$ руб., ..., через год — в $1{,}1^{12} = 3{,}14$ руб. Однако за год росли не только вклады, но и цены. Например, с 19.05.94 г. по 18.05.95 г. индекс инфляции составил 3,73. Значит, в сопоставимых ценах (на момент оформления вкладов) итог годового хранения равен 3,14 / 3,73 = 0,84 руб. Хранение оказалось невыгодным — реальная стоимость вклада уменьшилась на 16%, несмотря на, казалось бы, очень выгодные условия банка. Другими словами, реальный процент платы за депозит оказался отрицательным, равным (–16)% в годовом исчислении, притом что в номинальных рублях договор с банком обеспечивает 214% годовых.

Пусть фирма получила кредит под 200% годовых. Значит, вместо 1 рубля, полученного в настоящий момент в кредит, через год ей надо отдать 3 рубля. Пусть она взяла кредит 19.05.94 г., а отдает 18.05.95 г. Тогда в ценах на момент взятия кредита она отдает 3 / 3,73 = 0,80 руб. за 1 руб. кредита (в сопоставимых ценах на момент выдачи кредита). Таким образом, кредит частично превратился в подарок — возвращать надо на 20% меньше, чем получил, реальная ставка кредита отрицательна, она равна (–20)%! Такова была типичная ситуация в России в течение ряда лет начиная с 1992 г., особенно в 1992–1994 гг. Но бесплатных подарков в бизнесе не бывает — за них надо платить по другим каналам, как правило, криминальным.

К сожалению, расчеты подобного типа можно провести лишь после того, как год истек, в то время как принимать решение о депозите или кредите необходимо в начале года. Остается опираться на прогноз инфляции, который всегда имеет погрешности.

Сколько стоит доллар? На 14 августа 1993 г. курс доллара США составлял в РФ 1984,5 руб., а инфляция — 665,08. Следовательно, в сопоставимых ценах 1990 г. реальный курс доллара США равнялся 1984,5 / 665,08 = 2 руб. 98 коп.

В июле 1995 г. индекс инфляции около 6500 (табл. 3.6), а курс доллара США — около 4500 руб. за доллар. Следовательно, доллар США стоит 4500 / 6500 = 0,69 руб. в ценах 1990 г., т. е. примерно соответствует официальному обменному курсу в 1980-х гг. Сопоставим с тем, что в сентябре 1994 г. курс доллара был около 2000, а индекс инфляции — около 2200, т. е. доллар стоил около 0,91 руб. в ценах 1990 г. Реальная покупательная способность доллара упала за 10 месяцев в 1,32 раза.

Пик реального курса доллара приходился на время после дефолта 1998 г. На начало января 1999 г. курс был 20 руб. 65 коп. при индексе инфляции 20,395, т. е. в реальном исчислении он составлял 20,65 / 20,395 = 1 руб. 01 коп. За год до этого, в начале 1998 г., индекс инфляции равнялся 12,997, курс доллара — 5 руб. 96 коп., в реальном исчислении 5,96 / 12,997 = 0,46, т. е. 46 коп. — в 2 с лишним раза меньше, чем в начале 1999 г.

В середине 2003 г. курс доллара был несколько больше 30 руб. (30 руб. 38 коп.), индекс инфляции составлял 48,56, следовательно, 1 доллар США по своей покупательной способности в России на июль 2003 г. соответствовал 63 копейкам начала 1991 г. В начале 2004 г. курс доллара составлял около 28 руб. 50 коп. при индексе инфляции 50,974, следовательно, 1 доллар США по своей покупательной способности в России на начало 2004 г. соответствовал 55 копейкам начала 1991 г. Всего за полгода доллар подешевел на 15%.

В конце июля 2007 г. курс доллара США — 25 руб. 41 коп. при индексе инфляции 61,819, следовательно, реальный его курс — 41 копейка (в сопоставимых ценах 1990 г.).

В конце декабря 2008 г. курс доллара США — 29 руб. 00 коп. при индексе инфляции около 100, следовательно, его реальный курс — 29 копеек (в сопоставимых ценах 1990 г.).

Реальный курс доллара США на любой момент времени можно получить, располагая двумя широкодоступными временными рядами — ежедневными данными о номинальном курсе доллара США на Московской межбанковской валютной бирже и рядом значений индексов инфляции (табл. 3.6 и 3.8). В 90-е гг. был распространен миф о том, что можно избавиться от влияния инфляции, ведя расчеты в долларах США. Этот миф опровергается приведенными выше результатами расчетов. Инфляция уменьшает покупательную способность доллара США — как в нашей стране, так и в самих США [10], а также и в других странах.

Как известно, курс доллара США в РФ определяется в результате торгов на Московской межбанковской валютной бирже. Каковы свойства валютного рынка? Легко видно, что это отнюдь не рынок чистой конкуренции [10, 25]. Игроки не являются равноправными. Участвующие в торгах коммерческие банки административно зависят от Центрального банка РФ. Другой инструмент влияния Центрального банка — долларовые или рублевые интервенции. Необходимо признать, что реально курс доллара во многом определяется руководством страны, решающим поставленные перед собой задачи, действуя через Центральный банк РФ. Не будем пытаться обсуждать эти задачи, констатируем только, что официальный курс доллара США в РФ определяется во многом административным путем. Возникает естественный вопрос — а каков же реальный курс?

Международные сопоставления на основе паритета покупательной способности. Процитируем типичную публикацию в средствах массовой информации:

«Российский рубль входит в число самых недооцененных мировых валют по паритету покупательной способности, говорится в очередном исследовании журнала The Economist. Исходя из результатов исследования, справедливая цена доллара составляет 15,2 руб. Однако участники рынка считают, что подешеветь до 15 руб. доллар сможет лишь через 15–20 лет.

Индекс «Биг Мака» основывается на паритете покупательской способности (ППС), рассчитанной с помощью одинакового во всех странах мира продукта (в данном случае «Биг Мака»). Согласно методике расчета индекса «Биг Мака», курсы валют должны быть такими, чтобы стоимость этого продукта была во всех странах одинаковой.

Индекс «Биг Мака», рассчитанный журналом The Economist, показал, что рубль недооценен на 41%. При этом китайский юань, например, недооценен на 58%» (ежедневная деловая газета «РБК Daily», 09.07.2007).

Обсудим три вопроса. По каким причинам реальное соотношение валют может отличаться от официального? Как установить реальный курс? Какие последствия влечет пересчет с официальных курсов на реальные?

Если официальный курс доллара США по отношению к рублю выше реального, то это означает, что государство защищает отечественных товаропроизводителей, поскольку зарубежные товары (из долларовой зоны) продаются внутри страны дороже, чем было бы при соответствии официального курса реальному. Государство поддерживает также работу отечественных предприятий на экспорт, искусственно занижая издержки производства. Одновременно завышение официального курса ставит препятствия на пути закупки новейших зарубежных технологий, делает невыгодным получение кредитов. Ясно, что возвращать долги в долларах легче при низком курсе доллара, чем при высоком. Остановившиись на сказанном, констатируем, что в те или иные периоды своего развития государство, ведущее активную экономическую политику, имеет основания устанавливать официальный курс обмена валюты, отличный от реального, соответствующего свободному рынку.

Как же установить реальный курс? Принцип *паритета покупательной способности* (ППС) предлагает исходить из того, что одна и та же потребительская корзина должна стоить одинаково в разных странах. Если потребительская корзина ИВСТЭ стоит в начале июля 2007 г. в Москве 1644 руб., а в Нью-Йорке, к примеру, 100 долларов, то приравниваем: 1644 руб. = 100 долларов США, т. е. курс доллара по ППС — 16 руб. 44 коп. В процитированной публикации из СМИ приравнивалась стоимость «Биг Мака» — продукта, который в распространенной по многим странам мира сети ресторанов быстрого питания «Макдоналдс» всюду изготавливается по одной и той же рецептуре. Другими словами, в качестве используемой для сравнения потребительской корзины берется набор товаров и услуг, необходимых для изготовления «Биг Мака» (включая продукты питания, электроэнергию, оплату труда, амортизацию оборудования и т. п.). Надо отметить, что в зависимости от конкретной методики международного сопоставления, выбранной тем или иным экономистом (в частности, конкретной потребительской корзины и способа измерения ее стоимости), оценки реального курса валют по ППС могут заметно различаться. Например, курс доллара США — от 8 до 15 руб. (по состоянию на 2007 г.). Несмотря на разногласия, общий вывод одинаков — курс доллара США в РФ завышен в несколько раз.

Международные сопоставления на основе ППС приводят к принципиально иным результатам, чем на основе официальных курсов обмена валют. В качестве примера приведем табл. 3.10, демонстрирующую это различие на примере валового национального дохода (ВНД) десяти ведущих стран мира [6]. Таблица составлена на основе «Доклада о мировом развитии», представленного Всемирным банком в 2004 г. [3]. Валовой национальный доход страны — одна из основных ее макроэкономических характеристик [10, 25]. ВНД меньше валового национального продукта (ВНП) на величину амортизационных отчислений. Другими словами, ВНД аккумулирует добавленную стоимость, произведенную живым трудом в течение года, в то время как в ВНП входят и перенесенные на вновь созданные товары и услуги результаты прошлого труда. Все показатели табл. 3.10 рассчитаны специалистами Всемирного банка по принятым в этой организации методикам.

Таблица 3.10

Валовой национальный доход (ВНД) на 2002 г. (в млрд долларов)

№ п/п	Страна	Объем ВНД	Место в мире по ППС	Объем ВНД по ППС
1	США	10110	1	10100
2	Китай	1210	6	5625
3	Япония	4266	2	3315
4	Индия	502	11	2691
5	Германия	1870	3	2163
6	Франция	1343	5	1556
7	Великобритания	1486	4	1523
8	Италия	1098	7	1467
9	Бразилия	497	12	1266
10	Россия	308	16	1127

В табл. 3.10 страны упорядочены в соответствии с убыванием объема ВНД, рассчитанного по паритету покупательной способности. Видно, что упорядочение по этому показателю значительно отличается от упорядочения по ВНД, соответствующего средним обменным курсам 2002 г. Китай с шестого места поднялся на второе, далеко опередив Японию, Германию, Великобританию, Францию, которые предшествовали ему по «официальному» ВНД. Индия поднялась с одиннадцатого места на четвертое, Бразилия — с двенадцатого на девятое, Россия — с шестнадцатого на десятое. Соответственно сдвинулись вниз ведущие европейские страны.

Особенно интересно обсудить положение экономики Китая в мире. По некоторым оценкам, уже сейчас Китай обладает самой мощной экономикой в мире, его ВВП превышает ВВП США. По «экономической силе» на первом месте — Китай, на втором — Европейский союз (рассматриваем его здесь как единое государство) и только на третьем — США. Это упорядочение необходимо учитывать российским организациям при стратегическом планировании. А студентам, нацеленным на перспективу, пора учить китайский язык.

Приведем принципиально важные данные работы [32]. Объемы ВВП по паритету покупательной способности (ППС) в млрд долларов США таковы (данные Международного валютного фонда (МВФ) за 2017 г.):

1. КНР 23 208.
2. США 19 485.
3. Индия 9474.
4. Япония 5443.
5. Германия 4199.
6. Россия 4016.
7. Индонезия 3250.
8. Бразилия 3247.
9. Великобритания 2925.

ВВП состоит из трех секторов: промышленность, сельское хозяйство и услуги. Известны проценты секторов промышленности / сельского хозяйства в ВВП:

КНР 39,5/8,2
США 18,9/0,9.
Индия 28,9/16,8.
Япония 23/1,5.
Германия 30,1/0,6.
Россия 32,4/4,7.
Великобритания 19/0,6.

Таким образом, если считать только сектора реального производства, т. е. промышленность и сельское хозяйство, то получаем, в млрд долларов США по ППС:

1. КНР 11 070.
2. Индия 4329,6.
3. США 3858.
4. Россия 1489,9.
5. Япония 1333,5.
6. Германия 1289,1.

...

Великобритания 573,3.

Похоже, возвращаются те времена, когда западные колониальные державы еще не захватили Индию и не закабалили Китай, то есть

XVIII век, где на пару азиатских гигантов приходилось более 60% мирового производства.

Если посчитать только промышленность, без сельского хозяйства, в млрд долларов США по ППС, то:

1. КНР 9167,2.
2. США 3682,7.
3. Индия 2738.
4. Россия 1301,2.
5. Германия 1263,9.
6. Япония 1251,9.

Китай по объемам индустрии превосходит США в 2,5 раза. Китай производит 928,8 млн тонн стали, США — 86,7; Китай производит 2400 млн тонн цемента, США — 86,3 и т. д. Россия и в этом случае впереди Японии и Германии. И, кстати, по итогам 2018 г. прирост промышленного производства в России составил 2,9%, что выше, чем в Германии и Японии.

Проблема учета инфляции при экономическом анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия. Индексы инфляции используются для пересчета номинальных цен в неизменные (сопоставимые). Другими словами, для приведения доходов и расходов к ценам определенного момента времени. Потребительские корзины для промышленных предприятий, конечно, должны включать промышленные товары, а потому отличаться от потребительских корзин, ориентированных для изучения жизненного уровня. Однако «в первом приближении» можно использовать потребительскую корзину ИВСТЭ или применять индексы инфляции Росстата, особенно для тех организаций, для которых в структуре себестоимости выпускаемых товаров и услуг большое место занимает оплата труда.

Рассмотрим условное предприятие. В табл. 3.11 представлена информация о прибыли предприятия по годам. Эти значения взяты из ежегодных отчетов, сданных в налоговые органы, и выражены в номинальных денежных единицах. Видим, что прибыль год от году растет, за 6 лет выросла на 80%. Напрашивается вывод, что предприятие процветает, его руководители заслуживают похвал и наград.

Однако не будем торопиться. Приведем прибыль к сопоставимым ценам. В качестве точки отсчета естественно взять начало тысячелетия, т. е. конец 2000 г. — начало 2001 г. Другими словами, приведем интересующую нас характеристику работы предприятия к сопоставимым ценам на 1 января 2001 г. Именно в этих ценах выражена прибыль 2000 г. Будем использовать официальные данные Росстата (табл. 3.8). Индексы инфляции «в разах» приведены в столбце (4) табл. 3.11.

Таблица 3.11

Динамика прибыли предприятия (в млн руб.)

№ п/п	Год	Прибыль, млн руб.	Индекс инфляции	Накопленная инфляция	Прибыль в сопоставимых ценах
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	2000	1,0			1,0
2	2001	1,1	1,186	1,186	1,1 / 1,186 = 0,927
3	2002	1,3	1,151	1,365	1,3 / 1,365 = 0,952
4	2003	1,4	1,12	1,529	1,4 / 1,529 = 0,912
5	2004	1,5	1,117	1,708	1,5 / 1,708 = 0,878
6	2005	1,7	1,109	1,894	1,7 / 1,894 = 0,896
7	2006	1,8	1,09	2,064	1,8 / 2,064 = 0,872
8	2007	2,0	1,119	2,310	2,0 / 2,310 = 0,866

Для приведения прибыли 2001 г. к сопоставимым ценам на начало года достаточно разделить ее на годовой индекс инфляции: 1,1 / 1,186 = 0,927. Вот уже первая неожиданность: реальная прибыль не выросла в 2001 г. на 10% по сравнению с 2000 г., как номинальная, а, наоборот, упала на 7,3%.

Чтобы привести к сопоставимым ценам прибыль 2002 г. (и следующих лет), надо сначала найти накопленную инфляцию за прошедшие годы. За 2001–2002 гг. индекс инфляции находится путем перемножения индексов за отдельные годы: $1{,}186 \times 1{,}151 = 1{,}365$. Аналогично индекс инфляции за три года (2001–2003) равен $1{,}186 \times 1{,}151 \times 1{,}12 = 1{,}365 \times 1{,}12 = 1{,}529$. За четыре года индекс таков: $1{,}529 \times 1{,}117 = 1{,}708$. За пять лет: $1{,}708 \times 1{,}109 = 1{,}893$. Наконец, за 7 лет (2001–2007) имеем: $2{,}064 \times 1{,}119 = 2{,}310$.

Рассчитанные значения прибыли в сопоставимых ценах приведены в столбце (6) табл. 3.11. Наблюдаем совсем другую картину по сравнению с номинальной прибылью. Реальная прибыль отнюдь не растет, наоборот, имеет устойчивую тенденцию к снижению. К 2004 г. она снизилась на 13,4%, в то время как номинальная прибыль выросла на 100%.

И выводы получаются совсем другие. Нельзя сказать, что предприятие прогрессивно развивается. Констатируем тенденцию к застою и деградации. Руководители вряд ли заслуживают похвал и наград, наоборот, им следует тщательно проанализировать ситуацию и разработать меры улучшения работы предприятия. Хотя и надо отметить, что говорить о катастрофе преждевременно: прибыль остается положительной, ее снижение не слишком большое.

Как известно, разработана и широко применяется развернутая система коэффициентов, используемых при экономическом анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия [1]. Она основана на данных бухгалтерского баланса. Естественно, опирается на два столбца баланса — данные на «начало периода» и данные на «конец периода». Записывают в эти столбцы номинальные значения. В настоящее время согласно правилам бухгалтерского учета инфляцию полностью игнорируют (за исключением периодических корректировок стоимости основных фондов в соответствии с принимаемыми руководством страны нормативными документами). Это приводит к искажению оценки реального положения предприятия — если пользоваться только данными текущего бухгалтерского учета. Денежные средства преувеличиваются, а реальная стоимость основных фондов занижается. По официальной отчетности предприятие может считаться получившим хорошую прибыль, а по существу — не иметь средств для продолжения производственной деятельности, например для закупки необходимого сырья.

Ясно, что учитывать инфляцию надо. Вопрос в другом — как именно. Потребительская корзина должна, видимо, состоять из тех товаров и услуг, которые предприятие закупает. Стоимость основных фондов может не убывать в соответствии с амортизацией, а возрастать согласно отраслевому темпу инфляции (уменьшенному на амортизационные коэффициенты) и т. д. Обсуждение конкретных методик расчетов выходят за пределы настоящего учебника.

Сколько стоит предприятие? Специалисты по оценке бизнеса используют три подхода — затратный, доходный и сравнительный [26]. Согласно первому из них важно оценить основные фонды. Для этого нужно взять их стоимость в определенный момент времени, например в 1990 г., и умножить на индекс инфляции (и учесть амортизационные отчисления). Вспомним здесь, что официальный индекс инфляции Госкомстата-Росстата в 1,5 раза меньше, чем наш, если отсчитывать от 1990 г. (см. табл. 3.8). Есть много способов исказить экономические показатели, и «специалисты» ими умело пользуются. Занижение индекса инфляции выгодно тем, кто хочет обзавестись собственностью по заниженной цене.

В мировой практике известны различные варианты учета инфляции в бухгалтерской деятельности и в работе финансовых аналитиков [13].

3.5. Динамика цен на продовольственные товары

Проведем сравнительный анализ результатов расчетов на основе различных потребительских корзин с целью оценки точности определения темпов роста цен.

Сравнение индексов инфляции Госкомстата РФ и ИВСТЭ. Результаты расчетов по различным потребительским корзинам дают, естественно, различные значения индексов инфляции, хотя эти различия, как представляется, не слишком значительны. Так, в табл. 3.3 приведена потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры (ЦЭК) при Правительстве Российской Федерации и Государственного комитета Российской Федерации по статистике, короче — корзина Госкомстата РФ. А в табл. 3.4 дана потребительская корзина ИВСТЭ. Было проведено сравнение соответствующих индексов инфляции. Полученные результаты (табл. 3.12) показали, что эти индексы достаточно близки.

Таблица 3.12

Сравнение результатов подсчета стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции Госкомстата РФ и ИВСТЭ

Промежуток времени	Стоимость корзины и индекс инфляции	
	Госкомстат РФ	ИВСТЭ
С 13.03.91 по 13.03.94	30,82 / 48 990,33 1589,8	26,85 / 40 889,1 1598,88
С 15.11.93 по 13.03.94	31255 / 48 990,33 1,57	28050 / 40 889,1 1,46
С 19.05.94 по 26.05.94	56 670,2 / 57 667,75 1,02	55615 / 56 332 1,01

Примечание. В табл. 3.12 верхние числа — стоимости потребительских корзин (в руб.) соответственно на первую указанную дату и через дробь — на вторую, нижнее число — индекс инфляции за данный период.

Близость различных индексов инфляции за большой промежуток времени объясняется тем, что цены растут в целом достаточно согласованно, «аномалии» выправляются: если темп роста цены определенного продукта отстает от среднего роста цен, то имеются основания полагать, что его цена в ближайшее время сильно возрастет. Однако на малых и средних промежутках времени проявляется различие роста цен на отдельные товары.

Тем более интересно, что официально публикуемые индексы инфляции Госкомстата РФ при отсчете с 1990 г. (или, что то же самое, с 13.03.91) давали в середине 90-х по крайней мере вдвое меньшие значения, чем расчеты Института высоких статистических технологий и эконометрики (подробнее см. коллективную монографию [12] тех лет).

Изучение динамики цен в условиях экономических реформ. Уже около тридцати лет в России осуществляется так называемая радикальная экономическая реформа. Одним из сопутствующих ей эффектов является изменение сложившейся к 1991 г. системы цен на все товары, услуги, труд (рабочую силу). Эти изменения цен приобрели ярко выраженный инфляционный характер. За годы «радикальной реформы» произошли изменения не только абсолютных величин цен, но и их пропорций.

Масштабы инфляции были определены не только дисбалансом между скопившейся к 1992 г. у населения значительной массой наличных денег и наличием товаров, но и массовым преобразованием безналичных средств предприятий в наличные деньги в период расцвета совместных предприятий и кооперативов в 1989–91 гг. (а также отменой монополии внешней торговли, в результате чего, например, около 1/3 произведенных в СССР в 1990 г. товаров массового потребления было вывезено за границу). В дальнейшем в результате применения жестких мер (например, невыплаты заработной платы), ограничивающих поступление наличных денег на рынок товаров и услуг, а также ограничивающих количество покупателей среднего класса и тем самым обеспечивающих искусственное снижение спроса, темпы инфляции заметно снизились, но инфляция не прекратилась. Болезнь не исчезла. Удалось сбить температуру больного, т. е. отключить сигнальную систему, но не вылечить болезнь. Стоит только лишь начать платить людям наемного труда заработанные ими деньги при условии корректной оценки труда как рыночного товара, как инфляционная болезнь возобновится (как это и произошло в 2007 г. — см. ниже).

В августе 1998 г. инфляция была подстегнута руководством страны путем искусственного подъема курса доллара.

Институт высоких статистических технологий и эконометрики изучает динамику экономического положения граждан России на основе независимо собранной информации [33]. Приведение к сопоставимым ценам (с помощью индексов инфляции и дефляторов) — составная часть любого экономического расчета, связанного более чем с одним моментом времени. Как показали наши наблюдения над ценами, использование публикуемых Госкомстатом РФ значений индексов инфляции приводит к систематическим ошибкам. Так, например, по нашим данным, цены за 6 с небольшим лет (с марта 1991 г. по май 1997 г.) выросли в среднем примерно в 12 500 раз, а по данным Госкомстата РФ — примерно в 6000 раз. Сказанное определяет актуальность использования независимой информации о ценах и индексах инфляции при анализе экономического положения России, а также при разработке прикладных моделей и методов управления в современных условиях.

Предметом описанного здесь исследования ИВСТЭ [5, 21] является оценка изменения в ходе реформ фактического среднего и минимального физиологически необходимого уровней жизни граждан РФ через сравнение индексов инфляции, вычисленных на основании потребительских корзин, и индекса изменения величины средней заработной платы.

Организация сбора и анализа данных. В 1994–97 гг. еженедельно собирались данные о ценах 35 продуктов в 12 точках Москвы, Подмосковья и Крыма. А именно, информация о ценах собиралась в 9 точках г. Москвы; в 2 точках Московской области (г. Раменское и г. Ногинск) и в Крыму (г. Симферополь). Регулярное измерение цен производилось с интервалом в одну неделю по 35 различным товарам.

Расчеты по собранным ценам продовольственных товаров проводились для следующих 5 потребительских корзин:

1) **ИВСТЭ** — продовольственная потребительская (продуктовая) корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики (табл. 3.4). Составлена с учетом разработок Института питания РАМН. Является сбалансированной по белкам, жирам и углеводам. Обеспечивает минимальные физиологически необходимые потребности человека;

2) **ГКС-1** — продуктовая корзина из 19 продуктов питания (включая сигареты) Государственного комитета РФ по статистике, применявшаяся в 1993–1996 гг. (табл. 3.3);

3) **ГКС-2** — продуктовая корзина Государственного комитета РФ по статистике, используемая с 1 января 1997 г. Нормы потребления предложены Министерством труда;

4) **Бюдж-1** — продуктовая корзина, разработанная на основе бюджетного обследования «бедных семей» студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (среднедушевое потребление не превосходит 90% от медианы обследованной совокупности семей). Эта корзина определяет усредненные фактические объемы потребления (кг/год/человек и, соответственно, кг/мес./человек) 35 продуктовых товаров, по которым производились измерения цен при использовании корзины **ИВСТЭ**. Общий объем затрат «бедных семей» на продуктовые и иные товары предлагается находить умножением стоимости корзины **Бюдж-1** на соответствующие коэффициенты по методу Оршански;

5) **Бюдж-2** — продовольственная потребительских корзина, разработанная на основе бюджетного обследования семей студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (октябрь-ноябрь 1995 г.). Совокупность обследованных семей в целом характеризуется средним уровнем потребления. Эта корзина определяет усредненные фактические объемы потребления (кг/год/человек и, соответственно, кг/мес./человек) 35 продуктовых товаров, по которым производились измерения цен в корзине **ИВСТЭ**. Общий объем затрат «семей со средним достатком» на продуктовые и иные товары предлагается находить умножением стоимости корзины **Бюдж-2** на соответствующие коэффициенты.

Количество элементарных измерений (значений собранных цен продовольственных товаров) приблизительно равно 30 000. Собранные данные о ценах обрабатывались на компьютерах *Macintosh* как известными, так и оригинальными методами. Точность вычислений равна обычной компьютерной точности на компьютере *Macintosh* при работе с числами с плавающей точкой. В дальнейшем все средние величины цен приведены с точностью до одного рубля, а величины процентов — с точностью до 1/10 процента.

При проведении мониторинга за ценами на продукты питания исследователи обычно создают компьютерную базу данных, в которую заносят сведения вида:

1) название продукта питания;

2) объем потребления продукта;

3) цена продукта;

4) дата снятия цены;

5) название торговой точки.

Кроме того, есть вполне понятная последовательность действий (алгоритм) по вычислению индекса инфляции с момента времени t_1 по момент времени t_2:

1) вычислить сумму (по всем составляющим потребительской корзины) произведений цен на объем потребления для момента времени t_1;

2) вычислить сумму произведений цен на объем потребления для момента времени t_2;

3) найти их отношение.

Для нахождения индексов инфляции по товарным группам эти действия выполняются для продуктов искомой группы.

Для вычисления индекса инфляции по продуктам питания разработаны различные программные средства для IBM PC и для персональных компьютеров фирмы Apple.

Результаты анализа динамики цен. Приведем некоторые результаты анализа данных о ценах. Начнем с временных рядов стоимостей потребительских корзин в Москве. Оказалось, что стоимость потребительской корзины **ГКС-2** примерно в 1,5 раза меньше стоимости потребительской корзины **ГКС-1**. Потребительская корзина **ИВСТЭ** располагалась по стоимости примерно посередине между **ГКС-1** и **ГКС-2**. Несмотря на различие стоимостей, индексы инфляции для всех трех корзин **ГКС-1, ГКС-2, ИВСТЭ** близки и составляют 8233–8896 на конец декабря 1995 г. и 10396–10890 на конец февраля 1997 г. Любопытно отметить, что **ГКС-1** имеет наименьшие значения индекса из трех корзин, а **ГКС-2** — наибольшие, если сравнивать с мартом 1991 г. (Госкомстат РФ такие сравнения не проводит), в то время как рост цен за исследуемый промежуток времени (с конца декабря 1995 г. по конец февраля 1997 г.) наибольший рост дает корзина **ИВСТЭ** (28,05%), а наименьший — **ГКС-2** (22,42%).

Совсем иная картина со стоимостями потребительских корзин **Бюдж-1** и **Бюдж-2**. Они относятся к реальному потреблению сравнительно обеспеченных москвичей, включают в себя стоимости не только продуктов, но и других товаров и услуг, в то время как корзины **ИВСТЭ, ГКС-1** и **ГКС-2** дают представление о стоимости минимального набора товаров и услуг, обеспечивающего физиологические потребности человека. В конце декабря 1995 г. стоимость корзины **Бюдж-1** (для «бедных») составляла 659 852 руб., корзины **Бюдж-2** (для «средних» семей) — 726 364 руб., а к февралю 1997 г. они «подросли» до 832 498 руб. (на 26,16%) и 950 989 руб. (на 30,92%) соответственно. Эти величины больше прожиточного минимума согласно данным Московской федерации профсоюзов (750 тыс. руб. в мае 1997 г.), хотя разницу нельзя назвать заметной.

Интереснее другое — общий рост цен (на февраль 1997 г.) составил 8060–8446, т. е. примерно на 20% меньше, чем рост стоимостей корзин **ИВСТЭ**, **ГКС-1**, **ГКС-2**. Значит, «реформы» тяжелее всего ударили по наиболее дешевым товарам, предназначенным для наиболее бедной части населения. Это связано, видимо, с сокращением и прекращением дотаций для таких товаров. Правда, затем темпы роста выровнялись — при сравнении февраля 1997 г. с декабрем 1995 г. они составляют 28,05% для корзины **ИВСТЭ**, 26,27% — для **ГКС-1**, 26,16% — для **Бюдж-1** и 30,92% для **Бюдж-2**. Особняком стоит **ГКС-2** — 22,42%, заметно меньше, чем для других корзин. В то же время наибольший рост для корзины **Бюдж-2** может указывать на тенденцию более быстрого роста цен на товары, предназначенные для более состоятельных людей.

Анализ временных рядов стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции по Подмосковью в целом подтверждает приведенные выше выводы, сделанные по московским данным. Снова наблюдаем близость роста цен с 1991 г. для корзин **ИВСТЭ**, **ГКС-1**, **ГКС-2**, снова **ГКС-2** в полтора раза дороже **ГКС-1**, снова темп роста с декабря 1995 г. меньше всего из этих трех корзин у **ГКС-2.** Снова индексы с 1991 г. для корзин **Бюдж-1** и **Бюдж-2** на 20–25% меньше, чем для первых трех корзин. Однако с декабря 1995 г. наибольший рост стоимости корзины — не у двух последних, а у **ГКС-1** (на втором месте — корзина **ИВСТЭ**). Возможно, это отражает меньшую долю состоятельных людей в Подмосковье и, соответственно, меньшую ориентацию торговцев на их «покупательные» возможности.

Обращает на себя внимание меньшая величина индексов с марта 1991 г. в Подмосковье по сравнению с Москвой. Возможно, дело в том, что стоимости потребительских корзин по состоянию на 31 марта 1991 г. брались те же, что и в Москве, поскольку сведения о ценах на тот момент в Московской области у нас отсутствуют. Это приводит к занижению истинных значений индексов инфляции, поскольку и до

31 марта 1991 г. цены в Подмосковье были несколько ниже, чем в Москве. Это относится, в частности, к ценам на овощи и фрукты, молочные продукты и др.

Вполне естественно, что с марта 1991 г. цены на различные товары выросли по-разному. Так, цены на рыбу (треска, минтай) выросли примерно в 25 000 раз, а цена на сахар — менее чем в 4000 раз. Цены на творог выросли в 2,5 раза больше, чем на сыр, и т. д. В Москве и Московской области рост цен достаточно хорошо согласован. Можно было бы предположить, что в рыночных условиях были исправлены диспропорции прежней дотационной плановой системы. Тогда рост цен после декабря 1995 г. должен был бы быть примерно равномерным, отражающим динамику общеэкономических процессов. Однако конкретные эмпирические данные о динамике цен отвергают это предположение.

В Москве при общем среднем росте цен на 20–30% больше всего выросли цены на огурцы (74,8%), баранину (75,9%), птицу (74,5%), упали цены на капусту (–4,6%), сахар (–5,5%). В Московской области при таком же среднем росте цен больше всего выросли цены на мясо — на говядину (82,6%), свинину (88,6%), баранину (107,6%), при этом упали цены на картофель (–10%), капусту (–10%), сахар (–13,1%), конфеты (–21,1%), минтай (–6,5%), растительное масло (–20,6%) и маргарин (–13%).

Приходится констатировать, что цены растут непропорционально, стабилизация цен не наступила, более того, динамика цен на отдельные товары не только не согласована, но и отнюдь не близка. ***Нет никаких признаков приближения к равновесным ценам***, чего можно было бы ожидать после пяти лет «либерализации» в соответствии с учебниками экономической теории. В качестве дополнительного следствия из сказанного вытекает, что, подбирая нужным образом номенклатуру товаров для потребительской корзины, можно получить индекс инфляции желательной величины — от значительного роста (+80%) до падения цен (–20%).

Временные ряды наименьшей, средней и наибольшей из зарегистрированных по Москве цен 35 продовольственных товаров показывают, что **такое понятие, как «цена товара», строго говоря, не корректно**. Оно применимо к единственному акту купли-продажи определенного товара в фиксированном месте, в крайнем случае — к актам купли-продажи в определенном магазине, но не к огромному городу в целом. Действительно, зафиксированные нашими сотрудниками цены на один и тот же товар в один и тот же день могут различаться в несколько раз. Так, 26 июня 1996 г. максимальная зафиксированная цена на рис превышает минимальную в 3,04 раза, а на картофель — в 3,13 раза. Аналогичное превышение для баранины 27 декабря 1996 г. равно 2,79. Типовое же превышение максимальной цены над минимальной — в 1,5 раза. Ничего странного в сказанном нет — всем московским потребителям известно, что наибольшие цены — в центральных престижных магазинах, средние — в рядовых магазинах, наименьшие — на «оптовых» рынках.

С целью обеспечения сопоставимости данных сотрудники ИВСТЭ собирали данные в одних и тех же местах (магазинах, киосках, рынках). Это позволяло отслеживать рост цен и получать корректные значения индексов инфляции. Однако это делало несколько условной стоимость потребительской корзины — потребитель, потратив время и обойдя достаточное количество мест продажи, мог обеспечить себя теми же продуктами по менее высоким ценам. Дополнительную сложность вносит большая номенклатура видов одного и того же товара. На какой тип батона белого хлеба ориентироваться? Что понимать под говядиной — отечественную или импортную, вырезку или кости для супа? Объективно существующая свобода при решении подобных вопросов организаторами исследования жизненного уровня дает возможность для сдвига результатов в заранее заданном направлении. Объективно цены не являются стабильными в пространстве и во времени.

На практике указанные сложности в основном преодолимы. Оказалось, в частности, что стоимость потребительских корзин в различных районах Москвы хотя и отличается, но не более чем на 5–10%. Отклонения в стоимости отдельных продуктов частично компенсируют друг друга.

Нами изучены вклады отдельных продовольственных товаров в стоимости потребительских корзин. Обращает на себя внимание различие между нормативными (т. е. заданными априори) корзинами **ИВСТЭ**, **ГКС-1**, **ГКС-2** и полученными в результате анализа реального потребления корзинами **Бюдж-1** и **Бюдж-2**. В реальном потреблении гораздо меньше муки, пшена, геркулеса, ржаного хлеба, картофеля, трески, минтая, молока, маргарина, но гораздо больше лука, яблок, конфет, колбасы, сельди, сливочного масла, сыра. Объяснение достаточно очевидное: корзины **ИВСТЭ**, **ГКС-1**, **ГКС-2** — это «корзины выживания», действительно минимальные по стоимости корзины, в то время как корзины **Бюдж.1** и **Бюдж.2** — это корзины реального потребления в семьях студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) различного достатка.

Продовольственные товары, на наш взгляд, можно разделить на две группы. Цены на одни растут монотонно, без всякой связи со временем года, т. е. ведут себя примерно так же, как промышленные товары. Можно предположить, что индексы инфляции, построенные по подмножеству таких товаров, представляют собой общие индексы, «очищенные от сезонности», а потому лучше описывающие реальное состояние экономики, чем исходные индексы. Однако при их применении теряется связь со стоимостью корзины выживания, обеспечивающей существование без физиологического вырождения.

Второе подмножество — это товары с ярко выраженной сезонностью, прежде всего овощи, цены на которые падают во второй половине лета и осенью, а затем начинают возрастать. Наличие этой составляющей приводит к тому, что рост стоимостей корзин практически останавливается летом, а наиболее быстрым является зимой.

Можно ли управлять процессом роста цен? Мы наблюдали результаты явно административного воздействия: в ноябре 1995 г., перед выборами в Государственную думу, цены в Москве внезапно упали на 9%, хотя в ноябре цены обычно растут быстрее, чем в иное время года. Тем не менее необходимо констатировать, что обычно изменение цен происходит на микроэкономическом уровне, хотя и провоцируется макроэкономическими процессами, в частности монопольными изменениями цен на энергоносители.

Ложная, на наш взгляд, идея монетаристов состоит в том, что они считают необходимым бороться с инфляцией, сокращая денежную массу в стране, например, не выплачивая вовремя зарплату и пенсии. Однако, как пишет академик-секретарь Отделения экономики РАН Д.С. Львов: «Макроэкономические расчеты показывают, что за каждый процент сокращения инфляции приходится расплачиваться тремя — пятью процентами спада производства» [9, с. 11]. Основной удар монетаристской политики приходится не по инфляции, а по производству.

Процесс инфляции частично управляем административными методами. Осенью 1996 г. спрогнозированного ИВСТЭ роста цен не произошло, что объясняется изменением условий — правительство перешло к борьбе с инфляцией путем гигантского роста задолженностей по зарплате, пенсиям и другим платежам (например, детским пособиям, стипендиям студентов).

Если у населения нет денег — торговцы не поднимают цены. Так, в Москве за 2 года — с лета 1995 г. по лето 1997 г. цены выросли примерно на 50%, в то время как в г. Иваново — лишь на 15%, а импортные товары на ивановских рынках стоят на 1/3 дешевле, чем на московских (хотя эти импортные товары закупаются в Москве). Объяснить это можно тем, что экономическое положение в Иваново гораздо хуже, чем в Москве, ниже уровень доходов, больше безработных, что вынуждены учитывать торговцы.

Расчет индекса инфляции — вспомогательная задача, решение которой необходимо для приведения экономических характеристик к сопоставимому виду. Важнейшей задачей является расчет реальной заработной платы, равной частному от деления номинальной заработной платы на индекс инфляции. Известно, что цены на промышленные товары и на услуги, как правило, растут быстрее, чем на продовольствие. Поэтому рассчитываемые по продовольственным потребительским корзинам значения индексов инфляции дают оценку снизу для роста потребительских цен и стоимости жизни в целом.

Минимальный прожиточный минимум оцениваем по методу американской исследовательницы польского происхождения М. Оршански [29] с коэффициентом Энгеля $1 / C = 0{,}5$ (см. выше). Этот метод основан на расчете стоимости минимальной продовольственной корзины и учете стоимостей остальных минимально необходимых затрат с помощью коэффициентов. Так, для «бедных семей» студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) во время пробного бюджетного обследования в октябре-ноябре 1995 г. затраты на продовольствие составили 52% от всех расходов. Поэтому стоимость прожиточного минимума для них получим, приняв за 52% стоимость минимальной продовольственной корзины **ИВСТЭ**, т. е. умножив ее стоимость на $1 / 0{,}52 = 1{,}92$.

Метод М. Оршански предполагает, что структура затрат практически не меняется. Однако, как уже отмечалось, цены на промышленные товары и на услуги растут быстрее, чем на продовольствие. Поэтому замена 1,92 на 2,00 представляется обоснованной. Полученные значения (на май 1997 г. — 700 тыс. руб. в месяц на человека) хорошо согласуются с уже цитированными данными Московской федерации профсоюзов (750 тыс. руб.). Отметим, что для всей совокупности семей, чьи бюджеты были обследованы в 1996 г., затраты на продовольствие составили 42%, т. е. для них коэффициент Оршански равен 1 / 0,42 = 2,38.

Средняя (начисленная) заработная плата в Москве составляла в декабре 1996 г. 1,12 млн руб. (в России — 0,84 млн). В сопоставлении со сказанным выше (с учетом логнормального характера функции распределения доходов и наличия детей) это означает, что даже в Москве по крайней мере половина семей жила с доходами ниже прожиточного минимума. В 1990 г. средняя зарплата превышала прожиточный минимум в 5,5 раза, а в 1997 г. — лишь в 1,2 раза (по России), т. е. уровень жизни упал в среднем в 4,6 раза. Он весной 1998 г. соответствовал концу 50-х — началу 60-х гг. За август-сентябрь 1998 г. корзина **ИВСТЭ** подорожала в 1,5 раза (а средняя зарплата практически не изменилась), следовательно, уровень жизни упал уже в 7 раз, и по покупательной способности зарплаты рядовые граждане «приблизились» к возможностям начала 50-х гг.

Переход к сопоставимым ценам необходимо использовать также при расчете таких макроэкономических характеристик, как валовой внутренний продукт, объем бюджетных ассигнований и т. д. С учетом сказанного выше можно утверждать, что экономика России с 1990 г. по 1998 г. была «сокращена» в 4–6 раз, что соответствует сдвигу назад по времени на 35–45 лет.

Материалы описанного исследования ИВСТЭ были опубликованы в 1998–1999 гг. в работах [5, 21].

Инфляция в XXI веке. Использование одной и той же потребительской корзины обеспечивает возможность сопоставления результатов расчетов за различные временные периоды. Этим работы ИВСТЭ выгодно отличаются от подхода официальной статистики. Как известно, Госкомстат РФ (ныне — Росстат) в 1993–2008 гг. из конъюнктурных соображений неоднократно менял состав потребительской корзины и объемы потребления входящих в нее товаров. Однако в начале XXI в. потребительская корзина официальной статистики мало отличалась от нашей. Здравый смысл восторжествовал — статистическое ведомство решило исходить из тех же разработок специалистов-диетологов РАМН, на которые мы опирались еще в 1993 г. На основе наших исследований инфляции была составлена глава 7 учебника [17] и соответствующий раздел учебного курса. Следующий шаг был сделан ИВСТЭ весной 2004 г. [22].

Студенты факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана раз в месяц собирали данные о ценах и рассчитывали индекс инфляции. С целью сопоставимости результатов студент все четыре раза собирал данные на продукты одних и тех же конкретных наименований (марок, сортов) и в одних и тех же торговых организациях. По данным за февраль, март и апрель 2004 г. методом наименьших квадратов строился точечный и непараметрический интервальный прогноз (см. главу 2 выше) на май, который затем сопоставлялся с реальностью.

Собранные данные позволили изучить разброс значений индекса инфляции в зависимости от конкретных мест сбора данных. Рассмотрим значения индекса инфляции $I(t_1, t_2)$ на текущий момент t_2 = 14 мая 2004 г., соответствующие базовому моменту t_1 = 14 марта 1991 г. (табл. 3.13 — по Москве, табл. 3.14 — по Московской области).

Статистические характеристики для двух выборок индексов инфляции, приведенных в табл. 3.13 и 3.14, содержатся в табл. 3.15. Они показывают, что индекс инфляции — это не число, а типичная нечисловая экономическая величина (см. [16] и главу 7 ниже). Индекс инфляции в Москве можно описать интервалом [39,1; 62,43], а в Московской области — интервалом [44,02; 57,32].

Таблица 3.13

Индексы инфляции в Москве в мае 2004 г.

39,10	40,50	40,56	40,70	41,56	41,73	44,03	47,18
47,18	47,30	48,40	49,27	51,45	52,67	52,70	53,04
54,60	55,00	55,01	55,33	55,62	56,40	57,15	57,29
57,65	57,72	57,80	58,26	58,40	59,59	62,43	

Таблица 3.14

Индексы инфляции в Московской области в мае 2004 г.

44,02	48,11	50,40
51,02	51,08	54,12
54,12	55,65	57,32

Таблица 3.15

Результаты статистической обработки данных об инфляции (май 2004 г.)

Статистические характеристики	Москва	Подмосковье
Минимум	39,1	44,02
Максимум	62,43	57,32
Объем выборки	31	9
Выборочное среднее арифметическое	51,47	51,76
Среднее квадратическое отклонение	6,80	4,08

Нечисловой характер индекса инфляции позволяет, тем не менее, сделать полезные для практического применения выводы:

1. В мае 2004 г. индекс инфляции равен приблизительно 50 (±20%), т. е. 50 руб. мая 2004 г. по своей покупательной способности соответствуют 1 руб. марта 1991 г.

2. Индексы инфляции в Москве и Московской области практически совпадают.

В мае 2004 г. в Москве стоимость минимальной продовольственной корзины оценивается как (27 руб. 11 коп.) × 51,47 = 1400 руб., а прожиточный минимум — как 2800 руб. в месяц.

Индекс инфляции — это эконометрический инструмент, позволяющий доказательно обсуждать и решать те или иные экономические проблемы. Например, проблему соотношения зарплаты и прожиточного минимума [28]. Средства массовой информации часто рассматривают эту тематику. К сожалению, не всегда обсуждение является доказательным, а выводы — обоснованными. Так, например, в статье [2] утверждается, что мы в конце 2003 г. «живем, как в 1985 году». Это не так.

Сравним уровни жизни в 1985 г. и в 2003 г. Поскольку цены на основные продовольственные товары до марта 1991 г. не росли, можно признать, что индекс инфляции с 1985 г. по конец 2003 г. совпадает с таковым с марта 1991 г. по конец 2003 г., т. е. согласно [17, 3-е изд.] с достаточной для расчетов точностью равен 50 (см. табл. 3.6, 3.8). В статье [2] приведены значения средней зарплаты по стране — 199 руб. в 1985 г. и 5722 руб. в конце 2003 г. Номинальная зарплата выросла в 29 раз, а цены — в 50 раз. Значит, реальная зарплата сократилась в 1,7 раза. В 1985 г. средняя зарплата почти в 4 раза превосходила прожиточный минимум, а в 2003 г. — лишь в 2 с небольшим раза.

В 2004 г. среднестатистический гражданин РФ живет гораздо хуже, чем в 1985 г. Основную причину назвал Президент РФ В.В. Путин в Послании 2004 г. Федеральному Собранию РФ: валовой внутренний продукт (в сопоставимых ценах) в 2003 г. меньше, чем в 1989 г. (динамика макроэкономических показателей России анализируется в [19, с. 285]). Большое значение имеет резко возросшая дифференциация доходов. Измеряющий ее децильный коэффициент увеличился за эти годы с 3 до 15; в развитых странах его значение — около 7.

Крупное исследование было проведено через три с половиной года. Студенты собрали данные о ценах и рассчитали индексы инфляции в Москве и Московской обл. за период с t_1 = 14 марта 1991 г. до t_2 = 26 ноября 2006 г. (табл. 3.16, 3.17). Обработка данных была проведена О.Ю. Проскуриной.

Таблица 3.16

Индексы инфляции в Москве в ноябре 2006 г.

46,14	46,44	48,26	49,21	49,27	49,71
50,29	51,05	51,07	52,52	53,64	53,75
53,83	54,36	54,68	55,07	57,16	57,83
57,83	58,7	59,11	59,12	60,41	60,41
60,53	60,57	63,81	65,9	68,01	72,15
72,15	72,15	72,15	72,23	73,3	83,61

В Москве индексы инфляции были рассчитаны по ценам в таких торговых организациях, как гипермаркет «Ашан», супермаркет SPAR, гипермаркет «Метро», супермаркет «Перекресток», другие магазины, рынки. Проверка на однородность двух выборок — индексов инфляции в гипермаркете «Ашан» и индексов инфляции в «других магазинах», не входящих в сети — с помощью критерия Крамера — Уэлча [17] показала, что выборки однородны, а следовательно, их можно объединить в одну.

Слушатели программы «Топ-менеджер» (Мастер делового администрирования / MBA) РАНХиГС собрали данные о ценах и рассчитали индексы инфляции в ряде регионов РФ 2006 г. (табл. 3.18).

Таблица 3.17

Индексы инфляции в Московской области в ноябре 2006 г.

39,84	49,15	52,58	58,65
63,51	66,09	68,09	69,18

Таблица 3.18

Индексы инфляции по регионам России

№ п/п	Город, регион	Дата	Индекс
1	Владимир	22.02.07	44,5
		22.03.07	46,8
2	Иркутск	09.01.07	42,38
		09.02.07	42,97
3	Красноярск (1)	25.11.06	59,50
		30.01.07	61,77
4	Красноярск (2)	25.11.06	64,60
		08.02.07	66,86
5	Калужская обл., г. Малоярославец	20.12.06	46,86
		10.02.07	48,51
6	Нижний Новгород	10.11.06	43,16
		21.05.07	47,0
7	Новосибирск	01.03.07	51,79
		01.05.07	53,74
8	Петропавловск-Камчатский	10.11.06	28,94
		25.01.07	32,96
9	Ростов-на-Дону (1)	01.02.05	51,99
		01.02.07	67,67
10	Ростов-на-Дону (2)	01.02.07	39,66
		01.03.07	46,63
11	Ростов-на-Дону (3)	01.02.07	43,83
12	Татарстан, г. Бавлы	10.11.06	33,72
		25.01.07	36,05
13	Томск	25.12.06	49,86
		01.02.07	51,03
14	Тюменская обл., п. Боровский	Янв. 07	38,37
		Март 07	41,27
15	Череповец	01.11.06	48,1
		20.01.07	54,3

Примечание. Несколько исследований, проведенных в одном городе, указаны под разными порядковыми номерами. Следует иметь в виду, что стоимости потребительской корзины ИВСТЭ в марте 1991 г. для разных регионов различаются, иногда существенно.

Статистические характеристики для выборок индексов инфляции, приведенных в табл. 3.16–3.17, содержатся в табл. 3.19. Они показывают, что индекс инфляции имеет заметный разброс, это не число, а типичная нечисловая экономическая величина [16]. В соответствии с приведенными данными индекс инфляции в Москве можно описать интервалом [46,14; 83,61], в Московской области — интервалом [39,84; 69,18]. Статистическую обработку данных, приведенных в табл. 3.18, проводить было бы необоснованно, поскольку регионы, в которых проводились исследования, не представляют собой представительную (репрезентативную) выборку из генеральной совокупности регионов России (см. главу 1). Кроме того, различаются даты снятия информации о ценах. Поэтому для включения в посвященный РФ столбец отобрана лишь часть данных. Тем не менее табл. 3.18 дает предварительное представление о динамике цен в регионах России. В частности, подтверждается высказанное ранее утверждение о том, что официальные статистические органы систематически занижают индексы инфляции: приведенное в табл. 3.8 значение 39,194 меньше 24 из 29 индексов инфляции, замеренных слушателями РАНХиГС.

Таблица 3.19

Результаты статистической обработки данных об индексах инфляции *I*(1990, 11.2006) в ноябре 2006 г.

Статистические характеристики	Москва	Подмосковье	РФ
Минимум	46,14	39,84	42,38
Максимум	83,61	69,18	64,6
Объем выборки	36	8	6
Выборочное среднее арифметическое	59,07	58,39	53,40
Среднее квадратическое отклонение	9,74	9,04	7,67

Судя по собранным данным, структура стоимости потребительской корзины в среднем по Москве сравнительно мало изменилась с марта 1991 г. по декабрь 2006 г. (рис. 3.1).

Нечисловой характер индекса инфляции позволяет, тем не менее, сделать полезные для практического применения выводы:

1) в 2007 г. индекс инфляции равен приблизительно 60, т. е. 60 руб. 2007 г. по своей покупательной способности примерно соответствуют 1 руб. марта 1991 г.;

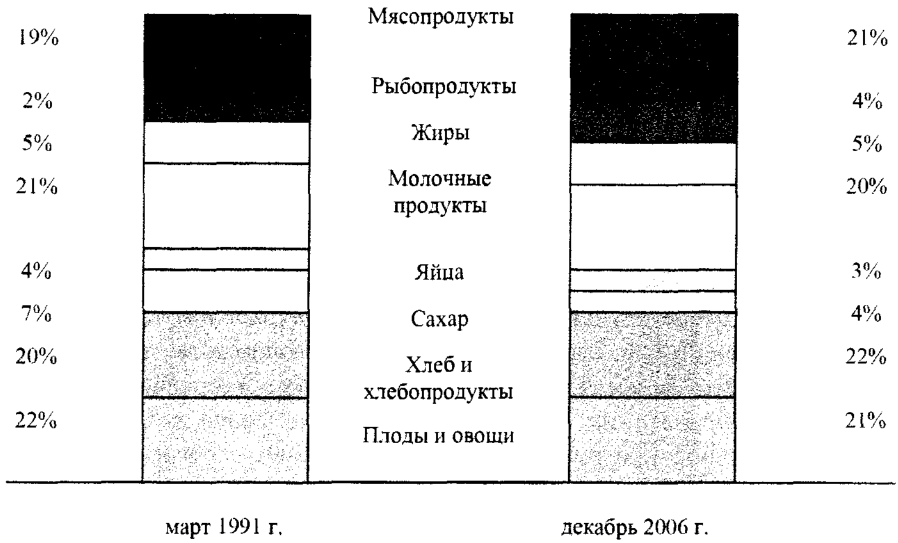

Рис. 3.1. Структура стоимости минимального набора продуктов питания

2) индексы инфляции в Москве и Московской области практически совпадают и достаточно близки к индексам инфляции по большинству других регионов РФ;

3) в ноябре 2006 г. в Москве стоимость минимальной продовольственной корзины оценивалась как (27,11 руб.) × 59,07 = 1601,4 руб., а прожиточный минимум — как 3202,8 руб. в месяц (в соответствии с методом Оршански [29] с коэффициентом Энгеля $C = 2{,}0$).

Отметим для сравнения, что по методике и данным Росстата (www.gks.ru) стоимость минимального набора продуктов питания в среднем по России в конце ноября 2006 г. составила 1443,6 руб. в расчете на месяц.

В 2007–2008 гг. наблюдаем всплеск роста цен (табл. 3.19–3.21). Таблица 3.19 (Москва и Подмосковье) рассчитана по данным ф-та ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана, табл. 3.19 (РФ) и табл. 3.20 получены слушателями программы «Топ-менеджер» (МБА) Бизнес-школы РАНХиГС, табл. 3.21 — слушателями Бизнес-школы MBA МИРБИС, т. е. действующими менеджерами высшего звена организаций и предприятий различных регионов РФ и Москвы.

Таблица 3.20

Индексы инфляции в РФ на конец 2007 г. — начало 2008 г.

№ п/п	Регион	Дата t_1	$I(90, t_1)$	Дата t_2	$S(t_2)$, мес.	$I(90, t_2)$	$I(t_1, t_2)$
1	Якутск	01.11.07	76,067	01.01.08	2074,67	84,519	11,1%
2	Хабаровск	30.11.07	66.87	30.12.07	1759.21	68,79	2,9%
3	Петропавловск-Камчатский	09.12.07	93,70	10.01.08	2576,69	102,31	9%
4	Малоярославец	12.06	55,09	01.08	2153,49	84,21	53%
5	Красноярск	08.12.07	82,81	12.01.08	2486,29	97,58	18%
6	Тюмень	05.12.07	75,36	10.01.08	2297,28	82,94	10%
7	Красноярск	26.10.07	47,77	10.01.08	1594,42	63,17	32,2%
8	Нижневартовск	01.11.07	54,45	01.01.08	1949,92	62,513	14,8%
9	Екатеринбург	01.12.07	50,28	10.01.08	2142,82	84,10	67%
10	Рязань	01.11.07	63,28	01.01.08	1785,92	69,84	10%
11	Москва	26.11.07	88,80	26.12.07	2280,69	88,84	0,05%
12	Новосибирск	01.12.07	84,09	13.01.08	2167,30	84,75	0,78%
13	Самара	28.11.07	67,5	08.01.08	1762,17	68,9	2%

Анализ приведенных в табл. 3.19–3.21 результатов измерений роста цен приводит к ряду интересных и практически полезных выводов [20]. В частности, в Екатеринбурге цены за полтора месяца выросли на 67%, в Красноярске за два с половиной месяца — на 32%, в Малоярославце за год — на 53%. Данные Росстата — 11,9% за 2007 г. Средний результат по табл. 3.20 и 3.21 — 13,8%. Средний рост цен с 1990 г. — в 81,69 раза, т. е. на один рубль можно было купить в 1990 г. столько же, сколько на 81 руб. 69 коп. в январе 2008 г. А в 2006 г. индекс инфляции был заметно меньше — 59,07 (табл. 3.19, Москва). Рост — на 38,3%. В три с лишним раза больше, чем по данным Росстата.

Таблица 3.21

Индексы инфляции в Москве на конец 2007 г. — начало 2008 г.

№ п/п	Дата t_1	$I(90, t_1)$	Дата t_2	$S(t_2)$, мес.	$I(90, t_2)$	$I(t_1, t_2)$
1	28.12.07	115,08	30.01.08	2992.42	117,01	1,68%
2	28.12.07	73,61	29.01.08	1943.66	76,04	3,30%
3	27.12.07	76,60	31.01.08	2034,95	79,57	3,88%

№ п/п	Дата t_1	$I(90, t_1)$	Дата t_2	$S(t_2)$, мес.	$I(90, t_2)$	$I(t_1, t_2)$
4	27.12.07	65,53	31.01.08	-	68,37	4,33%
5	27.12.07	79,25	31.01.08	2073.60	81,12	2,36%
6	28.12.07	115,492	29.01.08	3109.94	121,01	5,30%
7	01.01.08	75,38	01.02.08	2035,45	79,59	5,58%
8	16.01.08	92,73	31.01.08	2472,84	96,70	4,28%
9	01.01.08	98,96	01.02.08	2695,68	105,41	6,52%
10	10.12.07	66,99	10.01.08	1735,22	67,85	1,29%

Отметим, что расхождение результатов расчетов по независимо собранной информации и данных официальной статистики частично объясняется тем, что Росстат в очередной раз сменил потребительскую корзину. Это делает еще более неясной связь сообщаемых им численных значений инфляции с динамикой реальных экономических процессов (на эту неясность обращали внимание участники дискуссии, проведенной в ходе журналистского расследования [23]). Как следствие, констатируем, что каждое физическое и юридическое лицо может самостоятельно измерять рост цен с помощью методики, подробно изложенной в настоящей главе. Таким путем целесообразно бороться с монополией Росстата на результаты измерений инфляции.

Отметим необходимость учета динамики показателей, используемых при расчетах. Коэффициент Энгеля $C = 2,0$ при оценке прожиточного минимума был получен на основе бюджетного исследования середины 90-х. Им можно пользоваться лишь при условии постоянства структуры расходов. Однако растет доля расходов на оплату жилищно-коммунальных услуг. Это означает, что доля расходов на продовольствие у всех семей и особенно у бедных заметно снижается. Следовательно, коэффициент Энгеля $C = 2,0$ должен быть повышен, по экспертной оценке, до 3,0 (в 2020 г.).

Инфляция за 80 лет. Нет необходимости связывать возможность расчета индекса инфляции с каким-либо определенным интервалом времени и даже с определенным социально-экономическим строем. Можно формально вычислить индексы инфляции и за весьма длительные промежутки времени. Так, например, рост цен на основные продукты питания с 1913 г. по апрель 1994 г. представлен в табл. 3.22.

Таблица 3.22

Цены в 1913 г. и в апреле 1994 г. (руб./кг)

Наименование продукта	Цена в 1913 г.	Цена в апреле 1994 г.
Хлеб пшеничный	0-05	740
Хлеб ржаной	0-03	400
Молоко	0-14	625
Сыр	0-40	6150
Масло сливочное	0-55	5100
Масло растительное	0-13	2300
Сметана	0-30	2500
Говядина	0-23	2760
Свинина	0-20	4000
Баранина	0-17	2000

Используя объемы потребления из потребительской корзины ИВСТЭ, получаем, что индекс инфляции за 1913–1994 гг. составил 11 297, или 1 129 600%. Подобные расчеты позволяют оценить реальное значение количественных экономических величин, используемых в публикациях разных лет.

Отметим, что представление о прожиточном минимуме меняется со временем. В 1990 г. в Интернет и мобильная телефонная связь были уделом избранных, а сейчас эти услуги пора включать в прожиточный минимум. С другой стороны, во многих городах дрова перестали быть предметом первой необходимости, а потому нет необходимости и возможности отслеживать цены на дрова. Необходимость модернизации потребительских корзин создает дополнительные проблемы по обеспечению сопоставимости результатов расчетов.

Потребительские корзины, включающие в себя промтовары и услуги, и соответствующие индексы инфляции. Чтобы не только быть в курсе проблем, касающихся инфляции в нашей стране, но и хорошо ориентироваться в создавшейся ситуации, недостаточно отслеживать только изменение цен на продовольственные товары. Необходимо также фиксировать инфляцию и в сфере коммунальных, транспортных, медицинских, образовательных и других услуг, а также анализировать цены на промышленные товары широкого потребления. Рост цен в этих областях достаточно заметен (если в 1990 г. проезд в метро в Москве обходился в 5 коп., то в ноябре 1995 г. он стоил 1000 руб., в феврале 1999 г., после деноминации в 1000 раз, — 4 руб., в 2001 г. разовая поездка обходилась в 5 руб., в 2009 г. — в 22 руб., в 2020 г. — в 55 руб.). Следует также отметить, что темпы роста цен на те или иные промышленные товары и услуги не всегда совпадают с темпами роста цен на продовольственные товары. Например, наблюдалось подорожание хлебобулочных товаров примерно в 2000 раз за три года (1991–1994), а цены на компьютерные товары выросли за это время в среднем только в 80 раз.

При обсуждении проблем инфляции часто обращают внимание на то, что заметная часть доходов каждой семьи идет на оплату коммунальных услуг и покрытие расходов на транспорт и связь. Необходимо учитывать расходы на услуги прачечной, парикмахерской, на ремонт обуви и т. д. Увеличиваются расходы на удовлетворение культурных потребностей из-за роста цен на книги, журналы, газеты, билеты в театры и кино, спортивный инвентарь и т. д. С течением времени подобные расходы конкретных физических лиц могут и сокращаться из-за прекращения покупок книг, журналов, газет, прекращения походов в театры и т. д.

Дорогими сегодня являются и промышленные товары. Но при подсчете индекса инфляции по этим товарам возникает ряд трудностей. Например, наблюдается разброс цен по торговым точкам или имеет место временное отсутствие в магазинах некоторых товаров. Кроме того, меняется мода, многие виды одежды выходят из употребления, вместо них появляются новые. То же самое, в связи с развитием техники, происходит и с товарами длительного пользования (когда-то раньше не было телевизоров, холодильников, стиральных машин, железных дорог и самолетов). Кроме того, пока еще мы можем пользоваться отдельными бесплатными услугами в области медицины и образования, но скоро, очевидно, и это будет платным, по крайней мере частично.

Для того чтобы подсчитать индекс инфляции по достаточно обширной потребительской корзине, включающей не только продовольственные товары, но и одежду, товары длительного пользования, услуги и т. п., необходимо иметь соответствующие нормы потребления. Определить их весьма трудно. (При нормативном подходе к экономическим явлениям — откуда взять нормы? При позитивном — как в нестабильной ситуации замерить потребительские бюджеты?) Поэтому в настоящей главе мы ограничились индексами инфляции, рассчитанными для продовольственной потребительской корзины. Индекс инфляции можно считать не только для Москвы в целом, но и для отдельных ее районов и даже для покупателей отдельных магазинов — достаточно измерить соответствующие цены; не только для населения в целом, но и для отдельных слоев и даже отдельных семей — достаточно знать соответствующие потребительские корзины.

Как уже отмечалось, в настоящее время (2020 г.), в частности, в связи с резким ростом стоимости жилищно-коммунальных услуг, коэффициент 2,0 в методе Оршански расчета прожиточного минимума представляется заниженным. Адекватное значение может быть получено в результате анализа результатов бюджетного обследования типа того, что было проведено ИВСТЭ в 1995 г. Альтернативный подход состоит в использовании иной потребительской корзины.

Инфляция и ВВП. Валовой внутренний продукт (ВВП), валовой национальный продукт (ВНД) и другие характеристики экономического положения страны рассчитываются в текущих ценах. Для перехода к неизменным ценам надо поделить на индекс инфляции (т. е. умножить на дефлятор). В 2 раза занизишь индекс инфляции — в 2 раза завысишь валовой национальный продукт, валовой внутренний продукт, национальный доход и иные макроэкономические характеристики.

По данным Правительства РФ, к концу 1998 г. валовой внутренний продукт составил 55,7% от уровня 1990 г. (динамика макроэкономических показателей России анализируется в [19, с. 285]). Падение больше, чем в Германии в результате разгрома фашизма. И это по официальным данным! Используя же коэффициент занижения инфляции со стороны Госкомстата РФ, равный 2, получаем более реальную цифру — 25% от уровня 1990 г. Падение в 4 раза! Эта оценка близка к выводам ряда специалистов, независимых от правительства.

Напомним, что номинальный ВВП исчисляется в текущих рыночных ценах. Чтобы определить реальный ВВП, необходимо выразить его в сопоставимых ценах базисного года. Для этого применяется так называемый дефлятор ВВП, т. е. индекс инфляции, который отражает изменение среднего уровня цен самой широкой группы товаров и услуг за определенный период, охватывающей все составляющие ВВП. Расчеты проводят с помощью так называемой системы национальных счетов [14].

Нет ничего удивительного в том, что дефлятор ВВП отличается от индекса инфляции Росстата. Так, индекс-дефлятор ВВП за 2006 г.

по отношению к ценам 2005 г. составил 15,4%, в то время как индекс инфляции Росстата за 2006 г. равнялся 9%. Разные корзины — разные результаты.

Виды инфляции. Эконометрика описывает инфляцию. Причины инфляции — это предмет иных экономических наук. Однако несколько слов сказать об этом полезно.

Всегда говорят об *инфляции спроса*. Это ситуация, когда у населения много денег, *которые оно хочет истратить*, а товаров мало. Тогда цены растут. Либо непосредственно, либо через механизм «черного рынка».

Другой вид инфляции — *инфляция издержек*. Производитель вынужден повышать цену на свою продукцию, потому что его поставщики повышают цены на собственную продукцию. Этот порочный круг очень трудно разорвать.

Третий вид инфляции — *административная инфляция*. Цены повышает государство. Естественно, на то, что оно контролирует. Например, с августа по декабрь 1998 г. курс доллара США был поднят примерно в 4 раза. Последствия были понятные: адекватный подъем цен на импортные товары, потом рост цен на продукцию, для изготовления которой использовались импортные комплектующие, а затем и рост цен на чисто отечественную продукцию. В результате инфляция за год составила более 80%.

Выше уже приводились примеры административного регулирования цен. Политика государственных органов в области энергетики, транспорта, экспорта и импорта, налогообложения и других сфер государственного регулирования экономики оказывает непосредственное влияние на инфляцию.

Заключительные замечания. Нобелевский лауреат по экономике Василий Васильевич Леонтьев (1905–1999) подсчитал, что лишь 1% ученых-экономистов анализируют вновь собранные данные, 30% используют данные, приведенные в публикациях предшественников, а остальные в своих рассуждениях вообще не обращаются к реальному миру [8]. Настоящая глава составлена на основе работ ИВСТЭ, относящихся к тому 1%, о котором писал В.В. Леонтьев.

После 1990 г. инфляционные процессы стали постоянной составляющей отечественной экономической жизни, и экономистам, менеджерам, инженерам различных специальностей придется учитывать их свойства в своей работе. В настоящей главе рассмотрены основы эконометрической теории инфляции. Однако не все проблемы раскрыты достаточно подробно. Кратко рассмотрим некоторые из них.

Прогнозирование индекса инфляции осуществляется с помощью методов наименьших квадратов (глава 2), экспертных технологий (глава 4), в том числе основанных на сценарном подходе, и различных иных процедур, разработанных в организационно-экономическом моделировании. Обратим внимание на периодическую составляющую во временном ряду индексов инфляции. Темп роста цен максимален в зимние месяцы (декабрь — январь), затем постепенно уменьшается до минимума в летние месяцы (июль — август), иногда переходя в дефляцию, затем снова растет. Непараметрический метод выделения периодической составляющей временного ряда рассмотрен в [17, разд. 6.3], [18, разд. 10.2], а также — иной подход — в главе 2 выше.

Стоимости потребительской корзины ИВСТЭ на один и тот же момент времени в наших публикациях, как мог заметить внимательный читатель, несколько отличаются. В этом нет ничего странного, так как исходные цены на продукты несколько отличались. Строго говоря, цены, стоимости потребительских корзин, индексы инфляции и многие другие экономические величины следовало бы считать нечисловыми данными (см. ниже, [16], [17, разд. 1.5]), например интервальными или нечеткими. Развитие нечисловой экономики — перспективное направление научных исследований.

Неоднозначность выбора потребительской корзины, приводящая к неоднозначности индекса инфляции, порождает естественный вопрос: можно ли описать рост цен однозначно, т. е. полностью определенной функцией времени? Строгий ответ известен — нет, нельзя.

Еще в 30-е гг. В.В. Леонтьев показал, что однозначно можно сравнивать только состояния экономик, имеющих одинаковую отраслевую структуру, так что описывающие их вектора (объемов производства по отраслям) отличаются только множителем [8]. Реально таких двух экономик не существует. Каждый год структура экономики меняется. Поэтому, строго говоря, нельзя сравнивать состояния экономик разных стран, и даже состояния экономики одной и той же страны в разные годы. Этому же феномену посвящена теорема проф. В.В. Подиновского: любое изменение коэффициентов весомости единичных показателей качества продукции приводит к изменению упорядочения некоторых пар изделий по средневзвешенному показателю [34].

Однако реально мы, несмотря на теоретический запрет, сравниваем экономическое положение в разные годы — зная, что это сравнение проводится с некоторой степенью условности, допустимой в рассматриваемых постановках прикладных задач. Точно на тех же основаниях мы должны принимать во внимание рост цен, выражаемый тем или иным индексом инфляции.

Мы почти не затрагивали историю инфляции. Наиболее быстро цены росли в Германии после Первой и Второй мировых войн и в СССР после гражданской войны. Немецкий писатель Эрих Мария Ремарк в своем романе «Черный обелиск» описывает Германию 1923 г.: «Доллар стал неистовствовать, он подскакивает ежедневно уже не на тысячи и десятки тысяч, а на сотни тысяч марок. Позавчера он стоил миллион двести тысяч, вчера — миллион четыреста. Ожидают, что завтра он дойдет до двух миллионов, а в конце месяца — до десяти. Рабочие получают теперь заработную плату два раза в день — утром и под вечер, и каждый раз им дают получасовой перерыв, чтобы они успели сбегать в магазины и поскорее сделать покупки — ведь если они подождут до вечера, то потеряют столько, что их дети останутся полуголодными» [24, с. 420]. Рассмотрение методов выхода из инфляции находится вне рамок настоящего учебника.

Знание динамики индекса инфляции повышает обоснованность принятия хозяйственных решений. Отслеживание изменения индекса инфляции полезно и одновременно доступно всем юридическим и физическим лицам. Трудоемкость расчета одного значения индекса инфляции не превосходит 2–4 часов. Проведение такой работы обеспечивает связь обучения экономическим и управленческим дисциплинам с реальной экономической жизнью и может быть рекомендовано на всех уровнях экономических дисциплин, от средней школы до послевузовского образования. Полученные по независимо собранной информации оценки инфляции, рассмотренные в настоящей главе, используются в научных исследованиях и учебном процессе различных образовательных структур, а также в производственной деятельности предприятий и организаций, например на Магнитогорском металлургическом комбинате.

Средства массовой информации публикуют значения индексов инфляции, рассчитанных Росстатом по рекомендованной ООН потребительской корзине. Иногда они сообщают и об индексе цен на продовольственной корзине, который оказывается примерно в 3 раза больше. Наглядно видим, что индекс инфляции определяется потребительской корзиной. Рекомендуем самостоятельно собирать цены и рассчитывать индекс инфляции для своего домохозяйства, предприятия, региона.

Литература

1. *Баканов М.И., Шеремет А.Д.* Теория экономического анализа. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 416 с.

2. *Добротворский Н., Седов А.* Курс холодильника к кошельку: живем, как в 1985 году! // Комсомольская правда. — 2003. — 10 дек.

3. Доклад о мировом развитии 2004 г. Всемирный банк. — М.: Весь Мир, 2003. — 35 с.

4. *Елисеева И.И., Юзбашев М.М.* Общая теория статистики. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 368 с.

5. Как оценивать уровень жизни? (На примере московского региона) / А.И. Орлов, В.Н. Жихарев, В.А. Цупин, В.В. Балашов // Журнал «Обозреватель-Observer». — 1999. — № 5 (112). — С. 80–83.

6. *Ковнир В.Н.* История экономики России: Учебное пособие. — М.: Логос, 2005. — 472 с.

7. *Коростикова Т.* Цены вырастут в 5 раз // Аргументы и факты. — 1994. — № 16. — С. 5.

8. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика. — М.: Политиздат, 1991. — 414 с.

9. *Львов Д.С.* Реформы с позиции современной науки // Научные труды Международного союза экономистов и Вольного экономического общества России. Том второй. — М. — СПб., 1995. — С. 7–16.

10. *Макконнелл Кэмпбелл Р., Брю Стэнли Л.* Экономикс: Принципы, проблемы и политика. В 2-х т.: Пер. с англ. 11-го изд. Т. 1. — М.: Республика, 1995. — 400 с.

11. Математические модели в экономике. Расчет индекса инфляции / А.И. Орлов, В.В. Балашов, О.В. Куроптев, Е.М. Канакова, А.С. Рафальская. — М.: Изд-во Московского государственного института электроники и математики (технического ун-та), 1993. — 32 с.

12. Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) / Под ред. В.Н. Жихарева, А.И. Орлова и др. — М.: Изд-во ЦЭО Министерства общего и профессионального образования РФ, 1997. — 232 с.

13. *Мюллер Г., Гернон Х., Миик Г.* Учет: международная перспектива: Пер. с англ. — 2-е изд., стереотип. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 136 с.

14. Национальное счетоводство / Под ред. Г.Д. Кулагиной. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 448 с.

15. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

16. *Орлов А.И.* Размытые цены. Нечисловая экономика и управление инвестиционным процессом // Журнал «Российское предпринимательство». — 2001. — № 12. — С. 103–108.

17. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Экзамен, 2003. — 576 с.

18. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

19. *Орлов А.И.* Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 573 с.

20. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование процессов управления промышленными предприятиями в условиях рисков инфляции // Стратегическое планирование и развитие предприятий. Секция 4: Материалы Девятого всероссийского симпозиума. Москва, 15-16 апреля 2008 г. / Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. — М.: ЦЭМИ РАН, 2008. — С. 124–126.

21. *Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А.* Анализ динамики цен на продовольственные товары в Москве и Московской области // Научные труды Рижского института мировой экономики. Вып. 2. — Рига: РИМЭ, 1998. — С. 19–25.

22. *Орлов А.И., Орлова Л.А.* Интервальная оценка инфляции по независимой информации // Журнал «Российское предпринимательство». — 2003. — № 10. — С. 44–49.

23. *Панфилова Ю., Угодников К.* Как вы считаете? // Журнал «Итоги». — 2005. — 14 нояб. — № 46 (492).

23. *Ремарк Э.М.* Черный обелиск. — М.: АО «ВИТА-ЦЕНТР», 1992. — 384 с.

25. *Самуэльсон П.* Экономика. Т. 1, 2. — М.: МГП «Алгон» — ВНИИСИ, 1992. — 333 с. + 415 с.

26. *Сычева Г.И., Колбачев Е.Б., Сычев В.А.* Оценка стоимости предприятия (бизнеса). — Ростов н/Д: Феникс, 2003. — 384 с.

27. Статистический словарь / Гл. ред. М.А. Королев. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 623 с.

28. *Федосеев В.Н., Орлов А.И.* За что нас покупают (состояние рыночной мотивации труда в России) // Журнал «Российское предпринимательство». — 2000. — № 6. — С. 10–19.

29. *Orshansky M.* How Poverty is measured? — Monthly Labor Review, 1969, v. 92, № 2, p. 37-41.

30. *Найдис О.А., Найдис И.О.* Потребительские корзины, контроллинг уровня потребительских цен и МРОТ // Контроллинг. — 2019. № 4 (74). — С. 40–53.

31. *Куликова С.Ю., Муравьева В.С., Орлов А.И.* Контроллинг динамики потребительских цен и прожиточного минимума // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 126. — С. 403–421.

32. *Тюрин А.* Россия — шестое место в мире по ВВП (ППС), четвертое — по промышленности [Электронный ресурс]. — URL: http://zavtra.ru/blogs/rossiya_-_shestoe_mesto_v_mire_po_vvp_(pps)_chetvertoe_-_po_promishlennosti?utm_referrer=https%3A%2F%2Fzen.yandex.com (дата обращения 04.05.2020).

33. *Орлов А.И.* Оценка инфляции по независимой информации // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 108. — С. 259–287.

34. *Подиновский В.В.* Идеи и методы теории важности критериев. — М.: Наука, 2019. — 103 с.

Контрольные вопросы и задачи

1. Рассчитайте индекс инфляции с 13.03.1991 по 13.03.2001 на основе потребительской корзины и цен (табл. 3.23).

Таблица 3.23

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены (руб.)

№ п/п	Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 13.03.1991	Цена на 13.03.2001
1	Хлеб ржаной	65,3	0-20	10
2	Столовые корнеплоды	40,6	0-20	9
3	Колбаса докторская	0,4	2-30	95
4	Молоко, кефир	110,0	0-32	17
5	Сметана, сливки	1,6	1-70	50
6	Маргарин	6,3	1-20	35

2. Гражданин Иванов в марте 1991 г. получил 200 руб., а в марте 2001 г. — 5000 руб. Во сколько раз изменился его доход? Увеличился или уменьшился? (Используйте индекс инфляции из задачи 1.)

3. За январь индекс инфляции составил 50%, а за февраль — 200%. Чему равен индекс инфляции за два месяца? Каков средний темп (уровень) инфляции?

4. Выразите текущий курс доллара США в ценах марта 1991 г. (индекс инфляции можно принять равным 250).

5. Расскажите о динамике индекса инфляции в России.

6. Почему для определения индекса инфляции (в процентах) за два года нельзя складывать индексы инфляции за первый год и за второй год, выраженные в процентах?

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Место индексов инфляции в системе экономических индексов (сравните с индексами Ласпейреса, Пааше, И. Фишера [4]).

2. Теоремы умножения (в случае четырех и более моментов времени) и сложения (для групповых индексов инфляции), их доказательства и использование.

3. Экспериментальная работа: соберите данные о ценах и рассчитайте индекс инфляции для своего региона (на основе потребительской корзины ИВСТЭ).

4. Прогнозирование индекса инфляции: методы, практическая реализация, использование для принятия управленческих решений.

5. Учет инфляции при проведении анализа финансово-хозяйственной деятельности предприятия.

6. Обеспечение сопоставимости результатов расчетов при модернизации потребительской корзины.

7. Влияние инфляции на хозяйственную жизнь.

8. Методы выхода из инфляции.

Глава 4. ЭКСПЕРТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Различные виды голосований — это частные случаи принятия решений с помощью экспертов, т. е. экспертных процедур. В настоящей главе рассмотрим примеры процедур экспертных оценок, а затем перейдем к основам теории и практики разработки и применения таких процедур.

Согласно англо-русскому словарю *expert* — это специалист. Однако в русском языке слово «эксперт» приобрело дополнительные нюансы. Под экспертом понимают не просто специалиста (например, выпускника вуза), а только такого, кто обладает высокой квалификацией и умеет использовать свою интуицию для решения поставленных перед ним задач, например, для диагностики, прогнозирования, выбора варианта технического или управленческого решения.

Ударение в слове «эксперт», как и в словах «маркетинг» и «творог», можно ставить как на первый слог, так и на второй. Оба варианта — норма. Ударение на первый слог соответствует английскому языку, ударение на второй слог больше подходит для русского языка.

Рассмотрим ряд примеров процедур экспертных оценок, одновременно вводя нужные для дальнейшего обсуждения термины.

4.1. Индивидуальные и коллективные экспертные оценки

Экспертные оценки бывают *индивидуальные* и *коллективные*. *Индивидуальные оценки* — это оценки одного специалиста. Например, преподаватель единолично ставит на экзамене оценку студенту. Врач ставит диагноз больному и назначает лечение. Инспектор ГИБДД экспертно оценивает соблюдение правил дорожного движения водителем и прописывает лечение — штраф за нарушение правил.

Но в сложных случаях заболевания или при угрозе отчисления студента за плохую учебу обращаются к *коллективному* мнению *экспертной комиссии* — симпозиуму врачей или комиссии преподавателей. Классический пример коллективной экспертной оценки — решение суда присяжных. По простым делам судья принимает решение единолично; при рассмотрении тяжких преступлений законодательством предусмотрена возможность участия в принятии решений комиссии экспертов — присяжных заседателей.

Аналогичная ситуация — в армии. Обычно командующий принимает решение единолично. Но в сложных и ответственных ситуациях проводят военный совет. Один из наиболее известных примеров такого рода — военный совет 1812 г. в Филях, на котором под председательством М.И. Кутузова решался вопрос: «Давать или не давать французам сражение под Москвой?»

Работа экспертной комиссии может быть растянута во времени. Например, лечащий врач может отправить пациента на обследование к врачам-специалистам, дать распоряжение провести различные анализы, флюорографию и т. п. Собрав мнения экспертов (в данном случае — врачей-специалистов) и проанализировав объективные данные, лечащий врач формулирует окончательное решение, выражающее мнение всей экспертной комиссии.

Индивидуальная экспертная оценка может потребовать от специалиста выполнения большого объема работы. Например, подготовка рецензии на рукопись книги или заключения оппонента о диссертации, представленной к защите на соискание ученой степени. Обычно эксперт должен следовать тем или иным правилам, приведенным в нормативной и методической документации по определенному виду экспертной деятельности. Например, при оценке диссертации эксперт должен исходить из нормативных документов Высшей аттестационной комиссии РФ.

Индивидуальная экспертная оценка научно-технических проектов. В структуры государственной власти постоянно поступают научно-технические проекты, подготовленные различными организациями и отдельными гражданами. По каждой заявке требуется принять решение о целесообразности осуществления проекта и необходимом для этого содействии со стороны структур государственной власти (финансировании, организационных решениях).

Первый шаг — проект направляется на экспертизу. Например, эксперт *Российского исследовательского научно-консультационного центра экспертизы* (РИНКЦЭ) получает следующий документ.

Мнение эксперта должно быть выражено в специальном документе — *заключении.* На все 15 приведенных вопросов эксперт должен ответить в своем заключении. Ясно, что этот документ должен быть достаточно объемным, а подготовка его трудоемка.

Вопросы,

которые должны быть отражены в заключении эксперта

1. Актуальность проекта.

2. Краткая характеристика положения в данной области в стране и за рубежом.

3. Научное значение проекта.

4. Научная новизна предлагаемых решений.

5. Прикладное значение проекта.

6. Новизна предлагаемых технических (технологических) решений.

7. Существующие отечественные и зарубежные аналоги (марка, тип, фирма, страна).

8. В чем заключается преимущество предлагаемых решений по сравнению с существующими в данной области в стране и за рубежом.

9. Сравнительные данные экономических показателей объекта и его аналогов (в сопоставимом виде).

10. Оценка потенциала разработчика.

- наличие научно-технического задела в данной области и в чем он выражается;
- наличие научно-производственной базы.

11. Обоснованность стоимости работ, оценка структуры затрат.

12. Реальность достижения поставленных целей:

- в предлагаемые сроки;
- предлагаемыми способами (методами) и ресурсами.

13. Возможность серийного освоения предлагаемого проекта.

14. Последствия создания и использования проекта:

- научные и научно-технические;
- экологические;
- гуманитарные;
- экономические;
- социальные.

15. Выводы:

- необходимость реализации проекта (полная, частичная);
- целесообразность финансирования (в целом, частично);
- рекомендации эксперта.

Когда нужна формализация мнений экспертов? Цели экспертизы могут различаться. Так, отзыв официального оппонента заканчивается выводом, соответствует или нет рассмотренная им диссертация требованиям ВАК РФ. Рецензент научного журнала делает в конце своего заключения вывод: может или нет данная статья быть опубликована в журнале. В этих двух случаях нет необходимости сравнивать между собой различные объекты экспертизы.

Однако часто необходимо проводить такое сравнение. Научно-технические или инвестиционные проекты нельзя рассматривать отдельно друг от друга, поскольку ограничено суммарное финансирование, выделенное на всю совокупность проектов.

Насколько подходят для сравнения объектов экспертизы обширные заключения, подготовленные различными экспертами? С одной стороны, эти заключения содержат результаты высококвалифицированного труда по оценке содержания проектов. С другой стороны, написанные в свободной манере заключения не всегда позволяют сопоставить между собой отдельные характеристики проектов. Поэтому эксперты РИНКЦЭ заполняют еще один формализованный документ.

Карта оценки объекта экспертизы

Научная значимость:
1. Исключительно высокая
2. Значительная
3. Невысокая
4. Неопределимая (в настоящее время)
5. Отсутствует

Практическая значимость:
1. Исключительно высокая
2. Значительная
3. Невысокая
4. Неопределимая (в настоящее время)
5. Отсутствует

Научная новизна, оригинальность:
1. Не имеет аналогов
2. Нет аналогов в стране, есть за рубежом
3. Нет аналогов за рубежом, есть в стране
4. Есть сведения об отдельных отечественных и зарубежных аналогах
5. Научная новизна отсутствует

Методы и способы достижения цели:
1. Новые

2. Современные
3. Традиционные
4. Устаревшие
5. Неадекватные

Потенциал исполнителей в рассматриваемой области:
1. Достаточный
2. Недостаточный в части научного задела (опыта работы)
3. Недостаточный в части материально-технической (лабораторно-экспериментальной) базы
4. Недостаточный в части состава исполнителей
5. Данных для оценки недостаточно

Срок работы:
1. Реальный
2. Завышен
3. Занижен
4. Данных для оценки недостаточно

Стоимость работ (объем финансирования):
1. Приемлемая
2. Завышена
3. Занижена
4. Данных для оценки недостаточно

Рекомендуемый приоритет осуществления:
1. Работа первостепенной важности
2. Работа высокой важности
3. Работа представляет определенный интерес
4. Работа представляет незначительный интерес, но заслуживает поддержки при наличии достаточных средств
5. Работа поддержки не заслуживает

Дата ____________ Эксперт ________________ Подпись __________
(Ф.И.О.)

При заполнении «Карты оценки объекта экспертизы» ничего писать не надо. Следует лишь обвести номера тех пунктов в каждом из разделов, которые соответствуют мнению экспертов. В разделе «Потенциал исполнителей» могут быть обведены несколько номеров, в остальных разделах — по одному. По «Карте оценки объекта экспертизы» легко сравнивать мнения экспертов между собой, а также сопоставлять различные объекты экспертизы.

В конце «Карты оценки объекта экспертизы» предусмотрена подпись эксперта. Эксперт несет ответственность за свое заключение — уголовную, административную, материальную, гражданско-правовую. Экспертные исследования принципиально отличаются от маркетинговых и социологических, в которых подчеркивается анонимность опрашиваемых [1, гл. 2].

Различные типы вопросов. В экспертных исследованиях, а также в выборочных маркетинговых и социологических опросах используют три типа вопросов — закрытые, открытые и полузакрытые, они же полуоткрытые (см. также главу 1). При ответе на закрытые вопросы можно выбирать лишь из заранее сформулированных составителями анкеты вариантов ответа. В качестве ответа на открытый вопрос опрашиваемого просят изложить свое мнение в свободной форме. Полузакрытые, они же полуоткрытые, вопросы занимают промежуточное положение — кроме выбора среди перечисленных в анкете вариантов, можно добавить свои соображения. Ясно, что «Вопросы, которые должны быть отражены в заключении эксперта» являются открытыми, а «Карта оценки объекта экспертизы» состоит из закрытых вопросов.

Каждый из этих типов вопросов имеет свои достоинства и недостатки. Преимущество открытых вопросов в том, что эксперт может свободно высказать свое мнение так, как сочтет нужным. Их недостаток — в сложности сопоставления мнений различных экспертов. Для такого сопоставления и получения сводных характеристик организаторы опроса вынуждены сами шифровать ответы на открытые вопросы, применяя разработанную ими схему шифровки.

Преимущество закрытых вопросов в том, что такую шифровку проводит сам эксперт. Однако при этом организаторы опроса уподобляются древнегреческому мифическому персонажу Прокрусту. Как известно, Прокруст приглашал путников заночевать у него. Укладывал их на кровать. Если путник был маленького роста, он вытягивал его ноги так, чтобы они доставали до конца кровати. Если же путник оказывался высоким и ноги его торчали — он обрубал их так, чтобы достигнуть стандарта: «рост» путника должен равняться длине кровати. Так и организаторы опроса, применяя закрытые вопросы, заставляют эксперта «вытягивать» или «обрубать» свое мнение, чтобы выразить его с помощью приведенных в формулировке вопроса возможных ответов.

Ясно, что для обработки данных по группам и сравнения групп между собой нужны формализованные данные, и фактически речь может идти лишь о том, кто именно — эксперт или организатор экспертизы — будет шифровать ответы.

На этапе подготовки важного экспертного опроса проводят «пилотное» исследование — апробацию документов и процедур анализа ответов, которые будут собраны в ходе будущего опроса. В пилотном исследовании участвует небольшое число экспертов. Цель их работы — проверить доступность задач опроса и документации пониманию экспертов, работоспособность расчетных процедур, уточнить формулировки вопросов и способы сбора и анализа экспертных мнений. В рамках пилотного исследования может быть проведена предварительная экспертиза, специально посвященная отработке перечня и формулировок вопросов.

4.2. Оценка и выбор вариантов с помощью экспертов

Рассмотрим несколько процедур коллективных экспертных оценок, начиная с простейших, при этом вводя и обсуждая используемые в дальнейшем понятия.

Оценка номеров в КВН. Простейший пример коллективных экспертных оценок — оценка номеров в известной игре КВН (Клуб веселых и находчивых) в классическом варианте. Экспертной комиссией является жюри. Просмотрев номер, каждый из членов жюри поднимает планшет со своей оценкой. Затем технический работник (не член жюри) вычисляет среднюю арифметическую оценку, которая и объявляется как коллективное мнение жюри (ниже увидим, что такой подход некорректен с точки зрения теории измерений). Обратим внимание на технического работника. После обработки экспертных мнений он выставляет оценку на стенд, делая результаты экспертизы доступными всем желающим. Он представляет коллектив тех, кто обеспечивает организацию и проведение экспертизы. Этот коллектив называют *рабочей группой* (РГ) [1, гл. 12] или группой сопровождения [2].

Таким образом, два основных объекта рассмотрения в настоящем учебнике — это *экспертная комиссия* (ЭК) и *рабочая группа*.

Фигурное катание. В фигурном катании процедура обработки оценок экспертов усложняется — перед усреднением *отбрасываются самая большая и самая маленькая оценки,* чтобы не было соблазна завысить оценку одной спортсменке (например, соотечественнице) или занизить другой. Такие резко выделяющиеся из общего ряда оценки будут сразу отброшены.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — оценки n экспертов. При проведении КВН в качестве коллективной экспертной оценки используют среднее арифметическое всех n оценок

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

В фигурном катании нужно переставить элементы выборки в порядке возрастания (точнее, неубывания) и получить вариационный ряд $X(1) \le X(2) \le \ldots \le X(n)$, исключить минимум $X(1)$ и максимум $X(n)$, а затем в качестве коллективной экспертной оценки взять урезанное среднее арифметическое, т. е. среднее арифметическое оставшихся $(n-2)$ членов вариационного ряда

$$X^* = \frac{X(2) + X(3) + \ldots + X(n-1)}{n-2}.$$

С точки зрения прикладной математической статистики [3], X^* — это робастная оценка теоретического среднего, нацеленная на борьбу с аномальными (резко выделяющимися) результатами наблюдений. Аномальные результаты порождены внешними влияниями на судей фигурного катания, искажающими их профессиональные экспертные оценки, поэтому простое изменение правил расчетов итоговой оценки (переход от среднего арифметического к урезанному среднему) позволяет уберечь экспертов от вызванных извне уклонений от решения поставленных перед ними задач.

Итак, *правила обработки оценок экспертов* существенно влияют на объективность выводов экспертной комиссии.

Экспертный выбор. Экспертные оценки часто используются при выборе — одного варианта технических устройств из нескольких, группы космонавтов из многих претендентов, набора проектов научно-исследовательских работ для финансирования из массы заявок, получателей экологических кредитов из многих желающих, выбор инвестиционных проектов для реализации среди представленных и т. д.

Типовая ситуация такова. Заказчик формулирует технические требования к будущему изделию. Объявляется конкурс (тендер), итогом которого должен быть выбор той или иной разработки для серийного выпуска. Допущенные к конкурсу организации к заданному сроку представляют опытные образцы. Как правило, оказывается, что эти образцы несравнимы; каждый из них по каким-то важным показателям качества лучше других, а по другим важным показателям — хуже того или иного из остальных образцов. Например, у одного опытного образца дальность полета больше, у другого — расход топлива на 1000 км меньше, у третьего — потолок полета выше, у четвертого — броня крепче, у пятого — под крыльями можно дополнительно подвесить две ракеты. Какой стратегический бомбардировщик (из разработанных разными конструкторскими бюро и представленных на тендер) выбрать для серийного производства?

Аналогичная ситуация возникает на трикотажной фабрике, когда художественный совет (т. е. комиссия экспертов) должен выбрать из представленных модельерами образцов тот, который будет запущен в массовое производство.

Задача экспертной комиссии — выбрать опытный образец для запуска в серийное производство. Есть два принципиально разных подхода к решению этой задачи.

Первый подход основан на сравнении образцов. Например, каждый из экспертов упорядочивает образцы в соответствии со своими предпочтениями. Полученные от экспертов *упорядочения* (*ранжировки*) обрабатываются теми или иными математическими методами с целью расчета итогового мнения комиссии экспертов. В другом варианте организации экспертизы эксперту образцы предъявляются попарно для сравнения, математический анализ результатов *парных сравнений* позволяет найти итоговое мнение. В третьем варианте каждого эксперта просят выбрать три лучших образца и т. д.

Второй подход имеет целью соизмерить сравнительную важность различных показателей качества, построить интегральный показатель качества (рейтинговую оценку), с помощью которого можно упорядочить образцы по качеству (рассчитать *рейтинг* образцов). Пусть, например, выделено (с помощью предварительного экспертного исследования) m показателей качества. Для конкретного объекта экспертизы экспертная комиссия оценивает эти показатели Y_1,

Y_2, ..., Y_m, затем РГ рассчитывает значение интегрального показателя качества

$$Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 + ... + a_mY_m.$$

На основе полученных значений Y можно выбрать наилучший образец, упорядочить образцы по качеству, указав рейтинг образцов, т. е. значения интегрального показателя, соответствующие образцам. Значения коэффициентов a_i (коэффициентов важности, весомости, значимости) обычно определяются с помощью той или иной вспомогательной экспертной процедуры.

Кроме аддитивной формы интегрального показателя, часто используют мультипликативный вариант этого показателя:

$$Z = \prod_{j=1}^{m} Y_j^{b_j},$$

в котором показатели степени b_j обычно также определяются экспертным путем.

Вопросы построения рейтингов подробно рассмотрены ниже в соответствующей главе учебника.

Кроме задачи выбора наилучшего (с точки зрения экспертов) образца, описанные методы позволяют решить ряд иных практических задач, в частности задачу распределения финансирования. Пусть имеется ряд объектов экспертизы, нуждающихся в финансировании, например инвестиционных проектов или заявок на выполнение научно-технических проектов (работ). Естественно упорядочить объекты экспертизы по качеству (рентабельности, привлекательности и т. п.), а затем выделять необходимые объемы финансирования, начиная с наилучшего объекта. Тогда начальная часть вариационного ряда показателей качества будет соответствовать профинансированным объектам экспертизы, а заключительная — тем, кому финансирования не досталось.

На границе между этими двумя группами возможны нюансы. Например, объект экспертизы A нельзя профинансировать в необходимом объеме из-за недостатка средств, а вот на финансирование худшего, чем A, объекта экспертизы B средств достаточно. Тогда объект B будет финансироваться, а объект A — нет, вопреки рейтингу.

Военные советы как форма экспертной деятельности. С тех пор, как люди научились говорить, проводились совещания специалистов. Поэтому можно сказать, что экспертным оценкам столько же лет, сколько человеческому обществу. Конечно, постепенно технологии экспертного оценивания развивались. Например, появилась идея *независимой экспертизы*. Ее можно сопоставить с идеей разделения власти на законодательную, исполнительную и судебную ветви в предположении независимости ветвей власти.

Весьма важен *регламент* проведения заседания комиссии экспертов. В «Капитанской дочке» (глава X) А.С. Пушкин приводит слова, с которыми генерал, комендант Оренбурга, обратился к членам военного совета: «Теперь, господа, — продолжал он, — надлежит решить, как нам действовать противу мятежников: *наступательно* или *оборонительно*? Каждый из оных способов имеет свою выгоду и невыгоду. Действие наступательное представляет более надежды на скорейшее истребление неприятеля; действие оборонительное более верно и безопасно... Итак, начнем собирать голоса по законному порядку, то есть начиная с младших по чину. Г-н прапорщик! — продолжал он, обращаясь ко мне. — Извольте объяснить нам ваше мнение».

Военный совет в данном случае — это собрание экспертов (военных специалистов). Председатель собрания четко поставил задачу: надо выбрать либо наступление, либо оборону. Обсуждение идет в однозначно заданном порядке — от младших к старшим. Младшие могут спокойно высказывать свои мысли, не боясь, что их предложения будут противоречить мнению старших. Старшие имеют возможность учесть высказанные аргументы и сделать свои выступления более обоснованными.

Важность соблюдения *регламента* проведения заседания экспертной комиссии становится особенно ясной при сопоставлении с распространенным в XVII в. местничеством. Бояре постоянно спорили, кто из них главнее, следовательно, кто должен сидеть ближе к царю и говорить раньше и больше других. Заседание постоянно прерывалось схватками (иногда не только словесными) между его участниками. Повышению эффективности заседаний весьма способствовало введение Петром I системы чинов и регламентации служебных взаимоотношений в соответствии с нею. И в настоящее время общепринятой практикой является выбор (или назначение) в начале собрания председателя и секретаря и утверждение регламента.

Наиболее известный в истории России военный совет состоялся 1 сентября 1812 г. в Филях, вскоре после Бородинского сражения. Обсуждался вопрос: «Дать французам сражение под Москвой или оставить Москву без боя?» Решение должен был принять главнокомандующий (и одновременно министр обороны) генерал-фельдмаршал М.И. Кутузов. Военный совет, как и любая комиссия экспертов, — совещательный орган, а окончательные решения принимает тот, кому это поручено. В современной литературе такой человек обозначается как *лицо, принимающее решение*, сокращенно — ЛПР (по первым буквам), или как *руководитель, принимающий решение*, сокращенно — РПР.

Большинство экспертов, рассказав о состоянии своих войск, высказались за сражение. Однако, учитывая тяжелые потери русской армии, ЛПР (т. е. Кутузов) принял решение оставить Москву без боя. Аргументировал это решение Кутузов так: «Оставив Москву, мы сохраним армию; потеряв армию, мы потеряем и Москву, и Россию». И 2 сентября 1812 г. русские войска без боя оставили Москву, с ними ушла и половина московского населения (около 100 тыс. человек). Как известно, это решение Кутузова предопределило поражение Наполеона в войне и изгнание захватчиков.

Итак, ЛПР поступил вопреки мнению большинства экспертов. Значит ли это, что работа *экспертной комиссии* (ЭК) пропала впустую? Отнюдь! Собранная экспертами информация использована ЛПР. Продемонстрированный генералами русской армии боевой дух, готовность сражаться с врагом также были учтены ЛПР, наряду с теми соображениями, которые не могли знать эксперты и которые были приняты во внимание ЛПР.

Обсуждение *регламента* проведения заседаний и организации экспертного исследования в целом, взаимоотношений *ЛПР* и *ЭК* касаются всех видов экспертных оценок, отнюдь не только военных советов.

4.3. Экспертное прогнозирование

Перейдем к обсуждению развития экспертных исследований в XX в.

Кибернетика — основа управления. Большое влияние на развитие исследований в области управления в целом и менеджмента в частности оказало появление в 1948 г. книги американского математика Норберта Винера (1894–1964) «Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине» [4]. Через два года вышла его книга «Кибернетика и общество» [5]. Началось мощное научное движение, ключевые слова которого — кибернетика, исследование операций, системный анализ, математическое моделирование, оптимальное управление, экспертные оценки и др. Оно до сих пор определяет лицо современной науки об управлении. В нашей стране огромную роль в развертывании исследований по кибернетике сыграл академик АН СССР адмирал-инженер Аксель Иванович Берг (1893–1979). С 50-х гг. до последних дней жизни он возглавлял Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР.

Один из вождей отечественного кибернетического движения академик РАН Никита Николаевич Моисеев (1917–2001) в своей книге [6] приводит ряд фактов, позволяющих проследить историю кибернетических идей. Он обращает внимание на книгу профессора Бронислава Трентовского «Отношение философии к кибернетике как искусству управления народами», вышедшую в Познани в 1843 г. (за 105 лет до книги Н. Винера) на польском языке. Для образованных людей XIX в., знакомых с древнегреческим языком, слово «кибернетика» было вполне понятно. Оно означало систему взглядов, знаний, навыков, которой должен был обладать управляющий, чтобы эффективно управлять людьми и ресурсами, находящимися в его распоряжении. Большой вклад в кибернетику в целом и в теорию систем в частности внесли отечественные ученые — член Петербургской академии наук Евграф Степанович Федоров (1853–1919) и особенно Александр Александрович Богданов (1873–1928), деятель российского революционного движения, врач, философ, экономист (настоящая фамилия — Малиновский). С 1926 г. — организатор и директор Института переливания крови. Погиб, производя на себе медицинский опыт. Основное сочинение А.А. Богданова — трехтомная «Всеобщая организационная наука (тектология)». Первый том напечатан в 1913 г. Полностью книга выходит в 1925–1929 гг.

Многие идеи кибернетики были известны задолго до Н. Винера (хотя сам он об этом, скорее всего, и не догадывался). Почему же именно книга Н. Винера послужила толчком к развитию работ по теории управления, а не работы Трентовского, Федорова, Богданова? Одно из возможных объяснений — «Кибернетика» Винера появилась вовремя, после Второй мировой войны, когда стали выделять большие ресурсы на развитие науки (это было реакцией правительств на продемонстрированную в Хиросиме и Нагасаки роль науки в практике).

После Второй мировой войны в рамках научного движения, включающего кибернетику, информатику, системный анализ, теорию управления, менеджмент и исследование операций, стала развиваться самостоятельная научно-практическая дисциплина — теория и практика экспертных оценок.

Метод Дельфи. Один из наиболее известных методов экспертных оценок — это *метод Дельфи*, предназначенный для прогнозирования. Название дано по ассоциации с древним обычаем для получения поддержки при принятии решений обращаться в Дельфийский храм. Он был расположен у выхода ядовитых вулканических газов. Жрицы храма (пифии), надышавшись отравы, начинали пророчествовать, произнося непонятные слова. Специальные «переводчики» — жрецы храма толковали эти слова и отвечали на вопросы пришедших со своими проблемами паломников. Те спрашивали, отправляться ли в морское путешествие, вступать ли в брак, заключать ли договор с тем или иным деловым партнером, начинать ли войну и т. д.

Технология экспертного оценивания состояла в следующем. Получив «заказ на экспертное прогнозирование», жрецы передавали его пифиям, выслушивали пророчества пифий, а затем толковали услышанное заказчику. С течением времени в храме накапливались пожертвования и памятные доски от тех, для кого прогнозы сбылись. Если же прогноз не осуществился, то сообщить об этом зачастую было некому — заказчик лежал на морском дне или был убит в битве, разорен и продан в рабство и т. п.

По традиции говорят, что Дельфийский храм находился в Греции. Но там нет вулканов. Возможно, он был в Италии — у Везувия или Этны, а сами описанные предсказания происходили в XII–XIV вв. Это вытекает из высшего достижения современной исторической науки — новой статистической хронологии.

В США в 1960-х гг. методом Дельфи назвали экспертную процедуру прогнозирования научно-технического развития. В первом туре эксперты называли вероятные даты тех или иных будущих свершений. Во втором туре каждый эксперт знакомился с прогнозами всех остальных. Если его прогноз сильно отличался от прогнозов основной массы экспертов, его просили пояснить свою позицию, и часто он изменял свои оценки, приближаясь к средним значениям. Эти средние значения и выдавались заказчику как групповое мнение. Реальные результаты исследования оказались довольно скромными — хотя дата высадки американцев на Луну была предсказана с точностью до месяца, все остальные прогнозы провалились — холодного термоядерного синтеза и средства от рака в XX в. человечество не дождалось.

Однако сама методика оказалась популярной — за последующие 15 лет она использовалась не менее 40 тыс. раз. Это объяснялось впечатлением от беспрецедентного успеха предсказания даты высадки на Луну. Можно констатировать, что именно этот успех выдвинул метод экспертных оценок на роль самостоятельного научно-практического направления, с которым должны быть знакомы все инженеры и управленцы, а также деятели иных специальностей.

Средняя стоимость экспертного исследования по методу Дельфи — 5 тыс. долларов США, но в ряде случаев приходилось расходовать и более крупные суммы — до 130 тыс. долларов.

Метод сценариев. Несколько в стороне от основного русла экспертных оценок лежит *метод сценариев*, применяемый для экспертного прогнозирования.

Рассмотрим основные идеи технологии сценарных экспертных прогнозов.

Социально-экономическое или, скажем, экологическое прогнозирование, как и любое прогнозирование вообще, может быть успешным лишь при некоторой стабильности условий. Однако решения органов власти, отдельных лиц, иные события меняют условия, и события развиваются по-иному, чем ранее предполагалось. Вполне очевидно, что после первого тура президентских выборов 1996 г. о дальнейшем развитии событий можно было говорить лишь в терминах сценариев: если во втором туре победит Б.Н. Ельцин, то будет то-то и то-то, если же победит Г.А. Зюганов, то события пойдут так-то и так-то.

Метод сценариев необходим не только в социально-экономической или экологической области. Например, при разработке методологического, программного и информационного обеспечения *анализа риска* химико-технологических проектов необходимо составить детальный каталог сценариев аварий, связанных с утечками токсических химических веществ. Каждый из таких сценариев описывает аварию своего типа, со своим индивидуальным происхождением, развитием, последствиями, возможностями предупреждения.

Таким образом, метод сценариев — это метод декомпозиции задачи прогнозирования, предусматривающий выделение набора отдельных вариантов развития событий (сценариев), в совокупности охватывающих все возможные варианты развития. Каждый отдельный сценарий должен допускать возможность достаточно точного прогнозирования, а общее число сценариев должно быть обозримо.

Возможность подобной декомпозиции не очевидна. При применении метода сценариев необходимо осуществить два этапа исследования:

— построение исчерпывающего, но обозримого набора сценариев;

— прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы.

Каждый из этих этапов лишь частично формализуем. Существенная часть рассуждений проводится на качественном уровне, как это принято в общественно-экономических и гуманитарных науках. Одна из причин в том, что стремление к излишней формализации и математизации приводит к *искусственному* внесению определенности там, где ее нет по существу, либо к использованию громоздкого математического аппарата. Так, рассуждения на словесном уровне считаются доказательными в большинстве ситуаций, в то время как попытка уточнить смысл используемых слов с помощью, например, теории нечетких множеств, приводит к весьма громоздким математическим моделям.

Набор сценариев должен быть обозрим. Приходится исключать различные маловероятные события — прилет инопланетян, падение астероида, массовые эпидемии ранее неизвестных болезней и т. д. Само по себе создание набора сценариев — предмет экспертного исследования. Кроме того, эксперты могут оценить вероятности реализации того или иного сценария.

Прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы также осуществляется в соответствии с описанной выше методологией прогнозирования. При стабильных условиях могут быть применены статистические методы прогнозирования временных рядов. Однако этому предшествует анализ с помощью экспертов, причем зачастую прогнозирование на словесном уровне является достаточным (для получения интересующих исследователя и ЛПР выводов) и не требующим количественного уточнения.

Как известно, при принятии решений на основе *анализа ситуации* (как говорят, при *ситуационном анализе*), в том числе анализа результатов прогнозных исследований, можно исходить из различных критериев. Так, можно ориентироваться на то, что ситуация сложится наихудшим, или наилучшим, или средним (в каком-либо смысле) образом. Можно попытаться наметить мероприятия, обеспечивающие минимально допустимые полезные результаты при любом варианте развития ситуации, и т. д.

Мозговой штурм. Еще один вариант экспертного оценивания — *мозговой штурм* — организуется как собрание экспертов, на выступления которых наложено одно, но очень существенное ограничение — нельзя критиковать предложения других. Можно их развивать, можно высказывать свои идеи, но нельзя критиковать! В ходе заседания эксперты, «заражаясь» друг от друга, высказывают все более экстравагантные соображения. Часа через два записываемое на диктофон или видеокамеру заседание заканчивается, и начинается второй этап мозгового штурма — анализ высказанных идей. Обычно за время дискуссии высказывается около 100 идей. Из них примерно 30 заслуживают дальнейшей проработки, 5-6 идей дают возможность сформулировать прикладные проекты, а 2-3 идеи оказываются в итоге приносящими полезный эффект — прибыль, перевод конфликта в сотрудничество, повышение экологической безопасности, оздоровление окружающей природной среды и т. п.

Интерпретация идей — творческий процесс. Например, при обсуждении возможностей защиты кораблей от торпедной атаки была высказана идея: «Выстроить матросов вдоль борта и дуть на торпеду, чтобы изменить ее курс». После проработки эта идея привела к созданию устройств, создающих волны, сбивающие торпеду с курса.

4.4. Экспертные оценки на современном этапе

В настоящее время практически все виды трудовой деятельности так или иначе связаны с проведением экспертиз. Врачи и преподаватели, управленцы (менеджеры) и инженеры, юристы и экономисты — все они в той или иной степени эксперты. Классифицировать основные виды экспертной деятельности можно по областям конкретной профессиональной деятельности, а также по тем задачам, которые решают с помощью экспертных исследований.

По областям конкретной профессиональной деятельности выделяют следующие виды экспертиз:

— строительная,

— медицинская,

— судебная,

— экологическая, в том числе объектов недропользования,

— товароведческая,

— экспертиза качества товаров,

— патентная,

— страховая,

— аудит,

— экспертиза при оценке имущества, бизнеса, нематериальных активов и т. д. [7].

Экспертная деятельность в конкретных областях обычно регулируется соответствующими нормативными актами и осуществляется в соответствии с теми или иными методическими материалами. В дальнейших главах в качестве примера нормативного регулирования экспертной деятельности будем рассматривать Федеральный закон от 23 ноября 1995 г. № 174-ФЗ «Об экологической экспертизе».

При классификации по решаемым задачам выделяют [8] оценочные и управленческие экспертизы.

Результатами *оценочных экспертиз* являются:

— численные оценки объектов (значений показателей, параметров, характеристик объектов);

— отнесение объектов экспертизы к тому или иному виду объектов, классу объектов, сорту;

— ранжирования объектов по тому или иному свойству, качеству, показателю, критерию;

— рейтинги, позволяющие определить численные значения, характеризующие сравнительную предпочтительность объектов экспертизы;

— индексы, позволяющие оценить (характеризующие) состояние объектов экспертизы;

— иные объекты числовой или нечисловой природы, используемые для оценивания объектов экспертизы (конкретные виды объектов числовой или нечисловой природы рассматриваются в следующих главах учебника).

Примерами результатов оценочных экспертиз, в частности, являются:

— результаты определения победителей конкурсов, тендеров, подрядных торгов, иных соревнований;

— рейтинги организаций (промышленных предприятий, вузов, банков, страховых компаний), ценных бумаг, политических деятелей, бизнесменов и спортсменов;

— индексы (Доу-Джонса и др.), характеризующие движение курсов ценных бумаг на биржах.

Результатом *управленческих экспертиз* является подготовка рекомендаций и заключений на всех этапах цикла выработки, принятия и реализации управленческих решений. К их числу относятся экспертизы при:

— выработке стратегии и тактики (определении стратегических целей, приоритетов деятельности, планов, организационных структур, разработке бизнес-планов и т. д.);

— подготовке аналитических материалов и проведении ситуационного анализа, включая разработку прогнозов и сценариев;

— генерировании и отборе альтернативных вариантов решений;

— оценке альтернативных вариантов решений и определении наиболее предпочтительного из них;

— контроле хода реализации принятых решений;

— корректировке принятых ранее управленческих решений на основании оценки хода реализации принятых решений.

Конечно, эти перечни не являются исчерпывающими. Они позволяют составить представление о том, насколько разнообразны задачи экспертных оценок и области их практического применения.

Согласимся с мнением проф. Б.Г. Литвака, что экспертизы необходимы на всех стадиях управленческого цикла, в какой бы области деятельности ни принималось решение [7]. Без профессиональной экспертизы нет сегодня профессионально принятого решения!

Разработана масса методов получения экспертных оценок. В одних с каждым экспертом работают отдельно, он даже не знает, кто еще является экспертом, а потому высказывает свое мнение независимо от авторитетов. В других экспертов собирают вместе для подготовки материалов для ЛПР, эксперты обсуждают проблему друг с другом, учатся друг у друга, и неверные мнения отбрасываются. В одних методах число экспертов фиксировано и таково, чтобы статистические методы проверки согласованности мнений и затем их усреднения позволяли принимать обоснованные решения. В других — число экспертов растет в процессе проведения экспертизы, например, при использовании метода «снежного кома» (о нем — ниже). Не меньше существует и методов обработки ответов экспертов, в том числе весьма насыщенных математикой и компьютеризированных. В дальнейших главах книги на основе методологии, развитой в [9, 14], рассмотрены современные методы экспертных оценок.

4.5. Основные стадии экспертного опроса

Познакомившись с примерами процедур экспертных оценок, обсудим общие вопросы организации экспертного исследования.

Рассмотрим подробнее отдельные этапы типового экспертного исследования. Как показывает практический опыт, с точки зрения менеджера-организатора такого исследования, целесообразно выделять следующие стадии проведения экспертного опроса.

1. *Принятие решения о необходимости проведения экспертного опроса и формулировка его цели ЛПР.* Таким образом, инициатива должна исходить от руководства, что в дальнейшем обеспечит успешное решение организационных и финансовых проблем. Очевидно, что исходный толчок может быть дан докладной запиской одного из сотрудников или дискуссией на совещании, но реальное начало работы — решение ЛПР. Цель экспертного исследования ЛПР может сформулировать по-разному, и от этой формулировки зависит выбор процедуры экспертизы.

2. *Подбор и назначение ЛПР основного состава рабочей группы* (РГ). Обычно — научного руководителя и ответственного секретаря. Научный руководитель отвечает за организацию и проведение экспертного исследования в целом, за анализ собранных материалов и подготовку заключения экспертной комиссии; участвует в формировании коллектива экспертов и выдаче задания каждому эксперту (вместе с ЛПР или его представителем). Он сам — высококвалифицированный эксперт и признаваемый другими экспертами формальный и неформальный руководитель экспертной комиссии. Дело ответственного секретаря — ведение документации экспертного опроса, решение организационных задач. Назначение научного руководителя и ответственного секретаря оформляется распорядительным документом (приказом, постановлением и т. п.). Остальной состав РГ обычно формируется в процессе развертывания исследования, причем по предложениям научного руководителя и ответственного секретаря.

3. *Разработка РГ* (точнее, ее основным составом, прежде всего научным руководителем и ответственным секретарем) *и утверждение у ЛПР технического задания на проведение экспертного опроса.* На этой стадии решение о проведении экспертного опроса приобретает четкость во времени, в финансовом, кадровом, материальном и организационном обеспечении. В частности, формируется костяк РГ со своей внутренней структурой. Обычно в РГ выделяются различные группы специалистов — аналитическая, эконометрическая (специалисты по методам анализа данных), компьютерная, по работе с экспертами (например, интервьюеров), организационная. Возможно совмещение ролей — один и тот же сотрудник может и отвечать за выбор метода анализа экспертных мнений, и сам же проводить этот анализ. Очень важно для успеха, чтобы все перечисленные позиции были включены в техническое задание и утверждены ЛПР.

4. Разработка аналитической группой РГ подробного сценария (т. е. регламента, правил) проведения сбора и анализа экспертных мнений (оценок). Термин «сценарий» имеет примерно тот же смысл, что и в театре и кинематографе. Сценарий включает в себя анкеты и опросные листы (планы интервью), определяющие конкретный вид информации, которая будет получена от экспертов (например, слова, условные градации, числа, ранжировки, разбиения или иные виды объектов нечисловой природы). Например, довольно часто экспертов просят высказаться в свободной форме, ответив при этом на некоторое количество заранее сформулированных вопросов. Кроме того, их просят заполнить формальную карту, в каждом пункте выбрав одну из нескольких градаций (см. приведенные выше примеры).

Сценарий должен содержать и конкретные методы анализа собранной информации. Например, вычисление медианы Кемени, статистический анализ люсианов, применение иных методов статистики объектов нечисловой природы и других разделов прикладной статистики (о некоторых из названных методов речь пойдет ниже, см. также [10]). Эта работа ложится на эконометрическую и компьютерную группу РГ.

Традиционная ошибка — сначала собрать информацию, а потом думать, что с ней делать. В результате, как показывает печальный практический опыт, информация используется не более чем на 1-2%. В большом ворохе беспорядочно собранных фактов, как правило, отсутствует необходимая упорядоченность. А именно, значения отдельных показателей собраны с пропусками, способы измерения меняются от одного эксперта к другому, от одного объекта экспертизы к другому (как говорят, определения «плывут»), сам перечень показателей не позволяет ответить на интересующие ЛПР вопросы и т. д.

Сценарий утверждается научным руководителем ЭК.

5. *Подбор экспертов* в соответствии с их компетентностью. На этой стадии РГ составляет список возможных экспертов и оценивает степень их пригодности для планируемого исследования. Итоговый перечень должен включать по крайней мере в 1,5 раза больше потенциальных экспертов, чем то количество, которое планируется реально привлечь к работе.

6. *Формирование экспертной комиссии.* На этой стадии РГ проводит переговоры с экспертами, получает их согласие на работу в ЭК. Возможно, часть намеченных РГ (на стадии 5) экспертов не сможет войти в ЭК (болезнь, отпуск, командировка и др.) или откажется по тем или иным причинам (занятость, условия контракта и др.). В обязательном порядке ЛПР утверждает состав экспертной комиссии, возможно, вычеркнув или добавив часть экспертов к предложениям РГ. Проводится заключение договоров с экспертами об условиях их работы и ее оплаты. На этой же стадии завершается формирование РГ.

7. *Проведение сбора экспертной информации* в соответствии с разработанным на стадии 4 сценарием. Часто перед этим проводится набор и обучение интервьюеров — одной из групп, входящих в РГ.

8. Компьютерный *анализ экспертной информации* с помощью включенных в сценарий методов. Ему обычно предшествует компьютеризация экспертных мнений, т. е. создание и наполнение соответствующих баз данных или электронных таблиц.

9. При применении (согласно сценарию) экспертной процедуры из нескольких туров — *повторение* двух предыдущих этапов.

10. *Итоговый анализ экспертных мнений, интерпретация полученных результатов* аналитической группой РГ и *подготовка заключительного документа* ЭК для ЛПР. Форма заключения ЭК обычно задается в техническом задании. В Федеральном законе «Об экологической экспертизе» [11] требованиям к заключению ЭК посвящена обширная статья 18.

11. Официальное *окончание* деятельности ЭК и РГ, в том числе *утверждение ЛПР заключительного документа ЭК,* подготовка и утверждение научного и финансового отчетов РГ о проведении экс-

пертного исследования, оплата труда экспертов и сотрудников РГ, официальное прекращение деятельности (роспуск) ЭК и РГ.

Научный отчет РГ должен позволять восстанавливать все подробности деятельности ЭК на основе документов. В него должны быть включены все полученные от экспертов материалы и протоколы компьютерной обработки данных. Этот отчет может быть использован в суде и арбитражном суде, если заинтересованные организации и лица сочтут нужным оспорить выводы ЭК в судебном порядке.

4.6. Подбор экспертов

Разберем подробнее отдельные стадии экспертного исследования. Начнем с подбора экспертов: кадры решают все! Каковы эксперты — таково и качество заключения экспертной комиссии.

Проблема подбора экспертов — одна из наиболее сложных в теории и практике экспертных исследований. Очевидно, в качестве экспертов необходимо использовать тех людей, чьи суждения лучше всего помогут принятию адекватного решения. Но как выделить, найти, подобрать таких людей? Надо прямо сказать, что *нет методов подбора экспертов, наверняка обеспечивающих успех экспертизы.* Сейчас не будем обсуждать проблему существования различных «партий» среди экспертов и обратим внимание на иные стороны процедур подбора экспертов.

В проблеме подбора экспертов можно выделить две составляющие — *составление списка возможных экспертов и выбор из них экспертной комиссии в соответствии с компетентностью кандидатов.*

Составление списка возможных экспертов облегчается, когда рассматриваемый вид экспертизы проводится многократно. В таких ситуациях обычно ведется *реестр* возможных экспертов, например, в области государственной экологической экспертизы или судейства фигурного катания, из которого можно выбирать по различным критериям или с помощью датчика (или таблицы) псевдослучайных чисел.

Как быть, если экспертиза проводится впервые, устоявшиеся списки возможных экспертов отсутствуют? Однако и в этом случае у каждого конкретного специалиста есть некоторое представление о том, что требуется от эксперта в подобной ситуации. Для формирования списка есть полезный метод *«снежного кома».* Это — вспомогательное экспертное исследование. Название связано с ассоциацией с известной всем процедурой, когда небольшой снежок много раз поворачивается по поверхности свежевыпавшего снега. При каждом повороте на снежок налипает новый слой. В результате получается большой снежный ком.

Метод «снежного кома». В качестве затравки используется подобранная РГ небольшая (3–5 человек) группа потенциальных экспертов. В методе «снежного кома» от каждого специалиста, привлекаемого в качестве эксперта, получают определенное количество (обычно 5–10) фамилий тех, кто может быть экспертом по рассматриваемой тематике. Очевидно, некоторые из этих фамилий встречались ранее в деятельности РГ, а некоторые — новые. Каждого вновь появившегося опрашивают по той же схеме. Процесс расширения списка останавливается, когда новые фамилии практически перестают встречаться или когда список достигает необходимого размера. В результате получается достаточно обширный список возможных экспертов.

Рассмотрим условный пример. В качестве затравки РГ подобрала 5 потенциальных экспертов. Каждый из них назвал 10 новых фамилий. Всего РГ получила 50 фамилий. После исключения повторов и лиц, которые не смогут быть экспертами, в списке осталось 40%, т. е. 20 новых фамилий. На следующем туре РГ получает суммарно 200 фамилий. Пусть из них только 30% тех, которые можно добавить к списку. Это 60 человек. При их опросе получаем 600 фамилий. Если из них только 20% реально добавляется к списку, то итог этого тура — 120 фамилий. Подведем итог. В списке уже 5 + 20 + 60 + 120 = 205 фамилий. Можно остановиться, поскольку на основе этого списка, очевидно, можно сформировать ЭК (типовое число членов ЭК — от 10 до 30).

Метод *«снежного кома»* имеет и недостатки. Число туров до остановки процесса наращивания кома нельзя заранее предсказать. Нельзя априори надеяться, что в обозримой окрестности имеется достаточное число экспертов. Кроме того, ясно, что если на первом этапе все эксперты были из одного «клана», придерживались в чем-то близких взглядов или занимались сходной деятельностью, то и метод «снежного кома» даст, скорее всего, лиц из этого же «клана». Мнения и аргументы других «кланов» будут упущены.

Здесь речь идет о том, что сообщество специалистов реально разбито на группы, названные выше «кланами», и общение идет в основном внутри «кланов». Неформальная структура науки, к которой относятся «кланы», достаточно сложна для изучения. Отметим, что «кланы» обычно образуются на основе крупных формальных центров (вузов, научных институтов), научных школ [12, 13].

Компетентность экспертов. Вопрос об оценке компетентности экспертов не менее сложен. Ясно, что успешность участия в предыдущих экспертизах — хороший критерий для деятельности дегустатора, врача, судьи в спортивных соревнованиях, т. е. таких экспертов, которые участвуют в длинных сериях однотипных экспертиз. Однако наиболее интересны и важны уникальные экспертизы больших проектов, не имеющих аналогов. Использование формальных показателей экспертов (должность, ученые степень и звание, стаж, число публикаций...) в современных быстро меняющихся условиях может носить лишь вспомогательный характер, хотя подобные показатели проще всего применять.

Часто предлагают использовать методы самооценки и взаимооценки компетентности экспертов. Обсудим их, начав с метода *самооценки*, при котором эксперт сам дает информацию о том, в каких областях он компетентен, а в каких — нет. С одной стороны, кто лучше может знать возможности эксперта, чем он сам? С другой стороны, при самооценке компетентности скорее оценивается степень самоуверенности эксперта, чем его реальная компетентность. Тем более что само понятие *«компетентность»* строго не определено. Можно его уточнять, выделяя составляющие, но при этом усложняется предварительная часть деятельности ЭК.

Достаточно часто эксперт преувеличивает свою реальную компетентность. Например, большинство людей считают, что они хорошо разбираются в политике, экономике, проблемах образования и воспитания, семьи и медицины. На самом деле экспертов (и даже знающих людей) в этих областях весьма мало.

Бывают уклонения и в другую сторону, излишне критичное отношение к своим возможностям. Нам известен доцент МГУ им. М.В. Ломоносова, написавший добротный университетский учебник по математической статистике, который заявляет, что он не является специалистом по математической статистике. Видимо, он признает себя специалистом лишь в той узкой научной области, которой посвящены его последние научные статьи. Подобный гиперкритицизм по отношению к себе представляется непродуктивным. Более естественной выглядит рекомендация проф. Е.С. Вентцель: «Если вы хотите изучить какой-либо предмет, напишите по нему книгу». Действительно, при написании книги приходится разбираться в рассматриваемом вопросе и к концу составления текста становиться высококвалифицированным специалистом — экспертом.

При использовании метода *взаимооценки*, когда оценку компетентности конкретного эксперта дают другие эксперты (или кандидаты в эксперты), помимо возможности проявления личностных и групповых симпатий и антипатий, играет роль малая осведомленность экспертов о профессиональных возможностях друг друга. В современных условиях достаточно хорошее знакомство с работами и возможностями друг друга может быть лишь у специалистов, много лет (не менее 3-4) работающих совместно, в одной комнате, над одной темой. Именно про такие пары можно сказать, что они «*вместе пуд соли съели*». (По примерному расчету, если каждый рабочий день обедать вместе и солить блюда из одной солонки, пуд соли будет съеден за 3,5 года.) Однако привлечение таких пар специалистов в ЭК не очень-то целесообразно, поскольку их взгляды из-за схожести жизненного пути слишком похожи друг на друга.

Если процедура экспертного опроса предполагает непосредственное общение экспертов, необходимо учитывать еще ряд обстоятельств. Большое значение имеют их личностные (социально-психологические) качества. Так, один-единственный «*говорун*» может парализовать деятельность всей комиссии на совместном заседании. К срыву могут привести и неприязненные отношения членов комиссии, и сильно различающийся научный и должностной статус членов комиссии. В подобных случаях важно соблюдение регламента работы, разработанного РГ.

Подбор экспертов — одна из основных функций РГ, и никакие методики подбора не снимают с нее ответственности. На РГ лежит ответственность за компетентность экспертов, за их принципиальную способность решить поставленную задачу. Важным является требование к ЛПР об утверждении списка экспертов. При этом ЛПР может как добавить в комиссию отдельных экспертов, так и вычеркнуть некоторых из них — по собственным соображениям, с которыми членам РГ и ЭК знакомиться нет необходимости.

Нормативное регулирование состава экспертов. Существует ряд нормативных документов, регулирующих деятельность экспертных комиссий в тех или иных областях. Примером является Федеральный закон «Об экологической экспертизе», в котором регламентируется процедура экспертизы «намечаемой хозяйственной или иной деятельности» с целью выявления возможного вреда, который может нанести рассматриваемая деятельность окружающей природной среде. В этом законе указаны дополнительные требования к экспертам, призванные обеспечить их независимость от внешних влияний. Так, в статье 16, часть 2, сказано: «Экспертом государственной экологической экспертизы не может быть представитель заказчика документации, подлежащей государственной экологической экспертизе, или разработчика объекта государственной экологической экспертизы, гражданин, состоящий в трудовых или иных договорных отношениях с указанным заказчиком или с разработчиком объекта государственной экологической экспертизы, а также представитель юридического лица, состоящего с указанным заказчиком или с разработчиком объекта государственной экологической экспертизы в таких договорных отношениях».

Используется и принципиально иной подход к подбору экспертов, согласно которому совокупность экспертов состоит из тех, кто сам себя объявил таковым. Примерами являются разнообразные опросы, приводимые в интернете и регулярно публикуемые на сайте http://rbc.ru (РБК — РИА «РосБизнесКонсалтинг») и http://voxru.net («Глас Рунета» — служба опросов интернет-аудитории). В отличие от метода самооценки, здесь требуется и волевой импульс от эксперта — решение об участии в опросе. В случаях, когда какие-либо материалы предлагаются к обсуждению, от самовыдвинувшихся экспертов получают ответы на открытые вопросы (а не на закрытые, как в случае опросов РБК). Письма и обращения, поступающие самотеком в средства массовой информации и в государственные органы, также можно рассматривать в рамках теории экспертных оценок. Однако распределение самовыдвинувшихся экспертов по социально-экономическим группам (например, по полу и возрасту) обычно существенно отличается от того, которое имеется в обществе. Частично от этого смещения можно избавиться с помощью методов стандартизации («ремонта») выборки, разработанных в эконометрике и прикладной статистике [10, 14].

4.7. О выборе цели экспертизы

В настоящее время *не существует* общепринятой научно обоснованной классификации методов экспертных оценок и тем более —

однозначных рекомендаций по их применению. *Попытка силой утвердить одну из возможных точек зрения на классификацию методов экспертных оценок может принести лишь вред.*

Однако для рассказа о многообразии экспертных оценок необходима какая-либо рабочая классификация методов. Одну из таких возможных классификаций даем ниже, перечисляя основания, по которым делим методы экспертных оценок.

Один из основных вопросов — что именно должна представить экспертная комиссия в результате своей работы — информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения? От ответа на этот методологический вопрос зависит организация работы ЭК, и он служит первым основанием для разбиения методов.

Цель — сбор информации для ЛПР. Тогда РГ должна собрать возможно больше относящейся к делу информации, аргументов «за» и «против» определенных вариантов решений. Полезен следующий метод постепенного увеличения числа экспертов. Сначала первый эксперт приводит свои соображения по рассматриваемому вопросу. Составленный им материал передается второму эксперту, который добавляет свои аргументы. Накопленный материал поступает к следующему — третьему — эксперту, а также и к первому, который имеет возможность дополнить свою аргументацию... Процедура заканчивается, когда иссякает поток новых соображений.

Эксперты в рассматриваемом методе только поставляют информацию, аргументы «за» и «против», но не вырабатывают согласованного проекта решения. Нет никакой необходимости стремиться, чтобы экспертные мнения были согласованы между собой. Более того, наибольшую пользу приносят эксперты с мышлением, отклоняющимся от массового (среднестатистического), т. е. инакомыслящие (диссиденты). Именно от них следует ожидать наиболее оригинальных аргументов.

Цель — подготовка проекта решения для ЛПР. Основная задача при этом — разработка (формулировка, получение) коллективного мнения ЭК. Математические методы анализа экспертных оценок применяются обычно именно для решения задач, связанных с подготовкой проекта решения. При этом зачастую некритически принимают догмы согласованности и одномерности. Эти догмы «кочуют» из одной публикации в другую, поэтому целесообразно их обсудить.

Догма согласованности. Часто без всяких обоснований считается, что решение может быть принято лишь на основе согласованных мнений экспертов. Поэтому исключают из экспертной группы тех, чье мнение отличается от мнения большинства. При этом отсеиваются как неквалифицированные лица, попавшие в состав экспертной комиссии по недоразумению или по соображениям, не имеющим отношения к их профессиональному уровню, так и наиболее оригинальные мыслители, глубже проникшие в проблему, чем большинство. Следовало бы выяснить их аргументы, предоставить им возможность для обоснования их точек зрения. Вместо этого их мнением пренебрегают.

Бывает и так, что эксперты делятся на две или более групп, имеющих единые *групповые* точки зрения. Так, известен пример деления специалистов (членов Ученого совета НИИ) при оценке результатов научно-исследовательских работ на две группы: «теоретиков», явно предпочитающих НИР, в которых получены теоретические результаты, и «практиков», выбирающих те НИР, которые позволяют получать непосредственные прикладные результаты. Поэтому при голосовании с целью выявления лучшей научно-исследовательской работы за год результат зависел не от рассматриваемых работ, а от численности представителей групп «теоретиков» и «практиков», присутствующих на заседании.

Иногда заявляют, что в случае обнаружения двух или нескольких групп экспертов (вместо одной согласованной во мнениях) опрос не достиг цели. Это не так! *Цель достигнута — установлено, что единого мнения нет.* Это весьма важно. И ЛПР при принятии решений должен это учитывать. Стремление обеспечить согласованность мнений экспертов любой целой может приводить к сознательному одностороннему подбору экспертов, игнорированию всех точек зрения, кроме одной, наиболее полюбившейся рабочей группе (или даже «подсказанной» ЛПР).

Правильное решение было принято руководством НИИ после обнаружения отсутствия единомыслия среди членов Ученого совета: вместо одной премии стали присуждать две — отдельно за теоретические работы и отдельно за прикладные.

Часто не учитывают еще одно чисто математико-статистическое обстоятельство. Поскольку число экспертов обычно не превышает 20–30, то формальная статистическая согласованность мнений экспертов (установленная с помощью тех или иных критериев проверки статистических гипотез) может сочетаться с реально имеющимся разделением экспертов на группы, что делает дальнейшие расчеты не имеющими отношения к действительности. Для примера укажем на конкретные методы расчетов с помощью коэффициентов конкордации (т. е. — в переводе — согласия) на основе коэффициентов ранговой корреляции Кендалла или Спирмена. Согласно математико-статистической теории положительный результат проверки согласованности таким способом означает ни больше ни меньше как отклонение гипотезы о независимости и равномерной распределенности мнений экспертов на множестве всех ранжировок. Таким образом, проверяется нулевая гипотеза, согласно которой ранжировки, описывающие мнения экспертов, являются независимыми случайными бинарными отношениями, равномерно распределенными на множестве всех ранжировок. Отклонение этой нулевой гипотезы по дурной традиции толкуется как согласованность ответов экспертов. Мы падаем жертвой заблуждений, вытекающих из своеобразного толкования слов: проверка согласованности в указанном математико-статистическом смысле вовсе не является проверкой согласованности в смысле практики экспертных оценок. (Именно ущербность рассматриваемых математико-статистических методов анализа ранжировок привела группу специалистов к разработке нового математико-статистического аппарата для проверки согласованности — непараметрических методов, основанных на так называемых *люсианах* [10, 14] и входящих в современный раздел эконометрики — *статистику нечисловых данных*). Невозможность получения обоснованного заключения о согласованности мнений экспертов по ограниченным данным можно сопоставить с невозможностью проверки нормальности теоретического распределения в случае, когда объем выборки менее 50 (это утверждение подробно обосновано в статье [15]).

Группы экспертов с близкими мнениями можно выделить методами кластер-анализа [14].

Мнения диссидентов. С целью искусственно добиться согласованности стараются уменьшить влияние мнений экспертов-*диссидентов*, т. е. инакомыслящих по сравнению с большинством. *Жесткий* способ борьбы с диссидентами состоит в игнорировании их мнений, т. е. фактически в их исключении из состава экспертной комиссии. Отбраковка экспертов, как и отбраковка резко выделяющихся результатов наблюдений (выбросов), приводит к процедурам, имеющим плохие или неизвестные статистические свойства. Так, известна *крайняя неустойчивость* классических методов отбраковки выбросов по отношению к отклонениям от предпосылок модели (см., например, учебник [14]).

Мягкий способ борьбы с диссидентами состоит в применении *робастных (устойчивых) статистических процедур*. Простейший пример: если ответ эксперта — действительное число, то резко выделяющееся мнение диссидента сильно влияет на среднее арифметическое ответов экспертов и не влияет на их медиану. Поэтому разумно в качестве согласованного мнения рассматривать медиану. Однако при этом игнорируются (не достигают ЛПР) оценки и аргументы диссидентов. Другой пример — принятие решений при судействе в фигурном катании, когда с целью повышения устойчивости выводов жюри отбрасываются минимальная и максимальная из оценок судей.

В любом из двух способов борьбы с диссидентами ЛПР лишается информации, идущей от диссидентов, а потому может принять необоснованное решение, которое приведет к отрицательным последствиям. С другой стороны, представление ЛПР всего набора мнений снимает часть ответственности и труда по подготовке окончательного решения с комиссии экспертов и рабочей группы по проведению экспертного опроса и перекладывает эту ответственность и труд на плечи ЛПР.

Догма одномерности. В устаревшей, а иногда и в современной научно-технической, управленческой и экономической литературе распространен довольно спорный подход «квалиметрии», согласно которому объект экспертизы всегда можно оценить одним числом. Странная идея! Оценивать человека одним числом приходило в голову лишь на невольничьих рынках. Вряд ли даже самые рьяные квалиметристы рассматривают книгу или картину как эквивалент числа — ее «рыночной стоимости». Практически все реальные объекты достаточно сложны, а потому сколько-нибудь точно описать их можно лишь с помощью многих и многих чисел, а также математических объектов нечисловой природы. Жизнь, в том числе экономическая, многомерна, а не одномерна!

Вместе с тем нельзя полностью отрицать саму идею поиска обобщенных показателей качества, технического уровня, конкурентоспособности и аналогичных. Так, каждый объект можно оценивать по многим показателям качества. Например, легковой автомобиль можно оценивать по таким показателям и группам показателей:

— расход бензина на 100 км пути (в среднем);

— надежность (в том числе число отказов и средняя стоимость ремонта за год);

— безопасность эксплуатации;

— экологическая безопасность, оцениваемая по содержанию вредных веществ в выхлопных газах;

— легкость в управлении;

— маневренность (в том числе радиус поворота);

— быстрота набора заданной скорости (например, 100 км/ч) после начала движения;

— максимальная достигаемая скорость;

— длительность сохранения в салоне положительной температуры при низкой наружной температуре (например, –50 °С) и выключенном двигателе;

— эстетичность (дизайн, привлекательность и «модность» внешнего вида автомобиля и отделки салона);

— вес и т. д.

Можно ли свести оценки по этим показателям вместе? Ясно, что определяющей является конкретная ситуация, для которой выбирается автомашина. Максимально достигаемая скорость важна для гонщика, но, как нам представляется, не имеет большого практического значения для водителя рядовой частной машины, особенно в городе с суровым ограничением на максимальную скорость. Для такого водителя важнее расход бензина, маневренность и надежность. Для машин различных служб спасения и государственного управления, видимо, надежность важнее, чем для частника, а расход бензина — наоборот. Для районов Крайнего Севера важна теплоизоляция салона, а для центральных районов — нет. И т. д.

Таким образом, важна конкретная (узкая) постановка задачи перед экспертами. Но такой постановки зачастую нет. А тогда «игры» по разработке обобщенного показателя качества — например, в виде линейной функции от перечисленных переменных — не могут дать объективных выводов. Альтернативой единственному обобщенному показателю является математический аппарат типа *многокритериальной оптимизации* — множества Парето и т. д.

В некоторых случаях все-таки можно глобально сравнить объекты — например, с помощью тех же экспертов получить упорядочение рассматриваемых объектов — изделий или проектов. Тогда можно ***подобрать*** (рассчитать) коэффициенты при отдельных показателях так, чтобы *упорядочение с помощью линейной функции возможно точнее соответствовало глобальному упорядочению* (например, найти эти коэффициенты методом наименьших квадратов). В подобных случаях ***не следует*** оценивать указанные коэффициенты с помощью экспертов. Эта простая идея до сих пор не стала очевидной для отдельных составителей методик по проведению экспертных опросов и анализу их результатов. Они упорно стараются заставить экспертов делать то, что они *качественно* выполнить *не в состоянии*, — указывать веса, с которыми отдельные показатели качества должны входить в итоговый обобщенный показатель.

Эксперты обычно могут сравнить объекты или проекты в целом, но не могут вычленить вклад отдельных факторов. *Раз организаторы опроса спрашивают, эксперты отвечают,* но эти ответы не несут в себе надежной информации о реальности...

4.8. Основания для классификации экспертных методов

Первому основанию — **цели экспертизы** — посвящен предыдущий раздел. Экспертные методы делятся на два класса в соответствии с ответом на вопрос: «Что именно должна представить экспертная комиссия в результате своей работы — информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения?»

Рассмотрим еще четыре основания.

Число туров. Второе основание классификации экспертных процедур — число туров. Экспертизы могут включать один тур, некоторое фиксированное число туров (два, три, ...) или неопределенное число туров.

Экспертиза в один тур предполагает, что эксперты не обмениваются информацией, поскольку не общаются друг с другом. Технология такой экспертизы напоминает технологии маркетинговых и социологических выборочных обследований. Это наиболее быстрая и дешевая технология, но и в наименьшей степени использующая творческие способности экспертов, а потому дающая наименьшие полезные результаты.

Наличие нескольких туров предполагает, что эксперты получают информацию друг от друга, обрабатывают ее, получают новое знание и в соответствии с ним корректируют свои выводы. Чем больше туров, тем более тщательным является анализ ситуации. Эксперты при этом обычно много раз возвращаются к рассмотрению предмета экспертизы. Но одновременно увеличивается общее время на экспертизу и возрастает ее стоимость.

Наибольшие сложности вызывают процедуры с неопределенным заранее числом туров, например «снежный ком». Часто задают максимально возможное число туров, и тогда неопределенность сводится к тому, придется ли проводить это максимальное число туров или удастся ограничиться меньшим числом.

Порядок вовлечения экспертов. Можно уменьшить расходы, вводя в экспертизу не всех экспертов сразу, а постепенно. Например, если цель состоит в сборе аргументов «за» и «против», то первоначальный перечень аргументов может быть составлен одним экспертом. Второй добавит к нему свои аргументы. Суммарный материал поступит к первому и третьему, которые внесут свои аргументы и контраргументы. И так далее — добавляется по одному эксперту на каждый новый тур.

Итак, экспертные процедуры можно классифицировать на основании того, как эксперты вовлекаются в работу — одновременно или последовательно. Первый вариант — более быстрый, но и более затратный (дорогой), второй — дешевле, но дольше.

Организация общения экспертов. Четвертое основание классификации экспертных процедур — способ организации общения экспертов. Рассмотрим достоинства и недостатки каждого из элементов шкалы: отсутствие общения — заочное анонимное общение — заочное общение без анонимности — очное общение с ограничениями — очное общение без ограничений.

При отсутствии общения эксперт высказывает свое мнение, ничего не зная о других экспертах и об их мнениях. Он полностью независим, что и хорошо, и плохо. Обычно такая ситуация соответствует однотуровой экспертизе.

Заочное анонимное общение, например, как в методе Дельфи, означает, что эксперт знакомится с мнениями и аргументами других экспертов, но не знает, кто именно высказал то или иное положение. Следовательно, в экспертизе должно быть предусмотрено хотя бы два тура.

Заочное общение без анонимности соответствует, например, общению по Интернету. Все варианты заочной экспертизы хороши тем, что нет необходимости собирать экспертов вместе, следовательно, находить для этого удобное время и место. В будущем с распространением телеконференций грань между очным и заочным общением экспертов начнет стираться.

Заочное общение без анонимности соответствует также многим реальным процедурам принятия управленческих решений. Координация действий организаций и менеджеров с помощью этого типа общения происходит и при подготовке документов — планов, приказов, предложений, направляемых в другие организации, ответов на распоряжения и запросы властей и др. Управленческие решения обычно оформляются в виде подобных документов.

Обычно один из сотрудников — назовем его Исполнителем — готовит первоначальный вариант документа, который размножается и рассылается на отзыв заинтересованным в нем менеджерам, а иногда и в другие организации. Исполнитель составляет сводку отзывов, с одними из замечаний соглашается, против других высказывает возражения. Затем собирают так называемое согласительное совещание, на которое приглашают всех тех, с чьим мнением Исполнитель не согласен. В результате дискуссии по ряду позиций достигается компромисс, и возражения снимаются. Окончательное решение по проекту документа с учетом оставшихся возражений принимает ЛПР, например генеральный директор или Совет директоров, т. е. высшая инстанция в данной организации. Именно такова процедура подготовки законов РФ, государственных стандартов и иных ответственных документов.

Во многих случаях эта процедура упрощается и отзывы заменяются *визированием*, при котором свое согласие менеджеры выражают, накладывая на документ *визу*, т. е. расписываясь (иногда добавляя несколько слов по затрагиваемой проблеме). Например, подготовленное для отправки в другую организацию письмо или приказ по организации визируют руководители нескольких отделов, и генеральный директор подписывает его от имени фирмы, не вникая в суть (поскольку каждый день он подписывает десятки писем и приказов, то вникать некогда). Адресату уходит письмо, на обратной стороне которого указаны фамилия и телефон Исполнителя (поскольку адресат тоже хорошо знаком с процедурой подготовки документов, он понимает, что по конкретным вопросам надо обращаться к Исполнителю, а не к генеральному директору). В архиве фирмы остается письмо с визами, так что в случае необходимости легко выяснить, кто составил и одобрил документ.

Как ясно из сказанного выше, заочные экспертизы часто используются совместно с очными.

При очных экспертизах эксперты говорят, а не пишут, как при заочных, и потому успевают за то же потраченное время сообщить существенно больше. *Очная экспертиза с ограничениями* весьма распространена. Это — собрание, идущее по фиксированному регламенту. Примером является военный совет в императорской русской армии, когда эксперты (офицеры и генералы) высказывались в фиксированном порядке от младшего (по чину и должности) к старшему. Другой пример — разработка и принятие решений в Государственной думе Российской Федерации в соответствии с регламентом, определяющим последовательность и продолжительность выступлений на заседаниях комиссий, комитетов, других структур, на пленарных заседаниях. Вспомним также технологию «мозгового штурма».

Наконец, очная экспертиза без ограничений — это свободная дискуссия.

Все очные экспертизы имеют недостатки, связанные с возможностями отрицательного влияния на их проведение социально-психологических свойств и клановых (партийных) пристрастий участников, а также неравенства их профессионального, должностного, научного статусов. Представьте себе, что соберутся вместе 5 лейтенантов и 3 генерала. Независимо от того, какая информация имеется у того или иного участника встречи, ход ее предсказать нетрудно: генералы будут беседовать, а лейтенанты — помалкивать. При этом вполне очевидно, что лейтенанты получили образование позже генералов, а потому обладают полезной информацией, которой нет у генералов.

Веса экспертов. Пятое основание классификации экспертных процедур — по способам введения весов для мнений экспертов. Простейший способ — все эксперты равноправны, при голосованиях по отдельным положениям разрабатываемого решения имеют по одному голосу.

Часто вводят понятия решающего голоса и совещательного голоса. Например, при защите дипломного проекта члены Государственной аттестационной комиссии (ГАК) имеют решающие голоса, а все остальные участники заседания — совещательные. В Федеральном законе «Об экологической экспертизе» (1995) подробно расписано, представители каких организаций и структур управления могут присутствовать на заседании экспертной комиссии государственной экологической экспертизы с правом совещательного голоса.

В регламент принятия решений иногда включают положение, согласно которому при делении голосов ровно пополам принимается мнение той половины, к которой относится председатель ЭК. Это означает, что вес голоса председателя на бесконечно малую величину больше веса рядового эксперта. Впрочем, иногда председателю дают два голоса.

При голосованиях на собраниях акционеров вес каждого эксперта (участника заседания) определяется числом акций, которыми он распоряжается.

Комбинация различных видов экспертизы. Реальные экспертизы часто представляют собой комбинации различных описанных выше типов экспертиз. В качестве примера рассмотрим защиту студентом дипломного проекта. Сначала идет многотуровая очная экспертиза, проводимая научным руководителем и консультантами, в результате студент подготавливает проект к защите. Затем два эксперта работают заочно — это автор отзыва сторонней организации и заведующий кафедрой, допускающий работу к защите. Обратите внимание на различие задач этих экспертов и объемов выполняемой ими работы — один пишет подробный отзыв, второй росписью на титульном листе проекта разрешает его защиту. Наконец — очная экспертиза без ограничений (для членов ГАК). Дипломный проект оценивается коллегиально, по большинству голосов, при этом один из экспертов (научный руководитель) знает работу подробно, а остальные — в основном лишь по докладу. Мнения экспертов учитываются с весами, а именно, мнения членов ГАК — с весом 1, мнения всех остальных — с весом 0 (совещательный голос). Таким образом, имеем сочетание многотуровой и однотуровой, заочных и очных экспертиз. Подобные сочетания характерны для многих реально проводящихся экспертиз.

4.9. Интуиция эксперта и компьютер

Обсудим две, казалось бы, далекие друг от друга, но на самом деле тесно связанные между собой темы — роль интуиции эксперта в экспертизе и применение вычислительной техники в технологиях экспертных исследований.

Интуиция эксперта. Примером хорошего эксперта служит врач, чьи диагнозы чаще, чем у его коллег, оправдываются при вскрытии. Дело в том, что только посмертное вскрытие позволяет патологоанатому дать достоверное заключение о том, чем болел пациент и правильно ли его лечили. Хотя это достоверное заключение уже не может принести пользы пациенту, его можно применить для оценки профессиональных возможностей врача и корректировки лечебных технологий. Причем, чем лучше врач, тем дольше придется ждать подтверждения его высокого профессионализма.

С целью создания систем компьютерной диагностики математики пытались выяснить, как работают выдающиеся врачи [16]. Для этого их просили описать используемые ими в лечебной работе методы умозаключений. Опытные практикующие врачи приводили примерно те же формулировки, что и авторы медицинских учебников. И это вполне естественно. Однако при попытках применить сформулированные таким путем правила для диагностики вновь поступающих пациентов качество принимаемых врачебных решений резко ухудшалось — вплоть до уровня рядового выпускника мединститута. Таким образом, оказалось, что выдающиеся врачи не в состоянии описать, как именно они работают. При попытке вербализации процесса диагностики интуиция исчезала, а вместе с ней — и отличие высококвалифицированного эксперта от рядового специалиста.

Важную роль интуиции в работе эксперта трудно, а точнее, практически невозможно промоделировать математически. Как следствие, нельзя и мечтать о замене экспертных оценок компьютерными расчетами. Экспертиза — это творчество.

Роль интуиции весьма велика в различных творческих профессиях. Например, математическое творчество, по свидетельству выдающегося французского математика Ж. Адамара, основано на интуиции [17].

Экспертные оценки и экспертные системы. Хотя названия этих двух научно-практических дисциплин похожи, различие между ними колоссально. Теория экспертных оценок — это наука о методах сбора и анализа мнений людей (экспертов), опирающихся на свою интуицию. Экспертная система — это программа для компьютера, которая оперирует со знаниями в определенной предметной области с целью выработки практических рекомендаций для решения возникших проблем [18]. Значит, в экспертных системах не участвуют живые люди, есть только ранее полученные знания — результат прошлой деятельности специалистов. При формализации знаний невозможно учесть интуицию экспертов. Однако компьютерной обработке может быть подвергнут огромный объем знаний, что человек сделать не в состоянии.

Сравнительные возможности живых экспертов и экспертных систем видны при сопоставлении шахматистов и шахматных программ. Люди опираются на интуицию, а компьютеры — на расчеты. Результат известен — за пятьдесят лет (вторую половину XX в.) компьютеры достигли уровня гроссмейстеров.

Однако речь идет об анализе довольно простой игры — шахматные правила изложены на нескольких страницах, и они строго выполняются. Реальные ситуации гораздо сложнее, и самое интересное — правила игры могут меняться.

В настоящее время экспертные системы, как и другие достижения искусственного интеллекта, — помощники человека. Например, на рыболовном судне или в отдаленном поселении целесообразно иметь экспертную систему неотложной медицинской помощи. Она позволит сохранить жизнь пострадавшему, пока не появится врач. Врачу она тоже поможет — для различных справок. Но лечить будет именно врач.

В обозримом будущем та или иная рутинная работа будет передаваться компьютерным системам. Например, составление бухгалтерского баланса. Но за человеком всегда останется целеполагание. Компьютер, в отличие от человека, не может знать, чего он хочет.

Эксперт и компьютер. Обсудим разные варианты взаимодействия живых экспертов и компьютерных систем.

1. Эксперту нужна различная справочная информация, и наиболее быстро он может ее получить с помощью компьютера. Так, всемирная сеть Интернет — хороший помощник эксперта. К сожалению, в сети циркулирует масса ошибочных сведений. Но ведь и информация, полученная из книг или от людей, не всегда достоверна.

2. Быстрая электронная связь с организаторами экспертизы, с другими экспертами, возможность удаленного общения (чаты, телеконференции и другие формы) резко повышают эффективность экспертной работы.

3. Автоматизированное рабочее место (АРМ) эксперта (например, АРМ «МАТЭК» (математика в экспертизе) [19, 20]) обеспечивает как сбор экспертной информации, так и ее анализ с помощью разнообразных математических методов.

4. Экспертные процедуры могут многократно использоваться на различных этапах процесса принятия решений, например, для оценки значений признаков, описывающих объекты, или для оценки коэффи-

циентов важности (весомости) самих признаков. При этом процесс принятия решений опирается на ту или иную форму компьютерной поддержки.

5. Интегрированные системы принятия решений включают в себя разнообразные базы данных и знаний, автоматизированные места лиц, принимающих решения, экспертов и сотрудников группы сопровождения, блоки имитационных, экономико-математических и иных компьютерных моделей (в том числе блоки соответствующих экспертных систем). Такие системы действуют в составе аналитических центров крупных организационных структур, например в Администрации Президента РФ, Центре управления полетами космических аппаратов, в штабах высокого уровня Вооруженных Сил или в руководящих структурах транснациональных корпораций.

В качестве примера рассмотрим подробнее АРМ «МАТЭК» (математика в экспертизе) [19, 20].

Автоматизированное рабочее место «МАТЭК» (МАТематические методы в ЭКспертных оценках). Разработано и применяется весьма большое число методов (и особенно их разновидностей) организации и проведения экспертных исследований. Для решения конкретной задачи можно использовать, как правило, не один, а много методов, и выбор наиболее подходящего из них лежит на организаторах экспертизы. (Попытки стандартизовать правила принятия подобных решений в настоящее время рассматриваются как нецелесообразные — таков один из результатов развития стандартизации в нашей стране и в мире в последние десятилетия, начиная с 70-х гг.) АРМ «МАТЭК» предоставляет организаторам экспертизы большие возможности для выбора тех или иных методов планирования, организации, проведения экспертизы, анализа экспертных оценок, обеспечивает необходимую компьютерную поддержку в проведении экспертного исследования.

АРМ «МАТЭК» предназначено для подготовки и проведения экспертизы по определенной теме. С помощью АРМ «МАТЭК» можно автоматизировать процесс подбора экспертов, работу комиссии экспертов и анализ экспертных мнений, а также подготовку опросных листов, бланков и всей отчетной документации.

Работа на АРМ в соответствии с методологией работы [9] состоит из двух частей:

А. Подготовка экспертизы.

В. Проведение экспертизы.

Этап **А** подготовки экспертизы включает в себя ввод всей информации, необходимой для проведения экспертизы. Итогом этого этапа являются два документа: «Техническое задание» (ТЗ) и «Сценарий».

Рассмотрим этап **А** подробнее. Сначала ЛПР должен сформулировать цель экспертизы, сформировать руководство РГ.

Далее к работе приступает РГ. Ее руководитель должен ввести данные для формирования документа ТЗ. Затем собираются данные для компоновки документа «Сценарий».

РГ может включать в себя Руководителя, Группу обработки, Группу связи и Интервьюеров.

Данные для документа ТЗ следующие: основание для проведения экспертизы, задачи экспертных опросов, сформулированные в соответствии с целью экспертизы, требования к ЭК, опросному листу, сроки выполнения экспертизы и порядок контроля за ними, финансовое обеспечение проекта.

В зависимости от того, введены или нет те или иные данные для ТЗ, они соответственно будут или не будут включены в документ ТЗ. Последний можно просмотреть на экране и распечатать.

Данные для документа «Сценарий» следующие: вводный текст (в этом тексте должна содержаться собственно последовательность действий при проведении экспертизы), календарный план (КП), список используемых методов анализа экспертных мнений (ЭМ). Как и при формировании ТЗ, «Сценарий» может иметь разную структуру в зависимости от того, какие пункты будут в него включены. Как приложение к «Сценарию» могут быть использованы примеры бланков опросных листов, анкеты «Согласие» (для выявления согласия экспертов участвовать в экспертизе), анкеты «Снежный ком», «Взаимооценка» (если соответствующие этапы включены в КП). Для этих бланков также требуется ввести оповещение (либо выбрать стандартное). Документ «Сценарий» можно просмотреть на экране и распечатать.

При формировании «Сценария» будет сформирован опросный лист экспертизы. Опросный лист состоит из оповещения (стандартного или оригинального — по выбору РГ) и собственно вопросов. Вопросы группируются по задачам из ТЗ. При формулировке вопросов учитывается список методов обработки ответов. Точнее, пользователь, сформулировав вопрос, должен точно знать формат ответа. Для каждого формата ответа в АРМ предусмотрен список методов обработки ответов (краткое описание каждого из них можно будет просмотреть при выборе метода). Если пользователя не устраивает ни один из этих методов, он должен будет переформулировать вопрос (т. е. изменить формат ответа) так, чтобы в списке соответствующих методов оказался подходящий ему. Тем самым при формировании опросного листа будет одновременно сформулирован список используемых методов анализа экспертных мнений (ЭМ).

Этап **В** проведения экспертизы недоступен до тех пор, пока не будет завершен этап подготовки экспертизы. После того как подготовка создана, можно запустить или открыть проведение экспертизы. Тем самым возможно проведение нескольких экспертиз с одной и той же подготовкой (для каждой экспертизы выделяется собственная, идентифицируемая по названию экспертизы база данных).

На этапе проведения экспертизы формируется ЭК, проводится сбор и анализ ЭМ, формируется отчет и заключение для ЛПР.

Формирование ЭК — многоступенчатый процесс. Сначала член РГ (руководитель) в соответствии с информацией об экспертах из БДЭ (базы данных об экспертах) может отобрать подходящих кандидатов в ЭК. Далее с помощью анкеты «Согласие» из этого списка отбираются согласившиеся быть членами ЭК. Два последних шага могут проводиться или нет в зависимости от того, включены ли они в КП. Это этапы «Снежный ком» и «Взаимооценка».

После того как сформирован ЭК, можно проводить сбор экспертных мнений (ЭМ). Это осуществляется с помощью бланка вопросника. ЭМ будут храниться так, чтобы доступ к ним был удобен (то есть по любому эксперту и любому вопросу можно было получить ответ и т. д.). Анализ ЭМ по каждому вопросу проводится методом, выбранным пользователем АРМ (руководителем РГ) на этапе подготовки экспертизы для этого вопроса.

По всем предыдущим этапам формируются отчеты, из которых в результате получается общий отчет о проведении экспертизы. В соответствии с задачами из ТЗ формируется заключение для ЛПР.

В соответствии с КП ведется контроль за сроками проведения экспертизы.

Ведется протокол экспертизы, т. е. при выходе из системы фиксируется текущее состояние этапа проведения экспертизы, и при открытии данной экспертизы происходит возврат именно на тот этап экспертизы, на котором произошел выход из системы. (На этапе подготовки экспертизы протокол не ведется.)

Разграничены права доступа к БДЭ (база данных экспертов), ЭМ и результатам обработки ЭМ.

На этом заканчивается «гуманитарная» часть обсуждения теории и практики экспертных оценок. Конкретные методы сбора и анализа экспертной информации рассмотрены в дальнейших главах учебника с привлечением современного математического аппарата.

Литература

1. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, переработанное и дополненное. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

2. *Сидельников Ю.В.* Технология экспертного прогнозирования: Учебное пособие. — Изд. 2-е, исправл. — М.: Доброе слово, 2004. — 284 с.

3. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

4. *Винер Н.* Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. — Второе издание. — М.: Советское радио, 1968. — 326 с.

5. *Винер Н.* Кибернетика и общество. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. — 200 с.

6. *Моисеев Н.Н.* Люди и кибернетика. — М.: Молодая гвардия, 1984. — 224 с.

7. *Литвак Б.Г.* Экспертиза в России // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2000. — Т. 66. — № 7. — С. 61–66.

8. *Литвак Б.Г.* Экспертные оценки и принятие решений. — М.: Патент, 1996. — 271 с.

9. *Орлов А.И.* Экспертные оценки // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1996. — Т. 64. — № 1. — С. 54–60.

10. *Орлов А.И.* Статистика нечисловых данных — центральная часть современной прикладной статистики // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 156. — С. 111–142.

11. Федеральный закон «Об экологической экспертизе» от 23.11.1995 № 174-ФЗ // Собрание законодательства Российской Федерации. — № 48. — 27.11.95. — Ст. 4556; Российская газета. — 1995. — 30 нояб.

12. *Лойко В.И., Луценко Е.В., Орлов А.И.* Современные подходы в наукометрии: Монография / Под науч. ред. проф. С.Г. Фалько. — Краснодар: КубГАУ, 2017. — 532 с.

13. Социально-психологические проблемы науки: ученый и научный коллектив / Под ред. М.Г. Ярошевского. — М.: Наука, 1973. — 252 с.

14. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: Учебник: в 3 ч. Ч. 2: Экспертные оценки. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 486 с.

15. *Селезнев В.Д., Денисов К.С.* Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок // Заводская лаборатория. — 2005. — Т. 71. — № 1. — С. 68–73.

16. *Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А.* Очерки о совместной работе математиков и врачей. — 2-е изд., доп. — М.: УРСС, 2004. — 320 с.

17. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: УРСС, 2001. — 128 с.

18. Статические и динамические экспертные системы: Учебное пособие / Э.В. Попов, И.Б. Фоминых, Е.Б. Кисель, М.Д. Шапот. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 320 с.

19. Методология проведения экспертных исследований, реализованная в АРМ «МАТЭК» (МАТематика в ЭКспертизе) / А.И. Орлов, В.Н. Жихарев, В.А. Цупин, В.А. Васюкевич // Управление большими системами: Материалы Международной научно-практической конференция (22–26 сентября 1997 г., Москва, Россия). — М.: СИНТЕГ, 1997. — С. 240–240.

20. Экспертные оценки: современное состояние и перспективы использования в задачах экологического страхования / В.Г. Горский, А.И. Орлов, В.Н. Жихарев, В.А. Цупин, А.Н. Степочкин, В.А. Васюкевич // Труды Второй Всероссийской конференции «Теория и практика экологического страхования». — М.: Ин-т проблем рынка РАН, 1996. — С. 20–23.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры индивидуальных экспертных оценок.
2. Почему необходима формализованная карта оценки объекта экспертизы?
3. Приведите примеры коллективных экспертных оценок.
4. Расскажите о задачах выбора вариантов с помощью экспертов.

5. Почему большое внимание уделяют регламенту проведения экспертных исследований?

6. Опишите метод Дельфи экспертного прогнозирования.

7. Расскажите о методе сценариев.

8. Что такое «мозговой штурм»?

9. В каких конкретных областях используют методы экспертных оценок?

10. Расскажите об основных стадиях экспертного опроса.

11. Почему сценарий проведения сбора и анализа экспертных мнений необходимо разрабатывать до подбора экспертов?

12. Что такое «метод снежного кома»?

13. Как выбор цели экспертизы влияет на экспертные технологии?

14. Какова роль диссидентов в комиссии экспертов в зависимости от регламента сбора и анализа экспертных мнений?

15. По каким основаниям классифицируют экспертные методы?

16. Чем отличаются экспертные оценки и экспертные системы?

17. Какова роль компьютеров в экспертных технологиях?

Темы заданий
на проведение исследовательских работ

1. Индивидуальное экспертное оценивание (на примере работы преподавателя).

2. Варианты коллективного экспертного оценивания в медицине.

3. Робастное оценивание в экспертизе.

4. Экспертные технологии распределения финансирования.

5. Технологии экспертного прогнозирования.

6. Метод сценариев и экспертная оценка рисков в инвестиционном менеджменте.

7. Экспертные технологии в технико-экономическом анализе.

8. Статистика нечисловых данных в оценочных экспертизах.

9. Управленческие экспертизы в контроллинге.

10. Роль ЛПР в организации экспертного исследования.

11. Внутренняя структура рабочей группы экспертного исследования.

12. Типовые сценарии проведения сбора и анализа экспертных мнений.

13. Требования к экспертам, зафиксированные в действующем законодательстве.

14. Уголовная, административная, материальная и гражданско-правовая ответственность экспертов.

15. Сравнительный анализ методов самооценки и взаимооценки.

16. Догма согласованности.

17. Догма одномерности.

18. Подходы к выбору способа организации общения экспертов.

19. Роль интуиции в экспертизе.

20. Проектирование автоматизированных рабочих мест экспертов и членов РГ (группы сопровождения).

Глава 5. МЕТОДЫ СРЕДНИХ РАНГОВ

Познакомимся с часто используемым видом экспертных оценок — методами средних рангов. Разберем метод средних арифметических рангов, метод медиан рангов и метод согласования ранжировок (упорядочений), полученных с помощью нескольких экспертных процедур.

5.1. Экспертные ранжировки

Современная теория измерений и экспертные оценки. Как проводить анализ собранных рабочей группой ответов экспертов? Для более углубленного рассмотрения проблем экспертных оценок понадобятся некоторые понятия *теории измерений* (см. ниже главу 6), служащей основой теории экспертных оценок, прежде всего той ее части, которая связана с анализом заключений экспертов, выраженных в качественном (а не в количественном) виде. Теория измерений интересует нас, в частности, в связи с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей (их называют также рейтингами).

Получаемые от экспертов мнения часто выражены в *порядковой шкале*, т. е. эксперт может сказать (и обосновать): что определенный тип продукции будет более привлекателен для потребителей, чем иные; что один показатель качества продукции важнее, чем другой; первый технологический объект опаснее, чем второй, и т. д. Но он не в состоянии сказать, *во сколько раз* или *на сколько* более важен, соответственно, более опасен. Поэтому экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т. е. расположить их в порядке возрастания (или, точнее, неубывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики.

Ранжировки определяются и изучаются с помощью рангов. Ранг — это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду. Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, ..., но весьма важно то, что с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя 1 + 2 = 3, но нельзя утверждать, что для объекта, стоящего на третьем месте в упорядочении (в другой терминологии — ранжировке), интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания — оценки достижений спортсменов. Разве можно сказать, что спортсмен, занявший третье место, достиг того же, что и спортсмены, занявшие первое и второе места, вместе взятые? Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не обычная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Эта другая теория и есть теория измерений (ТИ). Основы ТИ рассмотрены в главе 6.

Рассмотрим в качестве примера применения результатов ТИ, касающихся средних величин в порядковой шкале, один сюжет, связанный с ранжировками и рейтингами.

Сравнение на основе средних баллов. В настоящее время распространены экспертные, маркетинговые, квалиметрические, социологические и иные опросы, в которых используются балльные оценки. В таких исследованиях опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам. Или же заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т. п. Затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их *как интегральные* (*т. е. обобщенные, итоговые*) *оценки,* выставленные объектам экспертизы коллективом опрошенных экспертов. Какими формулами пользоваться для вычисления средних величин? Ведь средних величин существует, как мы знаем, весьма много разных видов.

По традиции обычно применяют *среднее арифметическое*. Специалисты по теории измерений уже с 1974 г. [1] знают, что *такой способ некорректен,* поскольку баллы обычно измерены в *порядковой* шкале. Обоснованным является использование медиан в качестве средних баллов. Однако полностью *игнорировать средние арифметические нецелесообразно из-за их привычности и распространенности.* Поэтому ***представляется рациональным использовать одновременно оба метода — и метод средних арифметических баллов, и методов медиан баллов.*** Такая рекомендация находится в согласии с общенаучной *концепцией устойчивости* [1], рекомендующей применять различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах. Такие выводы, видимо, соответствуют реальной действительности, в то время как заключения, меняющиеся от метода к методу, зависят от субъективизма исследователя, выбирающего метод обработки исходных экспертных оценок.

Пример сравнения восьми проектов. Рассмотрим на протяжении настоящей главы конкретный пример применения только что сформулированного подхода. В качестве баллов будем использовать ранги (т. е. места в упорядоченном ряду), присвоенные проектам в соответствии с их упорядочениями, полученными в результате работы экспертов.

В рассматриваемом далее примере по заданию руководства фирмы анализировались восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Они обозначены: Д, Л, М-К, Б, Г-Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все проекты были направлены 12 экспертам, включенным в экспертную комиссию, организованную по решению Правления фирмы. В табл. 5.1 приведены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов.

Таблица 5.1

Ранги 8 проектов по степени привлекательности для включения в план стратегического развития фирмы

№ эксперта	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

Примечание. Эксперт № 4 считает, что проекты М-К и Б равноценны, но уступают лишь одному проекту — проекту Сол. Поэтому проекты М-К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить ранги 2 и 5. Поскольку они равноценны, то получают средний ранг (2 + 3) / 2 = 5 / 2 = 2,5. Такой средний ранг, равный среднему арифметическому номеров мест, занимаемых равноценными объектами, называют связанным.

Ранги присваивались в соответствии с представлениями экспертов о целесообразности включения проектов в стратегический план фирмы. Эксперт присваивает ранг 1 самому лучшему проекту, который обязательно надо реализовать. Ранг 2 получает от эксперта второй по привлекательности проект, ... , наконец, ранг 8 — наиболее сомнительный проект, который реализовывать стоит лишь в последнюю очередь.

Анализируя результаты работы экспертов (т. е. упомянутую таблицу), члены аналитического подразделения рабочей группы, анализировавшие ответы экспертов по заданию правления фирмы, вынуждены констатировать, что полного согласия между экспертами нет, а потому данные, приведенные в табл. 5.1, следует подвергнуть более тщательному математическому анализу.

5.2. Методы средних арифметических рангов и медиан рангов

Метод средних арифметических рангов. Сначала для получения группового мнения экспертов был применен метод средних арифметических рангов. Для этого подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (см. табл. 5.1). Затем эта сумма разделена на число экспертов, в результате рассчитан средний арифметический ранг (именно эта операция дала название методу). По средним рангам строится итоговая ранжировка (в другой терминологии — упорядочение), исходя из принципа — чем меньше средний ранг, тем лучше проект. Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б — следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1. Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М-К — и он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов, они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов), а потому они должны бы стоять на 3-м и 4-м местах и получают средний балл $(3 + 4) / 2 = 3{,}5$. Дальнейшие результаты приведены в табл. 5.2.

Итак, ранжировка по суммам рангов (или, что то же самое, по средним арифметическим рангам) имеет вид:

$$\text{Б} < \text{М-К} < \{\text{Л, Сол}\} < \text{Д} < \text{Стеф} < \text{Г-Б} < \text{К}. \qquad (5.1)$$

Таблица 5.2

Результаты расчетов по методу средних арифметических и методу медиан для рангов, приведенных в табл. 5.1

	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
Сумма рангов	60	39	37,5	31.5	76	39	64	85
Среднее арифметическое рангов	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Итоговый ранг по среднему арифметическому	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8
Медианы рангов	5	3	3	2,25	7,5	4	6	7
Итоговый ранг по медианам	5	2,5	2,5	1	8	4	6	7

Здесь запись типа «А < Б» означает: проект А предшествует проекту Б (т. е. проект А лучше проекта Б). Поскольку проекты Л и Сол получили одинаковую сумму баллов, то по рассматриваемому методу они эквивалентны, а потому объединены в группу (в фигурных скобках). В терминологии математической статистики ранжировка (5.1) имеет одну связь.

Метод медиан рангов. Значит, наука сказала свое слово, итог расчетов — ранжировка (5.1), и на ее основе предстоит принимать решение? Так был поставлен вопрос при обсуждении полученных результатов на заседании правления фирмы. Но тут наиболее знакомый с современной эконометрикой член правления вспомнил то, о чем шла речь выше. Он понял, что ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических. Надо использовать метод медиан рангов (см. главу 6).

Что это значит? Надо взять ответы экспертов, соответствующие одному из проектов, например проекту Д. Это ранги 5, 5, 1, 6, 8, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 1. Затем их надо расположить в порядке неубывания (проще было бы сказать — «в порядке возрастания», но поскольку некоторые ответы совпадают, приходится использовать несколько непривычный термин «неубывание»). Получим последовательность: 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8. На центральных местах — шестом и седьмом — стоят 5 и 5. Следовательно, медиана равна их среднему арифметическому, т. е. 5.

Медианы совокупностей из 12 рангов, соответствующих определенным проектам, приведены в предпоследней строке табл. 5.2. (При этом медианы вычислены по обычным правилам статистики — как среднее арифметическое центральных членов вариационного ряда. Если бы число экспертов было нечетным, в качестве медианы надо было бы взять центральный член вариационного ряда.) Итоговое упорядочение комиссии экспертов по методу медиан приведено в последней строке табл. 5.2. Ранжировка (т. е. упорядочение — итоговое мнение комиссии экспертов) по медианам имеет вид:

$$Б < \{М\text{-}К, Л\} < Сол < Д < Стеф < К < Г\text{-}Б . \qquad (5.2)$$

Поскольку проекты Л и М-К имеют одинаковые медианы баллов, то по рассматриваемому методу ранжирования они эквивалентны, а потому объединены в группу (кластер), т. е. с точки зрения математической статистики ранжировка (5.2) имеет одну связь.

Сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан. Сравнение ранжировок (5.1) и (5.2) показывает их близость (похожесть). Можно принять, что проекты М-К, Л, Сол упорядочены как М-К < Л < Сол, но из-за погрешностей экспертных оценок в одном методе признаны равноценными проекты Л и Сол (ранжировка (5.1)), а в другом — проекты М-К и Л (ранжировка (5.2)). Существенным является только расхождение, касающееся упорядочения проектов К и Г-Б: в ранжировке (5.1) Г-Б < К, а в ранжировке (5.2), наоборот, К < Г-Б. Однако эти проекты — наименее привлекательные из восьми рассматриваемых, и при выборе наиболее привлекательных проектов для дальнейшего обсуждения и использования на указанное расхождение можно не обращать внимания.

Рассмотренный пример демонстрирует сходство и различие ранжировок, полученных по методу средних арифметических рангов и по методу медиан, а также пользу от их совместного применения.

5.3. Метод согласования кластеризованных ранжировок

Только что проведенное сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан оставляет ощущение недостаточно строгого подхода. Обсудим проблему согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и разберем математический алгоритм такого согласования.

Постановка задачи. Проблема состоит в выделении общего нестрогого порядка из набора кластеризованных ранжировок (на статистическом языке — ранжировок со связями). Этот набор может отражать мнения нескольких экспертов или быть получен при обработке мнений экспертов различными методами. *Предлагается применять метод согласования кластеризованных ранжировок, позволяющий «загнать» противоречия внутрь специальным образом построенных кластеров (групп), в то время как упорядочение кластеров соответствует одновременно всем исходным упорядочениям.*

В различных прикладных областях возникает необходимость анализа нескольких кластеризованных ранжировок объектов. К таким областям относятся инженерный бизнес, менеджмент, экономика, социология, экология, экология, прогнозирование, научные и технические исследования и т. д.; особенно те их разделы, что связаны с экспертными оценками (см., например, [2, 3]). В качестве объектов могут выступать образцы продукции, технологии, математические модели, проекты, кандидаты на должность и др. Кластеризованные ранжировки могут быть получены как с помощью экспертов, так и объективным путем, например, при сопоставлении математических моделей с экспериментальными данными с помощью того или иного критерия качества. Описанный ниже метод разработан в связи с проблемами химической безопасности биосферы и экологического страхования [4].

В настоящем пункте рассматривается ***метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной (в раскрытом ниже смысле) со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. При этом противоречия между отдельными исходными ранжировками оказываются заключенными внутри кластеров согласованной ранжировки. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится в исходных ранжировках.***

В кластеры заключены объекты, по поводу которых некоторые из исходных ранжировок *противоречат* друг другу. Для их упорядочения необходимо провести новые исследования. Эти исследования могут быть как формально-математическими (например, вычисление медианы Кемени (о ней см., например, [3]), упорядочения внутри группы по средним рангам или по медианам с привлечением новых экспертов, и т. п.), так и требовать привлечения новой информации из соответствующей прикладной области, возможно, проведения дополнительных научных или прикладных работ.

Введем необходимые понятия, затем сформулируем алгоритм согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и рассмотрим его свойства.

Пусть имеется конечное число объектов, которые мы для простоты изложения будем изображать натуральными числами 1, 2, 3, ..., k и называть их совокупность «носителем». *Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, понимаем следующую математическую конструкцию.* Пусть объекты разбиты на группы, которые будем называть кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты будем заключать в фигурные скобки. Например, объекты 1, 2, 3, ..., 10 могут быть разбиты на 7 кластеров: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$. В этом разбиении один кластер $\{5, 6, 7\}$ содержит три элемента, другой — $\{2, 3\}$ — два, остальные пять — по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а объединение их (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов (весь носитель).

Вторая составляющая кластеризованной ранжировки — это строгий линейный порядок между кластерами. Задано, какой из них первый, какой второй и т. д. Будем изображать упорядоченность с помощью знака <. При этом кластеры, состоящие из одного элемента, будем для простоты записи изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно изобразить так:

$$A = [1 < \{2, 3\} < 4 < \{5, 6, 7\} < 8 < 9 < 10].$$

Конкретные кластеризованные ранжировки будем заключать в квадратные скобки. Если для простоты речи термин «кластер» применять только к кластеру не менее чем из 2-х элементов, то можно сказать, что в кластеризованную ранжировку A входят два кластера $\{2, 3\}$ и $\{5, 6, 7\}$ и 5 отдельных элементов.

Кластеризованная ранжировка, введенная описанным образом, является бинарным отношением на носителе — множестве $\{1, 2, 3, ..., 10\}$. Его структура такова. Задано отношение эквивалентности с 7-ю классами эквивалентности, а именно, $\{2, 3\}$, $\{5, 6, 7\}$, а остальные 5 классов состоят из оставшихся 5 отдельных элементов. Затем введен строгий линейный порядок между классами эквивалентности.

Рассматриваемый математический объект известен в литературе как *«ранжировка со связями»* [5], *«упорядочение»* [6]), *«квазисерия»*

[7]), *«совершенный квазипорядок»* [8, с. 127, 130]. Учитывая разнобой в терминологии, признано полезным ввести собственный термин *«кластеризованная ранжировка»,* поскольку в нем явным образом названы основные элементы изучаемого математического объекта — кластеры, рассматриваемые на этапе согласования ранжировок как классы эквивалентности, и ранжировка — строгий совершенный порядок между ними (в терминологии [8, гл. IV].

Следующее важное понятие — *противоречивость.* Оно определяется для четверки — две кластеризованные ранжировки на одном и том же носителе и два различных объекта — элементы того же носителя. При этом два элемента из одного кластера будем связывать символом равенства = как эквивалентные.

Пусть A и B — две кластеризованные ранжировки. *Пару объектов (a, b) назовем «противоречивой» относительно кластеризованных ранжировок A и B, если эти два элемента по-разному упорядочены в A и B, т. е.* $a < b$ в A *и* $a > b$ *в* B (*первый вариант противоречивости*) *либо* $a > b$ *в* A *и* $a < b$ *в* B (*второй вариант противоречивости*). Отметим, что в соответствии с этим определением пара объектов (a,b), эквивалентная хотя бы в одной кластеризованной ранжировке, не может быть противоречивой, поскольку эквивалентность $a = b$ не образует «противоречия» ни с $a < b$, ни с $a > b$. Это свойство оказывается полезным при выделении противоречивых пар.

В качестве примера рассмотрим, кроме A, еще две кластеризованные ранжировки

$$B = [\{1, 2\} < \{3, 4, 5\} < 6 < 7 < 9 < \{8, 10\}],$$

$$C = [3 < \{1, 4\} < 2 < 6 < \{5, 7, 8\} < \{9, 10\}].$$

Совокупность противоречивых пар объектов для двух кластеризованных ранжировок A и B назовем «ядром противоречий» и обозначим S (A, B). Для рассмотренных выше в качестве примеров трех кластеризованных ранжировок A, B и C, определенных на одном и том же носителе $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, имеем

$$S(A, B) = [(8, 9)],\ S(A, C) = [(1, 3), (2, 4)],$$

$$S(B, C) = [(1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 6), (8, 9)].$$

Как при ручном, так и при программном нахождении ядра можно в поисках противоречивых пар просматривать пары (1, 2), (1, 3), (1, 4),

..., (1, k), затем (2, 3), (2, 4), ..., (2, k), потом (3, 4), ..., (3, k) и т. д., вплоть до последней пары ($k - 1$, k).

Пользуясь понятиями дискретной математики, «ядро противоречий» можно изобразить *графом* с вершинами в точках носителя. При этом *противоречивые пары задают ребра этого графа.* Граф для $S(A, B)$ имеет только одно ребро (одна связная компонента более чем из одной точки), для $S(A, C)$ — 2 ребра (две связные компоненты более чем из одной точки), для $S(B, C)$ — 5 ребер (три связные компоненты более чем из одной точки, а именно, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6\}$ и $\{8, 9\}$).

Каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей $\|x(a, b)\|$ из 0 и 1 порядка $k \times k$. При этом $x(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a < b$ либо $a = b$. В первом случае $x(b, a) = 0$, а во втором $x(b, a) = 1$. При этом всегда хотя бы одно из чисел $x(a, b)$ и $x(b, a)$ равно 1. Из определения противоречивости пары (a, b) вытекает, что для нахождения всех таких пар достаточно поэлементно перемножить две матрицы $\|x(a, b)\|$ и $\|y(a, b)\|$, соответствующие двум кластеризованным ранжировкам, и отобрать те и только те пары, для которых $x(a, b)\, y(a, b) = x(b, a)\, y(b, a) = 0$.

Предлагаемый алгоритм согласования некоторого числа (двух или более) кластеризованных ранжировок состоит из трех этапов. На первом *выделяются противоречивые пары* объектов во всех парах кластеризованных ранжировок. На втором формируются кластеры итоговой кластеризованной ранжировки (т. е. классы эквивалентности — *связные компоненты графов*, соответствующих объединению попарных ядер противоречий). На третьем этапе эти *кластеры* (*классы эквивалентности*) *упорядочиваются.* Для установления порядка между кластерами произвольно выбирается один объект из первого кластера и второй — из второго, порядок между кластерами устанавливается такой же, какой имеется между выбранными объектами в любой из рассматриваемых кластеризованных ранжировок. (Если в одной из исходных кластеризованных ранжировок имеется равенство, а в другой — неравенство, то при построении итоговой кластеризованной ранжировки используется неравенство.)

Корректность подобного упорядочивания, т. е. его независимость от выбора той или иной пары объектов при упорядочении двух кластеров и транзитивность такого упорядочения, вытекает из соответствующих теорем, впервые доказанных в статье [2].

Два объекта из разных кластеров согласующей кластеризованной ранжировки могут оказаться эквивалентными в одной из исходных кластеризованных ранжировок (т. е. находиться в одном кластере). В таком случае надо рассмотреть упорядоченность этих объектов в какой-либо другой из исходных кластеризованных ранжировок. Если же во всех исходных кластеризованных ранжировках два рассматриваемых объекта находились в одном кластере, то естественно считать (и это является уточнением к этапу 3 алгоритма), что они находятся в одном кластере и в согласующей кластеризованной ранжировке.

Результат согласования кластеризованных ранжировок A, B, C, ... обозначим $f(A, B, C, ...)$. Тогда

$$f(A, B) = [1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < \{8, 9\} < 10],$$

$$f(A, C) = [\{1, 3\} < \{2, 4\} < 6 < \{5, 7\} < 8 < 9 < 10],$$

$$f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10],$$

$$f(A, B, C) = f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10].$$

Итак, в случае $f(A, B)$ дополнительного изучения с целью упорядочения требуют только объекты 8 и 9. В случае f(А, C) кластер $\{5, 7\}$ появился не потому, что относительно объектов 5 и 7 имеется противоречие, а потому, что в обеих исходных ранжировках эти объекты не различаются. В случае $f(B, C)$ четыре объекта 1, 2, 3, 4 объединились в один кластер, т. е. кластеризованные ранжировки оказались настолько противоречивыми, что процедура согласования не позволила провести достаточно полную декомпозицию задачи нахождения итогового мнения экспертов.

Рассмотрим некоторые свойства алгоритмов согласования.

1. Пусть $D = f(A, B, C, ...)$. Если $a < b$ в согласующей кластеризованной ранжировке D, то $a < b$ или $a = b$ в каждой из исходных ранжировок A, B, C, ..., причем хотя бы в одной из них справедливо строгое неравенство.

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности, $f(A, B, C) = f(f(A, B), f(A, C), f(B, C))$. Ясно, что *ядро противоречий для набора кластеризованных ранжировок является объединением таких ядер для всех пар рассматриваемых ранжировок.*

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться. Так, при согласовании ранжировок B и C, рассмотренных выше, противоречия в упорядочении элементов 1 и 2 не было — в ранжировке B эти объекты входили в один кластер, т. е. $1 = 2$, в то время как $1 < 2$ в кластеризованной ранжировке C. Значит, при их отдельном рассмотрении можно принять упорядочение $1 < 2$. Однако в $f(B, C)$ они попали в один кластер, т. е. возможность их упорядочения исчезла. Это связано с поведением объекта 3, который «перескочил» в C на первое место и «увлек с собой в противоречие» пару (1, 2), образовав противоречивые пары и с 1, и с 2. Другими словами, связная компонента графа, соответствующего ядру противоречий, сама по себе не всегда является полным графом. Недостающие ребра при этом соответствуют парам типа (1, 2), которые сами по себе не являются противоречивыми, но «увлекаются в противоречие» другими парами.

4. Необходимость согласования кластеризованных ранжировок возникает, в частности, при разработке методики применения экспертных оценок в задачах экологического страхования и химической безопасности биосферы. Популярным является метод упорядочения по средним рангам, в котором итоговая ранжировка строится на основе средних арифметических рангов, выставленных отдельными экспертами [3, 9]. Однако из теории измерений известно (см. главу 6), что более обоснованным является использование не средних арифметических, а медиан. Вместе с тем метод средних арифметических рангов весьма известен и широко применяется, так что просто отбросить его нецелесообразно. Участвующие в исследовании и привыкшие к методу средних арифметических рангов специалисты не поймут и не примут такого решения РГ. Поэтому нами было принято решение об одновременном применении обоих методов. Реализация этого решения потребовала разработки приведенной выше методики согласования двух указанных кластеризованных ранжировок. Практическая апробация [10, 11] метода продемонстрировала правильность принятого решения об одновременном использовании метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов.

Во многих случаях кластеризованные ранжировки, полученные двумя методами, совпадали или были весьма близки, как в примере, рассмотренном в разд. 5.2. Можно сказать: когда объекты реально упорядочены, этот порядок выявит любой способ анализа данных. Проблема в том, что мы не знаем заранее, упорядочены ли объекты в действительности или нет. И одновременное применение двух (или более) методов позволяет найти ответ на этот вопрос. Если результаты анализа данных совпадают или почти совпадают — повышается уверенность в том, что они отражают действительность. Если результаты, полученные с помощью двух методов анализа данных, весьма различаются — значит, они не отражают реальность. Выводы, зависящие от субъективного выбора исследователем того или иного метода анализа данных, не могут использоваться для принятия объективного решения.

5. Область применения рассматриваемого метода не ограничивается экспертными оценками. Он может быть использован, например, для сравнения качества математических моделей процесса испарения жидкости. Имелись данные экспериментов и результаты расчетов по 8 математическим моделям. Сравнивать модели можно по различным критериям качества. Например, по сумме модулей относительных отклонений расчетных и экспериментальных значений. Можно действовать и по-другому. Например, в каждой экспериментальной точке упорядочить модели по качеству, а потом получать единые оценки методами средних рангов и медиан. Использовались и иные методы. Затем применялись методы согласования полученных различными способами кластеризованных ранжировок. В результате оказалось возможным упорядочить модели по качеству и использовать это упорядочение при разработке банка математических моделей, используемого в задачах химической безопасности биосферы.

6. Рассматриваемый метод согласования кластеризованных ранжировок построен в соответствии с *методологией теории устойчивости* [1], согласно которой результат обработки данных, инвариантный относительно метода обработки, соответствует реальности, а результат расчетов, зависящий от метода обработки, отражает субъективизм исследователя, а не объективные соотношения.

5.4. Пример анализа экспертных упорядочений

В табл. 5.1 были приведены ранги, выставленные экспертами. А как анализировать упорядочения (кластеризованные ранжировки), полученные непосредственно от экспертов? Покажем на примере табл. 5.3.

Таблица 5.3

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	1 < {2, 3} < 4 < 5 < {6, 7}
2	{1, 3} < 4 < 2 < 5 < 7 < 6
3	1 < 4 < 2 < 3 < 6 < 5 < 7
4	1 < {2, 4} < 3 < 5 < 7 < 6
5	2 < 3 < 4 < 5 < 1 < 6 < 7
6	1 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 4
7	1 < 5 < 3 < 4 < 2 < 6 < 7

Найдем по данным табл. 5.3:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангов;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

Начать необходимо с построения вспомогательной таблицы («таблицы рангов») (табл. 5.4). В ней указаны ранги объектов экспертизы, соответствующие экспертным упорядочениям.

Таблица 5.4

Ранги для экспертных упорядочений (табл. 5.3)

Эксперты и итоги расчетов	Объекты экспертизы						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	2,5	2,5	4	5	6,5	6,5
2	1,5	4	1,5	3	5	7	6
3	1	3	4	2	6	5	7
4	1	2,5	4	2,5	5	7	6
5	5	1	2	3	4	6	7
6	1	3	2	7	4	5	6
7	1	5	3	4	2	6	7
Сумма рангов	11,5	21	19	25,5	31	42,5	45,5
Итоговый ранг по сумме рангов	1	3	2	4	5	6	7
Медианы рангов	1	3	2,5	3	5	6	6,5
Итоговый ранг по медианам	1	3,5	2	3,5	5	6	7

Поясним построение таблицы рангов. Рассмотрим кластеризованную ранжировку $\{1, 3\} < 4 < 2 < 5 < 7 < 6$ (эксперт 2). Объекты 1 и 3 занимают места 1 и 2 в упорядоченном ряду, поэтому получают связанные ранги 1, 5 (см. примечание к табл. 5.1). Объект 4 стоит на 3-м месте и получает ранг 5. Объект 2 — на 4-м месте (ранг 4) и т. д.

Дальнейшие расчеты аналогичны проведенным при построении табл. 5.2. Итоговая кластеризованная ранжировка по суммам рангов (или, что то же самое, по средним арифметическим рангов) имеет вид:

$$1 < 3 < 2 < 4 < 5 < 6 < 7. \tag{5.3}$$

При объеме выборки, равном 7, медианой является 4-й член вариационного ряда. Кластеризованная ранжировка по медианам рангов такова:

$$1 < 3 < \{2, 4\} < 5 < 6 < 7. \tag{5.4}$$

Для ранжировок (5.3) и (5.4) согласующей ранжировкой является (5.3) (согласно алгоритму согласования кластеризованных ранжировок). Противоречивых пар нет. Подобная ситуация достаточно часто встречается при анализе реальных данных. Совпадение результатов, полученных разными методами, согласно теории устойчивости [1, 12–14] повышает достоверность выводов.

На различных этапах маркетинговых исследований активно применяются различные виды экспертных оценок, в том числе анализ экспертных упорядочений. Например, в ходе разработки проекта развития инновационных технологий космического приборостроения на примере системы ГЛОНАСС результаты, приведенные в настоящей главе, применены для выявления направлений развития навигационных приборов в области автомобильного транспорта с целью улучшения технических характеристик [15, разд. 12.1]. Объект исследования — прогнозирование предпочтений потребителей в области технико-функциональных характеристик навигационного прибора. Установлено, что к наиболее важным характеристикам навигационного прибора следует отнести следующие характеристики: точность определения навигационных параметров; надежность и прочность в эксплуатации; простота в обращении; сохранение точностных характеристик в различных условиях. Следовательно, при разработке навигационного прибора в первую очередь необходимо обеспечить выполнение данных требований. Для этого научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы должны быть направлены на создание универсальных микросхем, печатных плат, обеспечивающих получение качественных сигналов приема-передачи со спутников, на разработку программного обеспечения. Задача дизайнеров заключается в разработке эргономичного, удобного в использовании прибора. Необходимо обеспечить конструктивное исполнение корпуса прибора, позволяющее сохранять точностные характеристики в различных условиях. Для получения требуемого объема памяти, обеспечения работы аккумуляторной батареи целесообразно использовать покупные комплектующие изделия, исходя из целевого использования прибора, решаемых с его помощью задач. Габариты, вес, современный дизайн отнесены экспертами к менее значимым характеристикам. Они не несут основной технико-функциональной нагрузки, однако при разработке прибора их следует учесть, чтобы обеспечить эстетичность и гармоничное сочетание с салоном автомобиля и другими устройствами.

Подходы настоящей главы рассмотрены также в статье [16].

Литература

1. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

2. *Горский В.Г., Гриценко А.А., Орлов А.И.* Метод согласования кластеризованных ранжировок // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 3. — С. 159–167.

3. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

4. *Орлов А.И.* Проблемы управления экологической безопасностью. Итоги двадцати лет научных исследований и преподавания. — Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing. 2012. — 344 с.

5. *Холлендер М., Вулф Д.* Непараметрические методы статистики. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 518 с.

6. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. — М.: Советское радио, 1972. — 192 с.

7. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1973. — 256 с.

8. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

9. Менеджмент: Учебное пособие для вузов / С.А. Боголюбов, Ж.В. Прокофьева, А.И. Орлов и др. — М.: Знание, 2000. — 288 с.

10. *Орлов А.И., Федосеев В.Н.* Менеджмент в техносфере: Учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 384 с.

11. *Федосеев В.Н., Орлов А.И., Ларионов В.Г., Козьяков А.Ф.* Управление промышленной и экологической безопасностью: Учебное пособие. — М.: Изд-во УРАО, 2002. — 220 с.

12. *Орлов А.И.* Устойчивые математические методы и модели // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2010. — Т. 76. — № 3. — С. 59–67.

13. *Орлов А.И.* Устойчивые экономико-математические методы и модели. — Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011. — 436 с.

14. *Орлов А.И.* Новый подход к изучению устойчивости выводов в математических моделях // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 100. — С. 146–176.

15. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: Учебник: в 3 ч. Ч. 2: Экспертные оценки. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 486 с.

16. *Орлов А.И.* Анализ экспертных упорядочений // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 112. — С. 21–51.

Контрольные вопросы и задачи

1. Чем метод средних арифметических рангов отличается от метода медиан рангов?

2. Почему метод средних арифметических рангов неприемлем с точки зрения теории измерений?

3. Дайте определение понятию «кластеризованная ранжировка».

4. Почему необходимо согласование кластеризованных ранжировок и как оно проводится?

5. В табл. 5.5 приведены упорядочения 7 инвестиционных проектов, представленные 7 экспертами.

Постройте таблицу рангов. Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

Таблица 5.5

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	3< 7 < 2 < 5 < 6 < 4 < 1
2	7 < (2, 3) < 4 < 5 < 6 < 1
3	2 < 7 < 3 < 6 < 5 < 1 < 4
4	3 < 2 < 7 < 6 < 5 < 1 < 4
5	2 < 3 < (5, 7) < 6 < 4 < 1
6	5 < 3 < 2 < 6 < 7 < (1, 4)
7	2 < 3 < 7 < 6 < 4 < 1 < 5

6. В табл. 5.6 приведены упорядочения 7 инвестиционных проектов, представленные 7 экспертами.

Таблица 5.6

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	4 < 6 < 1 < 2 < {3, 5} < 7
2	1 < {4, 6} < 2 < 3 < {5, 7}
3	{4, 6} < {1, 2} < 5 < 3 < 7
4	4 < {1, 6} < 3 < 5 < 7 < 2
5	6 < {1, 2} < 4 < 5 < 1 < 7 < 3
6	2 < 1 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7
7	6 < 1 < 4 < 3 < 2 < 5 < 7

Постройте таблицу рангов. Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Сравните с помощью экспертного опроса субъективное ощущение тяжести (сложности, трудности) дней недели. Для этого получите от экспертов упорядочения (кластеризованные ранжировки) дней

недели по этому показателю. Обработайте экспертные мнения с помощью метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов. При необходимости проведите согласование двух полученных кластеризованных ранжировок. Можно ли утверждать, что опрошенные Вами эксперты имеют единое мнение по поводу субъективной тяжести дней недели? Или же мнения экспертов настолько различны, что никаких общих для всех групп экспертов выводов сделать нельзя?

Примечание. Желательно опросить от 5 до 15 экспертов.

2. Перекодируйте ответы экспертов, полученные при выполнении задания 1, исключив сведения о выходных днях (субботе и воскресенье). Проведите предусмотренную заданием 1 обработку данных.

Что изменилось в расчетах и выводах и что сохранилось по сравнению с заданием 1?

3. Проведите обработку мнений экспертов, собранных в процессе выполнения задания 1, предварительно сделав допустимое преобразование в порядковой шкале и перейдя от рангов к баллам. А именно, используя вместо рангов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (по числу дней недели) неравномерную шкалу баллов, например, (–10), (–3), (–1), 0, 1, 3, 10 (т. е. (–10) — балл самого плохого дня, (–3) — второго по тяжести, ..., 10 — балл самого хорошего дня недели). В случае связанных рангов берите среднее арифметическое соответствующих соседних значений баллов.

Что изменилось в расчетах и выводах и что сохранилось по сравнению с заданием 1?

4. Проведите подробное математическое обоснование корректности алгоритма согласования кластеризованных ранжировок (на основе статьи [2] и приложения 3 в учебнике [3]).

5. Разработайте метод сбора и анализа мнений экспертов с использованием средних по Колмогорову (в соответствующем варианте метода средних рангов).

6. Проведите сравнительный анализ различных методов усреднения мнений экспертов с целью выявления итогового мнения комиссии экспертов. В частности, сравните методы средних рангов с расчетом медианы Кемени (на основе расстояния Кемени между кластеризованными ранжировками).

Глава 6. ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теория измерений (ТИ) необходима для разработки технологий экспертного оценивания. За последние десятилетия она прошла путь от малоизвестного раздела математической психологии до общенаучной концепции, знакомство с которой признается обязательным для исследователей и студентов самых разных специальностей (в качестве примеров укажем книги [1–4]). ТИ — одна из составных частей наук, посвященных анализу данных, — статистики и эконометрики. Считается, что ТИ входит в состав *статистики объектов нечисловой природы* [5, 6].

В настоящей главе рассмотрены основные идеи ТИ. Введены шкалы наименований, порядка, интервалов, отношений и др. Обосновано требование инвариантности статистических выводов относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Установлены правила выбора вида средних величин в соответствии с типом шкалы измерения (для данных, измеренных в шкалах порядка, интервалов и отношений).

6.1. Основные шкалы измерения

Почему необходима ТИ? Эта теория исходит из того, что арифметические действия с используемыми в практической работе числами не всегда имеют смысл. Действительно, использование чисел в жизни и хозяйственной деятельности людей отнюдь не всегда предполагает, что эти числа можно складывать и умножать, производить иные арифметические действия. Что бы вы сказали о человеке, который занимается сложением или умножением телефонных номеров? Далее, не всегда выполнены привычные арифметические соотношения. Например, сумма знаний двух двоечников не равна знаниям «хорошиста», т. е. для оценок знаний 2 + 2 не равно 4. Если вы вечером поместите в клетку двух животных, а потом еще двух, то отнюдь не всегда можно утром найти в этой клетке четырех животных. Их может быть и много больше — если вечером вы загнали в клетку овцематок или беременных кошек. Их может быть и меньше — если к двум волкам вы поместили двух ягнят. Итак, отнюдь не всегда 2 + 2 = 4. Числа используются гораздо шире, чем арифметика.

Приведенные выше примеры показывают, что практика использования чисел для описания результатов наблюдений (измерений, испытаний, анализов, опытов) заслуживает методологического анализа.

При применении тех или иных экспертных технологий необходимо разобраться с проблемами измерения различных величин, используемых в процессе сбора и анализа экспертных мнений. Они могут быть измерены в тех или иных количественных или качественных шкалах. Поскольку в выборе конкретной шкалы имеется некоторый произвол (например, расстояние можно измерять в аршинах, саженях, верстах, метрах или парсеках), то естественно потребовать, чтобы принимаемое решение не зависело от этого произвола (например, от того, в каких единицах измерено расстояние).

Например, мнения экспертов часто выражены в *порядковой шкале* (подробнее о шкалах говорится ниже), т. е. эксперт может сказать (и обосновать), что один показатель качества продукции важнее, чем другой, первый технологический объект опаснее, чем второй, и т. д. Но он не в состоянии сказать, *во сколько раз* или *на сколько* он более важен, соответственно, более опасен. Экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т. е. расположить их в порядке возрастания (или убывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики. Ранг — это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду значений характеристики у различных объектов. Такой ряд в статистике называется вариационным. Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, ..., но с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя в арифметике 1 + 2 = 3, но нельзя утверждать, что для объекта, стоящего на третьем месте в упорядочении, интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания — оценки учащихся. Вряд ли кто-либо будет утверждать, что знания отличника равны сумме знаний двоечника и троечника (хотя 5 = 2 + 3), хорошист соответствует двум двоечникам (2 + 2 = 4), а между отличником и троечником такая же разница, как между хорошистом и двоечником (5 – 3 = 4 – 2). Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не всем известная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Это и есть ТИ.

При чтении литературы надо иметь в виду, что в настоящее время термин «теория измерений» применяется для обозначения целого ряда научных дисциплин. А именно, классической метрологии (науки об измерениях физических величин), рассматриваемой здесь ТИ, некоторых других направлений, например алгоритмической теории измерений. Обычно из контекста понятно, о какой конкретно теории идет речь.

Краткая история ТИ. Сначала ТИ развивалась как теория психофизических измерений. В послевоенных публикациях американский психолог С.С. Стивенс основное внимание уделял шкалам измерения. Во второй половине XX в. сфера применения ТИ стремительно расширяется.

Один из томов выпущенной в США в 1950-х гг. «Энциклопедии психологических наук» назывался «Психологические измерения». Значит, составители этого тома расширили сферу применения ТИ с психофизики на психологию в целом. А в основной статье в этом сборнике под названием «Основы теории измерений» изложение шло на абстрактно-математическом уровне, без привязки к какой-либо конкретной области применения. В этой статье [7] упор сделан на «гомоморфизмы эмпирических систем с отношениями в числовые» (в эти математические термины здесь вдаваться нет необходимости), и математическая сложность изложения заметно возросла по сравнению с работами С.С. Стивенса.

Уже в одной из первых отечественных статей по ТИ (конец 1960-х гг.) установлено, что баллы, присваиваемые экспертами при оценке объектов экспертизы, как правило, измерены в порядковой шкале. Отечественные работы, появившиеся в начале 1970-х гг., привели к существенному расширению области использования ТИ. Ее применяли в педагогической квалиметрии (для измерения качества знаний учащихся), в системных исследованиях, в различных задачах теории экспертных оценок, для агрегирования показателей качества продукции, в социологических исследованиях и др.

Итоги этого этапа подведены в монографии [8]. В качестве двух основных проблем ТИ наряду с *установлением типа шкалы* измерения конкретных данных выдвинут поиск алгоритмов анализа данных, результат работы которых не меняется при любом допустимом преобразовании шкалы (т. е. является *инвариантным* относительно этого преобразования).

Метрологи вначале резко возражали против использования термина «измерение» для качественных признаков. Однако постепенно возражения сошли на нет, и к концу XX в. ТИ стала рассматриваться как общенаучная теория.

Необходимость использования ТИ в теории и практике экспертного оценивания рассмотрим в связи с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей и рейтингов.

Основные идеи теории измерений рассмотрены ниже.

Шесть основных типов шкал. В соответствии с ТИ при математическом моделировании реального явления или процесса следует установить *типы шкал*, в которых измерены те или иные переменные. Тип шкалы задает *группу допустимых преобразований шкалы*. Допустимые преобразования не меняют объективно существующих соотношений между объектами измерения.

Например, при измерении длины переход от аршинов к метрам не меняет соотношений между длинами рассматриваемых объектов — если первый объект длиннее второго, то это будет установлено и при измерении в аршинах, и при измерении в метрах. Если первый длиннее второго в 5 раз при измерении в дюймах, то и при измерении в саженях первый длиннее второго ровно в 5 раз. **При этом численное значение длины в аршинах отличается от численных значений длины в метрах, дюймах и саженях — не меняется лишь результат сравнения длин двух объектов и отношение длин.**

Укажем основные виды шкал измерения и соответствующие группы допустимых преобразований.

В *шкале наименований* (другое название этой шкалы — *номинальная;* это — термин на основе латыни; иногда называют также классификационной шкалой) **допустимыми** являются все взаимно-однозначные преобразования. В этой шкале числа используются лишь как метки. Примерно так же, как при сдаче белья в прачечную, т. е. лишь для различения объектов. В шкале наименований измерены, например, номера телефонов, автомашин, паспортов, студенческих билетов. Номера страховых свидетельств государственного пенсионного страхования, медицинского страхования, штрихкоды товаров, ИНН (индивидуальные номера налогоплательщиков) также измерены в шкале наименований. В этой шкале измерены и многие иные величины, с формальной точки зрения выраженные числами. Пол людей тоже измерен в шкале наименований, результат измерения принимает два значения — мужской, женский. Раса, национальность, цвет глаз, волос — номинальные признаки. Номера букв в алфавите — тоже измерения в шкале наименований. Никому в здравом уме не придет в голову складывать или умножать ИНН или номера паспортов, такие операции не имеют смысла. Сравнивать буквы и говорить, например, что буква *П* лучше буквы *С*, также никто не будет. Единственное, для чего годятся измерения в шкале наименований — это различать объекты. Во многих случаях только это от них и требуется. Например, шкафчики в раздевалках для взрослых различают по номерам, т. е. числам, а в детских садах с той же целью используют рисунки, поскольку дети еще не знают чисел.

Итак, наиболее простой способ использования чисел — применять их для различения объектов. Например, телефонные номера нужны, чтобы отличать одного абонента от другого. При таком способе измерения используется только одно отношение между числами — равенство (два объекта описываются либо равными числами, либо различными). С прикладной точки зрения шкала измерения — это способ приписывания чисел рассматриваемым объектам, соответствующий имеющимся между объектами отношениям. Шкалы наименований соответствуют эмпирическим системам, в которых есть только одно отношение — равенства (эквивалентности) элементов этих систем.

Числа могут быть приписаны объектам разными способами. Переход от одного способа к другому наблюдаем при замене паспортов или телефонных номеров. Каковы свойства допустимых преобразований? Для шкалы наименований естественно потребовать только взаимной однозначности. Другими словами, применив к результатам измерений взаимно-однозначное преобразование, получаем новую шкалу, столь же хорошо описывающую систему исходных объектов, как и прежняя шкала.

Допустимые преобразования проводятся время от времени в реальной жизни, например, при замене телефонных номеров или паспортов. При этом каждому прежнему телефонному номеру соответствует один и только один новый. Не допускается, чтобы два прежних номера «слились» в одном новом или чтобы из одного прежнего получилось два новых. Это и означает, что преобразование является взаимно-однозначным.

В *порядковой шкале* числа используются не только для различения объектов, но и для установления порядка между объектами. Простейшим примером являются оценки знаний учащихся. Символично, что в средней школе применяются оценки 2, 3, 4, 5, а в высшей школе ровно тот же смысл выражается словесно — известными всем терминами «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». Этим подчеркивается «нечисловой» характер оценок знаний учащихся. Ведь фактически преподаватель относит учащихся к одной из четырех упорядоченных категорий, а обозначения этих категорий используются лишь для удобства управления образовательным процессом.

Порядковые шкалы соответствуют эмпирическим системам, в которых, кроме отношения равенства (эквивалентности) элементов, есть отношение (нестрогого) порядка между элементами этих систем. Известно, что в таком случае элементы эмпирической системы можно разбить на классы эквивалентности, между которыми имеется отношение строгого линейного порядка [8].

В порядковой шкале **допустимыми** являются все строго возрастающие преобразования. Так, один из авторов настоящего учебника при участии в российско-французском образовательном проекте пользовался, наряду с российской, и традиционной французской шкалой оценок, в которой знания учащихся оцениваются числами от 1 до 20. Приходилось постоянно осуществлять преобразования, в которых оценка «неудовлетворительно» переходила в 8, «удовлетворительно» — в 12, «хорошо» — в 15, «отлично» — в 18. (Французская шкала оценок позволяла дать численное выражение и дополнительным вариантам оценок, например, «четыре с плюсом» — это 16, а «три с двумя минусами» — это 10.)

Установление типа шкалы, т. е. задания группы допустимых преобразований шкалы измерения, — дело специалистов соответствующей прикладной области. Так, оценки привлекательности профессий мы в монографии [1], выступая в качестве социологов, считали измеренными в порядковой шкале. Однако отдельные социологи не соглашались с нами, полагая, что выпускники школ пользуются шкалой с более узкой группой допустимых преобразований, например интервальной шкалой. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент. Например, можно предложить каждому опрашиваемому ставить оценки одновременно по двум шкалам, а затем изучить соотношения между выставленными оценками и выявить вид реально используемых преобразований. Пока же подобный эксперимент не поставлен, целесообразно принимать порядковую шкалу, так как это гарантирует от возможных ошибок при анализе данных и получении выводов.

Оценки экспертов часто следует считать измеренными в порядковой шкале. Типичный пример — задачи ранжирования и классификации промышленных объектов, подлежащих экологическому страхованию.

Почему мнения экспертов естественно выражать именно в порядковой шкале? ***Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например сравнительного, характера, чем количественного.*** Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах.

В различных областях человеческой деятельности применяется много других видов порядковых шкал. Например, в минералогии используется шкала Мооса, по которой минералы классифицируются согласно критерию твердости. А именно: тальк имеет балл 1, гипс — 2, кальций — 3, флюорит — 4, апатит — 5, ортоклаз — 6, кварц — 7, топаз — 8, корунд — 9, алмаз — 10. Минерал с бóльшим номером является более твердым, чем минерал с меньшим номером, при нажатии царапает его.

Порядковые шкалы в географии — бофортова шкала ветров («штиль», «слабый ветер», «умеренный ветер» и т. д.), шкала силы землетрясений. Очевидно, нельзя утверждать, что землетрясение в 2 балла (лампа качнулась под потолком — такое бывает и в Москве) ровно в 5 раз слабее, чем землетрясение в 10 баллов (полное разрушение всего на поверхности земли).

В медицине порядковыми шкалами являются: шкала стадий гипертонической болезни (по Мясникову), шкала степеней сердечной недостаточности (по Стражеско — Василенко — Лангу), шкала степени выраженности коронарной недостаточности (по Фогельсону) и т. д. Все эти шкалы построены по схеме: заболевание не обнаружено; первая стадия заболевания; вторая стадия; третья стадия. Иногда выделяют стадии 1а, 1б и др. Каждая стадия имеет свойственную только ей медицинскую характеристику. При описании групп инвалидности числа иногда используются в противоположном порядке: самая тяжелая — первая группа инвалидности, затем — вторая, самая легкая — третья.

Номера домов также измерены в порядковой шкале — они показывают, в каком порядке стоят дома вдоль улицы. Номера томов в собрании сочинений писателя или номера дел в архиве предприятия обычно связаны с хронологическим порядком их создания.

При оценке качества продукции и услуг, в так называемой *квалиметрии* (буквальный перевод: измерение качества) популярны порядковые шкалы. А именно, единица продукции оценивается как годная или негодная. При более тщательном анализе используется шкала с тремя градациями: есть значительные дефекты — присутствуют только незначительные дефекты — нет дефектов. Иногда применяют четыре градации: имеются критические дефекты (делающие невозможным использование контролируемой единицы продукции) — есть значительные дефекты — присутствуют только незначительные дефекты — нет дефектов. Аналогичный смысл имеет сортность продукции — высший сорт, первый сорт, второй сорт и т. д.

При оценке экологических воздействий первая, наиболее обобщенная оценка — обычно порядковая, например: природная среда стабильна — природная среда угнетена (деградирует). Аналогично в эколого-медицинской шкале: нет выраженного воздействия на здоровье людей — отмечается отрицательное воздействие на здоровье.

Все шкалы измерения делят на две группы — шкалы качественных признаков и шкалы количественных признаков.

Порядковая шкала и шкала наименований — основные шкалы качественных признаков. Поэтому во многих конкретных областях результаты качественного анализа можно рассматривать как измерения по этим шкалам.

Шкалы количественных признаков — это шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютная. В них к отношениям равенства и порядка добавляются отношения, связанные с наличием единицы измерения и начала отсчета.

По шкале *интервалов* измеряют величину потенциальной энергии, координату точки на прямой (а также координаты точки на плоскости или в пространстве), географическую долготу (отсчитываемую в настоящее время от произвольно выбранного меридиана Гринвичской обсерватории в Великобритании), температуру по Цельсию, Фаренгейту или Реомюру. Во всех этих случаях на шкале нельзя отметить ни естественное начало отсчета, ни естественную единицу измерения. Исследователь должен сам задать точку отсчета и сам выбрать единицу измерения. Часто путем соглашения договариваются о выборе определенной единицы измерения, фиксируют начало отсчета, но произвольность подобного договора очевидна (например, в случае географической долготы).

Допустимыми преобразованиями в шкале интервалов являются *линейные возрастающие преобразования*, т. е. линейные функции. Температурные шкалы Цельсия и Фаренгейта связаны именно такой зависимостью:

$$°\mathrm{C} = \frac{5}{9}\left(°\mathrm{F} - 32\right), \tag{6.1}$$

где °C — температура (в градусах) по шкале Цельсия, а °F — температура по шкале Фаренгейта.

При допустимых преобразованиях в шкале интервалов сохраняется отношение длин интервалов:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{\varphi(x_3) - \varphi(x_4)} \tag{6.2}$$

для любых чисел x_1, x_2, x_3, x_4 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = ax + b, \quad a > 0$. Верно и обратное: если равенство (6.2) справедливо для любых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, то $\varphi(x) = ax + b, \quad a > 0$ при некоторых значениях коэффициентов a и b.

Из количественных шкал наиболее распространенными в науке и практике являются шкалы *отношений.* В них есть естественное начало отсчета — нуль, т. е. отсутствие величины, но нет естественной единицы измерения. По шкале отношений измерены большинство физических единиц: масса тела, длина, работа, мощность, заряд, напряжение, а также цены в экономике. Допустимыми преобразованиями в шкале отношений являются подобные (изменяющие только масштаб). Другими словами, линейные возрастающие преобразования без свободного члена. Примером является пересчет цен из одной валюты в другую по фиксированному курсу.

При допустимых преобразованиях в шкале отношений сохраняется отношение измеряемых величин:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \tag{6.3}$$

для любых чисел x_1 и x_2 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = ax, \quad a > 0$. Верно и обратное: если равенство (6.3) справедливо для любых чисел x_1 и x_2, то $\varphi(x) = ax, \quad a > 0$ при некотором значении коэффициента a.

Предположим, мы сравниваем экономическую эффективность двух инвестиционных проектов, используя цены в рублях. Пусть первый проект оказался лучше второго. Теперь перейдем на валюту самой экономически мощной державы мира — юани, используя фиксированный курс пересчета. (В эконометрике [3] с помощью расчетов на основе паритета покупательной способности установлено, что в настоящее время валовой внутренний продукт Китая больше, чем у какой-либо иной страны (см. главу 3 выше), в частности, больше, чем у Европейского союза (второе место) и США (третье место).) Очевидно, первый проект должен опять оказаться более выгодным, чем второй. Это очевидно из общих экономических соображений. Однако алгоритмы расчета не обеспечивают автоматически выполнения этого очевидного условия. Надо проверять, что оно выполнено. Результаты подобной проверки для средних величин описаны ниже. Оказалось, что нельзя произвольно выбирать вид средних величин, необходимо согласовывать вид средней со шкалами измерения.

В шкале *разностей* есть естественная единица измерения, но нет естественного начала отсчета. Допустимыми преобразованиями в шкале разностей являются сдвиги. Время измеряется по шкале разностей, если год (или сутки — от полудня до полудня) принимаем естественной единицей измерения, и по шкале интервалов в общем случае. На современном уровне знаний естественного начала отсчета времени указать нельзя. Дату сотворения мира различные авторы рассчитывают по-разному, равно как и момент Рождества Христова. Так, согласно новой статистической хронологии [9], разработанной группой известного историка акад. РАН А.Т. Фоменко, Господь Иисус Христос родился примерно в 1054 г. по принятому ныне летоисчислению в Стамбуле (он же, по А.Т. Фоменко, Царьград, Византия, Троя, Иерусалим, Рим). Позже те же исследователи обосновали несколько иную дату — 1152 г. н. э. — и место (мыс Фиолент в Крыму) [10].

При допустимых преобразованиях в шкале разностей сохраняется разность измеряемых величин:

$$x_1 - x_2 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \tag{6.4}$$

для любых чисел x_1 и x_2 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = x + b$. Верно и обратное: если равенство (6.4) справедливо для любых чисел x_1 и x_2, то $\varphi(x) = x + b$ при некотором значении коэффициента сдвига b.

Только для *абсолютной* шкалы результаты измерений — числа в обычном смысле слова. Примером является число людей в комнате. Начало отсчета — нет никого. Единица измерения — одно лицо. Для абсолютной шкалы допустимым является только тождественное преобразование.

Шесть основных типов шкал измерения описаны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Основные шкалы измерения

Тип шкалы	Определение шкалы	Примеры	Группа допустимых преобразований $\Phi = \{\varphi\}$
Шкалы качественных признаков			
Наименований	Числа используют для различения объектов	Номера телефонов, паспортов, ИНН, штрихкоды	Все взаимнооднозначные преобразования
Порядковая	Числа используют для упорядочения объектов	Оценки экспертов, баллы ветров, отметки в школе, полезность, номера домов	Все строго возрастающие преобразования
Шкалы количественных признаков (описываются началом отсчета и единицей измерения)			
Интервалов	Начало отсчета и единица измерения произвольны	Потенциальная энергия, положение точки, температура по шкалам Цельсия и Фаренгейта	Все линейные преобразования $\varphi(x) = ax + b$, a и b произвольны, $a > 0$

Тип шкалы	Определение шкалы	Примеры	Группа допустимых преобразований $\Phi = \{\varphi\}$
Отношений	Начало отсчета задано, единица измерения произвольна	Масса, длина, мощность, напряжение, сопротивление, температура по Кельвину, цены	Все подобные преобразования $\varphi(x) = ax$, a произвольно, $a > 0$
Разностей	Начало отсчета произвольно, единица измерения задана	Время	Все преобразования сдвига $\varphi(x) = x + b$, b произвольно
Абсолютная	Начало отсчета и единица измерения заданы	Число людей в данном помещении	Только тождественное преобразование $\varphi(x) = x$

Кроме перечисленных в табл. 6.1, используют и иные типы шкал [4, 11]. В табл. 6.1 выражение «единица измерения произвольна» означает, что она может быть выбрана по соглашению специалистов, но не вытекает из каких-либо фундаментальных соотношений. При измерении времени естественная единица измерения задается периодами обращения небесных тел. Начало отсчета при измерении длины задается длиной отрезка, у которого начало и конец совпадают, и т. д.

В настоящее время считается необходимым перед применением тех или иных алгоритмов анализа данных установить, в шкалах каких типов измерены рассматриваемые величины. В процессе развития соответствующей области знания тип шкалы измерения конкретной величины может меняться. Так, сначала температура измерялась по *порядковой* шкале (холоднее — теплее). Затем — по *интервальной* (использовались шкалы Цельсия, Фаренгейта, Реомюра). Так, температура °C по шкале Цельсия выражается через температуру °F по шкале Фаренгейта с помощью линейного преобразования (6.1). Наконец, после открытия абсолютного нуля температуру можно считать измеренной по шкале *отношений* (шкала Кельвина). Среди специалистов иногда имеются разногласия по поводу того, по каким шкалам следует считать измеренными те или иные реальные величины. Другими словами, процесс измерения включает в себя, как необходимый этап, и определение типа шкалы (вместе с обоснованием выбора определенного типа шкалы).

6.2. Инвариантные алгоритмы и средние величины

Основное требование к алгоритмам анализа данных формулируется в ТИ так: ***выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных.*** Другими словами, выводы должны быть *инвариантны* по отношению к допустимым преобразованиям шкалы.

Требование инвариантности (адекватности) выводов. Выяснение типов используемых шкал необходимо для адекватного выбора методов анализа данных. Основополагающим требованием является независимость выводов от того, какой именно шкалой измерения воспользовался исследователь (среди всех шкал, переходящих друг в друга при допустимых преобразованиях). Например, если речь о длинах, то выводы не должны зависеть от того, измерены ли длины в метрах, аршинах, саженях, футах или дюймах.

Таким образом, одна из основных целей теории измерений — борьба с субъективизмом исследователя при приписывании численных значений реальным объектам. Так, расстояния можно измерять в аршинах, метрах, микронах, милях, парсеках и других единицах измерения. Массу (вес) — в пудах, килограммах, фунтах и др. Цены на товары и услуги можно указывать в юанях, рублях, тенге, гривнах, евро, кронах, марках, долларах США и других валютах (при условии заданных курсов пересчета). Подчеркнем очень важное, хотя и вполне очевидное обстоятельство: выбор единиц измерения зависит от исследователя, т. е. субъективен. *Выводы могут быть адекватны реальности только тогда, когда они не зависят от того, какую единицу измерения предпочтет исследователь, т. е. когда они инвариантны относительно допустимого преобразования шкалы.* Очевидно, что при разработке управленческих решений можно опираться только на инвариантные выводы.

Другими словами, выводы должны быть инвариантны относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Только тогда их можно назвать адекватными, т. е. избавленными от субъективизма исследователя, выбирающего определенную шкалу из множества шкал заданного типа, связанных допустимыми преобразованиями. В статье [11] требование инвариантности (адекватности) выводов формулируется как условие «содержательности» («состоятельности») высказывания.

Требование инвариантности выводов накладывает ограничения на множество возможных алгоритмов анализа данных. В качестве примера рассмотрим порядковую шкалу. Одни алгоритмы анализа данных позволяют получать адекватные выводы, другие — нет. Например, в задаче проверки однородности двух независимых выборок алгоритмы ранговой статистики (т. е. использующие только ранги результатов измерений) дают адекватные выводы, а статистики Крамера — Уэлча и Стьюдента — нет. Значит, для обработки данных, измеренных в порядковой шкале, критерии Смирнова и Вилкоксона можно использовать, а критерии Крамера — Уэлча и Стьюдента — нет [12].

Оказывается, требование инвариантности является достаточно сильным. Из многих алгоритмов анализа статистических данных ему удовлетворяют лишь некоторые. Покажем это на примере сравнения средних величин.

Средние величины. Среди всех методов анализа данных важное место занимают алгоритмы усреднения. Еще в 1970-х гг. удалось полностью выяснить, какими видами средних можно пользоваться при анализе данных, измеренных в тех или иных шкалах.

Пусть X_1, X_2, ..., X_n — выборка объема n. Часто используют среднее арифметическое

$$X_{\text{ср}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Использование среднего арифметического настолько привычно, что второе слово в термине часто опускают. И говорят о средней зарплате, среднем доходе и других средних для конкретных экономических данных, подразумевая под «средним» среднее арифметическое. Такая традиция может приводить к ошибочным выводам. Покажем это на примере расчета средней заработной платы (среднего дохода) работников условного предприятия (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Численность работников различных категорий, их заработная плата и доходы (в условных единицах)

№ п/п	Категория работников	Число работников	Заработная плата	Суммарные доходы
1	Низкоквалифицированные рабочие	40	100	4000
2	Высококвалифицированные рабочие	30	200	6000
3	Инженеры и служащие	25	300	7500
4	Менеджеры	4	1000	4000
5	Генеральный директор (владелец)	1	18 500	18 500
6	Всего	100		40 000

Первые три строки в табл. 6.2 вряд ли требуют пояснений. Менеджеры — это директора по направлениям, а именно, по производству (главный инженер), по финансам, по маркетингу и сбыту, по персоналу (по кадрам). Владелец сам руководит предприятием в качестве генерального директора. В столбце «заработная плата» указаны доходы одного работника соответствующей категории, а в столбце «суммарные доходы» — доходы всех работников соответствующей категории.

Фонд оплаты труда составляет 40 000 единиц, работников всего 100, следовательно, средняя заработная плата составляет 40 000 / 100 = 400 единиц. Однако эта средняя арифметическая величина явно не соответствует интуитивному представлению о «средней зарплате». Из 100 работников лишь 5 имеют заработную плату, ее превышающую, а зарплата остальных 95 существенно меньше средней арифметической. Причина очевидна — заработная плата одного человека — генерального директора — превышает заработную плату 95 работников — низкоквалифицированных и высококвалифицированных рабочих, инженеров и служащих, вместе взятых.

Ситуация напоминает описанную в известном рассказе о больнице, в которой 10 больных, из них у 9 температура 40 °С, а один уже отмучился, лежит в морге с температурой 0 °С. Между тем средняя температура по больнице равна 36 °С — лучше не бывает!

Из сказанного ясно, что не всегда целесообразно использовать среднее арифметическое. Его можно порекомендовать лишь для достаточно однородных совокупностей (без больших выбросов в ту или иную сторону).

А какие средние стоит применять для описания заработной платы? Вполне естественно использовать медиану. Для данных табл. 6.2 медиана — среднее арифметическое 50-го и 51-го работника, если их заработные платы расположены в порядке неубывания. Сначала идут зарплаты 40 низкоквалифицированных рабочих, а затем — с 41-го до 70-го работника — заработные платы высококвалифицированных рабочих. Следовательно, медиана попадает именно на них и равна 200. У 50-ти работников заработная плата не превосходит 200, и у 50-ти — не менее 200, поэтому медиана показывает «центр», около которого группируется основная масса исследуемых величин. Еще одна средняя величина — мода, наиболее часто встречающееся значение. В рассматриваемом случае это заработная плата низкоквалифицированных рабочих, т. е. 100. Таким образом, для описания зарплаты имеем три средние величины — моду (100 единиц), медиану (200 единиц) и среднее арифметическое (400 единиц). Для наблюдающихся в реальной экономике распределений доходов и заработной платы справедлива та же закономерность: мода меньше медианы, а медиана меньше среднего арифметического.

Для чего при разработке управленческих решений [13] используются средние величины? Обычно для того, чтобы заменить совокупность чисел одним числом, чтобы сравнивать совокупности с помощью средних.

Пусть, например, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ — совокупность оценок экспертов, «выставленных» одному объекту экспертизы (например, одному из вариантов стратегического развития фирмы), $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ — второму (другому варианту такого развития). Как сравнивать эти совокупности? Очевидно, самый простой способ — по средним значениям.

А как вычислять средние? Известны различные виды средних величин: среднее арифметическое, медиана, мода, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратическое. Напомним, что общее понятие средней величины введено французским математиком первой половины XIX в. академиком О. Коши. Оно таково: средней величиной является любая функция $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $X_1, X_2, ..., X_n$, и не больше, чем максимальное из этих чисел. Все перечисленные выше виды средних величин являются средними по Коши.

При допустимом преобразовании шкалы значение средней величины, очевидно, меняется. Но выводы о том, для какой совокупности среднее больше, а для какой — меньше, не должны меняться (в соответствии с условием инвариантности выводов, принятом как основное требование в ТИ). Сформулируем соответствующую математическую задачу поиска вида средних величин, результат сравнения которых устойчив относительно допустимых преобразований шкалы.

Пусть $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ — среднее по Коши. Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$$f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) < f(Z_1, Z_2, ..., Z_n).$$

Тогда согласно ТИ для устойчивости результата сравнения средних необходимо, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в соответствующей шкале было справедливо также неравенство

$$f(g(Y_1), g(Y_2), ..., g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2), ..., g(Z_n)).$$

т. е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Причем сформулированное условие должно быть выполнено для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ и $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ и, напомним, любого допустимого преобразования g.

Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, назовем *допустимыми* (в соответствующей шкале). Согласно ТИ только допустимыми средними величинами можно пользоваться при анализе мнений экспертов и иных данных, измеренных в рассматриваемой шкале.

С помощью математической теории, развитой в монографии [8], удается описать вид допустимых средних величин в основных шкалах. Сразу ясно, что для данных, измеренных в шкале наименований, допустимых средних нет, поскольку допустимые в этой шкале преобразования — а ими являются все взаимно однозначные преобразования — могут как угодно перемешать значения усредняемых величин.

6.3. Средние величины в порядковой шкале

Рассмотрим сначала обработку мнений экспертов, измеренных в порядковой шкале. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Из всех средних по Коши допустимыми средними в порядковой шкале являются только члены вариационного ряда (порядковые статистики).

Теорема 6.1, впервые полученная в статье [14], справедлива при условии, что средняя величина $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ является непрерывной (по совокупности переменных) и симметрической функцией. Последнее означает, что при перестановке аргументов значение функции $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ не меняется. Это условие — вполне естественное, ибо среднюю величину находим для *совокупности (множества)* чисел, а не для *последовательности*. Множество не меняется в зависимости от того, в какой последовательности мы перечисляем его элементы.

Согласно теореме 6.1, в качестве среднего для данных, измеренных в порядковой шкале, можно использовать, в частности, медиану (при нечетном объеме выборки). При четном же объеме целесообразно применять один из двух центральных членов вариационного ряда — как их иногда называют, левую медиану или правую медиану. Моду тоже можно использовать — она всегда является членом вариационного ряда. Можно применять выборочные квартили, минимум и максимум, децили и т. п. Но теорема 6.1 запрещает использовать при анализе порядковых данных (т. е. измеренных в порядковой шкале) среднее арифметическое, среднее геометрическое и т. д. Таким образом, не рекомендуется разрабатывать управленческое решение на основе среднего арифметического или среднего геометрического мнений экспертов, поскольку такие мнения, как разъяснено выше, обычно измерены в порядковой шкале.

Приведем численный пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2) / 2$ в порядковой шкале. Пусть $Y_1 = 1$, $Y_2 = 11$, $Z_1 = 6$, $Z_2 = 8$. Тогда $f(Y_1, Y_2) = 6$, что меньше, чем $f(Z_1, Z_2) = 7$. Пусть строго возрастающее преобразование g таково, что $g(1) = 1$, $g(6) = 6$, $g(8) = 8$, $g(11) = 99$. Таких преобразований много. Например, можно положить $g(x) = x$ для x, не превосходящих 8, и $g(x) = 91(x - 8) / 3 + 8$ для x, больших 8. Тогда $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 50$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 7$. Как видим, в результате допустимого, т. е. строго возрастающего преобразования шкалы упорядоченность средних величин изменилась. Таков же результат применения допустимого преобразования $g(x) = x^2$ при $x > 0$ (если угодно, $g(x) = -x^2$ при $x \leq 0$). Тогда $g(1) = 1$, $g(6) = 36$, $g(8) = 64$, $g(11) = 121$, а потому $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 61$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 50$.

Таким образом, теория измерений выносит жесткий приговор среднему арифметическому — использовать его в порядковой шкале нельзя. Однако же те, кто не знает теории измерений, используют его. Всегда ли они ошибаются? Оказывается, можно в какой-то мере (но отнюдь не полностью!) реабилитировать среднее арифметическое, если перейти к вероятностной постановке и к тому же удовлетвориться результатами для больших объемов выборок. В монографии [8], кроме теоремы 6.1, доказано также следующее утверждение.

Теорема 6.2. Пусть Y_1, Y_2, ..., Y_m — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, а Z_1, Z_2, ..., Z_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$, причем выборки Y_1, Y_2, ..., Y_m и Z_1, Z_2, ..., Z_n независимы между собой и $MY_1 > MZ_1$. Для того чтобы вероятность события

$$\left\{\omega : \frac{g(Y_1)+g(Y_2)+...+g(Y_m)}{m} > \frac{g(Z_1)+g(Z_2)+...+g(Z_n)}{n}\right\}$$

стремилась к 1 при $\min(m,n) \to \infty$ для любой строго возрастающей непрерывной функции g, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\left|\frac{g(x)}{x}\right| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех x выполнялось неравенство $F(x) \leq H(x)$, причем существовало число x_0, для которого $F(x_0) < H(x_0)$.

Примечание. Условие с верхним пределом носит чисто внутриматематический характер. Фактически функция g — произвольное допустимое преобразование в порядковой шкале.

Согласно теореме 6.2, средним арифметическим можно пользоваться и в порядковой шкале, если сравниваются выборки из двух распределений, удовлетворяющих приведенному в теореме неравенству. Проще говоря, одна из функций распределения должна всегда лежать над другой. Функции распределения не могут пересекаться, им разрешается только касаться друг друга. Это условие выполнено, например, если функции распределения отличаются только сдвигом, т. е.

$$F(x) = H(x + b)$$

при некотором b. Последнее условие выполняется, если два значения некоторой величины измеряются с помощью одного и того же средства измерения, у которого распределение погрешностей не меняется при переходе от измерения одного значения рассматриваемой величины к измерению другого.

6.4. Средние по Колмогорову

Естественная система аксиом (требований к средним величинам) приводит к так называемым ассоциативным средним. Их общий вид нашел в 1930 г. А.Н. Колмогоров [15]. Теперь их называют «средними по Колмогорову».

Для чисел $X_1, X_2, ..., X_n$ средним по Колмогорову является

$$G\{(F(X_1) + F(X_2) + ... + F(X_n)) / n\},$$

где F — строго монотонная функция (т. е. строго возрастающая или строго убывающая), G — функция, обратная к F.

Среди средних по Колмогорову — много хорошо известных персонажей. Так, если $F(x) = x$, то среднее по Колмогорову — это среднее арифметическое, если $F(x) = \ln x$, то среднее геометрическое, если $F(x) = 1 / x$, то среднее гармоническое, если $F(x) = x^2$, то среднее квадратическое и т. д. Если $F(x) = x^c$, то $F^{-1}(y) = y^{1/c}$, среднее по Колмогорову — среднее степенное (в последних четырех случаях усредняются положительные величины).

Средние по Колмогорову — частный случай средних по Коши. С другой стороны, такие популярные средние, как медиана и мода, нельзя представить в виде средних по Колмогорову.

В статье [16] впервые доказаны следующие утверждения.

Теорема 6.3. При справедливости некоторых внутриматематических условий регулярности в шкале интервалов из всех средних по Колмогорову допустимым является только среднее арифметическое.

Таким образом, среднее геометрическое или среднее квадратическое температур (в шкале Цельсия), потенциальных энергий или координат точек не имеют смысла. В качестве среднего надо применять среднее арифметическое. А также можно использовать медиану или моду — они не входят в число средних по Колмогорову.

Теорема 6.4. При справедливости некоторых внутриматематических условий регулярности в шкале отношений из всех средних по

Колмогорову допустимыми являются только степенные средние с $F(x) = x^c$, $c \neq 0$, и среднее геометрическое.

Есть ли средние по Колмогорову, которыми нельзя пользоваться в шкале отношений? Конечно, есть. Например, с $F(x) = e^x$.

Замечание 1. Среднее геометрическое является пределом степенных средних при $c \to 0$.

Замечание 2. Подробное описание «внутриматематических условий регулярности», упомянутых в формулировках теорем 6.3 и 6.4, можно найти в [9, 17]. Доказательства теорем 6.1–6.4 приведены в монографии [8]. Перенос на случай взвешенных средних дан в статье [17].

Аналогично средним величинам могут быть изучены и другие статистические характеристики — показатели разброса, связи, расстояния и др. (см., например, [4, 17]). Нетрудно показать, например, что коэффициент корреляции не меняется при любом допустимом преобразовании в шкале интервалов, как и отношение дисперсий. Дисперсия не меняется в шкале разностей, коэффициент вариации — в шкале отношений и т. д.

Приведенные выше результаты о средних величинах широко применяются, причем не только в экспертных исследованиях, но и в теории принятия решений, экономике, менеджменте, социологии, медицине, инженерном деле. Например, для анализа методов агрегирования датчиков в АСУ ТП (автоматизированных системах управления технологическими процессами) доменных печей. Велико прикладное значение теории измерений в задачах стандартизации и управления качеством, в частности в квалиметрии [14, 18]. Обзор [11] посвящен анализу многочисленных работ последних десятилетий, посвященных связи теории измерений и теории средних величин.

При подготовке и принятии инженерных, технико-экономических и иных решений необходимо использовать только инвариантные алгоритмы обработки данных. В настоящей главе показано, что требование инвариантности выделяет из многих алгоритмов усреднения лишь некоторые, соответствующие используемым шкалам измерения. Инвариантные алгоритмы в общем случае рассматриваются в математической теории измерений [19]. Нацеленное на прикладные исследования изложение ряда вопросов теории измерений дается в монографиях [4, 8, 12]. Теория измерений применяется в задачах управления промышленной и экологической безопасностью [20–22]. Она входит в организационно-экономическое, математическое и инструментальное обеспечение контроллинга, инноваций и менеджмента [23], относится к перспективным математическим методам контроллинга [24]. Теория измерений является важной составной частью математики XXI века — системной нечеткой интервальной математики [25]. Современные подходы к наукометрии и управлению наукой также основаны на теории измерений [26].

Полные доказательства приведенных в настоящей главе теорем о характеризации средних величин шкалами измерения содержатся в статье [27].

Литература

1. *Новиков Д.А.* Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). — М.: МЗ-Пресс, 2004. — 67 с.

2. *Новиков Д.А., Новочадов В.В.* Статистические методы в медико-биологическом эксперименте (типовые случаи). — Волгоград: Изд-во ВолГМУ, 2005. — 87 с.

3. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

4. *Толстова Ю.Н.* Измерение в социологии. — М.: Инфра-М, 1998. — 352 с.

5. *Орлов А.И.* Новая парадигма математических методов экономики // Экономический анализ: теория и практика. — 2013. — № 36 (339). — С. 25–30.

6. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: Учебник: в 3 ч. Ч. 1: Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 542 с.

7. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений // Психологические измерения. — М.: Мир, 1967. — С. 9–110.

8. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

9. *Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Империя. Русь, Турция, Китай, Европа, Египет. Новая математическая хронология древности. — М.: Факториал, 1996. — 752 с.

10. *Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Царь славян. — СПб.: Нева, 2004. — 564 с.

11. *Барский Б.В., Соколов М.В.* Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения // За-

водская лаборатория. Диагностика материалов. — 2006. — Т. 72. — № 1. — С. 59–66.

12. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 4-е, доп. и перераб. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. — 572 с.

13. *Орлов А.И.* Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. — М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. — 496 с.

14. *Орлов А.И.* Допустимые средние в некоторых задачах экспертных оценок и агрегирования показателей качества // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. — М.: Наука, 1974. — С. 388–394.

15. *Колмогоров А.Н.* Об определении среднего // Колмогоров А.Н. Избранные труды: Математика и механика. — М.: Наука, 1985. — С. 136–138.

16. *Орлов А.И.* Допустимые преобразования в задаче сравнения средних. Пси-постоянные статистики // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1975. — С. 121–127.

17. *Орлов А.И.* Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы // Математические заметки. — 1981. — Т. 30. — № 4. — С. 561–568.

18. *Кривцов В.С., Орлов А.И., Фомин В.Н.* Современные статистические методы в стандартизации и управлении качеством продукции // Стандарты и качество. — 1988. — № 4. — С. 32–36.

19. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

20. *Орлов А.И.* Проблемы управления экологической безопасностью. Итоги двадцати лет научных исследований и преподавания. — Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing. 2012. — 344 с.

21. *Орлов А.И., Федосеев В.Н.* Менеджмент в техносфере: Учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 384 с.

22. *Федосеев В.Н., Орлов А.И., Ларионов В.Г., Козьяков А.Ф.* Управление промышленной и экологической безопасностью: Учебное пособие. — М.: Изд-во УРАО, 2002. — 220 с.

23. *Орлов А.И., Луценко Е.В., Лойко В.И.* Организационно-экономическое, математическое и программное обеспечение контроллинга, инноваций и менеджмента: Монография / Под общ. ред. С.Г. Фалько. — Краснодар: КубГАУ, 2016. — 600 с.

24. *Орлов А.И., Луценко Е.В., Лойко В.И.* Перспективные математические и инструментальные методы контроллинга: Монография / Под науч. ред. проф. С.Г. Фалько. — Краснодар, КубГАУ. 2015. — 600 с.

25. *Орлов А.И., Луценко Е.В.* Системная нечеткая интервальная математика: Монография. — Краснодар, КубГАУ, 2014. — 600 с.

26. *Лойко В.И., Луценко Е.В., Орлов А.И.* Современные подходы в наукометрии: Монография / Под науч. ред. проф. С.Г. Фалько. — Краснодар: КубГАУ, 2017. — 532 с.

27. *Орлов А.И.* Характеризация средних величин шкалами измерения // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 134. — С. 877–907.

28. *Подиновский В.В.* Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Наука, 2019. — 103 с.

Контрольные вопросы и задачи

1. Всегда ли имеет смысл складывать числа, используемые в той или иной области человеческой деятельности?

2. Приведите примеры величин, измеренных в шкале наименований.

3. Приведите примеры величин, измеренных в порядковой шкале.

4. Приведите примеры величин, измеренных в шкале интервалов.

5. Приведите примеры величин, измеренных в шкале отношений.

6. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2) / 2$ в порядковой шкале, используя допустимое преобразование $g(x) = x^3$ (при положительных усредняемых величинах x).

7. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего геометрического в порядковой шкале. Другими словами, приведите пример чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и строго возрастающего преобразования $f: R^1 \to R^1$ таких, что

$$(x_1 x_2)^{1/2} < (y_1 y_2)^{1/2}, \ [f(x_1) f(x_2)]^{1/2} > [f(y_1) f(y_2)]^{1/2}$$

8. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего квадратического в порядковой шкале. Другими словами, приведите пример чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и строго возрастающего преобразования $f: R^1 \to R^1$ таких, что

$$[(x_1)^2 + (x_2)^2]^{1/2} < [(y_1)^2 + (y_2)^2]^{1/2},$$

$$[(f(x_1))^2 + (f(x_2))^2]^{1/2} > [(f(y_1))^2 + (f(y_2))^2]^{1/2}.$$

9. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего гармонического в порядковой шкале.

10. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего геометрического в шкале интервалов.

11. Какие средние величины целесообразно использовать при расчете средней заработной платы (или среднего дохода)?

12. Как соотносятся средние по Коши и средние по Колмогорову?

13. В каждом вопросе выберите правильный ответ из нескольких возможных.

13.1. Метод экспертных оценок применяется:

А) для снятия ответственности с руководителя;

Б) в чисто научных исследованиях;

В) для решения практических задач, стоящих перед менеджерами.

13.2. Номера телефонов измерены в шкале:

А) интервалов;

Б) наименований;

В) порядковой.

13.3. Оценки знаний измерены в шкале:

А) интервалов;

Б) наименований;

В) порядковой.

13.4. При анализе данных, измеренных в порядковой шкале, можно вычислять:

А) среднее арифметическое;

Б) медиану;

В) среднее геометрическое.

13.5. При анализе данных, измеренных в шкале интервалов, можно вычислять:

А) среднее гармоническое;

Б) среднее арифметическое;

В) среднее геометрическое.

13.6. Для получения итогового мнения экспертной комиссии мнения экспертов целесообразно усреднять с помощью:

А) среднего арифметического;

Б) медианы;

В) среднего арифметического и медианы, сопоставляя результаты.

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Теория измерений как научная дисциплина, посвященная гомоморфизмам эмпирических систем с отношениями в числовые системы с отношениями.

2. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в порядковой шкале.

3. Ранговые методы математической статистики как инвариантные методы анализа порядковых данных.

4. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в шкале интервалов.

5. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в шкале отношений.

6. Теорема В.В. Подиновского [28]: любое изменение коэффициентов весомости единичных показателей качества продукции приводит к изменению упорядочения изделий по средневзвешенному показателю (доказательство и прикладное значение).

Глава 7. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ (РЕЙТИНГА)

Слово «рейтинг» происходит от англ. *to rate* (оценивать) и *rating* (оценка, оценивание). Рейтинги строят обычно на основе анализа многих показателей, как объективных, так и оцениваемых экспертно. Технологии объединения оценок единичных показателей в групповые и обобщенные также обычно бывают экспертными. Примером достаточно сложного рейтинга является оценка вероятности успешного выполнения инновационного проекта на основе аддитивно-мультипликативной модели оценки рисков (см., например, главу 6 в [1]). Рейтинги используются в различных процедурах принятия решений для оценивания, выбора, планирования. В настоящей главе рассматриваются основные задачи построения рейтингов.

7.1. Оперативные методы принятия решений на основе экспертных оценок

Простые (оперативные) методы экспертных оценок не требуют применения развитого математического аппарата. Тем не менее во многих практически важных случаях их применения вполне достаточно.

Некоторые методы принятия решений в стратегическом менеджменте. Начнем с обсуждения нескольких широко используемых практических инструментов принятия решений в стратегическом менеджменте [2, 3].

Исходные пункты стратегического планирования:

— структура конкурентов;

— структура рынков сбыта;

— тенденции технического развития и эволюции моды;

— структура рынков снабжения;

— правовая, социальная, экономическая, экологическая и политическая окружающая среда;

— собственные сильные и слабые стороны.

На основе перечисленных данных в соответствии с миссией фирмы выбираются цели на длительную перспективу и анализируются ресурсы, которые для этого необходимы.

Инструменты стратегического планирования: анализ «разрывов»; анализ шансов и рисков (сильных и слабых сторон); анализ портфеля; метод проверочного списка; метод оценки по системе баллов; концепция жизненного цикла товара; иные методы прогнозирования, планирования и принятия решений. Кратко обсудим эти инструменты.

При анализе «разрывов» сравнивают три возможных сценария развития фирмы, разработанные экспертами:

— какого оборота (прибыли и других характеристик работы предприятия) можно достичь, если в будущем в процессе продаж ничего не изменится (сценарий А);

— какого оборота можно достичь, если попытаться при максимальном напряжении сил проникнуть более интенсивно с существующим продуктом на существующие рынки (сценарий Б)

— и если дополнительно развивать новые продукты и/или новые рынки (сценарий В).

Разницу между результатами по сценариям Б и А называют оперативным разрывом, а между результатами по сценариям В и Б — стратегическим разрывом. Эта терминология подчеркивает роль нововведений в стратегическом плане фирмы — разработки новых продуктов или выхода на новые рынки либо и того и другого вместе.

Матрица портфеля Бостонской консалтинговой группы. Может оказаться полезным анализ портфеля предприятия (табл. 7.1). Речь идет не о стратегическом планировании для всего предприятия, а для его «стратегических подразделений». Они выделяются комбинациями «продукт — рынок», которые:

— однородны, т. е. нацелены на определенный достаточно однородный круг потребителей;

— могут действовать независимо от других подразделений предприятия;

— распоряжаются достаточно большой долей рынка, чтобы проведение исследований по разработке специфической стратегии было выгодным.

Границы между «высокими» и «низкими» значениями определяют с помощью опроса экспертов. Внеся товары (с учетом их доли в обороте фирмы) в соответствующие клетки табл. 7.1, можно рассчи-

Таблица 7.1

Матрица портфеля Бостонской консалтинговой группы

Высокий	1. Звезды	3. Знак вопроса
Низкий	2. Дойные коровы	4. Собаки
Рост спроса / рыночная доля	Высокая	Низкая

тать долю особо успешных товаров типа 1 (Звезды), которые, возможно, нуждаются в дальнейшем финансировании для увеличения и закрепления успеха. Хотя рост спроса на товары типа 2 (Дойные коровы) низок, но из-за большой доли рынка они могут еще долго приносить хороший доход на мало меняющихся (стагнирующих) рынках. Судьба товаров типа 3 (Знак вопроса) неясна. Оправданы ли большие финансовые затраты на расширение их доли на рынке? Товары типа 4 (Собаки) «зарабатывают» лишь себе на жизнь.

На основе анализа табл. 7.1 можно проанализировать несколько возможных стратегий развития фирмы:

— «строить», т. е. «Знаки вопроса» переводить в «Звезды»;

— «держать», т. е. «Дойные коровы» должны удерживать свои доли рынка и стремиться к росту, прежде всего для поддержки «Звезд» и «Знаков вопроса»;

— «собирать урожай», т. е. не принимая во внимание долгосрочные последствия, снимать сиюминутные сливки (при этом идет речь о «слабых» — «Дойных коровах», «Собаках» и «Знаках вопроса»);

— «выселяться», т. е. «Собаки» и «Знаки вопроса» забираются с рынка (перестают выпускаться), поскольку они ничего существенного не приносят фирме и не ожидается их рост, и т. д.

Какую стратегию выбрать? Это зависит от руководителей фирмы, которые обычно привлекают экспертов для разработки и принятия управленческих решений. При определении целей и стратегий дальнейшего развития стратегические подразделения нуждаются во взаимной координации, однако, по мнению ряда управленцев, без подавления их самобытности (другими словами, со стороны руководства фирмы должно осуществляться контролируемое децентрализованное руководство). Руководство фирмы должно направить отдельные подразделения на привлекательные рынки, обнаружить и использовать синергетический эффект от их взаимодействия и рационально распределить ресурсы. Так, руководство фирмы должно способствовать тому, чтобы «Дойные коровы» передали часть дохода «Звездам».

В табл. 7.1 сопоставлены такие характеристики вынускаемого товара, как «рост спроса» и «доля рынка». Ясно, что высокий рост соответствует ранней стадии жизненного цикла товара, а низкий — поздней стадии. Обычно выеокая доля рынка сигнализирует о продолжительном периоде получения прибыли, а низкая — о коротком. Так, высокая доля рынка может быть из-за слабой конкуренции. Рыночный лидер может иметь преимущество в издержках на одно изделие — эффект масштаба производства!

Методы списка и суммарной оценки. Широко используемыми и весьма полезными инструментами стратегического планирования и управления являются также метод проверочного списка и метод оценки по системе баллов. Первый из них весьма прост. Выделяется (экспертно!) некоторое количество «факторов успеха» и всем рассматриваемым проектам даются оценки (например, с помощью комиссии экспертов) по этим факторам. Например, в табл. 7.2 представлен бланк проверочного списка для проектов, состоящих в организации выпуска тех или иных товаров (стратегии типа «продукт — рынок»).

Таблица 7.2

Пример проверочного списка

Фактор	Продукт		
	А	Б	В
Степень инноваций	Хорошо	Средне	Плохо
Число возможных покупателей	Плохо	Хорошо	Средне
Готовность к кооперации в торговле	Средне	Хорошо	Хорошо
Барьеры для вхождения новых продавцов	Хорошо	Плохо	Плохо
Обеспеченность сырьем	Плохо	Средне	Хорошо

Обратите внимание: оценки даются в качественном виде (измерены в порядковой шкале — о шкалах измерения см. разд. 6.1). Любая количественная определенность была бы при подобных оценках лишь иллюзией.

Целесообразно разделить факторы на «обязательные», «необходимые» и «желательные», т. е. ввести веса факторов, выраженные в качественном виде. Правило принятия решения может иметь вид: «Форсируй планирование тех стратегий типа «продукт — рынок», при которых все обязательные факторы и по меньшей мере два необходимых соответствуют оценке “хорошо”». Как задают подобные правила принятия решений? Разумеется, с помощью экспертов.

Методу проверочного списка, в котором как оценки отдельных факторов, так и веса факторов и способы принятия решений имеют качественный характер, соответствует количественный двойник — метод суммарной оценки.

Конечно, с числами оперировать гораздо легче, чем с качественными оценками. Недаром математики обычно рвутся «оцифровать» качественные факторы и веса. Но при этом, как мы знаем из теории измерений (см. гл. 6), в окончательные выводы может быть внесен субъективизм, связанный с выбором способа «оцифровки» качественных оценок и весов. Обратите внимание в связи со сказанным на обсуждение ниже методов принятия решений, основанных на применении взвешенных оценок факторов экспертами, где, в частности, даны рекомендации по снижению субъективизма в выборе весов факторов в единой суммарной оценке.

Пример 7.1. Рассмотрим условный пример по вычислению и использованию единой суммарной оценки. Пусть оценки факторов 1 и 2 для продуктов А и Б даны в табл. 7.3 (для простоты изложения мы опускаем способы получения численных значений в табл. 7.3 — на основе объективных данных или экспертно — и не рассматриваем погрешности этих значений).

Для получения суммарной оценки необходимо знать веса факторов. Пусть фактор 1 оценивается экспертами как вдвое более важный, чем фактор 2. Поскольку сумма весов факторов должна составлять 1, то вес фактора 1 есть 0,67, а фактора 2 — 0,33.

Таблица 7.3

Метод суммарной балльной оценки

Фактор	**Продукт**	
	А	**Б**
1	40%	90%
2	50%	20%

Суммарная оценка по продукту А равна

$$0{,}67 \times 40\% + 0{,}33 \times 50\% = 26{,}8\% + 16{,}5\% = 43{,}3\%,$$

а суммарная оценка по продукту Б равна

$$0{,}67 \times 90\% + 0{,}33 \times 20\% = 60{,}3\% + 6{,}6\% = 66{,}9\%.$$

Однако получение суммарных оценок — только этап процесса принятия решений. Нужен еще критерий отбора — какими продуктами заниматься, а какими нет. Простейшая формулировка состоит в задании границы. Если суммарная оценка продукта больше этой границы, то связанная с ним работа по планированию продолжается, если же нет — он исключается из рассмотрения как малоперспективный. Если в рассматриваемом случае такая граница выбрана экспертами на уровне 55%, то работа над продуктом А прекращается, а над продуктом Б — продолжается.

Отметим, что принятие решения на основе границы несколько снижает влияние конкретных правил оцифровки. Например, если для продукта А оценки по факторам А и Б поднимутся на 10% и достигнут соответственно значений 50% и 60%, то суммарная оценка окажется равной

$$0{,}67 \times 50\% + 0{,}33 \times 60\% = 33{,}5\% + 19{,}8\% = 53{,}3\%,$$

т. е. общее решение не меняется, продукт А остается среди малоперспективных.

Менеджер — главное лицо в перспективном планировании. Если прогнозирование — научно-исследовательская работа, ее результаты можно сравнить с прожектором, освещающим основные черты грядущего, то планирование — частный вид принятия решений. Для стратегического планирования могут быть использованы не только те методы подготовки и принятия решений, о которых говорится выше в настоящей главе, но и весь арсенал современной теории разработки и принятия управленческих решений [4–8].

Однако все эти простые приемы или хитроумные компьютерные расчеты — лишь подспорье для менеджера [9]. Именно он несет ответственность за судьбу фирмы. На свое знание дела, на свою интуицию он должен полагаться при принятии решений в стратегическом менеджменте [2, 3, 10].

При обсуждении проблем стратегического менеджмента рассмотрен ряд оперативных приемов принятия решений — анализ «разрывов», анализ шансов и рисков (сильных и слабых сторон), анализ портфеля, метод проверочного списка, метод оценки по системе баллов и др. Такие методы хорошо применять при быстром сравнении вариантов, например, на совещании менеджеров высшего звена. Как именно применять?

Пример 7.2. Рассмотрим в качестве примера матрицу портфеля Бостонской консалтинговой группы. Согласно этому методу подготовки управленческих решений товары, выпускаемые фирмой, распределяются по клеткам табл. 7.1. Однако совершенно ясно, что такое распределение может служить лишь отправной точкой для дальнейшего анализа.

Действительно, необходимо опираться на данные о прибыли и рентабельности тех или иных товаров. Ясно, например, что высокий рост спроса на товар типа «Знак вопроса» может быть обеспечен демпинговой ценой ниже себестоимости.

Необходимо оценить динамику смены марок товаров, понять, насколько долго смогут удержаться на рынке «Дойные коровы», насколько высоко смогут взлететь «Звезды».

Специального рассмотрения заслуживают «Собаки». Возможно, они вытесняются другими товарами. Но возможно и иное — их покупатели представляют собой отдельный рынок, лишь из-за недостатков предварительного анализа присоединенный к общему рынку. Тогда постановка задачи меняется. Руководство фирмы не должно сравнивать «Собак» с другими товарами. Ему следует решить совсем иной вопрос — обслуживать ли сравнительно небольшой рынок покупателей «Собак» или же отдать его конкурентам.

Бесспорно совершенно, что обоснованные решения не могут приниматься на основе только анализа матрицы портфеля Бостонской консалтинговой группы. Впрочем, это верно и для любого иного метода подготовки решений. Только всесторонний анализ с использованием многих методов может дать руководству организации необходимые аргументы для принятия обоснованного решения. Но и в этом случае ответственность лежит на «лицах, принимающих решение» — на менеджерах.

Оперативных приемов принятия решений, или, в другой терминологии, простых методов принятия решений, существует весьма много. Один из них — изложить ситуацию в письменном виде. Эта простая рекомендация часто оказывается весьма полезной. Дело в том, что при составлении описания приходится уточнять многие факты и оценки, которые обычно не удается сопоставить при размышлениях. Далее, письменное описание подсказывает различные альтернативы действий, а также оценки последствий этих альтернатив. Изложение ситуации в письменном виде во многом снимает эмоциональную составляющую при принятии решения, а также дает исходные данные и варианты действий для аналитического разбора.

Иногда рекомендуют проводить первичную формализацию описания ситуации, например, в виде ответов на вопросы типа:

1. Совместим ли рассматриваемый вариант решения с моими нравственными принципами?
2. Что я выиграю при этом варианте решения?
   а) деньги;
   б) время;
   в) известность;
   г) уверенность;
   д) удовольствие и т. д.
3. Что я потеряю при таком решении?
   а) деньги;
   б) время и т. д. (см. вопрос 2);
4. Какие новые возможности у меня появятся?
5. Какие новые задачи встанут передо мной?
6. Какие обязанности у меня появятся?
7. Какая новая ситуация для меня возникнет?
8. Каких побочных действий я должен ожидать?
   а) положительных;
   б) отрицательных.
9. Принесу ли я вред обществу или другим людям?
10. Принесу ли я пользу обществу или другим людям?
11. Возникнут ли в результате моего решения новые проблемы?
12. Потребуются ли новые решения? И т. д.

Можно выделить этапы анализа ситуации, подготовки и принятия решения, анализа последствий [11]:

1. Уяснить ситуацию.
2. Установить наличие проблемы, подлежащей решению.
3. Сформировать возможные решения.
4. Описать последствия решений.
5. Выбрать решение.
6. Обобщить накопленный опыт принятия решений.

Целесообразно уточнить содержание каждого из перечисленных этапов. Например, для уяснения ситуации целесообразно ответить на пять вопросов:

1. КТО должен или обязан (или хочет) принять решение?

2. ГДЕ (в каком месте, в каком окружении, в какой среде, при каких обстоятельствах) предстоит принимать решение?

3. КОГДА (до какого срока или насколько часто, с какой периодичностью) необходимо принимать решение?

4. КАК (каким образом, в какой форме, каким документом) должно быть выражено решение?

5. ЧТО обусловливает решение? Зачем оно нужно? В чем его цель? Какой замысел лежит в его основе? Для чего оно служит? Зачем его надо принимать?

После того как ситуация обдумана, с помощью квалифицированных экспертов получены ответы на поставленные вопросы, необходимо рассмотреть варианты решений. Рассмотрим пример.

Пример 7.3. На столе у секретаря начальника звонит телефон. Звонящий задает вопрос по делам фирмы, но такой, на который не может ответить ни секретарь, ни ее начальник. Как должна реагировать секретарь? И какой следует ожидать реакции у звонящего?

Реакция секретаря № 1. Она объясняет звонящему, что не может сообщить необходимые сведения, и соединяет его с нужным сотрудником.

Реакция звонящего № 1. Он будет признателен секретарю за то, что его быстро соединили с человеком, который может его компетентно и с достаточной полнотой проинформировать.

Реакция секретаря № 2. Она просит звонящего подождать у аппарата и бежит через все здание, чтобы получить нужную ему информацию.

Реакция звонящего № 2. Он будет раздражен, поскольку будет вынужден бессмысленно прождать длительное время у телефона, чтобы в конце концов узнать, что информации, которую ему здесь сообщили, недостаточно.

Побочный результат. В течение длительного времени телефон руководства фирмы будет занят.

Реакция секретаря № 3. Она адресует звонящего к начальнику, который, естественно, также не сможет ему помочь.

Реакция звонящего № 3. Он будет раздражен, поскольку будет вынужден провести телефонные разговоры с двумя сотрудниками фирмы, но не получит нужной ему информации.

Побочный результат — тот же, что и в предыдущем случае.

Реакция секретаря № 4. Она возвращает звонящего к коммутатору фирмы, так как не может быть ему полезной.

Реакция звонящего № 4. Он и на этот раз будет раздражен, так как только потерял время.

Очевидно, только первый вариант решения можно признать правильным. Отметим, однако, что для его реализации в распоряжении секретаря должны быть соответствующие технические средства, позволяющие перевести телефонный вызов на номер нужного сотрудника.

В рассмотренном примере сравнение вариантов решения нетрудно провести непосредственно. Однако в большинстве задач принятия решений целесообразно с помощью экспертов выделить перечень факторов, на основе значений которых и целесообразно сравнивать варианты решений.

Пример 7.4. Петя Иванов оканчивает МГТУ им. Н.Э. Баумана и выбирает место работы. У него есть четыре варианта. Приведем их экспертную оценку.

А. Поступить в аспирантуру МГТУ им. Н.Э. Баумана. Стипендия ничтожна, но есть возможности для подработки. Лет через 5 можно стать доцентом всемирно известного вуза, работать по совместительству преподавателем, консультантом, сотрудником той или иной фирмы.

Б. Пойти инженером на крупное предприятие, ранее входившее в военно-промышленный комплекс (ВПК), а ныне имеющее постоянный пакет заказов, в том числе зарубежных.

В. Стать сотрудником малого предприятия, выполняющего конкретные заказы, и получать оплату с каждого выполненного заказа.

Г. Пойти компьютерщиком в филиал зарубежной экспортно-импортной фирмы.

Как сравнивать эти варианты? Рассмотрим естественные факторы и их экспертную оценку для четырех возможных мест работы.

Оплата труда. На настоящий момент — нарастает от А до Г.

Перспективы роста (в том числе оплаты). Наиболее велики в А, имеются в Б, практически отсутствуют в В и Г.

Устойчивость рабочего места. Наибольшая в А, значительная в Б, малая в В и Г.

Начальство. Знакомое и уважаемое в А, солидное и хмурое в Б, несерьезное, но активное в В, строгое и малопонятное в Г.

Коллектив. Знакомый и приемлемый в А, понятный и благожелательный в Б, конкурентный (борьба за заказы и тем самым за доходы) в В, пропитанный стукачеством в Г.

Криминальность. Отсутствует в А и Б, постоянна (хотя и сравнительно мелкая) в В, возможна в Г (причем в крупных размерах).

Режим. Весьма свободный в А, жесткий (вход и выход по пропускам в заданное время) в Б, «полосатый» в В (вообще-то свободный, но если начальство прикажет…), тюремного типа в Г (фиксированы двери, через которые можно проходить, за питье чая на рабочем месте — штраф в размере 10% месячной оплаты и т. п.)

Время на дорогу до места работы. Ближе всего В, затем Г, А и Б.

Ограничимся этими восемью факторами. Для принятия решения целесообразно составить таблицу, в которой строки соответствуют факторам, столбцы — возможным вариантам решения, а в клетках таблицы стоят оценки факторов для соответствующих вариантов таблицы. Пусть для определенности в качестве возможных оценок используются числа 1, 2, 3, …, 9, 10, причем наихудшее значение — это 1, а наилучшее — это 10. Пусть экспертное мнение Пети Иванова (или результат проведенного им экспертного исследования) выражено в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Оценки фактов при выборе места работы

№ п/п	Фактор	МГТУ им. Н.Э. Баумана	Крупное предприятие	Малое предприятие	Зарубежная фирма
1	Оплата труда	1	5	10	9
2	Перспективы роста	10	7	1	2
3	Устойчивость	10	9	3	4
4	Начальство	8	6	4	2
5	Коллектив	9	7	2	1
6	Криминал	10	8	1	2
7	Режим	10	4	7	1
8	Время на дорогу	5	3	10	7
	Сумма баллов	63	49	37	28

Непосредственный анализ данных табл. 7.4 не позволяет Пете Иванову сделать однозначный вывод. По одним показателям лучше один вариант, по другим — другой. Надо как-то соизмерить факторы. Проще всего приписать им веса, а затем сложить произведения весов на оценки факторов для каждого из вариантов (такой подход имеет недостатки, которые обсуждаются ниже). А какие веса взять? Проще всего считать все факторы равноценными, т. е. взять их с одинаковыми весами — единичными. Тогда следует сложить баллы, приписанные факторам. Результаты приведены в последней строке. По сумме баллов на первом месте — МГТУ им. Н.Э. Баумана, на втором — крупное предприятие, на третьем — малое предприятие, на последнем — филиал зарубежной фирмы.

Аналогичным образом проводится технико-экономический анализ во многих реальных ситуациях.

Пример 7.7. В табл. 7.5 дается сравнительная характеристика по факторам конкурентоспособности главных производителей изделий из стекловаты. Помимо непосредственного сравнения производителей, подобная таблица дает возможность подготовить решения по мерам повышения конкурентоспособности, а также указать возможные пределы продвижения. Так, согласно данным табл. 7.5, ПАО «Мостермостекло» по конкурентоспособности находится на уровне одного из своих основных конкурентов и проигрывает второму 4 балла. Однако, повысив удобство монтирования на 1 балл (и дойдя до уровня худшего из своих конкурентов по этому фактору), перейдя к более привлекательной системе скидок (набрав при этом 2 балла), а также усилив рекламные мероприятия на 2 балла (и дойдя до уровня худшего из своих конкурентов по этому фактору), оно увеличит сумму баллов на 5 и станет лучшим.

Таблица 7.5

Сравнительная характеристика главных производителей изделий из стекловаты по факторам конкурентоспособности

№ п/п	Фактор конкурентоспособности	ПАО «Мостермо-стекло»	Главные конкуренты	
			URSA	ISOVER
1	Товар			
1.1	Качество	5	5	5
1.2	ТЭП	5	4	4
1.3	Престиж торговой марки	3	4	5
1.4	Кашировка	5	5	5
1.5	Удобство монтирования	3	4	5
1.6	Наличие сертификатов	5	5	5
2	Цена			
2.1	Продажная	5	3	2

Окончание табл. 7.5

№ п/п	Фактор конкурентоспособности	ПАО «Мостермо-стекло»	Главные конкуренты	
			URSA	ISOVER
2.2	Скидки с цены	2	4	0
3	Продвижение товаров на рынках			
3.1	Реклама, участие в выставках и т. д.	2	5	4
	Общее количество баллов	35	39	35

Примечание. ТЭП — технико-экономическое планирование. Кашировка — дополнительное покрытие.

Ясно, что такая характеристика объекта экспертизы, как общее число баллов, обладает очевидным недостатком — все факторы считаются равноценными, входят в итоговый (обобщенный) показатель на равных правах, с одинаковым весом.

7.2. Веса факторов

В практике разработки управленческих решений приходится иногда вводить веса факторов.

Пример 7.6. При подготовке организационно-экономического обеспечения реализации проекта установки газоочистного оборудования на ПАО «Магнитогорский металлургический комбинат» сравнивались четыре проекта (табл. 7.6).

Проекты оценивались по «интегральному итоговому показателю качества проекта», равному сумме (по всем факторам) произведений значения фактора на вес этого фактора. Для таблиц 7.4 и 7.5 все веса были единичными, для табл. 7.6 веса приведены в правом столбце. (Значения весов обычно определяют с помощью экспертов.) В соответствии с «интегральным итоговым показателем качества проекта» наилучшим является проект «Россия-2», далее следует проект «Швеция», затем — проект «Россия-1», и замыкает четверку проект «Украина». В соответствии с рассматриваемым подходом надо рекомендовать принять к исполнению проект «Россия-2».

Таблица 7.6

Балльная оценка проектов

№ п/п	Приведенные показатели качества	Россия-1	Россия-2	Украина	Швеция	Вес
1	Наработка на отказ	0,9125	0,975	0,9	1	7
2	Назначенный срок службы до списания	0,72	1	0,8	1	6
3	Назначенный срок службы до капитального ремонта	0,9	1	0,8	1	6
4	Среднее время восстановления	0,897	0,959	0,886	1	5
5	Установленный срок сохраняемости	1	1	0,667	0,667	4
6	Энергетические затраты на очистку 1000 м^3 газа	0,852	0,958	0,852	1	9
7	Масса	0,886	0,972	0,875	1	8
8	Степень очистки	1	1	0,999	1	10
9	Полная стоимость проекта	0,877	1	0,860	0,662	9
10	Срок исполнения	0,8	1	0,667	1	7
Интегральный итоговый показатель качества проекта		56,46	63,20	53,76	59,62	

Много ценных рекомендаций по разработке управленческих решений содержится в книгах проф. Б.Г. Литвака [6, 12].

Декомпозиция задач принятия решения. Естественным является желание разбить сложную задачу принятия решения на несколько, чтобы воспользоваться возможностью решать их по очереди.

Пример 7.7. Простейшим вариантом является дихотомическая схема для наглядного представления возможных решений [11]. Например, необходимо решить задачу: «Как встречать Новый год?» По мнению экспертов, на первом шаге надо выбрать одно из двух возможных решений:

1) остаться дома;

2) уехать.

В каждом из двух случаев возникает необходимость принять решения второго уровня. Так, в первом случае:

1.1) пригласить гостей;

1.2) не звать гостей.

Во втором случае:

2.1) уехать к родственникам или знакомым;

2.2) уехать в общедоступные места (отправиться в путешествие, пойти в клуб или ресторан и т. п.).

После двух шагов получили четыре возможных решения. Каждое из них, вообще говоря, предполагает дальнейшее деление. Так, например, вариант «пригласить гостей» приводит к дальнейшему обсуждению их списка. При этом могут сопоставляться различные варианты. Например, что предпочесть — гастрономические утехи за телевизором в хорошо знакомой компании или бурное обсуждение злободневных проблем или нравов далеких стран с интересными людьми, с которыми давно не встречались?

Вариант «остаться дома и не звать гостей» также имеет свои варианты. Можно проводить новогоднюю ночь в семейном кругу, и одна из решаемых при этом задач — какую программу телевидения смотреть. А можно лечь спать вскоре после полуночи, например, в случае болезни или после долгой тяжелой работы.

Вариант «уехать к родственникам или знакомым» также требует дальнейших решений. Поездка связана с поддержанием родственных отношений или с желанием получить удовольствие? Какую пищу Вы предпочитаете — физическую или духовную (гастрономические утехи или интересную беседу)?

Оставшийся четвертый вариант «уехать в общедоступные места» предполагает еще больше возможностей выбора. Можно остаться в своем городе, отправиться в другой город (например, из Москвы в Смоленск), выехать на природу (на горнолыжную базу, на курорт), пересечь границу. А тут возможностей масса — все страны, все континенты, можно покататься на слоне в Таиланде, искупаться в Атлантическом океане или побродить по Парижу.

Итак, рядовая задача принятия решения «Как встречать Новый год?» при проработке превращается в выбор из невообразимого количества вариантов. При этом нет необходимости доходить до перечня конкретных вариантов (выехать 28 декабря таким-то поездом туда-то), поскольку решения, очевидно, принимаются последовательно, и решение «остаться дома» делает ненужным рассмотрение всех туристических маршрутов.

Что дает нам декомпозиция решений? Пример 7.7 демонстрирует, как несколько принятых друг за другом решений позволяют справиться с многообразием вариантов. При принятии решений может использоваться весь арсенал теории принятия решений, такие понятия, как цели, критерии, ресурсы, риски и др., однако довольно часто решения принимаются на интуитивном уровне, без введения в обсуждение перечисленных понятий.

Дерево решений. Довольно часто удобно представить варианты графически. Обычно возможные решения представляют в виде одного из видов графов — дерева (рис. 7.1). Строго говоря, это перевернутое дерево. Корнем является исходная задача — «Как встречать Новый год?». От него идут две ветви — к вариантам «Остаться дома» и «Уехать». От этих вариантов, в свою очередь являющихся задачами принятия решений («Что делать, оставшись дома?» и «Куда уехать?»), ветки ведут к вариантам задач принятия решений следующего порядка (рис. 7.1).

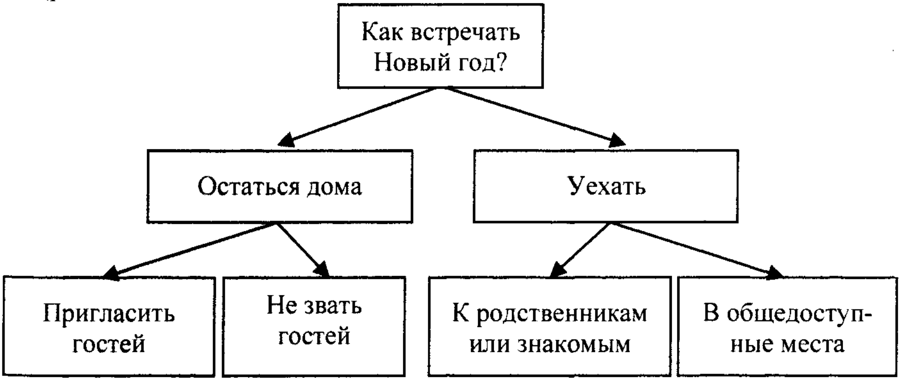

Рис. 7.1. Дерево решений — дихотомическая схема для наглядного представления возможных решений

Пример 7.8. Приведем начало (корень) «Дерева решений проекта», использованного в практической работе.

Задача предприятия — производить качественные изделия из стекловолокна, так как растет потребность в утеплителях и расширяется рынок. Необходимо сделать выбор из двух вариантов:

1) работать на существующем оборудовании;

2) провести реконструкцию цеха.

Этот перечень дают эксперты. Обратите внимание, что вариант «ликвидировать предприятие» эксперты считают неприемлемым.

При выборе первого варианта следует иметь в виду, что мощности оборудования не столь большие, чтобы обеспечить возросшую потребность (из-за физического износа линии), а качество производимой продукции не соответствует международным требованиям (т. е. необходимо учитывать моральный износ линии). Поэтому следует ожидать, что даже в условиях предполагаемого повышенного спроса выпущенные на существующем оборудовании материалы не будут полностью востребованы (реализация будет падать), соответственно, мощность производства не будет расти.

При выборе второго варианта решения после реконструкции производительность увеличивается в 2 раза по сравнению с существующей технологической линией, качество выпускаемой предприятием продукции будет соответствовать международным требованиям, оно сможет конкурировать с главными производителями стекловаты. Повысятся основные технико-экономические показатели. Однако существует определенный риск проекта, поскольку необходимы большие капитальные вложения (бóльшая часть которых — из заемных источников).

Дальнейшее построение дерева решений здесь достаточно очевидно. От варианта «Работать на существующем оборудовании» пойдут линии к решениям, связанным с упрощением ассортимента выпускаемой продукции, поиском ниши рынка, готовой принимать продукцию более низкого качества, и т. д. Это — курс на выживание в условиях отставания от научно-технического прогресса, вплоть до ликвидации предприятия. В некоторых экономических условиях ликвидация предприятия — это оптимальный выход, хотя эксперты от него оказались на начальном этапе анализа.

От варианта «Провести реконструкцию цеха» пойдут линии двух типов — сначала «технологические», а затем «финансовые». Сначала надо выбрать конкретный вариант реконструкции и подготовить бизнес-план соответствующего инвестиционного проекта. Затем необходимо обеспечить финансовые поступления для выполнения этого инвестиционного проекта, обеспечив минимальный риск для предприятия. Здесь проблема — выбор кредиторов и заемщиков, заключение с ними договоров на приемлемых условиях.

Кроме последовательного принятия решений, декомпозиция задач принятия решений используется для «разделения проблем на части». При этом результатом декомпозиции является не выбор одного из большого числа вариантов, как при последовательном принятии решений, а представление решаемой задачи в виде совокупности более мелких задач, в пределе — таких задач, методы решения которых известны.

Пример 7.9. Рассмотрим проблему борьбы с транспортным шумом [11]. Целесообразно выделить мероприятия:

1) связанные с источником шума;

2) на месте проявления шума;

3) на пути распространения шума;

4) относящиеся ко всей системе транспортных средств;

5) связанные с реконструкцией транспортной системы и разработкой способов ее технико-экономической оценки.

В отличие от примера 7.7, здесь не идет речь о том, чтобы выбрать один из вариантов решения. Наоборот, для эффективной борьбы с транспортным шумом необходимо использовать все ветви, все пять типов мероприятий.

Источник шума — это автомашина. Поэтому сразу выделяются три направления воздействия на ситуацию:

1.1) конструкция автомашины (включая регулировку ее узлов);

1.2) топливо;

1.3) дорога.

Непосредственная защита от шума может быть индивидуальная — шлемы, наушники, вставки в уши — беруши (сокращение от «берегите уши»). А может быть и коллективная (звуконепроницаемые оконные рамы, стены со звукоизоляцией). Поэтому мероприятия на месте проявления шума естественным образом делятся на два класса:

2.1) индивидуальная защита от шума;

2.2) подавление шума в зданиях.

Можно ослабить шум «по дороге». Хорошо известны различные способы для этого:

3.1) сооружение звукозащитных стен и экранов, отражающих звуковые волны в безопасных направлениях;

3.2) создание звукозащитных полос из деревьев и кустарников;

3.3) противошумное расположение зданий на местности (как по расстоянию от источника шума, так и по ориентации зданий относительно него и друг друга.

Снижение шума возможно также с помощью различных мероприятий, относящихся ко всей системе транспортных средств. Речь идет о рациональной организации движения в рамках действующей транспортной системы. Эта рациональная организация осуществляется региональными властями административными и частично организационно-экономическими методами. Примеры подобных мероприятий:

4.1) направление транзитного транспорта в объезд крупных городов;

4.2) ограничение движения транспорта в определенные часы или по определенным улицам;

4.3) планирование движения транспорта — по времени, по скорости, по маршрутам.

Наконец, необходимо обсудить мероприятия, нацеленные на будущее. Они связаны с реконструкцией транспортных систем и разработкой способов ее технико-экономической оценки. Каков должен быть транспорт будущего? Ясно, что в нем должны быть предусмотрены меры, направленные на снижение шумовой нагрузки. Технико-экономическая оценка транспортных систем будущего должна определяться с учетом шумовой нагрузки. Выразим это как

5.1) шумоподавление в проектируемых и реконструируемых транспортных системах.

Таким образом, одна исходная задача породила 12 новых. Надо не выбирать одну из них, а решать все 12. Однако каждая из 12 является более конкретной, чем исходная. Ее легче решить (после дальнейшей декомпозиции), чем исходную.

Декомпозиция задач принятия решений «от ветвей к корню». До сих пор мы разбирали ситуации, когда задача принятия решения разбивалась на составляющие (с целью уточнения постановки и выбора одной из конкретных формулировок либо с целью разделить одну большую задачу на ряд более мелких). Рассмотрим теперь противоположный процесс, когда конкретные потребности бизнес-процессов организации порождают единый комплекс задач принятия решений.

Пример 7.10. Рассмотрим процесс декомпозиция задач принятия решений «от ветвей к корню» на примере формирования задач службы контроллинга организации. Для многих организаций актуальны следующие проблемы.

1. Отсутствие оперативной информации о производственных процессах требует внедрения на предприятии системы производственного учета.

2. Высокий уровень накладных расходов в общей сумме затрат заставляет заниматься выявлением мест возникновения «ненужных» затрат.

3. Излишне большая величина незавершенного производства влечет необходимость разработки системы управления заказами.

4. Отсутствует эффективный механизм контроля над деятельностью службы закупок. Имеется лишь эпизодический контроль со стороны руководства организации. Это обусловливает необходимость разработки организационно-экономического механизма, позволяющего контролировать уровень цен на закупаемые материалы.

5. Накладные расходы планируются на предприятии по факту предыдущего периода. Это требует внедрения процесса бюджетирования.

6. Используемая система показателей недостаточна для управления предприятием. Следовательно, необходима разработка системы показателей финансово-хозяйственной, производственной и социальной деятельности предприятия.

7. У руководства предприятия отсутствует системное представление о деятельности предприятия. Для принятия обоснованных решений по управлению предприятием необходимо создание аналитической службы поддержки принятия таких решений.

Для решения семи перечисленных актуальных проблем принятия решений при управлении предприятием вытекает необходимость специальной интегрирующей службы — службы контроллинга. В результате экспертного анализа становится вполне очевидно, что все «ветви» в рассматриваемой задаче декомпозиции направлены к одному «корню», и этот «корень» описывает задачи принятия решений, поддерживаемые службой контроллинга [5, 8].

До сих пор в процессе декомпозиции все задачи одного уровня считались равнозначными, весовые коэффициенты не вводились. Однако иногда оказывается полезным различные варианты рассматривать с теми или иными коэффициентами. Обычно весовые коэффициенты (синонимы — коэффициенты важности, весомости, значимости, существенности) определяют с помощью экспертного исследования.

Пример 7.7. Необходимо разработать процедуру принятия решений, связанных с оценкой эффективности разрабатываемого медицинского прибора (магнитного сепаратора). С точки зрения экспертов, для вычисления обобщенного показателя качества и технического уровня подобных приборов естественно провести декомпозицию на три задачи принятия решений соответственно трем группам показателей:

1) основные показатели назначения;

2) экономические условия потребления;

3) условия обслуживания.

Пусть X — оценка по первой группе показателей, Y — по второй, Z — по третьей. Первая оценка учитывается с весовым коэффициентом 0,6, вторая — 0,2, третья — также 0,2 (сумма трех весовых коэффициентов равна 1). Таким образом, обобщенный показатель качества и технического уровня медицинского прибора оценивается как

$$W = 0{,}6X + 0{,}2Y + 0{,}2Z.$$

На следующем шаге декомпозиции в каждой из трех групп выделяются единичные показатели качества и технического уровня. Так, для блока «основных показателей назначения» выделяют:

1.1) степень очистки $X(1)$;

1.2) время очистки $X(2)$;

1.3) масса субстрата $X(3)$;

1.4) вероятность повреждения здоровых клеток $X(4)$.

Им также приписывают весовые коэффициенты 0,44, 0,09, 0,18, 0,29 соответственно (сумма весовых коэффициентов равна 1). Поэтому оценка по основным показателям назначения вычисляется как

$$X = 0{,}44X(1) + 0{,}09X(2) + 0{,}18X(3) + 0{,}29X(4).$$

Для блока «экономические условия потребления» выделяют два единичных показателя:

2.1) методы сепарации $Y(1)$;

2.2) патентная чистота $Y(2)$.

Им также приписывают весовые коэффициенты 0,74 и 0,26 соответственно (сумма весовых коэффициентов равна 1). Поэтому оценка по экономическим условиям потребления вычисляется как

$$Y = 0{,}74Y(1) + 0{,}26Y(2).$$

Для блока «условия обслуживания» выделяют три единичных показателя:

3.1) режим работы $Z(1)$;

3.2) эргономика $Z(2)$;

3.3) надежность $Z(3)$.

Им также приписывают весовые коэффициенты 0,55, 0,14 и 0,31 соответственно (сумма весовых коэффициентов равна 1). Поэтому оценка по блоку «условия обслуживания» вычисляется как

$$Z = 0{,}55Z(1) + 0{,}14Z(2) + 0{,}31Z(3).$$

Таким образом, описан алгоритм декомпозиции в задаче принятия решения относительно оценки эффективности медицинского прибора. Для вычисления обобщенного показателя качества и технического уровня необходимо получить оценки девяти единичных показателей. Обычно это делают с привлечением экспертов, сопоставляющих разрабатываемый прибор с отечественными и зарубежными аналогами. Применение подобных показателей уже продемонстрировано выше на примерах сумм баллов и взвешенных сумм баллов. Однако только здесь показано, как могут обоснованно строиться системы факторов на основе идеи декомпозиции. В соответствии с этой идеей по единичным показателям строятся групповые показатели, а затем по групповым — итоговый обобщенный показатель. Использованы три уровня иерархии — уровень единичных показателей, уровень групповых показателей и верхний уровень, на котором находится обобщенный показатель. Может применяться и большее число уровней.

Для нахождения весовых коэффициентов обычно используют оценки экспертов. При этом для каждой группы показателей, а также при присвоении весов группам на верхнем уровне декомпозиции могут применяться свои экспертные процедуры и опрашиваться свои эксперты. Это важное преимущество рассматриваемой процедуры обеспечивается тем, что сумма весовых коэффициентов каждый раз равняется 1.

Дело в том, что из приведенных выше соотношений следует, что для вычисления обобщенного показателя качества и технического уровня можно использовать непосредственно оценки единичных показателей:

$$\begin{gathered} W = 0{,}6X + 0{,}2Y + 0{,}2Z = 0{,}6\,(0{,}44\,X(1) + 0{,}09\,X(2) + 0{,}18\,X(3) + \\ + 0{,}29\,X(4)) + 0{,}2\,(0{,}74Y(1) + 0{,}26Y(2)) + 0{,}2\,(0{,}55Z(1) + 0{,}14Z(2) + \\ + 0{,}31Z(3)) = = 0{,}264\,X(1) + 0{,}054X(2) + 0{,}108\,X(3) + 0{,}174X(4) + \\ + 0{,}148Y(1) + 0{,}052\,Y(2) + 0{,}11Z(1) + 0{,}028Z(2) + 0{,}062Z(3). \end{gathered}$$

Сумма итоговых девяти весовых коэффициентов, естественно, равна 1, поскольку так построена схема декомпозиции.

С первого взгляда может показаться рациональной оценка этих девяти коэффициентов непосредственно (с помощью экспертов). Ряд специалистов критикует такое предложение [13], поскольку экспертам крайне трудно обоснованно разбить 1 на 9 слагаемых, а вот на 3 слагаемых, соответствующих группам, а внутри каждой — на 2–4 слагаемых гораздо легче. Из сказанного выше ясно, что пошаговый метод декомпозиции дает возможность более точно сопоставить весовые коэффициенты (отдельно внутри групп, отдельно группы между собой), чем это можно сделать при объединении всех единичных показателей вместе.

Рассмотренные выше способы усреднения значений единичных показателей — это фактически применение средних взвешенных арифметических для значений единичных показателей. Целесообразно обратить внимание на возможность применения иных видов средних величин — средних взвешенных геометрических, средних взвешенных степенных, взвешенных медиан и др. А также на подходы и результаты теории измерений, позволяющие выбирать наиболее адекватные виды средних величин в соответствии с используемыми шкалами измерения (см. главу 6).

В теории и практике экспертных оценок накоплено большое число различных экспертных технологий подготовки и принятия решений, как относительно простых, так и основанных на изощренной математической технике. В [2, 14] подробно рассмотрены подходы к принятию решений, основанные на оптимизационных, вероятностно-статистических и экспертных методах, а также метод моделирования и различные виды моделей, используемых в теории и практике принятия решений.

Наши рассмотрения указывают на большую роль экспертных оценок при построении и использовании рейтингов. Для полноты изложения укажем, что иногда роль субъективных мнений экспертов достаточно мала и проявляется только при построении рейтинга.

Пример 7.12. Согласно официальной методике рейтинговой оценки отраслей промышленности Самарской области (http://raso.samara.ru/rating/prom/metodika) рейтинг предприятий формируется по следующим 9 показателям:

1) рост выручки от реализации в рассматриваемом году по сравнению с предыдущим годом, в %;

2) производительность труда, в рублях на одного занятого;

3) рентабельность активов по чистой прибыли, в %;

4) затраты на рубль продукции, в рублях;

5) коэффициент текущей ликвидности (в среднем за год);

6) коэффициент обеспеченности оборотных активов собственными средствами;

7) степень платежеспособности по текущим обязательствам;

8) коэффициент общей оборачиваемости активов;

9) изменение величины чистых активов за рассматриваемый год, в %.

Предприятия группируются по отраслям промышленности (электроэнергетика; нефтедобыча, нефтепереработка, химия и нефтехимия; машиностроение; промышленность строительных материалов; легкая, мебельная и деревообрабатывающая; пищевая).

Рейтинговая оценка предприятий Самарской области строится на основе рейтинговой шкалы, построенной для среднероссийских условий. Ряд значений каждого из 9 показателей по совокупности предприятий разбивается на квартильные группы по степени успешности: 25% самых лучших — группа А, следующие — В, С и D. Таким образом, финансово-хозяйственная успешность предприятия характеризуется набором из 9 букв (по числу показателей). Рейтинговая оценка условного предприятия по 9 показателям может выглядеть следующим образом: ААВСВАААВ. Интегральная рейтинговая оценка строится как средняя из оценок по каждому показателю. При этом для расчета средней величины каждой букве придается численное значение: А = 4, В = 3, С = 2, D = 1; соответственно рейтинговая оценка может варьировать от 1 (минимальное значение) до 4 (максимальное значение).

При разработке этой методики на основе мнений экспертов был выбран метод кодирования значения показателя — установлено число градаций (4, а не 2 или 7) и заданы границы областей. От шкал отношений произведен переход к порядковым, ибо рейтинговая оценка вида ААВСВАААВ является результатом измерения по 9 порядковым шкалам. Затем на основе мнений экспертов происходит оцифровка по выбранному ими правилу: А = 4, В = 3, С = 2, D = 1. Из теории измерений следует, что такой способ сравнения (рейтингования) предприятий является некорректным. Проблемы практического использования подобного рода методик рассмотрены выше в главе 6.

7.3. Бинарные рейтинги

Перейдем от примеров и простых методов к математической теории рейтингов. Существенная часть этой теории, посвященная построению обобщенных показателей на основе единичных и групповых, измеренных в тех или иных шкалах, содержится в главах 5 и 6.

Определение бинарного рейтинга. В настоящем разделе обсудим наиболее простой случай, когда рейтинговая оценка принимает два значения, для простоты изложения, 0 и 1. Такие рейтинги будем называть *бинарными.* Например, потенциальный клиент банка может быть кредитоспособным или нет, сам банк — надежным или нет, больной — тяжелым или нет. Для выбора одного из двух возможных решений достаточно, чтобы рейтинговая оценка принимала два значения.

Иногда проводят избыточную работу, строя рейтинг с большим числом значений, например, в виде функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от единичных показателей (факторов) $x_1, x_2, \ldots, x_m$. В таких случаях для принятия решения используют некоторое граничное значение K, принимают одно решение, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) < K,$$

и альтернативное, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq K.$$

Можно сказать, что в этом случае для принятия решения используется бинарный рейтинг вида $g(f(x_1, x_2, \ldots, x_m))$, где функция g принимает два значения, а именно, $g(z) = 0$ при $z < K$ и $g(z) = 1$ при $z \geq K$.

На основе бинарных рейтингов можно сконструировать рейтинг с большим числом градаций. Пусть рейтинговая оценка h принимает одно из трех значений $A < B < C$. С ней можно связать два бинарных рейтинга p и q, таких, что для первого из них $p = 0$ при $h < C$ и $p = 1$ при $h = C$, для второго $q = 0$ при $h < B$ и $q = 1$ при $h \geq B$. Ясно, что $h = A$ тогда и только тогда, когда $p = q = 0$, и $h = C$ тогда и только тогда, когда $p = q = 1$, в то время как $h = B$ тогда и только тогда, когда $p = 0$, $q = 1$. Таким образом, использование рейтинга h с тремя возможными значениями эквивалентно использованию двух бинарных рейтингов p и q.

Бинарные рейтинги и дискриминантный анализ. Объект оценки с помощью бинарного рейтинга относится к одному из двух классов. Следовательно, теория бинарных рейтингов — часть теории классификации.

Математическая теория классификации — обширная область прикладной статистики и эконометрики [15, 16]. Какие научные исследования относить к этой теории? Исходя из потребностей специалиста, применяющего математические методы классификации, целесообразно принять, что сюда входят исследования, во-первых, отнесенные самими авторами к этой теории; во-вторых, связанные с ней общностью тематики, хотя бы их авторы и не упоминали термин «классификация». Это предполагает ее сложную внутреннюю структуру.

В литературных источниках наряду с термином «классификация» в близких смыслах используются термины «группировка», «распознавание образов», «диагностика», «дискриминация», «сортировка», «кластер-анализ» и др. Терминологический разнобой связан прежде всего с традициями научных кланов, к которым относятся авторы публикаций, а также с внутренним делением самой теории классификации.

В научных исследованиях по современной теории классификации можно выделить два относительно самостоятельных направления. Одно из них опирается на опыт таких наук, как биология, география, геология, и таких прикладных областей, как ведение классификаторов продукции и библиотечное дело. Типичные объекты рассмотрения — классификация химических элементов (таблица Д.И. Менделеева), биологическая систематика, универсальная десятичная классификация (УДК) публикаций, классификатор товаров на основе штрихкодов.

Другое направление опирается на опыт технических исследований, экономики, маркетинговых исследований, социологии, медицины. Типичные задачи — техническая и медицинская диагностика, в том числе построение бинарных рейтингов. А также, например, разбиение на группы отраслей промышленности, тесно связанных между собой, выделение групп однородной продукции. Обычно используются такие термины, как «распознавание образов» или «дискриминантный анализ». Это направление обычно опирается на математические модели; для проведения расчетов интенсивно используется ЭВМ. Однако относить его к математике столь же нецелесообразно, как астрономию или квантовую механику. Рассматриваемые математические модели можно и нужно изучать на формальном уровне, и такие исследования проводятся. Но направление в целом сконцентрировано на решении конкретных задач прикладных областей и вносит вклад в технические или экономические науки, медицину, социологию, но, как правило, не в математику. Использование математических методов как инструмента исследования нельзя относить к чистой математике.

В 60-х гг. XX в. внутри прикладной статистики достаточно четко оформилась область, посвященная методам классификации. Несколько модифицируя формулировки М. Дж. Кендалла и А. Стьюарта 1966 г. (см. русский перевод [17, с. 437]), в теории классификации выделим три подобласти: дискриминацию (дискриминантный анализ), кластеризацию (кластер-анализ), группировку. Опишем эти подобласти.

В дискриминантном анализе классы предполагаются заданными — плотностями вероятностей или обучающими выборками. Задача состоит в том, чтобы вновь поступающий объект отнести в один из этих классов. У понятия «дискриминация» имеется много синонимов: диагностика, распознавание образов с учителем, автоматическая классификация с учителем, статистическая классификация и т. д.

При кластеризации и группировке целью является выявление и выделение классов. Синонимы: построение классификации, распознавание образов без учителя, автоматическая классификация без учителя, типология, таксономия и др. Задача кластер-анализа состоит в выяснении по эмпирическим данным, насколько элементы «группируются» или распадаются на изолированные «скопления», «кластеры» (от *cluster* (англ.) — гроздь, скопление). Иными словами, задача — выявление естественного разбиения на классы, свободного от субъективизма исследователя, а цель — выделение групп однородных объектов, сходных между собой, при резком отличии этих групп друг от друга.

При группировке, наоборот, «мы хотим разбить элементы на группы независимо от того, естественны ли границы разбиения или нет» [17, с. 437]. Цель по-прежнему состоит в выявлении групп однородных объектов, сходных между собой (как в кластер-анализе), однако «соседние» группы могут не иметь резких различий (в отличие от кластер-анализа). Границы между группами условны, не являются естественными, зависят от субъективизма исследователя. Аналогично при лесоустройстве проведение просек (границ участков) зависит от специалистов лесного ведомства, а не от свойств леса. Поскольку бинарная рейтинговая оценка принимает только два значения, то может случиться так, что близкие по своим параметрам (т. е. похожие) объекты будут иметь разные рейтинги — если две группы, соответствующие определенному значению рейтинга, не имеют резких различий.

Задачи кластеризации и группировки принципиально различны, хотя для их решения могут применяться одни и те же алгоритмы. Важная для практической деятельности проблема состоит в том, чтобы понять, разрешима ли задача кластер-анализа для конкретных данных или возможна только их группировка, поскольку совокупность объектов достаточно однородна и не разбивается на резко разделяющиеся между собой кластеры.

Как правило, в математических задачах кластеризации и группировки основное — выбор метрики, расстояния между объектами, меры близости, сходства, различия. Хорошо известно, что для любого заданного разбиения объектов на группы и любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать метрику, такую, что расстояния между объектами из одной группы будут меньше ε, а между объектами из разных групп — больше $1 / \varepsilon$. Тогда любой разумный алгоритм кластеризации даст именно заданное разбиение.

Понимание и обсуждение постановок задач осложняется использованием одного и того же термина в разных смыслах. Термином «классификация» (и термином «диагностика») обозначают по крайней мере три разные интеллектуальные конструкции: процедуру построения классификации (и выделение классов, используемых при диагностике), построенную классификацию (систему выделенных классов) и процедуру ее использования (правила отнесения вновь поступающего объекта к одному из ранее выделенных классов). Другими словами, имеем естественную триаду: построение — изучение — использование классификации.

Для построения системы диагностических классов используют разнообразные методы кластерного анализа и группировки объектов. Наименее известен второй член триады (отсутствующий у Кендалла и Стьюарта [17]) — изучение отношений эквивалентности, полученных в результате построения системы диагностических классов. Статистический анализ полученных, в частности, экспертами, отношений эквивалентности — часть статистики бинарных отношений и тем самым — статистики объектов нечисловой природы [15, 18–20].

Диагностика в узком смысле слова (процедура использования классификации, т. е. отнесения вновь поступающего объекта к одному из выделенных ранее классов) — предмет дискриминантного анализа. Отметим, что с точки зрения статистики объектов нечисловой природы дискриминантный анализ является частным случаем общей схемы регрессионного анализа, соответствующим ситуации, когда зависимая переменная принимает конечное число значений, а именно — номера классов, а вместо квадрата разности стоит функция потерь от неправильной классификации. Однако есть ряд специфических постановок, выделяющих задачи диагностики среди всех регрессионных задач.

О построении диагностических правил. Задачи построения системы диагностических классов целесообразно разбить на два типа: с четко разделенными кластерами (задачи кластер-анализа) и с условными границами, непрерывно переходящими друг в друга классами (задачи группировки). Такое деление полезно, хотя в обоих случаях могут применяться одинаковые алгоритмы. Сколько же существует алгоритмов построения системы диагностических правил? Иногда называют то или иное число. На самом же деле их бесконечно много, в чем нетрудно убедиться.

Действительно, рассмотрим один определенный алгоритм — алгоритм средней связи. Он основан на использовании некоторой меры близости $d(x, y)$ между объектами x и y. Как он работает? На первом шаге каждый объект рассматривается как отдельный кластер. На каждом следующем шаге объединяются два ближайших кластера. Расстояние между объектами рассчитывается как средняя связь (отсюда и название алгоритма), т. е. как среднее арифметическое расстояний между парами объектов, один из которых входит в первый кластер, а другой — во второй. В конце концов все объекты объединяются вместе, и результат работы алгоритма представляет собой дерево последовательных объединений (в терминах теории графов), или «дендрограмму». Из нее можно выделить кластеры разными способами. Один подход — исходя из заданного числа кластеров. Другой — из соображений предметной области. Третий — исходя из устойчивости (если разбиение долго не менялось при возрастании порога объединения — значит, оно отражает реальность). И т. д.

К алгоритму средней связи естественно сразу добавить алгоритм ближайшего соседа. В этом алгоритме расстоянием между кластерами называется минимальное из расстояний между парами объектов, один из которых входит в первый кластер, а другой — во второй. А также и алгоритм дальнего соседа (когда расстоянием между кластерами называется максимальное из расстояний между парами объектов, один из которых входит в первый кластер, а другой — во второй).

Каждый из трех описанных алгоритмов (средней связи, ближайшего соседа, дальнего соседа), как легко проверить, порождает бесконечное (континуальное) семейство алгоритмов кластер-анализа. Дело в том, что величина $d^a(x, y)$, $a > 0$, также является мерой близости между x и y и порождает новый алгоритм. Если параметр a пробегает отрезок, то получается бесконечно много алгоритмов классификации.

Каким из них пользоваться при обработке данных? Дело осложняется тем, что практически в любом пространстве данных мер близости различных видов существует весьма много. Именно в связи с обсуждаемой проблемой следует указать на принципиальное различие между кластер-анализом и задачами группировки.

Если классы реальны, естественны, существуют на самом деле, четко отделены друг от друга, то любой алгоритм кластер-анализа их выделит. Следовательно, *в качестве критерия естественности классификации следует рассматривать устойчивость относительно выбора алгоритма кластер-анализа.*

Проверить устойчивость можно, применив к данным несколько подходов, например столь непохожие алгоритмы, как «ближнего соседа» и «дальнего соседа». Если полученные результаты содержательно близки, то они адекватны действительности. В противном случае следует предположить, что естественной классификации не существует, задача кластер-анализа не имеет решения, и можно проводить только группировку.

Часто применяется так называемый агломеративный иерархический алгоритм «дендрограмма», в котором вначале все элементы рассматриваются как отдельные кластеры, а затем на каждом шаге объединяются два наиболее близких кластера. Для работы «дендрограммы» необходимо задать правило вычисления расстояния между кластерами. Оно вычисляется через расстояние $d(x, y)$ между элементами x и y. Поскольку $d^a(x, y)$ при $0 < a < 1$ также расстояние, то, как правило, существует бесконечно много различных вариантов этого алгоритма. Представим себе, что они применяются для обработки одних и тех же реальных данных. Если при всех a получается одинаковое разбиение элементов на кластеры, т. е. результат работы алгоритма устойчив по отношению к изменению a (в смысле общей схемы устойчивости, рассмотренной в [21]), то имеем «естественную» классификацию. В противном случае результат зависит от субъективно выбранного исследователем параметра a, т. е. задача кластер-анализа неразрешима (предполагаем, что выбор a нельзя специально обосновать). Задача группировки в этой ситуации имеет много решений. Из них можно выбрать одно по дополнительным критериям.

Следовательно, получаем эвристический критерий: если решение задачи кластер-анализа существует, то оно находится с помощью любого алгоритма. Целесообразно использовать наиболее простой.

Подходы к построению рейтинговых оценок (правил диагностики, прогностических правил). Для решения задач диагностики используют два подхода — параметрический и непараметрический. Первый из них обычно основан на использовании того или иного индекса (рейтинга) и сравнения его с порогом. Индекс может быть построен по статистическим данным, например, как в классическом линейном дискриминантном анализе Фишера [17, 22]. Часто индекс представляет собой линейную функцию от характеристик, выбранных специалистами предметной области, коэффициенты которой подбирают эмпирически. Непараметрический подход связан с леммой Неймана — Пирсона в математической статистике и с теорией статистических решений. Он опирается на использование непараметрических оценок плотностей распределений вероятностей, описывающих диагностические классы.

Обсудим ситуацию подробнее. Математические методы диагностики, как и статистические методы в целом, делятся на параметрические и непараметрические. Первые основаны на предположении, что классы описываются распределениями из некоторых параметрических семейств. Обычно рассматривают многомерные нормальные распределения, при этом зачастую без обоснования принимают гипотезу о том, что ковариационные матрицы для различных классов совпадают. Именно в таких предположениях сформулирован классический дискриминантный анализ Фишера. Как известно, обычно не только нет теоретических оснований считать, что наблюдения извлечены из нормального распределения, но и проверка статистических гипотез согласия с нормальным законом дает отрицательный результат [15, 16]. Известно также, что по выборкам, объем которых не превосходит 50, нельзя сделать обоснованный вывод о принадлежности к нормальному закону [23].

Поэтому более корректными, чем параметрические, являются непараметрические методы диагностики. Исходная идея таких методов основана на лемме Неймана — Пирсона, входящей в стандартный курс математической статистики. Согласно этой лемме решение об отнесении вновь поступающего объекта (сигнала, наблюдения и др.) к одному из двух классов принимается на основе отношения плотностей $f(x) / g(x)$, где $f(x)$ — плотность распределения, соответствующая первому классу, а $g(x)$ — плотность распределения, соответствующая второму классу.

Если плотности распределения неизвестны, то применяют их непараметрические оценки, построенные по обучающим выборкам. Пусть обучающая выборка объектов из первого класса состоит из n элементов, а обучающая выборка для второго класса — из m объектов. Тогда рассчитывают значения непараметрических оценок плотностей $f_n(x)$ и $g_m(x)$ для первого и второго классов соответственно, а диагностическое решение принимают по их отношению. Таким образом, для решения задачи диагностики достаточно научиться строить непараметрические оценки плотности для выборок объектов произвольной природы.

Методы построения непараметрических оценок плотности распределения вероятностей в пространствах произвольной природы подробно рассмотрены в литературе по прикладной статистике и эконометрике [15, 16]. На основе этих оценок могут быть построены непараметрические бинарные рейтинги. Достоинством таких рейтингов является их универсальность, возможность применения без необходимости обоснования трудно проверяемых условий (например, нормальности распределения характеристик объектов оценки). Недостатком является отсутствие явных формул, задающих рейтинг в виде некоторой конкретной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от единичных показателей (факторов) $x_1, x_2, \ldots, x_m$, описывающих объект оценки.

Кроме того, для построения непараметрического бинарного рейтинга нужны обучающие выборки. Например, выборка описаний (объективных и экспертных данных) кредитоспособных потенциальных клиентов банка и аналогичная выборка некредитоспособных — для построения рейтинга кредитоспособности.

7.4. Сравнение рейтингов и линейные рейтинги

Из-за своей простоты популярны линейные рейтинги

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m$$

в виде линейной функции от единичных показателей (факторов) x_1, x_2, …, x_m. Коэффициенты a_1, a_2, …, a_m называют коэффициентами важности (весомости, значимости). Их либо определяют экспертным путем, либо оценивают по статистическим данным, используя обучающие выборки.

Например, строят рейтинг (интегральный показатель, оценку) финансового положения предприятия в виде линейной функции от некоторого количества переменных (показателей, факторов). Эта функция строится с помощью линейного дискриминантного анализа Фишера [22] и используется для принятия решения о финансовом положении предприятия.

Такой подход хорошо известен в эконометрике. В частности, он описан в главе 5 учебника [16]. Подход является устаревшим. Обоснованность его сомнительна, поскольку он основывается на модели многомерного нормального распределения. В настоящее время, как разъяснено в предыдущем разделе, рекомендуется применять непараметрический дискриминантный анализ, основанный на непараметрических ядерных оценках плотностей классов по обучающим же выборкам.

Однако и устаревший подход может дать практически полезные выводы. Обычно его применение разбито на этапы. Первый — построение системы показателей. Сначала составляют возможно более полный исходный перечень (специалисты по финансово-хозяйственной деятельности предприятия выделяют сотни и тысячи показателей). Затем список показателей сокращают. Например, проводят кластер-анализ показателей, оставляя из каждого кластера по одному представителю. Отбор информативного подмножества признаков в дискриминантном анализе — самостоятельный раздел прикладной статистики. Следующий этап — непосредственное построение линейного рейтинга на основе отобранных показателей с помощью алгоритмов дискриминантного анализа Фишера.

По одним и тем же данным могут быть построены различные рейтинги. Например, с помощью обучающих выборок можно построить непараметрический бинарный рейтинг (заданный алгоритмически) и линейный рейтинг. В той же прикладной задаче может оказаться полезным также и линейный рейтинг на основе экспертных оценок коэффициентов.

Обсудим два вопроса. Как сравнивать рейтинги, какой из них лучше? Можно ли вообще использовать линейный рейтинг?

О сравнении алгоритмов диагностики по результатам обработки реальных данных. Из трех этапов развития теории классификации в конкретной области рассмотрим этап применения диагностических правил, когда классы, к одному из которых нужно отнести вновь поступающий объект, уже выделены.

В прикладных исследованиях применяют различные методы дискриминантного анализа, основанные на вероятностно-статистических моделях, а также с ними не связанные, т. е. эвристические, использующие детерминированные методы анализа данных. Независимо от «происхождения», каждый подобный алгоритм должен быть исследован как на параметрических и непараметрических вероятностно-статистических моделях порождения данных, так и на различных массивах реальных данных. Цель такого исследования — выбор наилучшего алгоритма в определенной области применения, включение его в стандартные программные продукты, методические материалы, учебные программы и пособия. Но для этого надо уметь сравнивать алгоритмы по качеству. Как это делать?

Часто используют такой показатель качества алгоритма диагностики, как «вероятность правильной классификации» (при обработке конкретных данных — «частота правильной классификации»). Ниже мы покажем, что этот показатель качества некорректен, а потому пользоваться им не рекомендуется. Целесообразно применять другой показатель качества алгоритма диагностики — описанную далее оценку специального вида так называемого расстояния Махаланобиса между классами. Изложение проведем на примере разработки программного продукта для специалистов по диагностике материалов. Прообразом является диалоговая система «АРМ материаловеда», разработанная Институтом высоких статистических технологий и эконометрики для ВНИИ эластомерных материалов.

При построении *информационно-исследовательской системы диагностики материалов* (ИИСДМ) возникает задача сравнения прогностических правил «по силе». Прогностическое правило — это алгоритм, позволяющий по характеристикам материала прогнозировать его свойства. Если прогноз дихотомичен («есть» или «нет»), то правило является алгоритмом диагностики, при котором материал относится к одному из двух классов. Ясно, что случай нескольких классов может быть сведен к конечной последовательности выбора между двумя классами.

Прогностические правила могут быть извлечены из научно-технической литературы и практики. Каждое из них обычно формулируется в терминах небольшого числа признаков, но наборы признаков сильно меняются от правила к правилу. Поскольку в ИИСДМ должно фиксироваться лишь ограниченное число признаков, то возникает проблема их отбора. Естественно отбирать лишь те их них, которые входят в наборы, дающие наиболее «надежные» прогнозы. Для придания точного смысла термину «надежный» необходимо иметь способ сравнения алгоритмов диагностики по прогностической «силе».

Результаты обработки реальных данных с помощью некоторого алгоритма диагностики в рассматриваемом случае двух классов описываются долями: правильной диагностики в первом классе κ; правильной диагностики во втором классе λ; долями классов в объединенной совокупности π_i, $i=1,2$; $\pi_1+\pi_2=1$.

При изучении качества алгоритмов классификации их сравнивают по результатам дискриминации вновь поступающей контрольной выборки. Именно по контрольной выборке определяются величины $\kappa, \lambda, \pi_1, \pi_2$. Однако иногда вместо контрольной используют обучающую выборку, т. е. указанные величины определяются ретроспективно, в результате анализа уже имеющихся данных. Обычно это связано с трудоемкостью получения данных. Тогда κ и λ зависимы. Однако в случае, когда решающее правило основано на использовании дискриминантной поверхности, параметры которой оцениваются по обучающим выборкам, величины κ и λ асимптотически (при безграничном росте объемов выборок) независимы [24], что позволяет использовать приводимые ниже результаты и в этом случае.

Нередко как показатель качества алгоритма диагностики (прогностической «силы») используют долю правильной диагностики

$$\mu = \pi_1\kappa + \pi_2\lambda.$$

Однако показатель μ определяется, в частности, через характеристики π_1 и π_2, $\pi_1+\pi_2=1$, частично заданные исследователем (например, на них влияет тактика отбора образцов для изучения). В аналогичной медицинской задаче величина μ оказалась больше для тривиального прогноза, согласно которому у всех больных течение заболевания будет благоприятно. Тривиальный прогноз сравнивался с алгоритмом выделения больных с прогнозируемым тяжелым течением заболевания. Он разработан группой под руководством академика АН СССР И.М. Гельфанда. Применение этого алгоритма с медицинской точки зрения вполне оправдано [25].

Другими словами, по доле правильной классификации алгоритм академика И.М. Гельфанда оказался хуже тривиального — объявить всех больных легкими, не требующими специального наблюдения. Этот вывод очевидно нелеп. И причина появления нелепости вполне понятна. Хотя доля тяжелых больных невелика, но смертельные исходы сосредоточены именно в этой группе больных. Поэтому целесообразна гипердиагностика — рациональнее часть легких больных объявить тяжелыми, чем сделать ошибку в противоположную сторону.

Применение теории статистических решений требует знания потерь от ошибочной диагностики, а в большинстве научно-технических и экономических задач определить потери, как уже отмечалось, сложно. В частности, из-за необходимости оценивать человеческую жизнь в денежных единицах. По этическим соображениям это, на наш взгляд, недопустимо. Сказанное не означает отрицания пользы страхования, но, очевидно, страховые выплаты следует рассматривать лишь как способ первоначального смягчения потерь от утраты близких.

Итак, применение теории статистических решений в рассматриваемой постановке вряд ли возможно, поскольку оценить количественно потери от смерти больного нельзя по этическим соображениям. Поэтому, на наш взгляд, долю правильной диагностики μ нецелесообразно использовать как показатель качества алгоритма диагностики.

Для выявления информативного набора признаков целесообразно использовать *метод пересчета на модель линейного дискриминантного анализа*, согласно которому статистической оценкой прогностической «силы» δ является так называемая «эмпирическая прогностическая сила»

$$\delta^* = \Phi\left(d^*/2\right), \quad d^* = \Phi^{-1}(\kappa) + \Phi^{-1}(\lambda),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения вероятностей с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $\Phi^{-1}(y)$ — обратная ей функция [80].

Пример 7.13. Если доли правильной классификации $\kappa = 0{,}90$ и $\lambda = 0{,}80$, то $\Phi^{-1}(\kappa) = 1{,}28$ и $\Phi^{-1}(\lambda) = 0{,}84$, откуда $d^* = 2{,}12$ и эмпирическая прогностическая сила $\delta^* = \Phi^{-1}(1{,}06) = 0{,}86$. При этом доля правильной классификации μ может принимать любые значения между 0,80 и 0,90, в зависимости от доли элементов того или иного класса среди анализируемых данных.

Если классы описываются выборками из многомерных нормальных совокупностей с одинаковыми матрицами ковариаций, а для классификации применяется классический линейный дискриминантный анализ Р. Фишера, то величина d^* представляет собой состоятельную статистическую оценку так называемого расстояния Махаланобиса между рассматриваемыми двумя совокупностями (конкретный вид этого расстояния сейчас не имеет значения), независимо от порогового значения, определяющего конкретное решающее правило. В общем случае показатель δ^* вводится как эвристический (т. е. понятие истинной прогностической «силы» δ используется как базовое, без опоры на модель линейного дискриминантного анализа Р. Фишера).

Пусть алгоритм классификации применялся к совокупности, состоящей из m объектов первого класса и n объектов второго класса.

Теорема 7.1. Пусть $m, n \to \infty$. Тогда для всех x

$$P\left\{\frac{\delta^* - \delta}{A(\kappa,\lambda)} < x\right\} \to \Phi(x),$$

где δ — истинная «прогностическая сила» алгоритма диагностики; δ^* — ее эмпирическая оценка,

$$A^2(\kappa,\lambda) = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\varphi(d^*/2)}{\varphi(\Phi^{-1}(\kappa))}\right]^2 \frac{\kappa(1-\kappa)}{m} + \left[\frac{\varphi(d^*/2)}{\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))}\right]^2 \frac{\lambda(1-\lambda)}{n}\right\};$$

здесь $\varphi(x) = \Phi'(x)$ — плотность стандартного нормального распределения вероятностей с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

С помощью теоремы 7.1 по κ и λ обычным образом определяют доверительные границы для «прогностической силы» δ.

Пример 7.14. В условиях примера 7.13 при $m = n = 100$ найдем асимптотическое среднее квадратическое отклонение $A(0{,}90;\ 0{,}80)$.

Поскольку $\varphi(\Phi^{-1}(\kappa)) = \varphi(1{,}28) = 0{,}176$, $\varphi(\Phi^{-1}(\lambda)) = \varphi(0{,}84) = 0{,}280$, $\varphi(d^* / 2) = \varphi(1{,}06) = 0{,}227$, то подставляя в выражение для A^2 численные значения, получаем, что

$$A^2(0{,}90;\ 0{,}80) = \frac{0{,}0372}{m} + \frac{0{,}0265}{n}$$

(численные значения плотности стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 и функции, обратной к функции этого распределения, можно было взять, например, из справочника [6]).

При $m = n = 100$ имеем $A(0{,}90;\ 0{,}80) = 0{,}0252$. При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ имеем $u(0{,}95) = \Phi^{-1}(1{,}0{,}975) = 1{,}96$, а потому нижняя доверительная граница для прогностической силы δ есть $\delta_Н = 0{,}86 - 1{,}96 \times 0{,}0252 = 0{,}81$, а верхняя доверительная граница такова: $\delta_В = 0{,}86 + 1{,}96 \times 0{,}0252 = 0{,}91$. Аналогичный расчет при $m = n = 1000$ дает $\delta_Н = 0{,}845$, $\delta_В = 0{,}877$.

Можно ли использовать линейный рейтинг? Как проверить обоснованность пересчета на модель линейного дискриминантного анализа? Допустим, что классификация состоит в вычислении некоторого прогностического индекса y и сравнении его с заданным порогом c. Объект относят к первому классу, если $y \le c$, ко второму, если $y > c$. Прогностический индекс — это обычно линейная функция от характеристик рассматриваемых объектов. Другими словами, от координат векторов, описывающих объекты.

Возьмем два значения порога c_1 и c_2. Если пересчет на модель линейного дискриминантного анализа обоснован, то, как можно показать, «прогностические силы» для обоих правил совпадают: $\delta(c_1) = \delta(c_2)$. Выполнение этого равенства можно проверить как статистическую гипотезу. Укажем способ проверки, т. е. опишем соответствующий критерий проверки статистической гипотезы.

Пусть κ_1 — доля объектов первого класса, для которых $y \le c_1$, а κ_2 — доля объектов первого класса, для которых $c_1 < y \le c_2$. Аналогично пусть λ_2 — доля объектов второго класса, для которых $c_1 < y \le c_2$, а λ_3 — доля объектов второго класса, для которых $y > c_2$. Тогда можно рассчитать две оценки одного и того же расстояния Махаланобиса. Они имеют вид:

$$d^*(c_1) = \Phi^{-1}(\kappa_1) + \Phi^{-1}(\lambda_2 + \lambda_3), \quad d^*(c_2) = \Phi^{-1}(\kappa_1 + \kappa_2) + \Phi^{-1}(\lambda_3).$$

Теорема 7.2. Если истинные прогностические силы двух правил диагностики совпадают, т. е. $\delta(c_1) = \delta(c_2)$ то при $m \to \infty, n \to \infty$ при всех x

$$P\left\{\frac{d^*(c_1) - d^*(c_2)}{B} < x\right\} \to \Phi(x),$$

где

$$B^2 = \frac{1}{m} T(\kappa_1; \kappa_2) + \frac{1}{n} T(\lambda_3; \lambda_2);$$

$$T(x; y) = \frac{x(1-x)}{\varphi^2(\Phi^{-1}(x))} + \frac{(x+y)(1-x-y)}{\varphi^2(\Phi^{-1}(x+y))} - \frac{2x(1-x-y)}{\varphi(\Phi^{-1}(x))\varphi(\Phi^{-1}(x+y))}.$$

Из теоремы 7.2 вытекает метод проверки рассматриваемой гипотезы: при выполнении неравенства

$$\left| \frac{d^*(c_1) - d^*(c_2)}{B} \right| \le \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

она принимается на уровне значимости, асимптотически равном α, в противном случае — отвергается.

Пример 7.17. Пусть данные примеров 7.13 и 7.14 соответствуют порогу c_1. Пусть порогу c_2 соответствуют $\kappa' = 0{,}95$ и $\lambda' = 0{,}70$. Тогда в обозначениях теоремы 7.2 $\kappa_1 = 0{,}90$, $\kappa_2 = 0{,}05$, $\lambda_2 = 0{,}10$, $\lambda_3 = 0{,}70$. Далее $d^*(c_1) = 2{,}12$ (пример 7.13), $d^*(c_2) = 2{,}17$, $T(\kappa_1, \kappa_2) = 2{,}22$, $T(\lambda_3, \lambda_2) = 0{,}89$. Гипотеза о совпадении прогностических сил на двух порогах принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{0{,}05^2}{\dfrac{2{,}22}{m} + \dfrac{0{,}89}{n}} \le 1{,}96^2,$$

т. е. когда

$$\frac{2{,}22}{m} + \frac{0{,}89}{n} \ge 0{,}00065.$$

Так, гипотеза принимается при $m = n = 1000$ и отвергается при $m = n = 5000$.

Экспертно-статистический метод. Оценивание экспертами коэффициентов линейного рейтинга не всегда надежно. Особенно в ситуации, когда экспертов мало, а разброс мнений экспертов велик. Тогда представляется целесообразным не оценивать коэффициенты, а привлечь высококвалифицированных экспертов для глобальной оценки, т. е. оценки непосредственно рейтинга

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m.$$

Предположим, что рейтинговые оценки высококвалифицированных экспертов являются числовыми. Тогда в качестве данных, исходных для статистического анализа, имеем выборку

$$(Y_i; x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}), i = 1, 2, \ldots, n,$$

где n — число ответов высококвалифицированных экспертов, содержащих глобальные оценки рейтинга для n ситуаций. С точки зрения прикладной статистики имеем задачу линейного регрессионного анализа, которая решается стандартными методами (с помощью непараметрического метода наименьших квадратов [15, 16]).

Нет необходимости требовать, чтобы оценки высококвалифицированных экспертов являлись числами. Можно ограничиться результатами парных сравнений или ранжировками. Ясно, что такого рода глобальные оценки гораздо легче получить, и они будут более надежными (исходя из ранее обоснованного общего утверждения, что нечисловые ответы более естественны для экспертов, чем числовые). Затем по глобальным экспертным оценкам для n ситуаций можно состоятельно оценить коэффициенты линейного рейтинга [26]. Математический аппарат необходим иной, не тот, что в ранее рассмотренном случае глобальных числовых оценок высококвалифицированных экспертов.

В настоящее время теория рейтингов продолжает бурно развиваться [27, 28]. Так, проблемам обоснованного выбора коэффициентов важности посвящены работы В.В. Подиновского [29–32]. Сравнительный анализ пяти традиционных и четырех относительно новых методов нахождения коэффициентов важности бинарных (т. е. принимающих два значения) факторов осуществлен И.Ф. Шахновым [33]. При этом исходной информацией служат экспертные оценки, имеющие качественный характер. Построение рейтингов результативности и продуктивности исследователей и научных коллективов рассмотрено в [34].

Очевидна связь теории рейтингов с современной весьма математизированной теорией полезности [35], поскольку рейтинговая оценка — частный случай функции полезности, используемой для упорядочения объектов экспертизы.

Литература

1. *Орлов А.И.* Методы принятия управленческих решений. — М.: КНОРУС, 2018. — 286 с.

2. *Орлов А.И.* Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. — М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. — 496 с.

3. *Шмален Г.* Основы и проблемы экономики предприятия. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 512 с.

4. Деловое планирование: Методы. Организация. Современная практика. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 368 с.

5. *Карминский А.М., Оленев Н.И., Примак А.Г., Фалько С.Г.* Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 256 с.

6. *Литвак Б.Г.* Разработка управленческого решения: Учебник. — 2-е изд. — М.: Дело, 2001. — 392 с.

7. *Маниловский Р.Г.* Бизнес-план. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 160 с.

8. *Хан Д.* Планирование и контроль: концепция контроллинга: Пер. с нем. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 800 с.

9. *Орлов А.И.* Менеджмент: организационно-экономическое моделирование. Учебное пособие для вузов. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. — 475 с.

10. Менеджмент. Учебное пособие / Под ред. Ж.В. Прокофьевой. — М.: Знание, 2000. — 288 с.

11. *Науман Э.* Принять решение — но как? : Пер. с нем. — М.: Мир, 1987. — 198 с.

12. *Литвак Б.Г.* Экспертные оценки и принятие решений. — М.: Патент, 1996. — 271 с.

13. *Орлов А.И.* Экспертные оценки // Заводская лаборатория. — 1996. — Т. 62. — № 1. — С. 54–60.

14. *Орлов А.И.* Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 576 с.

15. *Орлов А.И.* Прикладная статистика: Учебник. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

16. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

17. *Кендалл М.Дж., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976. — 736 с.

18. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: Учебник: в 3 ч. Ч. 1: Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. — 542 с.

19. *Орлов А.И.* Статистика нечисловых данных за сорок лет (обзор) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2019. — Т. 85. — № 11. — С. 69–84.

20. *Орлов А.И* Статистика нечисловых данных — центральная часть современной прикладной статистики // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 156. — С. 111–142.

21. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

22. *Fisher R.A.* The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems // Ann. Eugenics. 1936. September. Vol. 7. Pp. 179-188. (Перевод: *Фишер Рональд Э.* Использование множественных измерений в задачах таксономии // Современные проблемы кибернетики. — М.: Знание, 1979. — С. 6–20.)

23. *Селезнев В.Д., Денисов К.С.* Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2005. — Т. 71. — № 1. — С. 68–73.

24. *Орлов А.И.* Некоторые вероятностные вопросы теории классификации // Прикладная статистика. Ученые записки по статистике. Т. 45. — М.: Наука, 1983. — С. 166–179.

25. *Гельфанд И.М., Алексеевская М.А., Губерман Ш.А. и др.* Прогнозирование исхода инфаркта миокарда с помощью программы «Кора-3» // Кардиология. — 1977. — Т. 17. — № 6. — С. 19–23.

26. *Киселев Н.И.* Экспертно-статистический метод определения функции предпочтения по результатам парных сравнений объектов // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. — М.: Наука, 1980. — С. 111–123.

27. *Карминский А. М.* Кредитные рейтинги и их моделирование. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. — 304 с.

28. *Лындина М.И., Орлов А.И.* Математическая теория рейтингов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. — 2015. — № 114. — С. 1–26.

29. *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 5. — С. 141–159.

30. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Физматлит, 2007. — 64 с.

31. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев с непрерывной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 9. — С. 129–137.

32. *Подиновский В.В.* Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Наука, 2019. — 103 с.

33. *Шахнов И.Ф.* Некоторые модели квалиметрического анализа многофакторных объектов с бинарными факторами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2005. — Т. 71. — № 5. — С. 59–65.

34. *Лойко В.И., Луценко Е.В., Орлов А.И.* Современные подходы в наукометрии: Монография / Под науч. ред. проф. С.Г. Фалько. — Краснодар: КубГАУ, 2017. — 532 с.

35. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

36. *Орлов А.И.; Гусейнов Г.А.* Математические методы в изучении способных к математике школьников // Исследования по вероятностно-статистическому моделированию реальных систем. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1977. — С. 80–93.

Контрольные вопросы и задачи

1. Расскажите о содержании и использовании матрицы портфеля Бостонской консалтинговой группы.

2. Чем отличаются методы проверочного списка и суммарной оценки?

3. Проведите первичную формализацию описания ситуации при гипотетическом переходе на новую работу.

4. Как бы Вы расставили баллы на месте Пети Иванова при принятии решения о выборе места работы?

5. Проведите декомпозицию задачи принятия решения при гипотетическом переходе на новую работу.

6. Почему метод декомпозиции является весьма полезным при решении многих задач принятия решений?

7. Пусть рейтинговая оценка имеет четыре возможных значения. Как ее выразить через бинарные рейтинги?

8. Как соотносятся задачи группировки и задачи кластер-анализа?

9. В табл. 7.7 приведены попарные расстояния между десятью социально-психологическими признаками способных к математике школьников [36]. Примените к этим данным алгоритмы «ближнего соседа», «средней связи» и «дальнего соседа». Для каждого из трех алгоритмов выделите наиболее устойчивые разбиения на кластеры.

Таблица 7.7

Попарные расстояния между социально-психологическими признаками

	1	2	3	4	5	6	7	9	10
2	1028								
3	1028	608							
4	1050	688	610						
5	1012	686	636	634					
6	1006	566	538	616	562				
7	1012	1026	748	692	774	732			
8	960	1088	1144	1122	1120	1130	1110		
9	1026	878	874	830	836	802	904	1040	
10	990	744	674	744	718	580	814	1090	830

10. Почему долю правильной диагностики нецелесообразно использовать как показатель качества алгоритма диагностики (прогностической «силы»)?

11. Расскажите об «эмпирической прогностической силе» как показателе качества алгоритма диагностики.

12. Как проверить возможность использования линейного рейтинга?

13. По данным табл. 7.8 рассчитайте оценки объектов экспертизы:

1) по сумме баллов и

2) по взвешенной сумме баллов,

заполните две заключительные строки в таблице, на их основе постройте кластеризованные ранжировки (упорядочения) объектов экспертизы:

3) по сумме баллов и

4) по взвешенной сумме баллов, а также

5) согласующую их кластеризованную ранжировку.

Таблица 7.8

Оценки фактов при выборе места работы

№ п/п	Фактор	МГТУ им. Н.Э. Баумана	Крупное предприятие	Малое предприятие	Зарубежная фирма	Веса факторов
1	Оплата труда	1	5	9	10	0,76
2	Перспективы роста	10	7	1	2	0,74
3	Начальство	8	6	4	2	0,40
4	Коллектив	9	7	2	1	0,33
5	Время на дорогу	5	3	10	7	0,27
6	Интерес	10	3	1	8	0,5
	Сумма баллов					
	Сумма баллов с весами					

14. По данным табл. 7.9 рассчитайте оценки объектов экспертизы:

1) по сумме баллов и

2) по взвешенной сумме баллов,

заполните две заключительные строки в таблице, на их основе постройте кластеризованные ранжировки (упорядочения) объектов экспертизы:

3) по сумме баллов и

4) по взвешенной сумме баллов, а также

5) согласующую их кластеризованную ранжировку.

Таблица 7.9

Оценки фактов при выборе места работы

№ п/п	Фактор	МГТУ им. Н.Э. Баумана	Крупное предприятие	Малое предприятие	Зарубежная фирма	Веса факторов
1	Оплата труда	1	5	10	9	32
2	Перспективы роста	10	7	1	2	19
3	Устойчивость	10	9	3	4	16
4	Начальство	8	6	4	2	5,5
5	Коллектив	9	7	2	1	5,5
6	Криминал	10	4	1	6	5,5

Окончание табл. 7.9

№ п/п	Фактор	МГТУ им. Н.Э. Баумана	Крупное предприятие	Малое предприятие	Зарубежная фирма	Веса факторов
7	Режим	10	4	7	1	5,5
8	Время на дорогу	5	3	10	7	5,5
9	Соц. пакет	2	6	2	10	5,5
	Сумма баллов					
	Сумма баллов с весами					

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Роль матрицы портфеля Бостонской консалтинговой группы при разработке и принятии управленческих решений.

2. Инструменты стратегического менеджмента.

3. Проблема устойчивости выводов (по отношению к малым отклонениям исходных данных и субъективным «оцифровкам» качественных оценок) при решении проблем стратегического менеджмента.

4. Методы построения суммарной оценки проекта по оценкам отдельных факторов.

5. Способы выбора весовых коэффициентов в задачах стратегического менеджмента.

6. Введите веса факторов (исходя из своей индивидуальной экспертной оценки) и на основе данных табл. 7.4 решите задачу Пети Иванова об упорядочении по привлекательности возможных мест работы.

7. Классификация постановок задач декомпозиции в теории и практике принятия решений.

8. Использование весовых коэффициентов в задачах принятия решений.

9. Проблема агрегирования значений единичных показателей при принятии решений.

10. Разработайте алгоритм, с помощью которого любую рейтинговую оценку, принимающую конечное число значений, можно выразить через бинарные рейтинги.

11. Современная теория рейтингов.

12. Подходы к выбору коэффициентов важности (на основе [29–32]).

Глава 8. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ НЕЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Перейдем к обсуждению ряда постановок статистики нечисловых данных в качестве математических оснований теории экспертных оценок.

8.1. Основные математические задачи анализа экспертных оценок

Ясно, что при анализе мнений экспертов можно применять самые разнообразные статистические методы, описывать их — значит описывать практически всю прикладную статистику. Тем не менее можно выделить основные широко используемые в настоящее время методы математической обработки экспертных оценок — это проверка согласованности мнений экспертов (или классификация экспертов, т. е. разбиение их на группы сходных по мнению, если нет согласованности) и усреднение мнений экспертов внутри согласованной группы.

Поскольку ответы экспертов во многих процедурах экспертного опроса — не числа, а такие объекты нечисловой природы, как градации качественных признаков, ранжировки, разбиения, результаты парных сравнений, нечеткие предпочтения и т. д., то для их анализа оказываются полезными методы статистики объектов нечисловой природы (статистики нечисловых данных, нечисловой статистики).

Почему ответы экспертов часто носят нечисловой характер? Наиболее общий ответ состоит в том, что люди не мыслят числами. В мышлении человека используются образы, слова, но не числа. Поэтому требовать от эксперта ответ в форме чисел — значит насиловать его разум. Даже в экономике предприниматели, принимая решения, лишь частично опираются на численные расчеты. Это видно из условного (т. е. определяемого произвольно принятыми соглашениями, обычно оформленными в виде инструкций) характера балансовой прибыли, амортизационных отчислений и других экономических показателей. В этом одна из причин того, что фраза типа «фирма стремится к максимизации прибыли» не может иметь строго определенного смысла. Достаточно спросить: «Максимизация прибыли — за какой период?», и сразу станет ясно, что степень оптимальности принимаемых решений зависит от горизонта планирования (на экономико-математическом уровне этот сюжет рассмотрен в [1, гл. 1.3], а подробнее, со всеми доказательствами — в монографии [2] и статье [3]).

Эксперт может сравнить два объекта, сказать, какой из двух лучше (метод парных сравнений), дать им оценки типа «хороший», «приемлемый», «плохой», упорядочить несколько объектов по привлекательности, но обычно не может ответить, во сколько раз или на сколько один объект лучше другого. Ответы эксперта обычно измерены в порядковой шкале или являются ранжировками, результатами парных сравнений и другими объектами нечисловой природы, но не числами.

Распространенное заблуждение состоит в том, что ответы экспертов стараются рассматривать как числа; занимаются «оцифровкой» их мнений, приписывая этим мнениям численные значения — баллы, которые потом обрабатывают с помощью методов прикладной статистики как результаты обычных физико-технических измерений. В случае произвольности «оцифровки» выводы, полученные в результате подобной обработки данных, могут не иметь никакого отношения к реальности.

В связи с «оцифровкой» уместно вспомнить классическую притчу о человеке, который ищет потерянные ключи под фонарем, хотя потерял их в кустах. На вопрос, почему он так делает, отвечает: «Под фонарем светлее». Это, конечно, верно. Но, к сожалению, весьма малы шансы найти потерянные ключи под фонарем. Так и с «оцифровкой» нечисловых данных. Она дает возможность имитации научной деятельности, но не возможность найти истину.

В соответствии с теорией измерений выводы, полученные на основе анализа мнений экспертов, должны быть инвариантны относительно допустимых преобразований шкал измерений. В случае порядковой шкалы — относительно любого строго возрастающего преобразования.

Проверка согласованности мнений экспертов и классификация экспертных мнений. Ясно, что мнения разных экспертов различаются. Важно понять, насколько велико это различие. Если мало — усреднение мнений экспертов позволит выделить то общее, что есть у всех экспертов, отбросив случайные отклонения в ту или иную сторону. Если велико — усреднение является чисто формальной процедурой. Так, если представить себе, что ответы экспертов равномерно покрывают поверхность бублика, то формальное усреднение укажет на центр дырки от бублика, а такого мнения не придерживается ни один эксперт. Из сказанного ясна важность проблемы проверки согласованности мнений экспертов.

Разработан ряд методов такой проверки. Статистические методы проверки согласованности зависят от математической природы ответов экспертов. Соответствующие статистические теории весьма трудны, если эти ответы — ранжировки или разбиения, и достаточно просты, если ответы — результаты независимых парных сравнений. Отсюда вытекает рекомендация по организации экспертного опроса: не старайтесь сразу получить от эксперта ранжировку или разбиение, ему трудно это сделать, да и имеющиеся математические методы не позволяют далеко продвинуться в анализе подобных данных. Например, рекомендуют проверять согласованность ранжировок с помощью коэффициента ранговой конкордации Кендалла — Смита. Но давайте вспомним, какая статистическая модель при этом используется. Как известно, в рамках методологии математической статистики проверяется нулевая гипотеза, согласно которой ранжировки независимы и равномерно распределены на множестве всех ранжировок. Если эта гипотеза принимается, то ни о какой согласованности мнений экспертов говорить нельзя. А если отклоняется? Тоже нельзя. Например, может быть два (или больше) центра, около которых группируются ответы экспертов. Нулевая гипотеза отклоняется. Но разве можно говорить о согласованности?

Эксперту гораздо легче на каждом шаге сравнивать только два объекта. Пусть он занимается парными сравнениями. *Непараметрическая теория парных сравнений* (*теория люсианов*) [4, 5] *позволяет решать более сложные задачи, чем статистика ранжировок или разбиений.* В частности, вместо гипотезы равномерного распределения можно рассматривать гипотезу однородности, т. е. вместо совпадения всех распределений с одним фиксированным (равномерным) можно проверять лишь совпадение распределений мнений экспертов между собой, что естественно трактовать как согласованность их мнений. Таким образом, удается избавиться от неестественного предположения равномерности.

При отсутствии согласованности экспертов естественно разбить их на группы сходных по мнению. Это можно сделать различными методами статистики объектов нечисловой природы, относящимися к кластер-анализу, предварительно введя метрику в пространство мнений экспертов. Идея американского математика Джона Кемени об аксиоматическом введении метрик (см. ниже) нашла многочисленных продолжателей. Однако методы кластер-анализа обычно являются эвристическими. В частности, обычно невозможно с позиций статистической теории обосновать «законность» объединения двух кластеров в один. Имеется важное исключение — *для независимых парных сравнений (люсианов) разработаны методы, позволяющие проверять возможность объединения кластеров как статистическую гипотезу*. Это — еще один аргумент за то, чтобы рассматривать теорию люсианов как центральное ядро математических методов экспертных оценок [1, 6].

Нахождение итогового мнения комиссии экспертов. Пусть мнения комиссии экспертов или какой-то ее части признаны согласованными. Каково же итоговое (среднее, общее) мнение комиссии? Согласно идее Джона Кемени следует найти среднее мнение как решение *оптимизационной задачи*. А именно, надо минимизировать суммарное расстояние от кандидата в средние до мнений экспертов. Найденное таким способом среднее мнение называют медианой Кемени.

Математическая сложность состоит в том, что мнения экспертов лежат в некотором пространстве объектов нечисловой природы. Общая теория подобного усреднения построена в ряде работ, в частности, показано, что в силу обобщения закона больших чисел среднее мнение при увеличении числа экспертов (чьи мнения независимы и одинаково распределены) приближается к некоторому пределу, который естественно назвать *математическим ожиданием* (случайного элемента, имеющего то же распределение, что и ответы экспертов).

В конкретных пространствах нечисловых мнений экспертов вычисление медианы Кемени может быть достаточно сложным делом. Кроме свойств пространства, велика роль конкретных метрик. Так, в пространстве ранжировок при использовании метрики, связанной с коэффициентом ранговой корреляции Кендалла, необходимо проводить достаточно сложные расчеты, в то время как применение показателя различия на основе коэффициента ранговой корреляции Спирмена приводит к упорядочению по средним арифметическим рангам.

Бинарные отношения и расстояние Кемени. Как известно, бинарное отношение A на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ — это подмножество *декартова квадрата* $Q^2 = \{(q_m, q_n), m, n = 1, 2, \ldots, k\}$. При этом пара (q_m, q_n) входит в A тогда и только тогда, когда между q_m и q_n имеется рассматриваемое отношение.

Напомним, что каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать квадратной матрицей $\|x(a, b)\|$ из 0 и 1 порядка $k \times k$. При этом $x(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a < b$ либо $a = b$. В первом случае $x(b, a) = 0$, а во втором $x(b, a) = 1$. При этом хотя бы одно из чисел $x(a, b)$ и $x(b, a)$ равно 1.

В экспертных методах используют, в частности, такие бинарные отношения, как ранжировки (упорядочения, или разбиения на группы, между которыми имеется строгий порядок), отношения эквивалентности, толерантности (отношения сходства). Как следует из сказанного выше, каждое бинарное отношение A можно описать матрицей $\|a(i, j)\|$ из 0 и 1, причем $a(i, j) = 1$ тогда и только тогда, когда q_i и q_j находятся в отношении A, и $a(i, j) = 0$ в противном случае.

Определение 8.1. Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B, описываемыми матрицами $\|a(i, j)\|$ и $\|b(i, j)\|$ соответственно, называется число

$$D(A,B) = \sum_{i,j=1}^{k} \left| a(i,j) - b(i,j) \right|,$$

т. е. расстояние Кемени между бинарными отношениями равно сумме модулей разностей элементов, стоящих на одних и тех же местах в матрицах, соответствующих этим бинарным отношениям.

Легко видеть, что расстояние Кемени — это число несовпадающих элементов в матрицах $\|a(i, j)\|$ и $\|b(i, j)\|$.

Вид расстояния Кемени не выбран произвольно. Он основан на некоторой системе аксиом. Эта система аксиом и вывод из нее формулы для расстояния Кемени между упорядочениями содержится в книге [7], которая сыграла большую роль в развитии в нашей стране такого научного направления, как анализ нечисловой информации [8, 9]. В дальнейшем под влиянием Кемени предложены различные системы аксиом для получения расстояний в тех или иных нужных для социально-экономических исследований пространствах, например в пространствах множеств [2, 10].

Медиана Кемени и законы больших чисел. С помощью расстояния Кемени находят итоговое мнение комиссии экспертов. Пусть A_1, A_2, A_3, ..., A_p — ответы p экспертов, представленные в виде бинарных отношений. Для их усреднения используют так называемую ***медиану Кемени***

$$Arg \min_{\{A\}} \sum_{i=1}^{p} D(A_i, A),$$

где Arg min — то или те значения A, при которых достигает минимума указанная сумма расстояний Кемени от ответов экспертов до текущей переменной A, по которой и проводится минимизация. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{p} D(A_i, A) = D(A_1, A) + D(A_2, A) + D(A_3, A) + ... + D(A_p, A).$$

Важно, по какому множеству (значений переменной A) проводится минимизация. Если по множеству всех упорядочений, как описано в книге Дж. Кемени и Дж. Снелла [7], то нахождение медианы представляет собой сложную вычислительную задачу дискретной оптимизации (см., например, алгоритм Б.Г. Литвака [11] и статью М.С. Жукова [12]). Минимизация же по множеству всех бинарных отношений тривиальна — по правилу большинства [2], т. е. на определенном месте матрицы, описывающей итоговое мнение ЭК, стоит 1 тогда и только тогда, когда более чем в половине матриц экспертов находится на этом месте 1, и стоит 0 тогда и только тогда, когда более чем в половине матриц экспертов — на этом месте 0. Если мнения экспертов разделились поровну, то медиана Кемени определяется неоднозначно — на соответствующем месте может стоять и 0, и 1. Такое возможно только при четном числе экспертов.

Кроме медианы Кемени, используют и другие средние величины в пространстве бинарных отношений, например, введенное в [7] ***среднее по Кемени***, в котором вместо $D(A_i, A)$ стоит $D^2(A_i, A)$.

Медиана Кемени — частный случай определения эмпирического среднего в пространствах нечисловой природы [13]. Для нее справедлив закон больших чисел [14], т. е. эмпирическое среднее приближается при росте числа составляющих (т. е. p — числа слагаемых в сумме), к теоретическому среднему:

$$Arg \min_{\{A\}} \sum_{i=1}^{p} D(A_i, A) \to Arg \min_{\{A\}} M(D(A_1, A)).$$

Здесь M — символ математического ожидания. Предполагается, что ответы p экспертов A_1, A_2, A_3, …, A_p есть основания рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные элементы (т. е. как случайную выборку) в соответствующем пространстве бинарных отношений, например, в пространстве упорядочений или отношений эквивалентности. Систематически эмпирические и теоретические средние и соответствующие различные варианты законов больших чисел изучены в ряде работ (см., например, [4, 13–15]).

Законы больших чисел показывают: медиана Кемени обладает *устойчивостью* по отношению к незначительному изменению состава экспертной комиссии; при увеличении числа экспертов она *приближается к некоторому пределу.* Его естественно рассматривать как *истинное мнение* экспертов, от которого каждый из них несколько отклонялся по случайным причинам.

Рассматриваемый здесь закон больших чисел является обобщением известного в статистике «классического» закона больших чисел. Он основан на иной математической базе — теории оптимизации (в пространствах произвольной природы), в то время как «классический» закон больших чисел использует суммирование. Упорядочения и другие бинарные отношения нельзя складывать, поэтому приходится применять иную математику.

Вычисление медианы Кемени в общем случае — задача целочисленного программирования [12]. Для ее нахождения используются различные алгоритмы дискретной математики, в частности основанные на методе ветвей и границ. Применяют также алгоритмы, основанные на идее случайного поиска, поскольку для каждого бинарного отношения нетрудно найти множество его соседей.

Рассмотрим пример вычисления медианы Кемени. Пусть дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний для множества бинарных отношений из 9 элементов A_1, A_2, A_3, ..., A_9 (см. табл. 8.1). Найдем в этом множестве *медиану* для множества из 5 элементов $\{A_2, A_4, A_5, A_8, A_9\}$.

Таблица 8.1

Матрица попарных расстояний

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	2	13	1	7	4	10	3	11
A_2	2	0	5	6	1	3	2	5	1
A_3	13	5	0	2	2	7	6	5	7

Окончание табл. 8.1

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_4	1	6	2	0	5	4	3	8	8
A_5	7	1	2	5	0	10	1	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	1	5
A_7	10	2	6	3	1	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	1	6	0	9
A_9	11	1	7	8	7	5	3	9	0

В соответствии с определением медианы Кемени, следует ввести в рассмотрение функцию

$$C(A)=\sum_{i\in\{2,4,5,8,9\}} D(A_i,A)=D(A_2,A)+D(A_4,A)+D(A_5,A)+$$
$$+D(A_8,A)+D(A_9,A),$$

рассчитать ее значения для всех $A = A_1, A_2, A_3, ..., A_9$ и выбрать наименьшее. Проведем расчеты:

$$C(A_1) = D(A_2, A_1) + D(A_4, A_1) + D(A_5, A_1) + D(A_8, A_1) + D(A_9, A_1) = $$
$$= 2 + 1 + 7 + 3 + 11 = 24,$$
$$C(A_2) = D(A_2, A_2) + D(A_4, A_2) + D(A_5, A_2) + D(A_8, A_2) + D(A_9, A_2) = $$
$$= 0 + 6 + 1 + 5 + 1 = 13,$$
$$C(A_3) = D(A_2, A_3) + D(A_4, A_3) + D(A_5, A_3) + D(A_8, A_3) + D(A_9, A_3) = $$
$$= 5 + 2 + 2 + 5 + 7 = 21,$$
$$C(A_4) = D(A_2, A_4) + D(A_4, A_4) + D(A_5, A_4) + D(A_8, A_4) + D(A_9, A_4) = $$
$$= 6 + 0 + 5 + 8 + 8 = 27,$$
$$C(A_5) = D(A_2, A_5) + D(A_4, A_5) + D(A_5, A_5) + D(A_8, A_5) + D(A_9, A_5) = $$
$$= 1 + 5 + 0 + 3 + 7 = 16,$$
$$C(A_6) = D(A_2, A_6) + D(A_4, A_6) + D(A_5, A_6) + D(A_8, A_6) + D(A_9, A_6) = $$
$$= 3 + 4 + 10 + 1 + 5 = 23,$$
$$C(A_7) = D(A_2, A_7) + D(A_4, A_7) + D(A_5, A_7) + D(A_8, A_7) + D(A_9, A_7) = $$
$$= 2 + 3 + 1 + 6 + 3 = 15,$$
$$C(A_8) = D(A_2, A_8) + D(A_4, A_8) + D(A_5, A_8) + D(A_8, A_8) + D(A_9, A_8) = $$
$$= 5 + 8 + 3 + 0 + 9 = 25,$$
$$C(A_9) = D(A_2, A_9) + D(A_4, A_9) + D(A_5, A_9) + D(A_8, A_9) + D(A_9, A_9) = $$
$$= 1 + 8 + 7 + 9 + 0 = 25.$$

Из всех вычисленных сумм наименьшая равна 13, и достигается она при $A = A_2$, следовательно, медиана Кемени — это множество $\{A_2\}$, состоящее из одного элемента A_2.

В данном случае медиана Кемени — одно из исходных экспертных мнений. В общем случае медиана Кемени может не совпадать ни с одним из мнений экспертов. Последнее обстоятельство является поводом для критики рассматриваемого способа усреднения. Действительно, если представить себе, что ответы экспертов равномерно распределены по поверхности бублика (в математической терминологии — тора), то медиана Кемени — центр бублика, лежит в пустоте, следовательно, далека от мнений кого-либо из экспертов.

Выход из этого парадокса может быть найден путем изменения области минимизации $\{A\}$ в определении медианы Кемени. Действительно, если положить $\{A\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p\}$, то, очевидно, решением задачи минимизации будет одно из экспертных мнений. Такое среднее назовем «модифицированной медианой Кемени».

Преимуществом модифицированной медианы Кемени является значительно меньшая вычислительная трудоемкость. Если для расчета медианы Кемени необходимо применять специальные алгоритмы дискретной оптимизации (см., например, [11, 12]), то модифицированную медиану Кемени можно найти без привлечения компьютера, как это и продемонстрировано выше.

8.2. Экспертные мнения и расстояния между ними

Как показано выше, мнения экспертов могут иметь разнообразную математическую природу, являться элементами разнообразных пространств — конечномерных, функциональных, бинарных отношений, множеств, нечетких множеств и т. д. Следовательно, центральной частью математического аппарата теории экспертных оценок является статистика в пространствах произвольной природы [4, 13]. Эта область прикладной статистики сама по себе не используется при анализе конкретных данных, поскольку конкретные данные всегда имеют вполне определенную природу. Однако общие подходы, методы, результаты статистики в пространствах произвольной природы представляют собой научный инструментарий, готовый для применения в каждой конкретной области.

Статистика в пространствах произвольной природы. Много ли общего у статистических методов анализа данных различной природы? На этот естественный вопрос можно сразу же однозначно ответить — да, очень много.

Понятия случайного события, вероятности, независимости событий и случайных величин являются общими для любых конечных вероятностных пространств и любых конечных областей значений случайных величин (см., например, [13, гл. 2]). Поскольку все реальные явления и процессы можно описывать с помощью математических объектов, являющихся элементами конечных множеств, сказанное выше означает, что конечных вероятностных пространств и дискретных случайных величин (точнее, величин, принимающих значения в конечном множестве) вполне достаточно для всех практических применений. Переход к непрерывным моделям реальных явлений и процессов оправдан только тогда, когда этот переход облегчает проведение рассуждений и выкладок. Например, находить определенные интегралы зачастую проще, чем вычислять значения сумм. Не могу не отметить, что приведенные соображения о взаимном соотнесении дискретных и непрерывных математических моделей автор услышал более 40 лет назад от академика А.Н. Колмогорова (ясно, что за конкретную формулировку несет ответственность автор настоящего учебника).

Основные проблемы прикладной статистики — описание данных, оценивание, проверка гипотез — также в своей существенной части могут быть рассмотрены в рамках статистики в пространствах произвольной природы. Например, для описания данных могут быть использованы эмпирические и теоретические средние, плотности вероятностей и их непараметрические оценки, регрессионные зависимости. Правда, для этого пространства произвольной природы должны быть снабжены соответствующим математическим инструментарием — расстояниями (показателями близости, мерами различия) между элементами рассматриваемых пространств.

Популярный в настоящее время метод оценивания параметров распределений — метод максимального правдоподобия — не накладывает каких-либо ограничений на конкретный вид элементов выборки. Они могут лежать в пространстве произвольной природы. Математические условия касаются только свойств плотностей вероятности и их производных по параметрам. Аналогично положение с методом одношаговых оценок, идущим на смену методу максимального правдоподобия [13, гл. 6]. Асимптотику решений экстремальных статистических задач достаточно изучить для пространств произвольной природы, а затем применять в каждом конкретном случае [16], когда задачу прикладной статистики удается представить в оптимизационном виде. Общая теория проверки статистических гипотез также не требует конкретизации математической природы рассматриваемых элементов выборок. Это относится, например, к лемме Неймана — Пирсона или теории статистических решений. Более того, естественная область построения теории статистик интегрального типа — это не числовая прямая, а пространства произвольной природы [13, разд. 8.3].

Совершенно ясно, что в конкретных областях прикладной статистики накоплено большое число результатов, относящихся именно к этим областям. Особенно это касается областей, исследования в которых ведутся сотни лет, в частности статистики случайных величин (одномерной статистики). Однако принципиально важно указать на «ядро» прикладной статистики — статистику в пространствах произвольной природы. Если постоянно «держать в уме» это ядро, то становится ясно, что, например, многие методы непараметрической оценки плотности вероятности или кластер-анализа, использующие только расстояния между объектами и элементами выборки, относятся именно к статистике объектов произвольной природы, а не к статистике случайных величин или многомерному статистическому анализу. Следовательно, и применяться они могут во всех областях прикладной статистики, а не только в тех, в которых «родились».

Расстояния (метрики). В пространствах произвольной природы нет операции сложения, поэтому статистические процедуры не могут быть основаны на использовании сумм. Поэтому используется другой математический инструментарий, использующий понятия типа расстояния.

Как известно, расстоянием в пространстве X называется числовая функция двух переменных

$$d(x, y), x \in X, y \in X,$$

определенная на этом пространстве, т. е. в стандартных обозначениях $d\colon X^2 \to R^1$, где R^1 — прямая, т. е. множество всех действительных чисел. Эта функция должна удовлетворять трем условиям (иногда их называют аксиомами):

1) неотрицательности: $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, x) = 0$, для любых значений $x \in X$, $y \in X$;

2) симметричности: $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x \in X$, $y \in X$;

3) неравенства треугольника: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Для термина «расстояние» часто используется синоним «метрика».

Пример 8.1. Если $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, то, как легко проверить, функция $d(x, y)$ — расстояние (метрика). Такое расстояние естественно использовать в пространстве X значений номинального признака: если два значения (например, названные двумя экспертами) совпадают, то расстояние равно 0, а если различны — то 1.

Пример 8.2. Расстояние, используемое в геометрии, очевидно, удовлетворяет трем приведенным выше аксиомам. Если X — это плоскость, а $x(1)$ и $x(2)$ — координаты точки $x \in X$ в некоторой прямоугольной системе координат, то эту точку естественно отождествить с двумерным вектором $(x(1), x(2))$. Тогда расстояние между точками $x = (x(1), x(2))$ и $y = (y(1), y(2))$ согласно известной формуле аналитической геометрии равно

$$d(x,y)=\sqrt{\left(x(1)-y(1)\right)^2+\left(x(2)-y(2)\right)^2}.$$

Пример 8.3. Евклидовым расстоянием в пространстве R^k векторов вида $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$ и $y = (y(1), y(2), \ldots, y(k))$ размерности k называется

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{k}\left(x(j)-y(j)\right)^2\right)^{1/2}.$$

В примере 8.2 рассмотрен частный случай примера 8.3 с $k = 2$.

Пример 8.4. В пространстве R^k векторов размерности k используют также так называемое блочное расстояние, имеющее вид

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{k}\left|x(j)-y(j)\right|.$$

Блочное расстояние соответствует передвижению по городу, разбитому на кварталы горизонтальными и вертикальными улицами. В результате можно передвигаться только параллельно одной из осей координат.

Пример 8.5. В пространстве функций, элементами которого являются функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$, часто используют расстояние Колмогорова

$$d(x,y)=\sup_{0\le t\le 1}\left|x(t)-y(t)\right|.$$

Пример 8.6. Пространство функций, элементами которого являются функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$, превращают в метрическое пространство (т. е. в пространство с метрикой), вводя расстояние

$$d_p(x,y) = \left(\int_0^1 \left(x(t) - y(t) \right)^p dt \right)^{1/p}.$$

Это пространство обычно обозначают L^p, где параметр $p \ge 1$ (при $p < 1$ не выполняются аксиомы метрического пространства в частности, аксиома треугольника).

Пример 8.7. Рассмотрим пространство квадратных матриц порядка k. Как ввести расстояние между матрицами $A = \|a(i, j)\|$ и $B = \|b(i, j)\|$? Можно сложить расстояния между соответствующими элементами матриц:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left| a(i,j) - b(i,j) \right|.$$

Пример 8.8. Предыдущий пример наводит на мысль о следующем полезном свойстве расстояний. Если на некотором пространстве определены два или больше расстояний, то их сумма — также расстояние.

Пример 8.9. Пусть A и B — множества. Расстояние между множествами можно определить формулой

$$d(A,B) = \mu(A \Delta B).$$

Здесь μ — мера на рассматриваемом пространстве множеств, Δ — символ симметрической разности множеств,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Если мера — так называемая считающая, т. е. приписывающая единичный вес каждому элементу множества, то введенное расстояние есть число несовпадающих элементов в множествах A и B.

Замечание. Строго говоря, функция $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ не задает метрику, поскольку из $d(A, B) = 0$ не всегда следует, что $A = B$, так как мера некоторых непустых множеств может равняться 0. Для функций $d(A, B)$, имеющих все свойства расстояний (метрик), кроме одного: из $d(A, B) = 0$ не всегда следует, что $A = B$, используют термин «***псевдометрика***».

Пример 8.10. Между множествами можно ввести и другое расстояние (псевдометрику):

$$d_1(A,B)=\frac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A\cup B)}.$$

В ряде задач анализа экспертных данных используются функции двух переменных, для которых выполнены не все три аксиомы расстояния, а только некоторые. Их обычно называют показателями различия, поскольку чем больше различаются объекты, тем больше значение функции. Иногда в том же смысле используют термин «мера близости». Он менее удачен, поскольку большее значение функции соответствует меньшей близости.

Чаще всего отказываются от аксиомы, требующей выполнения неравенства треугольника, поскольку это требование не всегда находит обоснование в конкретной прикладной ситуации.

Пример 8.11. В конечномерном векторном пространстве показателем различия является

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{k}\left(x(j)-y(j)\right)^2$$

(сравните с примером 8.3).

Показателями различия, но не расстояниями являются такие популярные в прикладной статистике показатели, как дисперсия или средний квадрат ошибки при оценивании.

Иногда отказываются и от аксиомы симметричности.

Пример 8.12. Показателем различия чисел x и y является

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{y}-1\right|.$$

Такой показатель различия используют в ряде процедур экспертного оценивания [17].

Что же касается первой аксиомы расстояния, то в различных постановках задач анализа экспертных данных ее обычно принимают. Вполне естественно, что наименьший показатель различия должен достигаться, причем именно на совпадающих объектах. Имеет ли смысл это наименьшее значение делать отличным от 0? Вряд ли, поскольку всегда можно добавить одну и ту же константу ко всем значениям показателя различия и тем самым добиться выполнения первой аксиомы.

8.3. Аксиоматическое введение расстояний

При анализе экспертных данных используют большое количество метрик и показателей различия. Как обоснованно выбрать то или иное расстояние для использования в конкретной задаче? В 1959 г. американский математик Джон Кемени предложил использовать аксиоматический подход, согласно которому следует сформулировать естественные для конкретной задачи аксиомы и вывести из них вид метрики. Этот подход получил большую популярность в нашей стране после выхода в 1972 г. перевода на русский язык книги Дж. Кемени и Дж. Снелла [7], в которой дана система аксиом для расстояния Кемени между упорядочениями. Последовала большая серия работ, в которых из тех или иных систем аксиом выводился вил метрики или показателя различия для различных видов данных, прежде всего для объектов нечисловой природы. Многие полученные результаты описаны в обзоре [18], содержащем 161 ссылку на предыдущие публикации, в том числе 69 на русском языке. Рассмотрим некоторые задачи аксиоматического введения расстояний.

Аксиоматическое введение расстояния между толерантностями. Толерантность — это бинарное отношение, являющееся рефлексивным и симметричным. Его обычно используют для описания отношения сходства между реальными объектами, отношений знакомства или дружбы между людьми. От отношения эквивалентности отличается тем, что свойство транзитивности не предполагается обязательно выполненным. Действительно, Иванов может быть знаком с Петровым, Петров — с Сидоровым, но при этом ничего необычного нет в том, что Иванов и Сидоров не знакомы между собой.

Пусть множество X, на котором определено отношение толерантности, состоит из конечного числа элементов:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Тогда толерантность описывается квадратной матрицей $A = \|a(i, j)\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, такой, что $a(i, j) = 1$, если x_i и x_j связаны отношением толерантности, и $a(i, j) = 0$ в противном случае.

Матрица A симметрична: $a(i, j) = a(j, i)$, на главной диагонали стоят единицы: $a(i, i) = 1$. Любая матрица, удовлетворяющая приведенным в предыдущей фразе условиям, является матрицей, соответствующей некоторому отношению толерантности. Матрице A можно сопоставить неориентированный граф с вершинами в точках X: вершины x_i и x_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $a(i, j) = 1$. Толерантности часто используются при проведении экспертных исследований.

Будем говорить, что толерантность A_3 лежит между толерантностями A_1 и A_2, если при всех i, j число $a_3(i, j)$ лежит между числами $a_1(i, j)$ и $a_2(i, j)$, т. е. выполнены либо неравенства $a_1(i, j) \leq a_3(i, j) \leq$ $\leq a_2(i, j)$, либо неравенства $a_1(i, j) \geq a_3(i, j) \geq a_2(i, j)$.

Теорема 8.1 [2]. Пусть

(I) $d(A_1, A_2)$ — метрика в пространстве толерантностей, определенных на конечном множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$;

(II) $d(A_1, A_3) + d(A_3, A_2) = d(A_1, A_2)$ тогда и только тогда, когда A_3 лежит между A_1 и A_2;

(III) если отношения толерантности A_1 и A_2 отличаются только на одной паре элементов, т. е. $a_1(i, j) = a_2(i, j)$ при $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, $i < j$, $i_0 < j_0$, и $a_1(i_0, j_0) \neq a_2(i_0, j_0)$, то $d(A_1, A_2) = 1$.

Тогда

$$d(A_1, A_2) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left| a_1(i, j) - a_2(i, j) \right| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left| a_1(i, j) - a_2(i, j) \right|.$$

Таким образом, расстояние $d(A_1, A_2)$ только постоянным множителем 1/2 отличается от расстояния Кемени, введенного в разд. 8.1 в пространстве всех бинарных отношений как расстояние Хемминга между описывающими отношения матрицами из 0 и 1. Теорема 8.1 дает аксиоматическое введение расстояния в пространстве толерантностей. Оказалось, что оно является сужением расстояния Кемени на это пространство. Сам Дж. Кемени дал аналогичную систему аксиом для сужения на пространство упорядочений. Доказательство теоремы 8.1 вытекает из рассмотрений, связанных с аксиоматическим введением расстояний между множествами, и приводится ниже.

Мера симметрической разности как расстояние между множествами. Как известно, бинарное отношение можно рассматривать как подмножество декартова квадрата X^2 того множества X, на котором оно определено. Поэтому теорему 8.1 можно рассматривать как аксиоматическое введение расстояния между множествами специального вида. Укажем систему аксиом для расстояния между множествами общего вида, описанного в примере 8.9 настоящей главы.

Определение 8.2. Множество B находится между множествами A и C, если $(A \cap C) \subseteq B \subseteq (A \cup C)$.

С помощью определения 8.2 в совокупности множеств вводятся геометрические соотношения, использование которых полезно для восприятия рассматриваемых ситуаций.

Расстояние между двумя точками в евклидовом пространстве не изменится, если обе точки сдвинуть на один и тот же вектор. Аналогичное свойство расстояния между множествами сформулируем в виде аксиомы 8.1. Оно соответствует аксиоме 3 Кемени и Снелла [7, с. 22] для расстояний между упорядочениями.

Аксиома 8.1. Если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то $d(A,B) = d(A \cup C, B \cup C)$.

Определение 8.3. Непустая система множеств называется кольцом, если для любых двух входящих в нее множеств в эту систему входят их объединение, пересечение и разность. Множество X называется единицей системы множеств, если оно входит в эту систему, а все остальные множества системы являются подмножествами X. Кольцо множеств, содержащее единицу, называется алгеброй множеств [19, с. 38].

Теорема 8.2. Пусть W — алгебра множеств, d: $W^2 \to R^1$. Тогда аксиома 8.1 эквивалентна следующему условию: $d(A, B) = d(A \backslash B, B \backslash A)$ для любых $A, B \in W$.

Доказательство. Поскольку

$$(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \varnothing, \quad (B \backslash A) \notin \cap (A \cap B) = \varnothing,$$

то равенство $d(A, B) = d(A \backslash B, B \backslash A)$ следует из аксиомы 8.1. Обратное утверждение вытекает из того, что в условиях аксиомы 8.1

$$(A \cup C) \backslash (B \cup C) = A \backslash B, \quad (B \cup C) \backslash (A \cup C) = B \backslash A.$$

Теорема 8.2 доказана.

С целью внести в алгебру множеств W отношение «находиться между», аналогичное используемому при аксиоматическом введении расстояний в пространствах бинарных отношений (см. условие (II) в теореме 8.1), примем следующую аксиому.

Аксиома 8.2. Если B лежит между A и C, то $d(A, B) + d(B,C) = d(A,C)$.

Определение 8.4. Неотрицательная функция μ, определенная на алгебре множеств W, называется мерой, если для любых двух непересекающихся множеств A и B из W справедливо соотношение

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Понятие меры — это обобщение понятий длины линии, площади фигуры, объема тела.

Теорема 8.3. Пусть W — алгебра множеств, аксиомы 8.1 и 8.2 выполнены для функции d: $W^2 \to [0; +\infty]$. Функция d симметрична: $d(A, B) = d(B, A)$ для любых A и B из W. Тогда существует, и притом единственная, мера μ на W, такая, что

$$d(A, B) = \mu(A \Delta B) \tag{8.1}$$

при всех A и B из W, где $A\Delta B$ — симметрическая разность множеств A и B, т. е. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Доказательство. Положим

$$\mu(B) = d(\varnothing, B), \quad B \in W. \tag{8.2}$$

Покажем, что определенная формулой (8.2) функция множества μ является мерой. Неотрицательность μ следует из неотрицательности d. Остается доказать аддитивность, т. е. что из $A \cap B = \varnothing$ следует, что

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad A \in W, \quad B \in W. \tag{8.3}$$

Поскольку A всегда лежит между $\varnothing$ и $A \cup B$, то по аксиоме 8.2

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= d(\varnothing, A \cup B) = d(\varnothing, A) + d(A, A \cup B) = \\ &= \mu(A) + d(A, A \cup B). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то по аксиоме 8.1 $d(\varnothing, B) + d(A, A \cup B)$, откуда с учетом (8.4) и следует (8.3).

Докажем соотношение (8.1). Поскольку $A \setminus B$ и $B \setminus A$ имеют пустое пересечение, то согласно определению 8.2 пустое множество $\varnothing$ лежит между $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Поэтому по аксиоме 8.2

$$d(A \setminus B, B \setminus A) = d(A \setminus B, \varnothing) + d(\varnothing, B \setminus A).$$

Из симметричности и соотношения (8.2) следует, что

$$d(A \setminus B, \varnothing) = d(\varnothing, A \setminus B) = \mu(A \setminus B),$$

откуда $d(A\setminus B, B\setminus A) = \mu(A\setminus B) + \mu(B\setminus A)$. Из соотношения (8.3) следует, что $\mu(A\setminus B) + \mu(B\setminus A) = \mu(A\Delta B)$. С другой стороны, по аксиоме 8.2

$$d(A \setminus B, B \setminus A) = d((A \setminus B) \cup (A \cap B), (B \setminus A) \cup (A \cap B)) = d(A, B).$$

Из трех последних равенств вытекает справедливость равенства (8.1).

Остается доказать единственность меры μ в соотношении (8.1). Поскольку $A\Delta B = B$ при $A = \varnothing$, то из (8.1) следует (8.2), т. е. однозначность определения меры $\mu = \mu(d)$ по расстоянию d.

Теорема 8.3 доказана.

Теорема 8.4 (обратная). Пусть μ — мера, определенная на алгебре множеств W. Тогда функция $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$ является псевдометрикой, для нее выполнены аксиомы 8.1 и 8.2.

Доказательство. То, что функция $d(A, B)$ из (8.1) задает псевдометрику, хорошо известно (см., например, [20, с. 79]). Доказательство аксиомы 8.2 содержится в [21, с. 181–183]. Аксиома 8.1 следует из того, что условия $A \cap C = B \cap C = \varnothing$ обеспечивают справедливость соотношений

$$(A \cup C) \Delta (B \cup C) = ((A \cup C) \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cup C) \setminus (A \cup C)) =$$
$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B.$$

Замечание. Полагая в аксиоме 8.2 $A = B = C$, получаем, что $d(A, A) + d(A, A) = d(A, A)$, т. е. $d(A, A) = 0$. Согласно теоремам 8.3 и 8.4, из условий теоремы 8.3 следует неравенство треугольника. Таким образом, в теореме 8.3 действительно приведена система аксиом, определяющая семейство псевдометрик в пространстве множеств.

Обсудим независимость (друг от друга) условий теоремы 8.3. Отбрасывание неотрицательности функции d приводит к тому, что слово «мера» в теоремах 8.3 и 8.4 необходимо заменить на «заряд» [19, с. 328]. Этот термин обозначает аддитивную функцию множеств, не обладающую свойством неотрицательности. Заряд можно представить как разность двух мер.

Функция $d_1(A,B)=\sqrt{\mu(A\Delta B)}$ является псевдометрикой, для нее выполнена аксиома 8.1, но не выполнена аксиома 8.2, следовательно, ее нельзя представить в виде (8.1).

Приведем пример системы множеств W и метрики в ней, для которых верна аксиома 8.2, но не верна аксиома 8.1, а потому эту метрику нельзя представить в виде (8.1). Пусть W состоит из множеств $\varnothing, A, B, A\bigcup B$ причем $A\bigcap B=\varnothing$, а расстояния таковы:

$$d(\varnothing,A)=d(\varnothing,B)=1,$$
$$d(A,A\bigcup B)=d(B,A\bigcup B)=d(A,B)=2,$$
$$d(\varnothing,A\bigcup B)=3.$$

Если единица X алгебры множеств W конечна, т. е. $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то расстояние (8.1) принимает вид

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{k}\mu_i\left|\chi_A(x_i)-\chi_B(x_i)\right|, \tag{8.5}$$

где χ_C — индикатор (индикаторная функция) множества C, т. е. $\chi_C(x)=1$, если $x\in C$, и $\chi_C(x)=0$ в противном случае, здесь $C=A$ или $C=B$. Как следует из теоремы 8.3, неотрицательный коэффициент μ_i — это мера одноэлементного множества $\{x_i\}$, а также расстояние этого множества от пустого множества, т. е.

$$\mu_i=\mu(\{x_i\})=d(\varnothing,\{x_i\}).$$

Если все коэффициенты μ_i положительны, то формула (8.5) определяет метрику, если хотя бы один равен 0, то — псевдометрику, поскольку в таком случае найдутся два различающиеся между собой множества A и B, такие, что $d(A, B)=0$.

Расстояние определяется однозначно, если априори известны коэффициенты μ_i. В частности, равноправность объектов (элементов единицы алгебры множеств X) приводит к $\mu_i\equiv 1$. Требование равноправности содержится в аксиомах 2 и 4 Кемени [7, с. 21–22].

Применим полученные результаты к толерантностям и докажем теорему 8.1. Совокупность всех толерантностей, определенных на конечном множестве Y, естественным образом ассоциируется с совокупностью всех подмножеств множества $X=\{(y_i, y_j), 1\le i<j\le k\}$. Имен-

но, пара (y_i, y_j) входит в подмножество тогда и только тогда, когда y_i и y_j связаны отношением толерантности. Указанная совокупность подмножеств является алгеброй множеств с единицей X. Определение 8.2 понятия «находиться между» для множеств полностью соответствует ранее данному определению понятия «находиться между» для толерантностей.

Теорема 8.5. Пусть выполнены условия (I) и (II) теоремы 8.1 и аксиома 8.1. Тогда существуют числа $\mu_{ij} > 0$, такие, что

$$d(A,B) = \sum_{1 \le ij < j \le k} \mu_{ij} \left| a(i,j) - b(i,j) \right|. \tag{8.6}$$

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 8.3. Поскольку в условии (I) требуется, чтобы функция $d(A, B)$ являлась метрикой, то необходимо $\mu_{ij} > 0$.

Теорема 8.6. Пусть выполнены условия теоремы 8.1 и, кроме того, аксиома 8.1. Тогда верно заключение теоремы 8.1.

Доказательство. Рассмотрим толерантность A, для которой $a(i, j) = 1$ при $(i, j) = (i_0, j_0)$ и $a(i, j) = 0$ в противном случае. Согласно условию (III) теоремы 8.1 $d(\varnothing, A) = 1$, а согласно (8.6) имеем $d(\varnothing, A) = \mu_{i_0 j_0}$. Следовательно, коэффициент $\mu_{i_0 j_0} = 1$, что и требовалось доказать.

Для окончательного доказательства теоремы 8.1 осталось избавиться от требования справедливости аксиомы 8.1.

Доказательство теоремы 8.1. Рассмотрим две толерантности A и B, такие, что при представлении их в виде множеств $A \subseteq B$. Это означает, что $a(i, j) \le b(i, j)$ при всех i, j. Поскольку X — конечное множество, то существует конечная последовательность толерантностей A_1, A_2, …, A_m, …, A_t, такая, что $A_1 = A$, $A_t = B$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_m \subseteq \ldots \subseteq A_t$, причем A_{m+1} получается из A_m заменой ровно одного значения $a_m(i_m, j_m) = 0$ на $a_{m+1}(i_m, j_m) = 1$, для $(i, j) \neq (i_m, j_m)$ при этом $a_m(i, j) = a_{m+1}(i, j)$. Тогда A_m находится между A_{m-1} и A_{m+1}, следовательно, по условию (II)

$$d(A,B) = d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \ldots + d(A_m, A_{m+1}) + \ldots + d(A_{t-1}, A_t).$$

По условию (III) $d(A_m, A_{m+1}) = 1$ при всех m, а потому заключение теоремы 8.1 верно для любых A и B, таких, что $A \subseteq B$.

Поскольку $A \cap B$ лежит между A и B, то по условию (II)

$$d(A, B) = d(A \cap B, A) + d(A \cap B, B).$$

При этом $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$. Применяя результат предыдущего абзаца, получаем, что заключение теоремы 8.1 верно всегда.

Замечание 8.1. Таким образом, условие (III) не только дает нормировку, но и заменяет аксиому 8.1.

Замечание 8.2. Условие (I) теоремы 8.1 не использовалось в доказательстве, но было приведено в первоначальной публикации [22], чтобы подчеркнуть цель рассуждения. По той же причине оно сохранено в формулировке теоремы 8.1, хотя в доказательстве удалось без него обойтись. Понадобилась только симметричность функции d.

Аксиоматическое введение метрики в пространстве неотрицательных суммируемых функций. Рассмотрим пространство $L(E, \mu)$ неотрицательных суммируемых функций на множестве E с мерой μ. Далее до конца настоящего раздела будем рассматривать только функции из пространства $L(E, \mu)$. Интегрирование всюду проводится по множеству (пространству) E и по мере μ. Будем писать $g = h$ или $g \leq h$, если указанные соотношения справедливы почти всюду по μ на E (т. е. могут нарушаться лишь на множестве нулевой меры).

Аксиоматически введем расстояние в пространстве $L(E, \mu)$ (изложение следует работе [23]). Обозначим $M(g, h) = \max(g, h)$ и $m(g, h) = \min(g, h)$. Пусть функция D: $L(E, \mu) \times L(E, \mu) \to R^1$ — тот основной объект изучения, аксиомы для которого будут сейчас сформулированы.

Аксиома 8.3. Если $gh = 0$, $g + h \neq 0$, то $D(g, h) = 1$.

Аксиома 8.4. Если $h \leq g$, то $D(g, h) = C \int (g - h)\, d\mu$, где множитель C не зависит от h, т. е. $C = C(g)$.

Лемма. Из аксиом 8.3, 8.4 следует, что для $h \leq g \neq 0$

$$d(g, h) = \frac{\int (g - h)\, d\mu}{\int g\, d\mu}.$$

Для доказательства заметим, что по аксиоме 8.3 $D(g, 0) = 1$, а по аксиоме 8.4 $D(g, 0) = C\int g\, d\mu$, откуда $C = (\int g\, d\mu)^{-1}$. Подставляя это соотношение в аксиому 8.4, получаем заключение леммы.

Требование согласованности расстояния в пространстве $L(E, \mu)$ с отношением «находиться между» приводит, как и ранее для расстояния $d(A, B)$, к следующей аксиоме.

Аксиома 8.5. Для любых g и h справедливо равенство $D(g, h) = D(M(g, h), g) + D(M(g, h), h)$.

Замечание. В ряде реальных ситуаций естественно считать, что наибольшее расстояние между элементами пространства множеств (которое без ограничения общности можно положить равным 1), т. е. наибольшее несходство, соответствует множествам, не имеющим общих элементов. Расстояние, введенное в теореме 8.3 (формула (8.1)), этому условию не удовлетворяет. Поэтому в пространстве множеств была аксиоматически введена [18] так называемая D-метрика (от *dissimilarity* (англ.) — несходство), для которого это условие выполнено. Она имеет вид:

$$D(A,B)=\begin{cases}\dfrac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A\cup B)}, \mu(A\cup B)>0,\\ 0, \mu(A)=\mu(B)=0.\end{cases}\tag{8.7}$$

Приведенные выше аксиомы являются обобщениями соответствующих аксиом для D-метрики в пространстве множеств.

Теорема 8.7. Из аксиом 8.3–8.5 следует, что

$$D(g,h)=\begin{cases}\dfrac{\int|g-h|d\mu}{\int M(g,h)d\mu}, g+h\neq 0,\\ 0, g=h=0.\end{cases}\tag{8.8}$$

Доказательство. Поскольку

$$(M(g, h)-g)+(M(g, h)-h)=|g-h|,$$

то заключение теоремы 8.7 при $g + h \neq 0$ вытекает из леммы и аксиомы 8.5. Из аксиомы 8.4 при $g = 0$ следует, что $D(0, 0) = 0$. Легко видеть, что функция D, заданная формулой (8.8), удовлетворяет аксиомам 8.3–8.5 и, кроме того, $D(g, h) \leq 1$ при любых g и h.

Замечание. Если g и h — индикаторные функции множеств, то формула (8.8) переходит в формулу (8.7). Если g и h — функции принадлежности нечетких множеств, то формула (8) задает метрику в пространстве нечетких множеств, а именно, D-метрику в этом пространстве [18].

Теорема 8.8. Функция $D(g, h)$, определенная формулой (8.8), является метрикой в $L(E, \mu)$ (при отождествлении функций, отличающихся лишь на множестве нулевой меры), причем $D(g, f) + D(f, h) = D(g, h)$ тогда и только тогда, когда $f = g$, $f = h$ или $f = M(g, h)$.

Доказательство. Обратимся к определению метрики. Для рассматриваемой функции непосредственно очевидна справедливость условий неотрицательности и симметричности. Очевидна и эквивалентность условия $D(g, h) = 0$ равенству $g = h$. Остается доказать неравенство треугольника и установить, когда оно обращается в равенство.

Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемые расстояния задаются верхней строкой формулы (8.8) и, кроме того,

$$R = \int M(g,f)\,d\mu - \int M(f, h)\,d\mu \geq 0$$

(частные случаи с использованием нижней строки формулы (8.8) рассматриваются элементарно, а справедливости последнего неравенства можно добиться заменой обозначений функций — элементов пространства $L(E, \mu)$). Тогда

$$D(g,f)+D(f,h)\geq \frac{\int\left(|g-f|+|f-h|\right)d\mu}{\int M(g,f)\,d\mu}, \tag{8.9}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $R = 0$ или $f = h$. Положим

$$P = \int (|g-f| + |f-h| - |g-h|)\,d\mu,\quad Q = \int (M(g,f) - M(g, h))\,d\mu.$$

Ясно, что $P \geq 0$ и

$$\frac{\int\left(|g-f|+|f-h|\right)d\mu}{\int M(g,f)\,d\mu}=\frac{\int\left(|g-h|\right)d\mu+P}{\int M(g,\mathrm{h})\,d\mu+Q}. \tag{8.10}$$

Если $Q < 0$, то, очевидно, неравенство треугольника выполнено, причем неравенство является строгим. Рассмотрим случай $Q > 0$.

Воспользуемся следующим элементарным фактом: если $y \geq x$, $y > 0$, $P > Q > 0$, то

$$\frac{x+P}{y+Q}>\frac{x}{y}. \tag{8.11}$$

Из соотношений (8.10) и (8.11) вытекает, что для доказательства неравенства треугольника достаточно показать, что $P - Q > 0$.

Рассмотрим

$$k = \{|g - f| + |f - h| - |g - h|\} - M(g, f) + M(g, h).$$

Применяя равенство $(M(g, h) - g) + (M(g, h) - h) = |g - h|$ к слагаемым, заключенным в фигурные скобки, получаем, что

$$k = M(f, h) + [M(g, f) + M(f, h) - M(g, h) - 2f].$$

Применяя соотношение

$$M(g, h) = g + h - m(g, h) \tag{8.12}$$

к слагаемым, заключенным в квадратные скобки, получаем, что

$$k = M(f, h) - m(f, h) - m(g, f) + m(g, h).$$

Так как $M(f, h) - m(f, h) = |f - h|$, то

$$k = |f - h| - (m(g, f) - m(g, h)) \geq (f - h) - (m(g, f) - m(g, h)). \tag{8.13}$$

В соответствии с (8.12) правая часть (8.13) есть $M(g, f) - M(g, h)$, а потому

$$P - Q = \int k\, d\mu \geq Q > 0,$$

что завершает доказательство для случая $Q > 0$. При этом неравенство треугольника является строгим.

Осталось рассмотреть случай $Q = 0$. В силу соотношений (8.9) и (8.10) неравенство треугольника выполнено. Когда оно обращается в равенство? Тривиальные случаи: $f = g$ или $f = h$. Если же f отлично от g и h, то необходимо, чтобы $R = 0$ и $P = 0$. Как легко проверить, последнее условие эквивалентно неравенствам

$$m(g, h) \leq f \leq M(g, h). \tag{8.14}$$

Из правого неравенства в (8.14) следует, что $M(g, f) \leq M(g, M(g, h)) = M(g, h)$. Так как $Q = 0$, то $M(g, f) = M(g, h)$. Аналогичным образом из соотношений

$$M(h, f) \leq M(h, M(g, h)) = M(g, h) = M(g, f)$$

и $R = 0$ следует, что $M(f, h) = M(g, h)$.

Рассмотрим измеримое множество $X = \{x \in E: h(x) < g(x)\}$. Тогда $M(g, h)(x) = M(f, h)(x) = g(x) > h(x)$, т. е. $h(x) < f(x) = M(g, h)(x)$ для почти всех $x \in X$. Для почти всех $y \in \{x \in E: h(x) > g(x)\}$ точно так же получаем $f(y) = M(g, h)(y)$. Для почти всех $z \in \{x \in E: h(x) = g(x)\}$ в силу (8.14) $f(z) = M(g, h)(z)$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Назовем функции g и h подобными, если существует число $b > 0$ такое, что $g = bh$. Тогда при $0 < b \leq 1$ имеем $D(g, h) = 1 - b$, т. е. расстояние между подобными функциями линейно зависит от коэффициента подобия. Далее, пусть $a > 0$, тогда $D(ag, ah) = D(g, h)$. Таким образом, метрика (8.8) инвариантна по отношению к преобразованиям подобия, которые образуют группу допустимых преобразований в шкале отношений. Это дает основания именовать метрику (8.8) метрикой подобия [23].

Расстояния в различных пространствах статистических и экспертных данных, используемых в задачах принятия решений, рассмотрены в статье [10].

8.4. Свойства медианы Кемени

Иногда пытаются противопоставить дискретные методы анализа экспертных оценок и вероятностно-статистические методы анализа экспертных оценок. Исходят из того, что во втором случае используются те или иные вероятностно-статистические модели, а в первом — только детерминированные. Мы полагаем, что речь идет о двух разных этапах изучения ситуации. Начать естественно с детерминированного анализа конкретных экспертных данных, разработать методы расчетов и получения выводов (заключений о данных), а затем изучить свойства этих методов расчета и получения выводов, используя вероятностно-статистические модели. Если мы хотим перенести выводы с конкретной выборки на генеральную совокупность, нам не обойтись без вероятностно-статистических моделей (подробнее см. [13, 15]).

Компьютерное изучение свойств медианы Кемени при конечных объемах выборок. С помощью специально разработанной программной системы В.Н. Жихаревым проведен ряд серий численных экспериментов по изучению свойств выборочных медиан Кемени. Представление о полученных результатах дает табл. 8.2, взятая из статьи [24].

Таблица 8.2

Вычислительный эксперимент по изучению свойств медианы Кемени

Показатель	Номер серии					
	1	2	3	4	5	6
Число испытаний	100	1000	50	50	1000	1000
Количество объектов	5	5	7	7	5	5
Количество экспертов	10	30	10	30	10	10
Частота непустого пересечения	0,85	0,58	0,52	0,2	0,786	0,911
Среднее отношение диаметров	0,283	0,124	0,191	0,0892	0,202	0,0437
Средняя мощность медианы	5,04	2,41	6,4	2,88	3,51	1,35
Максимальная мощность медианы	30	14	19	11	40	12

В каждой из 6 серий методом статистических испытаний определенное число раз моделировался случайный и независимый выбор экспертных ранжировок, а затем находились все медианы Кемени для смоделированного набора мнений экспертов. При этом в сериях 1–5 распределение ответа эксперта предполагалось равномерным на множестве всех ранжировок.

В серии 6 это распределение являлось монотонным относительно расстояния Кемени с некоторым центром, т. е. вероятность выбора определенной ранжировки убывала с увеличением расстояния Кемени этой ранжировки от центра.

Определение 8.5. Распределение бинарного отношения X называется монотонным с центром в C_0 относительно расстояния (показателя различия) d, если из $d(C, C_0) < d(D,C_0)$ следует, что $P(X = C) > P(X = D)$.

Это определение впервые введено в монографии [2, с. 196]. Оно может использоваться в любых пространствах бинарных отношений и, более того, в любых пространствах из конечного числа элементов, лишь бы в них была введена функция $d(C, D)$ — показатель различия элементов C и D этого пространства. Монотонное распределение унимодально, мода находится в C_0.

Таким образом, серии 1–5 соответствуют ситуации, когда у экспертов нет почвы для согласия, нет группировки их мнений относительно некоторого единого среднего группового мнения, в то время как в серии 6 есть единое мнение — описанный выше центр, к которому тяготеют ответы экспертов.

Обсуждение результатов. Результаты, приведенные в табл. 8.2, можно комментировать разными способами. Неожиданным явилось большое число элементов в выборочной медиане Кемени — как среднее, так и особенно максимальное. Одновременно обращает на себя внимание убывание этих чисел при росте числа экспертов и особенно при переходе к ситуации реального существования группового мнения (серия 6). Достаточно часто один из ответов экспертов входит в медиану Кемени (т. е. пересечение множества ответов экспертов и медианы Кемени непусто), а диаметр медианы как множества в пространстве ранжировок заметно меньше диаметра множества ответов экспертов. По этим показателям наилучшее положение — в серии 8. Грубо говоря, всяческие «патологии» в поведении медианы Кемени наиболее резко проявляются в ситуации, когда ее применение не имеет содержательного обоснования, т. е. когда у экспертов нет основы для согласия, их ответы равномерно распределены на множестве ранжировок.

Увеличение числа испытаний в 10 раз при переходе от серии 1 к серии 5 не очень сильно повлияло на приведенные в таблице характеристики, поэтому представляется, что суть дела выявляется при числе испытаний (в методе Монте-Карло), равном 100 или даже 50. Увеличение числа объектов или экспертов увеличивает число элементов в рассматриваемом пространстве ранжировок, а потому уменьшается частота попадания какого-либо из мнений экспертов внутрь медианы Кемени. А также отношение диаметра медианы к диаметру множества экспертов и число элементов медианы Кемени (среднее и максимальное). Можно сказать, что увеличение числа объектов или экспертов уменьшает степень дискретности задачи, приближает ее к непрерывному случаю, а потому уменьшает выраженность различных «патологий».

Есть много интересных результатов (здесь они не рассматриваются), связанных, в частности, со сравнением медианы Кемени с другими методами усреднения мнений экспертов, например, с нахождением итогового упорядочения по методу средних рангов. А также с использованием малых окрестностей ответов экспертов для поиска входящих в медиану ранжировок, с теоретической и численной оценкой скорости сходимости в законах больших чисел.

Для медианы Кемени справедливы законы больших чисел [4, 14].

8.5. Коэффициенты корреляции и конкордации

Термин «корреляция» означает «связь». Применительно к анализу данных этот термин обычно используется в сочетании «коэффициент корреляции». Рассмотрим линейный и непараметрические парные коэффициенты корреляции, в том числе для нечисловых данных.

Обсудим способы измерения связи между двумя случайными переменными. Пусть исходными данными является набор случайных векторов $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, ..., n$. Выборочным коэффициентом корреляции, более подробно, выборочным линейным парным коэффициентом корреляции К. Пирсона, как известно, называется число

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Если $r_n = 1$, то $y_i = ax_i + b$ при некоторых a и b, причем $a > 0$. Если же $r_n = -1$, то $y_i = ax_i + b$, причем $a < 0$. Таким образом, близость коэффициента корреляции к 1 (по абсолютной величине) говорит о достаточно тесной линейной связи.

Если случайные вектора $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, ..., n$, независимы и одинаково распределены, то выборочный коэффициент корреляции сходится к теоретическому при безграничном возрастании объема выборки:

$$r_n \to \rho = \frac{M(x_1 - M(x_1))(y_1 - M(y_1))}{\sqrt{D(x_1)}\sqrt{D(y_1)}}$$

(сходимость по вероятности в предположении, что существуют дисперсии координат случайного вектора).

Более того, выборочный коэффициент корреляции является асимптотически нормальным. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{r_n - \rho}{\sqrt{D_0(r_n)}} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $D_0(r_n)$ — асимптотическая дисперсия выборочного коэффициента корреляции. Она имеет довольно сложное выражение, приведенное в классической монографии Г. Крамера [25, с. 393]:

$$D_0(r_n)=\frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}+\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}+\frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}+\frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}^2}-\frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}}-\frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}\right).$$

Здесь под μ_{km} понимаются теоретические центральные моменты порядка k и m, а именно,

$$\mu_{km}=M\left\{(x_1-M(x_1))^k(y_1-M(y_1))^m\right\}.$$

Коэффициенты корреляции типа r_n используются во многих алгоритмах многомерного статистического анализа.

В теоретических рассмотрениях часто считают, что случайные вектора $(x_i,y_i)=(x_i(\omega),y_i(\omega))$, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$, имеют двумерное нормальное распределение. Распределения реальных данных, как правило, отличны от нормальных [13, 15]. Почему же распространено представление о двумерном нормальном распределении? Дело в том, что теория в этом случае проще. В частности, равенство 0 теоретического коэффициента корреляции эквивалентно независимости случайных величин. Поэтому проверка независимости сводится к проверке статистической гипотезы о равенстве 0 теоретического коэффициента корреляции. Эта гипотеза принимается, если $|r_n|<C(n,\alpha)$ где $C(n,\alpha)$ — некоторое граничное значение, зависящее от объема выборки n и уровня значимости α.

Если предположение о двумерной нормальности не выполнено, то из равенства 0 теоретического коэффициента корреляции не вытекает независимость случайных величин. Нетрудно построить пример случайного вектора, для которого коэффициент корреляции равен 0, но координаты зависимы. Кроме того, для проверки гипотез о коэффициенте корреляции в общем случае, строго говоря, нельзя пользоваться таблицами, рассчитанными в весьма частном предположении нормальности. Можно построить правила принятия решений на основе асимптотической нормальности выборочного коэффициента корреляции. Но есть и другой путь — перейти к непараметрическим коэффициентам корреляции, одинаково пригодным при любом непрерывном распределении случайного вектора.

Для расчета непараметрического *коэффициента ранговой корреляции Спирмена* необходимо сделать следующее. Для каждого x_i рассчитать его ранг r_i в вариационном ряду, построенном по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$. Для каждого y_i рассчитать его ранг q_i в вариационном ряду, построенном по выборке $y_1, y_2, ..., y_n$. Для набора из n пар (r_i, q_i), $i = 1, 2, ..., n$, вычислить линейный коэффициент корреляции. Он называется коэффициентом ранговой корреляции, поскольку определяется через ранги. В качестве примера рассмотрим данные из табл. 8.3.

Таблица 8.3

Данные для расчета коэффициентов корреляции

i	1	2	3	4	5
x_i	5	10	15	20	25
y_i	6	7	30	81	300
r_i	1	2	3	4	5
q_i	1	2	3	4	5

Для данных табл. 8.3 коэффициент линейной корреляции равен 0,83, непосредственной линейной связи нет. А вот коэффициент ранговой корреляции равен 1, поскольку увеличение одной переменной однозначно соответствует увеличению другой переменной. Во многих экономических задачах, например, при выборе инвестиционных проектов, достаточно именно монотонной зависимости одной переменной от другой.

Поскольку суммы рангов и их квадратов нетрудно подсчитать заранее, то *коэффициент ранговой корреляции Спирмена* равен

$$\rho_n = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - q_i)^2}{n^3 - n}.$$

Отметим, что *коэффициент ранговой корреляции Спирмена* остается постоянным при любом строго возрастающем преобразовании шкалы измерения результатов наблюдений. Другими словами, он является адекватным в порядковой шкале (см. главу 6), как и другие ранговые статистики, например статистики Вилкоксона, Смирнова, типа омега-квадрат для проверки однородности независимых выборок [13, 15].

Широко используется также коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла, коэффициент ранговой конкордации Кендалла и Б. Смита и др. Наиболее подробное обсуждение этой тематики содержится в монографии [26], необходимые для практических расчетов таблицы имеются в справочнике [27]. Дискуссия о выборе вида коэффициентов корреляции продолжается до настоящего времени [28].

Замечание. Знаменитый английский статистик *M.G. Kendall* известен в нашей стране как Кендалл (в книгах, выпущенных издательствами «Наука» и «Мир») и Кендэл (в книгах издательства «Статистика»). Мы придерживаемся первого написания.

Коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла определяется так [26]. Пусть N — количество тех упорядоченных пар индексов (i, j), $i < j$, для которых эксперты одинаково упорядочивают объекты, т. е. для которых либо одновременно $r_i < r_j$, $q_i < q_j$, либо одновременно $r_i > r_j$, $q_i > q_j$. Тогда

$$\tau = \frac{4N}{n(n-1)} - 1.$$

Если экспертные упорядочения совпадают, то коэффициент ранговой корреляции Кендалла принимает максимальное значение $\tau = 1$. Именно так обстоит дело для данных, приведенных в табл. 8.3. Если эксперты дают прямо противоположные упорядочения, их мнения противоречат друг другу для любой пары объектов, то коэффициент ранговой корреляции Кендалла минимален, $\tau = -1$.

Если экспертов $m > 2$, то данные ими m упорядочений можно записать в виде матрицы, i-я строка которой содержит ранжировку, полученную от i-го эксперта, а столбцы соответствуют n объектам экспертизы, рассматриваемым в данном исследовании:

$$\begin{Vmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m,1} & r_{m,2} & \cdots & r_{m,n} \end{Vmatrix}. \qquad (8.15)$$

В фундаментальном справочнике [27] используется более общая терминология. Вместо ранжировки, полученной от i-го эксперта, рассматривается ранжировка по i-му признаку.

Более подробно, в [27] рассматривается «совокупность индивидуумов, обладающих таким признаком, который, может быть, и не поддается точной количественной оценке, однако позволяет сравнивать индивидуумы друг с другом. Таким образом, в результате подобного сравнения всю совокупность можно «ранжировать», приписав каждому индивидууму порядковый номер, соответствующий итогам сравнения с другими индивидуумами. Если индивидуумы могут обладать не одним, а двумя признаками, то для исследования их влияния друг на друга обычно рассматривают выборку из n независимых индивидуумов и каждому индивидууму приписывают два порядковых номера в соответствии с «ранжировками» по обоим признакам» [27, табл. 8.10].

Эта подробная цитата приведена для того, чтобы показать, что одна и та же математическая сущность может быть описана с помощью весьма различающихся слов. Для «перевода» необходимо заменить «индивидуума» на «объект экспертизы», а «признак» — на «мнение эксперта».

В качестве единой выборочной меры связи m признаков Кендалл и Бэбингтон Смит предложили коэффициент согласованности W, называемый также коэффициентом конкордации (от лат. *concordare* — привести в соответствие, упорядочить):

$$W = \frac{12 S_W}{m^2\left(n^3 - n\right)},$$

где

$$S_W = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} - \frac{m(n+1)}{2}\right]^2.$$

Можно показать, что среднее арифметическое коэффициентов ранговой корреляции Спирмена ρ для $m(m-1)/2$ пар признаков равно $(mW-1)/(m-1)$. В частности, если $m = 2$, то $\rho = 2W - 1$.

Все три коэффициента $|\rho|$, $|\tau|$ и W принимают значения из отрезка [0; 1] и используются для проверки нулевой гипотезы H_0 о независимости признаков. Признаки называются независимыми, если для наугад выбранного столбца матрицы (8.15) ранги (порядковые номера) $r_{1,j}$, $r_{2,j}$, ..., $r_{m,j}$ являются взаимно независимыми случайными величинами. В терминах теории экспертных оценок гипотеза H_0 — это гипотеза о том, что случайные ранжировки независимы и равномерно распределены на множестве всех ранжировок (без связей).

Если рассматриваемый коэффициент ($|\rho|$, $|\tau|$ или W) не превосходит заданного граничного значения, то гипотеза H_0 принимается, если превосходит — отклоняется в пользу альтернативной гипотезы общего вида, т. е. гипотезы о том, что совместное распределение ранжировок отличается от совместного распределения независимых одинаково распределенных ранжировок. При этом остается неизвестным, нарушается ли предположение независимости, или предположение равномерности распределения, или и то и другое вместе. Например, нулевая гипотеза отклоняется, если все эксперты повторяют ответ первого из них, но сам этот ответ равномерно распределен. Или тогда, когда половина экспертов выбирает одну определенную ранжировку или похожие на нее, а вторая половина экспертов — другую определенную ранжировку (или похожую на нее). В этом случае нет равномерности распределения, и нулевая гипотеза отклоняется, хотя говорить о согласованности экспертов не приходится. Если же нулевая гипотеза принимается, то ни о какой согласованности мнений экспертов говорить нельзя.

Распределения коэффициентов ($|\rho|$, $|\tau|$ или W) — дискретные, граничные значения зависят от числа объектов экспертизы n, числа экспертов m и уровня значимости α. Распределения коэффициентов ранговой корреляции $|\rho|$ и $|\tau|$ и коэффициента согласованности (конкордации) W приведены в [26, 27].

Если гипотеза H_0 верна, то

$$M(\rho) = 0,\ M(\tau) = 0,\ M(W) = \frac{1}{m},$$

$$D(\rho) = \frac{1}{n-1},\ D(\tau) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)},\ D(W) = \frac{2(m-1)}{m^3(n-1)}.$$

Распределения коэффициентов ранговой корреляции ρ и τ и коэффициента согласованности (конкордации) W являются асимптотически нормальными, причем с приведенными выше значениями математических ожиданий и дисперсий. Как отмечено в [27], асимптотической нормальностью распределений коэффициентов ранговой корреляции ρ и τ можно пользоваться для вычисления их критических значений при $n > 10$. В то же время коэффициент согласованности (конкордации) W распределен асимметрично, для него сходимость распределения к нормальному закону медленнее, чем для коэффициентов ранговой корреляции ρ и τ, и в [27] рекомендуется использовать аппроксимацию бета-распределением (β-распределением).

Подробнее о ранговой корреляции и ее применениях, о мощности критериев некоррелированности признаков, о предельных теоремах и т. п. см. монографии [26, 29]. Полезная информация собрана в [30], хотя эта статья и содержит некоторые неаккуратные (с математической точки зрения) формулировки.

Пример 8.13. Необходимо определить степень согласованности мнений пяти экспертов ($m = 5$), результаты ранжирования которыми семи объектов ($n = 7$) приведены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Данные для оценки согласованности мнений пяти экспертов

Номер объекта экспертизы	Оценка эксперта					Сумма рангов	Отклонение от среднего	Квадрат отклонения
	1	2	3	4	5			
1	4	6	4	4	3	21	1	1
2	3	3	2	3	4	15	-5	25
3	2	2	1	2	2	9	11	121
4	6	5	6	5	6	28	8	64
5	1	1	3	1	1	7	-13	169
6	5	4	5	6	5	25	5	25
7	7	7	7	7	7	35	15	225

Рассчитаем среднее арифметическое рангов:

$$\frac{m(n+1)}{2} = \frac{5(7+1)}{2} = 20 .$$

Затем рассчитаем сумму квадратов отклонений сумм рангов по объектам экспертизы от их среднего арифметического:

$$S_W = \sum_{i=1}^{7}\left[\sum_{j=1}^{5} r_{i,j} - 20\right]^2 = 630.$$

Определяем величину коэффициента конкордации:

$$W = \frac{12 \times 630}{5^2(7^3 - 7)} = 0,9.$$

Много это или мало? Если проведем соответствующие вычисления с помощью программного продукта STATISTICA, то получим значение достигаемого уровня значимости 0,00014. Это значит, что нулевая гипотеза отклоняется на любом из реально используемых в социально-экономических и технических исследованиях уровней значимости (т. е. 0,05, 0,01 или 0,1), поскольку все они много больше достигаемого уровня значимости.

Достигаемый уровень значимости — это случайная величина, равная вероятности попадания статистики критерия в критическую область, заданную рассчитанным по выборке значением статистики критерия. Для критической области вида $\{x: x > a\}$ достигаемый уровень значимости есть $F(X_n)$, где X_n — рассчитанное по выборке значение статистики критерия X, а $F(a) = P(X > a)$ — дополнение до 1 функции распределения статистики критерия X. Достигаемый уровень значимости — это вероятность того, что статистика критерия X в новом независимом эксперименте примет значение большее, чем при расчете по конкретной выборке, т. е. большее, чем X_n [15, приложение 1].

Нормированная и центрированная величина коэффициента конкордации W такова:

$$\frac{W - M(W)}{\sqrt{D(W)}} = \frac{W - \frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{2(m-1)}{m^3(n-1)}}} = \frac{W - \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{2 \times 4}{125 \times 6}}} = \frac{W - 0,2}{0,1033} = 6,78.$$

Из асимптотической нормальности W вытекает тот же вывод, что и из расчетов с помощью пакета STATISTICA.

Расстояние Кемени и коэффициенты ранговой корреляции. Пусть A и B — две ранжировки (без связей). Рассмотрим относительное расстояние Кемени между ранжировками, т. е.

$$d(A,B)=\frac{D(A,B)}{\max\limits_{A,B} D(A,B)}=\frac{2\sum\limits_{1\le i<j\le k}|a(i,j)-b(i,j)|}{k(k-1)}.$$

Относительное расстояние неотрицательно и не превосходит 1. Оно равно 1 только для пар противоположных упорядочений, для которых различны все элементы описывающих их матриц, кроме лежащих на главной диагонали.

Пусть $\tau(A,B)$ — коэффициент ранговой корреляции Кендалла между ранжировками A и B. Тогда

$$2d(a,B)+\tau(A,B)=1.$$

Более того, единственная с точностью до постоянного множителя линейная функция от $\tau(A,B)$, задающая расстояние между ранжировками A и B, есть

$$d(A,B)=\frac{1-\tau(A,B)}{2}.$$

При этом никакая линейная функция от коэффициента ранговой корреляции Спирмена $\rho(A,B)$ не задает расстояние между ранжировками.

Сформулированные здесь результаты получены в работе [31]. Они позволяют установить связь между двумя, казалось бы, совсем различными подходами к анализу экспертных мнений, выраженных ранжировками.

Математические методы теории принятия решений [32, 33] — обширная область математических методов экономики. Она весьма разветвлена. Мы рассмотрели лишь весьма малую ее часть. Например, здесь не была затронута такая частная подобласть, как применение теории нечетких множеств, в том числе нечетких экспертных оценок (см. [6, 33]). Отметим, что теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории случайных множеств, а потому теорию нечетких множеств можно считать частью теории вероятностей [34].

Согласно новой парадигме математических методов экономики [35] центральным ядром прикладной математической статистики и вообще математических методов принятия управленческих решений, в том числе с использованием экспертных оценок, являются методы анализа нечисловой информации, прежде всего методы статистического анализа данных в пространствах нечисловой природы (т. е. методы нечисловой статистики [4]). Именно поэтому основное внимание в настоящем учебнике уделено методам анализа тех или иных нечисловых данных.

Литература

1. *Орлов А.И.* Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. — М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. — 496 с.

2. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

3. *Орлов А.И.* Существование асимптотически оптимальных планов в дискретных задачах динамического программирования // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 155. — С. 147–163.

4. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: Учебник: в 3 ч. Ч. 1: Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 542 с.

5. *Орлов А.И.* Теория люсианов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 101. — С. 275–304.

6. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: Учебник: в 3 ч. Ч. 2: Экспертные оценки. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 486 с.

7. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. — М.: Советское радио, 1972. — 192 с.

8. Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях / Под ред. В.Г. Андреенкова, А.И. Орлова, Ю.Н. Толстовой. — М.: Наука, 1985. — 220 с.

9. *Тюрин Ю.Н., Литвак Б.Г., Орлов А.И., Сатаров Г.А., Шмерлинг Д.С.* Анализ нечисловой информации. — М.: Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.

10. *Орлов А.И.* Расстояния в пространствах статистических данных // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 101. — С. 227–252.

11. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация. Методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.

12. *Жуков М.С.* Об алгоритмах расчета медианы Кемени // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2017. — Т. 83. — № 7. — С. 72–78.

13. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. Учебник. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

14. *Орлов А.И.* Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы // Научный журнал КубГАУ. — 2013. — № 89. — С. 175–200.

15. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

16. *Орлов А.И.* Предельная теория решений экстремальных статистических задач // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 133. — С. 579–600.

17. *Сидельников Ю.В.* Теория и организация экспертного прогнозирования. — М.: ИМЭМО АН СССР, 1990. — 196 с.

18. *Раушенбах Г.В.* Меры близости и сходства // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1985. — С. 169–203.

19. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

20. *Окстоби Дж.* Мера и категория. — М.: Мир, 1974. — 158 с.

21. *Льюс Р., Галантер Е.* Психофизические шкалы // Психологические измерения. — М.: Мир, 1967. — С. 111–195.

22. *Орлов А.И.* Связь между нечеткими и случайными множествами: Нечеткие толерантности // Исследования по вероятностно-статистическому моделированию реальных систем. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1977. — С. 140–148.

23. *Орлов А.И., Раушенбах Г.В.* Метрика подобия: аксиоматическое введение, асимптотическая нормальность // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 5. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1986.— С. 148–157.

24. *Жихарев В.Н., Орлов А.И.* Законы больших чисел и состоятельность статистических оценок в пространствах произвольной природы // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 12. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1998. — С. 65–84.

25. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

26. *Кендэл М.* Ранговые корреляции. — М.: Статистика, 1975. — 216 с.

27. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

28. *Орлов А.И.* Ошибки при использовании коэффициентов корреляции и детерминации // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2018. — Т. 84. — № 3. — С. 68–72.

29. *Ван дер Варден Б.Л.* Математическая статистика. — М.: ИЛ, 1960. — 436 с.

30. *Ромашкина Г.Ф., Татарова Г.Г.* Коэффициент конкордации в анализе социологических данных // Социология: методология, методы, математические модели. — 2005. — № 20. — С. 131–158.

31. *Кузьмин В.Б., Овчинников С.В.* Модель для измерений в порядковых шкалах // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. — М.: Наука, 1974. — С. 384–388.

32. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений: Учебник. — М.: КноРус, 2011. — 568 с.

33. *Орлов А.И* Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 576 с.

34. *Орлов А.И.* Теория нечетких множеств — часть теории вероятностей // Научный журнал КубГАУ. — 2013. — № 92. — С. 51–60.

35. *Орлов А.И.* Новая парадигма математических методов экономики // Экономический анализ: теория и практика. — 2013. — № 36 (339). — С. 25–30.

Контрольные вопросы и задачи

1. В чем состоит проблема согласованности ответов экспертов?
2. Как бинарные отношения используются в экспертизах?
3. Как бинарные отношения описываются матрицами из 0 и 1?
4. Что такое расстояние Кемени и медиана Кемени?
5. Чем закон больших чисел для медианы Кемени отличается от «классического» закона больших чисел, известного в статистике?
6. Выпишите матрицу из 0 и 1, соответствующую бинарному отношению (кластеризованной ранжировке) $5 < \{1, 3\} < 4 < 2 < \{6, 7\}$.
7. Найдите расстояние Кемени между бинарными отношениями — упорядочениями $A = [3 < 2 < 1 < \{4, 5\}]$ и $B = [1 < \{2, 3\} < 4 < 5]$.
8. Дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний (мер различия) для множества бинарных отношений из 9 элементов $A_1, A_2, A_3, ..., A_9$ (табл. 8.5). Найдите в этом множестве медиану для множества из 5 элементов $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_9\}$.

Таблица 8.5

Попарные расстояния между бинарными отношениями

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	5	3	6	7	4	10	3	11
A_2	5	0	5	6	10	3	2	5	7
A_3	3	5	0	8	2	7	6	5	7
A_4	6	6	8	0	5	4	3	8	8
A_5	7	10	2	5	0	10	8	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	3	5
A_7	10	2	6	3	8	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	3	6	0	9
A_9	11	7	7	8	7	5	3	9	0

9. Докажите, что для блочного расстояния (пример 8.4 из раздела 8.2) справедливо неравенство треугольника.

10. Расскажите о многообразии расстояний в различных пространствах статистических данных.

11. Докажите, что если $d(x, y)$ — расстояние в некотором пространстве, то $\sqrt{d(x,y)}$ — также расстояние в этом пространстве.

12. Имеются данные за несколько лет о торговом обороте Y российского предприятия и его расходах на рекламу X. Данные представлены в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Расходы на рекламу и торговый оборот предприятия

Наименование показателя	**Годы, t**							
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Расходы на рекламу $x(t)$, тыс. руб.	4	4	5	6	8	8	10	11
Торговый оборот $y(t)$, млн руб.	4	5	6	6	8	10	12	13

Вычислите коэффициенты корреляции Пирсона, Спирмена и Кендалла между случайными величинами X и Y.

13. Семь школьников выполняют несколько заданий по математике и физике, которые оцениваются баллами 1–5, затем вычисляется средний балл для каждого школьника по каждому предмету: по математике — x_i, по физике — y_j. Данные представлены в табл. 8.7. Опре-

делите, существует ли корреляция (т. е. связь) между этими оценками, вычислив коэффициенты корреляции Пирсона, Спирмена и Кендалла.

Таблица 8.7

Средние баллы по математике и физике

Школьник	Средний балл по математике x_i	Средний балл по физике y_i
A	1,8	3,2
B	3,0	2,8
C	3,5	4,0
D	4,0	5,0
E	5,0	3,6
F	3,8	2,4
G	2,0	1,2

14. Дана матрица попарных расстояний для множества бинарных отношений из 9 элементов (см. табл. 8.5). Найдите в этом множестве медиану для множества из 5 элементов: A_2, A_3, A_4, A_6, A_8.

Темы заданий на проведение исследовательских работ

1. Классификация мнений экспертов и проверка согласованности.
2. Формирование итогового мнения комиссии экспертов.
3. Расстояние по Кемени и медиана Кемени в экспертных оценках.
4. Законы больших чисел в пространствах нечисловой природы.
5. Рассчитайте модифицированную медиану Кемени упорядочения 7 инвестиционных проектов, приведенных в табл. 5.4 (глава 5).
6. Методы теории люсианов в теории и практике экспертных оценок.
7. Центральная роль статистики объектов произвольной природы в математической теории анализа экспертных оценок.
8. Расстояния в пространствах функций.
9. Докажите, что аксиоматически введенный в разделе 8.3 показатель различия между множествами $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ удовлетворяет неравенству треугольника.
10. Покажите, что среднее арифметическое коэффициентов ранговой корреляции Спирмена ρ для $m(m-1)/2$ пар признаков, рассчитанное по матрице (8.15), равно $(mW-1)/(m-1)$, где W — коэффициент конкордации m признаков.

Главный редактор — *Т. А. Смирнова*
Верстка — *Н. А. Кирьянова*
Художник — *Т. И. Такташов*
Корректор — *Т. А. Васильева*

Учебное издание

Агаларов Зураб Сардарович,
Орлов Александр Иванович

Эконометрика

Учебник

Сертификат соответствия № РОСС RU.AB51.HO5316

Подписано в печать 30.10.2020. Формат 60x90 1/16.
Печать цифровая. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 23,75.
Тираж 500 экз. Заказ

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732
Тел.: 8 (495) 668-12-30, 8 (499) 182-01-58
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис; http://www.dashkov.ru

Отпечатано: Акционерное общество
«Т8 Издательские Технологии»
109316, Москва, Волгоградский проспект, дом 42, корпус 5
Тел.: 8 (499) 322-38-30

9 785394 040757