

ВУЗОВСКИЙ УЧЕБНИК

# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

математическое моделирование  
финансовых операций

УЧЕБНОЕ  
ПОСОБИЕ



# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Под редакцией*

доктора экономических наук **В.А. Половникова**  
доктора педагогических наук **А.И. Пилипенко**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области финансов, учета и мировой экономики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 060400 Финансы и кредит и 060500 Бухгалтерский учет, анализ и аудит

Москва  
ВУЗОВСКИЙ УЧЕБНИК • ВЗФЭИ  
2010

336(07)

-51(07)

УДК 330.115(075.8)

ББК 22.18я73

Ф59

ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Ректор — акад. А.Н. Романов

Председатель научно-методического совета — проф. Д.М. Дайитбегов

*Коллектив авторов:*

*д-р физ.-мат. наук В.Я. Габескирия (гл. 3);*

*канд. экон. наук О.М. Гусарова (гл. 4);*

*д-р экон. наук Н.Б. Кобелев (гл. 9); д-р экон. наук Ю.П. Лукашин (гл. 2);*  
*канд. экон. наук В.В. Мордвинов (гл. 6); канд. экон. наук И.В. Орлова (гл. 5);*

*д-р пед. наук А.И. Пилипенко (гл. 4, 5, 6);*

*д-р экон. наук, проф. В.А. Половников (гл. 1, 6);*

*канд. экон. наук, доц. Л.М. Скучалина (гл. 7);*

*канд. экон. наук, доц. А.М. Черногорский (гл. 8)*

**Р е ц е н з е н т ы:**

доктор экономических наук, профессор Московского государственного университета *В.П. Суйц;*

доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой Московского государственного университета экономики, статистики и информатики *Б.А. Лагоша*

Ф59

**Финансовая математика:** Математическое моделирование финансовых операций: Учеб. пособие/Под ред. В.А. Половникова и А.И. Пилипенко. — М.: Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2010. — 360 с.

ISBN 978-5-9558-0002-8 (Вузовский учебник)

ISBN 978-5-16-003846-9 (ИНФРА-М)

В учебном пособии в концентрированном виде представлена современная методология финансовых расчетов, математического, в том числе имитационного, моделирования и прогнозирования движения различных показателей финансового рынка. Рассматриваются также вопросы технического анализа, теории оптимального портфеля, финансовых рисков.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических и финансовых специальностей вузов, а также специалистов банковских и финансовых структур.

33639

ИНТИ

ББК 22.18я73

ISBN 978-5-9558-0002-8 (Вузовский учебник)

ISBN 978-5-16-003846-9 (ИНФРА-М)

© ВЗФЭИ, 2004

## ВВЕДЕНИЕ

Прагматизм рыночных отношений проявляется в том, что любые ценности, в частности материального характера, представляют интерес для юридических и физических лиц постольку, поскольку способствуют достижению прежде всего экономических целей. Заметим в этой связи, что по различным оценкам на руках у населения России находятся десятки миллиардов долларов. Значительными суммами располагают также юридические лица. Поэтому вопрос об эффективном инвестировании этих средств актуален как для населения, так и для предприятий России. Рациональное решение подобной проблемы в современном динамически развивающемся мире, очевидно, невозможно без математического моделирования соответствующих финансовых операций.

В частности, одним из способов инвестирования является вложение средств в различные финансовые инструменты\*. Стало быть, математическое моделирование финансовых рынков, на которых обращаются эти инструменты, является задачей, представляющей не только теоретический, но и огромный практический интерес.

В нашей стране финансовые рынки появились сравнительно недавно — 1992–1993 гг. На их функционировании до сих пор негативно сказываются по крайней мере три обстоятельства. Во-первых, формирование и развитие российских финансовых рынков, ориентированное в основном на устаревшую американскую модель 70-х гг., происходило без какого-либо определенного плана. Во-вторых, на их становлении и развитии, безусловно, отразилась нестабильная политическая и экономическая ситуация в России. В-третьих, на функционирование российских финансовых рынков весьма существенно влияет так называемый субъективный фактор. Как следствие, в настоящее время — переходный период российской экономики — для отечественных финансовых рынков характерны:

- «неоформленность» в макроэкономическом понимании;
- слабая развитость материальной базы, технологий торговли, регистрирующей и информационной инфраструктур;
- высокая степень рисков вложения средств;
- раздробленность системы государственного регулирования финансовых рынков;
- отсутствие у государства сколько-нибудь продуманной долгосрочной политики их формирования и развития;

---

\* Финансовые обязательства и права, обращающиеся на рынке, как правило, в документарной форме: ценные бумаги, денежные обязательства, валюта, фьючерсы, опционы и т.д.

- высокий уровень инфляции, практически постоянное падение валютного курса рубля;
- крайняя нестабильность в движении курсов объемов торгов;
- отсутствие открытого доступа к макро- и микроэкономической информации о состоянии рынка;
- инвестиционный кризис.

Кроме того, как и все развивающиеся финансовые рынки, российские рынки проходят через неизбежную череду кризисов и обвалов, усугубленных общей нестабильностью внутренней политической и экономической ситуации. Другим не менее важным фактором уязвимости является процесс глобализации мирового хозяйства, при котором национальные экономики оказываются слабо защищенными от влияния экономических кризисов в других странах. Подтверждением этому может служить валютный и фондовый кризис в Юго-Восточной Азии, волны которого прокатились по всему миру во второй половине 1997 г., с особенной силой обрушившись на так называемые развивающиеся рынки. Следует также иметь в виду, что становление развивающихся рынков самым существенным образом зависит от того, насколько они привлекательны для иностранных инвесторов. Иными словами, взлет любого развивающегося рынка обусловлен прежде всего тем, что инвесторы на развитом рынке по каким-то причинам сочли данный сегмент мирового рынка перспективным и направили в него свои капиталы. А это, в свою очередь, означает, что развивающийся рынок не является независимым и его поведение, по существу, обусловлено отношением нерезидентов, инвесторов с развитых рынков капитала.

Уже перечисленные факторы серьезным образом отражаются на ценовых показателях отечественных финансовых рынков, что затрудняет их адекватное моделирование и прогнозирование. В то же время отсутствие надежных прогнозов уже неоднократно приводило к негативным явлениям в экономике России (вспомним, например, банковский кризис 1998 г.).

Таким образом, представляется вполне очевидной насущная необходимость тщательного исследования как отечественных финансовых рынков, так и накопленного мирового опыта. Мощнейшим и эффективным инструментом исследования и изучения финансовых рынков являются математические методы и модели. Подтверждением этому служат работы западных ученых в области финансов, в которых независимо от того, являются ли они монографиями, учебниками, справочниками и т.д., обязательно используется весьма сложный математический аппарат [6, 7, 9, 26]. В отечественной литературе (но не в западной!) под термином

«финансовая математика» понимаются, как правило, методы финансовых количественных расчетов [20]\*. Если же в публикациях по финансам авторы прибегают к более широкому использованию математических методов и (или) компьютерной технологии, это специально оговаривается [22, 26, 27, 29, 32]. Мы также пошли по этому пути, показав в названии работы, что в ней применительно к финансовым рынкам будут рассмотрены традиционные для экономических исследований математические методы и модели. Применение большей части этих методов к проблемам экономики можно найти в уже изданных работах, однако финансовые рынки и их моделирование имеют специфические особенности, которые мы постарались учесть.

Целесообразность развиваемого в учебном пособии концептуального решения, на наш взгляд, достаточно хорошо иллюстрируется известным примером, когда пренебрежение методами математического моделирования процессов, происходящих на финансовом рынке, привело к краху банка, имеющего почти двухсотлетнюю безупречную международную репутацию. Речь идет о банке «Бэринг Бразерс», который в результате неоправданных рисков на рынке деривативов в начале 1995 г. стал фактически неплатежеспособным. Не исключено, что краха можно было избежать, если бы высшее руководство банка своевременно проанализировало рискованность операций с помощью математических методов изучения и оценки рисков.

Разумеется, авторы пособия отдают себе отчет в том, что методы аналитического и имитационного моделирования, изменчивого и непредсказуемого в долговременном периоде финансового рынка, — это один из разнообразных инструментов анализа, управления, выбора стратегии поведения, оценки риска. Очевидно, что взлет и падение финансовых рынков связаны со многими экономическими факторами. Анализ корреляции и регрессии (гл. 7) совместно с моделированием могут дать реальную информацию, которая позволит проверить различные инвестиционные стратегии. Вместе с тем следует подчеркнуть, что сложность решения этих вопросов диктует необходимость применения наряду с моделированием и других методов принятия решений (гл. 8, 9).

Данное учебное пособие предназначено в первую очередь студентам, обучающимся по заочной и дистанционной (дистантной) формам.

---

\* Исключением является двухтомник Ширяева А.Н. «Основы стохастической финансовой математики» (М.: ФАЗИС, 1998).

### 1.1. Классификация и характеристика финансовых рынков

*Финансовые рынки — это общее название рынков, понимаемых как механизм, с помощью которого удовлетворяются спрос и предложения на различные финансовые инструменты.*

Финансовые рынки предназначены для установления непосредственных контактов между покупателями и продавцами финансовых ресурсов. Принято выделять несколько основных видов финансового рынка: кредитный рынок, валютный рынок и рынок ценных бумаг. Иногда выделяют рынок золота (в нашей стране неразвит) либо же объединяют рынок ценных бумаг с кредитным рынком в рынок капиталов.

Кратко охарактеризуем состав и предназначение каждого из этих рынков.

**Кредитный рынок** — это механизм, при помощи которого устанавливаются взаимоотношения между предприятиями и гражданами, нуждающимися в финансовых средствах, и организациями и гражданами, которые их могут предоставить на определенных условиях.

По срокам предоставления различают:

- краткосрочный кредит — до одного года;
- среднесрочный кредит — от одного года до трех лет;
- долгосрочный кредит — свыше трех лет (как правило, 8–10 лет).

В качестве основных функций кредитного рынка необходимо отметить прежде всего следующие:

1) создание крупных денежных фондов путем объединения небольших и разрозненных средств населения, частного бизнеса, зарубежных инвесторов и государственных подразделений;

2) обеспечение источников финансирования национальной экономики после трансформации полученных денежных средств в ссудный капитал;

3) предоставление займов государственным органам, частным фирмам и населению для решения конкретных задач финансирования.

Таким образом, кредитный рынок позволяет осуществлять накопление, движение, распределение и перераспределение заемного капитала между различными сферами экономики.

**Валютный рынок** — это механизм, с помощью которого устанавливаются правовые и экономические взаимоотношения между потребителями и продавцами валют.

Среди участников валютного рынка выделяют три категории. К первой из них относятся коммерческие банки, ко второй — небанковские финансовые учреждения и к третьей — предприятия и частные лица.

Валютный рынок позволяет осуществлять широкий спектр финансовых операций, связанных с иностранной валютой.

К основным функциям валютного рынка относятся:

- 1) проведение международных расчетов;
- 2) регулирование курсов валют;
- 3) страхование валютных рисков;
- 4) получение прибыли участниками валютного рынка в виде разницы курсов валют;
- 5) проведение валютной политики государства, направленной на регулирование национальной экономики и укрепление национальной валюты.

**Рынок ценных бумаг**, или **фондовый рынок**, объединяет часть кредитного рынка (рынок инструментов займа или долговых обязательств) и рынок инструментов собственности, т.е. этот рынок охватывает операции по выпуску и обращению инструментов займа, инструментов собственности, а также их гибридов и производных.

Рынок ценных бумаг подразделяется на первичный и вторичный, биржевой и внебиржевой.

**Первичный рынок ценных бумаг** — механизм, с помощью которого удовлетворяется спрос на выпуск и первичное размещение ценных бумаг. На этом рынке компании получают необходимые финансовые ресурсы путем продажи своих ценных бумаг.

**Вторичный рынок ценных бумаг** предназначен для обращения ранее выпущенных ценных бумаг. На вторичном рынке компании не получают финансовых ресурсов непосредственно, однако этот рынок является исключительно важным, поскольку дает возможность инвесторам при необходимости возвращать денежные средства, вложенные в ценные бумаги, а также получать доход от операций с ними.

**Биржевой рынок** предназначен для обращения ценных бумаг, осуществляемого фондовыми биржами. Порядок участия в торгах



для эмитентов, инвесторов и посредников определяется самими биржами.

*Внебиржевой рынок* предназначен для обращения ценных бумаг вне биржи. Он обеспечивает первичное размещение, а также перепродажу ценных бумаг тех эмитентов, которые не хотят или не могут попасть на биржу. Основой внебиржевого рынка корпоративных ценных бумаг в нашей стране является Российская торговая система, через которую проходит от 60 до 70% оборота рынка (остальное приходится на биржи и фондовые магазины).

Каждый из перечисленных выше финансовых рынков обладает собственной системой регулирования. На систему регулирования финансовых рынков следует обратить особое внимание, так как именно от нее в наибольшей степени зависит функционирование и жизнеспособность рынка. Обычно различают следующие виды регулирования (классификация по субъектам, его осуществляющим):

- 1) государственное регулирование, осуществляемое государственными органами;
- 2) регулирование со стороны профессиональных участников рынка, или саморегулирование рынка;
- 3) общественное регулирование, или регулирование через общественное мнение.

В настоящее время наибольшее значение и влияние в России имеет первый из них.

Понятие регулирования достаточно обширно и охватывает все сферы финансовых рынков. Определяя регулирование как упорядочивание деятельности всех участников рынка и операций между ними, мы говорим о регулировании финансовых рынков в общем, пытаюсь охватить все аспекты регулирования. Однако прежде всего нас интересует процесс ценообразования на финансовых рынках. Именно эта составляющая регулирования, и в первую очередь государственного регулирования, вызывает больше всего споров. Именно ее имеют в виду противники регулируемого рынка. Никто не оспаривает важности таких аспектов регулирования, как:

- создание нормативной базы функционирования рынка (поддержание порядка на рынке, создание нормальных условий его функционирования);
- контроль за соблюдением всеми участниками норм и правил функционирования рынка;
- обеспечение всех участников рынка доступной, подробной и своевременной информацией о текущих и прошлых ценах, правилах рынка, основных возможных рисках участников рынка и т.д.

В то же время такие аспекты, как воздействие на рынок для достижения каких-либо общественных целей и отбор профессиональных участников рынка, вызывают серьезные возражения. В качестве контраргументов приводятся доводы о том, что *«регулирование не должно ограничивать число тех или иных игроков на рынке — их число должно регулироваться “естественным отбором”, конкуренцией»*. Для того чтобы рынок ценных бумаг обеспечивал свою роль «градусника» для экономики, необходима полная свобода рыночных цен (поэтому, собственно, и говорят о рынке). Регулирование не должно создавать механизмов, искажающих или ограничивающих снизу или сверху цены участников. Кроме того, информация о ценах спроса и предложения на финансовые инструменты должна быть хорошо известна, чтобы общество могло определять направления своего производственного и экономического развития в соответствии с законами рыночной экономики.

Эти вопросы плохо проработаны не только в России. У западных экономистов также нет единого мнения по многим вопросам, касающимся теоретических основ финансовых рынков, и в первую очередь рынка ценных бумаг. Так, ведутся дискуссии о:

- разных типах организаторов торговли: клиентских и дилерских рынках (NYSE- и NASDAQ-модели), возможностях автоматического трейдинга;
- системах раскрытия информации, необходимом объеме раскрываемой информации;
- защите прав инвесторов (активизм);
- легитимности новых технологий (например, можно ли проводить IPO в Internet, и если можно, то каким образом);
- том, кто регулирует антимонопольные вопросы на рынках;
- новых системах государственного регулирования финансовых рынков (функциональные подходы против равнорисковых, регулирование против саморегулирования).

Неизученность этих проблем порождает интенсивную полемику не только во всем мире, но и у нас в России. Многочисленные российские рабочие группы по созданию концепций развития, разработке законодательства и осуществлению различных, зачастую громоздких инфраструктурных проектов постоянно «пробуксовывают» по этой причине. Но в то же время в ходе таких споров в последние 2–3 года сформировалась группа высокопрофессиональных отечественных специалистов, которые вполне способны не только воспринимать и копировать удачные западные модели, но и на равных участвовать в обсуждениях важных

проблем мировых финансовых рынков, распространять мировое понимание их работы, моделей инфраструктуры и регулирования.

Поэтому Россия имеет уникальный шанс построить собственную, российскую модель регулирования финансовых рынков, которая не копировала бы принятые сегодня в мире нормы и правила, а опиралась на самые последние разработки и исследовательские результаты в этой области.

Теперь перейдем к обсуждению вопроса о подходах к исследованию финансовых рынков.

На сегодняшний день существуют две основные школы анализа финансовых рынков — фундаментальная и техническая, которые представлены соответственно фундаментальным и техническим анализом. Вплоть до середины 1970-х гг. эти две школы полностью доминировали в изучении проблем финансовых рынков, причем сторонники каждой из них жестко придерживались постулатов своей школы и отвергали аргументы другой.

С середины 70-х гг. они начали смягчать занимаемые позиции, частично заимствовав методы своих противников, а также компоненты других теорий. Тем не менее и на сегодняшний день две эти школы являются основными и по-прежнему сохраняют свои специфические особенности.

Хотя оба направления имеют одну и ту же цель, подходы к ее изучению существенно различаются. Фундаментальный анализ изучает причины, движущие рынком, а технический — результат воздействия этих причин.

Методы фундаментальной школы в какой-то степени применяются любым человеком — и обывателем, и директором банка. Каждый может исходя из обычной логики и имеющейся, в том числе экономической, информации прогнозировать поведение рынка. Хотя собственно *фундаментальный анализ* оперирует гораздо большим количеством данных и изучает их на качественно ином уровне, принципиальный подход остается тем же. В частности, для каждого из финансовых рынков существует основной набор фундаментальных показателей, рассматриваемых при составлении прогноза. Например, в качестве таких показателей, влияющих на курсы валют, можно выделить следующий набор: паритет покупательной способности, валовой национальный продукт, состояние платежного баланса страны, различные сводные индексы (промышленный, делового оптимизма), уровень инфляции.

*Технический анализ* можно определить как метод исследования рынка, основанный главным образом на математических вы-

кладках. В 1970-е гг. большая часть основополагающих методик была объединена в единую теоретическую концепцию, обладавшую собственными аксиомами, постулатами и философскими принципами. Разумеется, формирование и развитие технического анализа происходило за пределами нашей страны ввиду отсутствия в ней в те годы предмета данного анализа как такового.

Перейдем теперь к классическим определениям и формулировкам основных положений технического анализа, предложенным ведущим специалистом в этой области Дж. Мерфи.

Прежде всего остановимся на следующих исходных понятиях.

**Движение рынка** — под этим термином понимают три основных вида информации.

**Цена** — действительная цена товаров, продаваемых на биржах, а также значения валютных и других индексов.

**Объем торговли** — общее количество заключенных контрактов за определенный промежуток времени. Обычно за таковой принимают торговый день.

**Открытый интерес** — количество позиций, не закрытых на конец торгового дня.

Разумеется, не все три индикатора равноценны. Главный из них — цена. Изучение движения цен, их моделирование и прогнозирование наиболее эффективно и наглядно. В конечном счете именно прогнозирование цен является определяющим в техническом анализе. Поэтому большинство методов применяются именно к ним. В настоящее время данные о ценах наиболее доступны участникам любого рынка и могут быть получены практически мгновенно благодаря современным информационным технологиям либо с небольшим опозданием в периодической печати.

Таким образом, теперь мы можем определить *технический анализ* как метод прогнозирования цен с помощью рассмотрения графиков движений рынка за предыдущие периоды времени.

Объем также играет большую роль для прогнозирования и является вторым индикатором, однако его сложно определить однозначно на всех рынках и данные о нем обычно поступают с большой задержкой. Использование объема торгов — более специфический метод для анализа рынка, чем прогнозирование цен, поэтому он и встречается реже.

Значительный интерес в явном виде можно встретить, например, при торговле товарными фьючерсами. В основном они используются для определения текущей ликвидности рынка, заинтересованности в нем участников, обоснованности тех или иных ценовых движений.

Профессиональный же технический анализ обычно строится с использованием максимального количества доступных данных, в идеале — всех трех индикаторов.

Теперь рассмотрим *основные постулаты технического анализа*.

**1. Рынок учитывает все.** Считается, что в существующие рыночные цены сделок уже заложены все факторы (экономический, политический, психологический), влияющие на них, а также дальнейшее направление динамики цен в виде ожиданий его участников, представленных в ценовых решениях. Поэтому изучение рядов динамики цен — все, что требуется для анализа.

Значение цены — отражение всех внешних условий. Следовательно, любое изменение цены есть реакция на соответствующее изменение внешних условий. Специалисты, использующие технический анализ, прекрасно понимают, что рост и спад цены вызваны определенными, главным образом фундаментальными, причинами, однако считают, что нет необходимости изучать каждую из этих причин в отдельности, а затем суммировать их влияние, когда можно исследовать их совокупное воздействие, отраженное в ценовых значениях.

**2. Движение цен подчинено тенденциям.** Это предположение является основой всех методик технического анализа, а все расчеты и выводы базируются на понятии тренда.

*Тренд* — определенное направление движений цен, долгосрочная тенденция их развития. Определение трендов и является, пожалуй, основной задачей технического анализа. А так как ценовая динамика рынка представляет собой серию флуктуаций, которые напоминают последовательно идущие волны, состоящие из подъемов и падений, то правильнее было бы сказать, что направление динамики этих подъемов и падений образует тенденцию рынка. Впрочем, здесь многое зависит от того, на какой период времени составляется прогноз.

**3. История повторяется.** Считается, что будущее — это всего лишь продолжение прошлого. Происходит это потому, что человеческая психология в основе своей неизменна. Технический анализ занимается изучением событий, связанных с рынком, а значит, изучением человеческой психологии. Ведь основной фактор, определяющий цены, психологический — социально-массовое, эмоциональное настроение. Оно повторяется на протяжении всей истории и отражается в графиках движений рынка. С точки зрения технического анализа понимание будущего лежит в изучении прошлого. По этой причине технический анализ использует большое число методов, работающих на основе экстраполяции.

Среди положительных черт технического анализа стоит отметить свойственную только ему гибкость и адаптационные возможности. Его можно применить практически для любого средства торговли и в любом временном интервале. Нет такой области в операциях на фондовой и товарной биржах, где нельзя было бы применить методы технического анализа. Профессиональный технический аналитик может одинаково успешно оценивать любой из существующих рынков. Еще одной сильной стороной технического анализа является возможность его применения на любом отрезке времени. При этом не имеет значения, исследуем ли мы колебания в пределах одного дня торгов, когда важен каждый ценовой пик, или анализируем среднесрочную тенденцию — в любом случае используются одни и те же принципы.

Подчеркнем, что в техническом анализе также могут применяться и применяются самые современные математические методы и модели. Основное различие, на наш взгляд, между фундаментальным и техническим анализом заключается в том, что первый изучает причины, которые привели либо могут привести в обозримом будущем к изменению тенденций на финансовом рынке. На основе полученных выводов фундаментальный анализ позволяет принять соответствующее (адекватное) решение, рассчитываемое, как правило, на долго- или среднесрочную перспективу и направленное прежде всего на приспособление, адаптацию внутреннего механизма, структуры системы к изменяющимся условиям. В техническом анализе подобные исследования не проводятся, система рассматривается как единое, целое звено, которое именно в таком качестве реагирует на внешние изменяющиеся условия и дает рекомендации, прогноз на ближайшую перспективу. Вследствие этого для использования технического анализа достаточно одномерных временных рядов, в то время как для проведения фундаментального анализа необходимы многомерные ряды, причем не только временные. В соответствии с этим фундаментальный и технический анализ различаются также и по используемым математическим методам и моделям.

Одним из необходимых условий применения математики в изучении процессов любого рода является возможность приблизиться к их достаточно однородным и простым первичным элементам. В финансах такими первичными элементами являются финансовые инструменты, под которыми понимаются денежные средства, исчисляемые как в рублях, так и в иностранной валюте, а также ценные бумаги и банковские кредиты.

На территории Российской Федерации к ценным бумагам относят акции акционерных обществ, облигации, государственные долговые обязательства, и, кроме того, ценные бумаги, производные от перечисленных, удостоверяющих право владельцев бумаг на продажу и покупку ценных первичных бумаг: фьючерсы, опционы, варранты, свопы и другие финансовые инструменты. На российских финансовых рынках наибольшее распространение получили фьючерсы и опционы.

Фьючерсы представляют собой контракт, в котором зафиксировано *обязательство* о покупке или продаже товара в будущем в оговоренный срок по цене, установленной при заключении контракта. Товарами могут быть сырье, золото, валюта, а также *финансово-кредитные инструменты*. Фьючерс, в свою очередь, является товаром финансового рынка.

Опцион — *право* (но не обязательство) купить или продать конкретную ценную бумагу по зафиксированной в контракте цене до определенного момента времени (американский опцион) или в установленный срок (европейский опцион).

Отметим, что в отличие от товарных рынков, на которых сделки осуществляются большей частью по схеме «товар — деньги», на финансовых рынках предметом сделки с обеих сторон являются финансовые инструменты. Вследствие этого реализация контрактов, заключаемых на финансовых рынках, в настоящее время может осуществляться практически мгновенно, так как она не связана в большинстве случаев с перемещением грузов.

Еще одной особенностью финансовых рынков, на наш взгляд, является их высокая динамичность. Под динамичностью в данном случае понимается быстрое реагирование конъюнктуры (т.е. цен на инструменты финансового рынка), связанное с его высокой чувствительностью на изменения, происходящие во внешней среде: политические, экономические, экологические, военные и пр. Динамичность финансового рынка проявляется, кроме того, в непрерывном изменении числа и состава его элементов, например в количестве и финансовой устойчивости отдельных коммерческих банков, страховых и иных финансовых организаций.

Что касается перемещения на финансовом рынке основного финансового инструмента — денег, то оно происходит двумя путями: прямым финансированием, т.е. непосредственно от собственника сбережений к заемщику, и косвенным финансированием — от собственника сбережений через финансового посредника к заемщику.

Так, прямое финансирование происходит либо путем предоставления инвестиций в обмен на право долевого участия владель-

ца денежных средств в собственности инвестируемого предприятия, либо путем предоставления займов. Первый способ чаще всего реализуется через продажу (покупку) обыкновенных акций, второй — через непосредственное предоставление кредитов на определенный срок и под определенные проценты, в том числе через продажу облигаций.

При косвенном финансировании средства от собственника к заемщику проходят через особые институты, к числу которых относятся банки, страховые общества, финансовые компании и другие финансовые посредники. Наиболее значительные денежные средства в настоящее время аккумулируются в банках, являющихся основными «действующими лицами» денежного (валютного) рынка.

Одно из основных различий между рынком кредитов и фондовым рынком, или рынком ценных бумаг, состоит в том, что на первом из них предоставление кредитов не связано с оформлением специальных документов, которые сами могут быть предметом купли-продажи. На рынке же ценных бумаг кредитные отношения реализуются посредством документов (ценных бумаг), которые имеют собственную стоимость, могут продаваться, покупаться и погашаться.

Воздействие на финансовый рынок различных факторов с разной силой, периодичностью и в разных направлениях приводит к колебаниям протекающих на нем процессов. Учесть влияние каждого внешнего фактора не всегда возможно, да и не всегда необходимо. Чаще всего их влияние можно определить лишь в общей совокупности, в среднем. Вследствие этого спрогнозировать будущие значения показателей финансового рынка можно только с определенной долей вероятности.

Приведенная структура и свойства финансового рынка свидетельствуют о том, что последний является сложной системой, которой присущи практически все основные признаки таких систем, и прежде всего целостность и сложность, возможность его разделения на составные части, вхождение в экономическую систему более высокого порядка, комплексность связей и др. Структурообразующие элементы финансового рынка сами являются сложными системами, и их объединение представляет собой не просто структурно-иерархическое образование, а полиструктурное соединение, состоящее, в свою очередь, из пересечений также сложных, постоянно изменяющихся систем. Таким образом, структура финансового рынка, ее изменения значительным образом сказываются на его процессах и показателях. Естественно, что



структурные изменения должны быть отображены при моделировании финансовых процессов.

## **1.2. Структурные изменения финансовых процессов и причины их возникновения**

Прежде чем обсуждать структурные изменения, определимся с понятием «структура». Термин «структура» используется в современной науке для обозначения совокупности устойчивых связей между основными частями объекта, в которых отражается его целостность и тождественность самому себе, т.е. сохранение его свойств для широкого спектра внешних и внутренних изменений. Структура выражает то, что остается устойчивым и относительно неизменным при различных преобразованиях системы. Принято различать структуру объекта, включающую в себя лишь его инвариантные характеристики, и организацию объекта, которая содержит также и динамические характеристики системы, обеспечивающие ее направленное функционирование. Инвариантной части объекта соответствует инвариантная часть модели — структура модели. Выявление реальной структуры моделируемого объекта представляет собой последовательность приближений, каждое из которых все более точно описывает причинно-следственные связи между его элементами, объясняющие его поведение. Цель изучения реальной структуры объекта — обеспечить возможность достижения желаемого результата в ходе определенных воздействий на объект. Успех такого воздействия и является в конечном итоге критерием, определяющим степень познания реальной структуры.

Однако доказаны ли само наличие и возможность выявления структуры в процессах, происходящих на товарных и финансовых рынках?

Примерно в 1960-е гг. в научной среде появилась теория случайных событий. Сущность ее сводится к тому, что движения цен хаотичны и зависят от бесконечного количества случайных факторов. Изменения цен случайны и непредсказуемы, вследствие чего изучение их динамики никак не может помочь в определении их будущих значений. Длительных, устойчивых ценовых тенденций (трендов) вообще не существует.

Отголоски этой теории до сих пор смущают умы аналитиков. С момента ее возникновения и по сей день было много сказано за и против данной теории, но как ее сторонники, так и противники остались при своем мнении. Рассмотрим, откуда же берется

эта «*ценовая неопределенность*» и какие методы ее исследования и устранения разработаны.

В развитии экономики неопределенность вызывается двумя основными причинами. Во-первых, ход планируемых и управляемых процессов, а также внешние воздействия на эти процессы не могут быть точно предсказаны из-за действия многочисленных случайных факторов и ограниченности человеческого познания в каждый отдельный момент. Особенно характерно это для прогнозирования научно-технического прогресса, потребностей общества, экономического поведения. Во-вторых, общегосударственное планирование и управление не только не всеобъемлющи, но и не всеильны, а наличие множества самостоятельных экономических субъектов с особыми интересами не позволяет точно предвидеть результаты их взаимодействий. Неполнота и неточность информации об объективных процессах и экономическом поведении также усиливают неопределенность.

При системном подходе к структуре моделируемого объекта прежде всего возникает вопрос: в каких пределах действительна инвариантность структуры? Как было сказано выше, познание структуры объекта в конечном счете необходимо для активного, сознательного воздействия на него. Понятно, что при таком действии на объект инвариантность структуры нельзя понимать как ее абсолютную неизменность. Очевидно, что с течением времени неизбежно происходят структурные изменения (как вследствие подобного воздействия, так и вследствие естественных причин). Поэтому одной из основных задач при исследовании экономических процессов является попытка установить собственно факт наличия структурного изменения на данном отрезке времени и степени изменения структуры. Сам термин «*структурное изменение*» (structural change) уже длительное время является устойчивым и устоявшимся в научной среде. Он широко используется в литературе по эконометрии, в основном для обозначения изменения тенденции развития как процессов товарных и финансовых рынков, так и других временных процессов.

Теперь перейдем к следующему вопросу: что же конкретно приводит к изменению структуры? Для того чтобы структура процесса изменилась, должны измениться факторы, определяющие основные параметры процессов, происходящих на финансовом рынке, да и сами условия функционирования рынка или рынков. Какие же факторы определяют *цену* на финансовом рынке? Разумеется, такие факторы различны на различных финансовых рынках.

833639

Для примера рассмотрим факторы, определяющие цену на рынке валютных фьючерсов. Все факторы разбиваются на две большие группы — факторы общего и частного воздействия. К первым из них относятся:

- политическая и общеэкономическая ситуация в стране;
- величина спот-курса доллара, его изменение по отношению к предыдущим торгам и тренду;
- соотношение объемов спроса и предложения валюты на ММВБ;
- курс доллара на внебиржевом рынке;
- уровень доходности других инструментов финансового рынка как альтернативного объекта для краткосрочного вложения капитала;
- уровень процентных ставок кредитов на межбанковском рынке;
- курс доллара на мировом рынке.

Факторы частного воздействия представляют собой:

- изменение котировочных цен фьючерсов;
- рост курса доллара в годовом исчислении исходя из установленных курсов фьючерсов;
- прирост котировок фьючерсов по сравнению с предыдущими торгами;
- соотношения между курсами фьючерса по различным месяцам;
- динамику разброса колебаний цен сделок сессии;
- количество открытых позиций и заключенных контрактов;
- анализ динамики изменения курса фьючерса во время торгов;
- курсы фьючерса на торгах других площадок.

Каждый из этих факторов может влиять на изменение цен контрактов по конкретным месяцам. Как уже говорилось выше, изучением всех этих факторов, а также прогнозированием состояния рынка на их основе занимается фундаментальный анализ.

В соответствии с воздействием этих факторов все причины структурных изменений можно разделить на следующие группы:

- глобальные и локальные;
- внутренние и внешние;
- экономические, политические, психологические;
- искусственные.

**Глобальные причины** связаны с общим состоянием экономики государства. Они в большей или меньшей степени воздействуют практически на все процессы, происходящие на различных финансовых рынках, и определяют значения факторов общего воздействия.

**Локальные причины** вызываются более мелкими событиями, связанными с функционированием отдельных банков либо компаний.

**Внутренние и внешние причины.** Для каждого конкретного финансового рынка причины структурных изменений могут быть внутренними или внешними. И совершенно очевидно, что причины, являющиеся внутренними для одних рынков, могут оказаться внешними для других. Так, например, резкое падение курса рубля, вызванное внутренними для валютного рынка причинами, неизбежно отразится на рынке ценных бумаг. При этом фактор, вызвавший изменение, для рынка ценных бумаг уже будет внешним.

**Психологические, политические, экономические причины.** Изменение экономической либо политической ситуации в стране, безусловно, отражается на состоянии финансовых рынков. С психологическими причинами несколько сложнее, так как они практически никогда не встречаются в чистом виде, а лишь усиливают (ослабляют) эффект, вызванный каким-либо другим фактором. Кроме того, несомненно и то, что психологический фактор приносит наибольший вклад в изменение существующей тенденции, являясь обобщением влияния всех остальных факторов.

**Искусственные причины.** К искусственным причинам следует отнести структурные изменения, являющиеся следствием направленного воздействия на процессы рынка, т.е. регулирование процессов, происходящих на финансовых рынках. С точки зрения фундаментального анализа регулирование процесса ценообразования приводит к существенным отклонениям от фактической — рыночной — цены финансового инструмента, определяемой фундаментальными показателями. И хотя в конце концов соответствие между фактической и расчетной ценой неизбежно устанавливается, достигнутое искусственным путем расхождение может быть весьма значительным и длительным по времени. И первое, и второе было с очевидностью продемонстрировано на опыте регулирования валютного рынка в нашей стране. С точки зрения технического анализа регулирование цен не является помехой для моделирования и прогнозирования, так как технический анализ не рассматривает причин изменения цен, а исследует лишь результаты их воздействия.

Тем не менее структурных изменений, вызванных лишь одной из перечисленных причин, практически не бывает. Структурное изменение порождается их совокупностью. Также следует учитывать тот факт, что реакция рынков на изменившиеся условия не всегда наступает сразу. Запаздывание объясняется свойством инерционности финансовых рынков, которое особенно отчетливо вид-

но при анализе изменений показателей за длительные периоды времени.

Еще одной особенностью финансовых рынков является их высокая динамичность. В данном случае под динамичностью понимается быстрое реагирование конъюнктуры на финансовом рынке, связанное с его высокой чувствительностью к изменениям, происходящим во внешней среде: политическим, экономическим, экологическим, военным и др. Динамичность финансовых рынков проявляется, кроме того, в непрерывном изменении числа и состава его элементов, например в количестве и финансовой устойчивости отдельных банков, страховых и иных финансовых организаций. Однако заметим, что динамичность вовсе не отрицает инерционность, а дополняет ее.

Все эти свойства (инерционность, эмерджентность, саморегулирование, динамичность и адаптация) необходимо учитывать при выявлении и анализе структурных изменений.

Теперь мы приходим непосредственно к задаче адекватного моделирования процессов, происходящих на финансовых рынках. Современные эконометрические и экономико-математические методы дают для этого большие возможности, которые подробно будут рассмотрены ниже.

### **1.3. Моделирование как основной инструмент исследования финансовых рынков**

Моделирование в научных исследованиях стало применяться достаточно давно, постепенно охватывая все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX век. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Рассмотрим только те из них, которые являются инструментами получения знаний.

Модель — это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-

оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания о самом объекте-оригинале.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Так как понятие «модель» является чрезвычайно общим, включающим в себя и модели, формирующиеся в мозгу человека, то, не нарушая общности, можно сказать, что и технический, и фундаментальный анализ занимают одним и тем же — моделированием таких сложных систем, как финансовые (и не только финансовые, разумеется) рынки. Различие, как уже отмечалось, заключается в информации, которая используется для анализа. Отсюда различные модели (каждая из которых описывает финансовые процессы с какой-то своей стороны) и соответственно различные подходы и методы анализа.

Главная особенность моделирования заключается в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования включает в себя следующие элементы: 1) субъект (исследователь); 2) объект исследования; 3) модель, опосредствующая отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отражает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимости и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть моделью), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от него.

Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от отражения других. Поэтому

любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

После создания модели она начинает выступать как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные по ее «поведению». Конечным результатом этого этапа является множество знаний о модели.

Далее осуществляется перенос знаний с модели на оригинал — формирование множества знаний об объекте. Этот процесс проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели. Мы можем с достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал, если этот результат безусловно связан с признаками сходства оригинала и модели. Если же определенный результат модельного исследования прежде всего связан с отличием модели от оригинала, то его перенос неправомерен.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование — не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования «погружен» в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Сложность экономики иногда рассматривалась как обоснование невозможности ее моделирования. Но такая точка зрения в принципе неверна. Моделировать можно объект любой природы и любой сложности. И как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования; именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Разумеется, потенциальная возможность математического моделирования любых экономических объектов и процессов не всегда означает его успешного осуществления при данном уровне экономических и математических знаний, имеющейся конкретной информации и вычислительной техники. С другой стороны, вообще нельзя указать абсолютные границы математической форма-

лизуемости экономических проблем — всегда будут существовать еще неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование используется не в полной мере. Одной из таких сфер экономики и являются финансовые рынки. В связи с этим особенную важность и актуальность приобретают вопросы грамотного и адекватного моделирования процессов, происходящих на финансовых рынках.

Заметим, что большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано кибернетическим понятием «сложная система». Наиболее распространено понимание системы как совокупности элементов, находящихся во взаимодействии и образующих некоторую целостность, единство. Одна из трудностей экономических исследований в том, что почти не существует экономических объектов, которые можно было бы рассматривать как отдельные (внесистемные) элементы.

Моделирование является наиболее эффективным (а в некоторых случаях единственно возможным) способом исследования и решения задач анализа, синтеза и оптимизации сложных экономических систем. Методы моделирования позволяют:

- 1) изучить новые системы, выявить законы их функционирования;
- 2) оценить результаты внесения изменений в систему с целью ее улучшения;
- 3) проверить и оценить качество управляющих воздействий и методы управления системой;
- 4) обеспечить информационный базис для планирования и прогнозирования работы системы в будущем и в предполагаемых условиях;
- 5) выявить общую тенденцию развития системы.

Использование моделирования для исследования финансовых рынков (особенно динамики цен) оправдано и с практической точки зрения. На протяжении десятков лет уже имеющиеся, отработанные модели позволяют профессиональным участникам рынка с их помощью получать реальный доход. В то же время сам процесс исследования не стоит на месте. Моделирование — циклический процесс. Это означает, что за первым циклом моделирования может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирова-



ния, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

Однако в течение длительного времени главным тормозом практического применения математического моделирования в экономике является наполнение разработанных моделей конкретной и качественной информацией. Точность и полнота первичной информации, реальные возможности ее сбора и обработки во многом определяют выбор типов прикладных моделей. Кроме того, исследования по моделированию экономики выдвигают новые требования к системе информации.

В зависимости от моделируемых объектов и назначения моделей используемая в них исходная информация имеет существенно различный характер и происхождение. Она может быть разделена на два типа: информация о прошлом развитии и современном состоянии объектов (экономические наблюдения и их обработка) и информация о будущем развитии объектов, включающая данные об ожидаемых изменениях их внутренних параметров и внешних условий (прогнозы). Второй тип информации является результатом самостоятельных исследований, которые также могут выполняться посредством моделирования.

Методы экономических наблюдений и использования результатов этих наблюдений разрабатываются при помощи статистических методов. Поэтому стоит отметить только специфические проблемы экономических наблюдений, связанные с моделированием экономических процессов.

В экономике многие процессы являются массовыми; они характеризуются закономерностями, которые не обнаруживаются на основании лишь одного или нескольких наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения.

Другая проблема порождается динамичностью экономических процессов, изменчивостью их параметров и структурных отношений. Вследствие этого экономические процессы приходится постоянно держать под наблюдением, имея устойчивый приток новых данных. Поскольку наблюдения за экономическими процессами и обработка эмпирических данных обычно занимают довольно много времени, при построении математических моделей экономики требуется корректировать исходную информацию с учетом ее запаздывания.

Познание количественных соотношений экономических процессов и явлений опирается на экономические измерения. Точность измерений в значительной степени предопределяет и точ-

ность конечных результатов количественного анализа посредством моделирования. Поэтому необходимым условием эффективного использования математического моделирования является совершенствование экономических измерителей. Применение математического моделирования заострило проблему измерений и количественных сопоставлений различных аспектов и явлений социально-экономического развития, достоверности и полноты получаемых данных, их защиты от случайных, технических либо намеренных искажений.

В процессе моделирования возникает взаимодействие между первичной информацией — той, которая служит основой для моделирования, и вторичной информацией, получаемой в результате моделирования. Следует учитывать также не только очевидное влияние первичной информации на вторичную, но и менее очевидное (эффект обратной связи) влияние вторичной информации на первичную. Особенно в условиях регулирующих воздействий на моделируемую систему, определяемых вторичной информацией.

Требования, накладываемые на информацию о моделируемом объекте, в настоящее время довольно хорошо разработаны и будут более подробно освещены в следующей главе. А сейчас рассмотрим, какой же информацией мы располагаем при моделировании процессов, происходящих на финансовых рынках.

Состояние любого финансового рынка в каждый момент времени характеризуется совокупностью числовых значений, будь то уровень цен, курс валют, различные сводные индексы, уровень спроса и предложения, объем продаж или пр. При этом каждая из этих величин, рассматриваемая за определенный отрезок времени, образует временной ряд. Таким образом, изучая процессы, происходящие на финансовых рынках за определенный промежуток времени, мы неизбежно сталкиваемся с временными рядами. Любая числовая характеристика работы финансового рынка, рассматриваемая в динамике, приводит нас к временным рядам (заметим, временные ряды являются частным случаем так называемых динамических рядов). Следовательно, временные (динамические) ряды — практически единственная форма представления числовой информации о финансовых рынках, которая может быть исследована при помощи современных математических методов и моделей. Лишь только на основе использования исследований временных рядов можно выделить внутреннюю структуру рыночных процессов и механизмов и спрогнозировать их дальнейшее поведение и развитие.

## 1.4. Отличительные черты финансового рынка и его прогнозирование

В анализе и прогнозировании финансовых показателей количественные методы играют очень важную роль как ни в одной другой сфере экономики. Поскольку математика есть наука о количественных отношениях, то ее значение в познании объекта, в данном случае в изучении финансовых процессов, трудно переоценить.

Развитие каждого элемента такой системы происходит не само по себе, не изолированно, а в рамках всей системы. При этом свойства финансового рынка как целостной системы определяются не только суммированием свойств, составляющих его элементов, но и свойствами его структуры и интегративными связями, т.е. финансовый рынок обладает свойством эмерджентности.

Финансовый рынок, как никакая другая экономическая система, является открытой системой, т.е. постоянно находится во взаимодействии с внешней средой, поэтому для его успешного развития необходимы поддержание финансовых инструментов и показателей в определенных границах и сохранение своих специфических свойств структурообразующими элементами. Иными словами, финансовый рынок должен обладать свойством адаптации.

В то же время финансовый рынок как любая сложная экономическая система, несомненно, обладает и свойством инерционности, которое особенно отчетливо видно при анализе функционирования его показателей за длительные периоды времени. Свойства адаптации, саморегулирования, инерционности, эмерджентности финансового рынка заметны уже в настоящее время, в дальнейшем они будут проявляться все рельефнее, особенно при достижении рациональных пропорций между элементами финансового рынка, а также между финансовым рынком и окружающей его внешней средой, прежде всего производственной сферой.

При исследовании финансового рынка как сложной экономической системы необходимо понимать, что протекающие на нем экономические процессы и явления невозможно полностью изолировать от окружающей обстановки и наблюдать их в чистом виде и что они активно реагируют на воздействие новых факторов и экспериментов. Степень учета перечисленных особенностей моделирования сложных систем в целом и финансового рынка в частности зависит от конкретной цели и задач предполагаемого исследования, а также от наличия информации,

необходимой для разработки соответствующих математических моделей.

В качестве одного из главного фактора, оказывающего существенное влияние на показатели финансового рынка, в большинстве работ по финансовой математике называют время. Время как фактор всегда играло значительную роль в финансово-экономических отношениях, его влияние резко возросло при переходе к рыночным принципам хозяйствования. Доходность любой финансовой операции зависит в основном от величины первоначального капитала, процентной ставки и срока реализации сделки, т.е. от времени. С другой стороны, эффективность развития любого финансового предприятия в настоящее время анализируется не сопоставлением его показателей с показателями других аналогичных предприятий, а путем последовательного сравнения показателей работы непосредственно этого предприятия за ряд следующих друг за другом календарных периодов времени. Особо следует подчеркнуть, что в финансовых расчетах и при моделировании финансовых процессов время в большинстве случаев является самостоятельным, иногда решающим фактором, от которого зависит выбор наиболее рационального решения.

При построении модели прогнозирования возможно использование одного или нескольких математических методов прогнозирования. Большая часть математических методов, используемых в настоящее время в экономическом прогнозировании, построена на предположении о том, что основные факторы, тенденции и зависимости, наблюдавшиеся в прошлом, сохранятся либо можно обосновать и определить направление их изменений в прогнозируемом периоде. При этом развитие прогнозируемых экономических процессов в целом может быть представлено в виде плавной траектории, т.е. процессы в той или иной мере должны обладать инерционностью. Использование перечисленных предположений основано на специфике прогноза как одного из способов познания. Такое положение объясняется тем, что при прогнозировании на первый план выдвигается исследование не того, что есть, а того, что будет, т.е. в данном случае необходимо построить такую модель, с помощью которой можно было бы воспроизвести характеристики системы в прогнозируемом периоде. В философии такой способ познания называют опережающим отражением. Оно возможно при выполнении следующих предпосылок:

- прогнозируемая система в своем развитии имеет определенные объективные черты, закономерности, проявляющиеся в повторяемости и устойчивости ряда связей и отношений;

- в развитии системы имеют место сходные, циклически повторяющиеся ситуации, позволяющие накопить достаточно информации о познавательных сходных ситуациях и на этой основе создать условия для выработки запаздывающего отражения;
- запаздывающее отражение не приводит непосредственно к опережающему отражению, поскольку в развитии любой сложной системы не бывает точного повторения одних и тех же ситуаций и накопленная информация не может непосредственно использоваться для прогнозирования. Необходимо наличие активного субъекта, который бы переработал информацию о развитии прогнозируемого объекта и окружающей его среды и в результате своей активной деятельности воспроизвел бы образ этого объекта в прогнозируемом периоде.

Таким образом, прогноз является формой опережающего отражения, которое, в свою очередь, при прогнозировании становится основой, содержанием научного познания. Математические модели, информационной базой для которых служат временные ряды (апостериорная информация), позволяют воспроизвести запаздывающее отражение, перевод же его в опережающее отражение, прогноз возможен только в результате «осмысления» и переработки информации, полученной с помощью моделей активным субъектом — человеком. Разумеется, что в процессе построения прогнозных моделей в них, в их структуру часто закладываются элементы будущего, предполагаемого состояния объекта, но в целом математические модели отражают тенденции, закономерности, наблюдавшиеся в прошлом и настоящем, и потому достоверный прогноз возможен лишь относительно таких объектов, которые в значительной степени определяются настоящим.

Необходимо подчеркнуть, что прогноз, полученный с помощью математической модели, может быть достоверен настолько, насколько сама модель соответствует исследуемому экономическому процессу.

Стремительное развитие прогностики, особенно в последние три десятилетия, способствовало созданию большого количества новых методов и подходов к прогнозированию, а также привлечению методов и методологий построения прогнозных моделей из других сфер науки, ранее в прогностике не применявшихся. По оценкам некоторых исследователей, в настоящее время насчитывается несколько сотен методов и способов прогнозирования.

Для выявления степени сходства и различия между методами прогнозирования, ориентации и выбора из их совокупности наиболее подходящих для прогнозирования конкретных показателей

предложен ряд критериев классификации методов и моделей прогнозирования. По одному из них методы и модели экономического прогнозирования классифицируются по количеству и качеству необходимой для их использования информации (динамических рядов). В соответствии с данным критерием методы и модели можно разделить на одномерные, многомерные (многофакторные) и интуитивные.

Для одномерных методов прогнозирования общим является использование в качестве независимой переменной только одного фактора — времени и соответственно использование только одного временного ряда, составленного из наблюдений того показателя, прогноз которого предстоит осуществить. К одномерным методам прогнозирования относят кривые роста и адаптивные методы. Наиболее часто одномерные методы используются в техническом анализе.

Многофакторные (эконометрические) методы и модели позволяют учитывать конкретные, количественные взаимосвязи экономических объектов и процессов. При их использовании для прогнозирования экономических показателей необходимо иметь временные ряды по всем показателям и факторам, участвующим в построении эконометрической модели. К многофакторным моделям относят регрессионные и структурные уравнения, полем их применения в финансах является фундаментальный анализ.

Основой интуитивных методов и моделей прогнозирования служит мнение эксперта, чаще группы экспертов, основанное на их индивидуальных, независимых, взвешенных оценках по конкретным вопросам относительно перспектив развития объекта прогнозирования. Информационной базой таких прогнозов являются публикации об объекте прогнозирования в самом различном виде: статистические данные, научно-техническая информация, информация об объектах-аналогах и др., а также знания и опыт экспертов по исследуемой проблеме. Интуитивные методы включают, таким образом, методы, базирующиеся на экспертной информации, а также методы аналогий, патентный метод и др., которые будут рассмотрены ниже в соответствующих разделах данного учебного пособия. Следует заметить, что с помощью почти каждого из перечисленных выше методов строится своя собственная модель процесса, иногда повторяющая другие математические модели, а иногда совершенно самостоятельная.

В настоящее время большая часть методов, используемых при моделировании финансового рынка, базируется на предположении о том, что временной ряд исследуемого процесса можно раз-

ложить на детерминированную и стохастическую компоненты. Особенно заметно данный подход проявляется при использовании методов аппроксимации, которые наряду с методами фильтрации и адаптивными методами позволяют выделять трендовую составляющую временного ряда. Вид тренда ряда в этом случае задается некоторым классом кривых в виде формулы с постоянными параметрами. Причем сама формула выбирается либо исходя из априорных, чаще всего экономических, соображений, либо методом подбора. Параметры кривой определяются требованиями минимальности функционала, оценивающего «близость» кривой к ряду.

К несомненным достоинствам методов аппроксимации следует отнести аналитическое задание тренда. Подставив в формулу тренда моменты времени из прогнозного горизонта, мы можем получить простейший прогноз дальнейшего поведения процесса.

Недостатком этих методов является жесткое задание класса кривых, которое часто не позволяет получить точной аппроксимации исследуемого ряда. Наличие изменения в тенденции ряда (структурного изменения) приводит к существенному искажению общей картины и, как следствие, к большому среднеквадратическому отклонению. В таких случаях невозможно подобрать подходящий класс кривых, так как тенденция может изменяться неоднократно и весьма сильно (иногда на противоположную). Решить эту проблему аппроксимации динамических рядов позволяет применение **сплайнов** — кривых, «склеенных» из кусков различных функций. В последние годы сплайн-функции стали успешно применяться при моделировании экономических процессов, причем в качестве переменных сплайн-функций может быть использовано как время (одномерные сплайн-функции), так и другие вещественные аргументы (многофакторные или многомерные сплайн-функции). В гл. 4 будет рассмотрено применение наиболее простых одномерных — линейных и кубических — сплайн-функций для моделирования финансовых показателей.

### ***Вопросы для повторения и самопроверки***

- 1.1. Назовите основные причины, вызывающие неопределенность в развитии экономики.
- 1.2. Дайте определение следующим рынкам:
  - а) финансовому;
  - б) кредитному;

- в) валютному;
- г) биржевому;
- д) внебиржевому.

- 1.3. Назовите способы регулирования финансовых рынков.
- 1.4. Проанализируйте аргументы «за» и «против» регулирования финансовых рынков.
- 1.5. Определите цель изучения структуры объекта.
- 1.6. Назовите основные причины, вызывающие неопределенность в развитии экономики.
- 1.7. Объясните разницу между техническим и фундаментальным анализом финансовых рынков.
- 1.8. Дайте определение понятиям «модель» и «моделирование».
- 1.9. Назовите три предпосылки получения опережающего отражения.
- 1.10. Какие виды информации подразумеваются под термином «движение рынка»?
- 1.11. На какие группы можно разделить методы и модели экономического прогнозирования в зависимости от количества и качества используемой ими информации.



### 2.1. Простые проценты

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется **принципом неравноценности денег**, относящихся к разным моментам времени. Дело в том, что даже в условиях отсутствия инфляции и риска 1 млн руб., полученный через год, не равноценен этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы, в свою очередь, могут быть реинвестированы и т.д. Следовательно, сегодняшние деньги в этом смысле ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь тогда, когда фактор времени не имеет значения, например в бухучете (для получения итогов по периодам) и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

**2.1.1. Проценты и процентные ставки.** Под **процентными деньгами** или, кратко, **процентами** в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме (предоставление денежной ссуды, продажа в кредит, помещение денег на сберегательный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигаций и т.д.).

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере **процентной ставки** — отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют **периодом начисления**. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или обыкновенной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до  $1/16$  или даже  $1/32$ .

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют **наращением** или **ростом** первоначальной суммы.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Наиболее ответственный момент связан с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются **простыми**, а во втором — **сложными процентными ставками**.

Процентные ставки могут быть **постоянными (фиксированными)** или **переменными (плавающими)**. В первом случае размер фиксированной ставки однозначно указывается в контракте. Во втором — указывается изменяющаяся во времени **базовая ставка (база)** и размер надбавки к ней (**маржи**). Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR — London Interbank Offered Rate) или московская межбанковская ставка МИБОР (MIBOR). Размер маржи определяется целым рядом условий, в частности сроком ссудной операции и т.д. Судя по мировой практике, он обычно находится в пределах 0,5–5%. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

**2.1.2. Формула наращивания по простым процентам.** Под **наращенной суммой** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть  $P$  — первоначальная сумма денег,  $i$  — ставка простых процентов (ниже она выражена в десятичных долях первоначальной суммы). Начисленные проценты за один период равны  $Pi$ , а за  $n$  периодов —  $Pni$ .

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины

$$P, P + Pi = P(1 + i), P(1 + i) + Pi = P(1 + 2i) \text{ и т.д. до } P(1 + ni).$$

Первый член этой прогрессии равен  $P$ , разность  $Pi$ , а последний член, определяемый как

$$S = P(1 + ni), \tag{2.1}$$

является наращенной суммой, т.е. суммой, наращенной к концу  $n$ -го промежутка начисления.

Формула (2.1) называется **формулой наращивания по простым процентам** или, кратко, **формулой простых процентов**. Множитель  $(1 + ni)$  является **множителем наращивания**. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы  $P$  и суммы процентов  $I$  (процентных денег)

$$S = P + I, \tag{2.2}$$

где

$$I = Pni. \tag{2.3}$$

Процесс роста суммы долга по простым процентам можно представить графически (рис. 2.1). При начислении простых

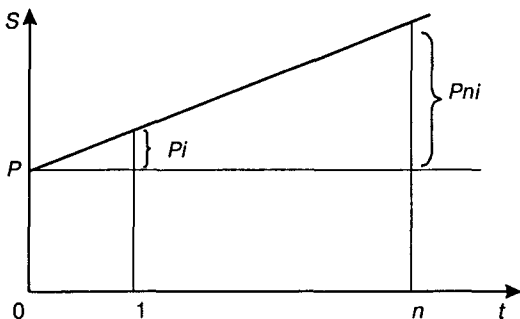


Рис. 2.1. Наращение по простой процентной ставке

процентов по ставке  $i$  за базу берется первоначальная сумма долга — точка  $P$  на оси  $OS$ . Полагая, что формула (2.1), выведенная для целых  $n$ , справедлива для любых нецелых промежутков начисления  $t$ , получаем линейный рост наращенной суммы  $S$  со временем.

**Задача 2.1.** Рассчитаем проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100 000 руб., срок долга 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых.

**Решение.** По формулам (2.2) и (2.3) находим

$I = 100\,000 \cdot 1,5 \cdot 0,15 = 22\,500$  руб. — проценты за 1,5 года;

$S = 100\,000 + 22\,500 = 122\,500$  руб. — наращенная сумма.

**2.1.3. Практика начисления простых процентов.** Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину  $n$  выражают в виде дроби

$$n = t/K, \quad (2.4)$$

где  $n$  — срок ссуды (измеренный в долях года);  $K$  — число дней в году (временная база);  $t$  — срок операции (ссуды) в днях.

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют **обыкновенный**, или **коммерческий**, процент. В отличие от него **точный процент** получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Расчет числа дней пользования ссудой также может быть **точным** или **приближенным**. В первом случае вычисляется фактическое число дней между двумя датами, во втором продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, при этом продолжительность всех месяцев приближенно полагается равной 30 дням. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемых на практике:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды (схема 365/365, британская практика);

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (схема 365/360, французская практика);

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (схема 360/360, германская практика).

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

**Задача 2.2.** Ссуда размером 1 000 000 руб., выдана 21 января 2002 г. до 3 марта 2002 г. при ставке простых процентов, равной 20% годовых. Найти:

- а) точные проценты с точным числом дней ссуды;
- б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
- в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

**Решение.** Используя формулы (2.3) и (2.4), получим:

а)  $K = 365$ ,  $t = 41$ ,  $I = 1\,000\,000 \cdot 0,2 (41/365) = 22\,465,75$  руб.;

б)  $K = 360$ ,  $t = 41$ ,  $I = 1\,000\,000 \cdot 0,2 (41/360) = 22\,777,78$  руб.;

в)  $K = 360$ ,  $t = 43$ ,  $I = 1\,000\,000 \cdot 0,2 (43/360) = 23\,888,89$  руб.

**2.1.4. Простые переменные ставки.** Как известно, процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид:

$$S = P (1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots) = P (1 + \sum_t n_t i_t), \quad (2.5)$$

где  $P$  — первоначальная сумма (ссуда);  $i_t$  — ставка простых процентов в периоде с номером  $t$ ;  $n_t$  — продолжительность периода с номером  $t$ , т.е. периода начисления по ставке  $i_t$ .

**Задача 2.3.** Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий — на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращенной суммы за весь срок договора:

$$1 + \sum_{t=1}^4 n_t i_t = 1 + 0,25 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,09 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,25 \cdot 0,07 = 1,085.$$

**2.1.5. Дисконтирование и учет по простым ставкам.** В практике часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме  $S$ , соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму  $P$ . Расчет  $P$  по  $S$  называется **дисконтированием** суммы  $S$ . Величину  $P$ , найденную дисконтированием, называют **современной величиной (текущей стоимостью)** суммы  $S$ . Проценты в виде разности  $D = S - P$  называются **дисконтом**, или **скидкой**. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют **учетом**.

Таким образом, в практике используются два принципа расчета процентов: путем наращивания суммы ссуды и вычислением скидки с конечной суммы долга.

Величина  $P$  эквивалентна сумме  $S$  в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращивания станет равной  $S$ . Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие приведения шире, чем дисконтирование. **Приведение** — это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то — наращение.

Известны два вида дисконтирования: **математическое дисконтирование** и **банковский (коммерческий) учет**.

**Математическое дисконтирование.** Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S = P(1 + ni),$$

то в обратной

$$P = S \frac{1}{1 + ni}. \quad (2.6)$$

Дробь в правой части равенства (2.6) при величине  $S$  называется **дисконтным множителем**. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы  $S$  равен

$$D = S - P. \quad (2.7)$$

**Задача 2.4.** Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1 000 000 руб. Кредит выдан под 20% годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

**Решение.** Применяя формулы (2.6) и (2.7), получим:

$$P = S / (1 + ni) = 1\,000\,000 / (1 + 0,20 \cdot 90/360) = 952\,380,95 \text{ руб.};$$

$$D = S - P = 1\,000\,000 - 952\,380,95 = 47\,619,05 \text{ руб.}$$

**Банковский, или коммерческий, учет.** Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которую мы обозначим символом  $d$ .

По определению, простая годовая учетная ставка находится как

$$d = \frac{S - P}{Sn}. \quad (2.8)$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен

$$D = Snd, \quad (2.9)$$

откуда

$$P = S - D = S - Snd = S(1 - nd). \quad (2.10)$$

Множитель  $(1 - nd)$  называют дисконтным множителем. Срок  $n$  измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

**Задача 2.5.** Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 руб. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20% годовых (год принят равным 360 дням). Определить полученную предприятием сумму и дисконт.

**Решение.** Используем формулы (2.9) и (2.10):

$$D = Snd = 1\,000\,000 \cdot 0,2 (90/360) = 50\,000 \text{ руб.};$$

$$P = S - D = 1\,000\,000 - 50\,000 = 950\,000 \text{ руб.}$$

## 2.2. Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют **капитализацией** процентов.

**2.2.1. Формула наращения по сложным процентам.** Пусть первоначальная сумма долга равна  $P$ , тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит  $P(1 + i)$ , через 2 года  $P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$ , через  $n$  лет —  $P(1 + i)^n$ . Таким образом, формула наращения для сложных процентов имеет вид:

$$S = P(1 + i)^n, \quad (2.11)$$

где  $S$  — наращенная сумма;  $i$  — годовая ставка сложных процентов;  $n$  — срок ссуды;  $(1 + i)^n$  — множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.).

**Задача 2.6.** В кредитном договоре — на сумму 1 000 000 руб. и сроком на 4 года — зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых. Рассчитать наращенную сумму.

**Решение.** Используя формулу (2.11), получим:

$$S = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,2)^4 = 2\,073\,600 \text{ руб.}$$

**2.2.2. Формула наращивания по сложным процентам при изменении ставки во времени.** В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращивания принимает следующий вид:

$$S = P(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}, \quad (2.12)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_k$  — последовательные значения ставок процентов, действующих в соответствующие периоды  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

**Задача 2.7.** В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% — в третий и 5% — в четвертый год. Вычислить величину множителя наращивания за четыре года.

**Решение.** Следуя формуле (2.12), получим искомым множитель наращивания, равный  $(1 + 0,3)^2 (1 + 0,28) (1 + 0,25) = 2,704$ .

**2.2.3. Номинальная и эффективная ставки процентов. Номинальная ставка.** Пусть годовая ставка сложных процентов равна  $j$ , а число периодов начисления в году  $m$ . При каждом начислении проценты капитализируются, т.е. добавляются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. Каждый раз проценты начисляют по ставке  $j/m$ . Ставка  $j$  называется **номинальной**. Начисление процентов по номинальной ставке проводится по формуле

$$S = P (1 + j/m)^N, \quad (2.13)$$

где  $N$  — число периодов начисления ( $N = tm$ , может быть и дробным числом).

**Задача 2.8.** Ссуда 20 000 000 руб. предоставлена на 28 месяцев. Проценты сложные, ставка — 60% годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Необходимо вычислить наращенную сумму.

**Решение.** Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется  $N = (28/3)$  кварталов. Число периодов начисления в году  $m = 4$ . По формуле (2.13) находим

$$S = 20\,000\,000(1 + 0,60/4)(28/3) = 73\,712\,844,81 \text{ руб.}$$



**Эффективная ставка** показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и  $m$ -разовое наращение в год по ставке  $j/m$ .

Если проценты капитализируются  $m$  раз в год, каждый раз со ставкой  $j/m$ , то, по определению, можно записать следующее равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1 + i_{\text{эф}})^n = (1 + j/m)^{mn}, \quad (2.14)$$

где  $i_{\text{эф}}$  — эффективная ставка;  $j$  — номинальная ставка.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_{\text{эф}} = (1 + j/m)^m - 1. \quad (2.15)$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j = m[(1 + i_{\text{эф}})^{1/m} - 1]. \quad (2.16)$$

**Задача 2.9.** Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

**Решение.** По формуле (2.15) находим

$$i_{\text{эф}} = (1 + 0,1/4)^4 - 1 = 0,1038, \text{ т.е. } 10,38\%.$$

**Задача 2.10.** Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

**Решение.** По формуле (2.16) находим

$$j = 4[(1 + 0,12)^{(1/4)} - 1] = 0,11495, \text{ т.е. } 11,495\%.$$

**2.2.4. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов. Математический учет.** В этом случае решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения сложных процентов  $S = P(1 + i)^n$  и решим ее относительно  $P$ :

$$P = S \frac{1}{(1 + i)^n} = Sv^n, \quad (2.17)$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1 + i)^n} = (1 + i)^{-n} \quad (2.18)$$

— учетный или дисконтный множитель.

**Задача 2.11.** Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1 000 000 руб. Определить ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов — 10% годовых.

**Решение.** По формуле (2.17) находим

$$P = 1\,000\,000(1 + 0,10)^{-5} = 620\,921,32 \text{ руб.}$$

Если проценты начисляются  $m$  раз в году, то получим

$$P = S \frac{1}{(1 + j/m)^{mn}} = Sv^{mn}, \quad (2.19)$$

где

$$v^{mn} = \frac{1}{(1 + j/m)^{mn}} = (1 + j/m)^{-mn} \quad (2.20)$$

— дисконтный множитель.

Так же, как и в случае начисления простых процентов, величину  $P$ , полученную дисконтированием  $S$ , называют **современной** или **текущей стоимостью** или **приведенной величиной**  $S$ . Суммы  $P$  и  $S$  эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме  $S$  через  $n$  лет равноценен сумме  $P$ , выплачиваемой в настоящий момент.

**Банковский учет.** В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1 - d_{\text{сл}})^n, \quad (2.21)$$

где  $d_{\text{сл}}$  — сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S(1 - d_{\text{сл}})^n = S[1 - (1 - d_{\text{сл}})^n]. \quad (2.22)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

**Задача 2.12.** Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 000 000 руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке 10% годовых. Определить дисконт.

**Решение.** По формуле (2.21) находим

$$P = 1\,000\,000(1 - 0,10)^5 = 590\,490,00 \text{ руб.};$$

$$D = S - P = 1\,000\,000 - 590\,490 = 409\,510 \text{ руб.}$$

## 2.3. Непрерывные проценты

**2.3.1. Нарращение и дисконтирование.** Нарращенная сумма при дискретных процентах определяется по формуле (2.13).

Чем больше  $m$ , тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при  $m \rightarrow \infty$  имеем

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P(1 + j/m)^{mn} = P \lim_{m \rightarrow \infty} [(1 + j/m)^m]^n. \quad (2.23)$$

Используя известный из математического анализа второй замечательный предел, можно записать

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + j/m)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} [(1 + j/m)^{m/j}]^j = e^j,$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Подставляя полученное выражение в (2.23), окончательно получаем наращенную сумму в случае непрерывного начисления процентов по ставке  $j$ :

$$S = Pe^{jn}. \quad (2.24)$$

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют **силой роста** и обозначают символом  $\delta$ . С учетом введенного обозначения равенство (2.24) принимает вид

$$S = Pe^{\delta n}. \quad (2.25)$$

Сила роста представляет собой номинальную ставку процентов при  $m \rightarrow \infty$ .

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{-\delta n}. \quad (2.26)$$

**2.3.2. Связь дискретных и непрерывных процентных ставок.** Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить, приравнявая соответствующие множители наращения

$$(1 + i)^n = e^{\delta n}. \quad (2.27)$$

Из записанного равенства следует, что

$$\delta = \ln(1 + i), \quad (2.28)$$

откуда

$$i = e^{\delta} - 1. \quad (2.29)$$

**Задача 2.13.** Годовая ставка сложных процентов равна 15%. Чему равна эквивалентная сила роста?

**Решение.** Воспользуемся формулой (2.28):

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,15) = 0,13976,$$

т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

**2.3.3. Расчет срока ссуды и процентных ставок.** В ряде практических задач начальная ( $P$ ) и конечная ( $S$ ) суммы заданы контрактом и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращивания или дисконтирования. По сути дела, в обоих случаях решается в известном смысле обратная задача.

**Срок ссуды.** А) При наращении по сложной годовой ставке  $i$ . Из исходной формулы наращивания

$$S = P(1+i)^n$$

следует, что

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)}, \quad (2.30)$$

где логарифм можно взять по любому основанию, поскольку он имеется в числителе и знаменателе.

Б) При наращении по номинальной ставке процентов  $m$  раз в году из формулы

$$S = P(1+j/m)^{mn}$$

получаем

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \log(1+j/m)}. \quad (2.31)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке  $d$  из формулы

$$P = S(1-d)^n$$

имеем

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1-d)}. \quad (2.32)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке  $m$  раз в году. Используя равенство

$$P = S(1-f/m)^{mn},$$

приходим к соотношению

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \log(1-f/m)}. \quad (2.33)$$

Д) При наращении по постоянной силе роста. Исходя из соотношения

$$S = Pe^{\delta n},$$

получаем

$$\ln(S/P) = \delta n. \quad (2.34)$$

**Расчет процентных ставок.** Используя те же исходные формулы, что и для приведенных расчетов, получим выражения для процентных ставок.

А) При наращении по сложной годовой ставке  $i$ . Из исходной формулы наращения

$$S = P(1+i)^n$$

следует, что

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1. \quad (2.35)$$

Б) При наращении по номинальной ставке процентов  $m$  раз в году из формулы

$$S = P(1+j/m)^{mn}$$

получаем

$$j = m \left[ \left(\frac{S}{P}\right)^{1/(mn)} - 1 \right]. \quad (2.36)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке  $d$ . Из формулы

$$P = S(1-d)^n$$

имеем

$$d = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n}. \quad (2.37)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке  $m$  раз в году. Из соотношения

$$P = S(1-f/m)^{mn}$$

приходим к формуле

$$f = m \left[ 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{1/(mn)} \right]. \quad (2.38)$$

Д) При наращении по постоянной силе роста. Исходя из

$$S = Pe^{\delta n}$$

получаем

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{S}{P}\right). \quad (2.39)$$

## 2.4. Начисление процентов в условиях инфляции и налогообложения

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период  $n$  характеризуется индексом  $J_n$ . **Индекс покупательной способности** равен обратной величине индекса цен  $J_p$ , т.е.

$$J_n = 1/J_p. \quad (2.40)$$

Напомним, что **индекс цен** показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый промежуток времени.

**2.4.1. Нарращение по простым процентам.** Если наращенная за  $n$  лет сумма денег составляет  $S$ , а индекс цен равен  $J_p$ , то реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности равна

$$C = S/J_p. \quad (2.41)$$

Пусть ожидаемый средний годовой темп инфляции (характеризующий прирост цен за год) равен  $h$ . Тогда годовой индекс цен составит  $(1 + h)$ .

Если наращение производится **по простой ставке** в течение  $n$  лет, то реальное наращение при темпе инфляции  $h$  составит

$$C = \frac{P(1 + ni)}{J_p}. \quad (2.42)$$

Тогда в общем случае

$$J_p = \prod_{t=1}^n (1 + h_t), \quad (2.43)$$

и, в частности, при неизменном  $h$

$$J_p = (1 + h)^n. \quad (2.44)$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i = \frac{J_p - 1}{n}. \quad (2.45)$$

Один из способов компенсации обесценения денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой **инфляционной премии**. Скорректированная таким образом ставка называется **брутто-ставкой** и мы будем обозначать ее символом  $r$ . Брутто-ставка определяется с учетом равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителю наращения по реальной ставке процента

$$\frac{1+nr}{J_p} = 1+ni, \quad (2.46)$$

откуда

$$r = \frac{(1+ni)J_p - 1}{n}. \quad (2.47)$$

**2.4.2. Нарращение по сложным процентам.** Нарращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуды с учетом падения покупательной способности денег (т.е. в неизменных рублях) составит

$$C = P \frac{(1+i)^n}{J_p}, \quad (2.48)$$

где индекс цен определяется выражением (2.43) или (2.44) в зависимости от непостоянства или постоянства темпа инфляции.

Применяются *два способа компенсации потерь* от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

1. Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину **инфляционной премии**. Считая, что годовой темп инфляции равен  $h$ , можем написать равенство соответствующих множителей наращения с учетом брутто-ставки  $r$ :

$$\frac{1+r}{1+h} = 1+i, \quad (2.49)$$

где  $i$  — реальная ставка.

Отсюда

$$r = i + h + ih, \quad (2.50)$$

т.е. инфляционная премия равна  $h + ih$ .

2. Индексация первоначальной суммы  $P$ . В этом случае сумма  $P$  корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса  $J_p$ . Тогда

$$S = PJ_p (1+i)^n. \quad (2.51)$$

Нетрудно заметить, что в обоих случаях компенсации потерь от снижения покупательной способности мы приходим к одной и той же формуле наращения (2.51). В ней первые два множителя в правой части отражают индексацию первоначальной суммы, если же множитель  $J_p$  отнести к  $(1+i)^n$ , то мы получим корректировку ставки процента.

**2.4.3. Измерение реальной ставки процента.** На практике приходится решать и обратную задачу — находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из тех же соотношений между множителями наращенного нетрудно вывести формулы, определяющие реальную ставку  $i$  по заданной (или объявленной) брутто-ставке  $r$ .

При начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов

$$i = \frac{1}{n} \left( \frac{1 + nr}{J_p} - 1 \right). \quad (2.52)$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением:

$$i = \frac{1 + r}{1 + h} - 1 = \frac{r - h}{1 + h}. \quad (2.53)$$

**2.4.4. Учет налогов.** В ряде стран проценты, получаемые кредитором или вкладчиком, облагаются налогом, что, конечно, уменьшает величину реально получаемой наращенной суммы. Расчет этой суммы можно представить следующим образом.

Обозначим наращенную сумму до уплаты налогов, как и раньше, через  $S$ , а после уплаты — через  $C$ . Пусть ставка налога равна  $g$ .

Тогда при начислении *простых процентов* получаем сумму налога  $Ig = (S - P)g$ , а наращенная сумма после уплаты налогов

$$C = S - (S - P)g = S(1 - g) + Pg = P[1 + n(1 - g)i]. \quad (2.54)$$

Это выражение означает, что при начислении простых процентов учет налога сводится к соответствующему сокращению процентной ставки: для получения реального наращенного следует вместо ставки  $i$  применять ставку  $(1 - g)i$ .

При начислении налога на *сложные проценты*, применяемые обычно в средне- и долгосрочных операциях, возможны два варианта расчета: определение налога за весь срок сразу или расчет процентов за каждый год в отдельности. Первый вариант удобен, когда налоговая ставка в пределах облагаемого налогом периода остается неизменной. Второй оказывается единственно возможным, когда налоговая ставка из года в год меняется.

В первом варианте расчета сумма налога за весь срок равна

$$(S - P)g = P[(1 + i)^n - 1]g, \quad (2.55)$$



а наращенная сумма после выплаты налога рассчитывается по формуле

$$C = S - (S - P)g = S(1 - g) + Pg = P[(1 - g)(1 + i)^n + g]. \quad (2.56)$$

Во втором варианте сумма налога рассчитывается за каждый истекший год. Поскольку речь идет о сложных процентах, сумма процентов будет из года в год возрастать, соответственно будет изменяться и сумма налога.

Обозначим сумму налога за год  $t$  через  $G_t$ . Ее можно определить с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$G_t = I_t g = (S_t - S_{t-1})g = P[(1 + i)^t - (1 + i)^{t-1}]g. \quad (2.57)$$

Если налоговая ставка постоянна, то сумма налогов за весь срок, рассчитанная первым способом, равна сумме налогов, рассчитанных за соответствующие годы вторым способом.

## 2.5. Потоки платежей

Очень часто в контрактах финансового характера предусматривают не отдельные разовые платежи, а серию платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют **потоком платежей**. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления — положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

**Наращенная сумма потока платежей** — это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под **современной величиной потока платежей** понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей.

Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда или общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль или приведенные издержки.

**2.5.1. Финансовые ренты и их классификация.** Поток платежей, все члены которого положительные, а временные интервалы постоянны, называют **финансовой рентой**, или **аннуитетом**.

Финансовая рента имеет следующие параметры: **член ренты** — величина каждого отдельного платежа, **период ренты** — временной интервал между двумя соседними платежами, **срок ренты** — время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода; **процентная ставка** — ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

**Виды финансовых рент.** Классификация рент может быть произведена по различным признакам. Рассмотрим их.

В зависимости от продолжительности периода ренты делят на годовые и  $p$ -срочные, где  $p$  — число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением 1 раз в году,  $m$  раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные ренты**. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают **ренты верные** и **условные**. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов, или ограниченные, и бесконечные, или вечные. В качестве вечной ренты выступают, например, выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту времени ренты подразделяются на **немедленные** и **отложенные**, или **отсроченные**. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называ-

ются **обычными**, или **постнумерандо**. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются **пренумерандо**. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

### 2.5.2. Формулы наращенной суммы. Обычная годовая рента.

Пусть в конце каждого года в течение  $n$  лет на расчетный счет вносится по  $R$  руб., сложные проценты начисляются 1 раз в год по ставке  $i$ . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины  $R(1+i)^{n-1}$ , так как на сумму  $R$  проценты начислялись в течение  $n-1$  года. Второй взнос увеличится до  $R(1+i)^{n-2}$  и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен  $R$ , знаменатель  $(1+i)$ , число членов  $n$ . Как известно из школьного курса алгебры, эта сумма равна

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R s_{ni}, \quad (2.58)$$

где

$$s_{ni} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (2.59)$$

— коэффициент наращения ренты.

Он зависит только от срока ренты  $n$  и уровня процентной ставки  $i$ . Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами.

**Задача 2.14.** В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые 1 раз в год начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

**Решение.** По формуле (2.58) находим

$$S = 10 \frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 33,1 \text{ млн руб.}$$

**Годовая рента с начислением процентов  $m$  раз в году.** Посмотрим, как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи делают 1 раз в конце года, а проценты начисляют  $m$  раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка  $j/m$ ,

где  $j$  — номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1 + j/m)^{m(n-1)}, R(1 + j/m)^{m(n-2)}, \dots, R.$$

Если рассмотрим эту последовательность справа налево, то увидим, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является  $R$ , знаменателем  $(1 + j/m)^m$ , а число членов равно  $n$ . Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты:

$$S = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^m - 1}. \quad (2.60)$$

**Задача 2.15.** В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые **ежеквартально** ( $m = 4$ ) начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

**Решение.** По формуле (2.60) находим

$$S = 10 [(1 + 0,1/4)^{3 \cdot 4} - 1] / [(1 + 0,1/4)^4 - 1] = 33,222 \text{ млн руб.}$$

**Рента  $p$ -срочная,  $m = 1$ .** Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается  $p$  раз в году равными платежами, а проценты начисляются 1 раз в конце года. Если  $R$  — годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен  $R/p$ . Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке:

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \dots, \frac{R}{p},$$

у которой первый член  $R/p$ , знаменатель  $(1+i)^{1/p}$ , общее число членов  $np$ . Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{R(1+i)^{(1/p)np} - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = R \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = R s_{ni}^{(p)}, \quad (2.61)$$

где

$$s_{ni}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \quad (2.62)$$

— коэффициент наращивания  $p$ -срочной ренты при  $m = 1$ .

**Задача 2.16.** В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые в конце года начисляются проценты по сложной ставке 10% годовых. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

**Решение.** По формуле (2.61) находим

$$S = (10/4)[(1 + 0,1)^3 - 1]/[(1 + 0,1)^{1/4} - 1] = 34,317 \text{ млн руб.}$$

**Рента  $p$ -срочная,  $p = m$ .** В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают по времени. Таким образом, число платежей  $p$  в году и число начислений процентов  $m$  совпадают, т.е.  $p = m$ . Тогда для получения наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

Таким образом, получаем

$$S = \frac{R}{m} \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}. \quad (2.63)$$

**Задача 2.17.** В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке 10% годовых. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

**Решение.** По формуле (2.63) находим

$$S = 10[(1 + 0,1/4)^{3 \cdot 4} - 1] / 0,1 = 34,489 \text{ млн руб.}$$

**Рента  $p$ -срочная,  $p \geq 1, m \geq 1$ .** Это самый общий случай  $p$ -срочной ренты с начислением процентов  $m$  раз в году, причем возможно  $p \neq m$ .

Первый член ренты  $R/p$ , уплаченный спустя  $1/p$  года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n - \frac{1}{p})} = \frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn - m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n-\frac{2}{p})} = \frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn-2(m/p)} \quad \text{и т.д.}$$

Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен  $R/p$ , ее знаменатель —  $(1 + j/m)^{m/p}$ , число членов —  $np$ .

В результате получаем наращенную сумму

$$S = \frac{R (1 + j/m)^{(m/p)np} - 1}{p (1 + j/m)^{m/p} - 1} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}. \quad (2.64)$$

Следует отметить, что из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая лишь соответствующие значения  $p$  и  $m$ .

**Задача 2.18.** В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи ( $p = 4$ ) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые **ежемесячно** ( $m = 12$ ) начисляются проценты по сложной ставке 10% годовых. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

**Решение.** По формуле (2.64) находим

$$S = (10/4)[(1 + 0,10/4)^{3 \cdot 4} - 1]/[(1 + 0,10/4)^{12/4} - 1] = 34,5296 \text{ млн руб.}$$

**2.5.3. Формулы современной величины. Обычная годовая рента.** Пусть размер годового платежа равен  $R$ , процентная ставка  $i$ , проценты начисляются 1 раз в конце года, срок ренты  $n$ . Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R \frac{1}{1+i} = Rv.$$

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна  $Rv^2$  и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию:  $Rv, Rv^2, Rv^3, \dots, Rv^n$ , сумма которой

$$A = Rv \frac{v^n - 1}{v - 1} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{ni}, \quad (2.65)$$

где

$$a_{ni} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (2.66)$$

— коэффициент приведения ренты.

Как видим, этот коэффициент зависит только от двух параметров: срока ренты  $n$  и процентной ставки  $i$ . Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах или построить самим с помощью компьютера.

**Задача 2.19.** В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

**Решение.** По формуле (2.65) находим

$$A = 10[1 - (1 + 0,1)^{-3}] / 0,1 = 24,868 \text{ млн руб.}$$

**Рента  $p$ -срочная,  $p \geq 1, m \geq 1$ .** Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, позволяют получить формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений  $p$  и  $m$ :

$$A = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}, \quad (2.67)$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных  $p$  и  $m$ .

**2.5.4. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты.** Пусть  $A$  — современная величина годовой ренты постнумерандо, а  $S$  — ее наращенная стоимость к концу срока  $n$ ,  $p = 1, m = 1$ .

Покажем, что наращение процентов на сумму  $A$  за  $n$  лет дает сумму, равную  $S$ :

$$A(1+i)^n = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S. \quad (2.68)$$

Отсюда же следует, что дисконтирование  $S$  дает  $A$ :

$$Sv^n = A, \quad (2.69)$$

а коэффициенты дисконтирования и наращенной ренты связаны соотношениями

$$a_{ni}(1+i)^n = s_{ni}; \quad (2.70)$$

$$s_{ni}v^n = a_{ni}. \quad (2.71)$$

**2.5.5. Определение параметров финансовой ренты.** Иногда при разработке контрактов возникает необходимость определить по

заданной наращенной сумме ренты  $S$  или ее современной стоимости  $A$  остальные параметры ренты:  $R, n, i, p, m$ . Такие параметры, как  $m$  и  $p$ , обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры  $R, n, i$ . Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

**Определение размера ежегодной суммы платежа  $R$ .**

В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана —  $S$  или  $A$ , возможны два следующих варианта расчета:

$$R = S/s_{ni} \quad (2.72)$$

или

$$R = A/a_{ni}. \quad (2.73)$$

**Определение срока постоянной ренты.** Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Разрешая исходные формулы для  $S$  и  $A$  относительно срока  $n$ , получаем соответствующие выражения:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{и} \quad n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}; \quad (2.74)$$

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad \text{и} \quad n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}.$$

Последнее выражение для  $n$ , очевидно, имеет смысл только при  $R > Ai$ .

**Определение ставки процентов.** Для того чтобы найти ставку  $i$ , будем рассматривать выражения для  $S$  или  $A$  из (2.74) как нелинейные уравнения относительно неизвестной  $i$  (опять предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо), которые эквивалентны двум другим:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = s_{ni} \quad \text{или} \quad \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R} = a_{ni}. \quad (2.75)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка  $i$ .

Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: линейной интерполяции, Ньютона—Рафсона и др. Мы рассмотрим только первый из них.



Прежде всего нужно найти с помощью прикидочных расчетов нижнюю ( $i_H$ ) и верхнюю ( $i_B$ ) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (2.75) различных числовых значений  $i$  и сравнения результата с правой частью выражения. Далее корректировка нижнего значения ставки производится по следующей интерполяционной формуле:

$$i = i_H + \frac{s - s_H}{s_B - s_H} (i_B - i_H), \quad (2.76)$$

в которой  $s_H$  и  $s_B$  — значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок  $i_H$  и  $i_B$  соответственно. Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (2.76), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение коэффициента наращения (или приведения).

## 2.6. Практические приложения теории

Рассмотрим некоторые практические приложения изложенной выше теории. Покажем, как полученные нами формулы применяются при решении реальных задач по расчету эффективности некоторых финансовых операций, сравним различные методы расчетов.

**2.6.1. Конверсия валюты и начисление процентов.** Рассмотрим совмещение конверсии (обмена) валюты и наращение простых процентов, сравним результаты от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты или после предварительного обмена на другую валюту. Всего возможно 4 варианта наращения процентов.

1. *Без конверсии.* Валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы производится по валютной ставке путем прямого применения формулы простых процентов.

2. *С конверсией.* Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется в исходную валюту.

3. *Без конверсии.* Рублевая сумма размещается в виде рублевого депозита, на который начисляются проценты по рублевой ставке по формуле простых процентов.

4. *С конверсией.* Рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту, которая инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Нарощенная сумма в конце операции конвертируется в рубли.

Операции без конверсии не представляют сложности. В операции наращенная сумма с двойной конверсией имеют два источника дохода: начисление процента и изменение курса. Причем начисление процента является безусловным источником (ставка фиксирована, инфляцию пока не рассматриваем). Изменение же обменного курса может быть как в ту, так и в другую сторону, и оно может быть источником как дополнительного дохода, так и потерь. Далее мы конкретно остановимся на 2-м и 4-м вариантах, предусматривающих двойную конверсию.

Предварительно введем следующие обозначения:

$P_v$  — сумма депозита в валюте;  $P_r$  — сумма депозита в рублях;  $S_v$  — наращенная сумма в валюте;  $S_r$  — наращенная сумма в рублях;  $K_0$  — курс обмена в начале операции (курс валюты, руб.);  $K_1$  — курс обмена в конце операции;  $n$  — срок депозита;  $i$  — ставка наращенная для рублевых сумм (в виде десятичной дроби);  $j$  — ставка наращенная для конкретной валюты.

В а р и а н т 2: ВАЛЮТА  $\Rightarrow$  РУБЛИ  $\Rightarrow$  РУБЛИ  $\Rightarrow$  ВАЛЮТА.

Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращенная рублевой суммы, обратное конвертирование рублевой суммы в исходную валюту. Нарощенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}. \quad (2.77)$$

Как видим, три этапа операции нашли свое отражение в этой формуле в виде трех сомножителей.

Множитель наращенная с учетом двойного конвертирования равен

$$m = \frac{K_0}{K_1} (1 + ni) = \frac{1 + ni}{\left(\frac{K_1}{K_0}\right)} = \frac{1 + ni}{k}, \quad (2.78)$$

где  $k = K_1/K_0$  — темп роста обменного курса за срок операции.

Мы видим, что множитель наращенная  $m$  связан линейной зависимостью со ставкой  $i$  и обратной — с обменным курсом в конце операции  $K_1$  (или с темпом роста обменного курса  $k$ ).

Исследуем теоретически зависимость общей доходности операции с двойной конверсией по рассматриваемой схеме от соотношения конечного и начального курсов обмена.

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции в целом, равна

$$i_{\text{эф}} = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Подставим в эту формулу записанное ранее выражение для  $S_v$  из (2.77):

$$i_{\text{эф}} = \frac{\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1}{n} = \frac{1}{k} \frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n}. \quad (2.79)$$

Таким образом, согласно рис. 2.2 с увеличением  $k$  доходность  $i_{\text{эф}}$  падает по гиперболе с асимптотой  $-1/n$ .

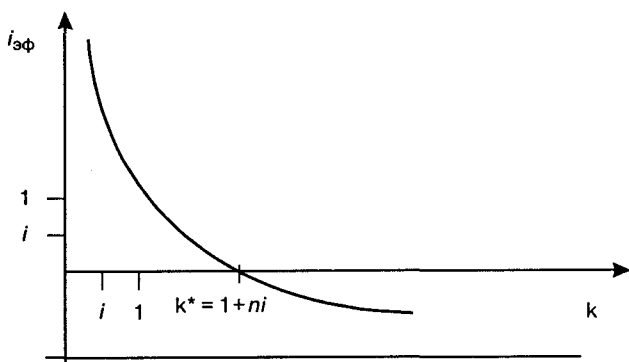


Рис. 2.2. Зависимость доходности  $i_{\text{эф}}$  от темпа роста обменного курса  $k$

Исследуем особые точки этой кривой. Отметим, что при  $k = 1$  доходность операции равна рублевой ставке, т.е.  $i_{\text{эф}} = i$ . При  $k > 1$  значение  $i_{\text{эф}} < i$ , а при  $k < 1$  значение  $i_{\text{эф}} > i$ . Из рис. 2.2 следует, что при некотором критическом значении  $k$ , которое мы обозначим как  $k^*$ , доходность (эффективность) операции оказывается равной нулю.

Если  $i_{\text{эф}} = 0$ , то

$$k^* = 1 + ni, \quad (2.80)$$

что, в свою очередь, означает

$$K_1^* = K_0 (1 + ni). \quad (2.81)$$

**Вывод 1.** Если ожидаемые величины  $k$  или  $K_1$  превышают свои критические значения, то операция явно убыточна ( $i_{\text{эф}} < 0$ ).

Теперь определим *максимально допустимое значение курса обмена в конце операции*  $K_1$ , при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в валюте и применение двойного конвертирования не даст никакой дополнительной выгоды. Для нахождения такого обменного курса приравняем множители наращенния для двух альтернативных операций:

$$1 + nj = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni).$$

Из записанного равенства следует, что

$$\max K_1 = \frac{1 + ni}{1 + nj} \quad (2.82)$$

или

$$\max K_0 = \frac{1 + ni}{1 + nj}. \quad (2.83)$$

**Вывод 2.** Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше  $\max K_1$ .

**В а р и а н т 4:** РУБЛИ  $\Rightarrow$  ВАЛЮТА  $\Rightarrow$  ВАЛЮТА  $\Rightarrow$  РУБЛИ.

Рассмотрим теперь вариант с двойной конверсией, когда исходная сумма представлена в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя следующего выражения для наращенной суммы:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1 + nj)K_1 = P_r(1 + nj)\frac{K_1}{K_0}. \quad (2.84)$$

Здесь множитель наращенния линейно зависит уже от валютной ставки процентов и от конечного курса обмена.

Проведем теоретический анализ эффективности этой операции с двойной конверсией и определим критические точки.

Доходность операции в целом определяется по формуле

$$i_{\text{эф}} = \frac{S_r - P_r}{P_r n}.$$

Отсюда, подставив выражение для  $S_r$  из (2.84), получаем

$$i_{\text{эф}} = \frac{\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1}{n} = \frac{k(1 + nj) - 1}{n}. \quad (2.85)$$

Зависимость (2.85) линейная и представлена на рис. 2.3.

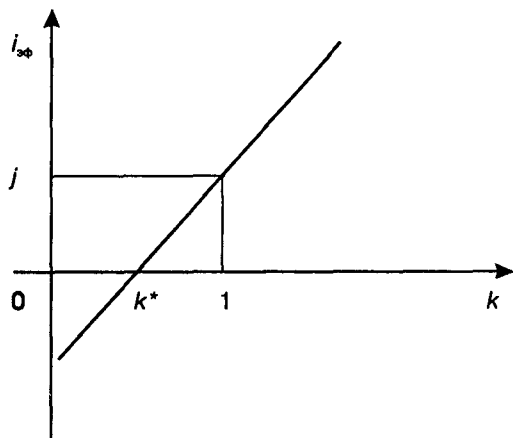


Рис. 2.3. Зависимость доходности  $i_{эф}$  от темпа роста обменного курса  $k$

При  $k = 1$  значение  $i_{эф} = j$ , при  $k > 1$  значение  $i_{эф} > j$ , при  $k < 1$  значение  $i_{эф} < j$ .

Найдем теперь критическое значение  $k^*$ , при котором  $i_{эф} = 0$ . Оно оказывается равным

$$k^* = \frac{1}{1 + nj} \quad \text{или} \quad K_1^* = \frac{K_0}{1 + nj}. \quad (2.86)$$

**Вывод 3.** Если ожидаемые величины  $k$  или  $K_1$  меньше своих критических значений, то операция явно убыточна ( $i_{эф} < 0$ ).

Минимально допустимая величина  $k$ , обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства  $i_{эф} = i$ ):

$$\frac{K_1}{K_0} (1 + nj) = 1 + ni,$$

откуда

$$\min k = \frac{1 + ni}{1 + nj} \quad \text{или} \quad \min K_1 = K_0 \frac{1 + ni}{1 + nj}. \quad (2.87)$$

**Вывод 4.** Депозит рублевых сумм через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше  $\min K_1$ .

Теперь рассмотрим совмещение конверсии валюты и наращение сложных процентов. Ограничимся одним вариантом:

ВАЛЮТА  $\Rightarrow$  РУБЛИ  $\Rightarrow$  РУБЛИ  $\Rightarrow$  ВАЛЮТА.

Три этапа такой операции описываются следующей формулой для наращенной суммы:

$$S_v = P_v K_0 (1+i)^n \frac{1}{K_1}. \quad (2.88)$$

Множитель наращения

$$m = (1+i)^n \frac{K_0}{K_1} = \frac{(1+i)^n}{k}. \quad (2.89)$$

Определим доходность операции в целом в виде годовой ставки сложных процентов  $i_{\text{эф}}$ .

Из формулы наращения по сложным процентам  $S = P(1+i)^n$  следует, что

$$i_{\text{эф}} = \sqrt[n]{\frac{S_v}{P_v}} - 1.$$

Подставив в эту формулу значение  $S_v$  из (2.88), получим

$$i_{\text{эф}} = \sqrt[n]{\frac{P_v (1+i)^n \frac{K_0}{K_1}}{P_v}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{1+i}{k}} - 1. \quad (2.90)$$

Из этого соотношения видно, что с увеличением темпа роста  $k$  эффективность  $i_{\text{эф}}$  падает (рис. 2.4).

Анализ показывает, что при  $k = 1$  значение  $i_{\text{эф}} = i$ , при  $k > 1$  значение  $i_{\text{эф}} < i$ , а при  $k < 1$  значение  $i_{\text{эф}} > i$ .

Критическое значение  $k = k^*$ , при котором эффективность операции равна нулю, т.е.  $i_{\text{эф}} = 0$ , определяется как

$$k^* = (1+i)^n, \quad (2.91)$$

что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращения по рублевой ставке:

$$\sqrt[n]{k} = 1+i.$$

**Вывод 5.** Если ожидаемые величины  $k$  или  $K_1$  больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конверсией явно убыточна ( $i_{\text{эф}} < 0$ ).

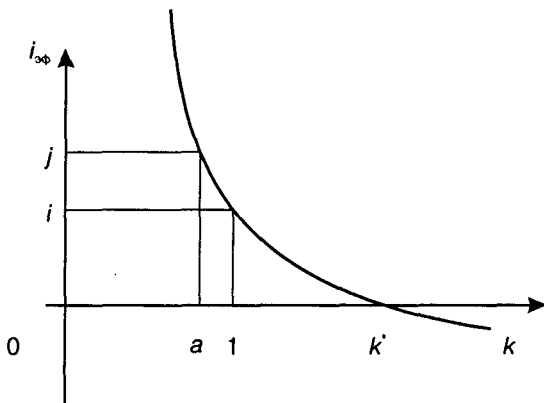


Рис. 2.4. Зависимость доходности  $i_{эф}$  от темпа роста обменного курса  $k$

Максимально допустимое значение  $k$ , при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке  $j$  (точка  $k = a$  на рис. 2.4), находится из равенства соответствующих множителей наращения:

$$(1 + j)^n = \frac{(1 + i)^n}{k_{\max}}$$

откуда

$$k_{\max} = \left( \frac{1 + i}{1 + j} \right)^n \text{ или } \max K_1 = K_0 \left( \frac{1 + i}{1 + j} \right)^n. \quad (2.92)$$

**Вывод 6.** Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше  $\max K_1$ .

**2.6.2. Погашение задолженности частями. Контур финансовой операции** — это графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами.

Финансовая или кредитная операция предполагает сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности можно пояснить на рис. 2.5.

Пусть ссуда в размере  $D_0$  выдана на срок  $T$ . На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два промежуточных платежа  $R_1$  и  $R_2$ , а в конце срока выплачивается остаток задолженности  $R_3$ , подводящий баланс операции (рис. 2.5, а).

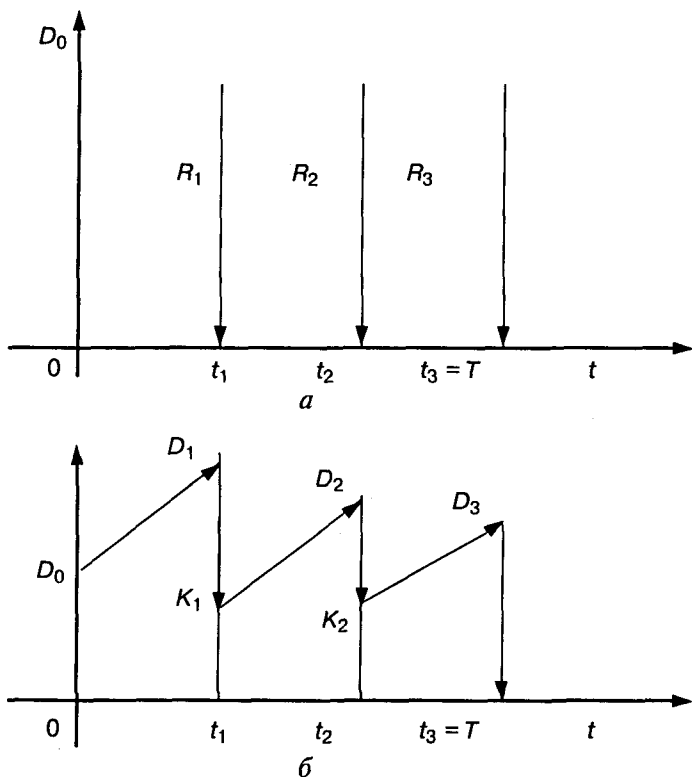


Рис. 2.5. К понятию контура финансовой операции

На интервале времени  $t \in [0; t_1]$  задолженность возрастает до величины  $D_1$ . В момент  $t_1$  долг уменьшается до величины  $K_1 = D_1 - R_1$  и т.д. Заканчивается операция получением кредитором остатка задолженности  $R_3$ . В этот момент задолженность полностью погашается.

Назовем график типа рис. 2.5, б контуром финансовой операции. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. В этом случае существуют два метода расчета процентов и определения остатка задолженности. Первый называется **актуарным** и применяется в основном в операциях со сроком *более года*. Второй метод назван



**правилом торговца.** Он обычно применяется коммерческими фирмами в сделках со сроком *не более года*.

*Замечание.* При начислении процентов, как правило, используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней временных периодов.

**Актуарный метод.** Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Для случая, показанного на рис. 2.5, б, получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности:

$$K_1 = D_0(1 + t_1i) - R_1; K_2 = K_1(1 + t_2i) - R_2; K_2(1 + t_3i) - R_3 = 0, \quad (2.93)$$

где периоды времени  $t_1, t_2, t_3$  — заданы в годах;  $i$  — процентная годовая ставка.

**Правило торговца.** Правило торговца является другим подходом к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации.

1. Если срок ссуды не превышает одного года, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами.

2. В случае когда срок превышает год, указанные выше расчеты делаются для *годового* периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды  $T \leq 1$  алгоритм можно записать следующим образом:

$$S = D - K = P(1 + Ti) - \sum_{j=1}^m R_j(1 + t_ji), \quad (2.94)$$

где  $S$  — остаток долга на конец срока;  $D$  — наращенная сумма долга;  $K$  — наращенная сумма платежей;  $R_j$  — сумма частичного платежа;  $t_j$  — интервал времени от момента платежа до конца срока;  $m$  — число частичных (промежуточных) платежей.

**2.6.3. Переменная сумма счета и расчет процентов.** Рассмотрим ситуацию, когда в банке открыт сберегательный счет и в

течение срока хранения денежные средства снимаются, делаются дополнительные взносы. В этом случае в банковской практике при расчете процентов часто используют методику расчета с вычислением так называемых *процентных чисел*. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число  $C_j$  за прошедший период  $j$  (где  $t_j$  — в днях), в течение которого сумма на счете оставалась неизменной:

$$C_j = \frac{P_j t_j}{100}. \quad (2.95)$$

Для определения суммы процентов, начисленной за весь срок, все процентные числа складываются, и их сумма делится на постоянный делитель:

$$D = \frac{K}{i}, \quad (2.96)$$

где  $K$  — временная база (число дней в году, т.е. 360, либо 365, или же 366);  $i$  — годовая ставка простых процентов, %.

При закрытии счета владелец получит сумму, равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

*Задача 2.20.* Пусть 20 февраля 2002 г. был открыт счет до востребования в размере  $P_1 = 3000$  руб., процентная ставка по вкладу  $i = 20\%$  годовых. Дополнительный взнос на счет был сделан 15 августа и составил  $R_1 = 2000$  руб. Первого октября со счета сняли сумму  $R_2 = -4000$  руб., а 21 ноября счет был закрыт. Требуется рассчитать сумму процентов и общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

**Решение.** Расчет будем вести по схеме (360/360). Здесь имеются три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной: с 20 февраля по 15 августа ( $P_1 = 3000$ ,  $t_1 = 10 + 5 \cdot 30 + 15 = 175$ ), с 15 августа по 1 октября ( $P_2 = P_1 + R_1 = 3000 + 2000 = 5000$  руб.,  $t_2 = 15 + 30 + 1 = 46$ ), с 1 октября по 21 ноября ( $P_3 = P_2 + R_2 = 5000 - 4000 = 1000$  руб.,  $t_3 = 29 + 21 = 50$ ).

Найдем соответствующие процентные числа:

$$C_1 = \frac{P_1 \cdot t_1}{100} = \frac{3000 \cdot 175}{100} = 5250;$$

$$C_2 = \frac{P_2 \cdot t_2}{100} = \frac{5000 \cdot 46}{100} = 2300;$$

$$C_3 = \frac{P_3 \cdot t_3}{100} = \frac{1000 \cdot 50}{100} = 500.$$

Вычислим постоянный делитель

$$D = K/i = 360/20 = 18.$$

Сумма процентов равна

$$I = (C_1 + C_2 + C_3)/D = \frac{5250 + 2300 + 500}{18} = 447 \text{ руб. } 22 \text{ коп.}$$

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета:

$$P_3 + I = 1000 + 447,22 = 1447 \text{ руб. } 22 \text{ коп.}$$

Теперь покажем связь этой методики с формулой простых процентов. Рассмотрим в алгебраическом виде представленный выше пример.

Сумму, выплачиваемую при закрытии счета, можно рассчитать по следующей схеме:

$$\begin{aligned} P_3 + I &= P_1 + R_1 + R_2 + \frac{R_1 t_1 + (P_1 + R_1) t_2 + (P_1 + R_1 + R_2) t_3}{100} \frac{i}{K} = \\ &= P_1 \left( 1 + \frac{t_1 + t_2 + t_3}{K} \frac{i}{100} \right) + R_1 \left( 1 + \frac{t_2 + t_3}{K} \frac{i}{100} \right) + R_2 \left( 1 + \frac{t_3}{K} \frac{i}{100} \right). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Таким образом, мы получили выражение, из которого следует, что на каждую сумму, добавляемую или снимаемую со счета, начисляются проценты с момента совершения соответствующей операции до закрытия счета. Эта схема соответствует правилу торговца, рассмотренному в подразделе 2.6.2.

**2.6.4. Изменение условий контракта.** В практике часто возникает необходимость в изменении условий контракта: например, должник может попросить об отсрочке срока погашения долга или напротив изъявить желание погасить его досрочно, в ряде случаев может возникнуть потребность объединить (*консолидировать*) несколько долговых обязательств в одно и т.д. Во всех этих случаях применяется принцип финансовой эквивалентности старых (заменяемых) и новых (заменяющих) обязательств. Для решения задач по изменению условий контракта разрабатывается так называемое **уравнение эквивалентности**, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов применяются простые процентные ставки, а для средне- и долгосрочных — сложные ставки.

Если в контрактах фигурируют потоки платежей, то при их пересмотре (например, при изменении частоты или размера

выплат, сокращении или увеличении срока ренты, отсрочке платежей, выкупе или досрочном погашении остатка ренты) составляется уравнение эквивалентности для приведенных величин потоков по старым и новым условиям.

## 2.7. Эквивалентный переход от одной ставки к другой

В связи с тем, что контракты могут быть составлены с использованием различных видов ставок, для сопоставления их доходности возникает необходимость в установлении правил эквивалентного приведения различных ставок к ставке одного вида. Формулы, устанавливающие правила эквивалентного перехода от одной ставки к другой, выводятся на основе принципа финансовой эквивалентности результатов наращенного (или дисконтированного) по этим ставкам. Следовательно, для их получения достаточно приравнять соответствующие множители наращенного (или дисконтированного).

Например, для того чтобы установить эквивалентность между простой ставкой наращенного  $i$  и простой учетной ставкой  $d$ , воспользуемся исходными формулами

$$S = P(1 + ni) \quad \text{и} \quad P = S(1 - dn).$$

Из второй формулы следует, что  $S = P/(1 - nd)$ .

Приравняем множители наращенного

$$1 + ni = 1/(1 - nd),$$

откуда получаем две формулы эквивалентного перехода:

$$i = \frac{d}{1 - nd}; \quad (2.98)$$

$$d = \frac{i}{1 + ni}. \quad (2.99)$$

Заметим, что соотношения между этими ставками зависят от срока  $n$ .

Точно так же можно вывести формулы эквивалентного перехода для любой другой пары ставок.

### Вопросы и задачи для повторения и самопроверки

В вопросах 2.1 – 2.22 из перечня предлагаемых ответов выбрать правильные.

2.1. Что понимают под процентами (процентными деньгами) в финансовых расчетах:

- а) сотую долю суммы долга;
- б) отношения суммы, выплаченной за пользование кредита к величине долга;
- в) абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг?
- 2.2.** Что понимают под процентной ставкой:
- а) сумма, начисляемая за один год, на каждые 100 руб. основного долга;
- б) отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды;
- в) абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг?
- 2.3.** Что понимают под периодом начисления:
- а) один год;
- б) интервал времени от момента получения кредита до полного погашения долга;
- в) интервал времени, к которому относится процентная ставка?
- 2.4.** Что понимают под наращенной суммой:
- а) первоначальную сумму долга вместе с начисленными на нее процентами к концу срока;
- б) сумму, начисленную за пользование кредитом;
- в) доход, получаемый кредитором за год?
- 2.5.** Что понимают под простыми процентами:
- а) вариант расчета когда ставки процентов применяют к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды;
- б) вариант расчета когда ставки процентов применяют к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами;
- в) вариант расчета когда ставки процентов меняются дискретно во времени?
- 2.6.** Укажите формулу наращения по простым процентным ставкам:
- а)  $S = P(1 + ni)$ ;
- б)  $S = P(1 - nd)$ ;
- в)  $P = S(1 - ni)^{-1}$ ;
- г)  $P = S(1 - nd)^{-1}$ .
- 2.7.** Укажите формулу расчета наращенной суммы, когда применяется простая процентная ставка, дискретно изменяющаяся во времени:
- а)  $S = P(1 - n_1d_1)(1 - n_2d_2) \dots (1 - n_kd_k)$ ;
- б)  $S = P(1 - n_1d_1)^{-1}(1 - n_2d_2)^{-1} \dots (1 - n_kd_k)^{-1}$ ;
- в)  $S = P(1 + n_1i_1 + n_2i_2 + \dots + n_ki_k)$ ;
- г)  $S = P(1 + n_1i_1)(1 + n_2i_2) \dots (1 + n_ki_k)$ .
- 2.8.** Укажите формулу математического дисконтирования в случае применения простой процентной ставки:
- а)  $P = S(1 + ni)^{-1}$ ;
- б)  $S = P(1 - ni)$ ;
- в)  $S = P(1 - dn)$ ;
- г)  $P = S(1 - dn)$ .

- 2.9.** Укажите формулу банковского учета по простой учетной ставке:
- $P = S (1 + ni)^{-1}$ ;
  - $S = P (1 - ni)$ ;
  - $S = P (1 - dn)$ ;
  - $P = S (1 - dn)$ .
- 2.10.** Что понимают под сложными процентами:
- вариант расчета процентов, при котором за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 365 или 366 дней, а число дней ссуды в каждый месяц принимается равным 30;
  - вариант расчета, при котором начисленные проценты присоединяют к сумме долга, а полученная сумма служит базой для очередного расчета процентов;
  - вариант расчета процентов, при котором производят капитализацию процентов?
- 2.11.** Укажите формулу наращенная по сложным процентным ставкам:
- $S = Pn (1 + i)$ ;
  - $S = P^n (1 + i)$ ;
  - $S = P (1 + i)^n$ ;
  - $S = P (1 + ni)^n$ .
- 2.12.** Как вычисляется наращенная сумма при применении сложных процентных ставок, если ставки дискретно меняются во времени:
- $S = P^{n_1 n_2 \dots n_k} (1 + i_1)(1 + i_2) \dots (1 + i_k)$  ;
  - $S = P(1 + i_1^{n_1})(1 + i_2^{n_2}) \dots (1 + i_k^{n_k})$  ;
  - $S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}$  ;
  - $S = P (1 + n_1 i_1) (1 + n_2 i_2) \dots (1 + n_k i_k)$ .
- 2.13.** Укажите формулу математического дисконтирования по сложной процентной ставке:
- $P = S (1 + i)^{-n}$ ;
  - $P = S (1 - nd)$ ;
  - $P = S (1 - ni)^{-1}$ ;
  - $P = S (1 - d)^n$ .
- 2.14.** Укажите формулу банковского учета по сложной учетной ставке:
- $P = S (1 + i_{сн})^{-n}$ ;
  - $P = S (1 - nd_{сн})$ ;
  - $P = S (1 - nd_{сн})^{-1}$ ;
  - $P = S (1 - d_{сн})^n$ .
- 2.15.** Какие из перечисленных ниже операций можно отнести к понятию «поток платежей»:
- ряд последовательных выплат и поступлений;
  - ряд последовательных выплат;
  - ряд последовательных поступлений;

- г) ряд последовательных начислений процентов по договору займа?
- 2.16.** Что такое «наращенная сумма ренты»:
- сумма всех членов последовательности платежей;
  - сумма всех выплат;
  - сумма всех поступлений;
  - сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты?
- 2.17.** Что понимают под термином «современная величина ренты»:
- сумма всех членов ренты;
  - сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты;
  - сумма всех членов ренты, дисконтированных на момент начала потока платежей или предшествующий ему?
- 2.18.** Что называют финансовой рентой:
- поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны;
  - поток платежей, все члены которого положительные величины;
  - поток платежей, у которого временные интервалы постоянны;
  - регулярные выплаты, осуществляемые должником в счет погашения долга?
- 2.19.** Что такое рента постнумерандо:
- рента, образуемая платежами после некоторого указанного момента времени;
  - рента, платежи которой поступают в конце каждого периода;
  - рента, платежи которой скорректированы с учетом инфляции;
  - рента, платежи которой скорректированы на величину налога?
- 2.20.** Что такое рента пренумерандо:
- рента, образуемая платежами до некоторого указанного момента времени;
  - рента, платежи которой поступают в начале каждого периода;
  - рента, платежи которой поступают до корректировки на инфляцию;
  - рента, платежи которой поступают до корректировки на величину налога?
- 2.21.** Укажите коэффициент наращивания обычной годовой ренты при однократном начислении процентов в году:

а)  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ;

б)  $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ ;

в)  $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p}}$ ;

г)  $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p}}$ .

**2.22.** Укажите выражение для расчета наращенной суммы для обычной  $p$ -срочной ренты при  $m$ -кратном начислении процентов в году в общем случае:

$$а) R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}; \quad б) \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-n}}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right]};$$

$$в) \frac{\left(1 - \frac{j}{m}\right)^n - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right]}; \quad г) \frac{1 - \left(1 - \frac{j}{m}\right)^n}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right]}.$$

Решить задачи 3-2.1 – 3-2.23.

- 3-2.1.** Клиент поместил на депозитный счет 1 000 000 руб. на 3,5 года при ставке простых процентов, равной 17% годовых. Определить начисленные проценты на конец срока.
- 3-2.2.** Предприятие оформляет кредитный договор с банком на сумму 3 000 000 руб. на срок с 5 января 2000 г. до 20 марта 2000 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Рассчитать проценты за пользование кредитом при начислении точных процентов с точным числом дней ссуды.
- 3-2.3.** Предприятие оформляет кредитный договор с банком на сумму 3000000 руб. на срок с 5 января 2000 г. до 20 марта 2000 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Рассчитать проценты за пользование кредитом при начислении обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды.
- 3-2.4.** Предприятие оформляет кредитный договор с банком на сумму 3000000 руб. на срок с 5 января 2000 г. до 20 марта 2000 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Рассчитать проценты за пользование кредитом при начислении обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды.
- 3-2.5.** Банк выдал кредит 1000000 руб. В договоре принята ставка простых процентов за первые 0,5 года, равная 20% годовых, а каждые последующие 0,5 года ставка увеличивается на 3% по сравнению с предыдущей. Срок договора равен 2 годам. Определить наращенную сумму за весь срок договора.
- 3-2.6.** Через 90 дней после подписания договора, должник уплатит 1000000 руб. Кредит выдан под 30% годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма долга (при математическом дисконтировании)?



- 3-2.7.** Через 180 дней после подписания договора, должник уплатит 2 500 000 руб. Кредит выдан под 10% годовых (проценты обыкновенные). Определить дисконт (при математическом дисконтировании).
- 3-2.8.** Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 руб. Предприятие продало этот вексель банку. Последний учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых (год равен 360 дням). Определить полученную предприятием сумму.
- 3-2.9.** Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 руб. Предприятие продало этот вексель банку. Последний учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых (год равен 360 дням). Определить дисконт.
- 3-2.10.** Какой величины достигнет долг 1 000 000 руб., взятый под сложные 30% годовых через 6 лет?
- 3-2.11.** Кредитный договор заключен на 4 года. Первоначальная сумма долга составляет 2 000 000 руб. В договоре предусмотрена переменная ставка сложных процентов, определяемая как 10% годовых в первый год, каждый последующий год ставка увеличивается на 10%. Определить наращенную сумму в конце срока договора.
- 3-2.12.** Ссуда размером 2 000 000 руб. предоставлена на 4 года под 40% годовых. Проценты начисляются ежеквартально и капитализируются. Вычислить наращенную сумму.
- 3-2.13.** Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет и капитализирует проценты ежемесячно исходя из номинальной ставки 40% годовых.
- 3-2.14.** Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 40% годовых.
- 3-2.15.** Через 10 лет по обязательству будет выплачена сумма 10 000 000 руб. Определить современную стоимость обязательства при условии, что применяется ставка сложных процентов 10% годовых.
- 3-2.16.** Вексель на сумму 1 000 000 руб., срок погашения которого наступит через 5 лет, учтен банком по сложной учетной ставке 20% годовых. Какую сумму получил владелец векселя?
- 3-2.17.** Вексель на сумму 1 000 000 руб., срок погашения которого наступит через 3 года, учтен банком по сложной учетной ставке 10% годовых. Определить дисконт.
- 3-2.18.** В фонд ежегодно постнумерандо вносится по 10 000 руб. в течение 20 лет, на которые начисляются сложные проценты 10% годовых один раз в году. Определить наращенную сумму на конец срока.
- 3-2.19.** В фонд ежегодно постнумерандо вносится по 10 000 руб. в течение 20 лет, на которые начисляются сложные проценты 10% годовых ежеквартально. Определить наращенную сумму на конец срока.

- 3-2.20.** В фонд ежегодно вносится по 10 000 руб. в течение 20 лет. Платежи производят равными долями в конце каждого квартала. Сложные проценты по ставке 10% годовых начисляются один раз в конце года. Определить наращенную сумму на конец срока.
- 3-2.21.** В фонд ежегодно вносится по 10 000 руб. в течение 20 лет. Платежи производят равными долями в конце каждого квартала. Сложные проценты по ставке 10% годовых начисляются ежеквартально. Определить наращенную сумму на конец срока.
- 3-2.22.** В фонд ежегодно вносится по 10 000 руб. в течение 20 лет. Платежи производят равными долями в конце каждого квартала. Сложные проценты по ставке 10% годовых начисляются ежемесячно. Определить наращенную сумму на конец срока.
- 3-2.23.** В течение 20 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 000 руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

### *Ответы на вопросы*

- 2.1.** в); **2.2.** б); **2.3.** в); **2.4.** а); **2.5.** а); **2.6.** а); **2.7** в); **2.8.** а); **2.9.** г); **2.10.** б) и в); **2.11.** в); **2.12.** в); **2.13.** а); **2.14.** г); **2.15.** а), б) и в); **2.16.** г); **2.17.** в); **2.18.** а); **2.19.** б); **2.20.** б); **2.21.** а); **2.22.** а)

### *Ответы на задачи*

- 3-2.1.** 595 000 руб.; **3-2.2.** 90 000 руб.; **3-2.3.** 91250 руб.; **3-2.4.** 92 500 руб.; **3-2.5.** 1 490 000 руб.; **3-2.6.** 930 232 руб. 56 коп.; **3-2.7.** 119 047 руб. 62 коп.; **3-2.8.** 950 000 руб.; **3-2.9.** 50 000 руб.; **3-2.10.** 4 826 809 руб.
- 3-2.11.** 4 804 800 руб.; **3-2.12.** 6 276 856 руб. 75 коп.; **3-2.13.** 46,41%.
- 3-2.14.** 35,1%; **3-2.15.** 3 855 432 руб. 89 коп.; **3-2.16.** 327 680 руб.; **3-2.17.** 271 000 руб.; **3-2.18.** 572 749 руб.99 коп.; **3-2.19.** 598 149 руб. 98 коп.
- 3-2.20.** 593 801 руб. 71 коп.; **3-2.21.** 620 956 руб. 78 коп.; **3-2.22.** 627 563 руб. 14 коп.; **3-2.23.** 85 135 руб. 64 коп.

Анализ и прогнозирование тенденций в движении инструментов финансовых рынков осложняется рядом неопределенностей и проблем. Фундаментальный анализ дает возможность преодолеть их системным способом. Он охватывает три сопряженные области:

- *общеэкономический анализ*, занимающийся анализом и прогнозом общеэкономического развития, изменения процентной ставки и денежной массы, а также изменения валютных курсов и финансовой политики;
- *отраслевой анализ*, включающий в себя также анализ поступления заказов и объемов производства соответствующей отрасли;
- *анализ отдельных компаний*, касающийся динамики товарооборота, издержек и доходов, а также имущества и положения компании на рынке.

Таким образом, основой фундаментального подхода является рассмотрение существа процессов, происходящих на рынке, выявление порождающих их причин и взаимосвязей.

Такому подходу противостоят те, кто не считает нужным учитывать экономическое развитие. Они рассматривают лишь ситуацию на совокупном рынке данной акции, причем с практической стороны (методов, техники сделок). Поэтому такой аналитический метод получил название технического анализа (рис. 3.1)

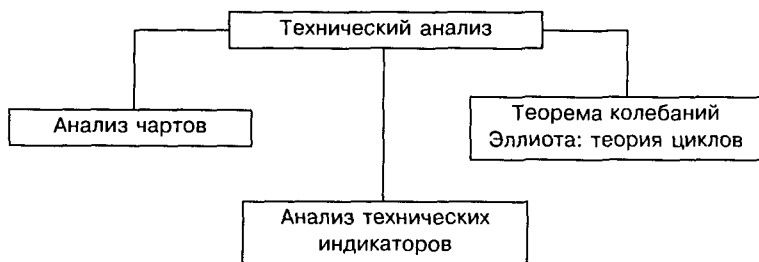


Рис. 3.1. Технический анализ

[3, 17, 29]\*. Он связан с изучением динамики непосредственно самих процессов, протекающих на финансовых рынках, и, в частности, со способами выделения тренда и определения моментов его разворота. (В данном случае под трендом условимся понимать направление изменения показателя на определенном временном интервале.) Методы технического анализа можно разделить на графические и численные.

Графический анализ, например, рынка ценных бумаг используется для решения таких задач, как прогнозирование уровня цен, определение оптимального момента времени (момента разворота тренда) для покупки или продажи ценных бумаг, проверки достоверности и полноты результатов фундаментального анализа и др. Прежде чем перейти к рассмотрению методов графического анализа, дадим характеристику типам трендов, наиболее часто встречающихся на финансовых рынках.

Основным считается первичный тренд, его продолжительность обычно составляет от 1 до 2 лет. Он отражает развитие внутренних процессов экономики, лежащих в основе цикла деловой активности. Развитие в главном направлении иногда прерывается возвратными движениями, возникающими как реакция на различные политические, экономические, правовые и иные проблемы, характерные для функционирования любой сложной системы. Соответствующие таким возвратным движениям тренды называют промежуточными или среднесрочными, они длятся от 1 до 6 и более месяцев. В свою очередь, среднесрочные тренды могут быть прерваны краткосрочными трендами, срок действия которых составляет от 1 до 3–4 недель. Причинами возникновения краткосрочных трендов являются случайные факторы, выявить и предсказать появление которых чрезвычайно сложно.

Таким образом, на показатели финансовых рынков одновременно влияют несколько трендов, и очень важно знать, какой из них в данный момент оказывает решающее воздействие, так как от этого во многом зависят момент наступления следующего разворота, а также величина численного изменения показателей.

Кроме перечисленных типов трендов на финансовых рынках имеют место тренды дня, которые особенно часто встречаются на фондовых биржах, а также вековые тренды. Почасовые и даже

---

\* При проведении технического анализа сознательно стараются не задавать вопросов о причинах движения биржевого курса. Подобные вопросы, по мнению специалистов, занимающихся техническим анализом акций, совершенно бессмысленны, потому что только спрос и предложение определяют цену акции.

мгновенные изменения финансовых показателей, составляющие тренды дня, можно отслеживать с помощью методов технического анализа. Направление развития вековых трендов, оказывающих непосредственное влияние на первичные тренды, можно идентифицировать, используя методы фундаментального анализа.

### 3.1. Технический анализ

В данном разделе рассмотрены методы технического анализа рынка на примере анализа международного валютного рынка *Forex*. Рассмотренные в разделе методы технического анализа имеют общий характер. Они применимы при работе и на других биржах, так как, несмотря на большое разнообразие обращающихся на биржах финансовых инструментов (товары, акции, облигации, опционы, фьючерсы, валюта и т.д.), механизм извлечения прибыли при работе с ними примерно одинаков: цена продажи актива должна быть выше цены покупки.

Основная задача трейдера (торговца) на любой бирже состоит в выявлении тенденции движения цен (тренда) и прогнозирования момента его разворота. Покупая финансовый инструмент при росте и продавая при падении цен, инвестор получает прибыль. Поэтому приемы анализа движения цен для различных рынков и финансовых инструментов имеют много общего. Мы рассмотрим их на примере международного валютного рынка *Forex*, который обладает рядом привлекательных для инвесторов свойств.

Чем же рынок *Forex* привлекателен для инвесторов?

**Ликвидность.** Этот рынок по объему превосходит все остальные. Так, например, ежедневный объем рынка ценных бумаг составляет приблизительно 300 млрд дол., тогда как рынок *Forex* оценивается в 1–3 трлн дол. в день. Высокая ликвидность — это мощная притягательная сила для любого инвестора, так как она обеспечивает ему свободу открывать и закрывать позицию любого объема практически по существующей на данный момент рыночной котировке.

**Непрерывный доступ.** Существенной привлекательностью для участников рынка является его практически круглосуточный режим работы: с 03 ч по московскому времени (открытие Токийской биржи) до 23 ч (закрытие биржи в Нью-Йорке). *Forex* не имеет конкретного места торговли. Торговля происходит по телефону и через терминалы компьютеров одновременно в сотнях банков во всем мире. Практически в каждом из часовых поясов (т.е. в Токио, Гонконге, Сиднее, Лондоне, Нью-Йорке и т.д.) есть

дилеры (торговцы), желающие котировать валюту, поэтому обмен валюты в течение всей рабочей недели не прекращается.

По сравнению с рынком Forex фьючерсный и фондовый рынки имеют существенное ограничение — торговля прерывается в конце дня и возобновляется только утром следующего дня. При этом, если вы торгуете на российском рынке, а некоторые существенные для рынка события произошли в США, то утром открытие рынка может оказаться совсем не таким, как вы ожидали. На рынке Forex участникам не нужно ждать, чтобы прореагировать на то или иное событие, как это случается на других рынках.

**Стоимость.** Рынок Forex традиционно имеет сравнительно низкие комиссионные (от 0 до 25 дол. за сделку). За пользование кредитом проценты не превышают примерно 5% годовых, а если сделка по купле и продаже валюты совершена в течение одного биржевого дня, их не берут вовсе. Разница между ценой покупки и продажи (спрэд) не превышает 5–10 пунктов.

**Возможность применения маржевой торговли.** Сегодня начать работать на рынке Forex можно, имея сравнительно небольшой начальный капитал. Предоставление банками и брокерскими конторами возможности вести валютнообменные операции в объемах, многократно превышающих фактически вложенные средства (так называемая маржевая торговля), позволяет стать полноправным участником рынка инвестору, располагающему суммой всего от 2000 дол. Для организации такой торговли достаточно иметь персональный компьютер и выход в Интернет. Такими возможностями обладает значительная часть юридических лиц и многие физические лица в России.

Для привлечения на рынок Forex инвесторов, располагающих суммами менее 1 млн дол. (стандартный лот для торговли на данном рынке), используется механизм маржевой торговли. Смысл ее состоит в том, что для заключения сделки клиенту необходимо внести лишь начальный страховочный депозит, после чего он имеет возможность заключать сделки, объем которых может в 100 раз превышать первоначальный объем его средств. Это так называемое плечо (leverage) предоставляет банк или иная кредитная организация, где клиент открывает счет.

Допустим, на вашем счете 2000 дол. США. Это означает, что при кредитном плече 100:1 вы можете открыть позицию в 200 000 дол. США. Далее, пусть в 11 ч утра курс доллара по отношению к швейцарскому франку составил 1,4045–1,4050. Это значит, что вы можете продать швейцарские франки из

расчета 1,4050 швейцарского франка за 1 дол., или купить их из расчета 1,4045 франка за доллар. Эта разность между курсом покупки и продажи (в данном случае 5 пунктов) называется спрэдом.

Вы считаете, что в данный момент швейцарский франк переоценен и должен упасть в цене. Поэтому вы даете распоряжение продать 140 500 швейцарских франков за 100 000 дол. Это значит вы «открыли» позицию. В 15 ч доллар стал стоить 1,4250–1,4255 швейцарского франка, и вы принимаете решение «закрыть» позицию (т.е. продать свои 100 000 дол. по новому курсу за 142 500 франков). Ваш доход — 2000 швейцарских франков или 1403,51 дол. США. Это примерно 140% от размера вложенных вами в сделку средств. После закрытия позиции деньги уже находятся на вашем счете.

**Возможность извлекать прибыль при любом направлении изменения цен.** Заметим, что в предыдущем примере у вас не было на счете швейцарских франков, вам их предоставили в кредит. Это еще одно преимущество работы на рынке Forex, заключающееся в возможности извлекать прибыль при любом направлении изменения цен.

### 3.2. Формирование валютного курса

На направление движения валютного курса влияет ряд факторов.

**3.2.1. Фундаментальные факторы.** Это — ключевые макроэкономические показатели состояния национальной экономики, воздействующие на участников валютного рынка и уровень валютного курса.

Обычно на мировых валютных рынках, где 80% операций проводится с долларом США, наибольшее влияние имеют данные по экономике США, что приводит к повышению или снижению курса доллара по отношению к другим валютам.

Первичными причинами, влияющими на валютные курсы, являются состояние экономики, политические, а также и психологические факторы.

Фундаментальные экономические причины, такие, как инфляция, процентные ставки, уровень безработицы и многие другие, постоянно и активно влияют на курсы валют. Действия правительства также существенно влияют на обменный курс. Демонстрация уверенности в способности правительства удерживать курс валюты способствует ее подъему. Снижение процентных ставок сти-

мулирует снижение спроса на валюту и тем самым понижает ее стоимость в обменных операциях. Решение центрального банка страны о закупке или продаже валюты может существенно укрепить или подорвать ее курс.

Ожидание изменений экономических условий может привести к внезапному и драматическому колебанию валютного курса. Это ключевая концепция, потому что во многих случаях валютным рынком управляет предчувствие изменений экономических условий, а не сами изменения.

Таким образом, для трейдера универсальным правилом открытия позиции должно стать ориентирование на ожидания и настроения большинства участников рынка. Это достигается путем анализа ситуации по публикациям, при изучении обзоров состояния рынка в информационных системах Reuters, Bridge (Dow Jones), CQG и др. Полученная информация постепенно складывается в модель различных вариантов поведения курса после публикации экономических индикаторов. По сути, трейдер должен решить задачу многофакторного корреляционного анализа — спрогнозировать движение курса валют в зависимости от многих экономических показателей. Для решения этой задачи построены многочисленные математические модели, используя которые компьютер выдает прогноз. Широкое распространение получили при решении этой задачи нейронные сети.

**3.2.2. Краткосрочные и спорадические факторы.** Помимо фундаментальных факторов, влияние которых может быть предсказано, краткосрочные, неожиданные факторы могут внести существенные коррективы в динамику движения валютного курса. К ним относятся перечисленные ниже факторы.

**Форс-мажорные обстоятельства** — стихийные бедствия (землетрясения, наводнения и т.д.).

**Политические события** — война, приходы к власти тех или иных президентов, политические скандалы, террористические акты и т.д. Например, известие о блокировании М. С. Горбачева в Форосе сразу привело к существенному падению курса немецкой марки, так как значительная часть кредитов СССР была получена в Германии.

**Высказывания политических лидеров.**

**Валютные интервенции центральных банков.**

Подробное рассмотрение вопросов фундаментального анализа — предмет отдельного разговора. При решении вопроса о вхождении в рынок или выходе из него одинаково важно провести как фундаментальный, так и технический анализ.



### 3.3. Методы технического анализа

Технический анализ — это метод прогнозирования цен с помощью рассмотрения графиков движения рынка за предыдущие периоды времени. Этот анализ основан на предположении, что рынок обладает памятью, и поэтому на будущее движение курса большое влияние оказывают закономерности его прошлого поведения; тем самым рынок обладает определенной степенью предсказуемости.

В последние годы в связи с бурным развитием электронных средств анализа, предлагаемых фирмами Reuters, Bridge (Dow Jones), CQG и др., все большее число трейдеров основывают свои решения на использовании технического анализа, что повышает влияние его закономерностей на реальное движение курса.

**3.3.1. Графическое представление исходной информации.** Исходной информацией для проведения технического анализа являются данные по цене каждой сделки и времени ее совершения. Ввиду большого количества таких сделок их непосредственный анализ затруднен. Поэтому данные группируются, обрабатываются и выводятся на мониторы компьютеров в виде графиков для дальнейшего анализа.

Группировка данных производится, как правило, за определенные промежутки времени: недели, дни, часы. Соответственно графики называют недельными, дневными, часовыми. Используются также более мелкие промежутки времени (до минутных графиков) в зависимости от используемой трейдером стратегии торговли.

Сгруппированная информация содержит для каждого интервала: **цену первой сделки** (цена открытия — **open**); **цену последней сделки** (цена закрытия — **close**); **максимальную (high) и минимальную (low) цены и количество сделок** (объем — **volume**). Для дневных графиков начальная цена — это цена первой сделки при открытии Токийской биржи (03 ч по московскому времени). Цена закрытия — цена последней сделки на Нью-Йоркской бирже (23 ч по московскому времени). Оставшиеся 4 ч биржа не работает. Соответственно недельные графики содержат информацию по сделкам с понедельника (03 ч московского времени) по пятницу (23 ч). В субботу и воскресенье биржа Forex не работает.

Данные выводятся на экран монитора в виде графиков, которые можно анализировать и на основе этого анализа принимать решения об открытии позиции или закрытии ранее открытых позиций. При графическом представлении цен используются различные типы графиков:

- **крестики-нолики** (point and figure charts);
- **линейные графики** (line chart);

- **гистограммы** (используются также термины: столбиковые или штриховые диаграммы или просто «чарты» — bar charts);
- **японские свечи** (japanese candlesticks).

Наиболее часто для технического анализа используются два последних типа графиков.

**Линейные графики** (рис. 3.2) используются тогда, когда сделок мало и группировка данных не дает существенного преимущества. Они строятся либо с использованием данных по каждой сделке (тогда по оси *Y* откладывается цена, а по оси *X* номер сделки), либо по данным, сгруппированным по временным интервалам (тогда по оси *Y* откладывается цена последней сделки в данном интервале).

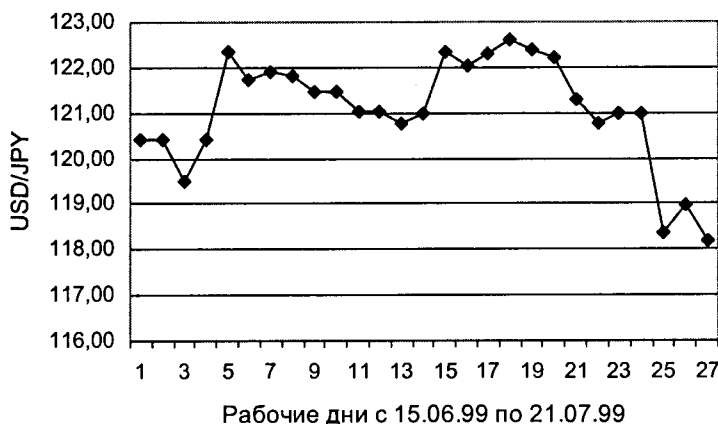


Рис. 3.2. Линейный график котировок японской иены (обратная котировка)

Для построения графиков нами использовались реальные котировки английского фунта стерлингов, евро и японской иены на рынке Forex, полученные по сети Интернет и представленные в табл. 3.1.

Цена закрытия для составления графиков выбирается не случайно. Среди трейдеров, заключающих сделки перед закрытием биржи, преобладают профессионалы, в то время как цены открытия формируются скорее новичками, которые во время перерыва в работе биржи начитались новостей и поспешно принимают не всегда квалифицированные решения.

**Гистограммы** представляют собой графики, в которых вместо точек (значений уровней ряда) по оси *Y* откладывают «палочки» (bar, иногда в русском тексте используют термины: «столбик»,

Таблица 3.

## Исходные данные по котировкам валют

| Но-<br>мер | Дата     | USA/<br>JPY        | EUR/USA |        |                    | GBP/USA            |        |        |                    |
|------------|----------|--------------------|---------|--------|--------------------|--------------------|--------|--------|--------------------|
|            |          | За-<br>кры-<br>тие | Верх    | Низ    | За-<br>кры-<br>тие | От-<br>кры-<br>тие | Верх   | Низ    | За-<br>кры-<br>тие |
| 1          | 15.06.99 | 120,40             | 1,0443  | 1,0377 | 1,0431             | 1,6068             | 1,6099 | 1,5900 | 1,5941             |
| 2          | 16.06.99 | 120,44             | 1,0445  | 1,0286 | 1,0309             | 1,5939             | 1,5961 | 1,5855 | 1,5887             |
| 3          | 17.06.99 | 119,48             | 1,0363  | 1,0287 | 1,0341             | 1,5885             | 1,5968 | 1,5853 | 1,5940             |
| 4          | 18.06.99 | 120,43             | 1,0431  | 1,0290 | 1,0401             | 1,5942             | 1,6010 | 1,5896 | 1,5969             |
| 5          | 21.06.99 | 122,33             | 1,0425  | 1,0305 | 1,0344             | 1,5948             | 1,5968 | 1,5846 | 1,5910             |
| 6          | 22.06.99 | 121,73             | 1,0367  | 1,0290 | 1,0327             | 1,5913             | 1,5945 | 1,5850 | 1,5909             |
| 7          | 23.06.99 | 121,89             | 1,0360  | 1,0268 | 1,0335             | 1,5908             | 1,5922 | 1,5754 | 1,5806             |
| 8          | 24.06.99 | 121,82             | 1,0420  | 1,0303 | 1,0407             | 1,5809             | 1,5900 | 1,5738 | 1,5880             |
| 9          | 25.06.99 | 121,48             | 1,0481  | 1,0400 | 1,0428             | 1,5880             | 1,5943 | 1,5855 | 1,5862             |
| 10         | 28.06.99 | 121,46             | 1,0445  | 1,0325 | 1,0331             | 1,5870             | 1,5880 | 1,5794 | 1,5822             |
| 11         | 29.06.99 | 121,04             | 1,0373  | 1,0311 | 1,0326             | 1,5825             | 1,5844 | 1,5720 | 1,5733             |
| 12         | 30.06.99 | 121,05             | 1,0366  | 1,0288 | 1,0259             | 1,5734             | 1,5798 | 1,5720 | 1,5779             |
| 13         | 01.07.99 | 120,76             | 1,0400  | 1,0200 | 1,0238             | 1,5781             | 1,5829 | 1,5717 | 1,5731             |
| 14         | 02.07.99 | 120,97             | 1,0261  | 1,0208 | 1,0247             | 1,5728             | 1,5803 | 1,5691 | 1,5787             |
| 15         | 05.07.99 | 122,35             | 1,0262  | 1,0209 | 1,0226             | 1,5785             | 1,5794 | 1,5734 | 1,5747             |
| 16         | 06.07.99 | 122,03             | 1,0263  | 1,0181 | 1,0246             | 1,5744             | 1,5768 | 1,5585 | 1,5623             |
| 17         | 07.07.99 | 122,32             | 1,0276  | 1,0169 | 1,0189             | 1,5625             | 1,5646 | 1,5544 | 1,5565             |
| 18         | 08.07.99 | 122,60             | 1,0230  | 1,0145 | 1,0219             | 1,5572             | 1,5618 | 1,5528 | 1,5581             |
| 19         | 09.07.99 | 122,37             | 1,0249  | 1,0160 | 1,0200             | 1,5581             | 1,5620 | 1,5465 | 1,5487             |
| 20         | 12.07.99 | 122,20             | 1,0205  | 1,0109 | 1,0149             | 1,5503             | 1,5586 | 1,5480 | 1,5575             |
| 21         | 13.07.99 | 121,31             | 1,0218  | 1,0104 | 1,0172             | 1,5577             | 1,5598 | 1,5531 | 1,5575             |
| 22         | 14.07.99 | 120,75             | 1,0344  | 1,0121 | 1,0202             | 1,5591             | 1,5651 | 1,5510 | 1,5641             |
| 23         | 15.07.99 | 121,00             | 1,0261  | 1,0182 | 1,0199             | 1,5635             | 1,5707 | 1,5627 | 1,5653             |
| 24         | 16.07.99 | 120,99             | 1,0235  | 1,0181 | 1,0201             | 1,5650             | 1,5704 | 1,5615 | 1,5623             |
| 25         | 19.07.99 | 118,37             | 1,0337  | 1,0120 | 1,0319             | 1,5627             | 1,5834 | 1,5566 | 1,5808             |
| 26         | 20.07.99 | 118,98             | 1,0440  | 1,0277 | 1,0403             | 1,5812             | 1,5822 | 1,5673 | 1,5717             |
| 27         | 21.07.99 | 118,20             | 1,0550  | 1,0391 | 1,0513             | 1,5719             | 1,5802 | 1,5690 | 1,5787             |

«бар») с одним или двумя штрихами. Их строят (рис. 3.3) с использованием данных по цене закрытия (close, Y-координата правого штриха на палочке), а также максимальной (high, Y-координата верхнего конца палочки) и минимальной (low, Y-координата нижнего конца палочки) ценам каждого интервала.

Иногда (особенно для товарных бирж) добавляют еще левый штрих, соответствующий цене открытия (open) двумя штрихами.

График движения цен, представленный в виде японских свеч (рис. 3.4), отличается от гистограммы тем, что часть палочки заменяется прямоугольником. Верхняя и нижняя стороны прямоугольников дают информацию о ценах открытия и закрытия. Если цена закрытия была выше цены открытия, то ей соответствует верхняя сторона прямоугольника, а тело прямоугольника не за-

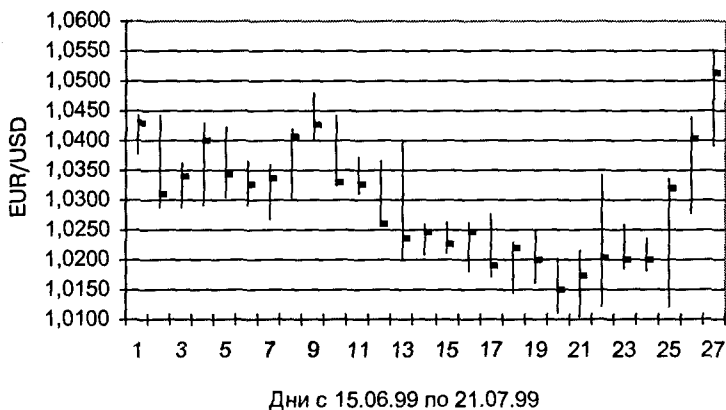


Рис. 3.3. Гистограмма движения цен по ЕВРО (прямая котировка)

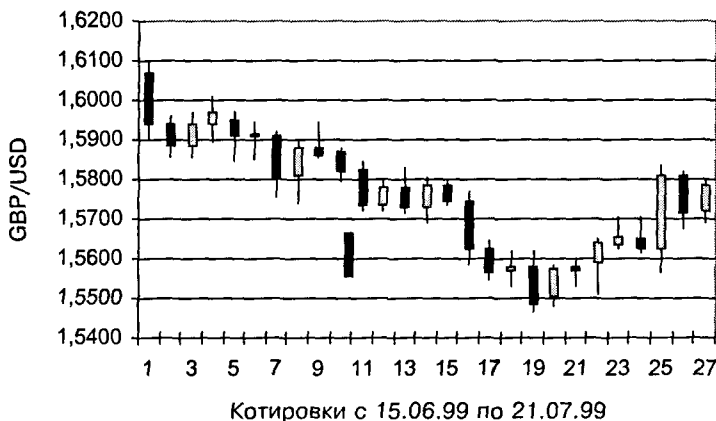


Рис. 3.4. Японские свечи, прямая котировка английского фунта стерлингов

крашено. И наоборот, если цена закрытия была ниже цены открытия, то ей соответствует нижняя сторона прямоугольника, а тело прямоугольника закрашено.

Таким образом, возникает зрительное восприятие: если цены выросли — белый прямоугольник, упали — черный. Прямоугольник называют «телом» свечи, а оставшиеся палочки над прямоугольником и под ним — «теньями». Они, как и в случае с гистограммой, отражают максимальную и минимальную цены в течение интервала.

**3.3.2. Интерпретация графической информации в терминах технического анализа. Направление движения цен.** Ценовой тренд — это направление, тенденция движения цен. Прогнозирование направления движения цен и момента их разворота является основной задачей, успешное решение которой гарантирует прибыльную торговлю. Решению этой задачи способствует нахождение на ценовом графике уровней и линий поддержки и сопротивления, а также различных фигур, указывающих на возможный разворот или продолжение тренда.

**Уровни, линии поддержки и сопротивления.** Уровни и линии поддержки как бы «поддерживают» цены и не дают им «провалиться вниз». Аналогично уровни и линии сопротивления «не дают ценам расти». От этих линий цены как бы отталкиваются, наподобие того, как катится мяч вдоль длинного коридора, отскакивая поочередно то от одной, то от другой стены. Уровни поддержки (сопротивления) в отличие от линий поддержки (сопротивления) расположены всегда горизонтально.

Тренд (trend) может быть восходящим, «бычьим» (bullish), нисходящим, «медвежьим» (bearish) и «боковым» (sideways), как это показано на рис. 3.5 и 3.6. Вдоль тренда всегда можно провести две линии, ограничивающие колебания цен в рамках тренда сверху и снизу. В случае ярко выраженного восходящего или нисходящего тренда эти линии, как правило, располагаются почти параллельно (см. рис. 3.5). Линия, расположенная справа, носит название **линии тренда** (trend line), а расположенная слева — **линии канала** (channal line). В случае восходящего тренда

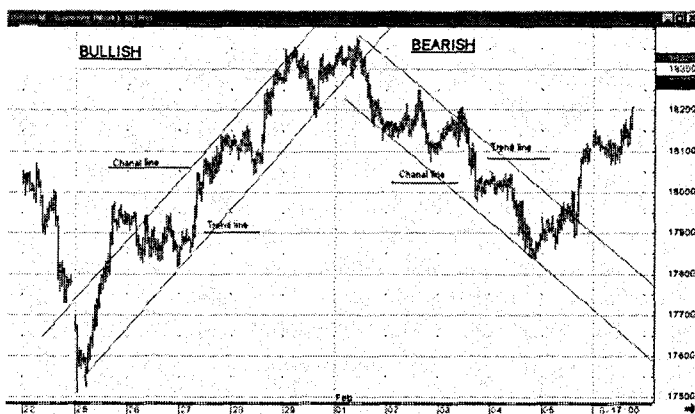


Рис. 3.5. Восходящий (BULLISH) и нисходящий (BEARISH) тренды

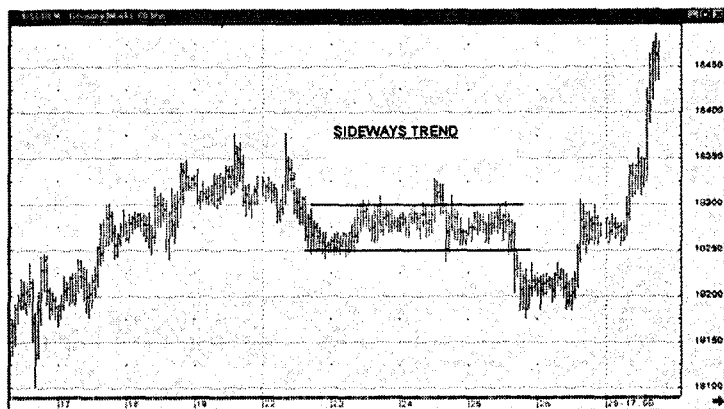


Рис. 3.6. Боковой тренд (SIDEWAYS TREND)

линия тренда играет роль линии поддержки, а линия канала — роль линии сопротивления. При нисходящем тренде, наоборот, линия тренда является линией сопротивления, а линия канала — линией поддержки.

В случае бокового тренда линии могут быть как параллельными, так и расположенными под углом друг к другу. На рис 3.6 представлен боковой тренд, ограниченный параллельными горизонтальными линиями.

Нижняя линия является уровнем сопротивления, а верхняя — уровнем поддержки.

Уровни и линии поддержки и сопротивления становятся тем сильнее, чем большее количество раз от них отскакивали цены.

Кроме того, существуют важные «психологические» уровни поддержки и сопротивления, соответствующие «круглым» числам, т.е. ценам, кратным 10. Так, в период с 1966 по 1982 г. крупные подъемы заканчивались на бирже всякий раз, когда индекс Доу-Джонса промышленных компаний доходил до 950 или 1050.

Приближение цен к уровням (линиям) поддержки (сопротивления) предупреждает трейдера о возможном развороте движения цен.

Допустим, при восходящем тренде трейдер имеет открытую позицию (он ранее купил актив). При приближении цен к уровню сопротивления трейдер в случае отскока цен от этого уровня закрывает позицию (продает актив и «фиксирует» прибыль). Если же сила рынка будет велика и цены преодолевают уровень сопротивления, трейдер сохраняет открытую позицию и продолжает наращивать прибыль. Графически в этом случае цены «пробива-

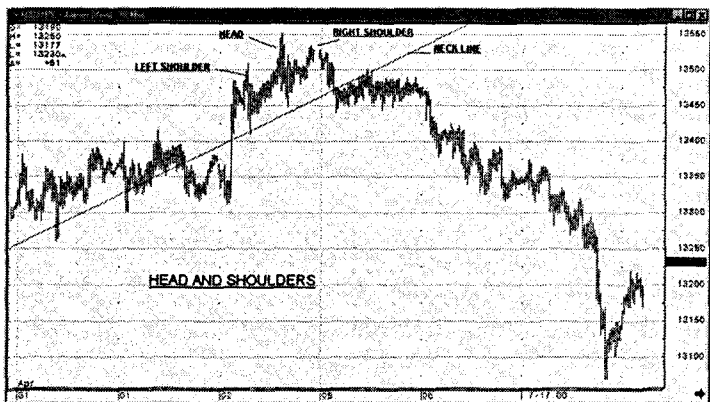


Рис. 3.10. «Голова и плечи» (HEAD AND SHOULDERS)

ных валют по отношению к доллару США. (Ниже при изложении темы будут использованы данные, по которым строились эти графики.) Ввиду того, что движение цен подвержено флуктуациям, для получения более наглядной информации о наличии тренда производят сглаживание данных. После сглаживания тренд прослеживается более явственно. Поэтому простая скользящая средняя МА является как бы индикатором тренда. Наиболее простым методом сглаживания является метод простой скользящей средней.

Введем в рассмотрение понятие «интервал сглаживания» ( $n$ ), под которым будем понимать интервал в  $n$  дней (или часов, минут и т.д. в зависимости от того, работаем ли мы с дневными, часовыми, минутными и тому подобными графиками)\*. Напомним, что ежедневные данные содержат информацию о максимальной (high) и минимальной (low) цене, цене открытия (open) и цене закрытия (close).

Для расчета МА и других функций мы будем использовать цены закрытия, так как они обладают большей информативностью.

Эта величина рассчитывается как средняя арифметическая цена за  $n$  предыдущих дней, включая текущий:

$$MA_t = \frac{C_{t-n+1} + C_{t-n+2} + \dots + C_{t-1} + C_t}{n}, \quad (3.1)$$

где  $C_i$  — цена закрытия  $i$ -го дня ( $i = (t - n + 1), \dots, t$ ).

\* Заметим, что эту величину  $n$ , по которой производится расчет МА, разные авторы называют по-разному: «порядком», «окном», «количеством рассматриваемых периодов», «периодом», «промежутком времени», «интервалом сглаживания». Мы остановились на последнем названии.

Символ «С» в формуле (3.1) применяется для обозначения цены закрытия (от английского слова «close»). При необходимости конкретизации периода сглаживания скользящую среднюю обозначают  $MA(\text{close}, n)$  или  $MA(c, n)$ , что означает: «Скользящая средняя построена по ценам закрытия с периодом сглаживания, равным  $n$ » (рис. 3.11).

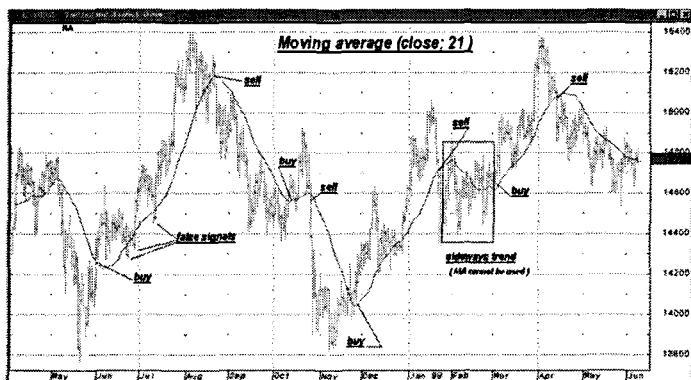


Рис. 3.11. Скользящая средняя MA. Пересечение MA с графиком дает сигнал к покупке (buy) или продаже (sell)

MA дает сглаженную кривую, на которой более отчетливо, чем на графике цен, прослеживается тенденция к росту или падению цен. MA удобно рассматривать как линию тренда. Если MA находится под графиком цен, тренд является «бычьим», если над графиком — «медвежьим».

Если MA пересекает ценовой график и идет над графиком (под графиком) цен — это сигнал к продаже (покупке). На рис. 3.11 продемонстрированы пересечения MA с графиком цен, которые дают сигналы к покупке (buy) или продаже (sell).

Недостатком MA является то, что все данные за интервал сглаживания входят в нее с одинаковым весом. Текущее значение цены учитывается так же, как цена  $(n - 1)$  дней назад, когда на рынке была совсем другая ситуация.

Этот недостаток несколько уменьшается при использовании *взвешенной скользящей средней (WMA)*. Один из возможных методов расчета дает формула для расчета значений WMA текущего дня  $t$ :

$$WMA_t = \frac{1C_{t-n+1} + 2C_{t-n+2} + \dots + (n-1)C_{t-1} + nC_t}{1 + 2 + \dots + n} \quad (3.2)$$



**3.4.2. Экспоненциальная скользящая средняя (ЕМА).** Последним значениям цены также придается большее значение, однако при расчете учитываются все цены предшествующего периода, а не только того отрезка, который соответствует заданному периоду сглаживания:

$$EMA_t = C_t K + EMA_{t-1}(1 - K), \quad (3.3)$$

где  $K = \frac{2}{n+1}$ .

Здесь и в дальнейшем для пояснения расчетов будем использовать данные по котировкам английского фунта стерлингов, приведенные в табл. 3.1. Расчеты МА и ЕМА приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Расчет 10-дневной ЕМА и ее сравнение с МА

| Дни | Цена закрытия | Простая скользящая средняя | Экспоненциальная скользящая средняя | (Графа 2 минус графа 3) × 10 <sup>-4</sup> | (Графа 2 минус графа 4) × 10 <sup>-4</sup> | Дни | Цена закрытия | Простая скользящая средняя | Экспоненциальная скользящая средняя | (Графа 2 минус графа 3) × 10 <sup>-4</sup> | (Графа 2 минус графа 4) × 10 <sup>-4</sup> |
|-----|---------------|----------------------------|-------------------------------------|--|--|-----|---------------|----------------------------|-------------------------------------|--|--|
| 1   | 2             | 3                          | 4                                   | 5  | 6  | 1   | 2             | 3                          | 4                                   | 5  | 6  |
| 1   | 1,5941        |                            |                                     |  |  | 15  | 1,5747        | 1,5806                     | 1,5808                              | -59  | -61  |
| 2   | 1,5887        |                            |                                     |  |  | 16  | 1,5623        | 1,5777                     | 1,5768                              | -154                                       | -145                                       |
| 3   | 1,5940        |                            |                                     |  |  | 17  | 1,5565        | 1,5753                     | 1,5731                              | -188                                       | -166                                       |
| 4   | 1,5969        |                            |                                     |  |  | 18  | 1,5581        | 1,5723                     | 1,5704                              | -142                                       | -123                                       |
| 5   | 1,5910        |                            |                                     |  |  | 19  | 1,5487        | 1,5686                     | 1,5665                              | -199                                       | -178                                       |
| 6   | 1,5909        |                            |                                     |  |  | 20  | 1,5575        | 1,5661                     | 1,5649                              | -86  | -74  |
| 7   | 1,5806        |                            |                                     |  |  | 21  | 1,5575        | 1,5645                     | 1,5636                              | -70  | -61  |
| 8   | 1,5880        |                            |                                     |  |  | 22  | 1,5641        | 1,5631                     | 1,5637                              | 10   | 4  |
| 9   | 1,5862        |                            |                                     |  |  | 23  | 1,5653        | 1,5623                     | 1,5640                              | 30   | 13   |
| 10  | 1,5822        | 1,5893                     | 1,5893                              | -71  | -71  | 24  | 1,5623        | 1,5607                     | 1,5637                              | 16   | -14  |
| 11  | 1,5733        | 1,5872                     | 1,5864                              | -139                                       | -131                                       | 25  | 1,5808        | 1,5613                     | 1,5668                              | 195  | 140  |
| 12  | 1,5779        | 1,5861                     | 1,5849                              | -82  | -70  | 26  | 1,5717        | 1,5623                     | 1,5677                              | 94   | 40   |
| 13  | 1,5731        | 1,5840                     | 1,5828                              | -109                                       | -97  | 27  | 1,5787        | 1,5645                     | 1,5697                              | 142  | 90   |
| 14  | 1,5787        | 1,5822                     | 1,5821                              | -35  | -34  |     |               |                            |                                     |  |  |

Вначале заполняем графу 2 имеющимися данными по цене закрытия GBP/USA. Расчеты МА очевидны и в пояснениях не нуждаются. Данные расчетов приведены в графе 3. Результаты расчета 10-дневной ЕМА приведены в графе 4. Приведем алгоритм расчета.

1. Выбрать интервал сглаживания  $n$  (в нашем случае  $n = 10$ ).
2. Вычислить коэффициент  $K$  ( $K = 2/(n+1) = 2/11 = 0,18$ ).
3. Вычислить МА для первых 10 дней. Для этого сложить цены закрытия за первые 10 дней. Сумму разделить на 10 и записать в графы 3 и 4 за 10-й день.

4. Перейти на одну строку вниз по графе 4. Умножить на  $K$  данные по конечной цене GBP/USA, которую берем из графы 2 текущей строки. (Для 11-го дня это будет  $1,5733 \cdot 0,18 = 0,2832$ .)

5. Данные по ЕМА за предыдущий день взять из предыдущей строки графы 4 и умножить на  $(1 - K)$ . (Для 11-го дня это будет  $1,5893 \cdot 0,82 = 1,3032$ .)

6. Сложить результаты, полученные на предыдущих двух шагах (для 11-го дня это будет  $0,2832 + 1,3032 = 1,5864$ ). Полученное значение ЕМА записать в графу 4 текущей строки.

7. Повторить шаги 4, 5 и 6 до конца таблицы.

Расхождения между ценой закрытия и значениями МА и ЕМА, выраженные в пунктах, приведены в графах 5 и 6. Сопоставление данных этих граф показывает, что ЕМА меньше отличается от фактических данных по ценам закрытия. Однако на практике (особенно при ручной обработке данных) чаще используют простые МА, так как зрительно различия их от ЕМА на графике не столь существенны (рис. 3.12).

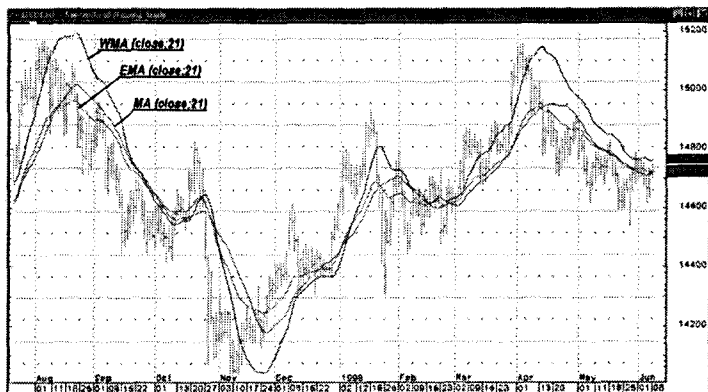


Рис. 3.12. Сравнение скользящих средних МА, WMA и ЕМА

При использовании комбинации нескольких МА с различными интервалами сглаживания МА с большим интервалом служит для выявления тенденции, МА с более коротким интервалом — для выявления момента совершения сделки. Сигнал возникает и в том случае, когда МА с коротким периодом пересекает МА с более длинным периодом. При использовании трех МА с различными периодами наиболее сильный сигнал возникает после пересечения всех трех МА, т.е. когда все три МА поменялись местами по отношению к графику (рис. 3.13). Основной недостаток этого метода

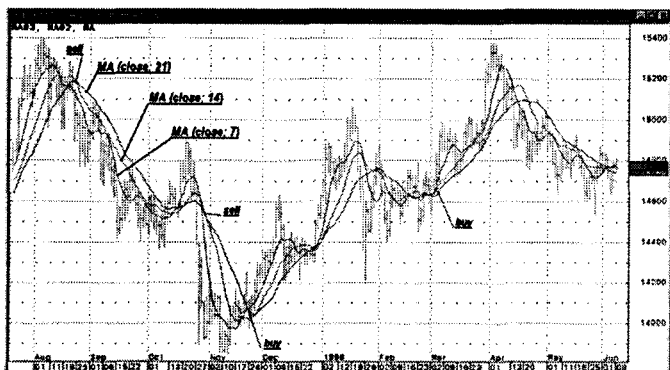


Рис. 3.13. Пересечения МА с разными интервалами сглаживания дают сигналы покупки и продажи

хорошо прослеживается на рис. 3.13. Покупать (продавать) надо в момент, когда цены проходят через минимум (максимум), а сигналы от МА о покупке (продаже) приходят уже после того, как минимум (максимум) на графике цен пройден. Таким образом, МА дает запаздывающие сигналы о моменте купли и продажи. В результате возникают ложные сигналы, что может привести к убыткам.

**3.4.3. Схождение–расхождение скользящих средних (moving average convergence-divergence, MACD).** Индикатор MACD представлен практически во всех компьютерных программах технического анализа (рис. 3.14). Он также основан на пересечении скользящих средних.

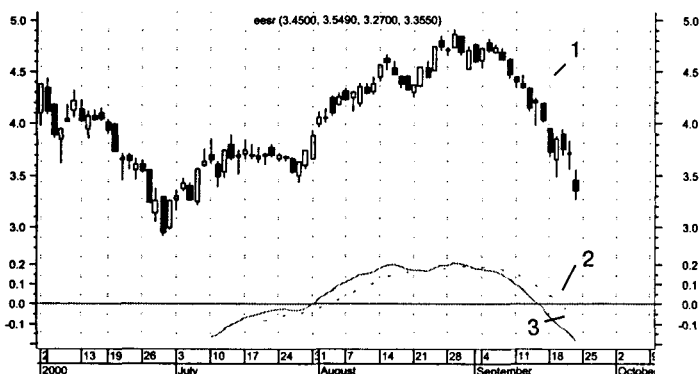


Рис. 3.14. Расхождение скользящих средних (MACD):

- 1 — ценовой график ПАО ЭЭС в виде японских свеч;
- 2 — разность между экспоненциальными скользящими средними с периодами сглаживания 26 и 12 дней;
- 3 — сигнальная линия

Индикатор MACD строится как разность между двумя экспоненциальными средними с периодами 12 и 26 дней (см. кривую 2). Совместно с MACD наносится его экспоненциальная скользящая средняя с периодом сглаживания 9 дней — так называемая сигнальная линия (см. кривую 3). Когда MACD опускается ниже сигнальной линии, надо продавать, а когда поднимается выше сигнальной линии — покупать.

Индикаторы, основанные на скользящих средних, хорошо работают только в условиях явно выраженного тренда. При боковом тренде количество ложных сигналов слишком велико, что неизбежно приводит к потерям.

### 3.5. Осцилляторы

Хорошим индикатором прогнозирования движения цен наряду со скользящими средними являются осцилляторы. Они наиболее эффективны при боковом тренде. Подаваемые ими сигналы к покупке и продаже (по сравнению со скользящими средними) меньше отстают от изменений цен, а иногда опережают их. Кроме того, в период развитого тренда осцилляторы способны предсказать его разворот.

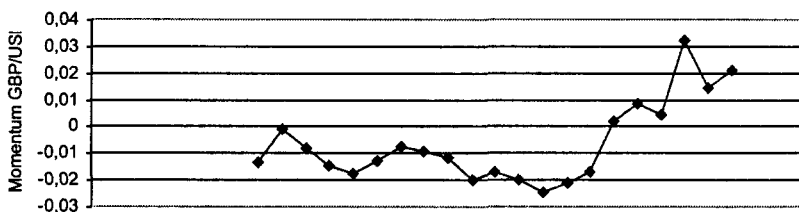
Для пояснения работы осцилляторов можно привести следующую аналогию. Если мячик опустить в воду, а затем отпустить, он выскочит из воды и в конце концов окажется на уровне поверхности воды. Если его подбросить над водой, он по инерции опустится на какую-то глубину, а затем вынырнет и вернется на поверхность воды. В обоих случаях мяч возвращается к равновесному уровню. Также и цены, будучи подброшены вверх «быками» (зона перекупленности «*overbought*») либо придавлены вниз «медведями» (зона перепроданности «*oversold*»), как и в случае с мячом, возвращаются обычно к равновесному уровню. Осцилляторы показывают отклонение от равновесного уровня. Нахождение осциллятора вблизи крайних значений (в зоне перекупленности или перепроданности) свидетельствует о том, что потенциал рынка для движения вверх или вниз уже исчерпывается.

**3.5.1. Момент (momentum — МОМ).** Момент рассчитывается как разница конечной цены текущего дня и цены  $n$  дней тому назад:

$$МОМ_t = C_t - C_{t-n} . \quad (3.4)$$

Это аналогично сравнению цены потребительской корзины сегодня с той, которая была, например, месяц назад. Положительные зна-

чения МОМ свидетельствуют об относительном росте цен, отрицательные — о снижении. Движение графика момента вверх из зоны отрицательных значений (рис. 3.15) является слабым сигналом до пересечения с нулевой линией, дальнейшее же движение вверх считается достаточно мощным сигналом к покупке (в случае нисходящего тренда ситуация развивается симметрично). Пример расчета МОМ показан в табл. 3.3. На рис. 3.15 показан результат расчета. График момента пересекает нулевую линию в районе 22–23-го дня. Разворот тренда произошел в районе 19–20-го дня.



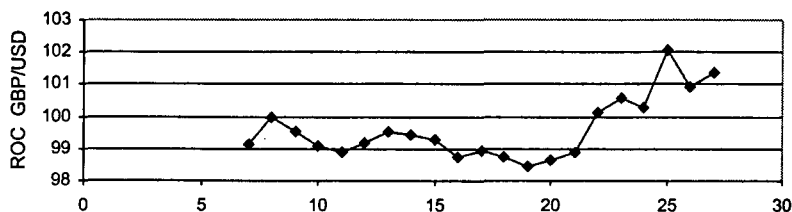
Рабочие дни 15.06.99–21.07.99

Рис. 3.15. Momentum. Результат расчета

**3.5.2. Скорость изменения цен (Rate of Change — ROC).** Это похожий на МОМ индикатор, который рассчитывается как отношение конечной цены текущего дня к цене  $n$  дней тому назад, выраженное в процентах:

$$ROC_t = \frac{C_t}{C_{t-n}} 100\%. \quad (3.5)$$

Таким образом, ROC является отражением скорости изменения цены, а также указывает направление этого изменения. Графическое отображение и правила работы ничем не отличаются от Momentum. В качестве нулевой линии используется уровень 100% (рис. 3.16). Этот индикатор также показал несколько запоздавший сигнал к продаже в районе 22–23-го дня.



Рабочие дни 15.06.99–21.07.99

Рис. 3.16. Индекс скорости изменений цен ROC

**3.5.3. Индекс относительной силы (Relative Strength Index — RSI).** Является наиболее значимым осциллятором, расчет которого предусмотрен во всех компьютерных программах технического анализа. Значения RSI изменяются от 0 до 100. Этот индикатор может подавать сигналы либо одновременно с разворотом цен, либо с опережением, что является его важным достоинством.

Для его расчета применяют формулу

$$RSI = 100 - \frac{100}{1 + AU/AD}, \quad (3.6)$$

где  $AU$  — сумма приростов конечных цен за  $n$  дней;  $AD$  — сумма убыли конечных цен за  $n$  дней.

Рассчитывается RSI следующим образом (табл. 3.3).

1. Выбирают интервал  $n$  (около 5–7 дней для дневных графиков, в нашем примере  $n = 7$ ).

Таблица 3.3

Расчет MOM, ROC и RSI

| Дни | Цены закрытия | MOM     | ROC      | Повышенные цены | Пониженные цены | Сумма повышений | Сумма понижений | RSI |
|-----|---------------|---------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| 1   | 2             | 3       | 4        | 5               | 6               | 7               | 8               | 9   |
| 1   | 1,5941        |         |          |                 |                 |                 |                 |     |
| 2   | 1,5887        |         |          |                 | 0,0054          |                 |                 |     |
| 3   | 1,5940        |         |          | 0,0053          |                 |                 |                 |     |
| 4   | 1,5969        |         |          | 0,0029          |                 |                 |                 |     |
| 5   | 1,5910        |         |          |                 | 0,0059          |                 |                 |     |
| 6   | 1,5909        |         |          |                 | 0,0001          |                 |                 |     |
| 7   | 1,5806        | -0,0135 | 99,1531  |                 | 0,0103          |                 |                 |     |
| 8   | 1,5880        | -0,0007 | 99,9559  | 0,0074          |                 | 0,0156          | 0,0217          | 42  |
| 9   | 1,5862        | -0,0078 | 99,5107  |                 | 0,0018          | 0,0156          | 0,0181          | 46  |
| 10  | 1,5822        | -0,0147 | 99,0795  |                 | 0,0040          | 0,0103          | 0,0221          | 32  |
| 11  | 1,5733        | -0,0177 | 98,8875  |                 | 0,0089          | 0,0074          | 0,0310          | 19  |
| 12  | 1,5779        | -0,0130 | 99,1829  | 0,0046          |                 | 0,0120          | 0,0251          | 32  |
| 13  | 1,5731        | -0,0075 | 99,5255  |                 | 0,0048          | 0,0120          | 0,0298          | 29  |
| 14  | 1,5787        | -0,0093 | 99,4144  | 0,0056          |                 | 0,0176          | 0,0195          | 47  |
| 15  | 1,5747        | -0,0115 | 99,2750  |                 | 0,0040          | 0,0102          | 0,0235          | 30  |
| 16  | 1,5623        | -0,0199 | 98,7423  |                 | 0,0124          | 0,0102          | 0,0341          | 23  |
| 17  | 1,5565        | -0,0168 | 98,9322  |                 | 0,0058          | 0,0102          | 0,0359          | 22  |
| 18  | 1,5581        | -0,0198 | 98,7452  | 0,0016          |                 | 0,0118          | 0,0270          | 30  |
| 19  | 1,5487        | -0,0244 | 98,4489  |                 | 0,0094          | 0,0072          | 0,0364          | 17  |
| 20  | 1,5575        | -0,0212 | 98,6571  | 0,0088          |                 | 0,0160          | 0,0316          | 34  |
| 21  | 1,5575        | -0,0172 | 98,9077  |                 |                 | 0,0104          | 0,0316          | 25  |
| 22  | 1,5641        | 0,0018  | 100,1152 | 0,0066          |                 | 0,0170          | 0,0276          | 38  |
| 23  | 1,5653        | 0,0088  | 100,5654 | 0,0012          |                 | 0,0182          | 0,0152          | 54  |
| 24  | 1,5623        | 0,0042  | 100,2696 |                 | 0,0030          | 0,0182          | 0,0124          | 59  |
| 25  | 1,5808        | 0,0321  | 102,0727 | 0,0185          |                 | 0,0351          | 0,0124          | 74  |
| 26  | 1,5717        | 0,0142  | 100,9117 |                 | 0,0091          | 0,0351          | 0,0121          | 74  |
| 27  | 1,5787        | 0,0212  | 101,3612 | 0,0070          |                 | 0,0333          | 0,0121          | 73  |

2. Начиная со 2-го дня до конца таблицы, выполняют следующую процедуру. Вычитают из конечной цены текущего дня конечную цену предыдущего дня. Если разность больше нуля, то ее записывают в графу 5. Иначе абсолютное значение разности записывают в графу 6.

3. С 8-го дня и до конца таблицы заполняют графы 7 и 8. Для этого складывают значения из графы 5 за последние  $n$  дней (включая текущий) и полученную сумму записывают в графу 7 (величина  $AU$  в (3.6)). Аналогично находят сумму убыли конечных цен по данным графы 6 и записывают в графу 8 (величина  $AD$  в (3.6)).

4. Зная  $AU$  и  $AD$ , по (3.6) рассчитывают значение  $RSI$  и записывают в графу 9.

Зоны перепроданности располагаются обычно ниже 25–20, а перекупленности — выше 75–80. Сигналом служит разворот  $RSI$  в указанных зонах и выход из нее (рис. 3.17). Как видно из рисунка, индекс относительной силы вышел из зоны, ограниченной линией 20%, на 19-й день. В этот день произошел разворот тренда цены английского фунта стерлингов. Таким образом, сигнал индекса относительной силы оказался своевременным.

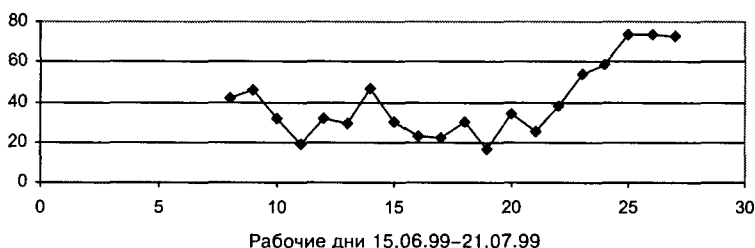


Рис. 3.17. Индекс относительной силы  $RSI$

**3.5.4. Стохастические линии (Stochastics).** Если Momentum, ROC и  $RSI$  используют только цены закрытия, то стохастические линии строятся с использованием более полной информации. При их расчете используются также максимальные и минимальные цены.

Чаще всего используются следующие кривые:  $\%K$ ,  $\%D$ , медленная  $\%D$  и  $\%R$ :

$$\%K_t = 100 (C_t - L_5) / (H_5 - L_5), \quad (3.7)$$

где  $\%K_t$  — значение индекса текущего дня  $t$ ,  $C_t$  — цена закрытия текущего дня  $t$ ;  $L_5$  и  $H_5$  — соответственно минимальная и максимальная цены за 5 предшествующих дней, включая текущий.

Похожая формула используется для расчета  $\%R$ :

$$\%R_t = 100 (H_n - C_t) / (H_n - L_n), \quad (3.8)$$

где  $\%R_t$  — значение индекса текущего дня  $t$ ;  $C_t$  — цена закрытия текущего дня  $t$ ;  $L_n$  и  $H_n$  — соответственно минимальная и максимальная цены за  $n$  предшествующих дней, включая текущий.

Значение  $n$  выбирают в зависимости от динамики рынка, это может быть 5 или 7 дней. В случае  $n=5$  в формуле (3.8) будут стоять максимальные и минимальные цены за 5 дней ( $H_5$  и  $C_5$ ), так же, как в формуле (3.7).

Смысл индексов  $\%K$  и  $\%R$  состоит в том, что при росте цен цена закрытия бывает ближе к максимальной, а при падении цен наоборот — ближе к минимальной. Индексы  $\%R$  и  $\%K$  проверяют, куда больше тяготеет цена закрытия. При расчете  $\%K$  разность между ценой закрытия текущего дня и минимальной ценой за 5 дней сравнивают с размахом цен за эти же 5 дней. В случае расчета  $\%R$  с размахом цен сравнивают разность между максимальной ценой за 5 дней и ценой закрытия.

Индекс  $\%D$  рассчитывается аналогично индексу  $\%K$ , с той лишь разницей, что при его построении величины  $(C_t - L_5)$  и  $(H_5 - C_5)$  сглаживают, оперируя их трехдневной суммой:

$$\%D_t = \frac{\sum_{i=t-2}^t (C_i - L_5)}{\sum_{i=t-2}^t (H_5 - C_5)} \cdot 100. \quad (3.9)$$

Смысл входящих в формулу (3.9) величин был пояснен ранее. Ввиду того что  $\%D$  имеет большой статистический разброс, строят еще ее трехдневную скользящую среднюю — медленное  $\%D$ .

Пример расчета этих индексов приведен в табл. 3.4.

1. В графах 1–4 приведены дни по порядку и соответствующие им цены (максимальная, минимальная и конечная).

2. Начиная с 5-го дня в графах 5 и 6 записывают максимальную и минимальную цены за предшествующие 5 дней, включая текущий.

3. В графе 7 записывают  $(C_t - L_5)$  — разность между данными графы 4 и графы 6.

4. Графу 8 составляют значения разности между данными графы 5 и графы 4, т.е. результат разности  $(H_5 - C_t)$ .

5. Размах цен за 5 дней  $(H_5 - L_5)$  — разность между данными графы 5 и графы 6 записывают в графе 9.



Таблица 3.4

## Пример и порядок расчета индексов стохастических линий

| Дни $t$ | Макси-<br>мальная<br>цена за<br>день $H_t$ | Мини-<br>мальная<br>цена за<br>день $L_t$ | Цена<br>закрытия<br>$C_t$ | Макси-<br>мальная<br>цена за<br>5 дней<br>$H_5$ | Мини-<br>мальная<br>цена за<br>5 дней<br>$L_5$ | Графа 4-<br>-графа 6<br>$C_t - L_5$ | Графа 5-<br>-графа 4<br>$H_5 - C_t$ | Графа 5-<br>-графа 6<br>$H_5 - L_5$ | (Графа 7)/<br>(Графа 9) ×<br>100%<br>%K | (Графа 8)/<br>(Графа 9) ×<br>100%<br>%R | Сумма<br>за 3 дня<br>графа 7 | Сумма<br>за 3 дня<br>графа 8 | (Графа 12)/<br>(Графа 13) ×<br>100%<br>%D | Медлен-<br>ное %D |
|---------|--|---|---------------------------|---|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|---|------------------------------|------------------------------|---|-------------------|
| 1       | 1,6099                                     | 1,5900                                    | 1,5941                    | 1,6099  | 1,5846   | 0,0064                              | 0,0189                              | 0,0253                              | 25,3                                    | 74,7                                    | 0,0179                       | 0,0673                       | 26,6                                      |                   |
| 2       | 1,5887                                     | 1,5855                                    | 1,5887                    | 1,6010  | 1,5846   | 0,0063                              | 0,0101                              | 0,0164                              | 38,4                                    | 61,6                                    | 0,0179                       | 0,0673                       | 26,6                                      |                   |
| 3       | 1,5968                                     | 1,5853                                    | 1,5940                    | 1,6010  | 1,5754   | 0,0052                              | 0,0204                              | 0,0256                              | 20,3                                    | 79,7                                    | 0,0257                       | 0,0692                       | 37,1                                      |                   |
| 4       | 1,6010                                     | 1,5896                                    | 1,5969                    | 1,6010  | 1,5738   | 0,0142                              | 0,0130                              | 0,0272                              | 52,2                                    | 47,8                                    | 0,0318                       | 0,0758                       | 42,0                                      |                   |
| 5       | 1,5968                                     | 1,5846                                    | 1,5910                    | 1,5968  | 1,5738   | 0,0124                              | 0,0106                              | 0,0230                              | 53,9                                    | 46,1                                    | 0,0350                       | 0,0709                       | 49,4                                      |                   |
| 6       | 1,5945                                     | 1,5822                                    | 1,5822                    | 1,5945  | 1,5738   | 0,0084                              | 0,0123                              | 0,0207                              | 40,6                                    | 59,4                                    | 0,0221                       | 0,0660                       | 33,5                                      |                   |
| 7       | 1,5922                                     | 1,5754                                    | 1,5806                    | 1,5943  | 1,5720   | 0,0059                              | 0,0164                              | 0,0223                              | 26,5                                    | 73,5                                    | 0,0156                       | 0,0653                       | 23,9                                      |                   |
| 8       | 1,5900                                     | 1,5738                                    | 1,5880                    | 1,5943  | 1,5720   | 0,0059                              | 0,0164                              | 0,0223                              | 26,5                                    | 73,5                                    | 0,0156                       | 0,0653                       | 23,9                                      |                   |
| 9       | 1,5943                                     | 1,5794                                    | 1,5822                    | 1,5943  | 1,5720   | 0,0059                              | 0,0164                              | 0,0223                              | 26,5                                    | 73,5                                    | 0,0156                       | 0,0653                       | 23,9                                      |                   |
| 10      | 1,5880                                     | 1,5720                                    | 1,5733                    | 1,5943  | 1,5717   | 0,0014                              | 0,0210                              | 0,0226                              | 6,2                                     | 93,8                                    | 0,0086                       | 0,0672                       | 12,8                                      |                   |
| 11      | 1,5844                                     | 1,5720                                    | 1,5779                    | 1,5943  | 1,5717   | 0,0014                              | 0,0210                              | 0,0226                              | 6,2                                     | 93,8                                    | 0,0086                       | 0,0672                       | 12,8                                      |                   |
| 12      | 1,5798                                     | 1,5720                                    | 1,5779                    | 1,5943  | 1,5717   | 0,0014                              | 0,0210                              | 0,0226                              | 6,2                                     | 93,8                                    | 0,0086                       | 0,0672                       | 12,8                                      |                   |
| 13      | 1,5829                                     | 1,5717                                    | 1,5731                    | 1,5943  | 1,5717   | 0,0014                              | 0,0210                              | 0,0226                              | 6,2                                     | 93,8                                    | 0,0086                       | 0,0672                       | 12,8                                      |                   |
| 14      | 1,5803                                     | 1,5691                                    | 1,5787                    | 1,5880  | 1,5691   | 0,0096                              | 0,0093                              | 0,0189                              | 50,8                                    | 49,2                                    | 0,0169                       | 0,0638                       | 26,5                                      |                   |
| 15      | 1,5794                                     | 1,5734                                    | 1,5747                    | 1,5844  | 1,5691   | 0,0056                              | 0,0097                              | 0,0153                              | 36,6                                    | 63,4                                    | 0,0166                       | 0,0568                       | 29,2                                      |                   |
| 16      | 1,5768                                     | 1,5585                                    | 1,5623                    | 1,5829  | 1,5585   | 0,0038                              | 0,0206                              | 0,0244                              | 15,6                                    | 84,4                                    | 0,0190                       | 0,0586                       | 32,4                                      |                   |
| 17      | 1,5646                                     | 1,5544                                    | 1,5565                    | 1,5829  | 1,5544   | 0,0021                              | 0,0264                              | 0,0285                              | 7,4                                     | 92,6                                    | 0,0115                       | 0,0682                       | 16,9                                      |                   |
| 18      | 1,5618                                     | 1,5528                                    | 1,5581                    | 1,5803  | 1,5528   | 0,0053                              | 0,0222                              | 0,0275                              | 19,3                                    | 80,7                                    | 0,0112                       | 0,0804                       | 13,9                                      |                   |
| 19      | 1,5620                                     | 1,5465                                    | 1,5487                    | 1,5794  | 1,5465   | 0,0022                              | 0,0307                              | 0,0329                              | 6,7                                     | 93,3                                    | 0,0096                       | 0,0889                       | 10,8                                      |                   |
| 20      | 1,5586                                     | 1,5480                                    | 1,5575                    | 1,5768  | 1,5465   | 0,0110                              | 0,0193                              | 0,0303                              | 36,3                                    | 63,7                                    | 0,0185                       | 0,0907                       | 20,4                                      |                   |
| 21      | 1,5598                                     | 1,5531                                    | 1,5575                    | 1,5646  | 1,5465   | 0,0110                              | 0,0071                              | 0,0181                              | 60,8                                    | 39,2                                    | 0,0242                       | 0,0813                       | 29,8                                      |                   |
| 22      | 1,5651                                     | 1,5510                                    | 1,5641                    | 1,5651  | 1,5465   | 0,0176                              | 0,0010                              | 0,0186                              | 94,6                                    | 5,4                                     | 0,0396                       | 0,0670                       | 59,1                                      |                   |
| 23      | 1,5707                                     | 1,5627                                    | 1,5653                    | 1,5707  | 1,5465   | 0,0188                              | 0,0054                              | 0,0242                              | 77,7                                    | 22,3                                    | 0,0474                       | 0,0609                       | 77,8                                      |                   |
| 24      | 1,5704                                     | 1,5615                                    | 1,5623                    | 1,5707  | 1,5480   | 0,0143                              | 0,0084                              | 0,0227                              | 63,0                                    | 37,0                                    | 0,0507                       | 0,0655                       | 77,4                                      |                   |
| 25      | 1,5834                                     | 1,5566                                    | 1,5808                    | 1,5834  | 1,5510   | 0,0298                              | 0,0026                              | 0,0324                              | 92,0                                    | 8,0                                     | 0,0629                       | 0,0793                       | 79,3                                      |                   |
| 26      | 1,5822                                     | 1,5673                                    | 1,5717                    | 1,5834  | 1,5510   | 0,0207                              | 0,0117                              | 0,0324                              | 63,9                                    | 36,1                                    | 0,0648                       | 0,0875                       | 74,1                                      |                   |
| 27      | 1,5802                                     | 1,5690                                    | 1,5787                    | 1,5834  | 1,5566   | 0,0221                              | 0,0047                              | 0,0268                              | 82,5                                    | 17,5                                    | 0,0726                       | 0,0916                       | 79,3                                      |                   |

6. Рассчитанные по формуле (3.7) значения  $\%K$  заносят в графу 10.

7. В графу 11 заносят значения  $\%R$ , рассчитанные по формуле (3.8).

8. Шаги 2–7 повторяют для 6-й, 7-й строки и т.д. до конца таблицы.

9. Для расчета  $\%D$ , начиная с 7-й строки, складывают значения  $C_t - L_5$  из графы 7 за 3 предыдущих дня, включая текущий ( $t = 5, 6$  и  $7$ ), и записывают в графе 12. Аналогично значения размаха ( $H_5 - L_5$ ) из графы 9 складывают за 3 предшествующих дня и заносят в графу 13.

10. По формуле (3.9), используя данные граф 12 и 13, рассчитывают  $\%D$  и записывают в графе 14.

11. Шаги 9 и 10 повторяют для 8-й, 9-й строк и т.д. до конца таблицы.

12. Медленное  $\%D$  находят как скользящую среднюю от  $\%D$  (данные берут из графы 14) с интервалом сглаживания, равным трем. Результат записывают в графе 15.

**Правила применения в процессе торговли сигналов**, подаваемых индикаторами MOM, ROC, RSI,  $\%K$ ,  $\%D$  и  $\%R$ , примерно одинаковы. В основном они сводятся к следующему.

1. Критические значения осцилляторов (ниже 20% — зона перепроданности или выше 80% — зона перекупленности) говорят о том, что текущее изменение цен происходит слишком быстро и можно ожидать скорого разворота тренда. Но осциллятор может достичь критической зоны значительно раньше окончания тренда и долго оставаться там по мере дальнейшего развития тренда. Сильный сигнал возникает в том случае, если в зонах перекупленности или перепроданности осциллятор совершает несколько колебаний и только затем покидает ее.

Зоны перекупленности и перепроданности необходимо устанавливать индивидуально в зависимости от типа рынка и временного интервала, по которому строится график. Иногда для фильтрации ложных сигналов зоны могут быть существенно приближены к предельным значениям осциллятора (0 и 100%).

2. Расхождение ценового графика и осцилляторов (дивергенция) — наиболее сильный сигнал к покупке или продаже.

Пример таких сигналов показан на рис. 3.18. Как видно из рисунка, ценовой график в районе конца октября имеет минимумы, причем второй минимум лежит ниже первого. Линия, проведенная через эти минимумы, направлена вниз. На графике RSI также за этот интервал видны два минимума, но

в этом случае второй минимум лежит выше первого. Линия, проведенная через эти минимумы, направлена вверх. Такое расхождение в поведении ценового графика и графика осциллятора называется дивергенцией (divergence). Подтверждением сигнала к покупке (buy) служит то обстоятельство, что RSI находился в зоне перекупленности и вышел из нее. Действительно, после сигнала к покупке цены пошли вверх и рост продолжался до января. Значит, этот сигнал был верным. В январе мы видим другой пример дивергенции. На графике цен имеются два максимума, причем второй выше первого. В это же время на графике RSI имеются два максимума, но второй ниже первого. Налицо дивергенция. Осциллятор находится в зоне перекупленности, следовательно, пора продавать.

На рис. 3.18 отмечены моменты подачи сигналов buy и sell. Рисунок наглядно демонстрирует понятие дивергенции и моменты подачи сигналов к покупке и продаже. **Использование дивергенции — один из самых надежных методов технического анализа.**

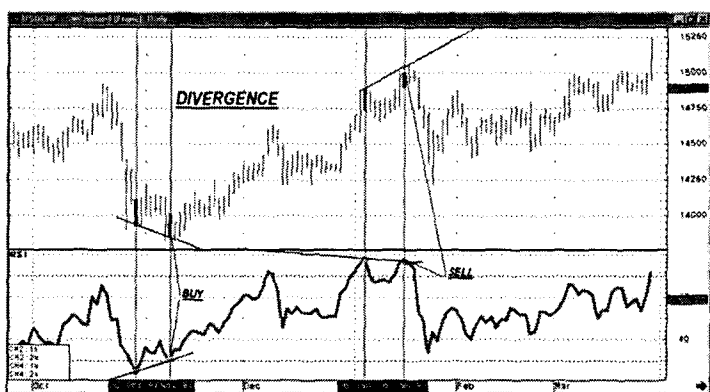


Рис. 3.18. Применение осцилляторов для принятия решений о покупке и продаже

3. Осцилляторы используются, как правило, на участках рынка с боковым трендом. При развитом тренде во внимание принимаются только сигналы по тренду (т.е. при восходящем общем тренде — только сигналы на покупку).

4. Пересечение с нулевой линией как сигнал является слабым и принимается во внимание только в том случае, если не противоречит основной тенденции движения цены.

### 3.6. Волны Эллиота

Теория волн была предложена Эллиотом в 1938 г. и с тех пор широко применяется в практике торговли на различных биржах. Основой теории является психология поведения толпы. По мнению Эллиота, она подчиняется циклическим законам: экспансия, энтузиазм, эйфория, успокоение, упадок и депрессия. Для математического описания этих циклов Эллиот использовал принцип чисел Фибоначчи, т.е. специальную числовую последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8 и т.д. Каждое следующее число является суммой двух предыдущих. В пределе отношение каждого числа к следующему стремится к 0,618. Если делить каждое число на член ряда через 1, в пределе получим 0,382. Если делить на член ряда через 2, получим 0,236. Эта последовательность 61,8; 38,2 и 23,6% с добавлением к ряду круглой цифры 50% широко используется в теории, которая предполагает, что рынок развивается волнами.

Проанализировав данные за 80-летний период, Эллиот показал, что существует 8 волн, 5 из которых принадлежат бычьему тренду (цифровая фаза на рис. 3.19), а 3 — медвежьему тренду (буквенная фаза на рис. 3.19).

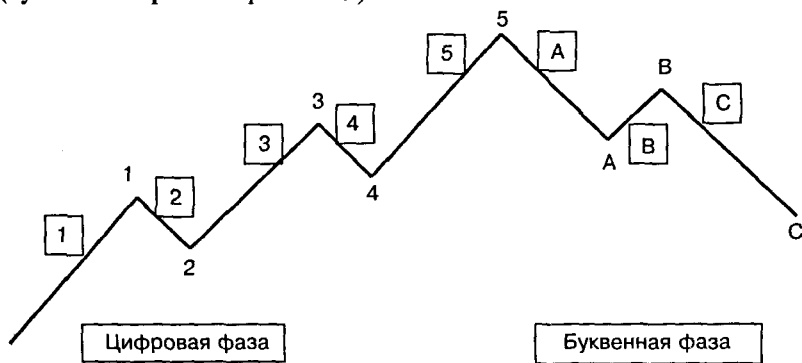


Рис. 3.19. Основная форма волн Эллиота

Здесь волны 1, 3 и 5 (взяты в квадраты) — волны основного бычьего движения. Волны 2 и 4 — корректирующие фазы волн 1 и 3 соответственно.

Волна 1 знаменует начало разворота тренда с нисходящего на восходящий.

Волна 2 — это откат, обычно на 62% от роста цен на волне 1. Ее возникновение объясняется тем, что многие участники торгов могут посчитать волну 1 случайностью. Значительное число трейдеров надеется, что нисходящий тренд продолжится.

Волна 3 обычно самая длинная. Участники рынка поверили, что тренд развернулся. Продолжительность такой волны, как правило, на 1,618 больше длительности обычной волны импульса (это число является отношением чисел Фибоначчи).

Волна 4 представляет собой обычно слабый откат. Чаше всего это 38% от роста цен на волне 3.

Волна 5 продолжает восходящий тренд, но уже чувствуется, что количество трейдеров, рассчитывающих на дальнейший рост, уменьшается.

Волны 1–5 в совокупности называют импульсивной волной. За ней следует корректирующая волна из трех волн *A*, *B*, *C*. Из них волна *B* является коррекцией волны *A*, а волны *A* и *C* — волны импульса.

Корректирующая волна *C* заканчивается обычно на уровне 4-й волны импульса.

Отношение размеров всех волн друг к другу может принимать значения 0,382; 0,50; 0,618; 1,618. Здесь можно рассчитывать отношения как высот, так и продолжительности волн.

Заметим, что теория Эллиота предполагает принцип вложенности волн: каждая волна импульса может состоять из пяти волн меньшего размера, а каждая волна корректировки — из трех волн.

Если трейдер незнаком с излагаемой теорией, он может неправильно истолковать волну *A* как временный откат на восходящем тренде. Продолжая покупать, он добивается небольшого увеличения цен (волна *B*). Но вскоре ресурсы иссякают и побеждают трейдеры, делающие ставку на понижение цен (волна *C*).

Предполагая развитие рынка по данному сценарию, трейдер может своевременно открывать и закрывать позиции, получая прибыль.

### **3.7. Основные принципы управления рисками в техническом анализе**

**3.7.1. Советы начинающим трейдерам.** Опыт показывает, что из начинающих трейдеров 90% теряют свой капитал и прекращают работу на рынке *Forex*. Поэтому важно прислушаться к рекомендациям профессиональных игроков [3, 17, 29].

Торговать только в направлении явно выраженного тренда.

Вступать в сделку только в случае, если такой сигнал подают 3 или более индикатора.

Моментально пресекать потери, закрывать позицию, если рынок повернулся против вас и потери от сделки достигли 2% вашего капитала.

(6) **Всегда иметь план и работать по нему, не совершать импульсивных действий.**

**Не нарушать правил управления капиталом, риск не должен превышать 2% капитала.**

**Работать на долгосрочном тренде. Открывать позиции долгосрочные, рассчитанные на много дней. Работать на часовых и минутных колебаниях цен можно только опытным трейдерам.**

**Тщательно записывать и анализировать результат каждой сделки.**

**Применять технический и фундаментальный анализ. Не освоив оба метода, начинающий рискует потерять свой капитал.**

**3.7.2. Система управления рисками** предполагает соблюдение следующих основных принципов.

**1. Возможное заключение пяти подряд неудачных сделок не должно выбивать вас «из седла» ни психологически, ни материально.**

**В материальном плане сохранить устойчивость в данной ситуации вам поможет правильный расчет сумм залога под открытые позиции.**

**Работа с малыми суммами** (такие суммы депозита, которые не превышают 20 000 дол.) предполагает, что не следует держать под залогом под открытые за один раз позиции более чем 50% своего капитала. Закрытие производите при малейшей опасности. Но в любом случае, с такими суммами лучше работать на срочном биржевом рынке опционов, иначе рано или поздно вы разоритесь.

**Работа со средними суммами** (депозит от 20 000 до 100 000 дол.) предполагает, что не следует держать под залогом под открытые позиции одновременно более трети суммы всего депозита.

**Работе с большими рыночными суммами** (депозит свыше 100 000 дол.). Здесь диапазон удельного веса залоговых средств, которые можно одновременно держать по открытые позиции, колеблется от 30 до 5%.

Конкретный размер залога под открытые позиции находится на пересечении вашей алчности и осторожности. Общим правилом расчета залога под открытые позиции является обязательное наличие резерва для использования в нестандартных ситуациях, а также для продолжения нормальной работы.

**2. Еженедельный мониторинг вашей трейдинговой деятельности.** Для этого рассчитываются три важнейших коэффициента:

1) коэффициент прибыльных сделок (КтПр);

2) коэффициент безубыточности (КтБу);

3) обобщающий показатель деятельности трейдера (КтДТр).

**Коэффициент прибыльных сделок** определяет ваши аналитические способности и не должен опускаться ниже 65%. Более низкое значение коэффициента будет практической гарантией разорения. Формула для расчета:

$$KтПр = КП/КС, \quad (3.10)$$

где КП — количество прибыльных сделок за расчетный период;  
КС — общее количество сделок за расчетный период.

**Коэффициент безубыточности** призван показать, насколько эффективна применяемая вами система управления рисками и не проигрываете ли вы больше, нежели выигрываете. Значение коэффициента должно быть больше нуля:

$$KтБу = СП/КП - (СУ - С \cdot КУ)/КУ, \quad (3.11)$$

где СП — сумма прибыли, полученной от прибыльных сделок;  
СУ — сумма убытков, полученных от убыточных сделок; КУ — количество убыточных сделок за расчетный период; С — стандартный спред, для биржевого рынка вместо спреда применяется пересчитанная в пункты комиссия брокеру.

**Обобщающий показатель деятельности трейдера** является результирующим первых двух показателей. Он показывает общую успешность работы трейдера, состоящую из его способности анализировать рынок и принимать верные решения об открытии или закрытии позиций. Рассчитывается он следующим образом:

$$KтДтр = KтПр \cdot СП/КП - (1 - KтПр) \cdot (СП/КП - KтБу). \quad (3.12)$$

Значение этого коэффициента должно превышать единицу.

Приведенные выше показатели оценки деятельности трейдера рассматриваются не только в статическом состоянии на определенный момент времени, но и в динамике. Если данные какого-то показателя проявляют тенденцию к ухудшению, то необходимо срочно разобраться в причинах такого ухудшения и постараться их исправить до того, как деятельность трейдера не стала приносить значительные убытки.

3. Используйте методы страхования спотовых и фьючерсных операций на биржевом рынке опционов.

Это увеличит ваши издержки, но повысит надежность. Лучше не заработать, чем потерять.

### ***Вопросы и задачи для повторения и самопроверки***

В вопросах **3.1 – 3.16** из перечня предлагаемых ответов выбрать правильные.

**3.1.** При графическом представлении биржевых цен данные группируются за определенные периоды времени:

- а) недельные;
- б) дневные;

- в) часовые;
  - г) минутные;
  - д) непрерывные.
- 3.2.** Информация по биржевым ценам содержит для выбранного периода (недели, дня, часа):
- а) сведения об участниках сделок;
  - б) цену первой сделки (цена открытия);
  - в) цену последней сделки (цена закрытия);
  - г) максимальную и минимальную цены;
  - д) количество сделок (объем).
- 3.3.** При графическом представлении цен используются:
- а) линейные графики;
  - б) гистограммы (синонимы — столбиковые или штриховые диаграммы, «чарты»);
  - в) японские свечи;
  - г) французские свечи.
- 3.4.** Линейные графики для представления движения биржевых цен используются в случаях:
- а) когда сделок много;
  - б) когда сделок мало.
- 3.5.** Графики в виде японских свеч дают наглядное представление:
- а) о росте или падении цен за каждый из периодов группировок;
  - б) об изменении количества сделок во времени;
  - в) об изменении цен закрытия во времени.
- 3.6.** Тренды бывают:
- а) восходящие;
  - б) осциллирующие;
  - в) стохастические;
  - г) боковые;
  - д) нисходящие.
- 3.7.** Фигурами разворота тренда являются:
- а) двойное дно;
  - б) двойная вершина;
  - в) треугольник;
  - г) флаг;
  - д) голова и плечи.
- 3.8.** При восходящем тренде для наглядного представления области, внутри которой движутся цены, на графике цен проводят:
- а) линию тренда;
  - б) линию канала;
  - в) уровень поддержки;
  - г) уровень сопротивления.
- 3.9.** При нисходящем тренде для наглядного представления области, внутри которой движутся цены, на графике цен проводят:
- а) линию тренда;
  - б) линию канала;



- в) уровень поддержки;  
г) уровень сопротивления.
- 3.10.** При боковом тренде для наглядного представления области, внутри которой движутся цены, на графике цен проводят:
- а) линию тренда;  
б) линию канала;  
в) уровень поддержки;  
г) уровень сопротивления.
- 3.11.** Использование скользящих средних в процессе торговли для определения моментов купли и продажи финансовых инструментов предпочтительно в случае:
- а) явно выраженного восходящего тренда;  
б) бокового тренда;  
в) явно выраженного нисходящего тренда.
- 3.12.** Использование осцилляторов (момент, скорость изменения цен, индекс относительной силы) в процессе торговли для определения моментов купли и продажи финансовых инструментов предпочтительно в случае:
- а) явно выраженного восходящего тренда;  
б) бокового тренда;  
в) явно выраженного нисходящего тренда.
- 3.13.** Использование стохастических линий (%K, %R, %D) в процессе торговли для определения моментов купли и продажи финансовых инструментов предпочтительно в случае:
- а) явно выраженного восходящего тренда;  
б) бокового тренда;  
в) явно выраженного нисходящего тренда.
- 3.14.** Когда индикаторы (осцилляторы и стохастические линии) подадут наиболее сильные сигналы к совершению сделки:
- а) когда индикатор выходит из зоны перекупленности;  
б) когда индикатор выходит из зоны перепроданности;  
в) когда наблюдается расхождение между графиком цен и графиком индикатора (дивергенция)?
- 3.15.** Какая из волн Эллиота обычно самая длинная:
- а) 1-я ;  
б) 2-я ;  
в) 3-я ;  
г) 4-я ;  
д) 5-я ?

Решить задачи 3-3.1 – 3-3.7.

**3-3.1.** Ниже приведены цены закрытия  $C_t$  EUR/USD за 14 дней.

| Дни $t$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_t$   | 1,0431 | 1,0309 | 1,0341 | 1,0401 | 1,0344 | 1,0327 | 1,0335 | 1,0407 | 1,0428 | 1,0331 | 1,0326 | 1,0259 | 1,0238 | 1,0247 |

Рассчитать значения простой скользящей средней (MA) с 10-го по 14-й день. Интервал сглаживания равен 10 дням.

**3-3.2.** Ниже приведены цены закрытия  $C_t$  EUR/USD за 14 дней.

| Дни $t$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_t$   | 1,0431 | 1,0309 | 1,0341 | 1,0401 | 1,0344 | 1,0327 | 1,0335 | 1,0407 | 1,0428 | 1,0331 | 1,0326 | 1,0259 | 1,0238 | 1,0247 |

По этим данным рассчитать значения экспоненциальной скользящей средней (EMA) с 10-го по 14-й день. Интервал сглаживания равен 10 дням.

**3-3.3.** Ниже приведены цены закрытия  $C_t$  EUR/USD за 14 дней.

| Дни $t$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_t$   | 1,0431 | 1,0309 | 1,0341 | 1,0401 | 1,0344 | 1,0327 | 1,0335 | 1,0407 | 1,0428 | 1,0331 | 1,0326 | 1,0259 | 1,0238 | 1,0247 |

По этим данным рассчитать момент (MOM) с 7-го по 14-й день. Интервал сглаживания равен 7 дням.

**3-3.4.** Ниже приведены цены закрытия  $C_t$  EUR/USD за 14 дней.

| Дни $t$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_t$   | 1,0431 | 1,0309 | 1,0341 | 1,0401 | 1,0344 | 1,0327 | 1,0335 | 1,0407 | 1,0428 | 1,0331 | 1,0326 | 1,0259 | 1,0238 | 1,0247 |

По этим данным рассчитать скорость изменения цен (ROC) с 7-го по 14-й день. Интервал сглаживания равен 7 дням.

**3-3.5.** В задаче 3-3.1. приведены цены закрытия  $C_t$  EUR/USD за 14 дней. По этим данным рассчитать индекс относительной силы (RSI) с 8-го по 14-й день. Интервал сглаживания равен 7 дням.

**3-3.6.** Ниже приведены цены минимальная  $L_t$ , максимальная  $H_t$  и закрытия  $C_t$  EUR/USD за 10 дней.

| Дни $t$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $L_t$   | 1,0443 | 1,0445 | 1,0363 | 1,0431 | 1,0425 | 1,0367 | 1,0360 | 1,0420 | 1,0481 | 1,0445 |
| $H_t$   | 1,0377 | 1,0286 | 1,0287 | 1,0290 | 1,0305 | 1,0290 | 1,0268 | 1,0303 | 1,0400 | 1,0325 |
| $C_t$   | 1,0431 | 1,0309 | 1,0341 | 1,0401 | 1,0344 | 1,0327 | 1,0335 | 1,0407 | 1,0428 | 1,0331 |

По этим данным рассчитать значения индекса %K с 5-го по 10-й день. Интервал сглаживания равен 5 дням.

**3-3.7.** По данным задачи 3-3.6 рассчитать значения индекса %R с 5-го по 10-й день. Интервал сглаживания равен 5 дням.

## Ответы на вопросы

**3.1.** а, б, в, г; **3.2.** б, в, г, д; **3.3.** а, б, в; **3.4.** б; **3.5.** а, в; **3.6.** а, г, д; **3.7.** а, б, д; **3.8.** а, б; **3.9.** а, б; **3.10.** в, г; **3.11.** а, в; **3.12.** б; **3.13.** б; **3.14.** в; **3.15.** в; **3.16.** б.

## Ответы на задачи

**3-3.1.**

| Дни $t$ | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
|         | 1,0365 | 1,0355 | 1,0350 | 1,0340 | 1,0324 |

**3-3.2.**

|       |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Дни t | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     |
| EMA   | 1,0365 | 1,0358 | 1,0340 | 1,0322 | 1,0308 |

**3-3.3.**

|       |         |        |        |        |         |         |         |        |
|-------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|--------|
| Дни t | 7       | 8      | 9      | 10     | 11      | 12      | 13      | 14     |
| МОМ   | -0,0096 | 0,0098 | 0,0087 | -0,007 | -0,0018 | -0,0068 | -0,0097 | -0,016 |

**3-3.4.**

|       |       |        |        |       |       |       |       |       |
|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Дни t | 7     | 8      | 9      | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    |
| ROC   | 99,08 | 100,95 | 100,84 | 99,33 | 99,83 | 99,34 | 99,06 | 98,46 |

**3-3.5.**

|       |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| Дни t | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   |
| RSI   | 46,7 | 72,3 | 48,5 | 36,5 | 35,2 | 34,7 | 34,9 |

**3-3.6.**

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Дни t | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
| %K    | 36,48 | 25,79 | 41,10 | 85,28 | 75,12 | 29,58 |

**3-3.7.**

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Дни t | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
| %R    | 63,52 | 74,21 | 58,90 | 14,72 | 24,88 | 70,42 |

11.03.12

Общество с ограниченной ответственностью

«АМТ»

|         |         |      |
|---------|---------|------|
| 11      | 01      | 1999 |
| 3800,00 | 3800,00 | 0,00 |

АТ

## Анализ рядов динамики и методы краткосрочного прогнозирования финансовых показателей

### 4.1. Характеристика методов и моделей краткосрочного прогнозирования

При прогнозировании сложных систем, в том числе и финансовых рынков на небольшие периоды времени, наиболее важным является последний период ее функционирования, а не тенденции, сложившиеся в среднем на всем периоде ее предыстории. В таких случаях значимость свойства динамичности развития экономических систем должна преобладать над значимостью свойства инерционности. Поэтому более эффективными оказываются методы и модели, в которых значимость уровней временного ряда убывает по мере их удаления от прогнозируемого периода. Для повышения качества прогнозов на основе таких методов и моделей в их алгоритмах, как правило, предусмотрены процедура постоянного сопоставления прогнозных оценок (ретропрогноз), рассчитанных по модели с фактическими данными, и корректировка параметров модели с учетом полученных расхождений. Практически все существующие методы прогнозирования в разной степени тем или иным способом реализуют такие сопоставления, т.е. приспособливают модель к новой информации, характеризующей фактическое развитие процесса. Такое приспособление называют адаптацией\*.

В наибольшей степени в процедурах экономического прогнозирования процесс приспособления реализуется в специальных методах, называемых адаптивными. К ним относятся прежде всего следующие методы: экспоненциального сглаживания (и его различные модификации), гармонических весов, Тейла—Вейджа, адаптивной фильтрации, Хольта—Уинтерса, эволюции [4, 6, 23, 24].

Адаптивные методы позволяют строить самокорректирующиеся модели, которые, учитывая результат прогноза, сделанного на

\* Понятие «адаптация» (от лат. *adaptatio* — приспособление) впервые было использовано в биологии и медицине; оно означало приспособление строения и функций организмов к условиям существования или привыкание.

предыдущем шаге, и различную информационную ценность членов временного ряда, способны оперативно реагировать на изменяющиеся условия и на этой основе давать более точные прогнозы на ближайшую перспективу.

В общем случае параметры адаптивных моделей можно разделить на две группы: параметры, учитывающие различную информационную ценность уровней временного ряда, и параметры, реагирующие на отклонения расчетных значений показателя от фактических уровней ряда. В первом случае параметры модели либо выбираются в зависимости от длины исходного ряда и каких-то экономических соображений, либо определяются путем подбора, т.е. многократной реализацией модели исследуемого процесса с разными значениями подбираемых параметров. Во втором — подбор параметров, учитывающих отклонения расчетных значений уровней от фактических, заложен, как правило, в алгоритм самого метода и осуществляется автоматически в процессе моделирования.

Первоначальная оценка параметров адаптивной модели обычно осуществляется по некоторой выборке исходного временного ряда, состоящей из нескольких первых уровней этого ряда. Оставшиеся уровни ряда делят на обучающую и контрольную последовательности. Первая из них используется для корректировки параметров прогнозной модели, а вторая — для определения качества модели и выбора ее оптимальных параметров. Отклонение фактических значений уровней временного ряда от прогнозных оценок, вычисляемых обычно на один шаг вперед, расценивается как ошибка прогнозирования. Эта ошибка поступает на вход моделирующей системы и учитывается в модели (обратная связь) в соответствии с принятой в ней процедурой перехода из одного состояния в другое. Затем рассчитывается прогнозная оценка на следующий момент времени и весь процесс повторяется вновь вплоть до исчерпания фактических уровней ряда. Таким образом, под воздействием поступающей на каждом шаге новой информации модель реагирует на изменения уровней исследуемого процесса, приспосабливается к ним и к концу периода обучения отражает динамику развития процесса, соответствующую текущему моменту времени.

Если под влиянием внутренних или внешних факторов изменится динамика моделируемого процесса, то адаптивная модель вследствие заложенных в ней принципов корректировки параметров отреагирует на такие изменения значительно оперативнее, чем модели других типов. В этом, на наш взгляд,

и заключается основное достоинство методов адаптивного прогнозирования.

На рис. 4.1 приведен общий алгоритм построения адаптивных моделей прогнозирования. Данная схема отображает основные этапы построения адаптивных моделей, может видоизменяться в соответствии с использованными в конкретных методах различными алгоритмами и критериями адаптации, а также правилами перехода из одного состояния в другое. Например, в адаптивных моделях с изменяющимися параметрами адаптации корректировка коэффициентов осуществляется на основе величины среднего квадрата ошибки, вычисленной на всем периоде обучения, а не по значению текущей ошибки прогнозирования. Прогнозная модель остается неизменной вплоть до появления существенных расхождений между расчетными и фактическими значениями, т.е. до установления факта изменения свойств исследуемого процесса.

Скорость реакции модели на изменения в динамике процесса характеризуют так называемые *параметры адаптации*. Процедура «обучения» модели по ретроспективным данным происходит, как правило, в два этапа. На первом этапе определяют наилучшие значения параметров адаптации, на втором — коэффициенты модели прогнозирования с использованием уже полученных значений параметров адаптации.

Параметры адаптации должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечивалось адекватное отображение тенденции процесса при одновременной фильтрации случайных отклонений. Если оптимальное значение параметров адаптации трудно определить эмпирически или вывести аналитическим способом, то, как было отмечено выше, используют метод проб. В качестве критерия оптимальности параметров адаптации обычно принимают критерий минимума среднего квадрата ошибки прогнозирования.

Время в адаптивных моделях в отличие от кривых роста не служит причинно определяющим фактором развития исследуемого процесса. Оно отражает эволюцию всего комплекса условий протекания процесса, является как бы «представителем» всей совокупности причинных факторов.

В большей части адаптивных моделей реализуется принцип приспособления, основанный либо на корректировке параметров функции, заложенной в модель, либо на изменении параметров адаптации, позволяющих регулировать информационную значимость уровней временного ряда. Нередко оба эти принципа используются одновременно. Однако при этом остается неизменным вид самой функции, что ограничивает применение модели. Так,

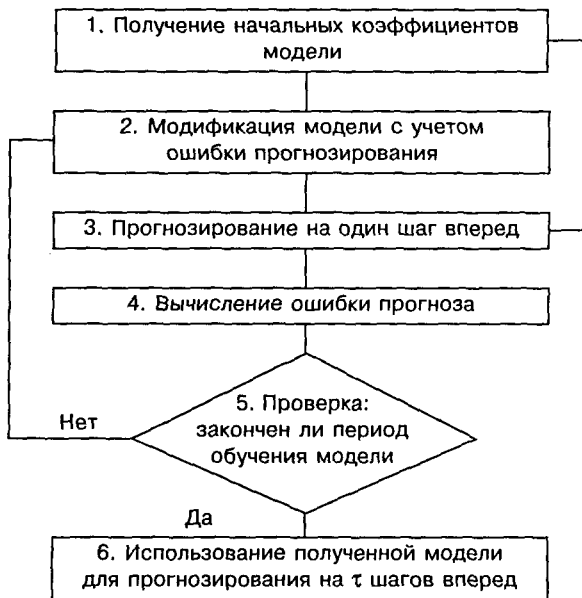


Рис. 4.1. Общий алгоритм построения адаптивных моделей прогнозирования

она неадекватно реагирует на возможные скачкообразные или структурные изменения в моделируемом процессе. В этом случае происходит существенное искажение общей картины, что формально выражается большим среднеквадратическим отклонением. В таких ситуациях невозможно подобрать подходящий класс кривых, так как тенденция может изменяться неоднократно и весьма сильно (иногда на противоположную).

Решить эту проблему позволяет, как было отмечено ранее, применение для аппроксимации динамических рядов **сплайнов**. Сплайны дают возможность адекватно отобразить тенденцию ряда на каждом его участке и вместе с тем обладают требуемой гладкостью. Кроме того, не остаются незамеченными и все структурные изменения, присутствующие в процессе. Им соответствуют места «склейки» на графике сплайн-функции. Изменяя параметры сплайн-функции, можно аппроксимировать ряд с любой степенью точности и любой заданной гладкостью. Таким образом, применение сплайн-аппроксимирующих методов является достаточно эффективным способом моделирования процессов, в которых присутствуют структурные изменения, и в этом смысле их можно отнести к адаптивным моделям.

## 4.2. Методы и модели экспоненциальной взвешенной скользящей средней

Дисконтирование уровней временного ряда в моделях экспоненциальной взвешенной скользящей средней (ЭВСС) осуществляется через параметры сглаживания (адаптации), значения которых могут изменяться от нуля до единицы. Близкое к единице значение этих параметров придает больший вес последним наблюдениям, а близкое к нулю — более отдаленным уровням. Первый случай соответствует быстро меняющимся динамичным процессам, а второй — стабильным процессам. Определение оптимальных значений параметров адаптации является одной из ключевых проблем эффективного использования адаптивных моделей, так как от этого в решающей степени зависит точность прогнозных оценок. Способы определения оптимальных значений параметров адаптации можно разделить на две большие группы: статические и динамические. Эти группы различаются гипотезами относительно природы ряда.

Статические способы базируются на предположении, что моделируемый процесс не претерпевает существенных изменений и поэтому можно определить постоянные параметры сглаживания, оптимальные для всего периода наблюдений. В таких моделях они обычно определяются путем перебора. Например, в методе Тейла—Вейджа для определенного класса процессов устанавливается связь между параметрами сглаживания, что позволяет определить их оптимальные значения. В динамических методах, таких, как метод эволюции, симплекс-планирования, следящего контрольного сигнала и т.п., предполагается наличие неоднородности развития исследуемого процесса во времени. Поэтому оптимальные значения параметров сглаживания вычисляются для каждого участка временного ряда.

После появления работы Р. Брауна [6], в которой, в частности, показано, что экспоненциальная средняя имеет то же математическое ожидание, что и исходный ряд, но меньшую дисперсию, метод экспоненциального сглаживания (МЭС) стал широко использоваться в экономическом прогнозировании. Рассмотрим основные идеи этого метода и технику получения прогнозных оценок.

Экспоненциальное сглаживание исходного временного ряда

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$$

осуществляется по формуле

$$S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)S_{t-1}, \quad (4.1)$$

где  $S_t$  — значение экспоненциальной средней в момент  $t$ ;  $\alpha$  — параметр сглаживания ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).



Используя это рекуррентное соотношение для всех (до момента  $N$  включительно\*) уровней временного ряда, можно убедиться, что экспоненциальная средняя является взвешенной средней всех членов ряда, т.е. справедливо соотношение

$$S_N = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_{N-i} + \beta^N S_0,$$

где  $N$  — количество членов ряда  $x_t$  ( $t = \overline{1, N}$ );  $\beta$  — коэффициент дисконтирования, причем  $\beta = 1 - \alpha$ ;  $S_0$  — величина, характеризующая начальные условия, причем в конкретных задачах ее значение принимается равным, например, значению первого уровня ряда  $x_1$  или средней арифметической нескольких первых членов ряда.

Есть все основания интерпретировать  $S_{t-1}$  как прошлый прогноз текущего момента, т.е. как прогноз на один шаг вперед, выполненный в момент  $(t - 1)^2$ . Разумеется, при таком подходе значение  $S_t$  рассматривается в качестве прогноза для момента  $(t + 1)$ . Если теперь заметить, что разность  $(x_t - S_{t-1})$  представляет собой не что иное, как текущее значение погрешности этого прогноза, то уравнение (4.1) может быть переписано в виде

$$S_t = S_{t-1} + \alpha(x_t - S_{t-1}). \quad (4.2)$$

Очевидно, новый прогноз  $S_t$ , построенный в момент времени  $t$  на один шаг вперед, т.е. на момент  $(t + 1)$ , получается в результате корректировки предыдущего прогноза  $S_{t-1}$  с учетом его ошибки  $(x_t - S_t)$ .

Заметим, что уравнение (4.2) описывает поведение простейшего самонастраивающегося механизма с пропорциональным запаздыванием.

Понятие экспоненциальной средней можно обобщить на случай экспоненциальных средних более высоких порядков. Выравнивание порядка является простым экспоненциальным сглаживанием, примененным к результатам сглаживания  $(p - 1)$ -го порядка. В общем случае принимается гипотеза о том, что исследуемый процесс, состоящий из детерминированной компоненты, может быть описан полиномом порядка  $n$ . На практике редко использу-

\* Если речь идет о некотором текущем моменте времени  $t$ , то на основании

соотношения (4.1) имеем  $S_t = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \beta^i x_{t-i} + \beta^t S_0$ .

ются полиномы выше второго порядка. В табл. 4.1 сведены соответствующие формулы расчета по этим моделям.

Алгоритм построения прогнозной модели методом экспоненциального сглаживания сравнительно прост. Определив одним из возможных способов начальные условия и параметр сглаживания, по соответствующим формулам, приведенным в табл. 4.1, рассчитывают экспоненциальные средние, коэффициенты модели и прогноз на шаг вперед. Окончательная прогнозная модель формируется на последнем шаге вычислений по последним значениям коэффициентов. Подставляя в нее заданное время упреждения прогноза  $\tau$ , получим прогнозные оценки.

Ширина доверительного интервала прогноза зависит от периода его упреждения, степени инерционности процесса ( $\alpha$ ), среднеквадратической ошибки  $\sigma_\varepsilon$ , характеризующей качество модели на участке построения модели, и выбранного уровня доверительной вероятности  $U$ :

$$\hat{x}_{t=N} \pm U\sigma_\varepsilon \sqrt{1 - Z_p(\tau)}, \quad (4.3)$$

где  $Z_p(\tau)$  — вектор, соответствующий адаптивной модели порядка  $p$ .

Для рассматриваемых здесь простейших моделей  $Z_p(\tau)$  рассчитывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Z_0(\tau) &= \frac{\alpha}{1 + \beta}; \\ Z_1(\tau) &= \alpha(1,25 + \tau\alpha); \\ Z_2(\tau) &= \alpha(2 + 3\alpha\tau + 3\alpha^2\tau^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Рассмотрим в качестве примера прежде всего динамический ряд, который генерируется процессом, не содержащим тренда:

$$x_t = a_t + \varepsilon_t, \quad (4.5)$$

где  $a_t$  — изменяющийся во времени средний уровень ряда;  $\varepsilon_t$  — случайные неавтокоррелированные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Прогнозная модель в этом случае имеет вид

$$\hat{x}_t(\tau) = \hat{a}_t, \quad (4.6)$$

где  $\hat{x}_t(\tau)$  — прогноз, сделанный в момент  $t$  на  $\tau$  шагов вперед;  $\hat{a}_t$  — оценка  $a_t$  (здесь и далее знак  $\hat{\phantom{a}}$  над величиной означает оценку).

Экспоненциальная средняя  $S_t = \hat{a}_t$  служит средством оценки единственного параметра модели (4.6) — см. первую строку табл. 4.1.

Одним из наиболее сложных аспектов практического использования метода экспоненциального сглаживания является выбор величины параметра сглаживания. С одной стороны, увеличение веса более «свежих» наблюдений и повышение скорости реакции модели на резкое изменение процесса может быть достигнуто при больших значениях  $\alpha$ , с другой — стремление лучше сгладить случайные отклонения и обеспечить устойчивость модели к кратковременным разовым изменениям процесса диктуют необходимость его уменьшения. Поиск компромиссного значения параметра сглаживания составляет задачу оптимизации модели. На практике эта задача решается обычно путем перебора различных значений  $\alpha$ . В качестве оптимального выбирается значение параметра сглаживания, при котором получена наименьшая дисперсия ошибки прогнозирования.

Структуру модели обычно определяют либо априорно, на основе визуального анализа графика процесса (есть ли тренд и близок ли он к линейной функции), знаний характера и законов развития исследуемого явления, либо методом проб, сравнивая статистические характеристики моделей различного порядка на участках обучения и (или) ретроспективного прогнозирования.

Продемонстрируем теперь применение МЭС для прогнозирования ряда  $x_t$ , структура которого не описывается моделью (4.5) (см. графу II табл. 4.2). Анализ графика (рис. 4.2) свидетельствует о наличии тренда, который в соответствии с критерием минимума дис-

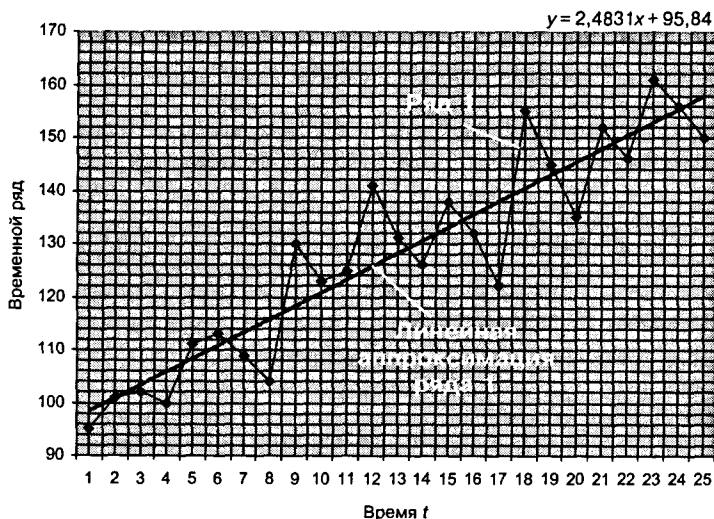


Рис. 4.2. Аппроксимация эмпирического временного ряда линейной функцией

Рекуррентные формулы расчета параметров полномиальных моделей

| Степень полинома | Экспоненциальные средние   | Начальные условия  | Оценки коэффициентов  | Прогнозная модель   |
|------------------|--|--|---|---|
| $n = 0$          | $S_t = \alpha x_t + \beta S_{t-1}$   | $S_0 = \hat{a}_0$  | $\hat{a}_t = S_t$   | $\hat{x}_t(\tau) = \hat{a}_t$   |
| $n = 1$          | $S_t^{(1)} = \alpha x_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$<br>$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}$   | $S_0^{(1)} = \hat{a}_0 - \frac{\beta}{\alpha} \hat{b}_0$<br>$S_0^{(2)} = \hat{a}_0 - \frac{2\beta}{\alpha} \hat{b}_0$  | $\hat{a}_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$<br>$\hat{b}_t = \frac{\alpha}{\beta} (S_t^{(1)} - S_t^{(2)})$  | $\hat{x}_t(\tau) = \hat{a}_t + \tau \hat{b}_t$                                |
| $n = 2$          | $S_t^{(1)} = \alpha x_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$<br>$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}$<br>$S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + \beta S_{t-1}^{(3)}$ | $S_0^{(1)} = \hat{a}_0 - \frac{\beta}{\alpha} \hat{b}_0 + \frac{\beta(2-\alpha)}{2\alpha^2} \hat{c}_0$<br>$S_0^{(2)} = \hat{a}_0 - \frac{2\beta}{\alpha} \hat{b}_0 + \frac{\beta(3-2\alpha)}{\alpha^2} \hat{c}_0$<br>$S_0^{(3)} = \hat{a}_0 - \frac{3\beta}{\alpha} \hat{b}_0 + \frac{3\beta(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \hat{c}_0$ | $\hat{a}_t = 3(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + S_t^{(3)}$<br>$\hat{b}_t = \frac{\alpha}{2\beta^2} (6 - 5\alpha) S_t^{(1)} - 2(5 - 4\alpha) S_t^{(2)} + (4 - 3\alpha) S_t^{(3)}$<br>$\hat{c}_t = \frac{\alpha}{\beta^2} (S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)})$ | $\hat{x}_t(\tau) = \hat{a}_t + \tau \hat{b}_t + \frac{1}{2} \tau^2 \hat{c}_t$ |

Расчет параметров линейной модели

| $t$                             | $x_t$ | $a_t$ | $b_t$ | $S_t^{(1)}$ | $S_t^{(2)}$ | $\hat{x}_t$ | $\varepsilon_t$ |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------------|-----------------|
| I                               | II    | III   | IV    | V           | VI          | VII         | VIII            |
| 0                               | –     | 90,2  | 3,48  | 67,0        | 43,7        | –           | –               |
| 1                               | 95    | 94,0  | 3,50  | 70,6        | 47,2        | 93,7        | 1,3             |
| 2                               | 101   | 8,4   | 2,96  | 74,6        | 50,8        | 97,5        | 3,5             |
| 3                               | 102   | 101,9 | 3,56  | 78,1        | 54,3        | 101,4       | 0,6             |
| 4                               | 100   | 104,2 | 3,46  | 81,0        | 57,8        | 105,5       | -5,5            |
| 5                               | 111   | 105,5 | 3,53  | 84,9        | 61,3        | 107,6       | 3,4             |
| 6                               | 113   | 112,1 | 3,53  | 88,5        | 64,9        | 112,0       | 1,0             |
| 7                               | 109   | 114,1 | 3,57  | 91,2        | 68,3        | 115,8       | -6,8            |
| 8                               | 104   | 114,3 | 3,20  | 92,9        | 71,5        | 117,5       | -13,5           |
| 9                               | 130   | 120,5 | 3,41  | 97,7        | 74,9        | 117,4       | 12,6            |
| 10                              | 123   | 123,7 | 3,39  | 101,0       | 78,3        | 123,9       | -0,9            |
| 11                              | 125   | 126,6 | 3,36  | 104,1       | 81,6        | 127,1       | -2,1            |
| 12                              | 141   | 132,6 | 3,54  | 108,9       | 85,2        | 129,9       | 11,1            |
| 13                              | 131   | 135,0 | 3,47  | 111,8       | 88,6        | 136,2       | -5,2            |
| 14                              | 126   | 135,3 | 3,24  | 113,6       | 91,9        | 148,4       | -12,4           |
| 15                              | 138   | 138,5 | 3,24  | 116,8       | 95,1        | 138,6       | -0,6            |
| 16                              | 132   | 139,4 | 3,08  | 118,8       | 98,2        | 141,7       | -9,7            |
| 17                              | 122   | 137,5 | 2,73  | 119,2       | 100,9       | 142,4       | -20,4           |
| 18                              | 155   | 143,7 | 2,97  | 123,8       | 103,9       | 140,2       | 14,8            |
| 19                              | 145   | 146,3 | 2,94  | 126,6       | 106,9       | 146,8       | -1,8            |
| 20                              | 135   | 145,8 | 2,70  | 127,7       | 109,6       | 149,3       | -14,3           |
| 21                              | 152   | 149,3 | 2,78  | 130,9       | 112,3       | 148,5       | 3,5             |
| 22                              | 146   | 150,6 | 2,66  | 132,8       | 115,0       | 152,1       | -6,1            |
| 23                              | 161   | 155,2 | 2,79  | 136,5       | 117,8       | 153,7       | 7,7             |
| 24                              | 156   | 157,4 | 2,75  | 139,0       | 120,6       | 158,0       | -2,0            |
| 25                              | 150   | 157,8 | 2,59  | 140,5       | 123,1       | 160,2       | -10,2           |
| Среднеквадратическая ошибка     |       |       |       |             |             |             | 9,3             |
| Средняя относительная ошибка, % |       |       |       |             |             |             | 5,5             |
| Средняя ошибка                  |       |       |       |             |             |             | -2,2            |
| Максимальная ошибка, %          |       |       |       |             |             |             | 16,7            |

персии будет лучшим образом отражаться линейной моделью (см. вторую строку табл. 4.1). В табл. 4.2 приведены результаты такого моделирования. Начальные оценки  $a_0 = 90,2$  и  $b_0 = 3,48$  получены МНК по первым 12 уровням ряда. Тот же результат можно получить, используя мастер-диаграмму, ППП Excel. В результате перебора значений параметра сглаживания, проведенного с точностью 0,01, было установлено, что лучшим значением является  $\alpha = 0,13$ , при котором  $\sigma_\varepsilon = 9,31$ . Ниже приведены ход и результаты расчетов для  $t = 6$ :

$$S_6^{(1)} = 0,13 \cdot x_6 + 0,87 \cdot S_5^{(1)} = 0,13 \cdot 113 + 0,87 \cdot 84,9 = 88,55;$$

$$S_6^{(2)} = 0,13 \cdot S_6^{(1)} + 0,87 \cdot S_5^{(2)} = 0,13 \cdot 88,55 + 0,87 \cdot 61,3 = 64,86;$$

$$a_6 = 2 \cdot S_6^{(1)} - S_6^{(2)} = 2 \cdot 88,55 - 64,86 = 112,24;$$

$$b_6 = \frac{0,13}{0,87} \cdot (S_6^{(1)} - S_6^{(2)}) = 0,1494 \cdot 23,69 = 3,53;$$

$$\hat{x}_6 = a_6 + b_6 \cdot 1 = 112,24 + 3,53 = 115,8;$$

$$\varepsilon_7 = x_7 - \hat{x}_6(1) = 109 - 115,8 = -6,8.$$

Отметим, что при сглаживании ряда по полиному второй степени наименьшее значение  $\sigma_e = 11,43$  достигается при  $\alpha = 0,15$ .

### 4.3. Модель Хольта—Уингерса

Среди адаптивных экспоненциальных моделей чаще всего в практических исследованиях используются модели линейного роста — линейные адаптивные модели Брауна, Хольта и др., — в которых прогнозные оценки  $\hat{x}$  на  $t$  шагов вперед вычисляются, например, в момент  $t$  по уравнению

$$\hat{x}(t+\tau) = a(t) + b(t) \cdot \tau, \quad (4.7)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — параметры линейной прогнозной модели, относящиеся к моменту составления прогноза  $t^*$ .

Если же прогноз на  $\tau$  шагов вперед составляется в момент  $(t-\tau)$ , то уравнение (4.7) принимает следующий вид:

$$\hat{x}(t) = a(t-\tau) + b(t-\tau)\tau, \quad (4.8)$$

где  $a(t-\tau)$  и  $b(t-\tau)$  — параметры линейной прогнозной модели, вычисленные на момент составления прогноза  $(t-\tau)$ .

Если шаг прогнозирования выбрать равным единице, т.е.  $\tau = 1$ , то равенство (4.8) примет вид:

$$\hat{x}(t) = a(t-1) + b(t-1) \cdot 1. \quad (4.9)$$

Очевидно, следуя формуле (4.9), для вычисления  $\hat{x}(1)$  на момент времени  $t = 1$ , необходимо знать начальные оценки  $a(0)$  и  $b(0)$ , которые могут быть получены, например, методом наименьших квадратов по нескольким первым уровням эмпирического ряда. Простейшим способом обновления коэффициентов  $a(t)$  и  $b(t)$  в каждый момент времени является простое экспоненциаль-

\* То же самое можно записать в виде  $\hat{x}_{t+\tau} = a_t + b_t \tau$ .

ное сглаживание. Поэтому параметры линейной модели Р. Брауна корректируются следующим образом\*:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t-1) + b(t-1) \cdot 1 + (1 - \beta^2) \cdot \varepsilon(t); \\ b(t) &= b(t-1) + (1 - \beta)^2 \cdot \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  — ошибка прогнозирования.

Более общей формой является линейная модель Е. Хольта, в которой оценка коэффициентов осуществляется на основе двух параметров сглаживания:

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha_1 x_t + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1} \cdot 1); \\ b_t &= \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) b_{t-1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — параметры сглаживания ( $\alpha_i \in [0; 1]$ ,  $i = 1, 2$ ).

Обратим внимание, что равенства (4.11) записаны в более компактной, но методически менее наглядной форме, чем равенства (4.10).

Раскрывая скобки и учитывая определение ошибки аппроксимации  $\varepsilon_t = x_t - \hat{x}_t$ , уравнения (4.11) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} a_t &= a_{t-1} + b_{t-1} \cdot 1 + \alpha_1 \varepsilon_t; \\ b_t &= b_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для прогнозирования сезонных процессов широко используется модель Уинтерса. Мультипликативная модель Уинтерса с линейным ростом опирается на экспоненциальную схему и для шага прогнозирования, равного единице, т.е. для  $\tau = 1$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= (a_t + b_t 1) \cdot F_{t-L+1}; \\ a_t &= \alpha_1 \frac{x_t}{F_{t-L}} + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1}); \\ b_t &= \alpha_3 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_3) b_{t-1}; \\ F_t &= \alpha_2 \frac{x_t}{a_t} + (1 - \alpha_2) F_{t-L}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь  $L$  — период сезонности (так, для квартальных данных  $L = 4$ , для месячных данных  $L = 12$ );  $F_{t-L+1}$  — значение коэффи-

\* Распространена также запись в виде

$$\begin{aligned} a_t &= a_{t-1} + b_{t-1}(1 - \beta^2)\varepsilon_t; \\ b_t &= b_{t-1} + (1 - \beta)^2\varepsilon_t. \end{aligned}$$

циента сезонности, которое приписывают моменту  $(t + 1)$ , а вычисляют сезон назад, т.е. в момент  $(t + 1 - L)$ ;  $a_t$  и  $b_t$  — параметры, имеющие тот же смысл, что и выше в моделях Брауна и Хольта; четвертое равенство задает правило обновления коэффициента сезонности на последующий сезон.

Обратим внимание, что при расчете  $\hat{x}_{t+1} = (a_t + b_t \cdot 1)F_{t-L+1}$ , например на момент 1, т.е. при  $t = 0$  и  $\tau = 1$ , мы должны иметь в своем распоряжении  $F_{0-4+1} = F_{-3}$ . Очевидно,  $F_{-3}$  следует понимать как коэффициент сезонности, относящийся к первому кварталу года, предыдущего к первому году ряда наблюдений (рис. 4.3), так сказать к предыстории анализируемого процесса. Аналогичный смысл имеют исходные коэффициенты сезонности  $F_{-2}$ ,  $F_{-1}$  и  $F_0$ .

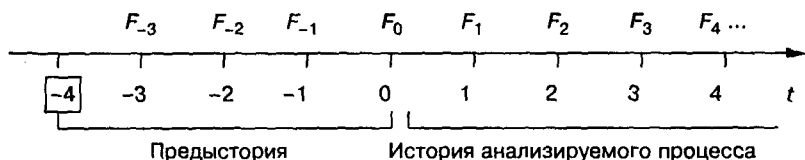


Рис. 4.3. Интерпретация коэффициентов сезонности с отрицательными номерами кварталов

Заметим, что при относительном постоянстве амплитуды сезонной волны целесообразно использовать аддитивную модель, которая будет рассмотрена в разделе 4.4.

В табл. 4.3 приведены результаты построения трехпараметрической мультипликативной модели для 20 точек эмпирического ряда (см. графу II) при  $\tau = 1$ . Начальные оценки параметров  $a_0 = 217,7$  и  $b_0 = 0,3$  взяты из достаточно грубой линейной модели  $x_t^n = 217,7 + 0,3t$ , построенной из графических соображений по первым 8 точкам (сравните с оценками параметров линейной модели по методу наименьших квадратов в табл. 4.6). Оценка коэффициентов сезонности «предыстории», необходимых для вычисления коэффициентов сезонности первого года «истории», осуществлялась делением первых восьми фактических уровней временного ряда на их расчетные значения, вычисленные по упомянутой выше линейной модели с последующим усреднением по одноименным кварталам:

$$F_{-3} = 0,5(x_1 : x_1^n + x_5 : x_5^n); F_{-2} = 0,5(x_2 : x_2^n + x_6 : x_6^n);$$

$$F_{-1} = 0,5(x_3 : x_3^n + x_7 : x_7^n); F_0 = 0,5(x_4 : x_4^n + x_8 : x_8^n).$$



Таблица 4.3

## Построение модели Хольта—Уинтерса

| $t$                         | $x_t$ | $a_t$ | $b_t$ | $F_t$ | $\hat{x}_t$ | Ошибка     |                  |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------------|------------|------------------|
|                             |       |       |       |       |             | Абсолютная | Относительная, % |
| I                           | II    | III   | IV    | V     | VI          | VII        | VIII             |
| -3                          |       |       |       | 0,580 |             |            |                  |
| -2                          |       |       |       | 1,098 |             |            |                  |
| -1                          |       |       |       | 1,906 |             |            |                  |
| 0                           | -     | 217,7 | 0,3   | 0,547 | -           | -          | -                |
| 1                           | 124,0 | 216,7 | -0,1  | 0,575 | 126,5       | -2,5       | 2,0              |
| 2                           | 236,5 | 216,3 | -0,2  | 1,095 | 237,7       | -1,2       | 0,5              |
| 3                           | 409,0 | 215,7 | -0,3  | 1,900 | 411,8       | -2,8       | 0,7              |
| 4                           | 115,0 | 213,9 | -0,8  | 0,541 | 117,7       | -2,7       | 2,3              |
| 5                           | 129,8 | 216,9 | 0,4   | 0,589 | 122,6       | 7,1        | 5,5              |
| 6                           | 244,1 | 219,0 | 0,9   | 1,107 | 237,9       | 6,2        | 2,5              |
| 7                           | 426,7 | 221,3 | 1,3   | 1,917 | 417,7       | 9,1        | 2,1              |
| 8                           | 125,0 | 225,1 | 2,1   | 0,550 | 120,4       | 4,6        | 3,6              |
| 9                           | 133,2 | 226,8 | 2,0   | 0,588 | 133,8       | -0,6       | 0,5              |
| 10                          | 251,3 | 228,3 | 1,9   | 1,103 | 253,2       | -1,9       | 0,8              |
| 11                          | 498,6 | 239,1 | 4,5   | 2,018 | 441,0       | 57,5       | 11,5             |
| 12                          | 148,2 | 251,4 | 6,8   | 0,574 | 133,9       | 14,3       | 9,6              |
| 13                          | 144,5 | 254,5 | 5,7   | 0,576 | 151,9       | -7,3       | 5,1              |
| 14                          | 273,5 | 256,5 | 4,6   | 1,081 | 287,1       | -13,6      | 5,0              |
| 15                          | 535,2 | 262,4 | 5,0   | 2,031 | 527,0       | 8,2        | 1,5              |
| 16                          | 152,4 | 266,9 | 4,8   | 0,572 | 153,3       | -0,9       | 0,6              |
| 17                          | 157,5 | 272,2 | 5,0   | 0,577 | 156,5       | 1,0        | 0,6              |
| 18                          | 286,8 | 273,6 | 3,9   | 1,061 | 300,0       | -12,2      | 4,5              |
| 19                          | 588,2 | 281,2 | 5,0   | 2,068 | 563,8       | 24,7       | 4,2              |
| 20                          | 162,9 | 285,8 | 4,9   | 0,571 | 163,8       | -0,9       | 0,5              |
| Средняя ошибка              |       |       |       |       |             | 4,3        | 1,0              |
| Среднеквадратическая ошибка |       |       |       |       |             | 17,9       | 4,5              |
| Средняя по модулю           |       |       |       |       |             | 9,5        | 3,4              |
| Максимальная ошибка         |       |       |       |       |             | 57,5       | 11,5             |

Корректировка параметров модели (см. графы III—IV табл. 4.3) проводилась по формулам (4.13) при  $\alpha_1 = 0,3$ ,  $\alpha_2 = 0,6$  и  $\alpha_3 = 0,3$ . Например, пусть  $t = 6$ . Тогда

$$a_6 = 0,3(244,1 : 1,097) + 0,7(216,9 + 0,4) \approx 219,0;$$

$$b_6 = 0,3(219,0 - 216,9) + 0,7 \cdot 0,4 = 0,9;$$

$$F_6 = 0,6(244,1 : 219,0) + 0,4 \cdot 1,095 = 1,107;$$

$$\hat{x}_{6+1} = (219,0 + 0,9 \cdot 1) \cdot 1,900 = 417,7;$$

$$\varepsilon_7 = x_7 - \hat{x}_{6+1} = 426,7 - 417,7 = 9,0.$$

Аналогично рассчитываются все остальные уровни ряда.

На последнем шаге имеем прогнозную модель

$$\hat{x}_{20+\tau} = (285,8 + 4,9\tau) F_{20-4+\tau}, \quad (4.14)$$

где  $F$  принимает значения 0,577; 1,061; 2,068; 0,571 соответственно для  $\tau = 1, 2, 3, 4$ .

При статистической оценке адекватности моделей проверяется, выполнены ли условия, достаточные для того, чтобы ряд остатков  $\varepsilon_t$  (табл. 4.3, графа VII) можно было считать случайной последовательностью чисел (условия достаточности). Если математическая модель выбрана правильно, то для остатков характерны: равенство нулю математического ожидания, случайность отклонений от математического ожидания, независимость уровней ряда остатков друг от друга (отсутствие автокорреляции) и нормальный закон распределения.

Рассмотрим перечисленные требования подробнее.

Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю осуществляется в ходе проверки соответствующей нулевой гипотезы

$$H_0: |\bar{\varepsilon}| = 0.$$

С этой целью строится  $t$ -статистика

$$\hat{t} = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{S_{\varepsilon}} \sqrt{n},$$

где  $\bar{\varepsilon}$  — среднеарифметическое значение уровней ряда остатков  $\varepsilon_t$ ;

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2}{n-1}} \quad \text{— оценка среднеквадратического отклонения}$$

для этой последовательности, рассчитанная по формуле для малой выборки.

На уровне значимости  $\alpha$  гипотеза отклоняется, если  $\hat{t} > t_{\alpha, \nu}$ , где  $t_{\alpha, \nu}$  — критерий распределения Стьюдента с доверительной вероятностью  $(1 - \alpha)$  и  $\nu = n - 1$  степенями свободы.

В нашем случае  $\hat{t} = 0,2820$ , а  $t_{0,30;19} = 1,06555$ , стало быть, нулевая гипотеза с доверительной вероятностью 0,70 принимается.

Для проверки условия случайности колебаний уровней ряда остатков вблизи своего математического ожидания критерий случай-

ности отклонений при уровне вероятности 0,95 можно представить как

$$p > \left[ \frac{2}{3}(n-2) - 1,96 \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right],$$

где  $p$  — фактическое число поворотных точек в случайном ряду; 1,96 — квантиль нормального распределения для 5%-го уровня значимости. Квадратные скобки означают, что от результата вычисления следует взять целую часть (не путать с процедурой округления!).

В нашем случае  $p = 13$ , что больше 8 — статистического порога критерия поворотных точек.

**Отсутствие автокорреляции** может быть проверено с помощью критерия Дарбина—Уотсона или по первому коэффициенту автокорреляции. Легко убедиться, что в нашем случае уровни ряда остатков независимы друг от друга.

**Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения** проверим с помощью  $R/S$ -критерия:

$$R/S = (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}) / S_{\varepsilon},$$

где  $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_{\min}$  соответственно максимальный и минимальный уровни ряда остатков;  $S_{\varepsilon}$  — среднеквадратическое отклонение.

В нашем случае  $R/S = 3,97$ . Так как это значение попадает в интервал [3,18; 4,49], то ряд остатков можно считать распределенным по нормальному закону с доверительной вероятностью 0,95.

Таким образом, построенная модель может считаться адекватной эмпирическому временному ряду.

Чтобы принять окончательное решение о возможности использования модели (4.14) для построения прогноза, следует обратиться к оценкам точности, которые приведены в табл. 4.3. На участке построения точностные характеристики —  $\sigma_{\varepsilon} = 17,9$ ;  $|\overline{\varepsilon_1}| = 3,4\%$ .

Результаты ретропрогноза на один год вперед ( $|\overline{\varepsilon_2}| = 3,1\%$ ) также свидетельствуют о хороших прогностических свойствах модели.

Практика использования мультипликативных моделей показывает, что в случае, когда колебания исследуемого процесса велики, не всегда получаются хорошие результаты. Причина этого кроется в том, что текущая оценка  $a_t$  формируется на основе двух взвешенных в соответствии со значениями параметра сглаживания  $\alpha_1$  компонентов — очищенного от сезонных колебаний фактического уровня в данный момент и его значения в предыдущий период времени. Учитывая, что истинное значение уровня всегда

определяется с некоторой ошибкой, первую компоненту можно представить в виде

$$\frac{x_t}{F_{t-L}} = \frac{\hat{x}_t + \varepsilon_t}{F_{t-L}} = \frac{\hat{x}_t}{F_{t-L}} + \frac{\varepsilon_t}{F_{t-L}}.$$

Очевидно, что при малых значениях сезонных коэффициентов влияние случайного колебания уровня процесса может быть велико, причем оно становится тем сильнее, чем ближе значение этих коэффициентов к нулю. Модель, полученная в этот момент, будет заведомо неадекватной процессу и потому не может быть использована для прогнозирования. Для устранения мультипликативного эффекта случайной ошибки можно использовать параметр сглаживания уровня процесса  $\alpha_{1t}$ , сформированного на основе динамического фильтра вида (фильтр Левандовского [11]):

$$\alpha_{1t} = \alpha_1 \alpha_t(\tau_t), \quad (4.15)$$

где  $\alpha_t(\tau_t)$  — значение дополнительного параметра сглаживания, учитывающего структуру сезонных коэффициентов в зависимости от аргумента  $\tau_t = F_t/F_{\max}$  (разумеется,  $\alpha_t(\tau_t) \in [0; 1]$ ).

Дополнительный параметр сглаживания принимает значение, равное единице, если существенных колебаний в структуре сезонных коэффициентов нет. В этом случае первоначальное значение параметра сглаживания  $\alpha_1$  сохраняется и используется для корректировки параметров модели.

Когда сезонные коэффициенты  $F_t$  (где  $t = \overline{1, N}$ ) отличаются от наибольшего из них  $F_{\max}$ , например, более чем в 4 раза, т.е.

$$\tau_t = \frac{F_t}{F_{\max}} < 0,25,$$

величина  $\alpha_t(\tau_t)$  принимает значения, меньшие единицы, и стремительно уменьшается по мере увеличения этого различия. В простейшем случае это может быть обеспечено использованием прямой, проходящей через две точки с координатами (0; 0) и (0,25; 1):

$$\alpha_t(\tau_t) = \begin{cases} 1, & \text{где } \tau_t \geq 0,25; \\ 4\tau_t, & \text{где } 0 \leq \tau_t \leq 0,25. \end{cases} \quad (4.16)$$

Таким образом, параметр  $\alpha_t(\tau_t)$  будет равен единице в случае обработки обычных временных рядов и стремиться, например линейно, к нулю при прогнозировании рядов с сильной сезонностью.

Рассмотрим пример прогнозирования эмпирического ряда с использованием динамического фильтра (см. табл. 4.4). Оценки сезонных коэффициентов, относящихся к предыстории, получим на основе двух периодов сезонности ( $L = 12$ ). Уравнение прямой, построенное для первых 24 уровней, имеет вид

$$x_t^I = 72,84 + 0,021t \quad (t = \overline{1, 24}).$$

Расхождение между оценками  $x_t^I$ , полученными по этому уравнению, и фактическими уровнями ряда будем рассматривать как сезонные коэффициенты. Таким образом, для каждого из 12 месяцев будем иметь две оценки этих коэффициентов, усреднив которые, получим соответствующую оценку 12 сезонных коэффициентов  $F_{t-12+1}$  «предыстории» (где  $t = \overline{0; 11}$ ), необходимых для вычисления первых 12 уровней модели Хольта—Уинтерса и первых 12 коэффициентов сезонности  $F_t$ , относящихся к «истории». Например, для 7-го и 19-го месяцев имеем:

$$x_7^I = 72,84 + 0,021 \cdot 7 = 72,99;$$

$$x_{19}^I = 72,84 + 0,021 \cdot 19 = 73,24.$$

Теперь легко вычислить коэффициент сезонности  $F_{-5}$ , относящийся к 7-му месяцу предыстории:

$$F_{-5} = 0,5(184,7 : 72,99 + 118,9 : 73,24) = 2,555.$$

Проведя аналогичные расчеты для остальных месяцев, получим следующие оценки 12 сезонных коэффициентов  $F_{t-12+1}$  предыстории (где  $t = \overline{0; 11}$ ):

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,589 | 0,538 | 0,611 | 0,681 | 0,781 | 1,827 |
| 2,555 | 2,371 | 0,788 | 0,660 | 0,558 | 0,421 |

Максимальным является коэффициент, соответствующий 7-му месяцу, т.е.  $F_{\max} = 2,555$ . Несколько коэффициентов вектора сезонности меньше  $F_{\max}$  в 4 и более раза. При построении модели воспользуемся соотношениями (4.13). Будем использовать параметры сглаживания  $\alpha_1 = 0,075$ ;  $\alpha_2 = 0,900$ ;  $\alpha_3 = 0,038$ . В табл. 4.4 приведены лишь некоторые результаты расчетов для первых и двух последних уровней ряда. Оценка уровней производится обычным способом, например

$$\hat{x}_{12} = \hat{x}_{11+1} = (\hat{x}_{11} + b_{11} \cdot 1) F_{11-12+1} = (71,88 - 0,017 \cdot 1) 0,421 = 30,28.$$

При корректировке параметра  $a_t$  будем использовать динамический фильтр Левандовского. В графе VI табл. 4.4 приведены ре-

зультаты расчета параметра  $\alpha_t$  ( $\tau_t$ ). В нашем случае параметр сглаживания уровня будет корректироваться для 1, 2, 3, 11 и 12 месяцев каждого года. Например:

$$\hat{a}_{12} = \frac{x_{12}}{F_{12-12}} \alpha_{1t} + (1 - \alpha_{1t})(a_{11} + b_{11} \cdot 1) =$$

$$= 69,60 \cdot 0,075 \cdot 0,66 + 0,9505 \cdot 71,86 = 71,75.$$

Как показывает практика, использование динамического фильтра в мультипликативной модели обычно приводит к уменьшению средней относительной ошибки, что свидетельствует об эффективности данного подхода и целесообразности его использования в исследованиях процессов с относительно сильной сезонностью.

Таблица 4.4

Прогнозирование ряда с использованием динамического фильтра

| $t$                         | $x_t$ | $a_t$ | $b_t$  | $F_t$ | $\alpha_t(\tau_t)$ | $\hat{x}_t$ | $\varepsilon_t$ |
|-----------------------------|-------|-------|--------|-------|--------------------|-------------|-----------------|
| I                           | II    | III   | IV     | V     | VI                 | VII         | VIII            |
| 0                           | -     | 72,84 | 0,021  | -     | -                  | -           | -               |
| 1                           | 42,0  | 72,75 | 0,016  | 0,579 | 0,922              | 42,93       | -0,93           |
| 2                           | 38,2  | 72,65 | 0,012  | 0,527 | 0,843              | 39,17       | -0,97           |
| 3                           | 43,8  | 72,59 | 0,010  | 0,604 | 0,956              | 44,38       | -0,58           |
| 4                           | 49,0  | 72,55 | 0,008  | 0,676 | 1                  | 49,45       | -0,45           |
| 5                           | 56,1  | 72,51 | 0,006  | 0,774 | 1                  | 56,66       | -0,56           |
| 6                           | 131,4 | 72,47 | 0,004  | 1,815 | 1                  | 132,46      | -1,06           |
| 7                           | 184,7 | 72,46 | 0,004  | 2,550 | 1                  | 185,19      | -0,49           |
| 8                           | 170,0 | 72,41 | 0,001  | 2,350 | 1                  | 171,83      | -1,83           |
| 9                           | 54,3  | 72,14 | -0,008 | 0,735 | 1                  | 57,06       | -2,76           |
| 10                          | 46,0  | 71,95 | -0,015 | 0,641 | 1                  | 47,62       | -1,61           |
| 11                          | 39,7  | 71,88 | -0,017 | 0,553 | 0,874              | 40,14       | -0,45           |
| 12                          | 29,3  | 71,75 | -0,022 | 0,410 | 0,660              | 30,28       | -0,98           |
| 13                          | 44,0  | 72,02 | -0,011 | 0,608 | 0,908              | 41,50       | 2,50            |
| 14                          | 40,4  | 72,30 | 0      | 0,556 | 0,827              | 37,96       | 2,44            |
| 15                          | 45,4  | 72,50 | 0,008  | 0,624 | 0,948              | 43,68       | 1,72            |
| 16                          | 50,5  | 72,67 | 0,014  | 0,693 | 1                  | 49,01       | 1,49            |
| 17                          | 58,0  | 72,86 | 0,020  | 0,794 | 1                  | 56,29       | 1,71            |
| 18                          | 135,6 | 72,01 | 0,025  | 1,853 | 1                  | 132,23      | 3,37            |
| 19                          | 188,9 | 73,12 | 0,028  | 2,580 | 1                  | 186,23      | 2,67            |
| 20                          | 176,8 | 73,30 | 0,034  | 2,406 | 1                  | 171,91      | 4,89            |
| 21                          | 61,0  | 73,89 | 0,055  | 0,819 | 1                  | 55,46       | 5,54            |
| 22                          | 50,6  | 74,31 | 0,069  | 0,677 | 1                  | 47,43       | 3,17            |
| 23                          | 42,0  | 74,48 | 0,073  | 0,563 | 0,867              | 41,12       | 0,88            |
| 24                          | 32,4  | 74,78 | 0,081  | 0,431 | 0,643              | 30,54       | 1,86            |
| ...                         | ...   | ...   | ...    | ...   | ...                | ...         | ...             |
| 59                          | 56,8  | 90,03 | 0,345  | 0,630 | 0,630              | 56,06       | 0,74            |
| 60                          | 39,1  | 90,41 | 0,346  | 0,432 | 0,432              | 38,81       | 0,29            |
| Средняя ошибка              |       |       |        |       |                    |             | 1,92            |
| Среднеквадратическая ошибка |       |       |        |       |                    |             | 7,20            |
| Максимальная ошибка         |       |       |        |       |                    |             | 32,60           |

#### 4.4. Метод Тейла–Вейджа

Для получения в момент времени  $t$  прогноза аддитивных тренд-сезонных процессов на  $\tau$  шагов вперед используются адаптивные модели с аддитивными компонентами вида

$$\hat{x}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \tau + \hat{S}_{t-L+\tau}, \quad (4.17)$$

где  $\hat{S}_{t-L+\tau}$  — вектор аддитивных сезонных коэффициентов;  $\tau$  — период упреждения прогноза;  $L$  — период внутригодовых колебаний.

Оценки параметров этой модели строятся на основе рекуррентных формул экспоненциальной схемы сглаживания:

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= \alpha_1(x_t - \hat{S}_{t-L}) + (1 - \alpha_1)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1} \cdot 1); \\ \hat{b}_t &= \alpha_2(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1 - \alpha_2)\hat{b}_{t-1}; \\ \hat{S}_t &= \alpha_3(x_t - \hat{a}_t) + (1 - \alpha_3)\hat{S}_{t-L}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — коэффициенты сглаживания (адаптации),  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$ .

В методе Тейла–Вейджа предполагается, что исходный ряд генерируется процессом вида

$$\begin{aligned} x_t &= a_t + S_t + \varepsilon_t; \\ a_t &= a_{t-1} + b_t \cdot 1; \\ b_t &= b_{t-1} + v_t; \\ S_t &= S_{t-L} + g_t, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $\varepsilon_t, v_t, g_t$  — случайные некоррелированные величины с нулевым математическим ожиданием, постоянными дисперсиями  $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_v^2, \sigma_g^2$  и отсутствием автокорреляции.

Для определенного класса процессов удалось установить связь между параметрами сглаживания и определить их оптимальные значения. Автоковариационная функция (АКФ) стационарного ряда вторых разностей  $Z_t (Z_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}, t = 3, \dots, N)$  несезонного процесса  $x_t$  имеет следующие свойства:

$$M(Z_t, Z_{t+k}) = \begin{cases} (M+6)\sigma_\varepsilon^2, & k=0; \\ -4\sigma_\varepsilon^2, & |k|=1; \\ \sigma_\varepsilon^2, & |k|=2; \\ 0, & |k|>2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Автоковариационная функция стационарного разностного ряда  $Z_t$  ( $Z_t = \nabla \nabla_L x_t$ ) сезонного процесса  $x_t$ , имеет свойства:

$$M(Z_t, Z_{t+k}) = \begin{cases} (LD^2 + 2M^2 + 4)\sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ ((L-1)D^2 - M^2)\sigma_\varepsilon^2, & k = 1 \\ (L-k)D^2\sigma_\varepsilon^2, & 1 < |k| < L-1; \\ (1+D^2)\sigma_\varepsilon^2, & |k| = L-1; \\ -2\sigma_\varepsilon^2, & |k| = L; \\ \sigma_\varepsilon^2, & |k| = L+1; \\ 0, & k > L+1, \end{cases} \quad (4.21)$$

где  $D^2$  и  $M^2$  — константы, определяемые отношениями дисперсий компонент процесса  $D^2 = \sigma_v^2 / \sigma_\varepsilon^2$ ;  $M^2 = \sigma_g^2 / \sigma_\varepsilon^2$ .

Из анализа автоковариационных функций можно получить свойства АКФ разностных рядов.

Для несезонных процессов  $r_i$  должны удовлетворять трем условиям:

$$\begin{aligned} -0,667 \leq r_i < 0; \\ r_2 / r_1 \approx -0,25; \\ r_2 \approx 0, \quad k > 2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

АКФ разностных рядов сезонных процессов должна удовлетворять пяти условиям:

$$\begin{aligned} -0,5 < r_i < 0; \\ 0 < r_k < \frac{(L-k)}{(L+2)} \quad \text{при } k = \overline{2, L-2}; \\ 1/(L+1) < r_{2-1} < 0,25; \\ r_2 / r_{L+1} \approx -2/1; \\ r_k \approx 0 \quad \text{при } k > L+1. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Эти соотношения используются для априорной идентификации процессов.

Оптимальные значения параметров адаптации связаны следующими соотношениями:



$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2+h}{1+h}; \\ \alpha_2 &= h; \\ \alpha_3 &= \frac{h_1(1+h)}{1-h}, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

где

$$h = \sqrt{0,5g\sqrt{1 + 1/16g^2} - 0,125g^2};$$

$$h_1 = 0,5g_1(\sqrt{g_1^2 + 4} - g_1);$$

$$g^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_g^2}; \quad g_1 = \frac{\sigma_g^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2}.$$

Следует отметить, что соотношения коэффициентов сглаживания для несезонных процессов являются частным случаем (4.21), когда  $\sigma_g^2 = 0$ .

Дисперсия ошибки прогнозирования на один шаг вперед рассчитывается следующим образом:

$$D_\varepsilon(1) = (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_g^2) \frac{1+h}{1-h} + \frac{h_1^2(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2) + (1-h_1)\sigma_g^2}{2h_1 - h_1^2}. \quad (4.25)$$

Таким образом, алгоритм реализации данного метода состоит в следующем. На первом этапе проводится идентификация исследуемого временного ряда, целью которой является определение степени его соответствия стохастическому процессу Тейла—Вейджа. Для этого сначала вычисляются разностный ряд  $Z_t$  и его автоковариационная функция. В случае принятия гипотезы о генерировании временного ряда наблюдений процессом Тейла—Вейджа, т.е. выполнения всех условий для АКФ, переходят ко второму этапу. В противном случае данный метод использовать нецелесообразно. Следует отметить, что формально метод можно применять во всех случаях, но вычисленные значения параметров сглаживания будут оптимальными лишь при соблюдении требуемых свойств автоковариационной функции разностного ряда.

На втором этапе исходя из свойств автоковариационной функции и теоретических соотношений дисперсии компонент процесса определяют приближенную оценку величин  $g^2$  и  $g_1^2$ , на основе которых вычисляют набор параметров сглаживания. Начальные оцен-

ки параметров, необходимые для начала рекуррентной процедуры построения модели, вычисляют по некоторой выборке ряда: параметры  $\hat{a}_0, \hat{b}_0$  — как оценки линейной регрессии по МНК на нескольких первых точках, а оценки сезонных коэффициентов  $S_0$  — как отклонение сглаженных уровней от фактических.

Далее экспериментальным путем в окрестности грубых оценок величин  $g^2$  и  $g_1^2$  (обычно они располагаются около нуля) находят пару их значений, минимизирующих критерий оптимизации, в качестве которого обычно выступает дисперсия ошибок прогнозирования на один шаг вперед. На завершающем этапе метода на основе коэффициентов сглаживания, соответствующих оптимальным значениям величин  $g^2$  и  $g_1^2$ , строится прогнозная модель и определяются доверительные интервалы прогнозных оценок.

Из табл. 4.5, в которой для всех пяти показателей приведены АКФ разностных рядов, следует, что все условия выполняются лишь для ряда 2 (см. знак «+»). В результате перебора было установлено, что минимальное значение дисперсии достигается при  $g = 6 \cdot 10^{-6}$ . В этом случае  $d_1 = 0,068, d_2 = 0,035$ . Модель прогнозирования имеет вид

$$x_t = 167,4 + 5,50t. \quad (4.26)$$

Техника ее построения после определения параметров сглаживания идентична процедуре построения модели Хольта.

Таблица 4.5

АКФ разностных рядов

| Ряд | Лег   |       |       |       |       |       |       |      | Условия |   |   |   |   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|---------|---|---|---|---|
|     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8    | 1       | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1   | -0,56 | -0,20 | 0,52  | -0,29 | -0,13 |       |       |      | +       | - | - |   |   |
| 2   | -0,53 | 0,15  | -0,29 | 0,35  | -0,23 |       |       |      | +       | + | + |   |   |
| 3   | -0,27 | -0,15 | -0,01 | -0,04 | -0,21 |       |       |      | +       | - | + |   |   |
| 4   | -0,41 | -0,18 | -0,12 | 0,47  | -0,26 | -0,08 | -0,10 | 0,42 | +       | + | - | - | - |
| 5   | -0,26 | 0,11  | -0,20 | -0,20 | -0,18 | 0,08  | -0,16 | 0,03 | +       | + | + | - | + |

## 4.5. Метод эволюции

В целях адаптации параметра сглаживания однопараметрической модели к изменениям в динамике ряда можно, используя три различных параметра, называемых соответственно «нормальным» ( $\alpha$ ), «низким» ( $\alpha - h$ ) и «высоким» ( $\alpha + h$ ), получать не одну, а сразу три оценки следующего уровня ряда. При этом оценка, полученная при нормальном значении параметра, считается прогнозом, а остальные две являются контрольными.

Получив новый фактический уровень ряда, определяют значение параметра, давшее наименьшую абсолютную или сглаженную ошибку и, следовательно, лучшее для предыдущего шага. Предполагается, что оно будет лучшим и на текущем шаге прогнозирования. Данное значение считается нормальным. Уже от него строятся новые «низкое» и «высокое» значения ( $\alpha \pm h$ ), которые должны находиться в некотором интервале ( $h; 1-h$ ).

Таким образом, значение параметра сглаживания, выбранное первоначально произвольно, постоянно изменяется, причем его изменение носит компенсирующий характер и направлено на скорейшее устранение постоянно возникающих ошибок прогнозирования.

Эта идея эволюции получила дальнейшее развитие для модели Хольта—Уинтерса. Модифицированная схема реализует всевозможные пробы при различных сочетаниях значений параметров сглаживания, заданных из расчета по три значения на каждый параметр. При  $k$  управляемых параметрах в каждый момент времени вычисляется  $(2^k + 1)$  оценок будущего наблюдения, и одна из них, соответствующая центральной точке, т.е. точке, координаты которой отвечают «нормальным» значениям параметра сглаживания, считается прогнозом.

Анализируя точности пробных оценок, можно принять решение о переносе центральной точки в точку плана, давшую минимальную ошибку.

В табл. 4.6 представлен фрагмент построения мультипликативной модели Хольта—Уинтерса методом эволюции. Оценки параметров линейной модели  $a_0 = 200,65$  и  $b_0 = 5,69$  (см. строку для  $t = 0$ ) получены методом наименьших квадратов по первым восьми уровням эмпирического ряда, представленного в графе II табл. 4.3. Коэффициенты сезонности предыстории  $F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0$  занесены в графу V.

Начальными значениями всех параметров адаптации является  $\alpha_i = 0,15$  ( $i = \overline{1,3}$ ) с шагом изменения  $h = 0,10$ . Процесс расчета проиллюстрируем на одном шаге, например при переходе со 2-го на 3-й уровень. Для удобства пробные расчеты внесем в таблицу — строки 2а, 2б, 2с. Полученные по этим альтернативам ретропрогнозы — соответственно 401,68; 403,30 и 405,15 — сравниваем с эмпирическим значением  $x_2 = 409$ .

Минимальная ошибка этих прогнозов  $\epsilon_3 = 409 - 405,15 = 3,85$ . Следовательно, для  $t = 2$  принимаем  $\alpha_i = 0,35$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Эту точку  $\alpha = (0,35; 0,35; 0,35)$  будем считать для следующего шага ( $t = 3$ )

Таблица 4.6

**Построение трехпараметрической мультипликативной модели на основе метода эволюции**

| $t$  | $x_t$  | $a_t$  | $b_t$ | $F_t$ | $\hat{x}_t$ | $\varepsilon_t$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
|------|--------|--------|-------|-------|-------------|-----------------|------------|------------|------------|
| I    | II     | III    | IV    | V     | VI          | VII             | VIII       | IX         | X          |
| -3   |        |        |       | 0,584 |             |                 |            |            |            |
| -2   |        |        |       | 1,078 |             |                 |            |            |            |
| -1   |        |        |       | 1,826 |             |                 |            |            |            |
| 0    |        | 200,65 | 5,69  | 0,511 |             |                 |            |            |            |
| 1    | 124,00 | 207,24 | 5,82  | 0,586 | 120,50      | 3,50            | 0,15       | 0,15       | 0,15       |
| 2a   | 236,50 | 214,01 | 5,97  | 1,082 | 229,68      | 6,82            | 0,15       | 0,15       | 0,15       |
| 2b   | 236,50 | 214,64 | 6,22  | 1,084 | 229,68      | 6,82            | 0,25       | 0,25       | 0,25       |
| 2c   | 236,50 | 215,28 | 6,60  | 1,083 | 229,68      | 6,82            | 0,35       | 0,35       | 0,35       |
|      | 409,00 |        |       |       | 401,68      | 7,32            |            |            |            |
|      | 409,00 |        |       |       | 403,30      | 5,70            |            |            |            |
|      | 409,00 |        |       |       | 405,15      | 3,85            |            |            |            |
| 2=2c | 236,50 | 215,28 | 6,60  | 1,083 | 229,68      | 6,82            | 0,35       | 0,35       | 0,35       |
| 3    | 409,00 | 222,62 | 6,86  | 1,830 | 405,15      | 3,85            | 0,35       | 0,35       | 0,35       |
| ...  | ...    | ...    | ...   | ...   | ...         | ...             | ...        | ...        | ...        |

центральной и уже от нее строить восемь других наборов коэффициентов сглаживания.

На последующих стадиях расчета следует корректировать параметры модели при различных сочетаниях коэффициентов сглаживания, например:

|    |      |      |      |
|----|------|------|------|
| 1. | 0,35 | 0,15 | 0,15 |
| 2. | 0,45 | 0,25 | 0,25 |
| 3. | 0,55 | 0,35 | 0,35 |
| 4. | 0,35 | 0,35 | 0,35 |
| 5. | 0,35 | 0,35 | 0,15 |
| 6. | 0,35 | 0,15 | 0,35 |
| 7. | 0,55 | 0,35 | 0,15 |
| 8. | 0,55 | 0,15 | 0,35 |
| 9. | 0,55 | 0,15 | 0,15 |

#### 4.6. Метод гармонических весов

В методе гармонических весов (МГВ), который разработан Хельвигом, идея дисконтирования данных реализована иначе, чем в рассмотренных выше методах. Параметр прироста линейной модели, используемой для прогнозирования, находится путем взвешивания на основе гармонических весов приростов сглаженного ряда. Сглаживание осуществляется линейной функцией для каждого из  $(N - k + 1)$  перекрывающихся сегментов одинаковой длины  $k$ :

$$x_i(t) = a_i + b_i t \quad (i = 1, 2, \dots, N - k + 1). \quad (4.27)$$

Коэффициенты всех моделей скользящего тренда определяются по формулам

$$b_i = \frac{\sum x_i t - \frac{1}{k} \sum x_i + \sum x}{\sum t^2 - \frac{1}{k} (\sum t)^2}; \quad (4.28)$$

$$a_i = \frac{1}{k} \sum x_i - \frac{1}{k} b_i \sum t.$$

Здесь суммирование по  $t$  производится от  $i$  до  $(i + k - 1)$ . После получения всех  $(N - k + 1)$  оценок параметров определяются сглаженные значения ряда:

$$\hat{x}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t x_i(t), \quad t < k; \quad (4.29)$$

$$\hat{x}_t = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t x_i(t), \quad k \leq t \leq T - k + 1; \quad (4.30)$$

$$\hat{x}_t = \frac{1}{T - t + 1} \sum_{i=t-k+1}^{T-k+1} x_i(t), \quad t > T - k + 1. \quad (4.31)$$

Предположим, что приросты сглаженного ряда являются случайной величиной, для которой оценкой математического ожидания является средний уровень  $\bar{p}$  с дисперсией  $S_{\bar{p}}^2$ . В этом случае средний прирост можно использовать для получения прогноза на 1, 2 и более шагов вперед, прибавляя его к уровню процесса, в качестве которого можно принять последний уровень сглаженного ряда. Учитывая информационную неравноценность данных, Хельвиг предложил использовать гармоническую среднюю вида

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{N-1} C_{i+1}^N p_{i+1}; \quad (4.32)$$

$$S_{\bar{p}}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} C_{i+1}^N (p_{i+1} - \bar{p})^2, \quad (4.33)$$

$$\text{где} \quad p_{t+1} = \hat{x}_{t+1} - \hat{x}_t \quad (4.34)$$

— приросты сглаженного ряда  $\hat{x}_t$ ;

$$C_{t+1} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^t \frac{1}{N-1} \quad (t=1, \dots, N-1) \quad (4.35)$$

— веса приростов.

Таким образом, все веса приростов положительны и в сумме дают единицу.

Прогноз на  $\tau$  шагов вперед получается по формуле

$$\hat{x}_t = a + b(t - N) \quad (t = N + 1, \dots, N + \tau), \quad (4.36)$$

где  $a = \hat{x}N$ ;  $b = \bar{p}$ .

Доверительные интервалы рассчитываются по следующей формуле:

$$\hat{x}_t \pm S_{\bar{p}} d, \quad (4.37)$$

где  $d$  — целое положительное число, задаваемое в интервале от 2 до 4.

Получим прогнозные оценки на основе этого метода для показателя «Прибыль КБ», используя первые 25 уровней временного ряда.

Автоковариационная функция ряда, рассчитанная ранее, при построении АР-модели плавно убывает, что свидетельствует о большей зависимости последних уровней, т.е. о целесообразности дисконтирования данных. Выберем длину сегмента в пять уровней, т.е.  $K=5$ . Значит, надо построить  $25 - 5 + 1 = 21$  уравнение.

В табл. 4.7 приведены результаты оценки параметров этих уравнений ( $a_i, b_i = 1,21$ ), сглаженные уровни, их приросты и веса.

На примере одного, пусть шестого ( $i=6$ ) уравнения  $x_6(t) = a_6 + b_6 t$  ( $5 < t < 9$ ) покажем технологию их расчета:

$$b_6 = \frac{\sum_{t=6}^{10} x_t \cdot t - \frac{1}{k} \sum_{t=6}^{10} t \sum_{t=6}^{10} x_t}{\sum_{t=6}^{10} t^2 - \frac{1}{k} \left( \sum_{t=6}^{10} t \right)^2} = \frac{4673 - \frac{1}{5} \cdot 40 \cdot 579}{330 - \frac{1}{5} \cdot 1600} = 4,1;$$

$$a_6 = \frac{1}{k} \sum_{t=6}^{10} x_t - \frac{1}{k} b_6 \sum_{t=6}^{10} t = \frac{1}{5} \cdot 579 - \frac{1}{5} \cdot 4,1 \cdot 40 = 83,0.$$

Для получения сглаженного, например, шестого ( $t=6$ ) уровня ряда воспользуемся формулой (4.30), из которой имеем:

Таблица 4.7

Прогнозирование ряда «Прибыли КБ» на основе МГВ ( $k = 5$ )

| $t$                             | $x_t$ | $v_t$ | $b_i$ | $\hat{a}_t$ | $P_{t+1}$ | $C_{t+1}$ | $P_{t+1}, C_{t+1}$ | $E_t$ |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------------|-----------|-----------|--------------------|-------|
| 1                               | 95    | 92,5  | 3,1   | 95,6        | -         | -         | -                  | -0,5  |
| 2                               | 101   | 32,2  | 3,3   | 98,8        | 3,2       | 0,002     | 0,006              | 2,1   |
| 3                               | 102   | 93,5  | 2,7   | 101,8       | 3,1       | 0,004     | 0,012              | -3,6  |
| 4                               | 100   | 103,8 | 0,6   | 105,2       | 3,4       | 0,005     | 0,017              | -4,7  |
| 5                               | 111   | 93,1  | 2,9   | 107,6       | 2,4       | 0,007     | 0,017              | 7,5   |
| 6                               | 113   | 83,0  | 4,1   | 109,4       | 1,8       | 0,010     | 0,018              | 1,9   |
| 7                               | 109   | 72,3  | 5,1   | 110,7       | 1,3       | 0,012     | 0,016              | -6,3  |
| 8                               | 104   | 55,6  | 6,9   | 112,9       | 2,2       | 0,014     | 0,031              | -11,1 |
| 9                               | 130   | 108,0 | 2,0   | 120,2       | 7,2       | 0,016     | 0,115              | 20,8  |
| 10                              | 123   | 114,8 | 1,2   | 125,3       | 5,1       | 0,019     | 0,097              | 0,9   |
| 11                              | 125   | 117,9 | 1,1   | 126,6       | 4,2       | 0,022     | 0,092              | -3,1  |
| 12                              | 141   | 149,0 | -1,1  | 133,3       | 3,7       | 0,025     | 0,093              | 7,5   |
| 13                              | 131   | 147,0 | -1,2  | 132,7       | -0,6      | 0,028     | -0,168             | -14,3 |
| 14                              | 126   | 67,4  | 4,2   | 131,1       | -1,6      | 0,032     | -0,051             | -10,0 |
| 15                              | 138   | 75,5  | 3,7   | 131,6       | 0,5       | 0,035     | 0,018              | 5,2   |
| 16                              | 132   | 85,6  | 2,9   | 132,3       | 0,6       | 0,039     | 0,023              | -3,5  |
| 17                              | 122   | 65,8  | 4,0   | 134,7       | 2,4       | 0,044     | 0,106              | -8,3  |
| 18                              | 155   | 168,6 | -1,1  | 141,9       | 7,2       | 0,049     | 0,353              | 28,8  |
| 19                              | 145   | 57,5  | 4,3   | 143,0       | 1,1       | 0,055     | 0,061              | -2,2  |
| 20                              | 135   | 37,8  | 5,1   | 143,9       | 0,8       | 0,062     | 0,050              | -14,5 |
| 21                              | 152   | 139,2 | 0,6   | 148,0       | 4,1       | 0,071     | 0,291              | 5,5   |
| 22                              | 146   | -     | -     | 149,7       | 1,8       | 0,081     | 0,146              | -7,8  |
| 23                              | 161   | -     | -     | 154,8       | 5,1       | 0,095     | 0,485              | 17,7  |
| 24                              | 156   | -     | -     | 156,9       | 2,1       | 0,116     | 0,244              | -4,7  |
| 25                              | 150   | -     | -     | 154,2       | -2,7      | 0,157     | -0,424             | -15,3 |
| $\Sigma$                        |       |       |       |             | 58,4      | 1,000     | 1,648              | -0,5  |
| Среднеквадратическая ошибка     |       |       |       |             |           |           |                    | 11,2  |
| Средняя относительная ошибка, % |       |       |       |             |           |           |                    | 6,5   |
| Максимальная ошибка             |       |       |       |             |           |           |                    | 28,8  |

$$\hat{x}_6 = \frac{1}{5} \sum_{i=6-5+1}^6 x_i(t) = \frac{1}{5} (x_2(6) + x_3(6) + x_4(6) + x_5(6) + x_6(6)),$$

где

$$x_2(6) = 92,2 + 3,3 \cdot 6 = 112,0; \quad x_3(6) = 93,5 + 2,7 \cdot 6 = 104,3;$$

$$x_4(6) = 103,8 + 0,6 \cdot 6 = 105,6; \quad x_5(6) = 93,1 + 2,9 \cdot 6 = 110,5;$$

$$x_6(6) = 83,0 + 4,1 \cdot 6 = 107,6.$$

Таким образом,  $\hat{x}_6 = \frac{1}{5} \cdot 545,4 = 109,4$ .

Аналогично рассчитываются и другие сглаженные уровни ряда за исключением крайних первых и последних четырех уровней, при вычислении которых используется не 5, а меньшее количество значений.

Определив взвешенные приросты сглаженных уровней, получим модель

$$\hat{x}_t = 154,2 + 1,648(t - 25) \quad (t = 26, 27, \dots). \quad (4.38)$$

Отметим ряд важных, на наш взгляд, моментов. Во-первых, величина среднего прироста  $\bar{p} = 58,4 / 25 = 2,433$  почти в 1,5 раза больше взвешенного с учетом гармонических коэффициентов. Таким образом, результаты прогнозирования по соответствующим моделям будут существенно различаться.

Следующее замечание касается оценок точности и адекватности построенной модели. Если эти характеристики определять на основе анализа расхождений между фактическими и сглаженными уровнями ряда, то преимущество будет отдаваться моделям с меньшей длиной сегмента, поскольку именно меньшая длина сегмента приводит к более близким значениям сглаженного и фактического рядов, но разброс их приростов вокруг среднего будет больше.

Средняя относительная ошибка в МГВ существенно меньше (в 2–3 раза), чем у других моделей, что, однако, не является свидетельством ее высоких прогностических свойств. Действительно, на участке ретропрогноза их значения вполне сопоставимы. На наш взгляд, более точную оценку статистических свойств модели можно получить на основе ряда, сформированного из отклонений от фактических уровней прогнозных оценок на один шаг вперед каждой из построенной на основе отдельных сегментов линейных моделей. Первые  $k$  элементов этого ряда можно получить на основе первых  $k$  моделей, используя их для прогнозирования на один шаг назад. В последней графе табл. 4.7 приведены вычисленные таким образом отклонения. Величина их средней относительной ошибки  $|\bar{\varepsilon}_1| = 6,51\%$ , а не 3,05%, как в первом случае. Отклонения удовлетворяют условиям нормальности, случайности и нулевого среднего, но являются автоковариационными.

#### **4.7. Моделирование финансового рынка с использованием сплайн-функций**

Понятие сплайна как математического объекта было введено в 1946 г. Шенбергом (Shoenberg I.J.) в его работе «Contributions to the problem of equidistant data by analytic functions». До этого момента сплайнами назывались длинные тонкие полоски из гибкого материала, использовавшиеся в чертежном деле для проведения гладких кривых через несколько точек. По-видимому, здесь сыграло роль сходство графиков сплайн-функций и кривых, получаемых при помощи такого чертежного сплайна.

Хотя сплайны и появились в 1946 г., широкое распространение они получили лишь в 60-х гг. в связи с развитием вычисли-



тельной техники и успешным применением их при конструировании в судостроительной, авиакосмической и автомобильной промышленности. Сплайны дают возможность адекватно отобразить тенденцию ряда на каждом его участке и вместе с тем обладают требуемой гладкостью. С другой стороны, не остаются незамеченными и все структурные изменения, присутствующие в процессе, являясь местами «склейки» на графике сплайн-функции. Изменяя параметры сплайн-функции, можно аппроксимировать ряд с любой степенью точности и любой заданной гладкостью, т.е. адаптировать модель к изменившимся условиям. В связи с этими свойствами сплайн-функции были причислены в данной работе к классу адаптивных методов и моделей. Применение сплайн-аппроксимирующих методов является одним из наилучших способов исследования временного процесса, при условии наличия в нем структурных изменений.

Перейдем теперь непосредственно к математическим формулировкам. Будем называть **сеткой** на отрезке  $[a, b]$  множество точек  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ , а каждую из  $k+1$  точек  $x_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) — **узлом**.

Функцию  $S(x)$  назовем **сплайном** (сплайн-функцией) степени  $n$  и дефекта  $d$  на сетке  $\Delta$ , если:

1) на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $S(x)$  совпадает с некоторым многочленом степени не более  $n$ ; (Говорят, что сплайн имеет дефект  $d$ , если сплайн непрерывен вместе со всеми производными до порядка  $(n - d)$  включительно всюду на отрезке  $[a, b]$ .)

2) функция  $S(x)$  на всем отрезке  $[a, b]$  непрерывна и имеет непрерывными все производные вплоть до производной порядка  $(n - d)$ .

Если прямо не указывается обратное, то значение дефекта  $d$  обычно выбирается равным единице.

При рассмотрении задачи приближения динамических рядов полиномиальными сплайнами возможны две различные постановки задачи.

**Задача аппроксимации с точными условиями.** Имеется числовой ряд  $y_0, y_1, \dots, y_k$  значений некоторой величины в моменты времени  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Значения числового ряда заданы точно. Требуется найти сплайн-функцию на сетке  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$  такую, чтобы ее значения в узловых точках  $x_0, x_1, \dots, x_k$  совпадали со значениями числового ряда  $y_0, y_1, \dots, y_k$ .

Эта задача возникает после применения к исходному ряду значений методов сглаживания (например, метода скользящего среднего), когда из ряда уже удалена случайная компонента  $\varepsilon_t$ .

Рассмотрим важные частные случаи этой задачи и методы их решения.

**Многочлен Лагранжа.** В случае если на сетке  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$  рассматривается сплайн степени  $k$  с нулевым дефектом, мы приходим к вырожденному случаю, когда из-за отсутствия дефекта на каждом из отрезков сплайн-функция  $S(x)$  будет являться одним и тем же многочленом степени  $k$ . Данный многочлен и является многочленом Лагранжа:

$$S(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j = \sum_{j=0}^k y_j L_j(x),$$

где

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}.$$

Нетрудно заметить, что  $L_j(x_j) = 1$  и  $L_j(x_i) = 0$  при  $i \neq j$  и, следовательно,  $S_j(x_j) = y_j$ .

*Пример.*

Пусть  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 8$ ,  $x_4 = 10$ ,

$y_1 = 1$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 8$ ,  $y_4 = 20$ .

Многочлен Лагранжа будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 \frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{(4-6)(4-8)(4-10)} + 3 \frac{(x-4)(x-8)(x-10)}{(6-4)(6-8)(6-10)} + \\ &+ 8 \frac{(x-4)(x-6)(x-10)}{(8-4)(8-6)(8-10)} + 20 \frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(10-4)(10-8)(10-6)} = \\ &= -\frac{1}{48}(x-6)(x-8)(x-10) + \frac{3}{16}(x-4)(x-8)(x-10) - \\ &- \frac{1}{2}(x-4)(x-6)(x-10) + \frac{5}{12}(x-4)(x-6)(x-8) = \\ &= \frac{1}{24}(2x^3 - 27x^2 + 142x - 240). \end{aligned}$$

Однако многочлен Лагранжа имеет существенный недостаток. При малейшей негладкости приближаемой функции или погрешности измерений у графика многочлена появляются очень значительные пульсации на концах отрезка. Поэтому приближение ряда многочленом Лагранжа обычно используется лишь как вспомогательный инструмент в других более устойчивых к выбросам методах.

**Кусочно-линейная интерполяция.** На каждом из отрезков сетки  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $S(x)$  линейна. Ее график будет представлять собой ломаную. Для определения коэффициентов прямых на каждом из отрезков достаточно подставить в уравнение прямой значения числового ряда в концах отрезка и решить линейную систему из двух уравнений и двух неизвестных:

$$\begin{cases} y_i = ax_i + b; \\ y_{i+1} = ax_{i+1} + b. \end{cases}$$

В силу своей простоты этот случай особого интереса не представляет. Однако он используется, когда требуется только непрерывность функции и не накладывается требование гладкости.

**Интерполяция параболическими сплайнами.** На каждом из отрезков сетки  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $S(x)$  представляет собой многочлен второй степени, формулу которого на каждом из отрезков можно представить в следующем виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2.$$

Обозначим через  $d_i$  значения первой производной сплайн-функции в точках  $x_i$ . Исходя из требований

$$\begin{cases} S_i(x_i) = y_i; \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}; \\ S_i'(x_i) = d_i, \end{cases}$$

получаем общий вид:

$$S_i(x) = y_i + d_i(x - x_i) + \frac{(y_{i+1} - y_i - d_i h_i)(x - x_i)^2}{h_i^2}, \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$ .

Коэффициенты  $d_i$  находятся из требования непрерывности первой производной в точках  $x_i$  ( $i = 2, \dots, n-1$ ):

$$S'_i(x_i) \equiv d_i = d_{i-1} + 2 \left( \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}} - d_{i-1} \right) \equiv S'_{i+1}(x_i),$$

откуда получаем

$$d_i = \frac{2(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}} - d_{i-1}.$$

По этой формуле получаем все  $d_i$ , задав значение производной  $d_1$  на левом конце отрезка  $[x_1, x_2]$ . Значение  $d_1$  выбирается из соображений минимизации интеграла

$$I = \int_a^b S'^2(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i+1} - d_i)^2 h_i,$$

что обеспечивает наименьшую пульсацию получаемого сплайна.

**Интерполяция кубическими сплайнами.** Этот метод применяется чаще всего. Поскольку существует большое количество разновидностей и частных случаев, рассмотрим лишь основные из них.

Аналогично двум предыдущим методам на каждом из отрезков сетки  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $S(x)$  представляет собой многочлен третьей степени. Также накладывается дополнительное условие непрерывности на всем отрезке первой и второй производных. Таким образом строится кубический сплайн с дефектом единица.

Рассмотрим, как строится кубический сплайн. Обозначим  $d_i$  значения первой производной сплайн-функции в точках  $x_i$ . Тогда на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  мы будем иметь четыре параметра —  $y_i, y_{i+1}, d_i, d_{i+1}$ , которые полностью определяют на отрезке многочлен третьей степени.

Через эти параметры коэффициенты каждого кубического многочлена выражаются следующим образом:

$$S_i(x) = y_i + h_i t (d_i + t(b_i + a_i t)), \quad (i = 1, \dots, n),$$

где

$$h_i = x_{i+1} - x_i;$$

$$t = (x - x_i) / h_i;$$

$$a_i = -2 \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} + d_i + d_{i+1};$$

$$b_i = -a_i + 2 \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - d_i.$$

Если будут найдены значения  $d_i$ , то мы однозначно определим сплайн-функцию  $S(x)$ . Значения  $d_i$  находятся из требования непрерывности второй производной в точках  $x_i, \dots, x_n$ . Продифференцировав дважды уравнение многочлена и приравняв значения второй производной в точках  $x_i, \dots, x_n$ , мы получим  $(n-2)$  уравнения для нахождения  $d_i$ :

$$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i), \quad (i = 2, \dots, n-1),$$

а именно

$$\frac{d_{i-1}}{h_{i-1}} + 2d_i \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + \frac{d_{i+1}}{h_{i+1}} = 3 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}^2} \right).$$

Для полной определенности не хватает двух уравнений, которые добавляются исходя из дополнительных условий. Приведем наиболее часто употребляемые.

1. Условие «отсутствие узла» в приграничных точках  $d_1$  и  $d_n$  выбираются так, чтобы  $S_1(x) \equiv S_2(x)$  и  $S_{n-2}(x) \equiv S_{n-1}(x)$ .

2. Экстраполяция в приграничных точках. В качестве значений  $S'(x_1) = d_1$  и  $S'(x_n) = d_n$  выбираются значения  $Q'_k(x_1)$  и  $R'_k(x_n)$ , где  $Q_k(x)$  и  $R_k(x)$  — интерполяционные многочлены Лагранжа, построенные по  $k$  ( $k > 3$ ) точкам  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  и  $(x_{n-k}, y_{n-k}), \dots, (x_n, y_n)$  соответственно. Либо же аналогичным образом определяется значение второй производной в концевых точках.

Все же обычно в качестве дополнительных уравнений берутся уравнения вида  $S''(a) = S''(b) = 0$ . В этом случае получающийся сплайн обладает свойством минимальности функционала

$J(f) = \int_a^b f''(x) dx$  среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций  $f(x)$ , обладающих, в свою очередь, свойством  $f(x_i) = y_i$  для  $i = 1, \dots, n$ . При этом система приобретает трехдиагональный вид:

$$\left. \begin{aligned} 2d_1 + d_2 &= \frac{3(y_2 - y_1)}{h_1}; \\ \frac{d_{i-1}}{h_{i-1}} + 2d_i \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + \frac{d_{i+1}}{h_{i+1}} &= 3 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}^2} \right); \\ d_{n-1} + 2d_n &= \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}}. \end{aligned} \right\}$$

Эта система может быть решена любым методом решения систем линейных уравнений.

Все приведенные методы дают функцию, обладающую требуемой гладкостью. Примененные после предварительного использования методов фильтрации (сглаживания), они вполне подошли бы для прогнозирования дальнейшего поведения ряда, однако на практике часто не удается с помощью методов сглаживания полностью избавиться от случайной компоненты, сохранив основную тенденцию. В противном случае происходит не сглаживание, а скорее спрямление ряда. Данные остаются «зашумлены», т.е. содержат некоторую остаточную случайную компоненту, сильно влияющую на результаты расчетов. Кроме того, следует учесть многочисленные искажения основной тенденции, свойственные методам фильтрации. Исходя из требования полного удаления случайной компоненты ряда и сохранения основной тенденции, мы и получаем вторую задачу.

#### **Задача приближения сплайнами зашумленных данных.**

Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_n$  есть ряд значений некоторой величины в моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Задача состоит в том, чтобы подобрать сетку  $\Delta$  и на этой сетке сплайн  $S(x)$ , наиболее точно отражающий тенденцию ряда. Так как ряд данных содержит случайную составляющую, то строится сплайн-функция, проходящая не непосредственно через точки ряда, а лежащая вблизи них. При этом в качестве меры близости сплайна исходному ряду выбирается некоторый функционал. Чаще всего им является среднеквадратическое отклонение.

Использование сплайнов для аппроксимации зашумленных данных предполагает наличие в них структурных сдвигов, иначе можно использовать обычные методы кривых роста. При выборе вида сплайн-функции теоретически можно рассматривать два крайних случая:

- наблюдаемый структурный сдвиг имеет гладкий, плавный характер, при котором место перехода от одной тенденции к другой на графике практически не заметно;
- в месте перехода наблюдается резкий излом.

Для описания первого случая лучше всего подходит кубический сплайн, обладающий свойством наибольшей гладкости, а для второго — линейный.

Задачу приближения сплайнами зашумленных данных можно условно разделить на две части.

1. Определение вида сплайн-функции, наиболее точно отражающей особенности поведения временного ряда, и нахождение

сетки, на которой будет строиться сплайн. При этом выявляются все участки ряда, на которых его структура постоянна, и те точки, в которых происходит изменение структуры. Эти точки выбираются в качестве узлов сетки.

2. Непосредственное нахождение сплайна, которое заключается в поиске коэффициентов многочленов на каждом участке сетки.

*Замечание.* Наилучшие результаты дает выбор точек сетки таким образом, чтобы построенный на данной сетке сплайн обладал минимальным среднеквадратическим отклонением от исходного ряда, т.е. сплайн, построенный на любой другой сетке с тем же количеством узлов должен иметь большее (либо равное) среднеквадратическое отклонение. Задача поиска такой сетки достаточно сложна, поэтому будем считать, что точки сетки заранее известны.

В случае когда задана сетка  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ , на которой требуется построить сплайн-функцию, линейный и кубический сплайны могут быть построены при помощи приведенных выше методов построения интерполирующих сплайнов по их значениям  $y_0, y_1, \dots, y_k$  в узлах сетки ( $S(x_i) \equiv y_i$ ). Таким образом, задачу построения сплайна можно свести к поиску столбца  $Y \equiv (y_0, y_1, \dots, y_k)^T$ .

**Построение линейного сплайна.** Итак, предполагается, что ряд имеет кусочно-линейную структуру. Структурные изменения происходят в некоторых точках  $x_1, \dots, x_{(k)}$ . Сплайн можно задавать его значениями  $y_1, y_2, \dots, y_k$  в точках склейки  $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$  и еще в двух точках на концах отрезка  $Y_{(0)} \equiv Y_{(a)}$  и  $Y_{(k+1)} \equiv Y_{(b)}$ .

Тогда каждый из отрезков ломаной определяется двумя параметрами  $a_i$  и  $b_i$ , характеризующими, например, угловые коэффициенты и высоту прямой над соответствующим интервалом:  $S_i(x) = a_i + b_i x$ . При этом получается довольно сложное выражение для  $S_i(x)$ :

$$S_i(x) = \frac{y_{(i-1)}x_{(i)} - y_{(i)}x_{(i-1)}}{x_{(i)} - x_{(i-1)}} + \left( \frac{y_{(i)} - y_{(i-1)}}{x_{(i)} - x_{(i-1)}} \right) x.$$

В связи с этим удобнее использовать дополнительные переменные  $w_1, w_2, \dots, w_k$ , определяемые следующим образом:

$w_1 = x$ , а все остальные  $w_i$  для  $i = 2, \dots, k$  вычисляются по формуле

$$w_i = \max(x - x_{(i-1)}, 0).$$

Формула линейного сплайна тогда записывается в виде

$$S(x) = a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k.$$

Параметры  $a_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ) представляют собой изменение коэффициента наклона при переходе от интервала  $[x_{(i-1)}, x_{(i)}]$  к интервалу  $[x_i, x_{(i+1)}]$ , а  $a_1$  определяет коэффициент наклона на первом интервале  $[a, x_{(1)}]$ . Первая производная линейного сплайна является ступенчатой функцией с разрывами в точках  $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ . В каждой точке разрыва  $x_{(i)}$  она претерпевает скачок, равный по величине значению коэффициента  $a_i$ . Значение производной сплайн-функции на интервале  $[x_{(i)}, x_{(i+1)}]$  равно сумме  $(a_1 + a_2 + \dots + a_i)$ .

Неизвестные параметры  $a_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ) находятся обычными регрессионными методами либо же методом наименьших квадратов. Например, можно производить вычисления, используя формулу линейного сплайна в качестве уравнения множественной линейной регрессии по переменным  $w_1, w_2, \dots, w_k$ .

**Построение кубического сплайна.** Если аппроксимируемый кубическим сплайном ряд значений в моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_n$  обозначить как  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , то  $S(t_i)$  будет сглаженное сплайном значение  $v_i$ . Обозначив  $m_i$  значения второй производной сплайн-функции  $S(x)$  в узлах сетки  $x_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ),  $S(x)$  на каждом из отрезков сетки  $[x_{i-1}, x_i]$  можно записать в следующем виде:

$$S_i(x) = \frac{x_i - x}{6h_i} \left[ (x_i - x)^2 - h_i^2 \right] m_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{6h_i} + \left[ (x - x_{i-1})^2 - h_i^2 \right] m_i + \frac{x_i - x}{h_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} y_i,$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 0, \dots, k$ ).

Следовательно,  $S(T) \equiv (S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n))^T$  — столбец сглаженных значений исходного ряда линейно зависит от столбца  $Y \equiv (y_0, y_1, \dots, y_k)^T$ .

В матричной форме эта зависимость будет записываться в виде  $S(T) = P M + Q Y$ , где столбец  $M \equiv (m_0, m_1, \dots, m_k)^T$ , а коэффициенты матриц  $P$  и  $Q$  размерности  $(n+1) \cdot (k+1)$  при условии, что  $x_{j-1} \leq t_i \leq x_j$  ( $i = 0, \dots, n$ ), задаются формулами:

$$P_{im} = \begin{cases} m = j-1 \Rightarrow (x_j - t_i)((x_j - t_i)^2 - h_j^2) / 6h_j; \\ m = j \Rightarrow (t_i - x_{j-1})((t_i - x_{j-1})^2 - h_j^2) / 6h_j; \\ m \neq j, m \neq j-1 \Rightarrow 0, \end{cases}$$



$$q_{im} = \begin{cases} m = j-1 \Rightarrow (x_j - t_i) / h_j; \\ m = j \Rightarrow (t_i - x_{j-1}) / h_j; \\ m \neq j, m \neq j-1 \Rightarrow 0. \end{cases}$$

Учитывая требования непрерывности второй производной, можно получить систему линейных уравнений для  $m_i$  из  $(k-1)$  уравнений:

$$(1-l_i)m_{i-1} + 2m_i + l_i m_{i+1} = \frac{6y_{i-1}}{h_i(h_i+h_{i+1})} - \frac{6y_i}{h_i h_{i+1}} + \frac{6y_{i+1}}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})},$$

$$\text{где } l_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}.$$

Граничные условия  $m_0 = \pi_0 m_1$  и  $m_k = \pi_k m_{k-1}$ , где  $|\pi_i| < 2$ , определяют два дополнительных уравнения.

В матричной форме эта система записывается следующим образом:

$$LM = NY,$$

где матрицы  $L$  и  $N$  имеют следующий вид:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2\pi_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1-l_1 & 2 & l_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-l_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & l_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-l_{k-1} & 2 & l_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\pi_k & 2 \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{h_1(h_1+h_2)} & \frac{-6}{h_1 h_2} & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{h_2(h_2+h_3)} & \frac{-6}{h_2 h_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-6}{h_{k-2} h_{k-1}} & \frac{6}{h_{k-1}(h_{k-2}+h_{k-1})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{6}{h_{k-1}(h_{k-1}+h_k)} & \frac{-6}{h_{k-1} h_k} & \frac{6}{h_k(h_{k-1}+h_k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{при } l_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}.$$

В силу невырожденности  $L$  величина  $M = L^{-1}HY$ , откуда получаем:

$$S(T) = PM + QY = (PL^{-1}H + Q)Y = WY.$$

Таким образом, для нахождения столбца неизвестных параметров  $Y$  надо минимизировать среднеквадратическое отклонение:

$$[V - S(T)]^T [V - S(T)] = (V - WY)^T (V - WY),$$

где  $V = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T$  — столбец значений временного ряда.

Применяя метод наименьших квадратов, находим столбец  $Y$ :

$$Y = [W^T W]^{-1} W^T V.$$

Зная столбец  $Y$ , можно найти коэффициенты многочленов сплайна на каждом из участков сетки при помощи описанного выше метода сплайн-интерполяции либо же воспользоваться записью  $S_i(x)$  через вторые производные  $m_i$ :

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (i = 1, \dots, k),$$

где

$$a_i = y_{i-1}; \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(m_i + 2m_{i-1})}{6};$$

$$c_i = \frac{m_{i-1}}{2}; \quad d_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{6h_i}; \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Заметим, что, проведя аналогичные действия для линейного сплайна, получим, что матрица  $W$  сократится до  $Q$  (в силу равенства нулю столбца вторых производных  $M$ ), и формула примет вид

$$Y = [Q^T Q]^{-1} Q^T V.$$

*Пример.*

Пусть мы имеем следующий ряд  $V = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T = (1, 3, 6, 8, 7, 6, 4, 5, 4)$  значений цен некоторой акции в моменты времени  $T \equiv t_0, t_1, \dots, t_n^T = (5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15)$ .

Число членов ряда 9, следовательно,  $n = 8$ .

Пусть также известно, что в момент времени 8 в динамике цен происходит структурное изменение. Таким образом, требуется построить аппроксимирующий сплайн на сетке  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\} = \{5, 8, 15\}$ , следовательно,  $k = 2$ .

Строим матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,56 & -0,44 & 0,00 \\ -0,44 & -0,56 & 0,00 \\ 0,00 & -1,86 & -1,14 \\ 0,00 & -2,86 & -2,14 \\ 0,00 & -2,86 & -3,14 \\ 0,00 & -2,14 & -2,86 \\ 0,00 & -1,14 & -1,86 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,67 & 0,33 & 0,00 \\ 0,33 & 0,67 & 0,00 \\ 0,00 & 0,86 & 0,14 \\ 0,00 & 0,71 & 0,29 \\ 0,00 & 0,43 & 0,57 \\ 0,00 & 0,29 & 0,71 \\ 0,00 & 0,14 & 0,86 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

При  $h_1 = 3$ ,  $h_2 = 7$  получим  $l_1 = 0,7$  и, задавая граничные условия  $m_0 = 0$  и  $m_2 = 0$ , получаем, в свою очередь, матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 2,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,30 & 2,00 & 0,70 \\ 0,00 & 0,00 & 2,00 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,20 & -0,29 & 0,09 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}.$$

Обратной к  $L$  будет матрица

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,00 & 0,00 \\ -0,08 & 0,50 & -0,18 \\ 0,00 & 0,00 & 0,50 \end{pmatrix}.$$

Располагая матрицами  $P$ ,  $Q$  и  $L^{-1}$ , легко вычислить матрицу  $W = (PL^{-1}H + Q)$ :

$$PL^{-1} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,24 & -0,22 & 0,08 \\ -0,18 & -0,28 & 0,10 \\ 0,14 & -0,93 & -0,25 \\ 0,21 & -1,43 & -0,57 \\ 0,21 & -1,43 & -1,07 \\ 0,16 & -1,07 & -1,05 \\ 0,09 & -0,57 & -0,73 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}, PL^{-1}H = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,04 & 0,06 & -0,02 \\ -0,06 & 0,08 & -0,02 \\ -0,19 & 0,27 & -0,08 \\ -0,29 & 0,41 & -0,12 \\ -0,29 & 0,41 & -0,12 \\ -0,21 & 0,31 & -0,09 \\ -0,11 & 0,16 & -0,05 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$W = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,62 & 0,40 & -0,02 \\ 0,28 & 0,75 & -0,02 \\ -0,19 & 1,12 & 0,06 \\ -0,29 & 1,12 & 0,16 \\ -0,29 & 0,84 & 0,45 \\ -0,21 & 0,59 & 0,62 \\ -0,11 & 0,31 & 0,81 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

Значения  $Y$  точек сетки, через которые будет проходить сплайн, вычисляются по формуле  $Y = [W^T W]^{-1} W^T V$ , где  $V$  — столбец значений цен исходного ряда:

$$W^T W = \begin{pmatrix} 1,72 & -0,48 & -0,43 \\ -0,48 & 4,38 & 1,22 \\ -0,43 & 1,22 & 2,27 \end{pmatrix}, (W^T W)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,62 & 0,04 & 0,10 \\ 0,04 & 0,27 & -0,14 \\ 0,10 & -0,14 & 0,53 \end{pmatrix}.$$

$$(W^T W)^{-1} W^T = \begin{pmatrix} 0,62 & 0,40 & 0,20 & -0,06 & -0,12 & -0,10 & -0,05 & 0,02 & 0,10 \\ 0,04 & 0,14 & 0,22 & 0,29 & 0,27 & 0,15 & 0,07 & -0,03 & -0,14 \\ 0,10 & -0,01 & -0,09 & -0,14 & -0,10 & 0,10 & 0,23 & 0,38 & 0,53 \end{pmatrix}$$

Умножая последнюю матрицу на  $V = \begin{pmatrix} 1,00 \\ 3,00 \\ 6,00 \\ 8,00 \\ 7,00 \\ 6,00 \\ 4,00 \\ 5,00 \\ 4,00 \end{pmatrix}$ , получаем

$$Y = (W^T W)^{-1} W^T V = \begin{pmatrix} 1,38 \\ 6,42 \\ 3,27 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти коэффициенты многочленов сплайна на каждом из участков сетки, необходимо найти столбец  $M = L^{-1} H Y$ :

$$L^{-1} H = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,10 & -0,14 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}, M = L^{-1} H Y = \begin{pmatrix} 0,00 \\ -0,64 \\ 0,00 \end{pmatrix}.$$

Затем по следующим формулам находим коэффициенты:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (i = 1, \dots, k),$$

где

$$a_i = y_{i-1}; \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(m_i + 2m_{i-1})}{6};$$

$$c_i = \frac{m_{i-1}}{2}; \quad d_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{6h_i};$$

$$S_1(x) = 1,38 + 2(x-5) + 0(x-5)^2 - 0,035(x-5)^3$$

на отрезке [5; 8];

$$S_2(x) = 6,4 + 1(x-8) - 0,32(x-8)^2 + 0,02(x-8)^3$$

на отрезке [8; 15].

Для того чтобы получить точечный прогноз по полученной сплайн-функции, достаточно подставить требуемое значение  $t$  в формулу последнего отрезка сплайна. Прогноз для  $x = 16$  дает следующее значение:

$$S_2(x) = 6,4 + 1 \cdot 8 - 0,32 \cdot 64 + 0,02 \cdot 512 = 6,4 + 8 - 20,5 + 10,2 = 4,1.$$

### **Вопросы и задачи для повторения и самопроверки**

- 4.1. Дайте определение адаптации и адаптивным методам экономического прогнозирования.
- 4.2. Какие предпосылки используются в адаптивных моделях экономических процессов для корректировки параметров модели и ее приспособления к изменяющимся условиям?
- 4.3. Назовите последовательность и охарактеризуйте основные этапы построения адаптивных моделей прогнозирования.
- 4.4. Какой метод экспоненциального сглаживания целесообразно использовать для прогнозирования процесса, развивающегося равномерно?
- 4.5. От каких факторов зависит ширина доверительного прогноза, составляемого с использованием метода экспоненциального сглаживания?
- 4.6. В каком адаптивном методе предусмотрена корректировка параметров адаптации на каждом шаге:
  - а) Тейла–Вейджа.
  - б) Хольта–Уинтерса.
  - в) эволюции:
- 4.7. Какая из формул используется для расчета прогнозных значений экономического показателя в модели Хольта–Уинтерса:
  - а)  $Y_p(t) = a(t) + b(t) \cdot t$ ;
  - б)  $Y_p(t+k) = [a(t) + k \cdot b(t)] \cdot F(t-L+k)$ ;
  - в)  $a(t) = \alpha_1 \cdot Y(t)/F(t-L) + (1-\alpha_1) \cdot [a(t-1) + b(t-1)]$ ;
  - г)  $b(t) = \alpha_3 \cdot [a(t) - a(t-1)] + (1-\alpha_3) \cdot b(t-1)$ ?
- 4.8. Сколько параметров адаптации используется в модели Е. Хольта:
  - а) один;
  - б) два;
  - в) три?

- 4.9.** Для моделирования и прогнозирования каких процессов целесообразно применять сплайн-функции?
- 4.10.** Расходы на оплату отпусков на предприятии (млн руб.) поквартально за 2 года составили:

|        |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $t$    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
| $Y(t)$ | 26,1 | 52,5 | 64,3 | 32,7 | 28,2 | 56,3 | 68,5 | 34,8 |

Используя мультипликативную модель Хольта–Уинтерса, определить расходы на оплату отпусков на каждый квартал следующего (третьего) года.

*Решить задачи 3-4.1 – 3-4.3.*

**3-4.1.** При построении модели Хольта–Уинтерса предварительная оценка параметров с помощью линейной модели дала следующие результаты: параметры линейной модели  $a(0) = 16,76$ ;  $b(0) = 3,75$ ; коэффициент сезонности  $F(1) = 1,292$ .

Для  $t = 1$  найти расчетное значение экономического показателя  $Y_p(1)$ .

**3-4.2.** Имеются поквартальные данные о кредитах, выданных банком за 4 года (всего 16 значений данного экономического показателя  $Y(t)$ ). По этим данным построена модель Хольта–Уинтерса, параметры которой получились равными  $a(16) = 77,34$ ;  $b(16) = 3,862$ ;  $F(13) = 1,255$ ;  $F(14) = 0,759$ ;  $F(15) = 0,848$ ;  $F(16) = 1,128$ . Определить прогнозное значение исследуемого экономического показателя для 1-го квартала 5-го года.

**3-4.3.** Имеются поквартальные данные о кредитах, выданных банком за 4 года (всего 16 значений данного экономического показателя  $Y(t)$ ). По этим данным построена модель Хольта–Уинтерса, параметры которой получились равными  $a(16) = 77,34$ ;  $b(16) = 3,862$ ;  $F(13) = 1,255$ ;  $F(14) = 0,759$ ;  $F(15) = 0,848$ ;  $F(16) = 1,128$ . Определить прогнозное значение исследуемого экономического показателя для 3-го квартала 5-го года.

### *Ответы на вопросы и задачи*

**3-4.1.** 26,5; **3-4.2.** 101,9; **3-4.3.** 75,4.

## 5.1. Общеметодические подходы к количественной оценке риска

Риск — категория вероятностная, поэтому методы его количественной оценки базируются на ряде важнейших понятий теории вероятностей и математической статистики. Так, главными инструментами статистического метода расчета риска являются:

1) *математическое ожидание*  $\mu$ , например, такой случайной величины, как результат финансовой операции  $k$ :  $\mu = E\{k\}$ ;

2) *дисперсия*  $\sigma_k^2$  как характеристика степени вариации значений случайной величины  $k$  вокруг центра группирования  $\mu$  (напомним, что дисперсия — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания  $\sigma_k^2 = E\{(k - \mu)^2\}$ );

3) *стандартное отклонение*  $\sigma_k$ ;

4) *коэффициент вариации*  $\frac{\sigma_k}{\mu}$ , который имеет смысл риска на единицу среднего дохода.

*Замечание.* Для небольшого набора  $n$  значений — малой выборки — *дискретной случайной величины*  $k_1, k_2, \dots, k_n$  речь, строго говоря, идет лишь об *оценках перечисленных измерителей риска*.

Так, *средним (ожидаемым) значением выборки*, или *выборочным аналогом математического ожидания*, является величина

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^n k_i p_i,$$

где  $p_i$  — вероятность реализации значения  $k_i$  случайной величины  $k$ .

Если все значения  $k_i$  равновероятны, то ожидаемое значение случайной выборки вычисляется по формуле

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i.$$

\* Под результатом финансовой операции  $k$  чаще всего понимают ее *доходность (норму дохода)*, т.е. сумму полученных доходов, исчисленную в процентном отношении к сумме произведенных затрат.



**Дисперсию выборки (выборочную дисперсию)** рассчитывают по формуле  $Var(k) = \sum p_i (k_i - \bar{k})^2$  или  $Var(k) = \frac{1}{n} \sum (k_i - \bar{k})^2$ , где вместо  $\sigma_k^2$  использовано обозначение  $Var(k)$ . В последнем случае выборочная дисперсия представляет собой **смещенную оценку теоретической дисперсии**. Предпочтительнее использовать **несмещенную оценку дисперсии**, которая задана формулой

$$s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum (k_i - \bar{k})^2.$$

Очевидно, что **оценка стандартного (среднеквадратического) отклонения** может быть рассчитана следующим образом:

$$s_k = \sqrt{\sum p_i (k_i - \bar{k})^2} \quad \text{или} \quad s_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (k_i - \bar{k})^2}.$$

Ясно, что **оценка коэффициента вариации** с учетом введенных обозначений принимает вид  $cv = \frac{s_k}{\bar{k}}$ .

В экономических системах в условиях риска принятие решений основывается чаще всего на одном из следующих критериев.

1. **Ожидаемого значения  $\bar{k}$**  (доходности, прибыли или расходов).
2. **Выборочной дисперсии  $s_k^2$  или стандартного (среднеквадратического) отклонения  $S_k$ .**
3. **Комбинации ожидаемого значения  $\bar{k}$  и дисперсии  $s_k^2$  или среднеквадратического отклонения выборки  $S_k$ .**

**Замечание.** Под случайной величиной  $k$  в каждой конкретной ситуации понимается соответствующий этой ситуации показатель, который обычно записывается в принятых обозначениях:  $m_p$  — **доходность портфеля** ценных бумаг, **IRR** (Internal Rate of Return) — **внутренняя (норма) доходности\*** и т.д.

Рассмотрим реализацию изложенной идеи на конкретных примерах.

**5.1.1. Распределения вероятностей и ожидаемая доходность.** Как известно, риск связан с вероятностью того, что фактическая

\* Под внутренней нормой доходности (IRR) — наиболее широко используемым критерием эффективности инвестиций — понимают процентную ставку, при которой чистая современная стоимость инвестиционного проекта равна нулю.

доходность будет ниже ее ожидаемого значения. Поэтому распределения вероятностей являются основой для измерения риска проводимой операции. Однако надо помнить, что получаемые при этом оценки носят вероятностный характер.

*Пример 5.1.* Предположим, что вы намерены инвестировать 100 000 ден. ед. сроком на 1 год. Альтернативные варианты инвестиций приведены в табл. 5.1.

Во-первых, это ГКО-ОФЗ со сроком погашения 1 год и ставкой дохода 8%, которые могут быть приобретены с дисконтом, т.е. по цене ниже номинала, а в момент погашения будет выплачена их номинальная стоимость.

Во-вторых, корпоративные ценные бумаги (голубые фишки), которые продаются по номиналу с купонной ставкой 9% (т.е. на 100 000 ден. ед. вложенного капитала можно получать 9000 ден. ед. годовых) и сроком погашения 10 лет. Однако вы собираетесь продать эти ценные бумаги в конце первого года. Следовательно, фактическая доходность будет зависеть от уровня процентных ставок на конец года. Этот уровень, в свою очередь, зависит от состояния экономики на конец года: быстрые темпы экономического развития, вероятно, вызовут повышение процентных ставок,

Таблица 5.1

Оценка доходности по четырем инвестиционным альтернативам

| Состояние экономики      | Вероятность<br>$P_i$ | ГКО-<br>ОФЗ,<br>% | Доходность инвестиций<br>при данном состоянии<br>экономики, % |          |          |
|--------------------------|----------------------|-------------------|---|----------|----------|
|                          |                      |                   | Корпора-<br>тивные<br>ценные<br>бумаги                        | Проект-1 | Проект-2 |
| I                        | II                   | III               | IV  | V        | VI       |
| Глубокий спад            | 0,05                 | 8,0               | 12,0  | -3,0     | -2,0     |
| Незначительный спад      | 0,20                 | 8,0               | 10,0  | 6,0      | 9,0      |
| Стагнация                | 0,50                 | 8,0               | 9,0   | 11,0     | 12,0     |
| Незначительный<br>подъем | 0,20                 | 8,0               | 8,5   | 14,0     | 15,0     |
| Сильный подъем           | 0,05                 | 8,0               | 8,0   | 19,0     | 26,0     |
| Ожидаемая доходность     | —                    | 8,0               | 9,2   | 10,3     | 12,0     |

*Примечание.* Доходность, соответствующую различным состояниям экономики, следует рассматривать как интервал значений, а отдельные ее значения — как точки внутри этого интервала. Например, 10%-ная доходность облигации корпорации при незначительном спаде представляет собой наиболее вероятное значение доходности при данном состоянии экономики, а точечное значение используется для удобства расчетов.

что снизит рыночную стоимость голубых фишек; в случае экономического спада возможна противоположная ситуация.

В-третьих, проект-1 капиталовложений, чистая стоимость которого составляет 100 000 ден. ед. Денежный поток в течение года равен нулю, все выплаты осуществляются в конце года. Сумма этих выплат зависит от состояния экономики.

И, наконец, альтернативный проект-2 капиталовложений, совпадающий по всем параметрам с проектом-1, но отличающийся от него лишь *распределением вероятностей ожидаемых в конце года выплат*.

Под распределением вероятностей будем понимать множество вероятностей возможных исходов (в случае непрерывной случайной величины это была бы плотность распределения вероятностей). Именно в этом смысле следует истолковывать представленные в табл. 5.1 четыре распределения вероятностей (графы III–VI), соответствующие четырем альтернативным вариантам инвестирования. Доходность по ГКО-ОФЗ точно известна. Она составляет 8% и не зависит от состояния экономики.

*Замечание.* Инвестиции в ГКО-ОФЗ являются безрисковыми только в том смысле, что их *номинальная* доходность не изменяется в течение данного периода времени. В то же время их *реальная* доходность содержит определенную долю риска, так как она зависит от фактических темпов роста инфляции в течение периода владения данной ценной бумагой. Более того, ГКО могут представлять проблему для инвестора, который обладает портфелем ценных бумаг с целью получения непрерывного дохода: когда истекает срок платежа по ГКО-ОФЗ, необходимо осуществить реинвестирование денежных средств, и если процентные ставки снижаются, доход портфеля также уменьшится. Этот вид риска, который носит название *риска нормы реинвестирования*, не учитывается в нашем примере, так как период, в течение которого инвестор владеет ГКО-ОФЗ, соответствует сроку их погашения. Наконец, отметим, что *релевантная доходность* любых инвестиций — это доходность после уплаты налогов, поэтому значения доходности, используемые при принятии решения, должны отражать доход за вычетом налогов.

По трем другим вариантам инвестирования реальные, или фактические, значения доходности не будут известны до окончания соответствующих периодов владения активами. Поскольку значения доходности не известны с полной определенностью, эти три вида инвестиций являются *рисковыми*.

Распределения вероятностей бывают дискретными или непрерывными. **Дискретное распределение** вероятностей имеет конечное

число исходов; так, в табл. 5.1 приведены дискретные распределения вероятностей доходности различных вариантов инвестирования. Доходность ГКО-ОФЗ принимает только одно возможное значение, тогда как каждая из трех оставшихся альтернатив имеет пять возможных исходов. Каждому исходу поставлена в соответствие вероятность его появления. Например, вероятность того, что ГКО-ОФЗ будут иметь доходность 8%, равна единице, а вероятность того, что доходность корпоративных ценных бумаг составит 9%, равна 0,50.

Если умножить каждый исход на вероятность его появления, а затем сложить полученные результаты, мы получим средневзвешенную вероятность исходов. Весами служат соответствующие вероятности, а средневзвешенная представляет собой *ожидаемое значение*. Так как исходами являются *внутренние нормы доходности* (IRR), ожидаемое значение — это *ожидаемая норма доходности* (Expected Rate of Return — ERR), которую можно представить в следующем виде:

$$ERR = \sum_{i=1}^n p_i IRR_i, \quad (5.1)$$

где  $IRR_i$  —  $i$ -й возможный исход;  $p_i$  — вероятность появления  $i$ -го исхода;  $n$  — число возможных исходов.

Используя формулу (5.1), можно найти ожидаемую норму доходности, например, проекта-2:

$$ERR = -2,0\% \cdot 0,05 + 9,0\% \cdot 0,20 + 12,0\% \cdot 0,50 + 15\% \cdot 0,20 + 6,0\% \cdot 0,05 = 12,0\%.$$

Напомним, что дискретные распределения вероятностей могут быть представлены не только в табличной, но и в графической форме. На рис. 5.1 приведены столбиковые диаграммы (или гистограммы) проектов 1 и 2.

Возможные значения доходности проекта-1 принадлежат промежутку от  $-3,0$  до  $+19,0\%$ , а проекта-2 — от  $-2,0$  до  $+26,0\%$ . Отметим, что высота каждого столбца представляет собой вероятность появления соответствующего исхода, а сумма этих вероятностей по каждому варианту равна 1,00. Отметим также, что распределение значений доходности проекта-2 симметрично, тогда как соответствующее распределение для проекта-1 имеет левостороннюю асимметрию.

Таким образом, использование *ожидаемого значения* в качестве *критерия риска* обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль или минимизировать ожидаемые затраты.

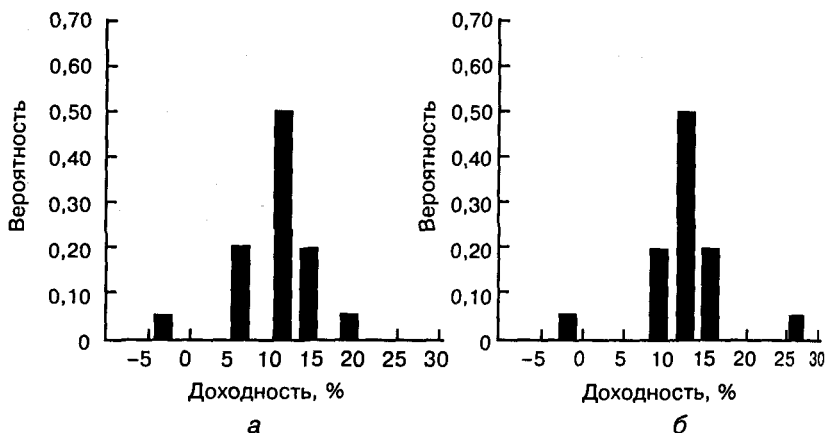


Рис. 5.1. Графическое представление дискретного распределения вероятностей:

а — проект-1; б — проект-2

В частности, этот критерий можно количественно выразить в денежных единицах или в единицах полезности денег. Для пояснения разницы между непосредственно деньгами и их полезностью предположим, что инвестиции в 2000 ден. ед. дают с равными вероятностями либо нулевой доход, либо доход в 10 000 ден. ед. Ожидаемый чистый доход составит  $(10\,000 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5) - 2000 = 3000$  (ден. ед.).

Подобное вложение денег на первый взгляд представляется оптимальным. Однако такое решение не для всех лиц, принимающих решения (ЛПР), приемлемо. Например, для лица А, имеющего ограниченные ресурсы, потеря 2000 ден. ед. может привести к банкротству. Напротив, лицо В, капитал которого значительно превосходит данную сумму, может пойти на такой риск. Следовательно, нецелесообразно использовать ожидаемое значение стоимостного выражения в качестве единственного критерия для принятия решений. Этот критерий служит только ориентиром, а окончательное решение может быть принято ЛПР лишь на основе всех существенных факторов, его отношения к полезности денег.

Необходимо также отметить, что использование критерия ожидаемого значения целесообразно лишь в случае, когда одно и то же решение приходится принимать достаточно большое число раз. Иными словами, ориентация на ожидаемую доходность может приводить к неверным результатам для тех решений, которые приходится принимать эпизодически.

**рис. 5.1.2. Комбинации ожидаемого значения и дисперсии (или среднеквадратического отклонения) как критерий риска.** Данный критерий является модификацией критерия ожидаемого значения, причем он модифицирован таким образом, что его можно использовать для принятия решений в редко повторяющихся ситуациях. Использование дисперсии, или среднеквадратического отклонения ожидаемого дохода, в финансовых операциях на сегодняшний день является одной из главных оценок рискованной операции, количественной оценкой риска.

**Анализ общего риска: активы, рассматриваемые изолированно.** Понятия распределения вероятностей и ожидаемой величины могут использоваться как основа для измерения риска. Известно, что риск присутствует в том случае, если исследуемые распределения имеют более одного возможного исхода, однако каким образом можно измерить риск и оценить его количественно? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала методику исчисления *общего риска*.

Выше мы предположили, что возможны 5 состояний экономики (см. табл. 5.1). На самом же деле состояние экономики может варьироваться от самой глубокой депрессии до наивысшего подъема с бесчисленным количеством промежуточных положений. Обычно среднему (*нормальному*) состоянию соответствует самая большая вероятность, далее значения вероятностей равномерно уменьшаются при удалении от нормы как в одну (*подъем*), так и в другую (*спад*) сторону, стремясь к нулю в крайних положениях (*полная депрессия* и *наибольший подъем*). Если при этом величина доходности, соответствующая нормальному положению, является одновременно и средним арифметическим двух крайних значений, то мы получаем распределение, которое в теории вероятностей носит название «нормального» (рис. 5.2).

Нормальное распределение достаточно полно отражает реальную ситуацию и дает возможность, используя ограниченную ин-

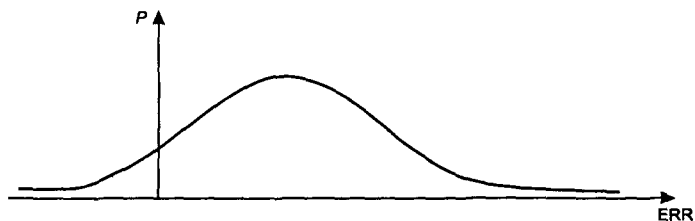


Рис. 5.2. Нормальное распределение вероятностей

формацию, получать числовые характеристики, необходимые для оценки степени риска того или иного проекта. Далее будем всегда предполагать, что мы находимся в условиях нормального распределения вероятностей.

*Замечание.* В действительности в чистом виде нормальное распределение в экономических явлениях встречается редко, однако, если однородность совокупности соблюдена, часто фактические распределения близки к нормальному.

На рис. 5.1 приведены графики распределения вероятностей для проектов 1 и 2. Условиям нормального распределения удовлетворяет проект-2.

Для большей прозрачности дальнейших рассуждений полезно предварительно рассмотреть следующую задачу.

*Задача 5.1.* Возможные нормы доходности (IRR) двух финансовых проектов А и В находятся в зависимости от будущего состояния экономики (табл. 5.2). Какой из проектов менее рискован для инвестора?

Таблица 5.2

Данные для расчета ожидаемой нормы доходности вариантов вложения капитала в проекты А и В

| Состояние экономики | Вероятность данного состояния | Проект А, IRR, % | Проект В, IRR, % |
|---------------------|-------------------------------|------------------|------------------|
| Подъем              | $P_1 = 0,25$                  | 90               | 25               |
| Норма               | $P_2 = 0,5$                   | 20               | 20               |
| Спад                | $P_3 = 0,25$                  | -50              | 15               |

**Решение.** Прежде всего по формуле (5.1) рассчитаем для каждого из проектов ожидаемую норму доходности ERR:

$$ERR_A = 0,25 \cdot 90\% + 0,5 \cdot 20\% + 0,25(-50\%) = 20\%;$$

$$ERR_B = 0,25 \cdot 25\% + 0,5 \cdot 20\% + 0,25 \cdot 15\% = 20\%.$$

Оказалось, что ожидаемые нормы доходности проектов совпадают, несмотря на то, что диапазон возможных значений IRR сильно различается: у проекта А от  $-50$  до  $+90\%$ , у проекта В от  $15$  до  $25\%$ . На рис. 5.3 приведены гистограммы распределения вероятностей (близких к нормальному распределению) для проектов А и В. Здесь нагляднее, чем в табл. 5.2, представлено, что для проекта А в наихудшем случае убыток не составит более  $50\%$ , а в наилучшем случае доход не превысит  $90\%$  ( $15$  и  $25\%$  соответственно для проекта В). При этом значение ERR —  $20\%$  для обоих проектов — совпадает со значением среднего состояния. Соответ-

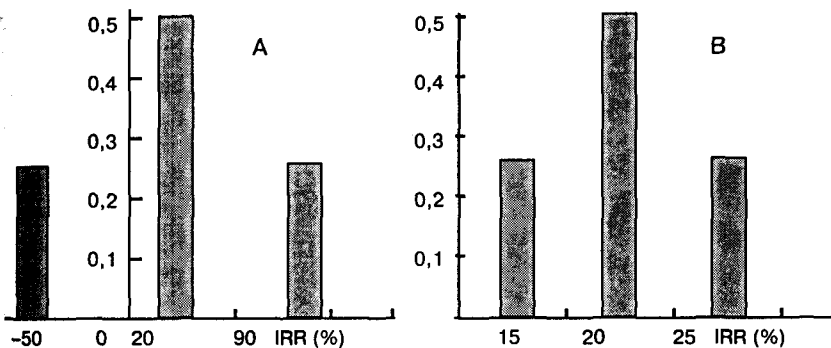


Рис. 5.3. Гистограммы распределения вероятностей для проектов А и В

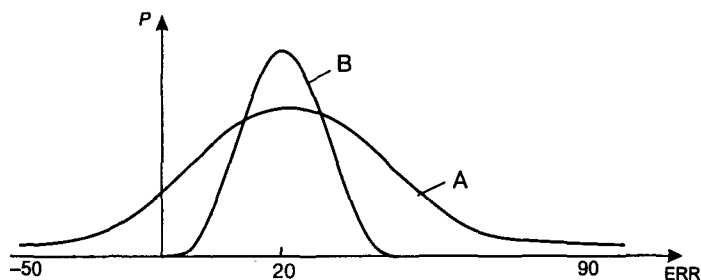


Рис. 5.4. График плотности вероятностей для проектов А и В. Площадь под каждой кривой равна единице

ствующая же среднему значению вероятность понизится, причем неодинаково для случаев А и В (рис. 5.4).

Очевидно, чем более «сжат» график, тем выше вероятность, соответствующая среднему ожидаемому доходу, и вероятность того, что значение реальной доходности окажется достаточно близким к этой величине. Тем ниже будет и риск, связанный с соответствующим проектом. Поэтому меру «сжатости» графика можно принять за достаточно корректную меру риска. Количественно оценку меры «сжатости» можно рассчитать по следующей формуле:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n (IRR_i - ERR)^2 p_i} \quad (5.2)$$

Чем меньше оценка величины среднеквадратического отклонения  $S$ , тем больше «сжат» график распределения плотности вероятностей и тем менее рискован проект. При этом для нормаль-



ного распределения вероятность «попадания» в пределы  $ERR \pm S$  составляет 68,26%.

Применяя формулу (5.2), получим следующие оценки риска рассматриваемых проектов А и В:

$$S_A = \sqrt{(90 - 20)^2 0,25 + (20 - 20)^2 0,5 + (-50 - 20)^2 0,25} = 49,5\%;$$

$$S_B = \sqrt{(25 - 20)^2 0,25 + (20 - 20)^2 0,5 + (15 - 20)^2 0,25} = 3,5\%.$$

Как видим, для второго проекта с вероятностью 68,26% можно ожидать величину доходности  $IRR = 20 \pm 3,5\%$ , т.е. от 16,5 до 23,5%. Риск здесь минимальный. Проект А гораздо более рискованный. С вероятностью 68,26% можно получить доходность от -29,5% до +69,5%.

*Замечание.* Считается, что среднерискованной операции соответствует значение стандартного отклонения около 30%.

С позиции развиваемых представлений проанализируем рассмотренный в самом начале темы пример 5.1. В табл. 5.3 приводятся соответствующие оценки ожидаемых значений доходности, дисперсии и среднеквадратических отклонений по всем четырем альтернативным вариантам инвестирования, а также коэффициенты вариации, которые мы рассмотрим в следующем разделе. Мы видим, что ГКО-ОФЗ обладают наименьшими значениями показателей дисперсии и среднеквадратического отклонения, а проекту-2 соответствуют наибольшие их значения.

Используя оценку среднеквадратического отклонения в качестве меры разброса, можно сделать ряд полезных выводов о распределении исходов. В частности, если распределение является непрерывным и близким к нормальному, можно утверждать, что

Таблица 5.3

**Оценка доходности и риска четырех альтернативных вариантов инвестирования**

| Показатель                            | Варианты инвестирования |                             |          |          |
|---------------------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------|----------|
|                                       | ГКО-ОФЗ                 | Корпоративные ценные бумаги | Проект-1 | Проект-2 |
| 1. Ожидаемая доходность, %            | 8,00                    | 9,20                        | 10,30    | 12,00    |
| 2. Дисперсия                          | 0,00                    | 0,71                        | 19,31    | 23,20    |
| 3. Среднеквадратическое отклонение, % | 0,00                    | 0,84                        | 4,39     | 4,82     |
| 4. Коэффициент вариации               | 0,00                    | 0,09                        | 0,43     | 0,40     |

68,3% всех исходов лежат в пределах одного среднеквадратического отклонения от ожидаемого значения, 95,4% — в пределах двух среднеквадратических отклонений и практически все исходы (99,7%) — в пределах трех среднеквадратических отклонений.

По данным табл. 5.3 можно, казалось бы, прийти к заключению, что казначейские векселя — наименее рисковый вариант инвестирования, а проект-2 — наиболее рисковый. Однако это не всегда верно. Перед тем как сделать окончательный вывод, необходимо принять во внимание ряд других факторов, например таких, как численные значения ожидаемой доходности, асимметрия распределения, достоверность наших оценок распределения вероятностей и взаимосвязь каждого актива с другими активами, включенными в портфель инвестиций.

*Замечание.* Анализируя риск, логично сосредоточиться в основном на вероятностях тех значений доходности, которые меньше ожидаемого значения, а не на тех, которые его превышают. Если распределение является симметричным, и дисперсия, и среднеквадратическое отклонение будут достаточно точно оценивать риск получения доходности ниже ожидаемого значения, который составляет ровно половину общего риска. Однако, если распределение асимметрично, эти показатели неверно отражают действительный риск. При этом, если распределение обладает правосторонней асимметрией, дисперсия и среднеквадратическое отклонение завышают риск получения доходности ниже ожидаемого значения, а при левосторонней асимметрии наблюдается противоположная ситуация. Эти искажения могут быть элиминированы, если ввести в рассмотрение *полудисперсию* (semivariance — SV), которая определяется формулой

$$SV = \sum_{i=1}^m (IRR_i - ERR)^2 p_i, \quad (5.3)$$

где  $m$  — множество исходов, которые лежат *ниже* ожидаемого значения.

Рассмотрим, например, возможность покупки корпоративных ценных бумаг (см. табл. 5.1). Учитывая, что их ожидаемая доходность составляет 9,2%, рассчитаем полудисперсию в соответствии с формулой (5.3):

$$SV = (8,0 - 9,2)^2 + (8,5 - 9,2)^2 0,20 + (9,0 - 9,2)^2 0,50 = 0,19.$$

Показатели полудисперсии четырех вариантов инвестирования, перечисленных в табл. 5.1, имеют следующие значения: 0,00; 0,19; 12,54 и 11,60. Если распределение симметрично, то полудисперсия составляет половину дисперсии. Это условие выполнено для

проекта-2. Однако полудисперсия проекта-1 составляет более половины дисперсии. Поскольку распределение доходности проекта-1 имеет левостороннюю асимметрию, его дисперсия занижает риск получения доходности ниже ожидаемого значения. Полудисперсия корпоративных ценных бумаг меньше половины дисперсии — поскольку распределение доходности имеет правостороннюю асимметрию, его дисперсия завышает риск получения доходности ниже ожидаемого значения. Финансовая статистика, как правило, недостаточно точна, чтобы применять к ней высокоточные аналитические методы, а большинство распределений, которые мы рассматриваем, близко к симметричным, поэтому мы остановимся на дисперсии и среднеквадратическом отклонении как основных мерах разброса.

**Коэффициент вариации.** Еще одной величиной, характеризующей степень риска, является коэффициент вариации  $CV$ . Он рассчитывается по формуле

$$CV = S/ERR \quad (5.4)$$

и выражает количество риска на единицу доходности.

Естественно, чем выше  $CV$ , тем выше степень риска. Например, коэффициенты вариации для проектов А и В задачи 5.1 —  $CV_A = 49,5/20 = 2,475$  и  $CV_B = 3,5/20 = 0,175$  — хотя и не добавляют существенной информации к анализу описанной ситуации, но могут служить для оценки того, во сколько раз один проект рискованнее другого:  $2,475/0,175 = 14$ . Проект А в 14 раз рискованнее проекта В.

Коэффициенты вариации имеют принципиально важное значение, когда требуется сравнить финансовые операции с различными ожидаемыми нормами доходности  $ERR$ .

**Задача 5.2.** Какой из проектов С и D, распределение вероятностей которых задано табл. 5.4, привлекательнее для инвестора?

Таблица 5.4

Распределение вероятностей для проектов С и D

| Состояние экономики | Вероятность данного состояния | Проект С, IRR, % | Проект D, IRR, % |
|---------------------|-------------------------------|------------------|------------------|
| Подъем              | $P_1 = 0,2$                   | 30               | 115              |
| Норма               | $P_2 = 0,6$                   | 20               | 80               |
| Спад                | $P_3 = 0,2$                   | 10               | 45               |

Решение. Рассчитаем для обоих проектов ERR,  $S$  и  $CV$ .  
По формуле (5.1) получаем:

$$ERR_C = 30 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,2 = 20\%;$$

$$ERR_D = 115 \cdot 0,2 + 80 \cdot 0,6 + 45 \cdot 0,2 = 80\%.$$

Следуя формуле (5.2):

$$S_C = \sqrt{(30 - 20)^2 0,2 + (20 - 20)^2 0,6 + (10 - 20)^2 0,2} = 6,3\%;$$

$$S_D = \sqrt{(115 - 80)^2 0,2 + (80 - 80)^2 0,6 + (45 - 80)^2 0,2} = 22,14\%.$$

Таким образом, у проекта D величина *стандартного отклонения* намного больше, но при этом больше и значение ERR. Для того чтобы можно было принять решение в пользу того или иного проекта, необходимо рассчитать коэффициент  $CV$ , отражающий соотношение между ERR и значением  $S$  (см. также рис. 5.5).

По формуле (5.4) найдем:

$$CV_C = 6,3/20 = 0,315; CV_D = 22,14/80 = 0,276.$$

Как видно, несмотря на достаточно большое значение оценки риска  $S$ , величина  $CV$  для проекта D меньше, т.е. меньше риска на единицу доходности, что достигается за счет достаточно большой величины  $ERR_D$ .

В данном случае расчет коэффициента  $CV$  дает возможность принять решение в пользу второго проекта.

Итак, мы получили два параметра, позволяющие количественно определить степень возможного риска: среднеквадратическое отклонение  $S$  и коэффициент вариации  $CV$ . Но при этом мы вынуждены отметить, что определение степени риска не всегда по-

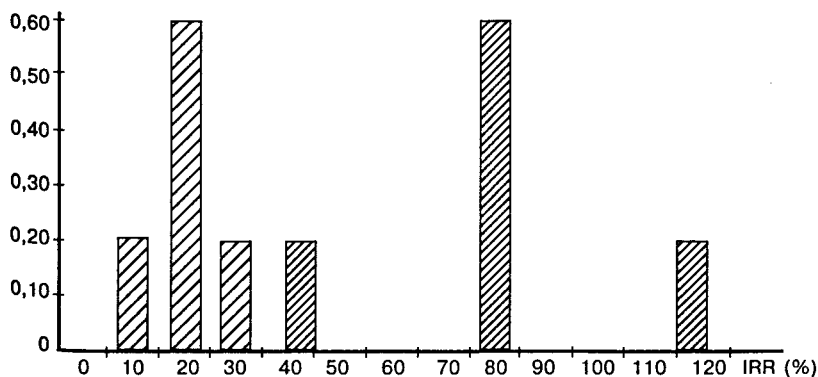


Рис. 5.5. Распределение вероятностей для проектов C и D

зволяет однозначно принять решение в пользу того или иного проекта.

В этой связи необходимо рассмотреть следующий пример.

**Задача 5.3.** Пусть инвестору известно, что вложение капитала в проекты К и Л в последние четыре года приносило доход, динамика которого отражена в табл. 5.5. Выяснить, в какой из проектов вложение капитала связано с меньшим риском.

Таблица 5.5

Доходность проектов К и Л в динамике, %

| Год  | К  | Л  |
|------|----|----|
| 1995 | 20 | 40 |
| 1996 | 15 | 24 |
| 1997 | 18 | 30 |
| 1998 | 23 | 50 |

**Решение.** В примере 5.1 и задачах 5.1 и 5.2 распределение вероятностей предполагалось известным заранее. Во многих ситуациях известны лишь данные о том, какой доход приносила некая финансовая или хозяйственная операция в предыдущие годы. Именно такой характер имеет доступная информация в нашей задаче. В подобных случаях для расчета оценки среднеквадратического отклонения используется такая формула:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\text{IRR}_i - \text{ARR})^2}. \quad (5.5)$$

Здесь  $n$  — число лет, за которые приведены данные;  $\text{ARR}^*$  — среднее арифметическое всех  $\text{IRR}$  за  $n$  лет:

$$\text{ARR} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{IRR}_i. \quad (5.6)$$

Таким образом, по формуле (5.6) рассчитаем среднюю норму доходности для обоих проектов

$$\text{ARR}_K = (20 + 15 + 18 + 23)/4 = 19\%;$$

$$\text{ARR}_L = (40 + 24 + 30 + 50)/4 = 36\%.$$

\*  $\text{ARR}$  (Average Rate of Return) — средняя норма доходности.

По формуле (5.5) найдем величину среднеквадратического отклонения:

$$S_K = \sqrt{\{(20-19)^2 + (15-19)^2 + (18-19)^2 + (23-19)^2\} : 3} = 3,4\%;$$

$$S_L = \sqrt{\{(40-36)^2 + (24-36)^2 + (30-36)^2 + (50-36)^2\} : 3} = 11,4\%$$

Видим, что у проекта L средняя норма доходности выше, но при этом выше и величина  $S_L$ . Поэтому необходимо рассчитать коэффициент вариации CV. По формуле (5.4) получаем:

$$CV_K = 3,4/19 = 0,18; CV_L = 11,4/36 = 0,32.$$

Коэффициент вариации для проекта L почти в 2 раза больше коэффициента вариации проекта K. Казалось бы, вложение в этот проект почти вдвое рискованнее. Однако данные табл. 5.5 свидетельствуют о том, что минимальная доходность проекта L выше максимальной доходности проекта K. Очевидно, что капиталовложения в проект L в любом случае более рентабельны. Полученные же значения  $S$  и CV означают не возможность получения более низкой доходности, а возможность **неполучения ожидаемой доходности** от проекта L.

**Коэффициенты риска и коэффициенты покрытия рисков.** Пусть  $C$  — средства, которыми располагает инвестор (ЛПР), а  $Y$  — возможные убытки. Если  $Y$  превышает  $C$ , то возникает реальный риск разорения. Для оценки подобных ситуаций вводится в рассмотрение коэффициент риска  $K_1 = Y/C$ , значения которого ограничивают специальным числом  $\xi_1$ . Операции, для которых  $K_1 > \xi_1$ , считают особо рискованными. Часто учитывают также вероятность  $p$  убытков  $Y$ , и тогда рассматривают коэффициент риска  $K_2 = pY/C$ , который ограничивают другим числом  $\xi_2$  (ясно, что  $\xi_1 > \xi_2$ ). В финансовом менеджменте чаще применяют обратные отношения  $C/Y$  и  $C/(pY)$ , которые называют **коэффициентами покрытия рисков**. Коэффициенты  $C/Y$  и  $C/(pY)$  ограничиваются снизу соответственно числами  $1/\xi_1$  и  $1/\xi_2$ .

Именно такой смысл имеет так называемый коэффициент Кука, равный отношению:

$$\frac{\text{Собственные средства}}{\text{Активы, взвешенные с учетом риска}}$$

Коэффициент Кука используется банками и другими финансовыми компаниями. В роли весов при «взвешивании» выступают вероятности — риски потери соответствующего актива.

## 5.2. Задачи формирования портфелей ценных бумаг

**5.2.1. Основные характеристики портфеля ценных бумаг.** Портфель — это совокупность различных инвестиционных инструментов, которые собраны воедино для достижения конкретной инвестиционной цели вкладчика. В портфель могут входить бумаги только одного типа, например акции или облигации, или различные инвестиционные ценности, такие, как акции, облигации, депозитные и сберегательные сертификаты и т.д.

**Портфельный менеджмент**, т.е. формирование инвестиционного портфеля ценных бумаг, берет свое начало примерно с тех времен, когда появились сами ценные бумаги. Методология же инвестиционного менеджмента начала складываться в 20-е гг. XX в. с появлением понятия «истинной» цены (*fair price*) акции. Задача инвестора состояла в том, чтобы приобрести недооцененные акции, чья рыночная цена на момент покупки ниже истинной, и избавиться от переоцененных бумаг и тем самым получить в перспективе максимальную прибыль. Эта цель не менее актуальна и сейчас.

Начало современной теории финансового портфеля было заложено в статье Гарри Марковица «Выбор портфеля» (1952). В ней предлагались математическая модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг и методы построения таких портфелей при определенных условиях. С вычислительной точки зрения такая задача относится к классу задач квадратической оптимизации при линейных ограничениях. К настоящему времени вместе с задачами линейного программирования это один из наиболее изученных классов оптимизационных задач, для которых разработано большое число достаточно эффективных алгоритмов.

Главная цель в формировании портфеля состоит в достижении оптимального сочетания между риском и доходностью. Иначе говоря, соответствующий набор инвестиционных инструментов призван снизить до минимума риск потерь для инвестора при заданном уровне доходности или обеспечить максимальную ожидаемую доходность при некотором заданном уровне риска.

Для получения количественных характеристик инвестиционного портфеля могут использоваться следующие показатели.

1. **Доходность портфеля ( $m_p$ )** ценных бумаг. Данный параметр рассчитывается как взвешенная средняя из ожидаемых доходностей по каждому из компонентов:

$$m_p = \sum m_i x_i, \quad (5.7)$$

где  $m_i$  — ожидаемые ставки доходности по каждому виду активов, причем их удобно представить в виде матрицы-строки  $\mathbf{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ ;  $x_i$  — доли инвестиций, помещенных в каждый из видов активов (эти доли называют *портфельными весами*, их удобно представить транспонированной матрицей  $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ).

2. *Риск портфеля* ( $\sigma_p$ ) — стандартное отклонение ставок доходности по портфелю. Оно представляет собой квадратный корень из дисперсии доходности портфеля (иначе — вариации  $V_p$ ), которая определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= V_p = \mathbf{X}_T \mathbf{COV} \cdot \mathbf{X} = \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{COV}$  — ковариационная матрица порядка  $N$ .

Напомним, что ковариация — это статистическая мера взаимодействия двух случайных переменных, таких, например, как доходности двух ценных бумаг. Положительное значение ковариации показывает, что доходности этих ценных бумаг имеют тенденцию изменяться в одну сторону. Например, ковариация между доходностями  $m_{i1}$  и  $m_{i2}$  двух акций рассчитывается следующим образом:

$$\mathbf{COV}(m_{i1}, m_{i2}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (m_{t1} - \bar{m}_1)(m_{t2} - \bar{m}_2). \quad (5.9)$$

Содержательно интерпретировать численное значение ковариации достаточно сложно, поэтому очень часто для измерения силы связи между двумя переменными используется другая статистическая характеристика, называемая коэффициентом корреляции. Этот коэффициент позволяет стандартизировать ковариацию путем деления ее на произведение соответствующих среднеквадратических отклонений и привести величины к сопоставимому виду. Коэффициент корреляции между двумя переменными  $i$  и  $j$  рассчитывается следующим образом:

$$r_{ij} = \mathbf{COV}_{ij} / \sigma_i \sigma_j, \quad (5.10)$$

где  $\sigma_{i(j)}$  — стандартное отклонение дохода по  $i(j)$ -му активу.

Знак коэффициента корреляции совпадает со знаком ковариации, поэтому его положительная величина означает однонаправленное изменение переменных, а отрицательная — их изменение в противоположных направлениях. Если значение  $r_{ij}$  близко к



нулю, связь между переменными слабая. Кроме того, процедура стандартизации приводит к тому, что коэффициент корреляции принадлежит интервалу от  $-1,0$  до  $+1,0$ . Отметим также, что формула (5.10) может использоваться для расчета ковариации:

$$\text{COV}_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

где  $r_{ij}$  — коэффициент корреляции доходов между  $i$ -м и  $j$ -м активами.

Наличие совершенной положительной корреляции (рис. 5.6, а) наблюдается, например, при приобретении двух видов обычных акций одной корпорации, выпущенных на одинаковых условиях. Это означает, что когда одна из двух ценных бумаг имеет относительно высокую доходность, тогда и другая ценная бумага имеет относительно высокую доходность. Стандартное отклонение ставок доходности по портфелю в этом случае рассчитывается как средневзвешенная из стандартных отклонений доходностей, входящих в состав портфеля активов.

При наличии совершенной отрицательной корреляции (рис. 5.6, б), когда при уменьшении дохода по одной акции на один пункт происходит увеличение на один пункт по другой, инвестор получает возможность уменьшить стандартное отклонение дохода по этим двум активам вместе до нуля, т.е. свести риск к минимуму.

Рассмотрим портфель, состоящий из двух видов ценных бумаг: акций с ожидаемой доходностью 12% и облигаций, доходность по которым равна 5,1%. Стандартное отклонение акций 21,2%, облигаций — 8,3%.

Варьируя портфельные веса включенных в состав портфеля активов, можно добиться оптимального портфеля с точки зрения применяемого типа активов. Результат такого варьирования может быть представлен в табл. 5.6.

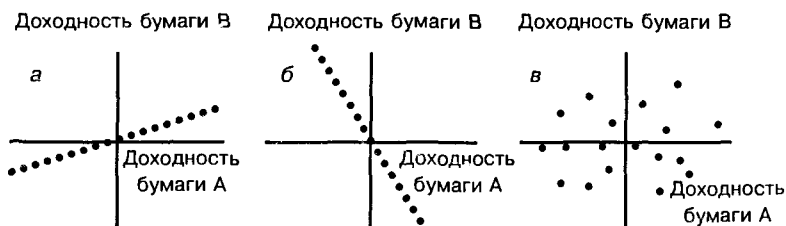


Рис. 5.6. Доходность двух ценных бумаг:

а — полная положительная корреляция между доходностями; б — полная отрицательная корреляция между доходностями; в — некоррелированные доходности

Таблица 5.6

## Ожидаемая доходность и стандартное отклонение портфеля

| Портфель | Удельный вес актива в составе портфеля |           | Ожидаемая доходность, % | Стандартное отклонение при корреляции, $r$ , % |        |        |        |        |
|----------|--|-----------|-------------------------|--|--------|--------|--------|--------|
|          | Акции                                  | Облигации |                         | -1,00  | -0,7   | 0      | 0,18   | 1,00   |
| 0        | 0,00                                   | 1,00      | 5,10                    | 8,3  | 8,3    | 8,3    | 8,3    | 8,3    |
| 1        | 0,05                                   | 0,95      | 5,45                    | 6,825  | 7,183  | 7,956  | 8,143  | 8,945  |
| 2        | 0,10                                   | 0,90      | 5,79                    | 5,35   | 6,174  | 7,765  | 8,124  | 9,59   |
| 3        | 0,15                                   | 0,85      | 6,14                    | 3,875  | 5,336  | 7,739  | 8,244  | 10,235 |
| 4        | 0,20                                   | 0,80      | 6,48                    | 2,4  | 4,759  | 7,878  | 8,497  | 10,88  |
| 5        | 0,25                                   | 0,75      | 6,83                    | 0,925  | 4,544  | 8,176  | 8,872  | 11,525 |
| 6        | 0,28                                   | 0,72      | 7,03                    | 0,04   |        |        | 9,15   | 11,91  |
| 7        | 0,30                                   | 0,70      | 7,17                    | 0,55   | 4,741  | 8,614  | 9,355  | 12,17  |
| 8        | 0,35                                   | 0,65      | 7,52                    | 2,025  | 5,303  | 9,174  | 9,928  | 12,815 |
| 9        | 0,40                                   | 0,60      | 7,86                    | 3,5  | 6,131  | 9,834  | 10,579 | 13,46  |
| 10       | 0,45                                   | 0,55      | 8,21                    | 4,975  | 7,133  | 10,576 | 11,293 | 14,105 |
| 11       | 0,50                                   | 0,50      | 8,55                    | 6,45   | 8,246  | 11,383 | 12,059 | 14,75  |
| 12       | 0,55                                   | 0,45      | 8,90                    | 7,925  | 9,431  | 12,244 | 12,868 | 15,395 |
| 13       | 0,60                                   | 0,40      | 9,24                    | 9,4  | 10,663 | 13,146 | 13,712 | 16,04  |
| 14       | 0,65                                   | 0,35      | 9,59                    | 10,875   | 11,928 | 14,083 | 14,586 | 16,685 |
| 15       | 0,70                                   | 0,30      | 9,93                    | 12,35  | 13,217 | 15,047 | 15,483 | 17,33  |
| 16       | 0,75                                   | 0,25      | 10,28                   | 13,825   | 14,523 | 16,035 | 16,401 | 17,975 |
| 17       | 0,80                                   | 0,20      | 10,62                   | 15,3   | 15,842 | 17,041 | 17,336 | 18,62  |
| 18       | 0,85                                   | 0,15      | 10,97                   | 16,775   | 17,172 | 18,063 | 18,285 | 19,265 |
| 19       | 0,90                                   | 0,10      | 11,31                   | 18,25  | 18,508 | 19,098 | 19,247 | 19,91  |
| 20       | 0,95                                   | 0,05      | 11,66                   | 19,725   | 19,852 | 20,144 | 20,219 | 20,555 |
| 21       | 1,00                                   | 0,00      | 12,00                   | 21,2   | 21,2   | 21,2   | 21,2   | 21,2   |

Портфель 0 состоит только из облигаций, тогда как портфель 21 — только из акций. Портфель, состоящий только из облигаций, имеет ожидаемую доходность 5,1%, а его стандартное отклонение равно 8,3%. Портфель, состоящий только из акций, имеет ожидаемую доходность 12%, а стандартное отклонение — 21,2%. Портфель, состоящий на 60% из акций и на 40% из облигаций, будет иметь ожидаемую доходность 9,24%, стандартное отклонение доходности по такому портфелю составит 13,71%, если корреляция между изменениями доходностей по облигациям и акциям  $r = 0,18$ . Если изменения доходностей по облигациям и акциям характеризуются совершенной положительной корреляцией ( $r = 1,00$ ), тогда ожидаемая доходность останется прежней, а стандартное отклонение будет включать 60% разности между более высоким стандартным отклонением доходности по акциям и стандартным отклонением доходности по облигациям.

В связи с тем, что корреляция между изменениями доходностей по облигациям и по акциям не является совершенной, меньшими оказываются и значения стандартного отклонения портфельной доходности. Если представленные облигации могут служить идеальным средством хеджирования вложений в акции или, другими словами, корреляция между изменениями доходностей по облигациям и акциям оказывается совершенной и при этом отрицательной ( $r = -1,00$ ), то стандартное отклонение портфельной доходности будет равно только 9,4%. В этом случае можно сформировать портфель, состоящий на 28% из вложений в акции и на 72% — в облигации (портфель 6), у которого стандартное отклонение портфельной доходности практически равняется нулю. Это означает, что с вероятностью, равной единице, указанный портфель будет иметь совокупную доходность 7,03%.

Представим графически зависимость величины стандартного отклонения от ожидаемой доходности (рис. 5.7) при различных коэффициентах корреляции.

**5.2.2. Постановка задачи об оптимальном портфеле.** В [7, 25] описаны подходы к формированию оптимального портфеля с помощью моделей Блека, Марковица, Тобина. Задача оптимизации заключается в том, чтобы определить, какая доля портфеля должна быть отведена каждой инвестиции так, чтобы ожидаемый доход и уровень риска соответствовали целям инвесторов. Например, целевой функцией может быть минимизация риска при заданной доходности или максимизация дохода при риске не выше заданного. При этом на компоненты вектора  $X$ , представляющего

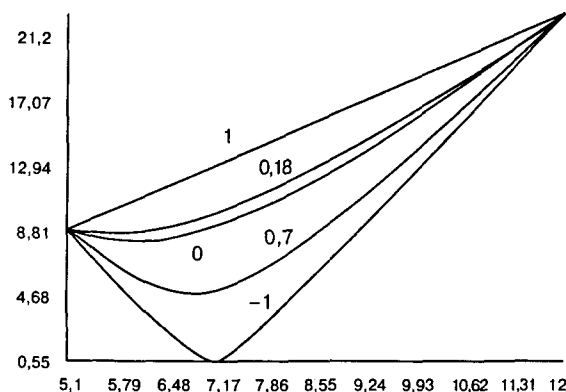


Рис. 5.7. Зависимость стандартного отклонения доходности от ожидаемой доходности при различных значениях коэффициента корреляции  $r$

портфель, могут накладываться различные ограничения, зависящие от вида сделки, типа участвующих активов, величины открываемых позиций и т.д. Портфели, удовлетворяющие условиям данного рынка, называются допустимыми.

1. В модели Блека допустимыми являются любые портфели. Это значит, что вектор  $X$  удовлетворяет лишь основному ограничению:

$$\sum_i^N x_i = 1.$$

Наличие коротких позиций (отсутствие условия неотрицательности) позволяет реализовать любую, сколь угодно большую доходность, естественно, за счет большого риска.

2. В модели Марковица допустимыми являются только стандартные портфели (без коротких позиций). Это значит, что на вектор  $X$  накладываются два ограничения:

$$\sum_i^N x_i = 1 \text{ — основное;}$$

$$x_i \geq 0 \text{ — неотрицательность для всех } i.$$

Портфель называют стандартным, если инвестор по каждому активу находится в длинной (long) позиции. Длинная позиция — это обычно покупка актива с намерением его последующей продажи (закрытие позиций). Такая покупка обычно осуществляется при ожидании повышения цены актива в надежде получить доход от разности цен покупки и продажи. Допустим, что относительно некоторого актива инвестор уверен, что грядет понижение его стоимости. В этом случае он может совершить сделку, которая называется короткой продажей (short sale). Для этого он берет данный актив взаймы у другого инвестора (кредитора), сразу же продает его, а впоследствии покупает на рынке по сниженной цене и возвращает его своему кредитору. При этом он обязан выплатить кредитору текущий доход по активу за время сделки и некоторый процент за предоставление самой возможности сделки (за кредит). На большинстве фондовых бирж короткие продажи вполне допустимы и часто используются, но ввиду их особой рискованности биржи могут вводить ограничения на общую величину коротких позиций в сделках.

Особенностью модели Марковица является то, что доходность любого стандартного портфеля не превышает наибольшей доходности активов, из которых он построен.

3. В модели Тобина—Шарпа—Литнера предполагается наличие так называемых безрисковых активов, доходность которых не зависит от состояния рынка и имеет постоянное значение.

**Задача 5.4.** Сформировать портфель минимального риска из двух видов ценных бумаг — АРТ с эффективностью 12% и риском 21,1 и ВЕРМ с эффективностью 5,1% и риском 8,3 при условии, что обеспечивается доходность портфеля не менее 8,9%. Коэффициент корреляции равен 0,18.

**Решение.** Модель Марковица может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти вектор  $X^T = (x_1, x_2)$ , минимизирующий риск портфеля  $\sigma_p$ .

Здесь  $x_1$  — доля в портфеле ценных бумаг АРТ;  $x_2$  — доля в портфеле ценных бумаг ВЕРМ;

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{X^T \cdot \mathbf{COV} \cdot X} = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \eta_{1,2} + \sigma_2^2 x_2^2} = \\ &= \sqrt{21,2^2 x_1^2 + 2x_1 x_2 21,2 \cdot 8,3 \cdot 0,18 + 8,3^2 x_2^2} \Rightarrow \min \text{ при ограничениях:} \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 = 1; \quad 12x_1 + 5,1x_2 \geq 8,9; \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Графический метод решения задачи (рис. 5.8) дает следующие результаты.

Минимальный риск портфеля, равный 12,88%, достигается в точке пересечения линий ( $x_1 = 0,55$  и  $x_2 = 0,45$ ), соответствующих ограничениям и целевой функции.

Довольно легко можно получить решение задачи в среде Excel с помощью надстройки «Поиск решения» (см. рис. 5.9 и табл. 5.7) [30]. Таким образом, минимальный риск портфеля, равный 12,88%, будет достигнут, если доля акций АРТ составит 0,55, а доля акций ВЕРМ — 0,45.

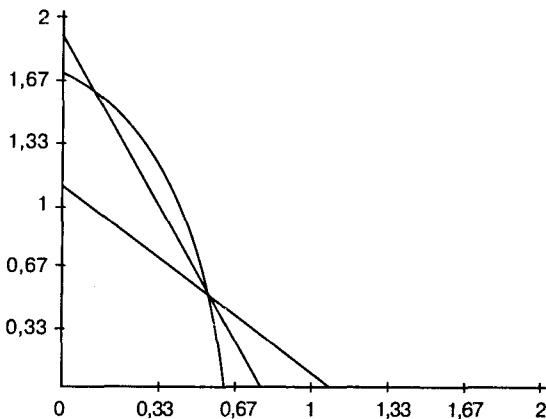


Рис. 5.8. Графическое решение задачи 5.4

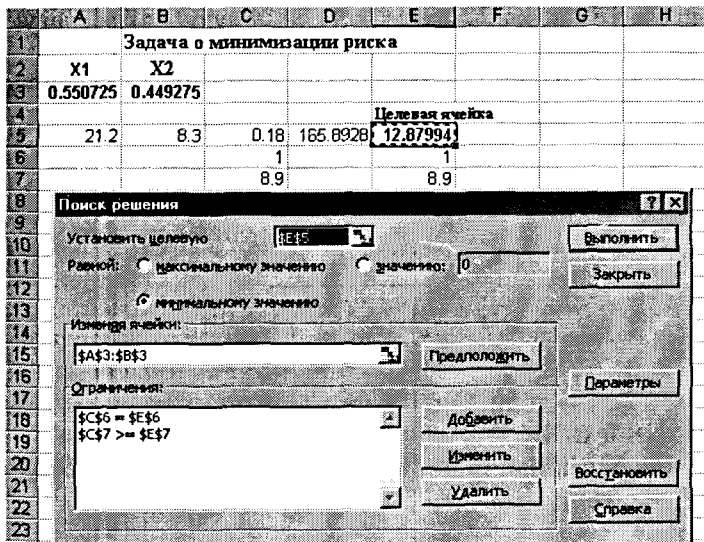


Рис. 5.9. Результат решения задачи 5.4 в среде Excel: в ячейке E5 получено минимальное значение целевой функции

**Задача 5.5.** Найти оптимальный портфель максимальной эффективности для трех ценных бумаг REXX, SNS и LIKX с доходностью и риском:

**Доходность и риск**

|            | REXX | SNS  | LIKX |
|------------|------|------|------|
| $m_i$ %    | 12   | 10,5 | 11   |
| $\sigma_i$ | 25   | 10   | 20   |

**Матрица коэффициентов корреляции**

|      | REXX | SNS  | LIKX |
|------|------|------|------|
| REXX | 1    | 0,52 | 0,27 |
| SNS  | 0,52 | 1    | 0,75 |
| LIKX | 0,27 | 0,75 | 1    |

Верхняя граница риска задана равной 16.

Таблица 5.7

**Excel 8.0. Фрагмент отчета по результатам**

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|--------|-----|---------|-----------|
| \$E\$5 |     | 0       | 12,8799   |
| \$A\$3 |     | 0       | 0,550     |
| \$B\$3 |     | 0       | 0,449     |

**Решение.** Модель может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти вектор  $X^T = (x_1, x_2, x_3)$ , максимизирующий доходность портфеля

$$m_p = 12x_1 + 7x_2 + 11x_3 \rightarrow \max$$

при следующих ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$

$$\sigma_p = \sqrt{X^T \cdot \text{COV} \cdot X} \leq 16;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — доли в портфеле ценных бумаг соответственно REXX, SNS и LIKX.

Матрица ковариаций получена с использованием формулы

$$\text{COV}_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

$$\text{COV} = \begin{pmatrix} 625 & 130 & 135 \\ 130 & 100 & 225 \\ 135 & 225 & 400 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи следует воспользоваться надстройкой Excel, называемой «Поиск решения». В результате получим максимально возможную доходность портфеля 11,29 (при значениях вектора  $X$ , записанных в ячейки \$G1:\$I1 (рис. 5.10)). Таким образом, максимальную доходность 11,29% можно получить, если доли акций REXX, SNS и LIKX составят 0,47; 0,36 и 0,17.

|                           | F              | G             | H            | I        | J             | K  |
|---------------------------|----------------|---------------|--------------|----------|---------------|----|
| <b>X-строка</b>           | <b>0.47235</b> | <b>0.3626</b> | <b>0.165</b> |          |               |    |
| m1 (%)                    |                | 12            | 10.5         | 11       | <b>11.291</b> |    |
|                           |                |               |              |          |               |    |
| <b>X-столбец</b>          |                |               |              |          | 1             | 1  |
| <b>0.47235</b>            |                | 364.6393      | 134.7986     | 211.3676 |               |    |
| <b>0.36262</b>            |                |               |              |          | 256           |    |
| <b>0.16502</b>            |                |               |              |          | 16            | 16 |
|                           |                |               |              |          |               |    |
| <b>Матрица ковариаций</b> |                |               |              |          |               |    |
|                           |                | 625           | 130          | 135      |               |    |
| cov                       |                | 130           | 100          | 225      |               |    |
|                           |                | 135           | 225          | 400      |               |    |

Рис. 5.10. Фрагмент листа Excel с исходными данными и результатами (курсив)

### 5.3. Формирование оптимального портфеля по методу Шарпа

Практика показывает, что на фондовом рынке одновременно объектом купли-продажи являются акции большого числа эмитентов, имеющие разную степень доходности.

Во всех странах с развитым рынком ценных бумаг для определения общей тенденции в изменении курсов акций применяются специальные индикаторы — фондовые индексы\* (Доу—Джонса, Standard & Poors).

Предположим, что доходности всех ценных бумаг за определенный период времени (например, месяц) связаны с доходностью рынка за данный период. В этом случае с ростом рыночного индекса, вероятно, будет расти и цена акции, а с падением рыночного индекса, вероятно, будет падать и цена акции. Такая взаимосвязь может быть описана линейной регрессионной моделью:

$$m_i = a_i + \beta_i m_r + \varepsilon_i, \quad (5.11)$$

где  $m_i$  — доходность ценной бумаги  $i$  за определенный период (зависимая переменная);  $m_r$  — доходность на рыночный индекс за этот же период (независимая, объясняющая переменная);  $a_i$  — коэффициент смещения;  $\beta_i$  — коэффициент наклона;  $\varepsilon_i$  — случайная погрешность.

Отметим, что  $\beta_i$  — тангенс угла наклона линии регрессии (5.11) — часто называют  $\beta$ -коэффициентом (beta). Этот коэффициент измеряет чувствительность ценной бумаги, чувствительность ее доходности к доходности на рыночный индекс.

Оценка параметров регрессионной модели (5.11) осуществляется с помощью метода наименьших квадратов (МНК):

$$\beta_i = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m}_i)(m_r - \bar{m}_r)}{\sigma_{mr}^2} = \frac{\sigma_{ir}}{\sigma_{mr}^2}; \quad \bar{m}_i - \beta_i \bar{m}_r, \quad (5.12)$$

где  $\sigma_{ir}$  — ковариация между доходностью акции  $i$ -й бумаги и доходностью на рыночный индекс;  $\sigma_{mr}^2$  — дисперсия доходности на индекс.

\* Расчеты показателя  $m_r$  производятся по акциям наиболее представительных компаний. В США чаще всего используются индексы Standard & Poors: S&P-100 (500, 1000 и др.) и индекс Доу—Джонса. Их российским аналогом можно считать сводный индекс Российской торговой системы (РТС), разработанный в 1995 г. Сегодня этот индекс де-факто является главным показателем отечественного фондового рынка, его значение по окончании торгов публикуется средствами массовой информации.



Бета-коэффициент оценивает изменения в доходности отдельных акций в сопоставлении с динамикой рыночного дохода. Ценные бумаги, имеющие коэффициент выше единицы, характеризуются как агрессивные и являются более рискованными, чем рынок в целом. Бета-коэффициент может быть положительным или отрицательным. Если он положителен, то доходность соответствующих ценных бумаг будет аналогична динамике рыночной доходности. При отрицательном  $\beta$ -коэффициенте эффективность данной ценной бумаги будет снижаться при возрастании эффективности рынка.

Исходя из рыночной модели (5.11) общий риск ценной бумаги  $i$ , измеряемый ее дисперсией  $\sigma_i^2$ , состоит из двух частей: 1) **рыночный** (или систематический) риск (market risk); 2) **собственный** (или несистематический) риск (unique risk).

Таким образом,  $\sigma_i^2$  определяется следующим выражением:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{mr}^2 + \sigma_\varepsilon^2, \quad (5.13)$$

где  $\beta_i \sigma_{mr}$  — рыночный риск ценной бумаги  $i$ ;  $\sigma_\varepsilon$  — собственный риск ценной бумаги  $i$ , мерой которого является СКО случайной погрешности  $\varepsilon_i$  из (5.11).

Отношение  $\beta_i^2 \sigma_{mr}^2 / \sigma_\varepsilon^2$  обозначается  $R_i^2$  (в регрессионном анализе  $R_i^2$  называют коэффициентом детерминации). Это отношение характеризует долю риска данных ценных бумаг, вносимую рынком. Те бумаги, для которых  $R_i^2$  велико, в каком-то смысле предпочтительнее, так как их поведение более предсказуемо.

Рассмотрим в этой ситуации **портфель ценных бумаг**. Оказывается, доходность (рисковой части) портфеля с зафиксированными долями бумаг также линейно зависит от доходности рынка. В самом деле, пусть доля  $i$ -й ценной бумаги есть  $x_i$ , тогда доходность портфеля

$$m_p = \sum x_i (\alpha_i + \beta_i m_r + \varepsilon). \quad (5.14)$$

Марковиц разработал очень важное положение, которое гласит: совокупный риск портфеля можно разложить на две составные части. С одной стороны, это так называемый систематический риск, который нельзя исключить и которому подвержены все ценные бумаги практически в равной степени, а с другой — специфический риск для каждой конкретной ценной бумаги, который можно элиминировать при помощи управления портфелем ценных бумаг. При этом сумма сложенных средств по всем объектам должна быть равна общему объему инвестиционных вложений (например, часть

средств на банковском счете вводится в модель как инвестиция с нулевым риском). Общий риск портфеля аналогично общему риску отдельной ценной бумаги (5.13) состоит из двух компонент: рыночного риска и собственного риска (см. рис. 5.11):

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_{mr}^2 + \sigma_\varepsilon^2. \quad (5.15)$$

Увеличение *диверсификации* (рост количества ценных бумаг в портфеле) приводит к снижению общего риска портфеля. Это происходит вследствие сокращения собственного риска портфеля, в то время как рыночный риск портфеля остается приблизительно таким же.

Концепция  $\beta$ -коэффициентов составляет основу модели оценки финансовых активов (Capital Assets Pricing Model — CAPM). При помощи этого показателя может быть рассчитана величина премии за риск, требуемой инвесторами по вложениям, имеющим систематический риск выше среднего.

*Модель доходности финансовых активов (CAPM)* описывает зависимость между рыночным риском и требуемой доходностью. Модель CAPM основывается на системе строгих предпосылок [26]. Согласно логике этой модели инвестиционное решение принимается под воздействием двух факторов — ожидаемой доходности  $\bar{m}_i$  и риска, мерой которого является дисперсия или стандартное отклонение доходности. Приняв ряд допущений (инвесторы ведут себя рационально, измеряют время в одних единицах, мыс-

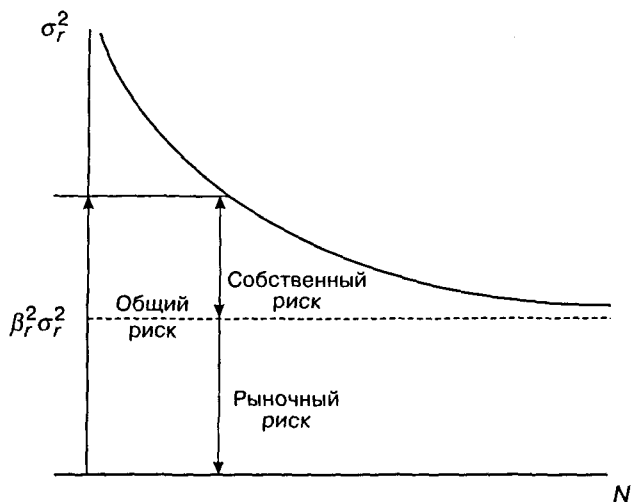


Рис. 5.11. Риск и диверсификация

лят сходным образом, заимствуют и предоставляют средства в долг под безрисковую ставку и др.), авторы модели показали, что при соблюдении указанных допущений инвестиционный портфель, повторяющий пропорции рынка, должен быть оптимальным инвестиционным решением для всех инвесторов.

Формальная запись итогового уравнения данной модели выглядит следующим образом:

$$\tilde{m}_i = m_f + (\bar{m}_r - m_f)\beta_i, \quad (5.16)$$

где  $\tilde{m}_i$  — ожидаемый доход на конкретную ценную бумагу при условии равновесия рынка;  $m_f$  — ставка доходности безрисковой ценной бумаги (примером гарантированных ценных бумаг с фиксированным доходом являются, в частности, государственные облигации);

$\beta$ -коэффициент акции  $i$  — мера рыночного риска акции (измеряет изменчивость доходности акции по отношению к доходности среднерыночного портфеля);  $\beta$ -коэффициент связан с наклоном характеристической линии акции, представляющей собой графическое изображение уравнения регрессии, построенного по статистическим данным о доходности  $i$ -й акции и среднерыночной доходности;

$(\bar{m}_r - m_f)$  — рыночная премия за риск (превышение доходности ценной бумаги над безрисковой доходностью).

Связь между доходностью ценной бумаги и ее  $\beta$ -коэффициентом линейная и называется линией рынка ценных бумаг (Security Market Line — SML). Уравнение SML может быть записано в форме уравнения (5.16).

На графике SML по горизонтальной оси отложены  $\beta$ -коэффициенты, по вертикальной — эффективности бумаг или портфелей. Но эта прямая SML отражает идеальную зависимость между  $\beta$  и доходностью бумаг и портфелей. Все точки, лежащие на прямой SML, соответствуют «справедливо» оцененным бумагам (портфелям), а те, которые лежат выше/ниже этой линии, — недооцененным/переоцененным.

Отсутствие риска по безрисковым ценным бумагам влечет за собой и минимальный уровень прибыли. В силу этого безрисковые бумаги являются главным регулятором прибылей и рисков.

Предположим, что значение доходности по гарантированным бумагам составляет величину  $m_f$ . В этом случае любой инвестиционный портфель, имеющий бумаги с той или иной степенью риска, дает более высокую прибыль, чем аналогичные по объему инвестиции в гарантированные бумаги. Следовательно,

замена любых ценных бумаг на более прибыльные повышает риск портфеля.

Доходность ценных бумаг удобно отсчитывать от доходности безрискового вклада  $m_f$ .

Тогда

$$m_i = a_i + \beta_i m_r = m_f + \beta_i (m_r - m_f) + \alpha_i,$$

где  $\alpha_i = a_i + (\beta_i - 1) m_f$ .

Премия за риск в основном линейно зависит от премии за риск, складывающейся для рынка в целом, и коэффициентом является «бета» данной бумаги. Это, однако, верно, если  $\alpha = 0$ . Такие ценные бумаги называются «справедливо» оцененными. Те же бумаги, у которых  $\alpha > 0$ , рынком недооценены, если  $\alpha < 0$ , то ценные бумаги рынком переоценены.

По данным Э. Димсона\*, в экономически развитых странах мира рыночная премия ( $\bar{m}_r - m_f$ ) равна 8% годовых (данные получены путем ретроспективного анализа фондовых рынков за 50 лет). То есть если, например, ставка безрискового вложения (в долларах) равна 5% годовых, а коэффициент (для какой-то компании) составляет 0,65, то долгосрочная доходность, которую должен потребовать от акций данной компании инвестор в условиях устойчивой экономики, составляет:

$$\bar{m}_i = m_f + (\bar{m}_r - m_f) \beta_i = 5\% + 0,65 \cdot 8\% = 10,2\% \text{ годовых.}$$

Заметим, что на развивающихся рынках, к которым принадлежит и фондовый рынок России, подобные оценки могут быть неправомерны. Это прежде всего связано с тем, что невозможно однозначно ответить на вопрос: *что такое безрисковая ставка?*

В самом деле, в условиях устойчивой экономической системы, например в США или в Англии, ставка  $m_f$  принимается равной доходности государственных обязательств, чаще всего казначейских векселей (treasure bills), по условиям выпуска близких к российским ГКО. Однако российские государственные обязательства вовсе не являются безрисковыми. Это было очевидно задолго до кризиса 1998 г.: доходность ГКО всегда была изменчивой и то поднималась (в период их обращения) до 200% годовых и выше, то опускалась (во время относительной стабилизации экономической ситуации) до 15%. Если мерой риска выбрать дисперсию, то можно сказать однозначно, что ГКО были не просто рисковыми, а чисто спекулятивными бумагами.

---

\* Мелитковский М., Паламарчук В. Стоимость собственного капитала российской корпорации // Рынок ценных бумаг. — 1999. — № 18.

Для развивающихся рынков нет однозначного ответа и на вопрос: *какой должна быть рыночная премия к доходности?*

Так, если эту премию определить на основе какого-либо существующего российского биржевого индекса, то мы рискуем опереться на недостоверные данные. На российском фондовом рынке преобладает внебиржевая активность, и, как показывают отдельные исследования, он обладает низкой степенью информационной эффективности. Это может привести к тому, что индекс, основанный на усредненных котировках спроса и предложения внебиржевых трейдеров, исказит действительные тенденции, существующие на рынке. С другой стороны, даже если принять за основу наиболее достойный доверия фондовый индекс и считать его достаточно надежным индикатором динамики рыночного портфеля, то это все равно не снимет проблемы недостатка информации.

Выводя свои среднерыночные премии, Э. Димсон основывался на анализе предыстории длиной в 50 лет. Однако развивающийся рынок, как правило, молодой и нестабильный. В его тренде отсутствует инерционная составляющая в связи с малой глубиной предыстории и общей волатильностью. С другой стороны, попытки правительства развивающейся страны стабилизировать рынок и повысить его предсказуемость (чтобы сделать его привлекательным для инвесторов) тоже «лихорадят» рынок. Метод проб и ошибок в выборе стратегий развития негативно отражается на динамике фондового рынка.

Заметим далее, поскольку  $\beta$ -коэффициентом можно охарактеризовать не только ценные бумаги, но также и портфели — причем «бета» портфеля равна взвешенной сумме «бета» бумаг, входящих в портфель, — то и портфели могут быть «справедливо» оцененными, недооцененными или переоцененными в зависимости от  $\alpha_p$ .

Из сказанного вытекает соотношение, известное под названием *линия рынка капитала (CML)*. Эта линия отражает зависимость «риск — доходность», т.е.  $m_p$  и  $\sigma_p = (m_p \leq \bar{m}_p, \sigma_p \leq \sigma_m)$ , для портфелей, сочетающих рисковые и безрисковые активы:

$$m_p = m_f + \left( \frac{\bar{m}_r - m_f}{\sigma_{mr}} \right) \sigma_p, \quad (5.17)$$

где  $m_p$  — доходность (эффективность) портфеля акций;  $m_f$  — доходность безрисковых ценных бумаг;  $\sigma_{mr}$  — СКО доходности рыночных ценных бумаг;  $\sigma_p$  — СКО доходности акций портфеля.

Уравнение (5.17) показывает, что ожидаемая доходность эффективного портфеля (т.е. портфеля, лежащего на линии SML) равна сумме безрисковой ставки и премии за риск, которая исчисляется умножением  $(\bar{m}_r - m_f) / \sigma_{mr}$  на среднеквадратическое отклонение портфеля  $\sigma_p$ .

Следует заметить, что CAPM разрабатывалась на основе не вполне реалистичных предпосылок, поэтому эта модель, скорее всего, не отражает в полной мере реальной ситуации. Ряд специалистов подвергают сомнению возможность точной концептуальной проверки CAPM. Поэтому ее применение на практике ограничено.

С целью преодоления отмеченных недостатков CAPM были предприняты попытки разработки альтернативных моделей «риск — доходность». Наиболее перспективной из новых теорий является *теория арбитражного ценообразования*.

#### 5.4. Многофакторные модели. Теория арбитражного ценообразования

CAPM представляет собой однофакторную модель: риск является функцией одного фактора —  $\beta$ -коэффициента, выражающего зависимость между доходностью ценной бумаги и доходностью рынка. На самом деле зависимость между риском и доходностью более сложная. Можно предположить, что требуемая доходность акции будет функцией более чем одного фактора. С. Росс предложил метод, названный *теорией арбитражного ценообразования* (Arbitrage Pricing Theory — APT). Концепция APT предусматривает возможность включения любого количества факторов риска, так что зависимость между доходностью и рисками в общем случае является многофакторной.

Для примера сопоставим линию SML теории CAPM и аналог этой линии в арбитражной теории:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i &= m_f + (\bar{m}_r - m_f)\beta_i; \\ \tilde{m}_i &= m_f + (\lambda_1 - m_f)\beta_{i1} + \dots + (\lambda_j - m_f)\beta_{ij}, \end{aligned}$$

где  $\lambda_j$  — требуемая доходность портфеля с единичной чувствительностью к  $j$ -му экономическому фактору ( $\beta_j = 1,00$ ) и нулевой чувствительностью ( $\beta_j = 0$ ) к другим факторам.

Можно выделить несколько факторов, оказывающих влияние на все сферы экономики: темпы прироста валового внутреннего продукта, уровень процентных ставок, уровень инфляции, уровень цен на нефть. При построении многофакторных моделей пытаются

ся учесть основные экономические факторы, систематически воздействующие на курсовую стоимость всех ценных бумаг.

Недостатком таких моделей является следующее: на практике трудно выяснить, какие именно факторы риска нужно включать в модель. В настоящее время в качестве таких факторов используют показатели развития промышленного производства, изменений уровня банковских процентов, инфляции, риска неплатежеспособности конкретного предприятия и т.д.

Рассмотрим теперь несколько примеров конкретного применения теории к практическим расчетам.

**Задача 5.6.** Далее приведены информация о доходности акции GLSYTR ( $m_i$ ) и индекс рынка ( $m_r$ ) на протяжении 10 кварталов:

| Квартал | $m_i$ | $m_r$ |
|---------|-------|-------|
| 1       | 23    | 10    |
| 2       | 21    | 9     |
| 3       | 20    | 9     |
| 4       | 22    | 10    |
| 5       | 23    | 10    |
| 6       | 24    | 11    |
| 7       | 25    | 11    |
| 8       | 27    | 12    |
| 9       | 25    | 10    |
| 10      | 20    | 8     |

Известно, что эффективность безрисковых вложений равна 4%. Требуется:

- 1) построить рыночную модель, где  $m_i$  — зависимая переменная,  $m_r$  — объясняющая переменная;
- 2) определить характеристики ценной бумаги: рыночный (или систематический) риск, собственный (или несистематический) риск, коэффициент детерминации  $R^2$ , а также величину  $\alpha$ ;
- 3) привести график построенной модели;
- 4) построить линию рынка ценных бумаг (SML).

**Решение.** Параметры модели найдем с помощью инструмента регрессии «Пакет анализа» Excel.

1. Ввод данных (рис. 5.12 и 5.13).
2. Результаты расчетов отражены в табл. 5.8–5.10.

Таблица 5.8

Коэффициенты уравнения регрессии

|               | Коэффициенты |
|---------------|--------------|
| Y-пересечение | 4,667        |
| $m_r$         | 1,833        |

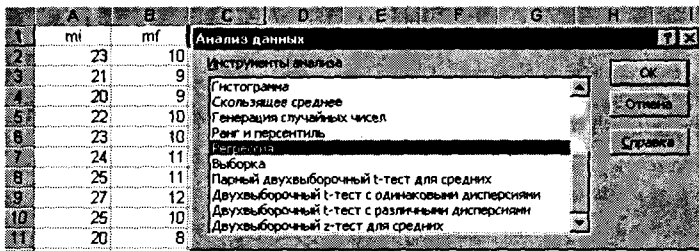


Рис. 5.12. Регрессия — выбор инструмента анализа

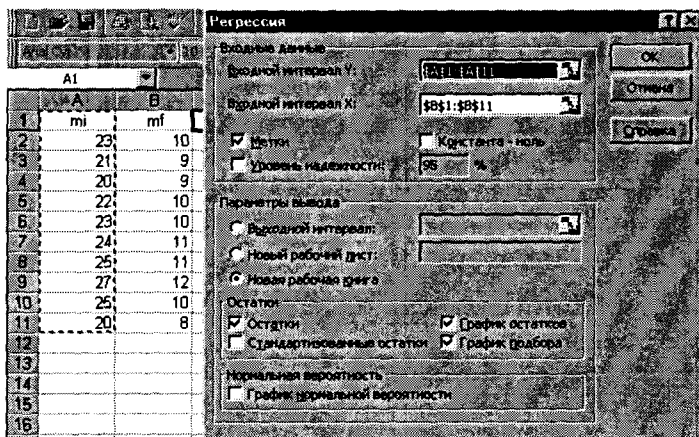


Рис. 5.13. Задание интервалов входных данных

Таблица 5.9

### Дисперсионный анализ

|           | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Регрессия | 1         | 40,3333   | +40,333   |
| Остаток   | 8         | 7,667     | 0,9533    |
| Итого     | 9         | 48        |           |

### Пояснения к таблице 5.9

|           | <i>df</i> — число степеней свободы | <i>SS</i> — сумма квадратов    | <i>MS</i>                          |
|-----------|------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| Регрессия | $k = 1$                            | $\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ | $\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / k$ |
| Остаток   | $n - k - 1 = 8$                    | $\sum e^2(t)$                  | $\sum e^2(t) / (n - k - 1)$        |
| Итого     | $n - 1 = 9$                        | $\sum (y_i - \bar{y})^2$       |                                    |



## Вывод остатка

| Наблюдение | Предсказанное $m_i$ | Остатки |
|------------|---------------------|---------|
| 1          | 23,000              | 0,000   |
| 2          | 21,167              | -0,167  |
| 3          | 21,167              | -1,167  |
| 4          | 23,000              | -1,000  |
| 5          | 23,000              | 0,000   |
| 6          | 24,833              | -0,833  |
| 7          | 24,833              | 0,167   |
| 8          | 26,667              | 0,333   |
| 9          | 23,000              | 2,000   |
| 10         | 19,333              | 0,667   |

Используя данные табл. 5.8, полученную рыночную модель можно записать в виде  $m_i = 4,667 + 1,833m_r$ . Следовательно,  $\beta$ -коэффициент акции GLSYTR равен 1,833.

Пояснения для вычислений без ПЭВМ:

$$\beta_i = \frac{1}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m}_i)(m_r - \bar{m}_r)}{\sigma_{mr}^2} = 2,2/1,2 = 1,833,$$

$$\text{где } \bar{m}_i = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{N} = 230/10 = 23; \quad \bar{m}_r = \frac{\sum_{i=1}^N m_r}{N} = 100/10 = 10;$$

$$\sigma_{mf}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (m_f - \bar{m}_f)^2}{N-1} = 1,2;$$

$$\sigma_{ir} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m}_i)(m_r - \bar{m}_r) = 2,2.$$

Для вычисления собственного риска  $\sigma_\varepsilon^2$  воспользуемся формулой

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum \varepsilon(t)^2 / (N-1).$$

Тогда

$$\sigma_\varepsilon^2 = 7,667/10 = 0,77 \text{ (где значение 7,667 взято из табл. 5.9).}$$

Для вычисления систематического (или рыночного) риска необходимо сначала вычислить  $\beta_i^2 = 1,833 \cdot 1,833 = 3,36$ , а затем умножить этот результат на дисперсию  $\sigma_{mr}^2$ :  $\beta_i^2 \sigma_{mr}^2 = 3,36 \cdot 1,2 = 4,03$ .

Общий риск  $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{mr}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 4,03 + 0,77 = 4,8$ .

Коэффициент детерминации  $R_i^2 = 0,840$  (из табл. 5.11).

Таблица 5.11

Регрессионная статистика

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| Множественный $R$          | 0,917  |
| $R$ -квадрат               | 0,840  |
| Нормированный $R$ -квадрат | 0,820  |
| Стандартная ошибка         | 0,979  |
| Наблюдения                 | 10,000 |

Пояснения для вычислений без ПЭВМ:

$$R_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{mr}^2 / \sigma_i^2 = 4,03 / 4,8 = 0,84.$$

Это отношение характеризует долю риска данных ценных бумаг, вносимую рынком. Поведение акций компании GLSYTR на 84% предсказуемо с помощью индекса рынка.

Разница между средней доходностью ценной бумаги за 10 кварталов и доходностью ценной бумаги, полученной на базе рыночной модели, составляет

$$\alpha_i = a_i + (\beta_i - 1)m_f = 4,667 + (1,833 - 1)4 = 8.$$

Акции компании GLSYTR можно отнести к классу «агрессивных» ценных бумаг, так как  $\beta$ -коэффициент равен 1,833.

График регрессионной модели зависимости доходности акций GLSYTR от индекса рынка приведен на рис. 5.14.

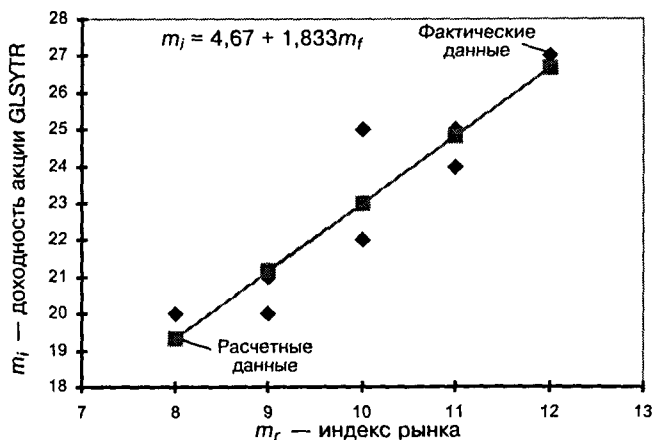


Рис. 5.14. Зависимость доходности акций GLSYTR от индекса рынка (график рыночной модели)

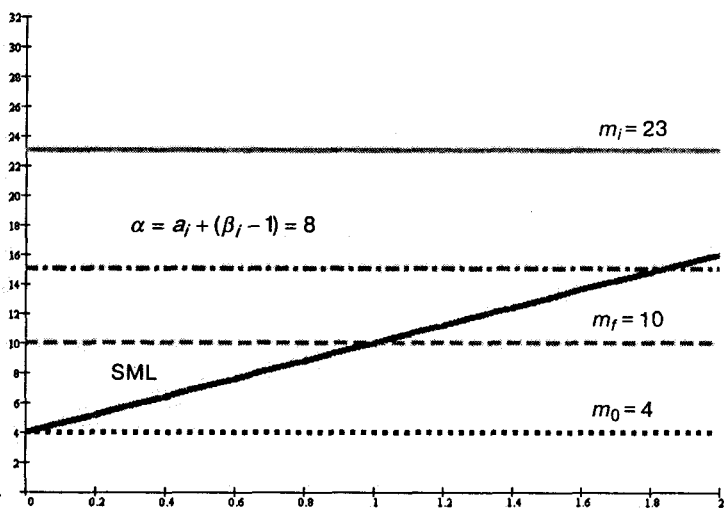


Рис. 5.15. Линия рынка ценных бумаг (SML)

Графическое изображение конкретной линии рынка ценных бумаг для задачи 5.6 приведено на рис. 5.15.

*Пример 5.2.* Сформировать портфель минимального риска из двух видов ценных бумаг (см. таблицу исходных данных) при условии, что обеспечивается доходность портфеля ( $m_p$ ) не менее, чем по безрисковым бумагам (облигациям), с учетом индекса рынка.

Таблица исходных данных

| Время   | Индекс ( $m_i$ ) | Облигации | GLSYTR | TRUW  |
|---------|------------------|-----------|--------|-------|
|         |                  |           | $m_1$  | $m_2$ |
| 1       | 10               | 3         | 23     | 14    |
| 2       | 9                | 6         | 21     | 12    |
| 3       | 9                | 6         | 20     | 11    |
| 4       | 10               | 5,5       | 22     | 15    |
| 5       | 10               | 8         | 23     | 14    |
| 6       | 11               | 9         | 24     | 16    |
| 7       | 11               | 6         | 25     | 16    |
| 8       | 12               | 5,5       | 27     | 17    |
| 9       | 10               | 4,5       | 25     | 15    |
| 10      | 8                | 6,5       | 20     | 12    |
| Сумма   |                  | 60        | 230    | 142   |
| Среднее |                  | 6         | 23     | 14,2  |

**1. Применение регрессионного анализа.** Построим модель зависимости доходности ценной бумаги TRUW от индекса рынка. Параметры модели найдем с помощью инструмента регрессии «Пакет анализа» Excel (рис. 5.16).

Результаты расчетов приведены в табл. 5.12–5.15.

Таблица 5.12

**Регрессионная статистика**

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| Множественный $R$          | 0,919 |
| $R$ -квадрат               | 0,845 |
| Нормированный $R$ -квадрат | 0,826 |
| Стандартная ошибка         | 0,830 |
| Наблюдения                 | 10    |

Таблица 5.13

**Дисперсионный анализ**

|           | $df$ | $SS$   | $MS$   | $F$    | Значимость $F$ |
|-----------|------|--------|--------|--------|----------------|
| Регрессия | 1    | 30,083 | 30,083 | 43,625 | 0,000          |
| Остаток   | 8    | 5,517  | 0,690  |        |                |
| Итого     | 9    | 35,6   |        |        |                |

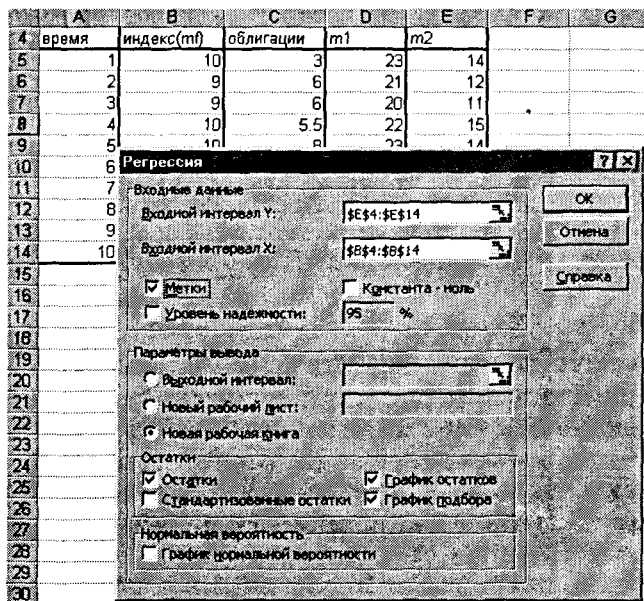


Рис. 5.16. Заданы интервалы входных данных

Таблица 5.14

## Коэффициенты уравнения регрессии

|                  | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика |
|------------------|--------------|--------------------|--------------|
| Y-пересечение    | -1,633       | 2,412              | -0,677       |
| индекс ( $m_r$ ) | 1,583        | 0,240              | 6,605        |

Рыночная модель для бумаги TRUW имеет вид

$$m_2 = -1,63 + 1,58m_r,$$

а собственный риск этой бумаги равен

$$\sigma_{\epsilon 2}^2 = \sum \sigma_{\epsilon}^2 / (N-1) = 5,517/9 = 0,613.$$

Абсолютные ошибки этой модели (отклонения от фактических данных) даны в табл. 5.15.

Таблица 5.15

## Вывод остатков

| Наблюдение | Предсказанное $m_2$ | Остатки |
|------------|---------------------|---------|
| 1          | 14,200              | -0,200  |
| 2          | 12,617              | -0,617  |
| 3          | 12,617              | -1,617  |
| 4          | 14,200              | 0,800   |
| 5          | 14,200              | -0,200  |
| 6          | 15,783              | 0,217   |
| 7          | 15,783              | 0,217   |
| 8          | 17,367              | -0,367  |
| 9          | 14,200              | 0,800   |
| 10         | 11,033              | 0,967   |

Аналогично построим модель зависимости доходности ценной бумаги GLSYTR от индекса рынка:

$$m_1 = 4,667 + 1,833 m_r; \quad \sigma_{\epsilon 1}^2 = \sigma_{\epsilon}^2 / (N-1) = 7,667/9 = 0,852.$$

**2. Решение оптимизационной задачи.** Необходимо найти вектор  $X^T = (x_1, x_2)$ , минимизирующий риск портфеля  $\sigma_p$ . Решение задачи можно получить в среде Excel с помощью надстройки «Поиск решения».

Напомним, что задача Марковица о формировании оптимального портфеля с учетом индекса рынка и минимального риска в общем виде формулируется следующим образом.

Необходимо найти вектор  $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , минимизирующий риск портфеля  $\sigma_p$ , причем

$$\sigma_p = \sqrt{\left( \sum_i x_i \beta_i \right)^2 \sigma_{mr}^2 + \sum_i x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2};$$

$$\sum_i x_i (a_i + \beta_i m_r) \geq m_p;$$

$$\sum_i^n x_i = 1.$$

**Экономико-математическая модель задачи** о формировании портфеля минимального риска из ценных бумаг GLSYTR и TRUW выглядит следующим образом.

Пусть  $x_1$  — доля в портфеле ценных бумаг GLSYTR;  $x_2$  — доля в портфеле ценных бумаг TRUW.

По условию задачи доходность портфеля должна быть не ниже, чем в среднем по облигациям, т.е. не меньше 6% ( $60/10 = 6\%$ ). В таком случае целевая функция и ограничения принимают вид

$$\sigma_p = \sqrt{\left( \sum_i x_i \beta_i \right)^2 \sigma_{mr}^2 + \sum_i x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1^2 1,83^2 + 2 \cdot 1,83 \cdot 1,58 \cdot x_1 x_2 + x_2^2 1,58^2) 1,2 + x_1^2 0,767 + x_2^2 0,552} \Rightarrow \min;$$

$$x_1 + x_2 = 1;$$

$$m_p = \sum_i x_i (a_i + \beta_i m_r) = x_1 (4,67 + 1,83 \cdot 10) + x_2 (-1,63 + 1,58 \cdot 10) \geq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

**Решение.** Последовательность действий при решении задачи приведена на рис. 5.17–5.25.

В ячейках D25 и E25 будут находиться значения неизвестных  $x_1$  и  $x_2$  (эти ячейки называются изменяемыми).

Значение целевой функции

$$\sigma_p = \sqrt{(x_1^2 1,83^2 + 2 \cdot 1,83 \cdot 1,58 \cdot x_1 x_2 + x_2^2 1,58^2) 1,2 + x_1^2 0,767 + x_2^2 0,552}$$

вносится в ячейку G27. Для ввода формулы для вычисления  $\sigma_p$  воспользуемся функцией *КОРЕНЬ* из категории «Математические» (рис. 5.19 и 5.20). Затем вводятся зависимости для вычисления левых частей ограничений (рис. 5.21). На рис. 5.22–5.24 показано заполнение полей в «Поиске решений». Указав целевую ячейку (G27), изменяемые ячейки (D25:E25), добавим ограничения (рис. 5.22). В параметрах «Поиска решений» необходимо отметить неотрицательность решений (рис. 5.24).

|    | A                              | B | C | D     | E     | F | G | H               |
|----|--------------------------------|---|---|-------|-------|---|---|-----------------|
| 22 | Решение оптимизационной задачи |   |   |       |       |   |   |                 |
| 23 |                                |   |   |       |       |   |   |                 |
| 24 | $\beta_1$                      |   |   | $X_1$ | $X_2$ |   |   |                 |
| 25 | $\beta_2$                      |   |   |       |       |   |   |                 |
| 26 |                                |   |   |       |       |   |   | Целевая функция |
| 27 | Собств. риск 1                 |   |   |       |       |   |   |                 |
| 28 | Собств. риск 2                 |   |   |       |       |   |   |                 |
| 29 |                                |   |   |       |       |   |   |                 |
| 30 | a01                            |   |   |       |       |   |   |                 |
| 31 | a02                            |   |   |       |       |   |   |                 |
| 32 |                                |   |   |       |       |   |   |                 |
| 33 | m(без риск)                    |   |   |       |       |   |   |                 |
| 34 |                                |   |   |       |       |   |   |                 |

Рис. 5.17. Подготовленная форма для ввода данных

|    | A                              | B     | C | D     | E     | F    | G | H               |
|----|--------------------------------|-------|---|-------|-------|------|---|-----------------|
| 22 | Решение оптимизационной задачи |       |   |       |       |      |   |                 |
| 23 |                                |       |   |       |       |      |   |                 |
| 24 | $\beta_1$                      | 1.83  |   | $X_1$ | $X_2$ |      |   |                 |
| 25 | $\beta_2$                      | 1.58  |   |       |       |      |   |                 |
| 26 |                                |       |   |       |       |      |   | Целевая функция |
| 27 | Собств. риск 1                 | 0.767 |   |       |       |      |   |                 |
| 28 | Собств. риск 2                 | 0.552 |   |       |       |      |   |                 |
| 29 |                                |       |   |       |       |      |   |                 |
| 30 | a01                            | 4.67  |   |       | 1     |      |   | 1               |
| 31 | a02                            | -1.63 |   |       | 23    | 14.2 |   | 6               |
| 32 |                                |       |   |       |       |      |   |                 |
| 33 | m(без риск)                    | 6     |   |       |       |      |   |                 |
| 34 |                                |       |   |       |       |      |   |                 |

Рис. 5.18. Ввод исходных данных

КОРЕНЬ = X √ \* =

|    | A                              | B     | C | D     | E     | F | G | H               |
|----|--------------------------------|-------|---|-------|-------|---|---|-----------------|
| 22 | Решение оптимизационной задачи |       |   |       |       |   |   |                 |
| 23 |                                |       |   |       |       |   |   |                 |
| 24 | $\beta_1$                      | 1.83  |   | $X_1$ | $X_2$ |   |   |                 |
| 25 | $\beta_2$                      | 1.58  |   |       |       |   |   |                 |
| 26 |                                |       |   |       |       |   |   | Целевая функция |
| 27 | Собств. риск 1                 | 0.767 |   |       |       |   |   | 0.00            |
| 28 | Собств. риск 2                 | 0.552 |   |       |       |   |   |                 |
| 29 |                                |       |   |       |       |   |   |                 |
| 30 | a01                            | 4.67  |   |       |       |   |   |                 |
| 31 | a02                            | -1.63 |   |       |       |   |   |                 |
| 32 |                                |       |   |       |       |   |   |                 |
| 33 | m(без риск)                    | 6     |   |       |       |   |   |                 |
| 34 |                                |       |   |       |       |   |   |                 |

Мастер функций шаг 1 из 2

Категории: 10 недавно использовавшихся, Полный алфавитный перечень, Финансовый, Дата и время, Вычисления, Статистические, Ссылки и массивы, Работа с базой данных, Текстовые

Функции: ГРАДУСЫ, ЗНАК, КОСИНУС, КОСГУС, КОСПРЕД, ЛОГАРИФМ, ЛОГ, ЛОГ10, ЛОГ2, ЛОГЕ, ЛОГНП, ЛОГП, ЛОГР, ЛОГР10, ЛОГР2, ЛОГР3, ЛОГР4, ЛОГР5, ЛОГР6, ЛОГР7, ЛОГР8, ЛОГР9, ЛОГР10, ЛОГР11, ЛОГР12, ЛОГР13, ЛОГР14, ЛОГР15, ЛОГР16, ЛОГР17, ЛОГР18, ЛОГР19, ЛОГР20, ЛОГР21, ЛОГР22, ЛОГР23, ЛОГР24, ЛОГР25, ЛОГР26, ЛОГР27, ЛОГР28, ЛОГР29, ЛОГР30, ЛОГР31, ЛОГР32, ЛОГР33, ЛОГР34, ЛОГР35, ЛОГР36, ЛОГР37, ЛОГР38, ЛОГР39, ЛОГР40, ЛОГР41, ЛОГР42, ЛОГР43, ЛОГР44, ЛОГР45, ЛОГР46, ЛОГР47, ЛОГР48, ЛОГР49, ЛОГР50, ЛОГР51, ЛОГР52, ЛОГР53, ЛОГР54, ЛОГР55, ЛОГР56, ЛОГР57, ЛОГР58, ЛОГР59, ЛОГР60, ЛОГР61, ЛОГР62, ЛОГР63, ЛОГР64, ЛОГР65, ЛОГР66, ЛОГР67, ЛОГР68, ЛОГР69, ЛОГР70, ЛОГР71, ЛОГР72, ЛОГР73, ЛОГР74, ЛОГР75, ЛОГР76, ЛОГР77, ЛОГР78, ЛОГР79, ЛОГР80, ЛОГР81, ЛОГР82, ЛОГР83, ЛОГР84, ЛОГР85, ЛОГР86, ЛОГР87, ЛОГР88, ЛОГР89, ЛОГР90, ЛОГР91, ЛОГР92, ЛОГР93, ЛОГР94, ЛОГР95, ЛОГР96, ЛОГР97, ЛОГР98, ЛОГР99, ЛОГР100

КОРЕНЬ(число)

Возвращает значение квадратного корня.

OK Отмена

Рис. 5.19. Выбор функции КОРЕНЬ выражения для целевой функции

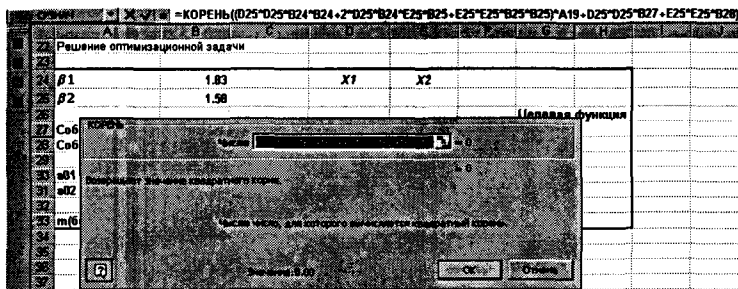


Рис. 5.20. Ввод подкоренного выражения:  
 $(D25 \cdot D25 \cdot B24 + B24 + 2 \cdot B24 \cdot B25 \cdot E25 \cdot D25 + E25 \cdot E25 \cdot B25 \cdot B25) \cdot A19 + D25 \cdot D25 \cdot B27 + E25 \cdot E25 \cdot B28)$

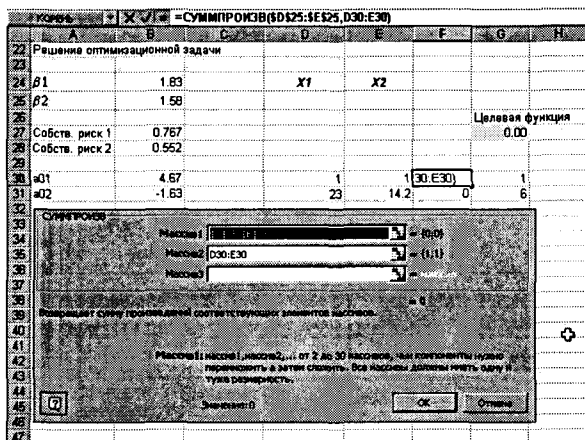


Рис. 5.21. Ввод зависимостей для левых частей ограничений

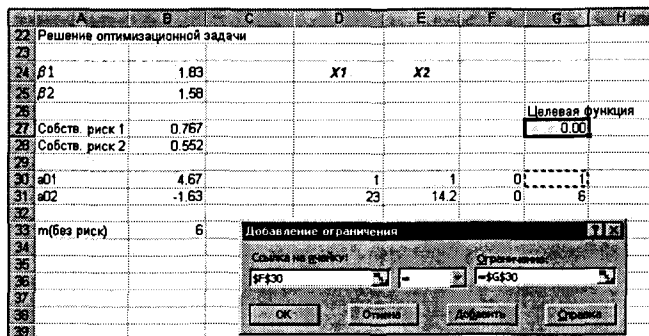


Рис. 5.22. Добавляемые ограничения



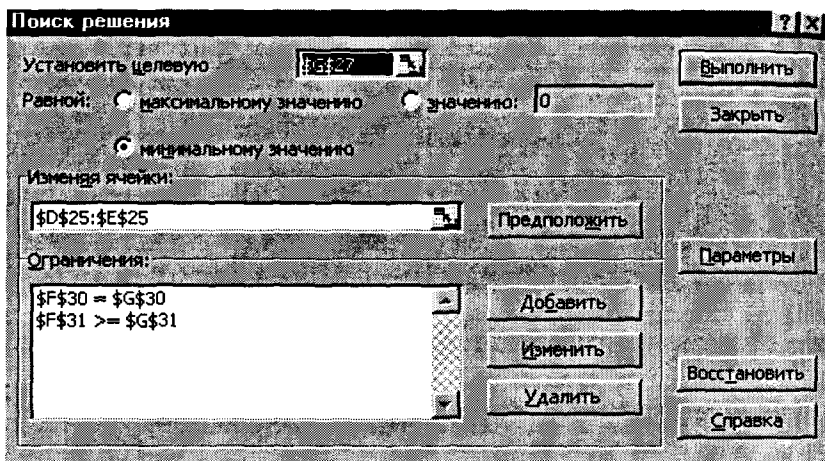


Рис. 5.23. Заполнение полей «Поиска решений»



Рис. 5.24. Ввод параметров «Поиска решений»

|                                | A | B     | C | D     | E     | F      | G               | H    |
|--------------------------------|---|-------|---|-------|-------|--------|-----------------|------|
| Решение оптимизационной задачи |   |       |   |       |       |        |                 |      |
| $\beta_1$                      |   | 1.83  |   | X1    | X2    |        |                 |      |
| $\beta_2$                      |   | 1.58  |   | 0.056 | 0.944 |        |                 |      |
| Собств. риск 1                 |   | 0.767 |   |       |       |        | Целевая функция | 1.88 |
| Собств. риск 2                 |   | 0.552 |   |       |       |        |                 |      |
| a01                            |   | 4.67  |   | 1     | 1     | 1,000  |                 | 1    |
| a02                            |   |       |   |       |       | 14.692 |                 | 6    |

**Результаты поиска решения**

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение  
 Восстановить исходные значения

Дополнительно:  
 Результаты  
 Устойчивость  
 Пределы

OK Отмена Сохранить сценарий... Справка

Рис. 5.25. Результаты поиска решения (см. табл. 5.16)

Таблица 5.16

**Решение оптимизационной задачи**

|                |       |  |       |       |        |                 |
|----------------|-------|--|-------|-------|--------|-----------------|
| $\beta_1$      | 1,83  |  | X1    | X2    |        |                 |
| $\beta_2$      | 1,58  |  | 0,056 | 0,944 |        |                 |
| Собств. риск 1 | 0,767 |  |       |       |        | Целевая функция |
| Собств. риск 2 | 0,552 |  |       |       |        | 1,88            |
| a01            | 4,67  |  | 1     | 1     | 1,000  | 1               |
| a02            | -1,63 |  | 23    | 14,2  | 14,692 | 6               |
| m(без риск)    | 6     |  |       |       |        |                 |

Таким образом, минимальный риск портфеля, равный 1,88%, будет достигнут, если доля акций GLSYTR составит 5,6%, а доля акций TRUW — 94,4%.

**Замечание.** В заключение необходимо подчеркнуть следующее. Развиваемый в этой главе подход позволяет построить множество эффективных портфелей. В дальнейших рассуждениях следует иметь в виду, что каждый инвестор имеет график кривых безразличия, отражающих его выбор ожидаемых доходностей и стандартных отклонений. Это означает, что инвесторы, формирующие свой оптимальный портфель только из рискованных ценных бумаг, будут выбирать конкретный портфель из множества эффективных портфелей в зависимости от их отношения к риску. При графическом рассмотрении этот портфель будет определяться точкой ка-

сания кривой безразличия инвестора с множеством эффективных портфелей. В этой точке линия инвестиционных возможностей (эффективные портфели для данной инвестируемой суммы и данного момента времени) касается наивысшей из возможных кривых безразличия. Для каждого инвестора выбор оптимального портфеля будет индивидуальным, так как индивидуальны кривые безразличия. Инвестиционные возможности (комбинации риска и доходности) определяются рынком и не зависят от предпочтений инвестора.

### ***Вопросы и задачи для повторения и самопроверки***

- 5.1.** Какие критерии целесообразно использовать в экономических системах для оценивания риска?
- 5.2.** Существуют ли такие показатели риска, как:
  - а) полумода;
  - б) полумедиана;
  - в) полудисперсия;
  - г) полувариация?
- 5.3.** Укажите, в чем различие между непрерывными и дискретными распределениями вероятностей.
- 5.4.** Какая существует связь между коэффициентами ковариации и корреляции? Почему коэффициент корреляции является более удобной мерой?
- 5.5.** Приведите пример двух обыкновенных акций, для которых, по вашему мнению, корреляция:
  - а) положительная и высокая;
  - б) положительная и незначительная;
  - в) отрицательная и высокая;
  - г) отрицательная и незначительная.
- 5.6.** В каком случае ожидаемая доходность портфеля и общий риск портфеля соответственно равны средневзвешенной ожидаемой доходности и средневзвешенной стандартных отклонений ценных бумаг, входящих в портфель?
- 5.7.** Какой портфель ценных бумаг называют стандартным?
- 5.8.** В чем принципиальные различия между моделями Блека, Марковича и Тобина–Шарпа–Литнера?
- 5.9.** Почему предпочтительнее иметь диверсифицированный портфель, вместо того чтобы вкладывать средства в один наиболее доходный финансовый актив?
- 5.10.** Объясните, почему понятия корреляции и диверсификации тесно связаны между собой.
- 5.11.** К уменьшению какого риска ценной бумаги – собственного или рыночного – приводит диверсификация? Чем это объясняется?
- 5.12.** Почему ценные бумаги, имеющие бета-коэффициент больше единицы, считают агрессивными и более рискованными?

- 5.13.** Как называют ценные бумаги, у которых параметр  $\alpha = 0$ ,  $\alpha < 0$  и  $\alpha > 0$ ?
- 5.14.** Сформулируйте задачу формирования портфеля ценных бумаг. К какому классу методов математического программирования относится решение таких задач?
- 5.15.** Сформулируйте задачу Марковица о формировании оптимального портфеля с учетом индекса рынка и минимального риска.

*Решить задачи 3-5.1 – 3-5.2.*

**3-5.1.** Компания «Углич-сыр» специализируется на производстве сырной пасты. Финансовый менеджер должен решить, сколько ящиков сырной пасты следует производить в течение месяца. Судя по прошлым месяцам, вероятности того, что спрос (не оптовый!) на сырную пасту в течение месяца будет 6, 7, 8 или 9 ящиков, равны соответственно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1. Затраты на производство одного ящика равны 45 ден. ед. Компания продает каждый ящик по цене 95 ден. ед. Если ящик с сырной пастой не продан в течение месяца, то паста портится и компания терпит убыток в 10 ден. ед. Сколько ящиков следует производить в течение месяца?

| Производство ящиков | Спрос на ящики и возможная прибыль от их продажи |                    |                    |                    |
|---------------------|--|--------------------|--------------------|--------------------|
|                     | 6<br>( $p = 0,1$ )                               | 7<br>( $p = 0,3$ ) | 8<br>( $p = 0,5$ ) | 9<br>( $p = 0,1$ ) |
| 6                   | 300  | 300                | 300                | 300                |
| 7                   | 255  | 350                | 350                | 350                |
| 8                   | 210  | 305                | 400                | 400                |
| 9                   | 165  | 260                | 355                | 450                |

**3-5.2.** Среднее значение рыночной доходности акции за прошлые годы составило 21%. Рассчитать доходность акции при условии, что безрисковая доходность равна 7%, а  $\beta = 0,8$ . На сколько процентов следует ожидать увеличения доходности акции, если, по оценкам экспертов, в будущем году доходность фондового рынка превысит среднюю оценку по прошлым годам на 20%?

### *Ответы на задачи*

**3-5.1.** Если не учитывать характера отношения финансового менеджера к риску, следует остановиться на выпуске 7 ящиков сырной пасты. **3-5.2.** 18,2%; на 3,36%.

### 6.1. Структура временных рядов финансовых показателей

Анализ эволюции финансовых показателей (индексов), безусловно, связан с построением подходящей вероятностно-статистической (или какой-либо иной) модели, правильный выбор которой является делом весьма непростым. В такой ситуации целесообразно обратиться прежде всего к *теории временных рядов*, которая предлагает большой набор разнообразных «стандартных», в частности *линейных*, моделей. Среди них в первую очередь надо назвать такие, как модели *скользящего среднего порядка  $q$*  —  $MA(q)$ , *авторегрессии порядка  $p$*  —  $AR(p)$ , *смешанные модели авторегрессии и скользящего среднего порядка  $(p, q)$*  —  $ARMA(p, q)$  [1].

Популярность этих моделей определяется не только прозрачностью их расчетного алгоритма, но и тем, что уже при небольшом числе параметров они позволяют хорошо аппроксимировать весьма широкий класс стационарных последовательностей.

Однако отнюдь не все временные ряды финансовых показателей являются стационарными. С позиции современных представлений уровни временного ряда  $Y(t)$  формируются под воздействием четырех основных факторов: долговременной тенденции развития — тренда  $Tr(t)^*$ , сезонных  $S(t)$ , циклических (конъюнктурных)  $C(t)$  и случайных  $\varepsilon(t)$  колебаний. Наличие этих компонент в самом общем виде отражает следующая запись:

$$Y(t) = Y(Tr(t), S(t), C(t), \varepsilon(t)). \quad (6.1)$$

Конкретизируя в соотношении (6.1) взаимосвязь между трендовой, сезонной, циклической и случайной компонентами, мы принимаем ту или иную конкретную *структурную модель временного ряда*\*\* . Причем случайная составляющая  $\varepsilon(t)$  является *обязательной* для любого ряда экономической динамики, так как слу-

\* Например, медленно меняющийся «инфляционный» тренд.

\*\* Чаще всего используются *аддитивные* и *мультипликативные* модели. Если принять *аддитивную структурную модель ряда экономической динамики*, то в общем случае мы вправе представить соотношение (6.1) в виде разложения

$$Y(t) = Tr(t) + S(t) + C(t) + \varepsilon(t), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

чайные флуктуации неизбежно сопутствуют любому экономическому процессу. Именно воздействие *случайных (нерегулярных)*, не поддающихся учету и регистрации факторов на формирование значений временного ряда обуславливает *стохастическую природу* элементов  $Y(t)$ , а следовательно, и необходимость интерпретации  $Y(1), Y(2), \dots, Y(n)$  как наблюдений, произведенных над величинами, не являющимися строго детерминированными.

В литературе встречаются весьма интересные подходы к анализу временных рядов обменных курсов. В частности, начиная с простых линейных гауссовских моделей, аналитик может постепенно корректировать, усложнять описание с тем, чтобы получить в конце концов модель, «ухватывающую», например, такие феномены, как отклонение от гауссовости, эффекты кластерности, «долгая память» в ценах.

Заметим также, что в конечном счете одна из важных целей анализа статистических данных по финансовым индексам состоит в прогнозировании, предсказании «будущего движения цен». На первый взгляд весьма привлекательно в отношении экстраполяции на будущее выглядит трендовая, детерминированная, составляющая  $Tg(t)$ . Однако практический опыт математического моделирования финансового рынка показывает, что временной ряд, как правило, не удается полностью описать одной лишь детерминированной компонентой. С другой стороны, поведение нерегулярной, случайной компоненты нельзя точно предсказать заранее. Для ее описания и соответствующего описания всего временного ряда в целом привлекают вероятностно-статистические понятия и методы\*. В итоге все большее распространение получают модели финансового рынка, непосредственно отражающие стохастичность и неопределенность экономических процессов. При их построении широко используют соответствующий математический аппарат: теорию вероятностей и математическую статистику, теорию игр и статистических решений, теорию массового обслуживания, стохастическое программирование, теорию случайных процессов.

\* Хотя каждый временной ряд можно рассматривать как реализацию некоторого случайного процесса, но собственно методы теории случайных процессов в экономических исследованиях в общем случае неприменимы. Главным препятствием является то, что любой ряд экономической динамики является единственной реализацией. А в соответствии с теорией случайных функций в такой ситуации должно быть выполнено требование эргодической теоремы: независимость математического ожидания временного ряда от времени. Иными словами, экономический временной ряд должен быть стационарным, чего почти никогда не бывает.

## 6.2. Математические основания стохастического анализа временных рядов

**6.2.1. Введение.** На уровне житейских представлений понятие случайного процесса представляется очевидным и не вызывает никаких затруднений. Однако такое понятие окажется совершенно непригодным при стохастическом моделировании динамики финансовых показателей. Для корректного описания нерегулярной компоненты и всего временного ряда в целом часто используют *математическое понятие стохастического (случайного) процесса* или *случайной последовательности* (как процесса от целочисленного аргумента).

**Определение 6.2.1.** *Случайным (стохастическим) процессом  $Y(t)$ , заданным на множестве  $T$ , называют такую функцию  $Y(t)$  от неслучайного аргумента  $t$ , значение которой при каждом фиксированном  $t \in T$  является случайной величиной. Аргумент  $t$  при этом истолковывают как время.*

**Пример 6.1.** Если  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ , то соответствующий набор эмпирических значений  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  показателя  $Y_t$  отражает случайный процесс  $Y(t)$ , заданный на множестве  $T$ .

**Определение 6.2.2.** *Конкретный вид, который принимает случайная функция  $Y(t)$ , воссоздающая стохастический процесс, называют реализацией (траекторией) этого процесса.*

Будем различать случайные процессы с *непрерывным временем* (когда  $T$ , например, является интервалом на числовой оси) и с *дискретным временем* (когда  $T$ , в частности, представляет собой натуральный ряд или его часть).

**Определение 6.2.3.** *Случайные процессы с дискретным временем часто называют случайными последовательностями, если независимая переменная может принимать только счетное множество значений.*

В соответствии с этим определением набор эмпирических данных в примере 6.1 можно считать случайной последовательностью.

**Замечание.** На практике общее определение случайного процесса используется редко. Чаще случайные процессы задают с помощью предположений типа независимости приращений, марковского свойства траекторий и т.д.

В том случае, когда  $T$  — конечное множество, случайный процесс — это просто совокупность случайных величин. Напомним, что для статистического описания такой совокупности надо указать *распределение вероятностей в конечномерном пространстве*. В этих целях можно использовать многомерную функцию распределения или плотность вероятности, если распределение непрерывное.

Если  $T$  — бесконечное множество, то для описания бесконечной совокупности случайных величин (которые в этом случае и составляют случайный процесс) применяется следующая конструкция.

**Определение 6.2.4.** *Говорят, что случайный процесс  $Y(t)$  задан, если:*

*для каждого  $t$  из  $T$  определена функция распределения величины  $Y(t)$*

$$F_1(y, t) = P(Y(t) < y); \quad (6.3)$$

*для каждой пары элементов  $t_1, t_2$  из  $T$  определена функция распределения двумерной случайной величины  $(Y(t_1), Y(t_2))$*

$$F_2(y_1, t_1; y_2, t_2) = P(Y(t_1) \leq y_1, Y(t_2) \leq y_2); \quad (6.4)$$

*и вообще для любого конечного числа элементов  $t_1, t_2, \dots, t_n$  из множества  $T$  определена  $n$ -мерная функция распределения величины  $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)$*

$$F_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_n, t_n) = P(Y(t_1) \leq y_1, Y(t_2) \leq y_2, \dots, Y(t_n) \leq y_n). \quad (6.5)$$

*При этом распределения (6.3)–(6.5) должны быть согласованы в том смысле, что «старшие» распределения определяют «младшие». Например,*

$$F_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_n, t_n) = \lim_{y_{n+1} \rightarrow \infty} F_{n+1}(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_n, t_n; y_{n+1}, t_{n+1}).$$

Функции (6.3)–(6.5) называют конечномерными распределениями случайного процесса.

**Определение 6.2.5.** *Пусть  $T$  — множество типа  $t = 0, 1, 2, \dots$  или  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Случайный процесс  $Y(t)$  называется последовательностью независимо распределенных случайных величин, если для любых наборов чисел  $t_1, t_2, \dots, t_n$  справедливо равенство*

$$F_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_n, t_n) = F_1(y_1, t_1) \cdot F_1(y_2, t_2) \cdot \dots \cdot F_1(y_n, t_n). \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что для последовательности независимых случайных величин все ее конечномерные распределения определяются с помощью одномерных распределений (6.3).

**6.2.2. Гауссовские случайные процессы.** Важным классом случайных процессов являются *нормальные (гауссовские) случайные процессы*. Все конечномерные распределения этих процессов (см. определение 6.2.4) являются нормальными.

Для полного описания нормального случайного процесса достаточно указать его двумерные определения. Если эти распределения должным образом согласованы, с их помощью можно за-



дать любые конечномерные распределения вида (6.5). Это обстоятельство играет важную роль в прикладном анализе гауссовских процессов, позволяя ограничиться исследованием математического ожидания и корреляционной функции процесса.

### 6.2.3. Белый шум.

**Определение 6.2.6.** *Белым шумом называют случайный процесс  $Y(t)$  с нулевым средним, если составляющие его величины независимы и распределены одинаково при всех  $t$ .*

Включив в определение белого шума предположение о нормальности распределения величин  $Y(t)$ , мы получим понятие так называемого *гауссовского белого шума*. Иными словами, гауссовский белый шум — это последовательность независимых нормально распределенных случайных величин со средним  $\mu = 0$  и общей дисперсией  $\sigma^2$ .

Пример белого шума изображен на рис. 6.1.

**6.2.4. Стационарные случайные процессы.** В теоретических исследованиях и практических задачах важную роль играют случайные процессы, вероятностные свойства которых не изменяются во времени. Вполне логично назвать их стационарными. Такие процессы отображают временные ряды, развитие которых происходит в неизменных условиях и, как следствие, стабилизировалось. Интуитивное понятие стационарности должно быть сформулировано строго.

**Определение 6.2.7.** *Случайный процесс  $Y(t)$  называется стационарным, если для любых  $n, t_1, t_2, \dots, t_n$  и  $\tau$  распределения случайных величин  $(Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n))$  и  $(Y(t_1+\tau), Y(t_2+\tau), \dots, Y(t_n+\tau))$  одинаковы.*

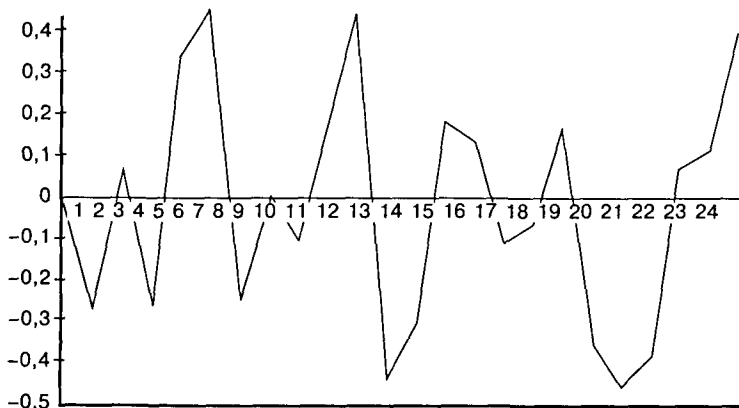


Рис. 6.1. Белый шум

Это означает, что функции конечномерных распределений (6.5) не меняются при сдвиге времени.

### 6.3. Основные математические модели стохастических процессов

**6.3.1. Авторегрессионные модели стационарных случайных процессов.** Для описания стохастических процессов широко используются авторегрессионные модели. Для них часто употребляется аббревиатура **AR** — от английского термина «*autoregression*». Идейно построение авторегрессионных моделей базируется на таком важнейшем свойстве временных рядов экономических процессов, как взаимозависимость уровней одного и того же ряда друг от друга.

**Определение 6.3.1.** Авторегрессионной моделью называют такую модель, в которой моделируемые значения являются линейной функцией от предыдущих наблюдений. Если текущее значение  $Y_t$  зависит только от одного предыдущего значения, то говорят об авторегрессионной модели первого порядка **AR(1)**, если от двух, то второго порядка **AR(2)** и т.д. вплоть до порядка с номером  $n$  — **AR(n)**.

**Пример 6.2.** Авторегрессионная модель третьего порядка **AR(3)** имеет вид

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-3}. \quad (6.7)$$

**Замечание.** Довольно часто среди случайных процессов выделяют класс **авторегрессионных процессов**. Мы будем сразу говорить об авторегрессионных моделях подобных процессов в смысле определения 6.3.1.

При построении авторегрессионных моделей весьма существенно предположение о том, что моделируемый случайный процесс является стационарным. Если исследуемый процесс нестационарный, то осуществляется переход от исходного ряда к ряду разностей соседних значений ряда. В более общем виде эта идея описывается с помощью применения к ряду разностных операторов различных порядков.

**Определение 6.3.2.** Процедура перехода от ряда  $Y_t$  при  $t = 1, \dots, n$  к ряду  $U_t = Y_t - Y_{t-1} = \nabla Y_t$  при  $t = 2, \dots, n$  называется **взятием первых разностей**, а оператор называется **простым разностным оператором первого порядка**.

Первоначальный ряд называется **интегрированным рядом первого порядка**, если его первые разности составляют стационарный

временной ряд. Если для получения стационарного ряда требуется рассчитать вторые разности, то исходный временной будет называться интегрированным рядом второго порядка и т.д. Исходный стационарный временной ряд называют интегрированным рядом нулевого порядка.

Например, если курс акций компании линейно возрастает, то соответствующий временной ряд представляет собой интегрированный ряд первого порядка, а временной ряд, отображающий доходность этой компании, будет интегрированным рядом нулевого порядка.

Важно отметить, что дисперсия стационарного временного ряда конечна, а дисперсия интегрированного временного ряда первого порядка и выше с течением времени возрастает до бесконечности.

### 6.3.2. Модели скользящего среднего порядка $q$ .

**Определение 6.3.3.** *Математическая модель случайного процесса, в которой текущее значение моделируемой величины  $Y_t$  задается в виде линейной функции от разностей*

$$\varepsilon_{t-i} = Y_{t-i} - \tilde{Y}_{t-i}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, q \quad (6.8)$$

*между прошлыми фактическими и прошлыми смоделированными наблюдениями*

$$Y_t = b_0 + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q} \quad (6.9)$$

*называется моделью скользящего среднего порядка  $q$ .*

**Замечание.** Используемый здесь термин «скользящая средняя» не следует путать со схожим термином, обозначающим «механическое» сглаживание временных рядов.

На практике часто используются комбинированные подходы, сочетающие авторегрессионную модель с моделью скользящей средней — так называемые авторегрессионные модели скользящей средней (ARMA). Если они имеют  $p$  временных лагов в авторегрессионном процессе и  $q$  интервалов в модели скользящей средней, то аналитически это записывается в виде

$$Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i} + b_0 + \sum_{i=1}^q b_i \varepsilon_{t-i} + u_t, \quad (6.10)$$

где  $u_t$  — остаточный член ошибки в данном уравнении.

При моделировании стохастических процессов, представленных в виде временных рядов, необходимо уметь определять уро-

вень их автокорреляции (порядок авторегрессии  $p$ ), степени интегрированности (порядок предварительно определяемых разностей  $d$ ) и порядок скользящей средней  $q$ . Очень важно выделить эти три составляющие, чтобы выяснить структуру моделируемого процесса.

Степень интегрированности устанавливается по числу применения оператора  $\nabla$  (см. определение 6.3.2) для сведения исходного процесса к стационарному.

Для измерения степени автокорреляции временных рядов используются коэффициенты автокорреляции. Коэффициент автокорреляции измеряет связь между текущими и прошлыми наблюдениями временного ряда и для малых лагов  $k$  может быть рассчитан по следующей приближенной формуле:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} . \quad (6.11)$$

Вид модели можно идентифицировать по графику коэффициентов автокорреляции. Так, для авторегрессионного процесса с ростом лага характерно просто экспоненциальное затухание коэффициентов автокорреляции (рис. 6.2) или затухание по синусоиде (рис. 6.3). Для процесса скользящего среднего  $q$ -порядка отличны от нуля только первые  $q$  значений коэффициентов автокорреляции, а все последующие равны нулю (рис. 6.4). Если коэффициенты автокорреляции заметно отличаются от нуля даже

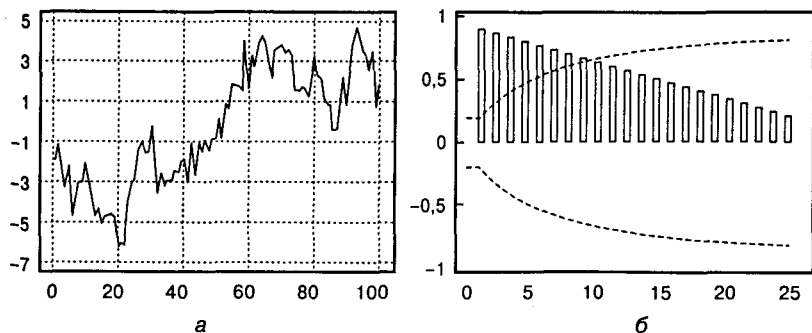


Рис. 6.2. Коррелограмма AR(2) процесса (экспоненциальное затухание): а — исходный ряд; б — его коррелограмма