Г.И. Просветов
СТАТИСТИКА
задачи и решения
Альфа-Пресс

Г. И. Просветов

СТАТИСТИКА:

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Москва
Альфа-Пресс
2008

УДК 311
ББК 60.6
П 82

П 82 **Просветов Г. И.**

СТАТИСТИКА: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ: Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008. — 496 с.

ISBN 978-5-94280-346-9

В настоящем учебно-методическом пособии на простых примерах раскрываются следующие разделы статистики: теория вероятностей, теория статистики, микроэкономическая статистика, макроэкономическая статистика, статистика финансов.

Каждый раздел книги можно рассматривать как самостоятельный курс.

В качестве учебно-методического пособия предназначено преподавателям и студентам экономических специальностей высших учебных заведений.

УДК 311
ББК 60.6

© Просветов Г. И., 2008
© ООО Издательство «Альфа-Пресс», 2008

Предисловие

Статистика есть наука о том, как, не умея мыслить и понимать, заставить делать это цифры.

Василий Ключевский

Статистика изучает методы сбора, обработки и анализа данных. В настоящее время имеется ряд обстоятельных руководств по статистике. Но всем им присущ один существенный недостаток — это книги «описательного жанра». К тому же практически все существующие учебники по статистике не ориентируются на реальные учебные планы обучения студентов экономических специальностей (особенно заочных и вечерних отделений).

Единый курс статистики разбивается на части, и по каждой части студенты получают отдельный учебник весьма внушительного объема. Каждая из этих книг имеет своего автора, что делает учебники разными методологическими и трудно совместимыми друг с другом. Нередко учебники написаны коллективом авторов, поэтому даже внутри одного учебника изложение материала дается по-разному.

Поэтому, по мнению автора, ощущается потребность в пособии, охватывающем всю статистику для экономических специальностей вузов, построенном по единому методологическому принципу и ориентированном на читателя со скромной математической подготовкой. Одна из попыток решить эту задачу — перед вами, уважаемый читатель.

Пособие состоит из пяти разделов:

1) теория вероятностей;
2) теория статистики;
3) микроэкономическая статистика;
4) макроэкономическая статистика;
5) статистика финансов.

Каждый раздел разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится не-

обходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. Показано, как с помощью встроенных функций и надстройки «Пакет анализа» пакета Excel можно избежать долгих и утомительных вычислений.

После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Ответы ко всем задачам помещены в конце соответствующего раздела. Также в конце каждого раздела приведены программа этого раздела и задачи для контрольной работы. Каждый раздел фактически можно рассматривать как самостоятельный курс, методически согласованный с остальными.

Нумерация глав и параграфов — своя в каждом разделе. Поскольку каждый раздел автономен, ссылки на предыдущие параграфы относятся к материалу текущего раздела.

За основу пособия принят материал курсов, читаемых автором в Российской академии предпринимательства. Всем студентам, прослушавшим эти курсы, автор выражает благодарность за продуктивную совместную работу.

Автор выражает искреннюю признательность В. М. Трояновскому за полезные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Автор

Раздел I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ?

Различные области науки сталкиваются со *случайными явлениями*, когда заранее невозможно предсказать результат опыта. *Теория вероятностей* занимается изучением закономерностей в случайных явлениях и процессах.

Хотя исторически зарождение и развитие теории вероятностей связано с азартными играми, именно теории вероятностей суждено было сыграть решающую роль в переходе науки от изучения детерминированных явлений и опытов к исследованию случайных явлений и процессов.

Оказывается, что большое число случайных явлений и процессов подчиняется определенным закономерностям. Теория вероятностей занимается установлением таких закономерностей. Это позволяет предвидеть, как будут протекать случайные явления и процессы.

При изучении закономерностей случайных явлений и процессов теория вероятностей имеет дело с математическими моделями этих явлений и процессов — *вероятностными моделями*. Многообразие окружающего нас мира требует разработки новых вероятностных моделей.

Методы теории вероятностей используются во многих областях науки. Именно теория вероятностей служит обоснованием математической и прикладной статистики. Поэтому статистик должен владеть всем арсеналом методов теории вероятностей.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Под *опытом* будем понимать выполнение определенных условий, при которых наблюдается изучаемое явление. Стрельба по мишени, бросание монеты, вынимание шаров из урны, бросание игрального кубика — все это примеры опытов. *Событие* — это результат опыта. Будем обозначать события латинскими буквами A, B, C, ...

Пример 1. Производится выстрел по мишени. Событие A = {попадание в мишень}, событие B = {промах}.

Пример 2. Бросают монету. Событие C = {выпал герб}, событие D = {выпало число}.

Пример 3. В урне находятся черные и белые шары. Из урны извлекают один шар. Событие E = {извлечен черный шар}, событие F = {извлечен белый шар}.

Пример 4. Бросают кубик. Событие G = {выпало число 1}, событие N = {выпало число 2}.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном опыте.

Пример 5. В урне находятся только черные шары. Из урны вынимают один шар. Событие H = {извлечен черный шар} является достоверным, так как всегда вынимают черный шар.

Пример 6. Бросают кубик. Событие K = {выпало какое-то число от 1 до 6} является достоверным, так как всегда выпадает какое-то число от 1 до 6.

Задача 1. Привести пример достоверного события.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном опыте.

Пример 7. Вернемся к примеру 5. Событие L = {извлечен белый шар} является невозможным, так как всегда вынимают черный шар.

Пример 8. Вернемся к примеру 6. Событие M = {выпало число 7} является невозможным, так как всегда выпадает какое-то число от 1 до 6.

Задача 2. Привести пример невозможного события.

Событие называется *случайным*, если оно может произойти в данном опыте, а может и не произойти.

Пример 9. События A и B из примера 1, события C и D из примера 2, события E и F из примера 3, события G и N из примера 4 — это примеры случайных событий.

Задача 3. Привести пример случайного события.

Два события называются *совместными в данном опыте*, если появление одного из них не исключает появление другого.

Пример 10. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Событие A = {попадание 1-го стрелка в мишень}, событие B = {попадание 2-го стрелка в мишень}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда оба стрелка попадут в мишень.

Пример 11. Бросают две монеты. Событие C = {выпал герб на 1-й монете}, событие D = {выпал герб на 2-й монете}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда на обеих монетах выпадет герб.

Пример 12. В 1-й урне находятся черные и белые шары, а во 2-й — красные и синие. Из каждой урны вынимают по одному шару. Событие E = {из 1-й урны извлечен черный шар}, событие F = {из 2-й урны извлечен красный шар}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда события E и F произойдут одновременно.

Пример 13. Бросают два кубика. Событие G = {на 1-м кубике выпало число 1}, событие N = {на 2-м кубике выпало число 1}. Это совместные события, так как возможна ситуация, когда одновременно выпадут две единицы.

Задача 4. Привести пример совместных событий.

Два события называются *несовместными в данном опыте*, если появление одного из них исключает появление другого.

Пример 14. События A и B из примера 1 — несовместные события. Они не могут произойти одновременно. События C и D из при-

мера 2 — несовместные события. События E и F из примера 3 — несовместные события. События G и N из примера 4 — несовместные события.

Задача 5. Привести пример несовместных событий.

Множество событий называется *полной группой событий*, если они попарно несовместны (то есть никакие два из них не могут произойти одновременно) и какое-то из них обязательно произойдет.

Противоположные события — это полная группа из двух событий. Одно из противоположных событий обозначается буквой, другое — той же буквой с чертой (например, A и $\overline{A}$).

Пример 15. Бросают кубик. Событие A_i = {выпало число i}, i = = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти 6 событий образуют полную группу событий, так как всегда выпадает какое-то число от 1 до 6 и невозможна ситуация, когда при одном бросании выпадают сразу два числа.

Пример 16. События C и D из примера 2 — противоположные события: $D = \overline{C}$.

Задача 6. Привести пример полной группы событий.

Задача 7. Привести пример противоположных событий.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще других. Каждое равновозможное событие, которое может произойти в данном опыте, называется *элементарным исходом*.

Пример 17. События из примера 15 — равновозможные события. A_i — элементарные исходы, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. События из примера 16 — равновозможные события. C и $\overline{C}$ — элементарные исходы.

Задача 8. Привести пример равновозможных событий.

Элементарные исходы, при которых наступает некоторое событие, называются *элементарными исходами, благоприятствующими этому событию*.

Пример 18. В примере 15 событию A = {выпало четное число} благоприятствует выпадение 2, 4 или 6 (то есть элементарные исходы A_i, i = 2, 4, 6). Событию B = {выпало простое число} благоприятствует выпадение 2, 3 или 5 (то есть элементарные исходы A_i, i = 2, 3, 5).

Задача 9. Какие элементарные исходы благоприятствуют событиям C = {выпало нечетное число} и D = {выпал делитель числа 6}?

Вероятностью события A называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(A) = m/n$.

Пример 19. В примере 17 событию A = {выпало четное число} благоприятствуют $m = 3$ элементарных исхода, а всего возможно $n = 6$ элементарных исходов. Следовательно, $P(A) = m/n = 3/6 = 0{,}5$. Аналогично $P(B) = m/n = 3/6 = 0{,}5$.

Пример 20. При бросании монеты P(выпал герб) = P(выпало число) = 0,5.

Задача 10. Найти вероятности событий C и D в задаче 9.

Простейшие свойства вероятности.

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1.
3. Вероятность невозможного события равна 0.
4. $0 < P(A) < 1$, где A — случайное событие.

Глава 3

ДЕЙСТВИЯ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ

§ 3.1. СУММА СОБЫТИЙ

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них, то есть могут появиться либо только событие A, либо только событие B, либо события A и B одновременно.

Пример 21. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Событие A = {попадание 1-го стрелка}, событие B = {попадание 2-го стрелка}. Тогда сумма $A + B$ событий A и B — это попадание в мишень хотя бы одного из этих стрелков.

Пример 22. Подбрасывают две монеты. Событие C = {выпал герб на 1-й монете}, событие D = {выпал герб на 2-й монете}. Тогда сумма $C + D$ событий C и D — это появление хотя бы одного герба в двух бросаниях.

Пример 23. Из урны, в которой находятся белые и черные шары, вынимают два шара. Событие E = {1-й вынутый шар черный}, событие F = {2-й вынутый шар черный}. Тогда сумма $E + F$ событий E и F — это появление хотя бы одного черного шара.

Пример 24. Подбрасывают два раза кубик. Событие G = {при 1-м бросании выпало 1}, событие H = {при 2-м бросании выпало 1}. Тогда сумма $G + H$ событий G и H — это появление хотя бы одной единицы в двух бросаниях кубика.

Задача 11. Привести пример суммы событий.

§ 3.2. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, где A и B — несовместные события.

Замечание. Теорема верна и для n попарно несовместных событий.

Следствие. Рассмотрим противоположные события A и $\overline{A}$. Эти события несовместны. Тогда событие $A + \overline{A}$ заключается в том, что произойдет либо только событие A, либо только событие $\overline{A}$, то есть событие $A + \overline{A}$ достоверное. Тогда $P(A + \overline{A}) = 1$. Но $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Поэтому $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

§ 3.3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ

Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в их одновременном появлении.

Пример 25. Произведение AB событий A и B из примера 21 — это попадание в мишень обоих стрелков.

Пример 26. Произведение CD событий C и D из примера 22 — это выпадение двух гербов.

Пример 27. Произведение EF событий E и F из примера 23 — это то, что оба вынутых шара будут черного цвета.

Пример 28. Произведение GH событий G и H из примера 24 — это выпадение двух единиц при двух бросаниях кубика.

Задача 12. Привести пример произведения событий.

§ 3.4. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называются *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от появления или непоявления другого. Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Пример 29. Из урны, в которой находятся 8 белых и 12 черных шаров, последовательно вынимают два шара и обратно не возвращают. Событие A = {1-й вынутый шар черный}, событие B = {2-й вынутый шар черный}. Выясним, зависимы ли события A и B.

Пусть произошло событие A, то есть 1-й вынутый шар черный. Тогда в урне осталось 19 шаров, из них 11 черных. Поэтому вероятность события B равна $P(B) = 11/19$ (всего 19 вариантов, из них 11 благоприятствуют событию B).

Пусть теперь не произошло событие A, то есть произошло противоположное событие $\overline{A}$ = {1-й вынутый шар не черный} = {1-й выну-

тый шар белый}. Тогда в урне осталось 19 шаров, из них по-прежнему 12 черных. Поэтому вероятность события B $P(B) = 12/19$ (всего 19 вариантов, из них 12 благоприятствуют событию B).

Мы видим, что вероятность появления события B зависит от появления или непоявления события A.

Задача 13. Привести пример зависимых событий.

Задача 14. Из урны, в которой находятся 8 белых и 12 черных шаров, извлекают один шар и возвращают его обратно. Затем извлекают еще один шар. Событие A = {1-й вынутый шар черный}, событие B = {2-й вынутый шар черный}. Выяснить, зависимы ли события A и B.

§ 3.5. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A)P(B)$, где A и B — независимые события.

Пример 30. Система, состоящая из двух работающих независимо друг от друга устройств, функционирует исправно только при одновременной работе этих устройств. Вероятности работы 1-го и 2-го устройств равны соответственно 0,8 и 0,9. Какова вероятность функционирования системы в целом?

Событие A = {работает 1-е устройство}, событие B = {работает 2-е устройство}. По условию $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$. Произведение событий AB = {работают оба устройства} = {работает система}.

Так как события A и B независимы (устройства работают независимо друг от друга), то P{работает система} $= P(AB) = P(A)P(B) =$ $= 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$.

Пример 31. Найдем вероятность выпадения двух единиц при двух бросаниях кубика.

Событие A = {при 1-м бросании выпало 1}, событие B = {при 2-м бросании выпало 1}. Тогда AB = {оба раза выпало 1}.

A и B — независимые события, так как результаты при втором бросании кубика не зависят от того, что выпало при первом бросании. $P(A) = P(B) = 1/6$. Тогда $P(AB) = P(A)P(B) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$.

Задача 15. Найти вероятность выпадения двух гербов при двух бросаниях монеты.

Пример 32. По мнению экспертов, надежность предприятий X и Y равна соответственно 0,9 и 0,7. Предприятия X и Y функциони-

руют независимо. Определим вероятность того, что оба предприятия не обанкротятся.

Событие A = {предприятие X не обанкротится}, событие B = {предприятие Y не обанкротится}. По условию $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}7$. Произведение событий AB = {оба предприятия не обанкротятся}.

Так как события A и B независимы (предприятия X и Y функционируют независимо), то P(оба предприятия не обанкротятся) = $= P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}9 \times 0{,}7 = 0{,}63$.

Задача 16. По мнению экспертов, вероятность банкротства коммерческих банков X и Y в течение года равна соответственно 0,05 и 0,03. Коммерческие банки X и Y функционируют независимо. Определить вероятность того, что оба коммерческих банка обанкротятся в течение года.

§ 3.6. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Условной вероятностью $P(B|A)$ называется вероятность события B при условии, что событие A произошло. Тогда для зависимых событий $P(B|A) \neq P(B|\overline{A})$. Для независимых событий $P(B|A) = P(B|\overline{A}) = P(B)$.

Пример 33. В примере 29 $P(B|A)$ = P(2-й вынутый шар черный при условии, что 1-й вынутый шар черный) = P(2-й вынутый шар черный | 1-й вынутый шар черный) = 11/19.

$P(B|\overline{A})$ = P(2-й вынутый шар черный при условии, что 1-й вынутый шар не черный) = P(2-й вынутый шар черный | 1-й вынутый шар не черный) = 12/19.

Поэтому события A и B зависимы.

Задача 17. Из урны, в которой находятся 3 белых и 7 черных шаров, последовательно вынимают два шара и обратно не возвращают. Известно, что 1-й вынутый шар белый. Какова вероятность того, что и 2-й вынутый шар белый?

§ 3.7. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Для зависимых событий A и B верно следующее: $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Пример 34. Вернемся к примерам 29 и 33. Найдем вероятность того, что из урны вынуты два черных шара, то есть найдем вероят-

ность события AB. P(из урны вынуты два черных шара) = $P(AB)$ = $= P(A)P(B|A)$ = P(1-й вынутый шар черный) × P(2-й вынутый шар черный при условии, что 1-й вынутый шар черный) = $12/20 \times 11/19$ = $= 33/95$.

Пример 35. Команде предстоит сыграть полуфинал и, возможно, финал. Вероятность победы в полуфинале сами игроки оценивают в 0,6, а вероятность победы в финале (при условии победы в полуфинале) — в 0,5. Какова вероятность, по мнению игроков, того, что команда станет чемпионом?

Событие A = {победа в полуфинале}, событие B = {победа в финале}. Событие {команда станет чемпионом} = {победы в полуфинале и финале} = AB. Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$ = P(победа в полуфинале)×P(победа в финале при условии победы в полуфинале) = $= 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$.

Пример 36. Вероятность получения патента равна 0,7, а вероятность получения дохода в случае получения патента равна 0,8. Определим вероятность получения дохода.

Нам известны вероятность P(получение патента) = 0,7 и условная вероятность P(получение дохода в случае получения патента) = 0,8. Тогда P(получение дохода) = P(получение патента)×P(получение дохода в случае получения патента) = $0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$.

Задача 18. В задаче 17 найти вероятность того, что 1-й вынутый шар белый, а 2-й вынутый шар черный.

§ 3.8. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ ДВУХ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без учета вероятности произведения этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Если события A и B несовместны, то AB — невозможное событие. Тогда $P(AB) = 0$ (мы получаем формулу из § 3.2).

Пример 37. Найдем вероятность выпадения хотя бы одной единицы при двух бросаниях кубика в примере 31.

Событие A = {при 1-м бросании выпало 1}, событие B = {при 2-м бросании выпало 1}. Тогда $A + B$ = {хотя бы один раз выпало 1}.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$.

Пример 38. Предприятие оценивает вероятность получения контракта в регионе X в 0,5, вероятность получения контракта в регионе Y — в 0,6 и вероятность получения контракта в обоих регионах —

в 0,2. Определим вероятность получения контракта хотя бы в одном из этих регионов.

Событие A = {получение контракта в регионе X}, событие B = {получение контракта в регионе Y}, произведение событий AB = {получение контракта в обоих регионах}, сумма событий $A + B$ = {получения контракта хотя бы в одном из этих регионов}.

Тогда $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}9$.

Если бы полученный ответ находился вне отрезка [0, 1] (простейшее свойство вероятности), то оценки предприятием вероятностей получения контрактов (в регионе X, в регионе Y и в обоих регионах) выбраны неверно. В таком случае нужно пересмотреть эти оценки.

Задача 19. Найти вероятность выпадения хотя бы одного герба при двух бросаниях монеты.

Глава 4

ДЕРЕВО ВЕРОЯТНОСТЕЙ

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу событий. Ответ дает так называемая формула полной вероятности. Но мы рассмотрим более простой и наглядный подход — *дерево вероятностей.*

Дерево вероятностей рисуют слева направо. Опыты обозначаются в виде кругов, а каждый исход — сплошной линией (ветвью), идущей от соответствующего круга. Около каждой ветви указывается вероятность соответствующего исхода. Сумма вероятностей на ветвях, выходящих из одного круга, равна единице. Двигаясь по ветвям и перемножая соответствующие вероятности, в конце пути мы получаем вероятность сложного события. Сложив нужные вероятности, найдем вероятность искомого события.

Пример 39. В 1-й урне находятся 7 белых и 9 черных шаров, во 2-й урне находятся 6 белых и 4 черных шаров. Из 1-й урны во 2-ю переложили 2 шара, а затем из 2-й урны извлекли один шар. Найдем вероятность того, что этот шар белый.

Мы провели три опыта:

1) извлекли из 1-й урны первый шар и переложили его во 2-ю урну;

2) извлекли из 1-й урны второй шар и переложили его во 2-ю урну;

3) из 2-й урны извлекли один шар.

Поэтому дерево вероятностей содержит три уровня вершин. Так как каждый раз возможны два исхода, то из каждой вершины выходят две ветви. Над каждой ветвью пишем название соответствующего исхода (белый или черный), а под ветвью — вероятность появления этого исхода.

Всего в нашем дереве 8 возможных путей:

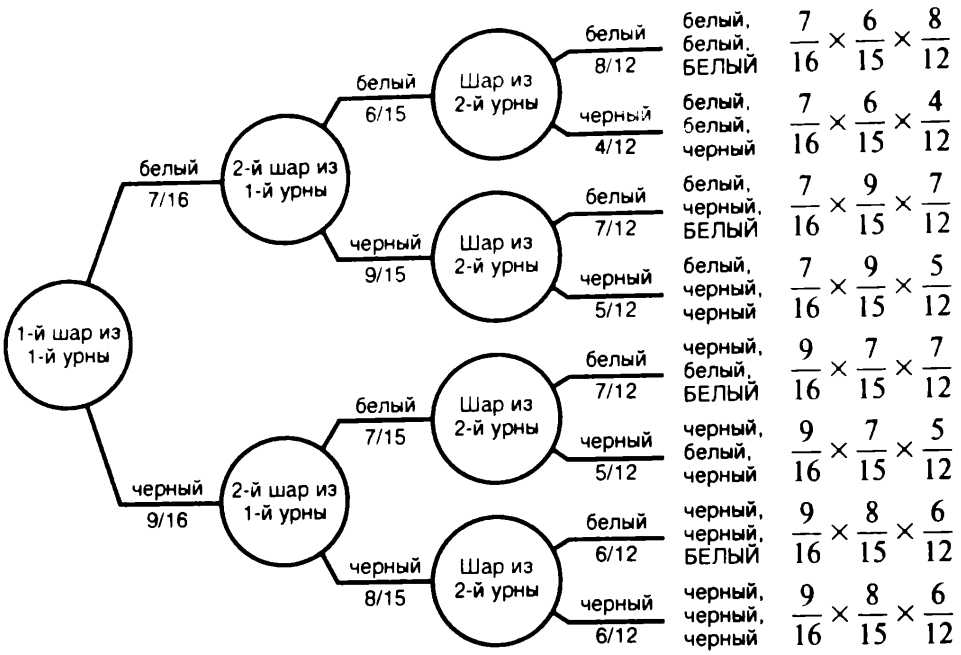
1) белый, белый, белый;

2) белый, белый, черный;

...;

8) черный, черный, черный.

Это означает, что возможно 8 сложных событий.



Событие «белый, белый, белый» говорит о том, что оба переложенных шара из 1-й урны во 2-ю были белого цвета и что из 2-й урны извлекли белый шар. Вероятность того, что первый шар из 1-й урны был белым, равна 7/16 (всего 16 шаров, из них 7 белых). Вероятность того, что второй шар из 1-й урны был белым, равна 6/15 (всего осталось 15 шаров, но белых осталось 6). Вероятность того, что из 2-й урны извлекли белый шар, равна 8/12 (всего было 10 шаров (из них 6 белых), добавили 2 белых шара). Все вероятности изобразим под соответствующими линиями. Перемножив полученные числа 7/16×6/15×8/12, мы найдем вероятность появления события «белый, белый, белый».

Событие «черный, белый, белый» говорит о том, что сначала переложили из 1-й урны во 2-ю черный шар, затем белый и что из 2-й урны извлекли белый шар. Вероятность того, что первый шар из 1-й урны был черным, равна 9/16 (всего 16 шаров, из них 9 черных). Вероятность того, что второй шар из 1-й урны был белым, равна 7/15 (всего осталось 15 шаров, но белых по-прежнему 7). Вероятность того, что из 2-й урны извлекли белый шар, равна 7/12 (всего было 10 шаров (из них 6 белых), добавили черный и белый шары). Все вероятности изобразим под соответствующими линиями. Перемножив полученные числа 9/16×7/15×7/12, мы найдем вероятность появления события «черный, белый, белый». И т. д.

Нас интересует, когда шар из 2-й урны будет белым. Надо сложить вероятности тех событий, у которых на последнем месте написано «белый»: 7/16×6/15×8/12 + 7/16×9/15×7/12 + 9/16×7/15×7/12 + + 9/16×8/15×6/12 = 55/96.

Задача 20. В 1-й урне находятся 8 белых и 6 черных шаров, во 2-й урне находятся 5 белых и 7 черных шаров. Из 1-й урны во 2-ю переложили 2 шара, а затем из 2-й урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

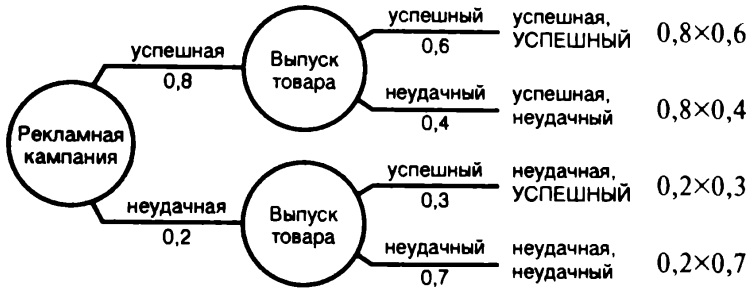
Пример 40. Предприятие рассматривает вопрос о выпуске нового товара на рынок. Вероятность успеха рекламной кампании оценивается в 0,8. В случае успешной рекламной кампании вероятность успешного выпуска нового товара на рынок составляет 0,6. В случае неудачи рекламной кампании вероятность успешного выпуска нового товара на рынок оценивается в 0,3.

Определим вероятность успешного выпуска нового товара на рынок.

Мы провели два опыта:

1) провели рекламную кампанию;
2) выпустили товар на рынок.

Поэтому дерево вероятностей содержит два уровня вершин. Так как каждый раз возможны два исхода, то из каждой вершины выходят две ветви. Над каждой ветвью пишем название соответствующего исхода, а под ветвью — вероятность появления этого исхода.



Нас интересует, когда выход товара на рынок будет успешным. Надо сложить вероятности тех событий, у которых на последнем месте написано «успешный»: $0,8\times0,6 + 0,2\times0,3 = 0,54$.

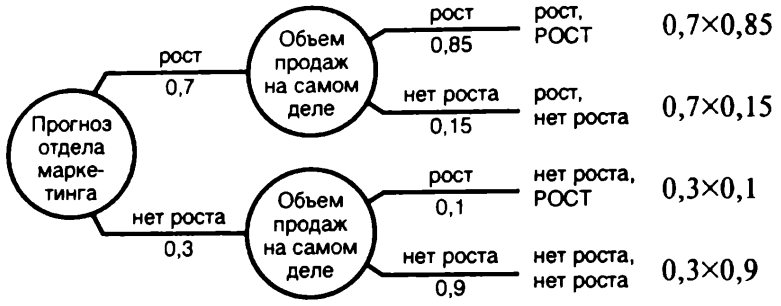
Задача 21. Предприятие рассматривает вопрос о выпуске нового товара на рынок. Вероятность того, что конкуренты выйдут на рынок с аналогичным товаром, оценивается в 0,5. Вероятность успешного выхода товара на рынок в случае отсутствия конкурентов составляет 0,7, а в случае наличия конкурентов — 0,4. Определить вероятность успешного выхода товара на рынок.

Пример 41. По оценкам отдела маркетинга, вероятность роста объема продаж предприятия в ближайшее время равна 0,7. Из прошлого опыта известно, что положительные прогнозы отдела маркетинга сбываются в 85% случаях, а отрицательные — в 90% случаях. Определим вероятность роста объема продаж предприятия в ближайшее время.

Мы провели два опыта:

1) прогноз отдела маркетинга;
2) наблюдение за объемом продаж.

Поэтому дерево вероятностей содержит два уровня вершин. Так как каждый раз возможны два исхода, то из каждой вершины выходят две ветви. Над каждой ветвью пишем название соответствующего исхода, а под ветвью — вероятность появления этого исхода.



Нас интересует рост объема продаж на самом деле. Надо сложить вероятности тех событий, у которых на последнем месте написано «рост»: $0,7 \times 0,85 + 0,3 \times 0,1 = 0,625$.

Задача 22. По оценкам отдела маркетинга, вероятность того, что новый продукт предприятия превосходит аналогичные товары конкурентов, равна 0,8. Из прошлого опыта известно, что прогнозы отдела маркетинга сбываются в 95% случаях. Определить вероятность того, что новый продукт предприятия действительно превосходит аналогичные товары конкурентов.

Глава 5

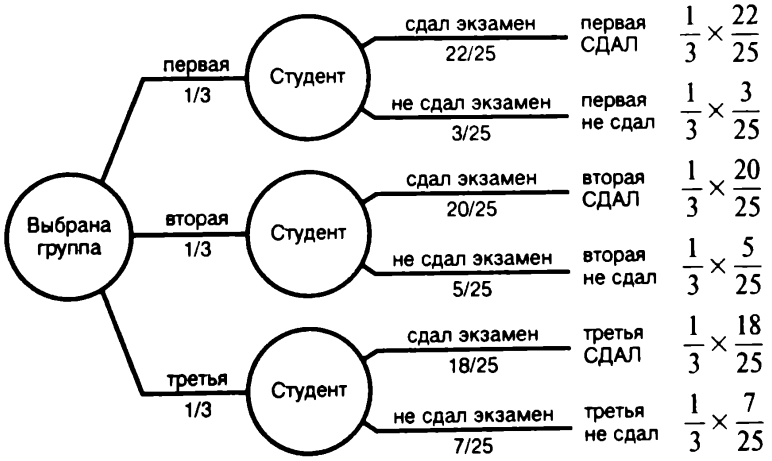
ФОРМУЛА БАЙЕСА

Часто, приступая к анализу вероятностей, мы имеем предварительные (*априорные*) значения вероятностей интересующих нас событий. Проведя опыт и применив формулу Байеса, мы получим новые (*апостериорные*) значения вероятностей.

Предположим, что возможно появление события A вместе с одним из событий, образующих полную группу событий (их называют *гипотезами*). Вероятности гипотез известны. Провели опыт, и произошло событие A. Как изменились вероятности гипотез? Строим дерево вероятностей и по нему находим ответ.

Пример 42. В каждой из трех групп по 25 студентов. Число студентов группы, сдавших экзамен по математике, равно 22, 20 и 18 соответственно. Случайно выбранный студент сдал экзамен по математике. Какова вероятность, что это студент первой группы?

Проводим два опыта: 1) случайно выбираем группу; 2) случайно выбираем студента из этой группы. Строим дерево вероятностей.



Вероятность выбрать студента, сдавшего экзамен по математике, равна $1/3\times22/25 + 1/3\times20/25 + 1/3\times18/25 = 60/75$. Вероятность выбрать студента 1-й группы, сдавшего экзамен по математике, равна $1/3\times22/25 = 22/75$.

Разделив второе из этих чисел на первое, мы и получим ответ задачи: (22/75)/(60/75) = 11/30.

Задача 23. На заводах *A* и *B* изготовлено 75% и 25% всех деталей. Из прошлых данных известно, что 10% деталей завода *A* и 20% деталей завода *B* оказываются бракованными. Случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе *A*?

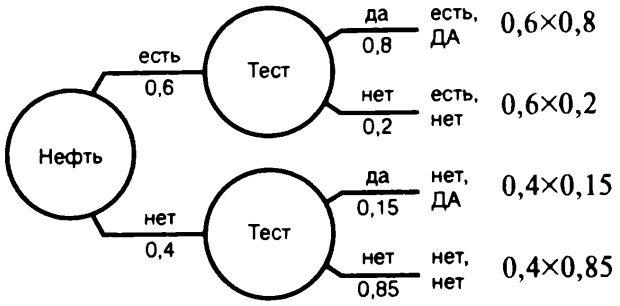
Пример 43. Геологи считают, что вероятность наличия нефти на участке равна 0,6. Проводится тест. Если на этом участке есть нефть, то тест обнаружит ее в 80% случаев. Если на участке нефти нет, то в 15% случаев тест укажет на ее наличие. Тест указал на наличие нефти. Определим вероятность наличия нефти на участке.

Два опыта:

1) геологи оценивают наличие нефти;

2) тест.

Строим дерево вероятностей.



Вероятность того, что результат теста будет положительным, равна 0,6×0,8 + 0,4×0,15 = 0,54. Вероятность наличия нефти на участке в случае положительного результата теста равна 0,6×0,8 = 0,48.

Разделив второе из этих чисел на первое, мы и получим ответ задачи: 0,48/0,54 = 8/9 ≈ 0,89.

Задача 24. Предприятие рассматривает вопрос о выпуске нового товара на рынок. Вероятность успеха оценивается в 0,5. Проводится рекламная распродажа. Если рекламная распродажа будет успешной, то в 70% случаев товар конкурентоспособен. Если рекламная распродажа будет неудачной, то в 20% случаев товар конкурентоспособен. Рекламная распродажа оказалась успешной. Определить вероятность успешного выхода нового товара на рынок.

Пример 44. Производственная линия оснащена автоматикой для выявления бракованных деталей. Производитель утверждает, что доля бракованных деталей равна 3%. Если деталь бракованная, то автоматика определит ее как бракованную в 85% случаев. Автоматика определяет хорошие детали как бракованные в 5% случаев. Очеред-

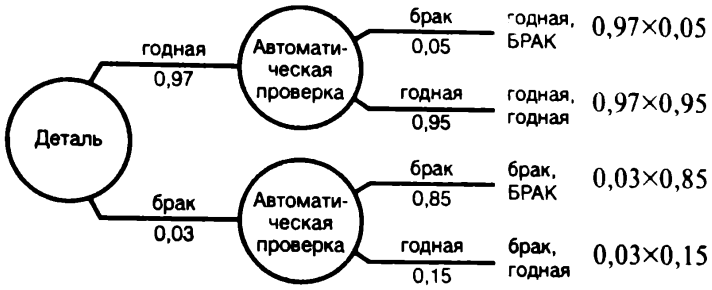
ная деталь отнесена автоматикой к числу бракованных деталей. Определим вероятность того, что деталь действительно бракованная.

Два опыта:

1) тип детали (бракованная или годная);

2) автоматическая проверка детали.

Строим дерево вероятностей.



Вероятность того, что деталь будет отнесена автоматикой к числу бракованных деталей, равна $0,97\times0,05 + 0,03\times0,85 = 0,074$. Вероятность того, что бракованная деталь будет отнесена автоматикой к числу бракованных деталей, равна $0,03\times0,85 = 0,0255$.

Разделив второе из этих чисел на первое, мы и получим ответ задачи: $0,0255/0,074 \approx 0,345$.

Задача 25. Эксперты оценивают вероятность экономического подъема в 0,8. Индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,7 в случае экономического подъема и с вероятностью 0,1 в случае экономического спада. В настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Определить вероятность того, что в настоящее время наблюдается экономический подъем.

Глава 6

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 6.1. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Производится серия из n независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна p. Вероятность появления события «не-A» $= \overline{A}$ (то есть вероятность непоявления события A) равна $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что событие A появится ровно k раз, равна $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — *биномиальный коэффициент*, $n! = 1\times2\times...\times n$ — *факториал числа*. Считается, что $0! = 1$.

Пример 45. Монета подбрасывается $n = 6$ раз. Какова вероятность выпадения ровно $k = 2$ гербов?

Событие $A = \{$выпал герб$\}$. $p = P(A) = 0{,}5$. $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = p_6(2) = C_6^2 0{,}5^2\times0{,}5^{6-2} = \frac{6!}{2!(6-2)!}0{,}5^2\times0{,}5^{6-2} = 15/64.$$

Задача 26. Кубик подбрасывается $n = 5$ раз. Какова вероятность выпадения ровно $k = 3$ единиц?

Замечание. Если воспользоваться статистическими функциями мастера функций f_x пакета Excel, то $p_n(k) =$ БИНОМРАСП(k; n; p; 0) и $n! =$ ПЕРЕСТ(n; n).

По формуле $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} p_n(k)$ находится вероятность того, что событие A в n независимых испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз.

Пример 46. Монета подбрасывается $n = 6$ раз. Какова вероятность выпадения от двух до трех гербов?

$k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_6(2 \leqslant k \leqslant 3) = p_6(2) + p_6(3) = 15/64 +$

$$+ \frac{6!}{3!(6-3)!}0{,}5^3\times0{,}5^{6-3} = 35/64.$$

Задача 27. Кубик подбрасывается $n = 5$ раз. Какова вероятность выпадения от 3 до 5 единиц?

Замечание. $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_n(k \leqslant k_2) - p_n(k \leqslant k_1 - 1) =$ БИНОМРАСП(k_2; n; p; 1) – БИНОМРАСП($k_1 - 1$; n; p; 1).

Если не пользоваться пакетом Excel, то при больших значениях n схема Бернулли приводит к большим выкладкам. Поэтому значение вероятности находят приближенно, используя различные теоремы.

§ 6.2. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Если n велико, то используют вспомогательную величину $x = (k - np)/\sqrt{npq}$ и определяют искомую вероятность по формуле:

$p_n(k) \approx \varphi(x)/\sqrt{npq}$, где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}/2$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Значения функции $\varphi(x)$ берутся из специальной таблицы.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\varphi(x) =$ НОРМРАСП(x; 0; 1; 0).

Пример 47. Производится серия из $n = 200$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}3$. Какова вероятность того, что событие A появится ровно $k = 40$ раз?

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, $x = (k - np)/\sqrt{npq} = (40 - 200\times0{,}3)/\sqrt{200\times0{,}3\times0{,}7} \approx -3{,}09$, $p_{200}(40) \approx \varphi(x)/\sqrt{npq} \approx \varphi(-3{,}09)/\sqrt{200\times0{,}3\times0{,}7} \approx 0{,}0005$.

Задача 28. Производится серия из $n = 180$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}4$. Какова вероятность того, что событие A появится ровно $k = 45$ раз?

§ 6.3. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Если вероятность $p \leqslant 0{,}1$, то формула Муавра-Лапласа непригодна. В этом случае применяют теорему Пуассона. Положим $\lambda = np$. Тогда $p_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Можно воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$ $= $ ПУАССОН $(k; \lambda; 0)$ и $p_n(k \leqslant k_2) =$ ПУАССОН $(k_2; \lambda; 1)$.

Пример 48. Вероятность выхода прибора из строя равна $p = 0{,}005$. Найдем вероятность того, что из $n = 1000$ приборов $k = 6$ приборов выйдут из строя.

$p = 0{,}005 < 0{,}1$. Применим теорему Пуассона.

$\lambda = np = 1000 \times 0{,}005 = 5$.

$$p_n(k) = p_{1000}(6) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \approx \frac{5^6}{6!}e^{-5} \approx 0{,}146.$$

Задача 29. Вероятность выхода прибора из строя равна $p = 0{,}006$. Найти вероятность того, что из $n = 1500$ приборов $k = 7$ приборов выйдут из строя.

§ 6.4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Если n велико, то вводят величины $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$, $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и определяют вероятность по формуле: $p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ — *функция Лапласа*. Значения функции $\Phi(x)$ берутся из специальной таблицы. Важно, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\Phi(x) =$ НОРМРАСП$(x; 0; 1; 1) - 0{,}5$. Полагают $\Phi(x) = 0{,}5$ при $x > 5$.

Пример 49. Производится серия из $n = 200$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}3$. Какова вероятность того, что событие A появится не менее $k_1 = 30$ раз и не более $k_2 = 50$ раз?

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq} = (30 - 200 \times 0{,}3)/\sqrt{200 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx -4{,}63$.

$x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq} = (50 - 200 \times 0{,}3)/\sqrt{200 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx -1{,}54$.

$p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_{200}(30 \leqslant k \leqslant 50) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(-1{,}54) - \Phi(-4{,}63) = \Phi(4{,}63) - \Phi(1{,}54) \approx 0{,}06$.

Задача 30. Производится серия из $n = 180$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0{,}4$. Какова вероятность того, что событие A появится не менее $k_1 = 40$ раз и не более $k_2 = 55$ раз?

Глава 7

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА

Относительная частота события A (или просто частота) — это отношение числа опытов m, где появилось это событие, к общему числу опытов n: $w(A) = m/n$.

Пример 50. Произведено $n = 100$ выстрелов, зарегистрировано $m = 80$ попаданий. Событие A = {попадание в цель}. Тогда относительная частота события A равна $w(A) = m/n = 80/100 = 0{,}8$.

Задача 31. Произведено $n = 200$ выстрелов, зарегистрировано $m = 170$ попаданий. Событие A = {попадание в цель}. Найти относительную частоту события A.

§ 7.1. ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКЛОНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ ПОСТОЯННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Производится серия из n независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна p, p — это теоретическая величина. На практике же мы наблюдаем для события A относительную частоту $w(A) = m/n$. Как сильно $w(A)$ может отклониться от p?

Вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon > 0$, можно найти: $P(|m/n - p| \leqslant \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$, где $\Phi(x)$ — это функция Лапласа (см. § 6.4).

Пример 51. Произведено $n = 1000$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна $p = 0{,}3$. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon = 0{,}01$.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

$$P(|m/n - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{1000}{0{,}3\times 0{,}7}}\right) \approx 0{,}5098.$$

Задача 32. Произведено $n = 500$ независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна $p = 0{,}4$. Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon = 0{,}03$.

Глава 8

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина — это величина, которая в результате каждого опыта принимает одно заранее неизвестное значение, зависящее от случайных причин. Будем обозначать случайные величины латинскими буквами X, Y, Z,...

Среди случайных величин выделяют дискретные и непрерывные. *Дискретная случайная величина* — это случайная величина, которая может принимать не более чем счетное (то есть либо конечное, либо счетное (можно занумеровать)) множество значений. Примеры дискретных случайных величин:

✧ число попаданий в мишень при n выстрелах (возможные значения от 0 до n);

✧ число выпавших гербов при n бросаниях монеты (возможные значения от 0 до n);

✧ число выпавших единиц при n бросаниях кубика (возможные значения от 0 до n);

✧ число прибывших самолетов в аэропорт (счетное множество значений);

✧ число поступивших вызовов на АТС (счетное множество значений).

Задача 33. Привести пример дискретной случайной величины.

§ 8.1. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретная случайная величина принимает значения с различными вероятностями. Соответствие между значениями и их вероятностями называют *законом распределения вероятностей дискретной случайной величины.*

Значения	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности	p_1	p_2	...	p_n

$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Пример 52. Случайная величина X — это число выпавших очков при бросании кубика. Возможные значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Их вероятности равны 1/6. Закон распределения вероятностей данной случайной величины X для правильного кубика:

Значения	1	2	3	4	5	6
Вероятности	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Задача 34. Случайная величина Y — это число выпавших гербов при бросании монеты. Найти закон распределения вероятностей случайной величины Y.

§ 8.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ЕГО СВОЙСТВА

Математическое ожидание дискретной случайной величины X равно $M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. В англоязычной литературе вместо $M(X)$ используют обозначение $E(X)$.

Свойства математического ожидания $M(X)$:

1. $M(X)$ заключено между наименьшим и наибольшим значениями случайной величины X.
2. Если $X = C = \text{const}$ (постоянная), то $M(C) = C$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C \times M(X)$.
4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
5. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Пример 53. Найдем математическое ожидание дискретной случайной величины X из примера 52.

$M(X) = 1\times1/6 + 2\times1/6 + 3\times1/6 + 4\times1/6 + 5\times1/6 + 6\times1/6 = 3{,}5$.

Мы видим, что $M(X)$ заключено между наименьшим (1) и наибольшим (6) значениями случайной величины X.

Задача 35. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины из задачи 34.

§ 8.3. ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ЕЕ СВОЙСТВА

Дисперсия дискретной случайной величины X равна:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - M(X))^2,$$

где $M(X)$ — это математическое ожидание случайной величины X.

$D(X)$ — это математическое ожидание квадрата отклонения $X - M(X)$. В англоязычной литературе вместо $D(X)$ используют обозначения $V(X)$, $Var(X)$. Очень часто $D(X)$ вычисляют по формуле $D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии $D(X)$:

1. Всегда $D(X) \geqslant 0$.
2. Если $X = C = \text{const}$ (постоянная), то $D(C) = 0$.
3. $D(CX) = C^2 D(X)$, где $C = \text{const}$.
4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
5. Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме их дисперсий $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Пример 54. Найдем дисперсию дискретной случайной величины X из примера 52. Заполним таблицу.

x_i	p_i	$p_i x_i$	x_i^2	$p_i x_i^2$
1	1/6	1/6	1	1/6
2	1/6	2/6	4	4/6
3	1/6	3/6	9	9/6
4	1/6	4/6	16	16/6
5	1/6	5/6	25	25/6
6	1/6	6/6	36	36/6
Сумма	1	3,5	91	91/6

3-й столбец — это произведения соответствующих элементов 1-го и 2-го столбцов. 4-й столбец — это квадраты соответствующих элементов 1-го столбца. 5-й столбец — это произведения соответствующих элементов 2-го и 4-го столбцов. В последней строке находится сумма элементов соответствующего столбца.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (M(X))^2 = 91/6 - 3{,}5^2 = 35/12.$$

Задача 36. Найти дисперсию дискретной случайной величины из задачи 34.

§ 8.4. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Схема Бернулли была рассмотрена в § 6.1. Случайная величина X — это число появлений события A в n испытаниях. Закон распределения вероятностей случайной величины X:

Значения	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности	$p_n(0)$	$p_n(1)$	...	$p_n(n)$

Такое распределение вероятностей называется *биномиальным*. Математическое ожидание $M(X) = np$. Дисперсия $D(X) = npq$.

Пример 55. Найдем закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию для биномиального распределения при $n = 2$, $p = 0{,}3$.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. $p_2(0) = C_2^0 0{,}3^0 0{,}7^{2-0} = 0{,}49$, $p_2(1) = C_2^1 0{,}3^1 0{,}7^{2-1} = 0{,}42$, $p_2(2) = C_2^2 0{,}3^2 0{,}7^{2-2} = 0{,}09$.

Значения	x_1	x_2	x_3
Вероятности	0,49	0,42	0,09

Математическое ожидание $M(X) = np = 2 \times 0{,}3 = 0{,}6$. Дисперсия $D(X) = npq = 2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

Задача 37. Найти закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию для биномиального распределения при $n = 3$, $p = 0{,}4$.

§ 8.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Если дискретная случайная величина X может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями $P(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, то говорят, что она распределена по *закону Пуассона* с параметром λ. Для такой случайной величины математическое ожидание и дисперсия равны между собой и равны параметру λ.

Примеры случайных величин, имеющих распределение Пуассона: число автомашин, которые будут обслужены завтра автозаправочной станцией; число бракованных изделий в готовой продукции.

Задача 38. Привести примеры случайных величин, имеющих распределение Пуассона.

Пример 56. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Тогда $M(X) = D(X) = 2$.

Задача 39. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями $P(X = k) = 3^k e^{-3}/k!$.

Пример 57. Число контрактов, заключенных предприятием за год, подчиняется распределению Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Определим вероятность того, что в текущем году будет заключено:

а) 6 контрактов;

б) не менее двух контрактов.

а) $\lambda = 3$, $k = 6$. Тогда $P(X = k) = P(X = 6) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = 3^6 e^{-3}/6! \approx 0{,}05$.

б) События A = {заключено не менее двух контрактов} и B = {заключено менее двух контрактов} — это противоположные события. Поэтому сумма их вероятностей равна 1. Событие B есть сумма несовместных событий C = {не заключено ни одного контракта} и E = {заключен один контракт}. Тогда $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (3^0 e^{-3}/0! + 3^1 e^{-3}/1!) = 1 - 4e^{-3} \approx 0{,}8$.

Задача 40. Число контрактов, заключенных предприятием за год, подчиняется распределению Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Определить вероятность того, что в текущем году будет заключено:

а) 3 контракта;

б) не менее трех контрактов.

Глава 9

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Непрерывная случайная величина — это случайная величина, значения которой целиком заполняют некоторый интервал.

Примеры непрерывных случайных величин: время безотказной работы прибора, длина сделанной детали, процентная ставка дохода по инвестициям, отклонение точки падения снаряда от цели.

Задача 41. Привести примеры непрерывных случайных величин.

§ 9.1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА

Так как невозможно перебрать все значения непрерывной случайной величины, то ее задают с помощью функции распределения. *Функцией распределения* (*интегральным законом распределения*) случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ — вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Свойства функции распределения:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

2. Вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(\alpha; \beta)$, равна разности значений функции распределения на концах этого интервала: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

3. $F(x)$ — неубывающая функция.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

§ 9.2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЕЕ СВОЙСТВА

Функция $f(x) = F'(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (*дифференциальной функцией*). График функции $f(x)$ называется *кривой распределения*.

Свойства функции $f(x)$:

1. $0 \leqslant f(x)$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(\alpha; \beta)$, — это $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Геометрически это означает, что вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Пример 58. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 1/9x^2, 0 < x \leqslant 3, \\ 1, x > 3. \end{cases}$

Найдем плотность распределения вероятностей. Так как $F(x)$ задается разными формулами, то вычисляем производную на каждом интервале: $f(x) = F'(x)$. $0' = 0$, $1' = 0$, $(1/9x^2)' = 1/9(x^2)' = 1/9 \times 2x = 2/9x$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 2/9x, 0 < x \leqslant 3, \\ 0, x > 3. \end{cases}$$

Задача 42. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ 1/16x^2, 0 < x \leqslant 4, \\ 1, x > 4. \end{cases}$

Найти плотность распределения вероятностей.

§ 9.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ и обладает теми же свойствами, что и математическое ожидание дискретной случайной величины (см. § 8.2).

Пример 59. Найдем математическое ожидание непрерывной случайной величины X из примера 58.

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. Так как $f(x)$ задается разными формулами на трех разных интервалах, то разобьем интеграл на сумму трех интегралов.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{3} xf(x)dx + \int_{3}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\times 0dx + \int_{0}^{3} x\times(2/9)xdx$$

$$+ \int_{3}^{+\infty} x\times 0dx = 0 + 2/9\int_{0}^{3} x^2dx + 0 = 2/9\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 2/9\times 3^3/3 - 2/9\times 0^3/3 = 2.$$

Задача 43. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины X из задачи 42.

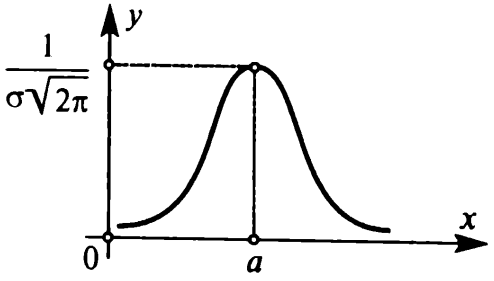
§ 9.4. ДИСПЕРСИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дисперсия непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$ и обладает теми же свойствами, что и дисперсия дискретной случайной величины (см. § 8.3).

§ 9.5. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X подчиняется *нормальному закону распределения вероятностей*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a = \text{const}$, $\sigma = \text{const} > 0$. Обозначение: $X = N(a, \sigma)$. Схематически функция $f(x)$ имеет вид, показанный на рисунке.

Математическое ожидание $M(X) = a$, дисперсия $D(X) = \sigma^2$, стандартное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma$.



Пример 60. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-3x^2+7x+6}$. Найдем неизвестное число γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

Выделим в выражении $-3x^2 + 7x + 6$ полный квадрат: $-3x^2 + 7x + 6 = -3(x - 7/6)^2 + 121/12$.

Тогда $f(x) = \gamma e^{-3(x-7/6)^2+121/12} = \gamma e^{121/12} e^{-\frac{(x-7/6)^2}{1/3}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

(так как случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения вероятностей). Отсюда $a = 7/6 = M(X)$. $1/3 = 2\sigma^2$, то есть $\sigma^2 = 1/6 = D(X)$.

$$\gamma e^{121/12} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \gamma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-121/12} = \frac{1}{\sqrt{1/6}\sqrt{2\pi}} e^{-121/12}.$$

Задача 44. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-4x^2+9x+7}$. Найти неизвестное число γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит среди статистических функций функции $f(x)$ и $F(x)$ нормально распределенной случайной величины X с параметрами a и σ.

$f(x)$ = НОРМРАСП (x; a; σ; 0) и $F(x)$ = НОРМРАСП (x; a; σ; 1).

§ 9.6. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В ЗАДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

Как известно, $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Но для нормально распределенной случайной величины X с параметрами a и σ справедлива следующая формула: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — это *функция Лапласа*. Значения функции $\Phi(x)$ берутся из специальной таблицы. Важно, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Можно также воспользоваться мастером функций f_x пакета Excel: $\Phi(x)$ = НОРМРАСП(x; 0; 1; 1) – 0,5. Полагают $\Phi(x) = 0{,}5$ при $x > 5$.

Также для $X = N(a, \sigma)$ справедлива формула $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$. При $\delta = 3\sigma$ получим $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3\sigma/\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Правило трех сигм. Практически достоверно, что случайная величина $X = N(a, \sigma)$ примет свои значения в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример 61. В примере 60 найдем вероятности выполнения неравенств $2 < X < 3$ и $|X - M(X)| < 0{,}3$.

$M(X) = a = 7/6$, стандартное отклонение $\sigma = 1/\sqrt{6}$.

Тогда $P(2 < X < 3) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma) = \Phi\left(\frac{3 - 7/6}{1/\sqrt{6}}\right) -$

$- \Phi\left(\frac{2 - 7/6}{1/\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}0206$. $P(|X - 7/6| < 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{1/\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}5346$.

Задача 45. В задаче 44 найти вероятности выполнения неравенств $1 < X < 4$ и $|X - M(X)| < 0{,}1$.

Пример 62. Прогнозируется объем продаж на следующий квартал. Из прошлых данных известно, что объем продаж подчиняется нормальному распределению с параметрами a = 150000 руб. и σ = = 10000 руб. Определим вероятность того, что объем продаж в следующем квартале будет находиться в интервале (135000 руб., 170000 руб.).

Здесь α = 135000, β = 170000. Тогда искомая вероятность равна $P(135000 < X < 170000) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma) = \Phi((170000 -$ $- 150000)/10000) - \Phi((135000 - 150000)/10000) = \Phi(2) - \Phi(-1{,}5) =$ $= \Phi(2) + \Phi(1{,}5) \approx 0{,}4772 + 0{,}4332 = 0{,}9104$.

Задача 46. Автомат фасует чай в пачки. Известно, что вес пачки чая подчиняется нормальному распределению с параметрами a = 100 г и σ = 1,5 г. Определить вероятность того, что вес случайно выбранной пачки чая будет находиться в интервале (99 г, 102 г).

Пример 53. Прогноз экспертов относительно величины банковской процентной ставки в будущем году подчиняется нормальному распределению с параметрами a = 10% годовых и σ = 2% годовых. Определим вероятность того, что в будущем году банковская процентная ставка не превысит 15% годовых.

Здесь $\alpha = -\infty$, β = 15. Тогда искомая вероятность равна $P(X < 15) =$ = НОРМРАСП(15; 10; 2; 1) $\approx$ 0,9938.

Пример 64. Суточный объем производства подчиняется нормальному распределению с параметрами a = 700 т и σ = 20 т. Определим вероятность того, что суточный объем производства превысит 650 т.

Здесь α = 650, $\beta = +\infty$. Тогда искомая вероятность равна $P(650 < X) =$ $= 1 - P(X \leqslant 650) = 1 -$ НОРМРАСП(650; 700; 20; 1) $\approx$ 0,9938.

Задача 47. Считается, что цена акции A подчиняется нормальному распределению с параметрами a = 50 руб. и σ = 2 руб. Определить вероятность того, что цена акции: а) превысит 48 руб.; б) не превысит 53 руб.

Пример 65. Прогнозируемая доля рынка нового товара подчиняется нормальному распределению с параметрами $a = 15\%$ и $\sigma = 2\%$. Определим вероятность того, что ожидаемая доля рынка будет от 14% до 17%.

Здесь $\alpha = 14$, $\beta = 17$.

Тогда искомая вероятность равна $P(14 < X < 17) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma) = \Phi((17 - 15)/2) - \Phi((14 - 15)/2) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5) \approx 0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328$.

§ 9.7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X подчиняется *показательному закону распределения вероятностей*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0, \end{cases}$ где $\lambda = \text{const} > 0$.

Тогда функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0. \end{cases}$

Математическое ожидание $M(X)$ = стандартное отклонение $\sigma(X) = 1/\lambda$, дисперсия $D(X) = 1/\lambda^2$.

Примеры случайных величин, имеющих показательное распределение: продолжительность обычного телефонного разговора; затраты времени на обслуживание одного покупателя; промежутки времени между появлениями автомашин на автозаправочной станции.

Задача 48. Привести примеры случайных величин, имеющих показательное распределение.

Пример 66. Случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 5e^{-5x}, x \geqslant 0. \end{cases}$ Тогда $\lambda = 5$, математическое ожидание $M(X)$ = стандартное отклонение $\sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0{,}2$, дисперсия $D(X) = 1/\lambda^2 = 1/25 = 0{,}04$.

Задача 49. Случайная величина X распределена по показательному закону, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 2e^{-2x}, x \geqslant 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, стандартное отклонение, дисперсию.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит среди статистических функций функции $f(x)$ и $F(x)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону с параметром λ. $f(x)$ = ЭКСПРАСП (x; λ; 0) и $F(x)$ = ЭКСПРАСП (x; λ; 1).

Ответы

9. {1, 3, 5}, {1, 2, 3, 6}. **10.** 0,5 и 2/3. **14.** Независимы. **15.** 0,25. **16.** 0,0015. **17.** 1/15. **18.** 7/30. **19.** 0,75. **20.** 559/1274. **21.** 0,55. **22.** 0,77. **23.** 0,6. **24.** 0,78. **25.** 0,97. **26.** 125/3888. **27.** 23/648. **28.** 0,0007. **29.** 0,87. **30.** 0,5048. **31.** 0,85. **32.** 0,8294. **34.**

0	1
0,5	0,5

35. 0,5.

36. 0,25. **37.** 1,2 и 0,72.

Значения	0	1	2	3
Вероятности	0,216	0,432	0,288	0,064

39. 3 и 3. **40.** 0,18; 0,59. **42.** $\begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1/8x, & 0 < x \leqslant 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$ **43.** 8/3. **44.** $2/\sqrt{\pi}\,e^{-193/16}$, 9/8, 1/8. **45.** 0,6368 и 0,2206. **46.** 0,6568. **47.** а) 0,1587; б) 9332. **49.** 0,5; 0,5; 0,25.

Программа учебного курса «Теория вероятностей»

1. Что такое теория вероятностей? Вероятностные модели.
2. Основные понятия теории вероятностей: опыт, событие, достоверное и невозможное события, случайное событие, совместные и несовместные события, полная группа событий, противоположные события, равновозможные события, элементарный исход, вероятность. Простейшие свойства вероятности.
3. Сумма событий. Вероятность суммы двух несовместных событий.
4. Произведение событий. Зависимые и независимые события. Вероятность произведения двух независимых событий.
5. Условная вероятность. Вероятность произведения двух зависимых событий.
6. Вероятность суммы двух совместных событий.
7. Дерево вероятностей.
8. Формула Байеса.
9. Схема Бернулли.
10. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
11. Теорема Пуассона.
12. Интегральная теорема Лапласа.
13. Относительная частота событий. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
14. Случайные величины. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
15. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
16. Дисперсия дискретной случайной величины, ее свойства.
17. Биномиальный закон распределения вероятностей.
18. Распределение Пуассона.
19. Непрерывные случайные величины. Функция распределения (интегральный закон распределения), ее свойства.
20. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция), ее свойства.
21. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.
22. Дисперсия непрерывной случайной величины. Стандартное отклонение.

23. Нормальный закон распределения вероятностей. Плотность, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение.

24. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.

25. Показательное распределение. Плотность, функция распределения, математическое ожидание и дисперсия.

Задачи для контрольной работы по курсу «Теория вероятностей»

1–10. В первой урне находятся a белых и b черных шаров, во второй урне — c белых и d черных шаров. Из первой урны во вторую переложили 2 шара, а затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

	a	b	c	d
1	12	8	3	5
2	17	3	4	4
3	16	4	5	2
4	15	5	6	1
5	14	6	5	2

	a	b	c	d
6	13	7	2	5
7	11	9	6	2
8	10	10	1	6
9	9	11	3	5
10	8	12	2	6

11–20. На заводах A и B изготовлено $m\%$ и $n\%$ всех деталей. Из прошлых данных известно, что $a\%$ деталей завода A и $b\%$ деталей завода B оказываются бракованными. Случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе A?

	a	b	m	n
11	15	25	80	20
12	30	10	90	10
13	20	5	85	15
14	5	30	70	30
15	5	15	60	40

	a	b	m	n
16	25	10	75	25
17	30	20	55	45
18	5	10	65	35
19	30	15	95	5
20	20	10	20	80

21–30. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна p. Найти вероятность того, что при n выстрелах мишень будет поражена не менее k_1 и не более k_2 раз.

	p	k_1	k_2	n
21	0,2	1	3	6
22	0,3	600	660	2100
23	0,4	250	600	600
24	0,5	5	7	8
25	0,5	43	57	100

	p	k_1	k_2	n
26	0,7	1500	2100	2100
27	0,3	3	6	6
28	0,6	345	375	600
29	0,8	86	100	100
30	0,9	86	94	100

31–40. Число контрактов, заключенных предприятием за год, подчиняется распределению Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Определить вероятность того, что в текущем году будет заключено:

а) s контрактов;

б) не менее s контрактов.

	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
λ	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
s	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2

41–50. Случайная величина X распределена по показательному закону, ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ a\mathrm{e}^{-ax}, x \geqslant 0, \end{cases}$ Найти математическое ожидание, стандартное отклонение, дисперсию.

	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
a	9	8	6	3	4	7	10	12	14	11

51–60. а) По мнению экспертов, вероятность банкротства коммерческих банков X и Y в течение года равна соответственно q и p. Коммерческие банки X и Y функционируют независимо. Определить вероятность того, что оба коммерческих банка обанкротятся в течение года.

б) Предприятие рассматривает вопрос о выпуске нового товара на рынок. Вероятность того, что конкуренты выйдут на рынок с аналогичным товаром, оценивается в a. Вероятность успешного выхода товара на рынок в случае отсутствия конкурентов составляет b, а в случае наличия конкурентов — c. Определить вероятность успешного выхода товара на рынок.

в) По оценкам отдела маркетинга, вероятность того, что новый продукт предприятия превосходит аналогичные товары конкурентов, равна b. Из прошлого опыта известно, что прогнозы отдела маркетинга сбываются в $f\%$ случаях. Определить вероятность того, что новый продукт предприятия действительно превосходит аналогичные товары конкурентов.

г) Предприятие рассматривает вопрос о выпуске нового товара на рынок. Вероятность успеха оценивается равной b. Проводится рекламная распродажа. Если рекламная распродажа будет успешной, то в $f\%$ случаев товар конкурентоспособен. Если рекламная распродажа будет неудачной, то в $g\%$ случаев товар конкурентоспособен. Рекламная распродажа оказалась успешной. Определить вероятность успешного выхода нового товара на рынок.

д) Эксперты оценивают вероятность экономического подъема равной c. Индекс экономического состояния возрастает с вероятностью d в случае экономического подъема и с вероятностью p в случае экономического спада. В настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Определить вероятность того, что в настоящее время наблюдается экономический подъем.

	q	p	a	b	c	d	f	g
51	0,09	0,02	0,2	0,7	0,3	0,95	95	30
52	0,08	0,06	0,6	0,7	0,4	0,94	94	40
53	0,04	0,07	0,7	0,8	0,2	0,93	93	20
54	0,05	0,09	0,9	0,6	0,1	0,92	92	10
55	0,02	0,01	0,1	0,9	0,3	0,91	91	30
56	0,07	0,03	0,3	0,4	0,2	0,96	96	20
57	0,01	0,04	0,4	0,9	0,2	0,97	97	20
58	0,06	0,08	0,8	0,8	0,6	0,98	98	60
59	0,09	0,05	0,5	0,4	0,3	0,90	90	30
60	0,04	0,08	0,8	0,5	0,2	0,99	99	20

61–70. Произведено n независимых испытаний. В каждом из них вероятность появления события A равна p. Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит заданного числа ε.

	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
n	200	300	400	600	700	800	900	1100	1200	300
p	0,2	0,25	0,35	0,45	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
ε	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,05	0,04	0,02

71–80. а) Автомат фасует чай в пачки. Известно, что вес пачки чая подчиняется нормальному распределению с параметрами a г и σ_1 г. Определить вероятность того, что вес случайно выбранной пачки чая будет находиться в интервале (b г, c г).

б) Считается, что цена акции A подчиняется нормальному распределению с параметрами a руб. и σ_1 руб. Определить вероятность того, что цена акции: а) превысит b руб.; б) не превысит c руб.

	71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
a	30	34	33	35	36	32	37	38	39	31
b	29	32	31	33	34	30	34	35	36	30
c	32	36	35	36	37	33	39	39	40	33
σ_1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

81–90. Дискретная случайная величина принимает значения x_i с вероятностями p_i. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

	81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
x_1	1	4	6	3	8	3	4	4	1	8
x_2	5	7	2	6	7	5	7	5	2	3
x_3	3	1	8	7	3	7	5	6	8	4
p_1	0,1	0,4	0,3	0,6	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8	0,1
p_2	0,7	0,5	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,5
p_3	0,2	0,1	0,5	0,1	0,4	0,4	0,2	0,2	0,1	0,4

91–100. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-ax^2+bx+c}$. Найти неизвестное число γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенств $\alpha < X < \beta$ и $|X - M(X)| < \delta$.

	91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
a	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
b	8	6	4	10	12	2	4	6	8	10
c	−2	−1	−3	−4	−5	1	2	3	4	5
α	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
β	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6
δ	0,1	0,2	0,15	0,25	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,1

Раздел II

ТЕОРИЯ СТАТИСТИКИ

Глава 1

ЗАЧЕМ НУЖНА СТАТИСТИКА?

При проведении различных исследований тщательно и систематически собирается информация. Эта информация нужна для проверки различных идей или теорий. Как правило, сбор и представление информации происходят в числовом виде.

Статистика — это набор различных методов (в основном математических) для организации и управления числовыми данными в целях поиска ответов на вопросы и проверки теоретических предположений. Тщательно собранные и внимательно проанализированные числовые данные представляют собой наиболее объективный фундамент для построения теории и формирования понимания любого вопроса.

Даже самые объективные и тщательно собранные числовые данные не говорят сами за себя. Исследователь должен уметь эффективно использовать статистику для организации, оценки и анализа этих данных. Иначе собранные данные окажутся бесполезными.

Хотя статистика и является одним из основных элементов научного исследования, все же ее роль ограничена. Прежде чем применить какой-либо метод статистического анализа, должны быть успешно завершены все предыдущие этапы. Если допущены серьезные ошибки в разработке плана или в выборе метода исследования, то даже самый совершенный статистический анализ будет бесполезен. Статистика не в состоянии спасти плохо проработанный проект исследования.

Но и некорректное применение статистики может погубить даже безукоризненно выполненный проект исследования. Именно статистика дает возможность анализировать данные, выявлять и изучать тенденции и зависимости, пересматривать и вносить изменения в теории. Поэтому исследователь должен знать о преимуществах и ограничениях наиболее часто используемых статистических методов, уметь интерпретировать статистические показатели и понимать, какие статистические методы подходят для конкретного набора данных и конкретной цели.

Глава 2

СТАТИСТИЧЕСКОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

Статистическое наблюдение — это первый этап любого статистического исследования. Статистическое наблюдение подразумевает сбор данных о массовых явлениях, регистрацию различных фактов или признаков у отдельных единиц наблюдения.

Статистическое наблюдение проводится по заранее составленному *плану*. При планировании наблюдения следует определить цель исследования, объект исследования, единицу наблюдения и перечень вопросов, на которые наблюдение должно дать ответы. Также следует определиться с выбором формы, места, времени, способа и вида статистического наблюдения.

Время наблюдения — это период, в течение которого проводится сбор данных.

Статистические данные могут быть получены из различных отчетов или с помощью непосредственного измерения. В последнее время очень популярны всевозможные опросы.

По охвату единиц наблюдаемого объекта статистическое наблюдение может быть *сплошным* (обследуются все единицы совокупности) или *несплошным* (обследуется только часть единиц совокупности).

Исследование основного массива — это сбор данных по тем единицам совокупности, у которых величина изучаемого признака является преобладающей. *Монографическое исследование* — это детальное изучение и описание отдельных единиц совокупности.

От правильно организованного и хорошо продуманного статистического наблюдения зависят полнота получаемых данных и точность делаемых выводов. Все полученные в процессе наблюдения сведения следует подвергнуть проверке (логической и арифметической).

Глава 3

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Генеральная совокупность — это общая группа предметов, подлежащих статистическому исследованию. Она может быть большой, поэтому физически невозможно исследовать всю генеральную совокупность. К тому же затраты на сбор данных во всей генеральной совокупности очень высоки, да и риск ошибки многократно возрастает. Кроме того, наблюдение может быть также связано с уничтожением исследуемого образца (например, проверка качества консервов).

Принимая во внимание все вышеперечисленные причины, из генеральной совокупности случайным образом отбирают небольшое количество предметов — *выборку*, после изучения которой и делаются выводы о генеральной совокупности.

Выборка должна быть сформирована *случайным образом* (например, по таблице случайных чисел). Примером выборки является любой социологический опрос. Также выборка должна быть *репрезентативной*, то есть давать правильное представление о генеральной совокупности. Другими словами, репрезентативная выборка очень напоминает генеральную совокупность, только имеет меньший объем.

Для построения статистических выводов репрезентативность выборок играет решающую роль: если выборка не является репрезентативной, то обобщение выводов, полученных на ее основании, на генеральную совокупность становится неприемлемым, а в худшем случае — крайне опасным.

Тот факт, что выборка сформирована методом равновероятностного отбора, еще не гарантирует репрезентативности выборки, но вероятность репрезентативности такой выборки очень высока. Для выборки, полученной методом равновероятностного отбора, исследователь может оценить вероятность ошибки нерепрезентативности выборки и в соответствии с этим интерпретировать результаты.

Замечание. Excel позволяет провести случайную выборку. Нужно воспользоваться надстройкой *Пакет анализа*. *Сервис → Анализ дан-*

ных → *Выборка* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить.

В графе *Входной интервал* указывается ссылка на ячейки, содержащие номера элементов генеральной совокупности. Флажок *Метки* устанавливается в активное состояние, если 1-я строка (1-й столбец) во входном интервале содержит заголовки. В поле *Метод выборки* активизировать способ отбора *случайный*. После этого в графе *Число выборок* указать объем выборки. Также нужно указать *Параметры вывода*. *ОК*. Появляется итоговое окно.

Глава 4

СВОДКА И ГРУППИРОВКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Результаты исследований сами по себе ничего не говорят. Их нужно привести в такой вид, который позволил бы исследователю легко понимать смысл полученных результатов.

Сводка статистических данных — это второй этап статистического исследования. Материал, полученный в ходе статистического наблюдения, обрабатывается с целью получения числовых характеристик изучаемой генеральной совокупности.

Основным моментом сводки статистических данных является *группировка* — объединение статистических данных в однородные по определенным признакам группы. Группировки помогают изучать структуру генеральной совокупности и взаимосвязь между явлениями.

Группировка, выполненная по одному признаку, называется *простой. Многомерная группировка* производится по двум и более признакам. Частный случай многомерной группировки — это *комбинационная группировка* (базируется на нескольких признаках, взятых в комбинации).

Результаты обработки и сводки статистических данных оформляются в статистические таблицы.

При сводке статистических данных неизбежна потеря информации (точности и детализации). Поэтому итоговая статистика может дать неверное представление о результатах исследования. Исследователь должен решить, каким образом представлять данные, какую информацию можно отбросить и каким количеством подробностей можно пренебречь без всякого ущерба.

Глава 5

АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

При сводке статистических данных от индивидуальных значений переходят к обобщающим показателям. Под *статистическим показателем* понимается количественная характеристика изучаемого явления.

Все статистические показатели подразделяются на абсолютные статистические величины и относительные статистические величины.

Абсолютная статистическая величина — это величина, взятая сама по себе, безотносительно к другим статистическим величинам. Именно абсолютные величины получаются при статистическом наблюдении в конкретных условиях места и времени.

Абсолютные статистические величины измеряются в конкретных единицах. Очень часто в статистике применяют показатели, выраженные в условно-натуральных единицах измерения (например, различные виды топлива пересчитываются в условное топливо).

Моментные абсолютные величины показывают уровень явления на определенный момент времени. *Интервальные абсолютные величины* показывают накопленный результат за период в целом.

Но сами по себе абсолютные величины не дают полного представления об изучаемом явлении, не показывают структуру явления, соотношений между отдельными частями. Эти функции возложены на *относительные статистические величины.* Именно с помощью относительных величин исследователь может понять, как развивается явление во времени.

При расчете относительных статистических величин нужно следить за сопоставимостью сравниваемых показателей и наличием реальных связей между изучаемыми явлениями. При этом в числителе всегда находится тот показатель, который сравнивают, а в знаменателе — с которым сравнивают.

Глава 5

ДИАГРАММЫ И ГРАФИКИ

Для представления данных исследователи часто используют диаграммы и графики. Эти методы особенно полезны для передачи общего впечатления о форме распределения и для выявления любого скопления наблюдений в определенном диапазоне значений.

Среди графических методов можно отметить линейные диаграммы, столбиковые диаграммы, секторные диаграммы, полосовые диаграммы, плоскостные диаграммы, фигурные диаграммы и т. д. Мы ограничимся рассмотрением *секторных диаграмм.*

При построении секторной диаграммы для каждого значения переменной вычисляется процентный показатель частоты этого значения. Затем круг делится на сектора пропорционально процентным показателям (100% = 360°, то есть 1% = 3,6°).

Пример 1. Результаты экзамена по математике указаны в таблице.

Оценка	Число студентов
5	10
4	17
3	12
2	11

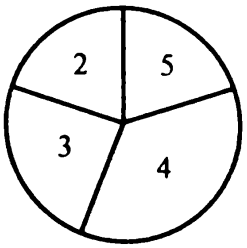
Построим секторную диаграмму.

Оценка	Число студентов	Процентный показатель, %	Градусы
5	10	20	72
4	17	34	122,4
3	12	24	86,4
2	11	22	79,2
Сумма	50	100	360

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых двух столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соот-

ветствующего столбца. Каждое число 2-го столбца делим на сумму чисел этого столбца, умножаем на 100%, и результат пишем в 3-м столбце. Каждое число 3-го столбца умножаем на 3,6° и результат пишем в 4-м столбце.

Делим круг на сектора. В последнем столбце указаны значения соответствующих центральных углов.



Задача 1. Результаты экзамена по математике указаны в таблице.

Оценка	Число студентов
5	12
4	21
3	10
2	7

Построить секторную диаграмму.

Замечание. Пакет Excel позволяет построить диаграмму или график. Выделив столбец частот, выберем команду *Вставка* → *Мастер диаграмм* или щелкнем по кнопке *Мастер диаграмм*. Откроется диалоговое окно мастера диаграмм.

Выберем требуемый *тип* или *вид* диаграммы или графика. *Далее*. Нужно указать группировку данных (*ряды в столбцах*). *Далее*. Откроется диалоговое окно *Параметры диаграммы*. Заполним его. *Далее*. Укажем параметры вывода. *Готово*. Появится нужная диаграмма.

Глава 7

ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

В генеральной совокупности исследуется некоторый количественный признак. Из нее случайным образом извлекается выборка объема n, то есть число элементов выборки равно n. Каждое наблюдаемое в выборке значение x_i, $i = 1, ..., k$, называется *вариантой*.

Частота n_i — это число наблюдений значения x_i в выборке. *Относительная частота* w_i — это отношение частоты n_i к объему выборки: $w_i = n_i/n$.

Таблица следующего вида называется *вариационным рядом* (варианты x_i расположены в порядке возрастания):

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

Это так называемый *дискретный вариационный ряд*.

Для наглядности строят различные графики статистического распределения. *Эмпирическая функция распределения* $F_э(x) = n_x/n$, где n_x — число вариант, меньших x. Соединив соседние точки $(x_i, F_э(x_i))$ отрезками прямых, мы получим *кумуляту*.

В том случае, когда значения изучаемого признака сколь угодно мало отличаются друг от друга, строят *интервальные вариационные ряды*.

Интервал	x_0–x_1	x_1–x_2	...	x_{k-1}–x_k
Частота	n_1	n_2	...	n_k

Здесь частота — это число вариант, попавших в соответствующий интервал. При построении кумуляты и полигона (определение см. ниже) в качестве 1-й координаты берется середина соответствующего интервала. Если все интервалы имеют одинаковую длину, то это *равновеликие интервалы*. Иначе *неравновеликие интервалы*. Часто первый и последний интервалы не имеют соответственно нижней и верхней границ. Тогда считают длину 1-го интервала равной длине 2-го интервала, а длину последнего интервала — равной длине предпоследнего.

Интервальные вариационные ряды графически можно представить с помощью *гистограммы*. Это ступенчатая фигура, образованная прямоугольниками, основаниями которых служат интервалы (x_{i-1}, x_i), а высоты равны w_i/Δ_i, где $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Площадь i-го прямоугольника равна w_i, а всей гистограммы — 1. Соединив середины верхних сторон прямоугольников, получим *полигон*.

Пример 2. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

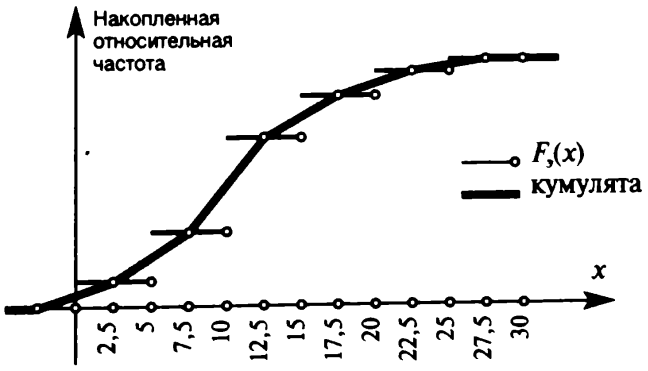
Зарплата, руб./час	До 5	5–10	10–15	15–20	20–25	Св. 25
Число работников	10	22	35	17	11	5

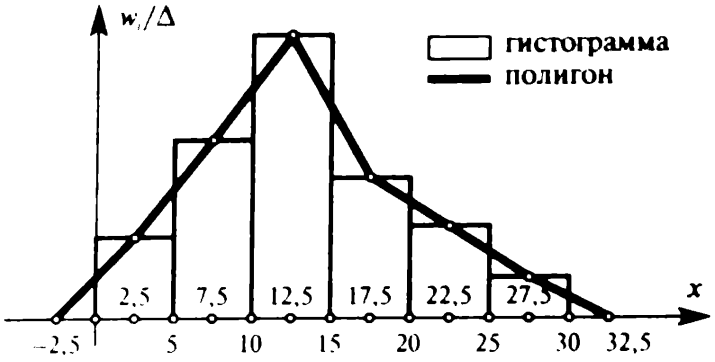
Построим эмпирическую функцию распределения, кумуляту, гистограмму, полигон.

Длину открытых интервалов (первого и последнего) считаем равными соответственно длине 2-го и предпоследнего интервалов. Длина интервалов $\Delta = 5$.

Интервал	**Середина интервала**	**Частота** n_i	$w_i = n_i/n$	w_i/Δ	**Накопленная относительная частота**
0–5	2,5	10	0,1	0,02	0,1
5–10	7,5	22	0,22	0,044	0,32
10–15	12,5	35	0,35	0,07	0,67
15–20	17,5	17	0,17	0,034	0,84
20–25	22,5	11	0,11	0,022	0,95
25–30	27,5	5	0,05	0,01	1
Сумма	—	100	—	—	—

Во 2-м столбце указаны середины интервалов. В последней строке указаны суммы чисел соответствующего столбца. Каждое число 3-го столбца делим на сумму чисел 3-го столбца и результат пишем





в 4-й столбец. Каждое число 6-го столбца равно сумме числа из этой же строки 4-го столбца и предыдущего числа 6-го столбца.

Задача 2. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

Зарплата, руб./час	До 5	5–10	10–15	15–20	20–25	Св. 25
Число работников	11	21	34	18	8	8

Построить эмпирическую функцию распределения, кумуляту, гистограмму, полигон.

Замечание. Excel позволяет быстро построить гистограмму, воспользовавшись мастером диаграмм (*Вставка* → *Диаграмма* или на панели инструментов *Стандартная* щелкнуть по кнопке *Мастер диаграмм*). Можно также воспользоваться надстройкой *Пакет анализа. Сервис* → *Анализ данных* → *Гистограмма* → *ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал карманов* вводится ссылка на ячейки, содержащие граничные значения интервалов. Поставив «галочку» рядом со словами *Вывод графика*, мы получим кумуляту. *ОК.*

Глава 8

РАСЧЕТ СВОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

Мы исследуем параметр теоретического распределения генеральной совокупности. По результатам выборки получается точечная оценка этого параметра. Так как результаты выборки случайны, то полученная оценка есть величина случайная.

Оценку называют *несмещенной*, если математическое ожидание полученной оценки равно теоретическому значению параметра генеральной совокупности при любом объеме выборки. Иначе оценку называют *смещенной*. Несмещенная оценка не является слишком завышенной или слишком заниженной по сравнению с соответствующим параметром генеральной совокупности. Это свойство представляется желательным для оценки.

Пусть наблюдаются варианты x_1, ..., x_k с частотами n_1, ..., n_k соответственно. Тогда *выборочная средняя* $\overline{x}_в = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i / n$ есть несмещенная оценка генеральной средней $\overline{x}_г$ (математическое ожидание исследуемого признака), так как $M(\overline{x}_в) = \overline{x}_г$.

Конечно, для любого конкретного набора данных выборочная средняя $\overline{x}_в$ будет больше или меньше генеральной средней $\overline{x}_г$. Но при многократном извлечении выборки $\overline{x}_в$ будут в среднем близки к генеральной средней $\overline{x}_г$, то есть не будут систематически слишком высокими или слишком низкими.

Выборочная дисперсия $D_в = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_в)^2 / n = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 / n - (\overline{x}_в)^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, так как $M(D_в) = (n-1)D_г/n$. Поэтому вводят поправочный коэффициент и находят *исправленную выборочную дисперсию* $s^2 = nD_в/(n-1)$.

При нахождении оценок используется *метод произведений*. Для простоты вычислений лучше перейти к условным вариантам.

В случае *равноотстоящих вариант* (разность между любыми соседними вариантами постоянна и равна Δ) переходят к условным ва-

риантам $u_i = (x_i - c)/\Delta$, где c — *ложный нуль* (варианта, расположенная в середине вариационного ряда; если же таких две, то выбираем из этих двух варианту с наибольшей частотой).

В случае неравноотстоящих вариант разбиваем весь вариационный ряд на 8–10 равновеликих интервалов длины Δ, берем середины интервалов и получаем случай равноотстоящих вариант.

Условный эмпирический момент порядка p — это величина $M_p = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^p / n$. Тогда $\overline{x}_в = M_1\Delta + c$, $D_в = (M_2 - M_1^2)\Delta^2$.

Если мы вместо интервала рассматривали его середину, то возникает систематическая ошибка при расчете выборочной дисперсии. Чтобы уменьшить эту ошибку, вводят поправку Шеппарда и находят уточненное значение выборочной дисперсии: $D_в^* = D_в - \Delta^2/12$.

Пример 3. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

Зарплата, руб./час	До 5	5–10	10–15	15–20	20–25	Св. 25
Число работников	10	22	35	17	11	5

Найдем сводные характеристики выборки.

Здесь первый и последний интервалы не имеют соответственно нижней и верхней границ. Считают длину 1-го интервала равной длине 2-го интервала, а длину последнего интервала равной длине предпоследнего. Заполним таблицу.

Интервал	Середина интервала x_i	Частота n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2 = n_i u_i \times u_i$
0–5	2,5	10	–2	–20	40
5–10	7,5	22	–1	–22	22
10–15	12,5	35	0	0	0
15–20	17,5	17	1	17	17
20–25	22,5	11	2	22	44
25–30	27,5	5	3	15	45
Сумма	—	100	—	12	168

Разность между любыми соседними вариантами x_i постоянна и равна $\Delta = 5$. В середине вариационного ряда расположены 12,5 и 17,5. Ложный нуль $c = 12{,}5$ (так как частота $35 > 17$).

$M_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i / n = 12/100 = 0{,}12$. Выборочная средняя $\overline{x}_в = M_1\Delta + c =$

$= 0{,}12 \times 5 + 12{,}5 = 13{,}1$. $M_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 / n = 168/100 = 1{,}68$.

Выборочная дисперсия $D_в = (M_2 - M_1^2)\Delta^2 = (1{,}68 - 0{,}12^2)\times 5^2 = 41{,}64$. Уточненное значение выборочной дисперсии $D_в^* = D_в - \Delta^2/12 = 41{,}64 - 5^2/12 \approx 39{,}56$.

Задача 3. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

Зарплата, руб./час	До 5	5–10	10–15	15–20	20–25	Св. 25
Число работников	11	21	34	18	8	8

Найти сводные характеристики выборки.

Замечание. Статистические функции мастера функций f_x пакета Excel позволяют быстро найти сводные характеристики выборки. Функция СРЗНАЧ рассчитывает $\overline{x}_в$. Функция СТАНДОТКЛОН оценивает генеральное стандартное отклонение $\sqrt{D_г}$ по выборке. Функции ДИСП и ДИСПР позволяют вычислить s^2 и $D_в$ соответственно. С помощью функции СТАНДОТКЛОНП можно найти выборочное стандартное отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$. Надстройка *Пакет анализа* позволяет получить сразу все сводные характеристики выборки. *Сервис* → *Анализ данных* → *Описательная статистика* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. Надо указать, как сгруппированы данные, и поставить «галочку» рядом со словами *Итоговая статистика*. *ОК*. Появляется итоговое окно.

Среднее	$\overline{x}_в$
Стандартная ошибка	
Медиана	Варианта в середине вариационного ряда
Мода	Варианта с наибольшей частотой
Стандартное отклонение	$\sigma_в$
Дисперсия выборки	$D_в$
Эксцесс	
Асимметрия	
Интервал	$x_{max} - x_{min}$
Минимум	x_{min}
Максимум	x_{max}
Счет	n
Наибольший	
Наименьший	
Уровень надежности	

Глава 9

МОДА И МЕДИАНА

§ 9.1. МОДА

Мода — это значение, которое появляется чаще всего у единиц совокупности.

Пример 4. Для совокупности 3; 4; 2; 4; 3; 3 мода равна 3.

Задача 4. Определить моду для совокупности 2; 5; 7; 5; 6; 2; 5.

Пример 5. Для вариационного ряда, приведенного в таблице, мода равна 4.

Значение	1	2	4	6
Частота	10	17	20	12

Задача 5. Определить моду для вариационного ряда.

Значение	11	12	14	16
Частота	20	25	18	12

Для вариационного ряда с равновеликими интервалами мода Mo определяется по следующей формуле:

$$Mo = x_н + h(n_{Mo} - n_{Mo-1})/((n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})),$$

где n_{Mo} — частота модального интервала (то есть интервала, содержащего моду); n_{Mo-1} — частота интервала, предшествующего модальному интервалу; n_{Mo+1} — частота интервала, следующего за модальным интервалом; $x_н$ — нижняя граница модального интервала; h — длина интервалов.

Пример 6. Определим моду для следующего вариационного ряда:

Значение	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	10	22	35	17	11	5

Здесь длина интервалов равна $h = 5$.

Модальный интервал (интервал с наибольшей частотой) равен 10–15. Тогда нижняя граница модального интервала $x_н = 10$, частота модального интервала $n_{Mo} = 35$, $n_{Mo-1} = 22$ (частота интервала, предшествующего модальному интервалу), $n_{Mo+1} = 17$ (частота интервала, следующего за модальным интервалом). Отсюда мода равна:

$Mo = x_н + h(n_{Mo} - n_{Mo-1})/((n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})) = 10 + 5(35 - 22)/((35 - 22) + (35 - 17)) \approx 12{,}1$.

Задача 6. Определить моду для следующего вариационного ряда:

Значение	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	11	21	34	18	8	8

Если исследователь хочет показать лишь наиболее распространенное значение в распределении, то мода является подходящим для этого показателем. Но некоторые распределения вообще не имеют моды или имеют несколько мод.

Замечание. Статистическая функция *МОДА* мастера функций f_x пакета Excel возвращает значение моды множества данных: $f_x \rightarrow$ *статистические* $\rightarrow$ *МОДА* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

§ 9.2. МЕДИАНА

Медиана — это значение наблюдения, находящегося в середине распределения (половина наблюдений имеют значения больше, а половина наблюдений имеют значения меньше, чем серединное значение). Прежде чем определять медиану, варианты должны быть упорядочены либо по возрастанию, либо по убыванию.

Если число n вариант нечетно, то медиана равна варианте под номером $(n + 1)/2$.

Пример 7. Определим медиану для совокупности 3; 4; 5; 8; 10; 13; 14.

Общее число вариант равно $n = 7$. Тогда медиана равна варианте под номером $(n + 1)/2 = (7 + 1)/2 = 4$, то есть это 8.

Задача 7. Определить медиану для совокупности 15; 12; 10; 8; 7.

Если число n вариант четно, то медиана равна полусумме серединных вариант: $Me = 0{,}5 \times (x_{n/2} + x_{n/2+1})$.

Пример 8. Определим медиану для совокупности 3; 4; 5; 8; 10; 13.

Общее число вариант равно $n = 6$. Тогда медиана равна $Me = 0{,}5(x_{n/2} + x_{n/2+1}) = 0{,}5(x_{6/2} + x_{6/2+1}) = 0{,}5(5 + 8) = 6{,}5$.

Задача 8. Определить медиану для совокупности 15; 12; 10; 8; 7; 5; 4; 2.

Для вариационного ряда с равновеликими интервалами *медианный интервал* — это первый интервал, для которого сумма накопленных частот превысит полусумму всех частот $\sum_{i=1}^{k} n_i/2$, а сама медиана *Me* определяется по следующей формуле: $Me = x_н + h(\sum_{i=1}^{k} n_i/2 - A)/n_{Me}$, где n_{Me} — частота медианного интервала; A — накопленная частота до медианного интервала; $x_н$ — нижняя граница медианного интервала; h — длина интервалов.

Пример 9. Определим медиану для вариационного ряда из примера 6.

Значение	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	10	22	35	17	11	5
Накопленная частота	10	32	67	84	95	100

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых двух строк взяты из условия. Каждое число 3-й строки равно сумме предыдущего числа 3-й строки и числа из этого же столбца 2-й строки.

Так как $\sum_{i=1}^{k} n_i/2 = 100/2 = 50$, то медианный интервал — это интервал 10–15 ($32 < 50 < 67$). Тогда $x_н = 10$, $A = 32$, $n_{Me} = 35$.

Отсюда медиана $Me = x_н + h(\sum_{i=1}^{k} n_i/2 - A)/n_{Me} = 10 + 5(50 - 32)/35 \approx$ $\approx 12{,}6$.

Задача 9. Определить медиану для вариационного ряда из задачи 6.

Замечание. Статистическая функция *МЕДИАНА* мастера функций f_x пакета Excel возвращает значение медианы множества данных: f_x → *статистические* → *МЕДИАНА* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

Глава 10

ПРОЦЕНТИЛЬ, ДЕЦИЛЬ, КВАРТИЛЬ

Проце́нтиль P_m показывает точку, ниже которой находится $m\%$ вариант. Для нахождения процентиля P_m нужно упорядочить варианты по возрастанию или убыванию и умножить общее число наблюдений $\sum_{i=1}^{k} n_i$ на m. Полученное значение показывает номер соответствующего процентиля.

Пример 10. Определим в примере 9 процентиль P_{15}.

Здесь $m = 15\%$. Тогда $m\sum_{i=1}^{k} n_i = 0{,}15\times 100 = 15$.

В строке накопленных частот $10 < 15 < 32$. Поэтому данный процентиль попадает в интервал 5–10.

Значение процентиля P_{15} равно $5 + \dfrac{15-10}{32-10}(10-5) \approx 6{,}1$. Мы воспользовались формулой линейной интерполяции.

Задача 10. Определить в задаче 9 процентиль P_{23}.

Процентили P_{10}, P_{20}, ..., P_{80}, P_{90} называются *деци́лями* и обозначаются D_1, D_2, ..., D_8, D_9 соответственно.

Процентили P_{25}, P_{50}, P_{75} называются *квартúлями* и обозначаются Q_1, Q_2, Q_3 соответственно.

При изучении распределения многих социально-экономических показателей для характеристики дифференциации определяют *децильный коэффициент дифференциации* D_9/D_1.

Пример 11. Определим децильный коэффициент дифференциации в примере 9.

Так как $0{,}1\sum_{i=1}^{k} n_i = 0{,}1\times 100 = 10$, то $D_1 = 5$. Так как $0{,}9\sum_{i=1}^{k} n_i = 0{,}9\times 100 = 90$, то $D_9 = 20 + \dfrac{90-84}{95-84}(25-20) \approx 22{,}7$.

Тогда децильный коэффициент дифференциации равен D_9/D_1 = = 22,7/5 = 4,54.

Задача 11. Определить децильный коэффициент дифференциации в задаче 9.

Глава 11

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Средние величины — это одни из основных обобщающих показателей, используемых при анализе статистических данных. Вычисление средних величин должно производиться лишь для качественно однородных совокупностей.

В зависимости от исходных данных средние значения могут рассчитываться по-разному. В главе 8 мы уже познакомились с выборочной средней. Здесь же мы остановимся на вычислении средней геометрической и средней гармонической.

Средняя геометрическая $\overline{X}_{\text{геом}}$ вариационного ряда вычисляется по следующей формуле: $\overline{X}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}}$, где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Так, зная ежегодные коэффициенты роста T_1, T_2, ..., T_n, можно определить *среднегодовой коэффициент роста* T по следующей формуле: $T = \sqrt[n]{T_1 T_2 \ldots T_n}$.

Пример 12. Ежегодные коэффициенты роста равны соответственно $T_1 = 1{,}09$, $T_2 = 1{,}14$, $T_3 = 1{,}12$. Определим среднегодовой коэффициент роста.

Среднегодовой коэффициент роста $T = \sqrt[3]{T_1 T_2 T_3} = \sqrt[3]{1{,}09 \times 1{,}14 \times 1{,}12} \approx 1{,}12$, или 12%.

Задача 12. Ежегодные коэффициенты роста равны соответственно $T_1 = 1{,}07$, $T_2 = 1{,}12$, $T_3 = 1{,}11$. Определить среднегодовой коэффициент роста.

Замечание. Статистическая функция *СРГЕОМ* мастера функций f_x пакета Excel возвращает значение средней геометрической множества положительных чисел: f_x → *статистические* → *СРГЕОМ* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

Средняя гармоническая $\overline{X}_{\text{гарм}}$ вариационного ряда вычисляется по следующей формуле: $\overline{X}_{\text{гарм}} = \sum_{i=1}^{k} n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}$.

Пример 13. Определим среднюю гармоническую для следующего вариационного ряда.

Значение	2	3	4
Частота	10	12	16

Средняя гармоническая равна $\overline{X}_{\text{гарм}} = \sum_{i=1}^{k} n_i / \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i} = (10 + 12 + 16)/(10/2 + 12/3 + 16/4) \approx 2{,}92$.

Задача 13. Определить среднюю гармоническую для следующего вариационного ряда.

Значение	3	5	6
Частота	14	9	13

Замечание. Статистическая функция *СРГАРМ* мастера функций f_x пакета Excel возвращает значение средней гармонической множества положительных чисел: f_x → *статистические* → *СРГАРМ* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

Глава 12

ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ

Средние величины, мода и медиана без использования других статистических величин не могут охарактеризовать полученные с помощью наблюдения данные. Поэтому вместе со средними величинами, модой и медианой следует использовать *показатели вариации*, которые дают информацию о степени неоднородности или изменчивости внутри распределения значений.

Каждый показатель вариации является точно определенным количественным показателем, характеризующим изменчивость. В главе 8 мы уже познакомились со стандартным отклонением и дисперсией. Здесь же мы рассмотрим другие показатели вариации.

§ 12.1. РАЗМАХ ВАРИАЦИИ

Размах вариации R — это разность между наибольшим и наименьшим наблюдаемыми значениями: $R = x_{max} - x_{min}$.

Пример 14. Определим размах вариации в примере 13.
Размах вариации $R = x_{max} - x_{min} = 4 - 2 = 2$.

Задача 14. Определить размах вариации в задаче 13.

Из-за простоты вычисления размах вариации наиболее полезен, если исследователя интересует быстрый и общий взгляд на изменчивость при сравнении большого количества выборок.

Но ведь практически любая выборка содержит *аномальные значения* (нетипично большие и малые значения). Поэтому размах вариации может привести исследователя к неверным результатам. Кроме того, по размаху вариации ничего нельзя сказать о значениях, расположенных между двумя крайними значениями.

§ 12.2. ИНТЕРКВАРТИЛЬНАЯ ШИРОТА

Интерквартильная широта Q — это расстояние между первым и третьим квартилями $Q = Q_3 - Q_1$.

Пример 14. Определим интерквартильную широту в примере 9.

Так как $0{,}25 \times 100 = 25$ и $10 < 25 < 32$, то квартиль Q_1 принадлежит интервалу 5–10 и равен $5 + \dfrac{25 - 10}{32 - 10}(10 - 5) \approx 8{,}4$.

Так как $0{,}75 \times 100 = 75$ и $67 < 75 < 84$, то квартиль Q_3 принадлежит интервалу 15–20 и равен $15 + \dfrac{75 - 67}{84 - 67}(20 - 15) \approx 17{,}4$.

Тогда интерквартильная широта равна $Q = Q_3 - Q_1 = 17{,}4 - 8{,}4 = 9$.

Задача 15. Определить интерквартильную широту в задаче 9.

Хотя интерквартильная широта позволяет исключить влияние на нее аномальных значений, но она не дает никакой информации о значениях между первым и третьим квартилями.

§ 12.3. СРЕДНЕЕ ЛИНЕЙНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Среднее линейное отклонение d — это мера разброса, которая вычисляется по следующей формуле: $d = \sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \overline{x}| / \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Пример 16. Определим среднее линейное отклонение в примере 13.

Заполним таблицу.

Номер	x_i	n_i	$n_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$n_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert$
1	2	10	20	−1,2	1,2	12
2	3	12	36	−0,2	0,2	2,4
3	4	16	64	0,8	0,8	12,8
Сумма	—	38	120	—	—	27,2

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых трех столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. 4-й столбец равен произведению 2-го и 3-го столбцов.

Выборочная средняя $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i / \sum_{i=1}^{k} n_i = 120/38 \approx 3{,}2$.

Из каждого числа 2-го столбца вычитаем выборочную среднюю $\overline{x} = 3{,}2$ и результат пишем в 5-м столбце. 6-й столбец – это абсолютные значения чисел 5-го столбца. 7-й столбец равен произведению 3-го и 6-го столбцов.

Среднее линейное отклонение равно: $d = \sum_{i=1}^{k} n_i \, |x_i - \overline{x}| / \sum_{i=1}^{k} n_i =$ $= 27{,}2/38 \approx 0{,}7$.

Задача 16. Определить среднее линейное отклонение в задаче 13.

Из-за трудностей выполнения алгебраических операций над абсолютными величинами среднее линейное отклонение используется крайне редко.

§ 12.4. ПОКАЗАТЕЛИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАРИАЦИИ

К *показателям относительной вариации* относятся коэффициент осцилляции, относительное линейное отклонение и коэффициент вариации. Они позволяют сравнивать характер вариации в различных распределениях.

Коэффициент осцилляции K_R отражает относительную колеблемость крайних значений признака вокруг средней и вычисляется по следующей формуле: $K_R = R/\overline{x} \times 100\%$, где R — размах вариации.

Пример 17. Определим коэффициент осцилляции в примерах 14, 16.

Коэффициент осцилляции равен $K_R = R/\overline{x} \times 100\% = 2/3{,}2 \times 100\% =$ $= 62{,}5\%$.

Задача 17. Определить коэффициент осцилляции в задачах 14, 16.

Относительное линейное отклонение K_d характеризует долю усредненного значения абсолютных отклонений признака от средней величины и вычисляется по следующей формуле: $K_d = d/\overline{x} \times 100\%$, где d — среднее линейное отклонение.

Пример 18. Определим относительное линейное отклонение в примере 16.

Относительное линейное отклонение равно $K_d = d/\overline{x} \times 100\% =$ $= 0{,}7/3{,}2 \times 100\% = 21{,}875\%$.

Задача 18. Определить относительное линейное отклонение в задаче 16.

Коэффициент вариации V — это наиболее распространенный показатель колеблемости, используемый для оценки типичности средних величин.

Он вычисляется по следующей формуле: $V = \sigma/\overline{x} \times 100\%$, где σ — стандартное отклонение.

Пример 19. Определим коэффициент вариации в примере 3.

Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D_\sigma} = \sqrt{41{,}64} \approx 6{,}45$.

Тогда коэффициент вариации равен $V = \sigma/\overline{x} \times 100\%$, $= 6{,}45/13{,}1 \times \times 100\% \approx 49{,}2\%$.

Задача 19. Определить коэффициент вариации в задаче 3.

Чем меньше значение коэффициент вариации, тем однороднее совокупность по изучаемому признаку и типичнее средняя. Совокупности с коэффициентом вариации больше 30—35% принято считать неоднородными.

Глава 13

АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС

§ 13.1. АСИММЕТРИЯ

Очень часто перед исследователем возникает проблема оценки асимметричности распределения. Тогда на помощь приходит показатель асимметрии *As*, который вычисляется по следующей формуле: $As = \mu_3/\sigma^3$, где $\mu_3 = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^3 / \sum_{i=1}^{k} n_i$ — *центральный момент 3-го порядка*, σ — стандартное отклонение.

Если $As > 0$, то говорят о *правосторонней асимметрии распределения* (вытянутость вправо). Если $As < 0$, то говорят о *левосторонней асимметрии распределения* (вытянутость влево).

Пример 20. Определим показатель асимметрии в примере 16. Заполним таблицу.

Номер	$x_i - \overline{x}$	n_i	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^3 = n_i(x_i - \overline{x})^2 \times (x_i - \overline{x})$
1	−1,2	10	1,44	14,4	−17,28
2	−0,2	12	0,04	0,48	−0,096
3	0,8	16	0,64	10,24	8,192
Сумма	–	38	2,12	25,12	−9,184

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых трех столбцов взяты из примера 16. 4-й столбец — это квадраты элементов 2-го столбца. 5-й столбец равен произведению 3-го и 4-го столбцов. 6-й столбец равен произведению 5-го и 2-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Дисперсия $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 / \sum_{i=1}^{k} n_i = 25{,}12/38 \approx 0{,}66$.

Тогда стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{0{,}66} \approx 0{,}81$.

Центральный момент 3-го порядка равен:

$\mu_3 = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^3 / \sum_{i=1}^{k} n_i = -9{,}184/38 \approx -0{,}24$.

Тогда показатель асимметрии равен $As = \mu_3/\sigma^3 = -0{,}24/0{,}81^3 \approx$ $\approx -0{,}45 < 0$. Наблюдается левосторонняя асимметрия.

Задача 20. Определить показатель асимметрии в задаче 16.

§ 13.2. ЭКСЦЕСС

Вместе с показателем асимметрии большую роль при анализе вариационных рядов, определении типа кривой распределения и при выравнивании вариационных рядов играет показатель эксцесса *Ex*, который вычисляется по следующей формуле: $Ex = \mu_4/\sigma^4 - 3$, где $\mu_4 = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^4 / \sum_{i=1}^{k} n_i$ — *центральный момент 4-го порядка*, σ — стандартное отклонение.

Если $Ex > 0$, то *ряд островершинен*. Если $Ex < 0$, то *ряд низковершинен*.

Пример 21. Определим показатель эксцесса в примере 20. Заполним таблицу.

Номер	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^4 = n_i(x_i - \overline{x})^2 \times (x_i - \overline{x})^2$
1	1,44	14,4	20,736
2	0,04	0,48	0,0192
3	0,64	10,24	6,5536
Сумма	2,12	25,12	27,3088

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых трех столбцов взяты из примера 20. 4-й столбец равен произведению 2-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Центральный момент 4-го порядка равен: $\mu_4 = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^4 / \sum_{i=1}^{k} n_i =$ $= 27{,}3088/38 \approx 0{,}72$.

Тогда показатель эксцесса равен $Ex = \mu_4/\sigma^4 - 3 = 0{,}72/0{,}81^4 - 3 \approx$ $\approx -1{,}33 < 0$. Ряд низковершинен.

Задача 21. Определить показатель эксцесса в задаче 20.

Замечание. Статистическая функция *ЭКСЦЕСС* мастера функций f_x пакета Excel возвращает значение показателя эксцесса множества данных: $f_x \rightarrow$ *статистические* $\rightarrow$ *ЭКСЦЕСС* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

Глава 14

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Изучаемая генеральная совокупность может быть очень большой. Поэтому с целью экономии времени и материальных ресурсов случайным образом производят выборку из генеральной совокупности. Для этой выборки вычисляют выборочную среднюю $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$, выборочную дисперсию $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2/n$ и интересующие нас параметры. Как оценить параметры генеральной совокупности, зная эти параметры для выборки?

Для генеральной совокупности строится *доверительный интервал* — интервал значений, в пределах которого, как мы можем надеяться, находится параметр генеральной совокупности. Наша надежда выражается *доверительной вероятностью* — вероятностью, с которой доверительный интервал «захватит» истинное значение параметра генеральной совокупности. Чем выше доверительная вероятность, тем шире доверительный интервал. Значение доверительной вероятности выбирает сам исследователь. Обычно это 0,9; 0,95; 0,99.

Таким образом, определить доверительный интервал — это лучшее, что можно сделать в условиях неопределенности: это точное вероятностное утверждение вместо неясных замечаний типа «Мы не уверены, но ...» или «Это значение, вероятно, близко к ...».

§ 14.1. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ a (генеральная дисперсия σ^2 известна)

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с известной дисперсией σ^2, то

$$\overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},$$

где $\overline{X}$ — выборочная средняя, n — объем выборки, $\alpha = 1 - p$, p — доверительная вероятность, $z_{\alpha/2}$ берем из таблицы.

α	0,4	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
z_α	0,253	0,675	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Для вычисления z_α можно также воспользоваться статистической функцией НОРМСТОБР(1 – α) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 22. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 5$ г, фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 30$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\bar{X} = 101$ г. Найдем доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 95\%$.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = 101 \pm 1{,}96 \times 5/\sqrt{30} \approx 101 \pm 1{,}79$, то есть искомый интервал (99,21; 102,79).

Задача 22. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 3$ г, фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 40$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\bar{X} = 79$ г. Найти доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 99\%$.

Замечание. Вместо вычислений по формуле $z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ можно было бы воспользоваться функцией ДОВЕРИТ(α; σ; n) мастера функций f_x пакета Excel.

Определим объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней.

Пример 23. Вернемся к примеру 22. Мы получили доверительный интервал $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \approx 101 \pm 1{,}79$. Предположим, что нам нужна ширина доверительного интервала ±1 грамм. Каким должен быть тогда объем выборки?

$z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geqslant z_{\alpha/2}\sigma \Rightarrow n \geqslant (z_{\alpha/2}\sigma)^2 = (1{,}96 \times 5)^2 = 96{,}04$, то есть минимальный объем выборки равен 97. Так как объем первоначальной выборки равен 30, то объем новой выборки равен 97 – 30 = 67 пачек.

Находим среднюю $\bar{X}$ для объединенной выборки в 97 пачек (находим именно среднюю для выборки в 97 единиц, а не среднее арифметическое средних для выборок объемов 30 и 67 пачек) и получаем доверительный интервал для средней в генеральной совокупности $\bar{X} \pm 1$.

Задача 23. Каким должен быть объем выборки в задаче 22, если требуемая ширина доверительного интервала 0,5 г?

§ 14.2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ a (генеральная дисперсия σ^2 неизвестна)

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с неизвестной дисперсией σ^2, то

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} < a < \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1},$$

где $\overline{X}$ — выборочная средняя, n — объем выборки, $\alpha = 1 - p$, p — доверительная вероятность, s — выборочное стандартное отклонение.

Значение $t_{\alpha/2,n-1}$ берем из таблицы t-распределения (распределения Стьюдента). Для вычисления $t_{\alpha/2,n-1}$ можно также воспользоваться статистической функцией СТЬЮДРАСПОБР(α; n – 1) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 24. Автомат фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 30$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\overline{X} = 101$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 4$ г. Определим доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 95\%$.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$.

$n = 30 \Rightarrow n - 1 = 29 \Rightarrow t_{\alpha/2,n-1} = t_{0{,}025;\,29} \approx 2{,}045$.

$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} \approx 101 \pm 2{,}045 \times 4/\sqrt{29} \approx 101 \pm 1{,}52$, то есть искомый интервал (99,48; 102,52).

Задача 24. Автомат фасует чай в пачки. Проведена случайная выборка объемом $n = 40$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\overline{X} = 79$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 3$ г. Определить доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью $p = 99\%$.

Определим объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней.

Пример 25. Вернемся к примеру 24. Мы получили доверительный интервал $\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} \approx 101 \pm 1{,}52$. Предположим, что нам нужна ширина доверительного интервала ±1 г. Каким должен быть тогда объем выборки?

$t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{n-1} \geqslant t_{\alpha/2,n-1}s \Rightarrow n - 1 \geqslant (t_{\alpha/2,n-1}s)^2 \Rightarrow$ $n \geqslant 1 + (t_{\alpha/2,n-1}s)^2 \approx 1 + (2{,}045 \times 4)^2 \approx 67{,}9$, то есть минимальный объем выборки равен 68.

Но плохо то, что $t_{\alpha/2,n-1}$ зависит от n. Тем не менее, полученный результат можно использовать. На самом деле n будет меньше.

Если полученное значение $n \geqslant 30$, то можно вместо $t_{\alpha/2,n-1}$ рассмотреть $z_{\alpha/2}$ и воспользоваться формулой $z_{\alpha/2}s/\sqrt{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow n \geqslant 1 + (z_{\alpha/2}s)^2 \approx 1 + (1{,}96\times 4)^2 \approx 62{,}47$, то есть минимальный объем выборки равен 63. Так как объем первоначальной выборки равен 30, то объем новой выборки равен 63 – 30 = 33 пачки. Находим среднюю $\overline{X}$ для объединенной выборки в 63 пачки и получаем доверительный интервал для средней в генеральной совокупности $\overline{X} \pm 1$.

Задача 25. Каким должен быть объем выборки в задаче 24, если требуемая ширина доверительного интервала ±0,5 г?

§ 14.3. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДОЛИ

Очень часто нас интересует, какова *генеральная доля* — доля объектов генеральной совокупности, обладающих определенным свойством.

Производится выборка объема n. Для нее вычисляется *выборочная доля* $\hat{p}$ — доля объектов, обладающих этим свойством. Тогда при выполнении условий $n\hat{p} \geqslant 5$, $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$ доверительный интервал для генеральной доли задается формулой $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.

Пример 26. Проведена выборка объема $n = 2000$ шт. 150 из них оказались бракованными. Найдем доверительный интервал доли бракованных изделий в генеральной совокупности для доверительной вероятности $p = 95\%$.

$\hat{p} = 150/2000 = 0{,}075$. $n\hat{p} = 2000\times 0{,}075 = 150 > 5$.

$n(1-\hat{p}) = 2000\times(1-0{,}075) = 1850 > 5$. Оба условия выполнены.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0{,}075 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}075(1-0{,}075)/2000} \approx$ $\approx 0{,}075 \pm 0{,}012$, то есть искомый интервал (0,063; 0,087).

Задача 26. Проведена выборка объема $n = 1000$ шт. 120 из них оказались бракованными. Найти доверительный интервал доли бракованных изделий в генеральной совокупности для доверительной вероятности $p = 99\%$.

Определим объем выборки, необходимый для оценки генеральной доли.

Пример 27. Вернемся к примеру 26. Мы получили доверительный интервал $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \approx 0{,}075 \pm 0{,}012$. Предположим, что нам нужна ширина доверительного интервала ±0,005. Каким должен быть тогда объем выборки?

$z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \leqslant 0{,}005 \Rightarrow (z_{\alpha/2})^2\hat{p}(1-\hat{p})/n \leqslant 0{,}005^2 = 0{,}000025 \Rightarrow$
$n \geqslant (z_{\alpha/2})^2\hat{p}(1-\hat{p})/0{,}000025 \approx 1{,}96^2 \times 0{,}075 \times (1-0{,}075)/0{,}000025 \approx 10660.$
то есть минимальный объем выборки равен 10660.

Так как объем первоначальной выборки равен 2000, то объем новой выборки равен 10660 – 2000 = 8660 деталей. Находим выборочную долю бракованных изделий $\hat{p}$ для объединенной выборки в 10660 деталей и получаем доверительный интервал для доли бракованных изделий в генеральной совокупности $\hat{p} \pm 0{,}005$.

Задача 27. Каким должен быть объем выборки в задаче 26, если требуемая ширина доверительного интервала ±0,003?

§ 14.4. ИНТЕРВАЛЫ ПРЕДСКАЗАНИЯ

Доверительный интервал дает информацию о том, где с известной вероятностью находится среднее генеральной совокупности. Интервал предсказания позволяет использовать данные выборки для предсказания с известной вероятностью значения нового наблюдения при условии, что новое наблюдение получено тем же способом, что и предыдущие наблюдения.

Интервал предсказания для нового наблюдения имеет следующий вид: $(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}s\sqrt{(n+1)/(n-1)}\,;\ \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}s\sqrt{(n+1)/(n-1)}\,)$, где $\overline{X}$ — выборочная средняя, n — объем выборки, $\alpha = 1 - p$, p — доверительная вероятность, s — выборочное стандартное отклонение.

Пример 28. За последние $n = 6$ месяцев средний объем продаж равен $\overline{X} = 150$ тыс. руб., а выборочное стандартное отклонение $s = 10$ тыс. руб. Предполагается, что объем продаж распределен нормально. Определим интервал предсказания для объема продаж текущего месяца с доверительной вероятностью $p = 95\%$.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}05/2 = 0{,}025.$

$n = 6 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow t_{\alpha/2,n-1} = t_{0{,}025;5} = 2{,}571.$

$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}s\sqrt{(n+1)/(n-1)} = 150 \pm 2{,}571 \times 10\sqrt{(6+1)/(6-1)} \approx$
$\approx 150 \pm 30{,}42$, то есть искомый интервал (119,58; 180,42).

Задача 28. За последние $n = 10$ месяцев средний объем продаж равен $\overline{X} = 140$ тыс. руб., а выборочное стандартное отклонение $s = 5$ тыс. руб. Предполагается, что объем продаж распределен нормально. Определить интервал предсказания для объема продаж текущего месяца с доверительной вероятностью $p = 99\%$.

Глава 15

ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ

Очень часто генеральная совокупность должна подчиняться некоторым параметрам. Например, фасовочная машина должна наполнять пакеты сахаром по 1 кг. Как узнать, действительно ли генеральная совокупность подчиняется этим ограничениям? С этой целью проводят *испытание гипотез.*

Из генеральной совокупности проводят выборку объема n. Для этой выборки вычисляют нужные характеристики. Затем формулируют две гипотезы: основную H_0 и альтернативную H_1. Основная гипотеза H_0 — это то утверждение, которое подлежит проверке.

Например, гипотеза H_0: генеральная средняя $a = 2$. Альтернативная гипотеза H_1 в этом примере может быть сформулирована любым из следующих трех способов:

а) H_1: $a > 2$ (*правосторонняя проверка*);

б) H_1: $a < 2$ (*левосторонняя проверка*);

в) H_1: $a \neq 2$ (*двусторонняя проверка*).

Исследователь задает доверительную вероятность p — величину, которая отражает степень уверенности исследователя в результате испытания. Для односторонней проверки $\alpha = 1 - p$, для двусторонней проверки $\alpha = (1 - p)/2$. Величина $1 - p$ называется *уровнем значимости.*

По α, n в зависимости от вида решаемой задачи по таблицам находят одну (для односторонней проверки) или две (для двусторонней проверки) граничные точки, которые наносят на координатную ось. Порядок нахождения граничных точек показан далее.

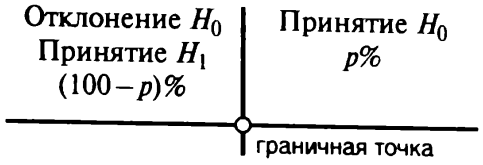
По результатам выборки вычисляется величина, называемая *статистикой.* Формула для вычисления статистики зависит от вида решаемой задачи. Значение статистики наносят на координатную ось. В зависимости от взаимного расположения значения статистики и граничных точек возможен один из трех вариантов:

1) принимается H_0;

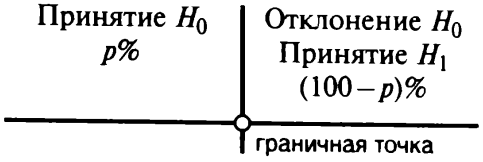
2) отклоняется H_0 и без всякой проверки принимается H_1;

3) доказательство является неубедительным, нужно больше данных.

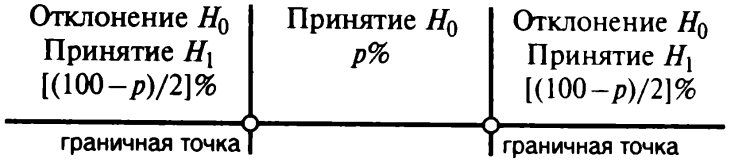
Для левосторонней проверки:



Для правосторонней проверки:



Для двусторонней проверки:



Чем выше доверительная вероятность, тем шире область принятия H_0.

§ 15.1. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНОЙ СРЕДНЕЙ ПРИ ИЗВЕСТНОЙ ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ σ^2

Для выборки объема n вычисляется выборочная средняя $\overline{X}$. a — предполагаемое значение генеральной средней. Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). Значение z_α находим по таблице (см. § 14.1). Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Пример 29. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 100$ г. В случайной выборке объема $n = 25$ пачек средний вес $\overline{X} = 101{,}5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

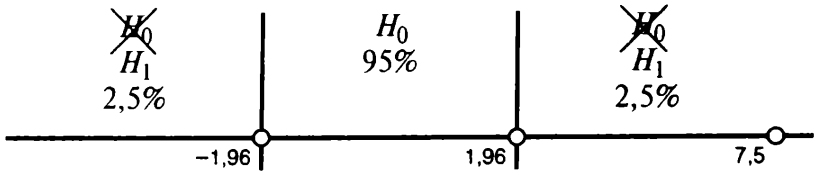
H_1: $a \neq 100$ г.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}96 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 1{,}96$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{101{,}5 - 100}{1/\sqrt{25}} = 7{,}5.$

Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Автомат нужно отрегулировать.

Задача 29. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1{,}5$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 80$ г. В случайной выборке объема $n = 16$ пачек средний вес $\overline{X} = 78{,}5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Пример 30. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм, производит детали средней длины $a = 20$ мм. В случайной выборке объема $n = 16$ деталей средняя длина $\overline{X} = 19{,}8$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 20$ мм.

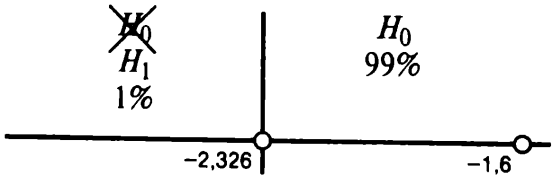
H_1: $a < 20$ мм.

Проведем левостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}326 \Rightarrow$ граничная точка $-2{,}326$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{19{,}8 - 20}{0{,}5/\sqrt{16}} = -1{,}6.$

Отметим значения на числовой оси.



Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1%. Станок настроен правильно.

Задача 30. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, производит детали средней длины $a = 30$ мм. В случайной выборке объема $n = 25$ деталей средняя длина $\overline{X} = 30{,}1$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

§ 15.2. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНОЙ СРЕДНЕЙ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГЕНЕРАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ

Для выборки объема n вычисляются выборочная средняя $\overline{X}$ и выборочное стандартное отклонение s. Пусть a — предполагаемое значение генеральной средней. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$. В Excel для двусторонней проверки $t_{\alpha;n-1}$ = СТЬЮДРАСПОБР $(1-p;\ n-1)$, для односторонней проверки $t_{\alpha;n-1}$ = СТЬЮДРАСПОБР$(2(1-p);\ n-1)$. Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки). Статистика $t = \dfrac{\overline{X}-a}{s/\sqrt{n-1}}$.

Пример 31. Производитель утверждает, что средний вес пачки чая не меньше $a = 100$ г. Инспектор отобрал 10 пачек чая и взвесил. Их вес оказался 97, 102, 103, 98, 96, 105, 98, 100, 101, 99 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

H_1: $a < 100$ г.

Проведем левостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}01;10-1} = 2{,}821 \Rightarrow$ граничная точка $-2{,}821$. Найдем $\overline{X}$ и s.

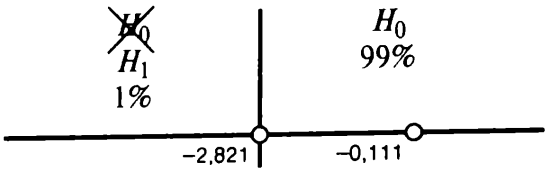
Номер пачки	Вес, г x_i	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$
1	97	−2,9	8,41
2	102	2,1	4,41
3	103	3,1	9,61
4	98	−1,9	3,61
5	96	−3,9	15,21
6	105	5,1	26,01
7	98	−1,9	3,61
8	100	0,1	0,01
9	101	1,1	1,21
10	99	−0,9	0,81
Сумма	999	0	72,9

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 999/10 = 99{,}9$ г.

$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2/n = 72{,}9/10 = 7{,}29$ г^2, $s = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ г.

Статистика $t = \dfrac{\overline{X} - a}{s/\sqrt{n-1}} = \dfrac{99{,}9 - 100}{2{,}7/\sqrt{10-1}} \approx -0{,}111.$

Отметим значения на числовой оси.



Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1%. Выборка инспектора не противоречит утверждению производителя.

Задача 31. Производитель утверждает, что средний вес плитки шоколада не меньше $a = 50$ гр. Инспектор отобрал 10 плиток шоколада и взвесил. Их вес оказался 49, 50, 51, 52, 48, 47, 49, 52, 48, 51 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес плитки шоколада распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

§ 15.3. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНОЙ ДОЛИ

Для выборки объема n вычисляется выборочная доля $\hat{p} =$ = (число элементов выборки, обладающих нужным свойством)/(объем выборки) и сравнивается с генеральной долей $\overline{p}$. Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 14.1).

Статистика $z = \dfrac{\hat{p} - \overline{p}}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n}}.$

Пример 32. Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 3%. В случайной выборке объема $n = 100$ изделий оказалось 5 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: доля бракованных изделий равна 3%, то есть $\overline{p} = 0{,}03$.

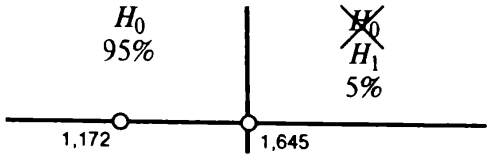
H_1: $\overline{p} > 0{,}03$.

Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Это граничная точка. Оценка $\hat{p} = 5/100 = 0{,}05$.

Статистика $z = \dfrac{\hat{p} - \overline{p}}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n}} = \dfrac{0{,}05 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}03(1-0{,}03)/100}} \approx 1{,}172.$

Отметим значения на числовой оси.



Мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Выборка не противоречит утверждению производителя.

Задача 32. Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 7%. В случайной выборке объема $n = 150$ изделий оказалось 16 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 15.4. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ О ДВУХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Очень часто про две независимые выборки объема n_1 и n_2 соответственно нужно узнать, взяты ли они из нормальных генеральных совокупностей с одинаковой дисперсией. Для каждой выборки находим выборочную дисперсию s_1^2 и s_2^2 соответственно. Оценка генеральной дисперсии по первой выборке $\sigma_1^2 = n_1 s_1^2/(n_1 - 1)$. Оценка генеральной дисперсии по второй выборке $\sigma_2^2 = n_2 s_2^2/(n_2 - 1)$. Статистика $F =$ (бóльшая оценка генеральной дисперсии)/(меньшая оценка генеральной дисперсии).

Обозначим через n_A объем выборки, у которой больше оценка генеральной дисперсии, через n_B обозначим объем другой выборки. Так как дисперсия неотрицательна, то нам потребуется одна граничная точка $F_{\alpha;n_A-1;n_B-1}$, которую находят из таблицы F-распределения (распределения Фишера). Можно воспользоваться статистической функцией FРАСПОБР(α; $n_A - 1$; $n_B - 1$) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 33. Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_1^2 = 20\%^2$. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 10$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_2^2 = 30\%^2$. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски инвестиций 1 и 2? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Оценка генеральной дисперсии по первой выборке $\sigma_1^2 = n_1 s_1^2/(n_1 - 1)$ $= 12 \times 20/(12 - 1) \approx 21{,}818$.

Оценка генеральной дисперсии по второй выборке $\sigma_2^2 = n_2 s_2^2/(n_2 - 1)$ $= 10 \times 30/(10 - 1) \approx 33{,}333$.

Статистика F = (большая оценка генеральной дисперсии)/(меньшая оценка генеральной дисперсии) = $33{,}333/21{,}818 \approx 1{,}528$.

Так как $33{,}333 > 21{,}818$, то $n_A = 10$, $n_B = 12$.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow F_{\alpha;n_A-1;n_B-1} = F_{0.025;10-1;12-1} =$ $= 3{,}588 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 3{,}588$.

Отметим значения на числовой оси.

Мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Риски инвестиций равны.

Задача 33. Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 14$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_1^2 = 15\%^2$. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_2^2 = 20\%^2$. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски инвестиций 1 и 2? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 15.4.1. Двухвыборочный F-тест для дисперсии

В Excel существует надстройка *Пакет анализа*, которая позволяет автоматически провести испытание гипотезы о двух генеральных дисперсиях. Нужно воспользоваться командой *Сервис*. В раскрывшемся списке команд должна присутствовать команда *Анализ данных*. При ее отсутствии необходимо выбрать команду *Надстройки* и поставить «галочку» рядом с командой *Пакет анализа*. Если же команда *Пакет анализа* отсутствует, то нужно произвести доустановку Excel.

Сервис → *Анализ данных* → *Двухвыборочный F-тест для дисперсии* → *OK*. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал переменной 1:* указывается ссылка на ячейки, содержа-

щие значения первой выборки. В графе *Интервал переменной 2:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения второй выборки.

Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». В графе *Альфа* указывается уровень значимости $1 - p$ (по умолчанию там уже указано 0,05, но исследователь может выбрать и свое значение). Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал*, *Новый рабочий лист*, *Новая рабочая книга*) → *OK*. Откроется итоговое окно.

Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$
Дисперсия	σ_1^2	σ_2^2
Наблюдения	n_1	n_2
df	$n_1 - 1$	$n_2 - 1$
F	Статистика F	
P(F<=f) односторонняя		
F критическое одностороннее	$F_{\alpha;n_A-1;n_B-1}$	

Здесь проверка всегда односторонняя. Если в графе *P(F<=f) односторонняя* указана величина, меньшая выбранного *Альфа*, то мы отклоняем гипотезу H_0 на уровне значимости *Альфа*.

Если же надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ФТЕСТ (массив 1; массив 2) мастера функций f_x пакета Excel. Массив 1 и массив 2 — это ссылки на ячейки, содержащие значения двух выборок. Функция ФТЕСТ выдает значение доверительной вероятности p для принятия H_0 при двусторонней проверке. Затем исследователь решает, устраивает ли его такое значение доверительной вероятности.

§ 15.5. СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН ДВУХ ВЫБОРОК ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Очень часто исследователя интересует, одинаковы или нет средние величины двух выборок, взятых из двух нормальных генеральных совокупностей. При этом известны генеральные дисперсии σ_1^2 и σ_2^2.

H_0: $a_1 = a_2$ (генеральные средние равны), то есть $a_1 - a_2 = 0$.

H_1: $a_1 \neq a_2$.

Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 14.1).

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$, где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — выборочные средние этих выборок.

Пример 34. Автомат 1 и автомат 2 фасуют чай в пачки. Стандартные отклонения $\sigma_1 = 1$ г и $\sigma_2 = 2$ г соответственно. В случайной выборке объема $n_1 = 20$ пачек для автомата 1 средний вес $\overline{X}_1 = 101$ г. В случайной выборке объема $n_2 = 15$ пачек для автомата 2 средний вес $\overline{X}_2 = 98$ г. Верно ли, что оба автомата фасуют чай в пачки одинакового среднего веса? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: $a_1 = a_2$ (средний вес одинаков), то есть $a_1 - a_2 = 0$.

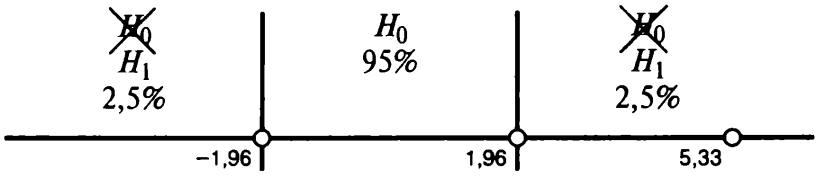
H_1: $a_1 \neq a_2$.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}96 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 1{,}96$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \dfrac{101 - 98}{\sqrt{1^2/20 + 2^2/15}} \approx 5{,}33.$

Отметим значения на числовой оси.



Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Средний вес пачек чая для этих автоматов различен.

Задача 34. Автомат 1 и автомат 2 фасуют чай в пачки. Стандартные отклонения $\sigma_1 = 0{,}5$ г и $\sigma_2 = 1$ г соответственно. В случайной выборке объема $n_1 = 12$ пачек для автомата 1 средний вес $\overline{X}_1 = 81$ г. В случайной выборке объема $n_2 = 16$ пачек для автомата 2 средний вес $\overline{X}_2 = 80$ г. Верно ли, что оба автомата фасуют чай в пачки одинакового среднего веса? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 15.5.1. Двухвыборочный z-тест для средних (Excel)

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений с известными генеральными дисперсиями.

Сервис → Анализ данных → Двухвыборочный z-тест для средних → OK. Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал переменной 1:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения первой выборки. В графе *Интервал переменной 2:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения второй выборки.

Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». В графе *Альфа* указывается уровень значимости $1 - p$ (по умолчанию там уже указано 0,05, но исследователь может выбрать и свое значение). В графе *Гипотетическая средняя разность:* пишем 0. В графах *Дисперсия переменной 1 (известная):* и *Дисперсия переменной 2 (известная):* указываются значения σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал, Новый рабочий лист, Новая рабочая книга*) → *OK.* Откроется итоговое окно.

Двухвыборочный z-тест для средних		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
Известная дисперсия	σ_1^2	σ_2^2
Наблюдения	n_1	n_2
Гипотетическая разность средних	0	
Z	Статистика z	
P(Z<=z) односторонняя		
z критическое одностороннее	z_α для односторонней проверки	
P(Z<=z) двусторонняя		
z критическое двустороннее	z_α для двусторонней проверки	

В графах *P(Z<=z)* дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

§ 15.6. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗЫ ПО ВЫБОРОЧНЫМ СРЕДНИМ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Нужно определить, взяты ли две выборки объема n_1 и n_2 соответственно из нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми средними.

H_0: $a_1 = a_2$ (генеральные средние равны), то есть $a_1 - a_2 = 0$.

$\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — выборочные средние для первой и второй выборок соответственно, s_1^2 и s_2^2 — выборочные дисперсии для первой и второй выборок соответственно. Вид граничных точек и статистики зависит от того, равны или нет между собой неизвестные генеральные дисперсии. Поэтому сначала надо проверить гипотезу о равенстве двух генеральных дисперсий (см. § 15.4).

§ 15.6.1. Случай равенства генеральных дисперсий

По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n_1+n_2-2}$. Граничные точки: $t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ (для двусторонней проверки).

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$.

Пример 35. Для производства каждой из $n_1 = 10$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 1$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 16$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 2$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Применив результаты § 15.4, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии равны.

H_0: $a_1 = a_2$.

H_1: $a_1 > a_2$.

$p = 0{,}95$. Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha;n_1+n_2-2} = t_{0{,}05;10+16-2} = 1{,}711$. Это граничная точка. Статистика

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{30 - 28}{\sqrt{\dfrac{10\times 1 + 16\times 2}{10 + 16 - 2}\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{16}\right)}} \approx 3{,}75.$$

Отметим значения на числовой оси.

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 35. Для производства каждой из $n_1 = 12$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 25$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 1{,}5$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 11$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 23$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 2$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 15.6.1.1. Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений в случае равенства неизвестных генеральных дисперсий.

Сервис → Анализ данных → Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями → OK.

Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK.* Откроется итоговое окно.

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$
Дисперсия	s_1^2	s_2^2
Наблюдения	n_1	n_2
Объединенная дисперсия		
Гипотетическая разность средних	0	
df	$n_1 + n_2 - 2$	
t-статистика	Статистика t	
P(T<=t) односторонняя		
t критическое одностороннее	$t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ для односторонней проверки	
P(T<=t) двусторонняя		
t критическое двустороннее	$t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ для двусторонней проверки	

В графах *P(T<=t)* дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

Если надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; 2) мастера функций f_x пакета Excel. Для односторонней проверки хвосты = 1, для двусторонней проверки хвосты = 2. Функция ТТЕСТ выдает значение уровня значимости, которое нужно сравнить с требуемым уровнем значимости.

§ 15.6.2. Случай неравенства генеральных дисперсий

В этом случае лучше обратиться к *Пакету анализа*. Но при $n_1 \geqslant 30$ и $n_2 \geqslant 30$ можно применить следующую схему.

Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 14.1).

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$, где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — выборочные средние этих выборок.

Пример 36. Для производства каждой из $n_1 = 51$ детали по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 6$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 41$ детали по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 25$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 3$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Применив результаты § 15.4, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии различны.

H_0: $a_1 = a_2$.

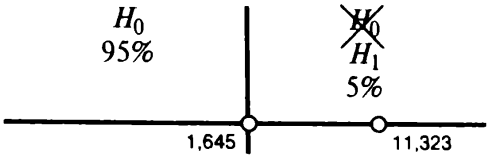
H_1: $a_1 > a_2$.

$p = 0{,}95$. Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Это граничная точка.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}} = \dfrac{30 - 25}{\sqrt{\dfrac{6}{51 - 1} + \dfrac{3}{41 - 1}}} \approx 11{,}323.$

Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 36. Для производства каждой из $n_1 = 51$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 32$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 9$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 41$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 4$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 90\%$.

§ 15.6.2.1. Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений в случае неравенства неизвестных генеральных дисперсий.

Сервис → *Анализ данных* → *Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями* → *ОК*. Далее см. § 15.6.1.1. Для этого случая ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; 3).

§ 15.7. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ ПО ДВУМ ВЫБОРОЧНЫМ ДОЛЯМ

Нужно дать заключение по двум выборкам большого объема ($n_1 \geqslant 30$, $n_2 \geqslant 30$) с выборочными долями $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$, взяты ли они из генеральных совокупностей с одинаковой генеральной долей.

H_0: $p_1 = p_2$ (генеральные доли одинаковы).

Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). z_α находим по таблице (см. § 14.1).

Статистика $z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$, где $\overline{p}$ — выборочная доля для объединенной выборки.

Пример 37. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали $n_1 = 3000$ мужчин и $n_2 = 3500$ женщин. У 50 мужчин и 110 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Выборочные доли $\hat{p}_1 = 50/3000 \approx 0{,}017$, $\hat{p}_2 = 110/3500 \approx 0{,}031$.

H_0: $p_1 = p_2$ (генеральные доли одинаковы).

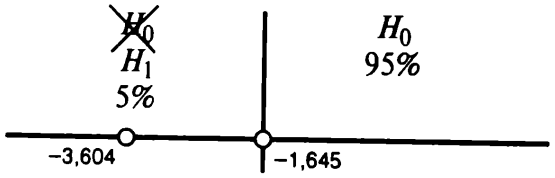
H_1: $p_1 < p_2$.

Проведем левостороннюю проверку. $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow$ граничная точка $-1{,}645$. Выборочная доля для объединенной выборки $\overline{p} = (50 + 110)/(3000 + 3500) \approx 0{,}025$.

$$\text{Статистика } z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} =$$

$$= \frac{0{,}017 - 0{,}031}{\sqrt{0{,}025 \times (1 - 0{,}025)\left(\dfrac{1}{3000} + \dfrac{1}{3500}\right)}} \approx -3{,}604.$$

Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин.

Задача 37. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали $n_1 = 2000$ мужчин и $n_2 = 2500$ женщин. У 40 мужчин и 70 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 15.8. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗ ПО СПАРЕННЫМ ДАННЫМ

Иногда выборки не являются независимыми из-за наличия факторов, влияющих на выборки неизвестным путем. Тогда группируют элементы попарно (по одному из каждой выборки) и проводят испытание гипотезы на среднюю разностей между парными измерениями.

Пусть n — объем парной выборки. В каждой паре находим d — разность значений. Для полученных разностей ищем выборочную среднюю $\overline{X}_d$ и выборочное стандартное отклонение s_d. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$.

Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки).

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_d}{s_d/\sqrt{n-1}}$.

Пример 38. Можно ли утверждать, что шины заводов 1 и 2 имеют разную износоустойчивость? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Номер машины	X — расстояние для шин завода 1, тыс. км	Y — расстояние для шин завода 2, тыс. км	$d = X - Y$	d^2
1	60,2	59,4	0,8	0,64
2	62,3	58,3	4	16
3	61,3	62,1	−0,8	0,64
4	60,7	63,4	−2,7	7,29
5	63,4	60,8	2,6	6,76
Сумма	—	—	3,9	31,33

$\overline{X}_d = (\sum d)/n = 3{,}9/5 = 0{,}78.$

$s_d^2 = (\sum d^2)/n - \overline{X}_d^2 = 31{,}33/5 - 0{,}78^2 = 5{,}6576.$ $s_d \approx 2{,}379.$

H_0: средняя $a_d = 0$ (нет разницы между шинами).

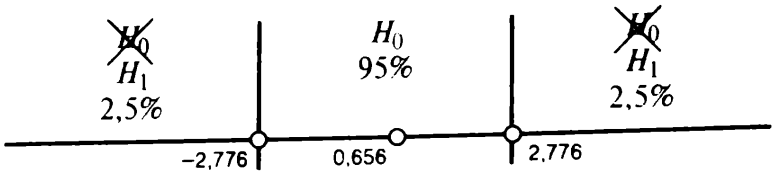
H_1: $a_d \neq 0$ (есть разница).

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0.025;5-1} = 2{,}776 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 2{,}776$.

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_d}{s_d/\sqrt{n-1}} = \dfrac{0{,}78}{2{,}379/\sqrt{5-1}} \approx 0{,}656.$

Отметим значения на числовой оси.



Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Износоустойчивость шин одинакова.

Задача 38. Можно ли утверждать, что шины заводов 1 и 2 имеют разную износоустойчивость? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Номер машины	X — расстояние для шин завода 1, тыс. км	Y — расстояние для шин завода 2, тыс. км
1	62,4	61,8
2	61,8	62,3
3	63,2	60,6
4	57,4	59,2
5	59,6	62,1

§ 15.8.1. Парный двухвыборочный t-тест для средних

Excel позволяет провести парный тест. *Сервис* → *Анализ данных* → *Парный двухвыборочный t-тест для средних* → *OK*. Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK*. Появляется итоговое окно.

Парный двухвыборочный t-тест для средних		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$
Дисперсия		
Наблюдения	n	n
Корреляция Пирсона		
Гипотетическая разность средних	a_d	
df	$n - 1$	
t-статистика	Статистика t	
P(T<=t) односторонняя		
t критическое одностороннее	$t_{\alpha;n-1}$ для односторонней проверки	
P(T<=t) двусторонняя		
t критическое двустороннее	$t_{\alpha;n-1}$ для двусторонней проверки	

В графах *P(T<=t)* дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

Если же надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; 1) мастера функций f_x пакета Excel.

§ 15.9. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗЫ О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НОВОГО НАБЛЮДЕНИЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Иногда требуется провести испытание гипотезы о принадлежности нового наблюдения той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка.

Гипотеза H_0 утверждает, что новое наблюдение принадлежит той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка. Альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что это не так.

Для выборки объема n вычисляются выборочная средняя $\overline{X}$ и выборочное стандартное отклонение s. Пусть $X_{нов}$ — результат очередного наблюдения. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$. Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки).

$$\text{Статистика } t = \frac{X_{нов} - \overline{X}}{s\sqrt{(n+1)/(n-1)}}.$$

Пример 39. Автомат фасует чай в пачки. В случайной выборке объема $n = 16$ пачек средний вес $\overline{X} = 100$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 0{,}5$ г. Вес очередной пачки чая $X_{нов} = 98{,}7$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Предполагается, что все пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: новое наблюдение принадлежит той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка, то есть автомат регулировать не нужно.

H_1: новое наблюдение не принадлежит той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка, то есть автомат нужно отрегулировать.

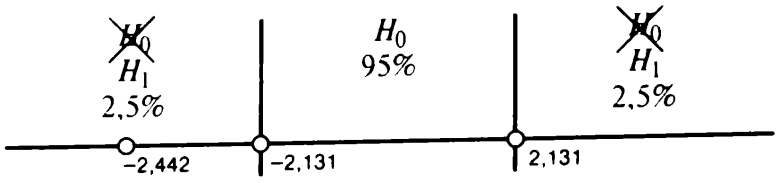
Проведем двустороннюю проверку.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}025;16-1} = 2{,}131 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 2{,}131$.

Статистика $t = \dfrac{X_{\text{нов}} - \overline{X}}{s\sqrt{(n+1)/(n-1)}} = \dfrac{98{,}7 - 100}{0{,}5\sqrt{(16+1)/(16-1)}} \approx$

$\approx -2{,}442.$

Отметим значения на числовой оси.



Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Автомат нужно отрегулировать.

Задача 39. Автомат фасует чай в пачки. В случайной выборке объема $n = 12$ пачек средний вес $\overline{X} = 50$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 0{,}3$ г. Вес очередной пачки чая $X_{\text{нов}} = 50{,}9$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Предполагается, что вес пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 15.10. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ

До сих пор мы предполагали, что генеральные совокупности распределены нормально или приблизительно нормально. Теперь мы откажемся от этих условий. Будем проверять гипотезу о наличии связи между значениями двух величин.

H_0: нет связи между значениями двух величин.

H_1: есть связь между значениями двух величин.

Составляется *таблица наблюдаемых частот*. По строкам изменяются значения первой величины, по столбцам — значения второй величины. В клетке с индексами (i, j) записана частота $f_0 = n_{ij}$ — число элементов, у которых значения первой и второй величин равны i и j соответственно. f_0 — наблюдаемая частота события.

По таблице наблюдаемых частот строят показанным далее способом *таблицу ожидаемых частот*. f_E — ожидаемая частота события. Должно выполняться условие $f_E \geqslant 5$ для каждой клетки таблицы, иначе надо объединить какие-то строки или столбцы.

Таблицу наблюдаемых частот и таблицу ожидаемых частот часто называют *таблицами сопряженности*. Пусть n — общее число наблюдений, m = (число строк таблицы − 1) × (число столбцов таблицы − 1). Если таблица сопряженности содержит только одну строку, то m = число столбцов таблицы − 1.

Доверительная вероятность p, уровень значимости $\alpha = 1 - p$. Для α и m по таблице χ^2-распределения («хи-квадрат») находим $\chi^2_{\alpha,m}$. Это граничная точка.

Статистика $\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E}$.

Если таблица сопряженности имеет размер 2×2 и $n \leqslant 100$, то вводится поправка Йетса: $\chi^2 = \sum \frac{(|f_0 - f_E| - 0{,}5)^2}{f_E}$.

Отметим значения на числовой оси. Для нахождения $\chi^2_{\alpha,m}$ можно воспользоваться статистической функцией ХИ2ОБР(α; m) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 40. Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов?

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	25	18	10	5
четыре	20	16	15	6
три	15	20	22	13
два	8	10	7	15

Это таблица наблюдаемых частот f_0. В клетке (1, 1) написано число 25, то есть 25 человек получили и по физике, и по математике отличные оценки. В клетке (4, 2) написано число 10, то есть 10 человек получили хорошие оценки по физике и неудовлетворительные оценки по математике. И т. д.

H_0: нет связи между оценками.

H_1: есть связь между оценками.

Построим таблицу ожидаемых частот f_E. Суммируем числа по строкам и столбцам.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	25	18	10	5	58
четыре	20	16	15	6	57
три	15	20	22	13	70
два	8	10	7	15	40
Сумма	68	64	54	39	225

Всего получены результаты экзаменов $n = 225$ человек. Отличный результат по математике показали 58 человек, то есть доля тех, кто получил отличные оценки по математике, равна 58/225. Если верна гипо-

теза H_0, то можно ожидать, что 58/225 из 68 студентов, получивших по физике отличные оценки, показали отличные знания и по математике. Аналогично можно рассчитать и другие ожидаемые частоты.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	68×58/225	64×58/225	54×58/225	39×58/225	58
четыре	68×57/225	64×57/225	54×57/225	39×57/225	57
три	68×70/225	64×70/225	54×70/225	39×70/225	70
два	68×40/225	64×40/225	54×40/225	39×40/225	40
Сумма	68	64	54	39	225

Ожидаемые частоты нельзя округлять до целого значения.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	17,5	16,5	13,9	10,9	58
четыре	17,2	16,2	13,7	9,9	57
три	21,2	19,9	16,8	12,1	70
два	12,1	11,4	9,6	6,9	40
Сумма	68	64	54	39	225

Если в какой-то клетке получилось значение < 5, то с целью уничтожения этого в таблицах нужно объединить какие-то строки или столбцы. При округлении надо следить, чтобы исходные суммы не изменились.

Доверительная вероятность $p = 0{,}95$, уровень значимости $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. m = (число строк таблицы − 1)×(число столбцов таблицы − 1) = (4 − 1)×(4 − 1) = 9.

Для α и m по таблице χ^2-распределения находим $\chi^2_{\alpha,m} = \chi^2_{0{,}05;9} = 16{,}92$. Это граничная точка. Найдем значение статистики χ^2.

f_0	f_E	$f_0 - f_E$	$(f_0 - f_E)^2$	$(f_0 - f_E)^2/f_E$
25	17,5	7,5	56,25	3,21
20	17,2	2,8	7,84	0,46
15	21,2	−6,2	38,44	1,81
8	12,1	−4,1	16,81	1,39
18	16,5	1,5	2,25	0,14
16	16,2	−0,2	0,04	0,00
20	19,9	0,1	0,01	0,00
10	11,4	−1,4	1,96	0,17
10	13,9	−3,9	15,21	1,09
15	13,7	1,3	1,69	0,12
22	16,8	5,2	27,04	1,61

f_0	f_E	$f_0 - f_E$	$(f_0 - f_E)^2$	$(f_0 - f_E)^2/f_E$
7	9,6	−2,6	6,76	0,70
5	10,1	−5,1	26,01	2,58
6	9,9	−3,9	15,21	1,54
13	12,1	0,9	0,81	0,07
15	6,9	8,1	65,61	9,51
Сумма	—	0	—	24,40

Поясним, как заполняется таблица.

Наблюдаемые частоты f_0 пишем в 1-м столбце, а соответствующие им ожидаемые частоты f_E — во 2-м столбце. Далее производим над столбцами действия, указанные в 1-й строке.

Статистика $\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E}$ = 24,40 (сумма чисел 5-го столбца).

Отметим значения на числовой оси.

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Есть связь между оценками, полученными студентами на экзаменах по математике и физике.

Замечание. Вместо заполнения последней таблицы можно воспользоваться статистической функцией ХИ2ТЕСТ мастера функций f_x пакета Excel. $f_x \rightarrow$ *статистические* $\rightarrow$ *ХИ2ТЕСТ* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно. В графе *фактический интервал* указывается ссылка на ячейки, в которых хранятся наблюдаемые частоты. В графе *ожидаемый интервал* указывается ссылка на ячейки, в которых хранятся ожидаемые частоты. *ОК*. Если полученное значение превышает уровень значимости $\alpha = 1 - p$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Задача 40. Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов? Доверительная вероятность 99%.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	20	17	12	6
четыре	22	15	17	5
три	21	19	20	12
два	9	8	7	18

Глава 16

ПОРЯДКОВЫЕ ИСПЫТАНИЯ

До этого момента мы работали с данными, которые можно измерить. Но бывают ситуации, когда важнее упорядочивание данных, чем прямое измерение. Это — *порядковые испытания*, а сами данные называются порядковыми. Для порядковых данных составляются две последовательности одинаковой длины $n \geqslant 10$. Нас интересует, есть ли между ними связь. Задается доверительная вероятность p, уровень значимости $\alpha = 1 - p$.

H_0: между двумя последовательностями нет связи, они не согласованы друг с другом.

H_1: между двумя последовательностями существует некая связь.

По α находим по таблице граничную точку $z_\alpha > 0$ (см. § 14.1). Для последовательностей вычисляем *ранговый коэффициент корреляции* Спирмена $r_s = 1 - 6\dfrac{\sum d^2}{n(n^2-1)}$. Статистика $z = r_s\sqrt{n-1}$.

Пример 41. Два человека дегустируют 10 сортов чая. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений (второй и третий столбцы). Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Сорт чая	Дегустатор 1	Дегустатор 2	d	d^2
А	6	5	1	1
Б	4	6	−2	4
В	3	4	−1	1
Г	10	7	3	9
Д	5	1	4	16
Е	1	2	−1	1
Ж	8	8	0	0
З	2	3	−1	1
И	7	9	−2	4
К	9	10	−1	1
Сумма	—	—	—	38

d — это разность между значениями дегустаторов для одного и того же сорта чая, то есть 4-й столбец — это разность 2-го и 3-го столбцов. Каждое число 4-го столбца возводим в квадрат и результат пишем в 5-м столбце. В последней строке указана сумма чисел 5-го столбца.

H_0: между результатами этих исследований нет связи, они не согласованы друг с другом.

H_1: между результатами этих исследований существует некая связь.

$p = 0{,}95$, $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = z_{0.05} = 1{,}645$. Это граничная точка.

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена:

$$r_s = 1 - 6\frac{\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - 6\frac{38}{10(10^2-1)} \approx 0{,}77.$$

Статистика $z = r_s\sqrt{n-1} = 0{,}77\sqrt{10-1} = 2{,}31 > 1{,}645$.

Мы отвергаем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Между результатами исследований существует некая связь.

Задача 41. Два человека дегустируют 10 сортов чая. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений (второй и третий столбцы). Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Сорт чая	Дегустатор 1	Дегустатор 2
А	1	2
Б	7	6
В	5	3
Г	6	7
Д	2	1
Е	3	4
Ж	4	5
З	9	10
И	8	8
К	10	9

Глава 17

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Очень часто исследователя интересует связь между переменными. Это помогает при анализе их поведения. В этой главе будет разработана модель для описания связи между переменными с математической точки зрения. Начнем с наиболее простых для анализа линейных уравнений.

§ 17.1. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Существует или нет линейная связь между двумя переменными x, y? Проводим случайную выборку. При значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы наблюдаем значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно. На плоскости Oxy отметим точки с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Предположим, что точки группируются вокруг некоторой прямой линии $y = a + bx$. Тогда: $b = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2}$, $a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Точки не находятся точно на линии $y = a + bx$. Но это неудивительно. Ведь помимо x на поведение y оказывают влияние и другие факторы. Дальнейший анализ полученного уравнения позволяет сказать, насколько сильно влияние неучтенных факторов, действительно ли модель линейна и т. д. На переменные x, y накладывается ряд условий. Для описания природы связи используется термин «*регрессия*». Коэффициент b называется *показателем наклона линии линейной регрессии.*

Пример 42. Изучается зависимость себестоимости единицы изделия (y, тыс. руб.) от величины выпуска продукции (x, тыс. шт.) по группам предприятий за отчетный период. Экономист обследовал $n = 5$ предприятий и получил следующие результаты (2-й и 3-й столб-

цы). Полагая, что между переменными x, y имеет место линейная зависимость, определим выборочное уравнение линейной регрессии.

Заполним таблицу.

Номер	x	y	x^2	xy
1	2	1,9	4	3,8
2	3	1,7	9	5,1
3	4	1,8	16	7,2
4	5	1,6	25	8
5	6	1,4	36	8,4
Сумма	20	8,4	90	32,5

Поясним, как заполняется таблица. В 4-м столбце указаны квадраты соответствующих чисел 2-го столбца. Каждое число 2-го столбца умножаем на соответствующее число 3-го столбца и результат пишем в 5-м столбце. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} = \frac{5\times 32{,}5 - 20\times 8{,}4}{5\times 90 - 20^2} = -0{,}11.$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{8{,}4 - (-0{,}11)\times 20}{5} = 2{,}12.$$

$$y = a + bx = 2{,}12 + (-0{,}11)x.$$

Задача 42. Фирма провела рекламную кампанию. Через 10 недель фирма решила проанализировать эффективность этого вида рекламы, сопоставив недельные объемы продаж (y, тыс. руб.) с расходами на рекламу (x, тыс. руб.).

Полагая, что между переменными x, y имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии.

x	5	8	6	5	3	9	12	4	3	10
y	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90

Замечание. Вместо вычислений коэффициентов a и b по формулам можно воспользоваться соответственно статистическими функциями ОТРЕЗОК (изв_знач_y; изв_знач_x) и НАКЛОН (изв_знач_y; изв_знач_x) мастера функций f_x пакета Excel. Здесь изв_знач_y и изв_знач_x — это ссылки на ячейки, содержащие значения переменных y и x соответственно.

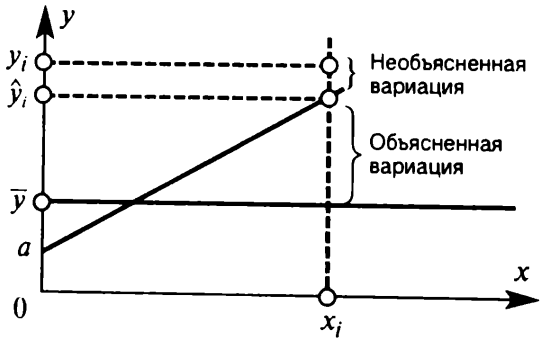
Обозначим через $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ и $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ средние значения переменных y и x соответственно.

§ 17.2. ОШИБКИ

Проводим случайную выборку. При значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы наблюдаем значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно. Получено уравнение $\hat{y} = a + bx$. Если вместо x подставить в это уравнение значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то будут получены значения $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$, которые, вообще говоря, будут отличаться от $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Разница $y_i - \hat{y}_i = e_i$ называется *ошибкой* (остатком, отклонением). Значения коэффициентов a и b в уравнении $y = a + bx$, которые рассчитывались по приведенным в § 17.1 формулам, подбирались так, чтобы минимизировать сумму $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$. Говорят, что они получены *методом наименьших квадратов* (МНК).

§ 17.3. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ПИРСОНА. КОЭФФИЦИЕНТ ДЕТЕРМИНАЦИИ

Мы хотим знать, насколько хорошо приближает наши данные линейная модель. $y_i - \overline{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \overline{y}) = (\hat{y}_i - \overline{y}) + e_i$.



Формула $y = a + bx$ только частично объясняет вариацию значений y (а именно, слагаемое $\hat{y}_i - \overline{y}$). Но ведь на y влияют и другие факторы. Их влияние скрыто в остатке e_i. Если бы связь была строго линейной, то $e_i = 0$. И так для каждой точки x_i.

$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ — это общая вариация переменной y.

$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2$ — это вариация переменной y, которая объясняется формулой $y = a + bx$.

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ — это вариация переменной y, которая не объясняется формулой $y = a + bx$.

Введем характеристику $r^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$ — *коэффициент детерминации*. Эта мера показывает величину вариации переменной y, которая объясняется переменной x при наличии линейной связи этих величин. В случае строгой линейной зависимости между x и y $r^2 = 1$. Если зависимость между x и y отсутствует, то $r^2 = 0$.

Коэффициент детерминации не указывает причины и следствия. Он просто является математическим выражением взаимосвязи между переменными и показывает степень их взаимосвязанных изменений, хотя в экономической теории и можно постулировать причинно-следственную связь между этими переменными.

Коэффициент корреляции Пирсона:

$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)}}. \quad |r| \leqslant 1.$$

Вторая дробь — удобная расчетная формула, которую чаще всего используют.

Коэффициент корреляции Пирсона r содержит информацию о поведении y с ростом x. Знак коэффициента корреляции Пирсона r совпадает со знаком коэффициента b. Чем ближе r к 1, тем ближе связь между x и y к линейной. При $r = 0$ линейной связи между x и y не существует (но, возможно, между x и y есть другая зависимость).

Сильная корреляция между переменными необязательно указывает на причину и следствие. Например, может быть установлена сильная корреляция между зарплатой учителя и продажей спиртных напитков. Отсюда никак нельзя сделать вывод, что учителя пьют. Просто обе эти величины связаны через другую переменную — общий уровень наличного дохода. Это пример *ложной корреляции*.

Пример 43. Найдем остатки e_i, коэффициент корреляции Пирсона и коэффициент детерминации в примере 42.

$y = 2{,}12 - 0{,}11x$. Заполним таблицу.

Номер	x	y	y^2	$\hat{y} = 2{,}12 - 0{,}11x$	$e = y - \hat{y}$
1	2	1,9	3,61	1,90	0,00
2	3	1,7	2,89	1,79	−0,09
3	4	1,8	3,24	1,68	0,12
4	5	1,6	2,56	1,57	0,03
5	6	1,4	1,96	1,46	−0,06
Сумма	20	8,4	14,26		

Поясним, как заполняется таблица. В 4-м столбце указаны квадраты соответствующих чисел 3-го столбца. Каждое число 2-го столбца подставляем в выражение $2{,}12 - 0{,}11x$ и результат пишем в 5-м столбце. В 6-м столбце указана разность чисел 3-го и 5-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} =$$

$$= \frac{5\times 32{,}5 - 20\times 8{,}4}{\sqrt{(5\times 90 - 20^2)(5\times 14{,}26 - 8{,}4^2)}} \approx -0{,}904.$$

Это значение близко к −1, что свидетельствует об очень сильной отрицательной связи (с ростом x значения y убывают). Знаки $b = -0{,}11$ и $r = -0{,}904$ совпадают.

Коэффициент детерминации $r^2 = (-0{,}904)^2 \approx 0{,}817$, то есть 81,7% общей вариации себестоимости y зависит от выпуска продукции x.

Наша модель не объясняет 18,3% вариации себестоимости. Эта часть вариации объясняется факторами, не включенными в модель.

Задача 43. Найти остатки e_i, коэффициент корреляции Пирсона и коэффициент детерминации в задаче 42.

Замечание. Для вычисления коэффициента корреляции Пирсона можно воспользоваться статистическими функциями ПИРСОН (массив 1; массив 2) или КОРРЕЛ (массив 1; массив 2) мастера функций f_x пакета Excel. *Массив 1* и *массив 2* — это ссылки на ячейки, содержащие значения переменных. Для вычисления коэффициента детерминации можно воспользоваться статистической функцией КВПИРСОН (изв_знач_y; изв_знач_x).

§ 17.4. ПРЕДСКАЗАНИЯ И ПРОГНОЗЫ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ

Мы можем воспользоваться построенной моделью для нахождения значения y при известном значении x. Модель строилась по значениям x_1, x_2, ..., x_n. Поэтому поиск значения y для x из интервала (x_1, x_n) называется *предсказанием*, а поиск значения y для x вне интервала (x_1, x_n) называется *прогнозом*. Чем дальше расположен x от интервала (x_1, x_n), тем менее точным будет прогноз.

Пример 44. Найдем ожидаемое значение себестоимости y при выпуске продукции $x = 5{,}5$ тыс. шт.

$y = 2{,}12 - 0{,}11x$.

Тогда $y(5{,}5) = 2{,}12 - 0{,}11 \times 5{,}5 = 1{,}515$ тыс. руб.

Задача 44. Найти ожидаемое значение еженедельного объема продаж y при расходах на рекламу $x = 5{,}5$ тыс. руб. в задаче 42.

Замечание. Для прогноза значений переменной y можно воспользоваться статистической функцией ТЕНДЕНЦИЯ (изв_знач_y; изв_знач_x; нов_знач_x; константа) мастера функций f_x пакета Excel. Нов_знач_x — это ссылка на ячейки, содержащие значения переменной x, для которых ищется прогноз. Если необязательный аргумент *константа* = 0, то коэффициент $a = 0$. По известным значениям переменных x, y функция сама подбирает уравнение прямой линии и дает прогноз. Функцию ТЕНДЕНЦИЯ можно использовать и в случае множественной линейной регрессии. Для парной линейной регрессии можно воспользоваться и статистической функцией ПРЕДСКАЗ (x; изв_знач_y; изв_знач_x), где x — это значение переменной x, для которого ищется прогноз.

§ 17.5. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МОДЕЛИ ПАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

1. Связь между переменными x, y является линейной.
2. Независимая переменная x может быть использована для прогноза y.
3. Остатки (то есть ошибки) нормально распределены.
4. Для всех данных x математическое ожидание ошибки равно нулю и дисперсия ошибки постоянна.
5. Ошибки независимы.

§ 17.6. ИСПЫТАНИЕ ГИПОТЕЗЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНОСТИ СВЯЗИ

Между переменными x, y предполагается наличие линейной связи $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, где ошибка ε — это отклонение значения y от линии $y = \alpha + \beta x$. Мы производим парную выборку значений переменных x, y и методом наименьших квадратов получаем оценки коэффициентов α и β — a и b соответственно. Очевидно, что для другой выборки оценки a и b будут другими. Как, зная оценки a и b, убедиться, что связь между переменными x, y действительно линейная?

§ 17.6.1. Испытание гипотезы для оценки линейности связи на основе оценки коэффициента корреляции в генеральной совокупности

Показатель наличия линейной связи в генеральной совокупности — это коэффициент корреляции. Для генеральной совокупности он равен ρ. Нам это значение неизвестно. По данным выборки мы получаем оценку для ρ — выборочный коэффициент корреляции r — и на основании r проводим испытание гипотезы о наличии линейной связи между переменными x, y в генеральной совокупности. Наш вывод о наличии линейной связи между переменными x, y в генеральной совокупности зависит от объема выборки. Чем больше объем нашей выборки, тем надежнее полученный результат.

H_0: $\rho = 0$, то есть между переменными x, y отсутствует линейная связь в генеральной совокупности.

H_1: $\rho \neq 0$, то есть между переменными x, y есть линейная связь в генеральной совокупности.

Задается доверительная вероятность p. Пусть n — объем парной выборки. Двусторонняя проверка. $\alpha = (1 - p)/2$.

По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-2}$. В Excel для двусторонней проверки $t_{\alpha;n-2}$ = СТЬЮДРАСПОБР $(1 - p; n - 2)$, для односторонней проверки $t_{\alpha;n-2}$ = СТЬЮДРАСПОБР $(2\times(1 - p); n - 2)$.

Граничные точки $\pm t_{\alpha;n-2}$.

Статистика $t = \sqrt{r^2(n-2)/(1-r^2)}$.

Пример 45. Вернемся к примерам 42, 43. Проверим гипотезу о наличии линейной связи между переменными x, y в генеральной совокупности. Доверительная вероятность $p = 95\%$. $n = 5$.

H_0: $\rho = 0$, то есть между переменными x, y отсутствует линейная связь в генеральной совокупности.

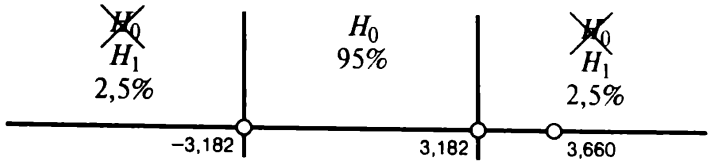
H_1: $\rho \neq 0$, то есть между переменными x, y есть линейная связь в генеральной совокупности.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-2} = t_{0{,}025;5-2} = 3{,}182$. Граничные точки $\pm 3{,}182$.

Статистика $t = \sqrt{r^2(n-2)/(1-r^2)} = \sqrt{0{,}817 \times (5-2)/(1-0{,}817)} \approx$ $\approx 3{,}660$.

Отметим значения на числовой оси.



Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Между переменными x, y есть линейная связь в генеральной совокупности.

Задача 45. В задачах 42, 43 проверить гипотезу о наличии линейной связи между переменными x, y в генеральной совокупности. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 17.6.2. Испытание гипотезы для оценки линейности связи на основе показателя наклона линейной регрессии

В случае парной линейной регрессии функция показателя наклона β аналогична функции коэффициента корреляции. Поэтому нужно ограничиться только одной проверкой.

H_0: $\beta = 0$, то есть между переменными x, y отсутствует линейная связь в генеральной совокупности.

H_1: $\beta \neq 0$, то есть между переменными x, y есть линейная связь в генеральной совокупности.

Задается доверительная вероятность p. n — объем парной выборки. Проведем двустороннюю проверку. В этом случае $\alpha = (1 - p)/2$. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-2}$. Граничные точки $\pm t_{\alpha;n-2}$.

Дисперсия распределения остатков вдоль линии регрессии

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$, S — *стандартная ошибка.*

Стандартная ошибка коэффициента b:

$$S_b = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n}}.$$

Статистика $t = b/S_b$.

Пример 46. Вернемся к примерам 42, 43. Проверим гипотезу о наличии линейной связи между переменными x, y в генеральной совокупности. Доверительная вероятность $p = 95\%$. $n = 5$.

H_0: $\beta = 0$, то есть между переменными x, y отсутствует линейная связь в генеральной совокупности.

H_1: $\beta \neq 0$, то есть между переменными x, y есть линейная связь в генеральной совокупности.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$.

По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-2} = t_{0{,}025;5-2} = 3{,}182$. Граничные точки $\pm 3{,}182$.

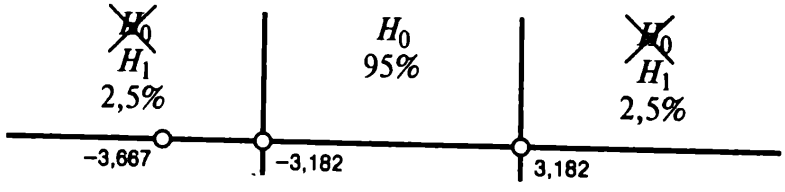
Номер	e_i	e_i^2
1	0	0
2	−0,09	0,0081
3	0,12	0,0144
4	0,03	0,0009
5	−0,06	0,0036
Сумма		0,0270

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-2} = \frac{0{,}027}{5-2} = 0{,}009.\ S \approx 0{,}095.$$

$$S_b = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n}} = \frac{0{,}095}{\sqrt{90 - 20^2/5}} \approx 0{,}03.$$

Статистика $t = b/S_b = -0{,}11/0{,}03 \approx -3{,}667$.

Отметим значения на числовой оси.



Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Между переменными x, y есть линейная связь в генеральной совокупности.

Задача 46. В задачах 42, 43 проверить гипотезу о наличии линейной связи между переменными x, y в генеральной совокупности на основе показателя наклона. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

Замечание. Для расчета стандартной ошибки вместо формулы $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}}$ можно воспользоваться статистической функцией СТОШYX (изв_знач_y; изв_знач_x) мастера функций f_x пакета Excel.

§ 17.7. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ В ЛИНЕЙНОМ РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

Проведя испытания гипотез (§ 17.6), мы пришли к выводу, что связь между переменными x, y линейна и задается неизвестной нам формулой $y = \alpha + \beta x$. Мы производим парную выборку значений переменных x, y и методом наименьших квадратов получаем оценки коэффициентов α и β — a и b соответственно. Получена формула $y = a + bx$, которой мы можем воспользоваться для оценки значений y при заданном значении x.

По полученным точечным оценкам строят доверительные интервалы. Обычно это доверительные интервалы для показателя наклона линии линейной регрессии β, для среднего значения y при заданном значении x и для значений y при заданном значении x.

Задается доверительная вероятность p. n — объем парной выборки. $\alpha = (1 - p)/2$. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha,n-2}$.

§ 17.7.1. Доверительный интервал для показателя наклона линии линейной регрессии

Доверительный интервал имеет следующий вид $b \pm t_{\alpha,n-2}S_b$, где S_b — стандартная ошибка коэффициента b.

Пример 47. Вернемся к примерам 42 и 46. Найдем доверительный интервал для показателя наклона линии линейной регрессии. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

$b \pm t_{\alpha,n-2}S_b = -0{,}11 \pm 3{,}182 \times 0{,}03 \approx -0{,}11 \pm 0{,}10$, то есть $-0{,}21 < \beta < -0{,}01$.

Задача 47. В задачах 42 и 46 найти доверительный интервал для показателя наклона линии линейной регрессии. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 17.7.2. Доверительный интервал для среднего значения переменной y при данном значении переменной x

Обозначим данное значение переменной x через x_0. Доверительный интервал для среднего значения переменной y при x_0 задается формулой: $y = a + bx_0 \pm t_{\alpha;n-2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}}$, где S — стандартная ошибка.

Чем больше величина $|x_0 - \overline{x}|$, тем шире доверительный интервал.

Пример 48. Вернемся к примерам 42 и 46. Найдем доверительный интервал для среднего значения переменной y при заданном значении $x_0 = 5{,}5$ тыс. шт. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n = 20/5 = 4.$$

$$y = a + bx_0 \pm t_{\alpha;n-2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}} =$$

$$= 2{,}12 - 0{,}11 \times 5{,}5 \pm 3{,}182 \times 0{,}095 \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(5{,}5 - 4)^2}{90 - 20^2/5}} \approx 1{,}515 \pm 0{,}197.$$

То есть доверительный интервал для среднего значения y при заданном значении $x_0 = 5{,}5$ тыс. шт. равен (1,318; 1,712).

Задача 48. В задачах 42 и 46 найти доверительный интервал для среднего значения переменной y при заданном значении $x_0 = 5{,}5$ тыс. руб. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

§ 17.7.3. Доверительный интервал для индивидуальных значений переменной y при данном значении переменной x

Доверительный интервал для индивидуальных значений y при заданном значении x_0 равен:

$$y = a + bx_0 \pm t_{\alpha;n-2} S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}}.$$

Пример 49. Вернемся к примеру 48. Найдем доверительный интервал для индивидуальных значений переменной y при заданном значении $x_0 = 5{,}5$ тыс. шт. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

$$y = a + bx_0 \pm t_{\alpha;n-2} S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}} =$$

$$= 2{,}12 - 0{,}11 \times 5{,}5 \pm 3{,}182 \times 0{,}095 \sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{(5{,}5 - 4)^2}{90 - 20^2/5}} \approx 1{,}515 \pm 0{,}361.$$

То есть доверительный интервал для индивидуальных значений переменной y при заданном значении x_0 = 5,5 тыс. шт. равен (1,154; 1,876). Понятно, что доверительный интервал для индивидуальных значений переменной y шире доверительного интервала для среднего значения переменной y (при заданном значении x_0).

Задача 49. В задаче 48 найти доверительный интервал для индивидуальных значений переменной y при заданном значении x_0 = 5,5 тыс. руб. Доверительная вероятность p = 99%.

§ 17.8. РЕГРЕССИЯ И Excel

Обычно зависимую переменную называют *результативным признаком*, а независимую переменную — *фактором*. Очень часто наблюдается случай, когда результативный признак зависит не от одного, а от многих факторов.

Тогда вместо парной линейной регрессии используют множественную линейную регрессию: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m$.

Пусть n — число наблюдений, m — число объясняющих переменных.

Excel позволяет при построении уравнения линейной регрессии большую часть работы сделать очень быстро. Важно понять, как интерпретировать полученные результаты. Воспользуемся надстройкой *Пакет анализа*.

Сервис → *Анализ данных* → *Регрессия* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Входной интервал Y:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения результативного признака y. В графе *Входной интервал X:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения факторов $x_1, \ldots, x_m$ ($m \leqslant 16$). Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку».

Уровень надежности (доверительная вероятность) по умолчанию предполагается равным 95%. Если исследователя это значение не устраивает, то рядом со словами *Уровень надежности* нужно поставить

«галочку» и указать требуемое значение. Поставив «галочку» рядом со словом *константа-ноль*, исследователь получит $b_0 = 0$ по умолчанию.

Если нужны значения остатков e_i и их график, то нужно поставить «галочки» рядом со словами *Остатки* и *График остатков*. Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал, Новый рабочий лист, Новая рабочая книга*). *OK*. Появляется итоговое окно.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	R
R-квадрат	R^2
Нормированный R-квадрат	$\overline{R}^2$
Стандартная ошибка	S
Наблюдения	n

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	m	$\Sigma(\hat{y}_i - \overline{y})^2$	SS/df	Статистика F= = MS(регр)/ MS(ост)	
Остаток	$n-m-1$	$\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$	SS/df		
Итого	$n-1$	Сумма			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние*	*Верхние*
y-пересечение	b_0	S_{b_0}	t_{b_0}					
x_1	b_1	S_{b_1}	t_{b_1}					
x_2	b_2	S_{b_2}	t_{b_2}					

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказанный y*	*Остатки*
Номер	$\hat{y}_i$	e_i

Если число в графе *Значимость F* превышает 1 – *Уровень надежности*, то принимается гипотеза о равенстве нулю коэффициента детерминации.

Если *P-значение* превышает 1 – *Уровень надежности*, то соответствующая переменная статистически незначима и ее можно исключить из модели.

Нижние 95% и *Верхние 95%* — это нижние и верхние границы 95-процентных доверительных интервалов для коэффициентов теоретического уравнения линейной регрессии. Если исследователь согласился с принятым по умолчанию значением доверительной вероятности, то последние два столбца будут дублировать два предыдущих. Если исследователь вводил свое значение доверительной вероятности p, то последние два столбца содержат значения соответственно нижней и верхней границы p-процентных доверительных интервалов.

Если надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ЛИНЕЙН мастера функций f_x пакета Excel. Перед вызовом этой функции нужно выделить диапазон ячеек следующего размера (для парной регрессии это блок размера 5×2).

b_m	b_{m-1}	...	b_1	b_0
S_{b_m}	$S_{b_{m-1}}$	...	S_{b_1}	S_{b_0}
R^2	S			
Статистика F	$n-m-1$			
$\Sigma(\hat{y}_i-\overline{y})^2$	$\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2$			

Тогда после выполнения процедуры в ячейках будут находиться указанные величины. f_x → *статистические* → *ЛИНЕЙН* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. Если исследователю требуется $b_0 = 0$, то в графе *константа* нужно ввести значение 0. В графе *статистика* указывается значение 1. После этого нажимается не *ОК*, а комбинация клавиш *Ctrl* + *Shift* + *Enter**.

---

* Подробнее о применении моделей множественной линейной регрессии и о возникающих при этом проблемах (гетероскедастичность, автокорреляция, фиктивные переменные, нелинейные связи) читатель может узнать из книги: *Просветов Г. И.* Эконометрика: Задачи и решения. 4-е изд. — М.: Издательство РДЛ, 2007.

Глава 18

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗИ

Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными уравнениями регрессии не приведет к положительному результату. Мы ограничимся нелинейными моделями, допускающими сведение к линейным моделям. Это *линейные относительно параметров модели.*

Пример 50. Дана зависимость $y = Ax^{\beta}$, где A и β — константы, подлежащие определению.

Тогда $\ln y = \ln(Ax^{\beta}) = \ln A + \ln x^{\beta} = \ln A + \beta \ln x$. Положим $z = \ln y$, $\beta_0 = \ln A$, $t = \ln x$. Тогда $z = \beta_0 + \beta t$. Это линейное уравнение. Мы можем оценить коэффициенты β_0, β, а затем найти оценку для $A = e^{\beta_0}$.

Пример 51. Дана зависимость $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A, α и β — константы, подлежащие определению.

Тогда $\ln y = \ln(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$. Положим $z = \ln y$, $\beta_0 = \ln A$, $x_1 = \ln K$, $x_2 = \ln L$. Тогда $z = \beta_0 + \alpha x_1 + \beta x_2$. Это линейная модель. Мы можем оценить коэффициенты β_0, α, β, а затем найти оценку для $A = e^{\beta_0}$.

Задача 50. $\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$. Свести к линейной модели.

Задача 51. $y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$. Свести к линейной модели.

Пример 52. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

Положим $x_1 = x$, $x_2 = x^2$. Получилась модель множественной линейной регрессии $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

Задача 52. $y = \beta_0 + \beta_1 \times 1/x$. Свести к линейной модели.

Пример 53. Дана зависимость $y = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t}$, где A, α, β и γ — константы, подлежащие определению.

Тогда $\ln y = \ln(AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t}) = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma t$. Положим $z = \ln y$, $\beta_0 = \ln A$, $x_1 = \ln K$, $x_2 = \ln L$. Тогда $z = \beta_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma t$. Это линейная модель. Мы можем оценить коэффициенты β_0, α, β, γ, а затем найти оценку для $A = e^{\beta_0}$.

Задача 53. $y = \beta_0 e^{\beta x}$. Свести к линейной модели.

Глава 19

МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТЬ

Мультиколлинеарность — это линейная взаимосвязь двух или нескольких объясняющих переменных. Каковы последствия мультиколлинеарности?

1) Большие стандартные ошибки S_{b_i}, что расширяет доверительные интервалы теоретических коэффициентов уравнения линейной регрессии.

2) Уменьшаются статистики $t_{b_i} = b_i/S_{b_i}$, поэтому возможен вывод о статистической незначимости коэффициента β_i.

3) b_i и S_{b_i} становятся очень чувствительными к малейшим изменениям данных.

4) Затрудняется определение вклада каждой из объясняющих переменных в объясняемую уравнением линейной регрессии дисперсию результативного признака.

5) Возможно получение неверного знака у коэффициентов регрессии.

§ 19.1. УСТАНОВЛЕНИЕ МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТИ

Высокий коэффициент детерминации и низкие статистики t_{b_i} некоторых переменных свидетельствуют о наличии мультиколлинеарности. Также о наличии мультиколлинеарности свидетельствуют высокие значения *частных коэффициентов корреляции* (коэффициенты корреляции между двумя переменными, очищенные от влияния других переменных).

Например, при трех факторах x_1, x_2, x_3 частный коэффициент корреляции между x_1 и x_2 равен: $r_{12.3} = \dfrac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$.

Аналогично вычисляются $r_{13.2}$ и $r_{23.1}$.

Пример 54. В модели три фактора x_1, x_2, x_3. Коэффициенты корреляции $r_{12} = 0{,}44$, $r_{13} = -0{,}35$, $r_{23} = 0{,}51$. Найдем частный коэффициент корреляции между x_1 и x_2.

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{0{,}44 - (-0{,}35)\times 0{,}51}{\sqrt{(1 - (-0{,}35)^2)(1 - 0{,}51^2)}} \approx 0{,}768.$$

Задача 54. В модели три фактора x_1, x_2, x_3. Коэффициенты корреляции $r_{12} = 0{,}42$, $r_{13} = -0{,}36$, $r_{23} = 0{,}53$. Найти частный коэффициент корреляции между x_1 и x_2.

Замечание. Excel позволяет вычислить корреляционную матрицу (матрицу из попарных коэффициентов корреляции)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ r_{12} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1m} & \dots & r_{m-1,m} & 1 \end{pmatrix}$$

для любого количества переменных.

Сервис → Анализ данных → Корреляция → ОК. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. Рядом со словом *Группирование* нужно указать, как расположены исходные данные (*по строкам* или *по столбцам*). *ОК.*

§ 19.2. МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТИ

Иногда мультиколлинеарность не является таким уж серьезным «злом», чтобы прилагать существенные усилия по ее выявлению и устранению. Все зависит от целей исследования. Если основная задача модели — прогноз будущих значений результативного признака, то при $R^2 \geqslant 0{,}9$ наличие мультиколлинеарности обычно не сказывается на прогнозных качествах модели.

Единого метода устранения мультиколлинеарности не существует. Простейшим методом устранения мультиколлинеарности является исключение из модели ряда коррелированных переменных. В прикладных моделях лучше не сокращать число факторов до тех пор, пока мультиколлинеарность не станет серьезной проблемой. Иногда для уменьшения мультиколлинеарности достаточно увеличить объем выборки. Но при этом может усилиться автокорреляция. Иногда проблема мультиколлинеарности может быть решена путем изменения спецификации модели.

Глава 20

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

В этой главе мы рассмотрим возможность использования данных за прошлые периоды для прогнозирования.

Множество данных, где время является независимой переменной, называется *временны́м рядом*. Будут рассмотрены аддитивные и мультипликативные модели.

Общее изменение со временем результативного признака называется *трендом*. Мы рассмотрим модели *линейного тренда*, то есть параметры тренда можно рассчитать с помощью модели линейной регрессии.

Сезонная вариация — это повторение данных через небольшой промежуток времени. Под «сезоном» можно понимать и день, и неделю, и месяц, и квартал. Если же промежуток времени будет длительным, то это — *циклическая вариация*. Мы остановимся на изучении данных для небольших интервалов времени, поэтому циклическую вариацию исключим из рассмотрения.

Сначала на основании прошлых данных определяется сезонная вариация. Исключив сезонную вариацию (проведя так называемую *десезонализацию данных*), с помощью модели линейной регрессии находим уравнение тренда. По уравнению тренда и прошлым данным вычисляем величины ошибок. Это среднее абсолютное отклонение $MAD = \sum|e_t|/n$ и среднеквадратическая ошибка $MSE = \sum e_t^2/n$, где e_t — это разность фактического и прогнозного значений в момент времени t, n — число наблюдений.

§ 20.1. АНАЛИЗ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ

Для аддитивной модели фактическое значение A = трендовое значение T + сезонная вариация S + ошибка E.

Пример 55. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дадим на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	4	6	4	5	10	8	7	9	12	14	15

На первом шаге нужно исключить влияние сезонной вариации. Воспользуемся методом скользящей средней. Заполним таблицу.

Номер квартала	Объем продаж	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной вариации
1	4			
2	6			
3	4	4,75	5,5	−1,5
4	5	6,25	6,5	−1,5
5	10	6,75	7,125	2,875
6	8	7,5	8	0
7	7	8,5	8,75	−1,75
8	9	9	9,75	−0,75
9	12	10,5	11,5	0,5
10	14	12,5		
11	15			

1 год = 4 квартала. Поэтому найдем среднее значение объема продаж за 4 последовательных квартала. Для этого нужно сложить 4 последовательных числа из 2-го столбца, эту сумму разделить на 4 (количество слагаемых) и результат записать в 3-й столбец напротив третьего слагаемого.

(4 + 6 + 4 + 5)/4 = 4,75 (пишем напротив 4).

(6 + 4 + 5 + 10)/4 = 6,25 (пишем напротив 5). И т. д.

Полусумму двух соседних чисел из 3-го столбца запишем в 4-й столбец напротив верхнего из них. Если при заполнении 3-го столбца скользящая средняя вычислялась для нечетного числа сезонов, то результат записывается напротив среднего слагаемого и данные не надо центрировать (то есть не надо заполнять 4-й столбец). 5-й столбец — это разность 2-го и 4-го столбцов (2-го и 3-го столбцов, если скользящая средняя вычислялась для нечетного числа сезонов).

Заполним следующую таблицу. Оценки сезонной вариации запишем под соответствующим номером квартала в году. В каждом столбце вычисляем среднее = (сумма чисел в столбце)/(количество чисел в столбце). Результат пишем в строке «Среднее» (округления до одной цифры после запятой). Сумма чисел в строке «Среднее» равна −1.

Скорректируем значения в строке «Среднее», чтобы общая сумма была равна 0. Это необходимо, чтобы усреднить значения сезонной вариации в целом за год. Корректирующий фактор вычисляется следующим образом: сумма оценок сезонных вариаций (−1) делится на

число кварталов в году (4). Поэтому из каждого числа этой строки нужно вычесть $-1/4 = -0{,}25$. Так как у нас округления до одной цифры после запятой, то из нечетных столбцов вычтем $-0{,}3$, а из четных столбцов вычтем $-0{,}2$. В последней строке получены значения сезонной вариации для соответствующего квартала года.

	Номер квартала в году				
	1	2	3	4	
			−1,5	−1,5	
	2,875	0	−1,75	−0,75	
	0,5				Сумма
Среднее	1,7	0,0	−1,6	−1,1	−1
Скорректированная сезонная вариация	2,0	0,2	−1,3	−0,9	0,0

Исключим сезонную вариацию из фактических данных. Проведем десезонализацию данных.

Номер квартала	Объем продаж A	Сезонная вариация S	Десезонализированный объем продаж $A-S=T+E$
1	4	2	2
2	6	0,2	5,8
3	4	−1,3	5,3
4	5	−0,9	5,9
5	10	2	8
6	8	0,2	7,8
7	7	−1,3	8,3
8	9	−0,9	9,9
9	12	2	10
10	14	0,2	13,8
11	15	−1,3	16,3

Из чисел 2-го столбца вычитаем числа 3-го столбца и результат пишем в 4-м столбце.

Уравнение линии тренда $T = a + bx$.

Найдем коэффициенты a и b по данным первого и последнего столбцов.

Номер	x	y	x^2	xy
1	1	2	1	2
2	2	5,8	4	11,6
3	3	5,3	9	15,9
4	4	5,9	16	23,6
5	5	8	25	40

Номер	x	y	x^2	xy
6	6	7,8	36	46,8
7	7	8,3	49	58,1
8	8	9,9	64	79,2
9	9	10	81	90
10	10	13,8	100	138
11	11	16,3	121	179,3
Сумма	66	93,1	506	684,5

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{11\times 684{,}5 - 66\times 93{,}1}{11\times 506 - 66^2} \approx 1{,}1.$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{93{,}1 - 1{,}1\times 66}{11} \approx 1{,}9.$$

Замечание. Вместо вычислений коэффициентов a и b по формулам можно воспользоваться статистическими функциями ОТРЕЗОК (изв_знач_y; изв_знач_x) и НАКЛОН (изв_знач_y; изв_знач_x) мастера функций f_x пакета Excel. Здесь изв_знач_y и изв_знач_x — это ссылки на ячейки, содержащие значения переменных y и x соответственно.

Трендовое значение объема продаж = 1,9 + 1,1×(номер квартала).
Теперь займемся расчетом ошибок.

Номер квартала	Объем продаж A	Десезонализированный объем продаж $A - S = T + E$	Трендовое значение	Ошибка e_t	$\lvert e_t \rvert$	e_t^2
1	4	2	3	−1	1	1
2	6	5,8	4,1	1,7	1,7	2,89
3	4	5,3	5,2	0,1	0,1	0,01
4	5	5,9	6,3	−0,4	0,4	0,16
5	10	8	7,4	0,6	0,6	0,36
6	8	7,8	8,5	−0,7	0,7	0,49
7	7	8,3	9,6	−1,3	1,3	1,69
8	9	9,9	10,7	−0,8	0,8	0,64
9	12	10	11,8	−1,8	1,8	3,24
10	14	13,8	12,9	0,9	0,9	0,81
11	15	16,3	14	2,3	2,3	5,29
				Сумма	11,6	16,58

Из чисел 3-го столбца приводимой выше таблицы вычитаем числа 4-го столбца и результат пишем в 5-м столбце.

Среднее абсолютное отклонение $MAD = \sum|e_t|/n = 11{,}6/11 \approx 1{,}1$, среднеквадратическая ошибка $MSE = \sum e_t^2/n = 16{,}58/11 \approx 1{,}5$. Мы видим, что ошибки достаточно велики. Это скажется на качестве прогноза.

Дадим прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Мы считаем, что тенденция, выявленная по прошлым данным, сохранится и в ближайшем будущем. Подставляем номера кварталов в формулу и учитываем сезонную вариацию.

Прогноз объема продаж в 12-м квартале:

$(1{,}9 + 1{,}1\times 12) + (-0{,}9) = 14{,}2$ тыс. руб.

Прогноз объема продаж в 13-м квартале:

$(1{,}9 + 1{,}1\times 13) + 2 = 18{,}2$ тыс. руб.

Задача 55. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дать на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13	16

§ 20.2. АНАЛИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ МОДЕЛИ

В некоторых временных рядах значение сезонной вариации — это определенная доля трендового значения, то есть сезонная вариация увеличивается с возрастанием значений тренда. В таких случаях используется мультипликативная модель.

Для мультипликативной модели фактическое значение A = трендовое значение $T\times$ сезонная вариация $S\times$ ошибка E.

Пример 56. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дадим на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	63	74	79	120	67	79	88	130	69	82	90

Числа 2-го столбца приведенной далее таблицы делим на числа 4-го столбца и результат (округляем до трех цифр после запятой) запишем в 5-й столбец.

Номер квартала	Объем продаж	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной вариации
1	63			
2	74			
3	79	84	84,5	0,935
4	120	85	85,625	1,401
5	67	86,25	87,375	0,767
6	79	88,5	89,75	0,880
7	88	91	91,25	0,964
8	130	91,5	91,875	1,415
9	69	92,25	92,5	0,746
10	82	92,75		
11	90			

	Номер квартала в году				
	1	2	3	4	
			0,935	1,401	
	0,767	0,880	0,964	1,415	
	0,746				Сумма
Среднее	0,756	0,880	0,950	1,408	3,994
Скорректированная сезонная вариация	0,757	0,881	0,952	1,410	4,000

Значения сезонной вариации — это доли. Число сезонов равно 4. Поэтому необходимо, чтобы сумма средних была равна 4. У нас же получилось 3,994. Следовательно, итоговые коэффициенты сезонности нужно умножить на множитель 4/3,994. В последней строке указаны окончательные коэффициенты сезонности.

Как показывают полученные оценки, в 1-м, 2-м и 3-м кварталах года объем продаж снижается соответственно на 24,3%, 11,9% и 4,8% от соответствующих трендовых значений. В 4-м квартале года объем продаж увеличивается на 41% от соответствующего трендового значения.

Исключим сезонную вариацию из фактических данных. Проведем десезонализацию данных. Числа 2-го столбца таблицы делим на числа 3-го столбца, результат округляем до одной цифры после запятой и пишем в 4-й столбец.

Номер квартала	Объем продаж A	Сезонная вариация S	Десезонализированный объем продаж $A/S = T \times E$
1	63	0,757	83,2
2	74	0,881	84,0
3	79	0,952	83,0

Номер квартала	Объем продаж A	Сезонная вариация S	Десезонализированный объем продаж $A/S = T \times E$
4	120	1,41	85,1
5	67	0,757	88,5
6	79	0,881	89,7
7	88	0,952	92,4
8	130	1,41	92,2
9	69	0,757	91,1
10	82	0,881	93,1
11	90	0,952	94,5

Уравнение линии тренда $T = a + bx$.

Используя результаты § 20.1, найдем коэффициенты a и b по данным первого и последнего столбцов.

Трендовое значение объема продаж = 81,6 + 1,2×(номер квартала).

Теперь займемся расчетом ошибок.

Номер квартала	Объем продаж A	Коэффициент сезонности S	Десезонализированный объем продаж $A/S = T \times E$	Трендовое значение	Ошибка e_t	$\lvert e_t \rvert$	e_t^2
1	63	0,757	83,2	82,8	0,4	0,4	0,16
2	74	0,881	84,0	84	0,0	0,0	0,00
3	79	0,952	83,0	85,2	−2,2	2,2	4,84
4	120	1,41	85,1	86,4	−1,3	1,3	1.69
5	67	0,757	88,5	87,6	0,9	0,9	0,81
6	79	0,881	89,7	88,8	0,9	0,9	0,81
7	88	0,952	92,4	90	2,4	2,4	5,76
8	130	1,41	92,2	91,2	1,0	1,0	1,00
9	69	0,757	91,1	92,4	−1,3	1,3	1,69
10	82	0,881	93,1	93,6	−0,5	0,5	0,25
11	90	0,952	94,5	94,8	−0,3	0,3	0,09
					Сумма	11,2	17,10

Среднее абсолютное отклонение $MAD = \sum|e_t|/n = 11{,}2/11 \approx 1$, среднеквадратическая ошибка $MSE = \sum e_t^2/n = 17{,}1/11 \approx 1{,}6$. Мы видим, что ошибки малы и составляют порядка 1%. Это позволяет получить хорошие краткосрочные прогнозы.

Дадим прогноз объема продаж на следующие два квартала. Мы считаем, что тенденция, выявленная по прошлым данным, сохранится и в ближайшем будущем. Подставляем номера кварталов в формулу и учитываем сезонную вариацию.

Прогноз объема продаж в 12-м квартале:
$(81{,}6 + 1{,}2\times 12)\times 1{,}41 \approx 135{,}4$ тыс. руб.
Прогноз объема продаж в 13-м квартале:
$(81{,}6 + 1{,}2\times 13)\times 0{,}757 \approx 73{,}6$ тыс. руб.

Задача 56. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 11 кварталов. Дать на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	64	75	81	110	66	77	91	120	68	78	92

Замечание. Excel позволяет быстро вычислить оценки методом скользящей средней. *Сервис* → *Анализ данных* → *Скользящее среднее* → *ОК.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал* вводится количество сезонов, для которых вычисляется скользящее среднее (по умолчанию это 3). Если требуется график, на котором будут указаны прогнозные и фактические значения, то нужно поставить «галочку» рядом со словосочетанием *Вывод графика. ОК.* Появляется итоговая таблица, которая содержит исходные данные и оценки, полученные методом скользящей средней. Если оценка находилась как среднее k слагаемых, то в таблице оценок она находится напротив последнего из этих k слагаемых.

Ряд недостатков скользящей средней влияет на применение аддитивной и мультипликативной моделей. До тех пор, пока не пройдет определенной число сезонов, нельзя сделать прогноз. Все данные имеют равный вес. Чувствительность скользящей средней обратно пропорциональна числу слагаемых. Поэтому на практике большей популярностью пользуется экспоненциальное сглаживание.

Глава 21

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

При анализе временных рядов использовался метод скользящей средней, где все данные (и поздние, и ранние) были равноправны. Более правильным представляется способ, в котором данным приписываются веса: более поздним данным придается больший вес, чем более ранним. Этот метод обеспечивает быстрое получение прогноза на один период вперед и автоматически корректирует любой прогноз в свете различий между фактическим и спрогнозированным результатом.

§ 21.1. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Новый прогноз = $\alpha\times$(фактический результат в последний период) + $(1-\alpha)\times$(прогноз в последний период), то есть $F_{t+1} = \alpha A_t + (1-\alpha)F_t$. Константу сглаживания α исследователь выбирает из отрезка [0, 1]. В условиях стабильности часто $\alpha \in [0{,}2;\ 0{,}4]$.

Пример 57. Вернемся к примеру 55. Пусть $\alpha = 0{,}8$. Тогда $1 - \alpha = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Предположим, что на первый квартал был дан прогноз 3. Дадим прогноз на 12-й квартал.

Заполним таблицу.

A_t (фактически)	F_t (прогноз)
4	3
6	3,8
4	5,6
5	4,3
10	4,9
8	9

A_t (фактически)	F_t (прогноз)
7	8,2
9	7,2
12	8,6
14	11,3
15	13,5
	14,7

$F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t = 0{,}8A_t + 0{,}2F_t$, то есть числа в каждой строке умножаем соответственно на 0,8 и 0,2 и результат пишем в следующей строке во втором столбце.

$0{,}8 \times 4 + 0{,}2 \times 3 = 3{,}8$.

$0{,}8 \times 6 + 0{,}2 \times 3{,}8 \approx 5{,}6$. И т. д.

Результат округляем до одной цифры после запятой.

Прогноз на 12-й квартал — 14,7 тыс. руб.

Задача 57. В задаче 55 дать прогноз объема продаж на 12-й квартал методом простого экспоненциального сглаживания. $\alpha = 0{,}8$. $F_1 = 3$.

Замечание. Excel позволяет быстро провести простое экспоненциальное сглаживание. *Сервис → Анализ данных → Экспоненциальное сглаживание → OK.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Фактор затухания* указать значение $1 - \alpha$ (по умолчанию 0,3). *OK.*

§ 21.2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ С ПОПРАВКОЙ НА ТРЕНД

Даем прогноз методом простого экспоненциального сглаживания, а затем корректируем его с учетом тренда по следующей формуле:

прогноз с учетом тренда FIT_t = прогноз F_t + тренд T_t.

Тренд $T_t = (1 - b)T_{t-1} + b(F_t - F_{t-1})$, где T_t и T_{t-1} — сглаженный тренд в периоды t и $t - 1$ соответственно, b — выбранная константа сглаживания.

Начальное значение тренда может быть получено на основе предположения.

Пример 58. В примере 57 дадим прогноз объема продаж на 12-й квартал методом экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. Возьмем $b = 0{,}4$, $T_1 = 0$.

Заполним таблицу.

Из каждого числа 1-го столбца вычитаем предыдущее число 1-го столбца и результат запишем во 2-й столбец.

Каждое число 3-го столбца есть сумма числа, умноженного на $1 - b = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, из предыдущей строки 3-го столбца и числа, умноженного на $b = 0{,}4$, из этой же строки 2-го столбца. Результат округляем до одной цифры после запятой.

F_t	$F_t - F_{t-1}$	T_t	$FIT_t = F_t + T_t$
3	—	0	3
3,8	0,8	0,3	4,1
5,6	1,8	0,9	6,5
4,3	−1,3	0,0	4,3
4,9	0,6	0,3	5,2
9	4,1	1,8	10,8
8,2	−0,8	0,8	9,0
7,2	−1	0,1	7,3
8,6	1,4	0,6	9,2
11,3	2,7	1,4	12,7
13,5	2,2	1,7	15,2
14,7	1,2	1,5	16,2

Прогноз на 12-й квартал — 16,2 тыс. руб.

Задача 58. В задаче 57 дать прогноз объема продаж на 12-й квартал методом экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. $b = 0{,}4$, $T_1 = 0$.

Глава 22

КОНТРОЛИРУЕМЫЙ ПРОГНОЗ

Один из способов обеспечения точности прогнозов — использование *трекинг-сигнала*, который вычисляется по следующей формуле:

$$\text{трекинг-сигнал} = RSFE/MAD,$$

где $RSFE = \sum_{t=1}^{n} e_t$ — *итоговая сумма ошибок*, $MAD = \sum_{t=1}^{n} |e_t|/n$ — среднее абсолютное отклонение, e_t — разность фактического и прогнозного значений в момент времени t, n — число наблюдений.

При положительном (отрицательном) трекинг-сигнале фактические значения больше (меньше) прогнозных значений. У хорошего трекинг-сигнала итоговая сумма ошибок *RSFE* мала, то есть для него положительные ошибки приблизительно равны отрицательным ошибкам.

Вычисленные трекинг-сигналы следует сравнить с заранее определенными *верхней* и *нижней границами контроля*. Если трекинг-сигнал выходит за границы контроля, то метод прогнозирования требует корректировки (например, изменения константы сглаживания в модели экспоненциального сглаживания).

Границы контроля выбирает сам исследователь. Обычно это или ±4 (*жесткий контроль*), или ±8 (*слабый контроль*).

Если трекинг-сигнал не выходит за границы контроля, то можно предположить, что прогноз адекватен.

Пример 59. В примере 57 определим трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны ±4. Нужно ли менять константу сглаживания? Заполним таблицу.

Квартал	A_t	F_t	e_t	*RSFE*	$\lvert e_t \rvert$	Суммарная ошибка	*MAD*	Трекинг-сигнал
1	4	3	1	1	1	1	1	1
2	6	3,8	2,2	3,2	2,2	3,2	1,6	2
3	4	5,6	−1,6	1,6	1,6	4,8	1,6	1
4	5	4,3	0,7	2,3	0,7	5,5	1,38	1,67
5	10	4,9	5,1	7,4	5,1	10,6	2,12	3,49
6	8	9	−1	6,4	1	11,6	1,93	3,32

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых трех столбцов взяты из примера 57. 4-й столбец — это разность 2-го и 3-го столбцов. 6-й столбец — это абсолютные величины чисел 4-го столбца. Для получения чисел данной строки 5-го (7-го) столбца прибавляем к числу предыдущей строки 5-го (7-го) столбца число данной строки 4-го (6-го) столбца. Каждое число 7-го (5-го) столбца делим на соответствующее число 1-го (8-го) столбца, результат округляем до двух цифр после запятой и пишем в 8-м (9-м) столбце.

Так как все трекинг-сигналы (числа в последнем столбце) принадлежат интервалу (– 4; 4), то константу сглаживания менять не нужно.

Задача 59. В задаче 57 определить трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны ±4. Нужно ли менять константу сглаживания?

Основной недостаток применения трекинг-сигнала — это использование совокупных ошибок. Большие положительные и отрицательные значения ошибок компенсируют друг друга. Поэтому использование трекинг-сигнала для контроля ошибок может привести к заблуждениям. Но из-за простоты расчетов трекинг-сигналы применяются достаточно часто.

Глава 23

КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ

Кластерный анализ позволяет из n объектов, характеризуемых k признаками, сформировать разбивку на однородные группы (*кластеры*). Однородность объектов определяется по расстоянию $\rho(x_i, x_j)$, где $x_i = (x_{i1}, ..., x_{ik})$ и $x_j = (x_{j1}, ..., x_{jk})$ — векторы, составленные из значений k признаков i-го и j-го объектов соответственно.

Для объектов, характеризуемых числовыми признаками, расстояние определяется по следующей формуле: $\rho(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} (x_{im} - x_{jm})^2}$.

Объекты считаются *однородными*, если $\rho(x_i, x_j) < \rho_{\text{предельного}}$.

Графическое изображение объединения может быть получено с помощью дерева объединения кластеров — *дендрограммы*.

Пример 60. Пять производственных объектов характеризуются двумя признаками: объемом продаж и среднегодовой стоимостью основных производственных фондов.

Объект	1	2	3	4	5
Объем продаж	1	3	6	13	12
Среднегодовая стоимость основных производственных фондов	9	10	8	5	7

Проведем классификацию этих объектов с помощью *принципа «ближайшего соседа»*. Найдем расстояния между объектами по формуле $\rho(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} (x_{im} - x_{jm})^2}$. Заполним таблицу.

Объекты	1	2	3	4	5
1	0	2,24	5,10	12,65	11,18
2		0	3,61	11,18	9,49
3			0	7,62	6,08
4				0	2,24
5					0

Поясним, как заполняется таблица.

На пересечении строки «*i*» и столбца «*j*» указано расстояние $\rho(x_i, x_j)$ (результат округляем до двух цифр после запятой). Например, на пересечении строки «1» и столбца «3» указано расстояние $\rho(x_1, x_3) = \sqrt{(1-6)^2 + (9-8)^2} \approx 5{,}10$, а на пересечении строки «3» и столбца «5» указано расстояние $\rho(x_3, x_5) = \sqrt{(6-12)^2 + (8-7)^2} \approx 6{,}08$.

Так как $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_j, x_i)$, то нижнюю часть таблицы можно не заполнять.

Применим *принцип «ближайшего соседа»*. Находим в таблице наименьшее из расстояний (если таких несколько, то выберем любое из них). Это $\rho_{1,2} = \rho_{4,5} = 2{,}24$.

Пусть $\rho_{min} = \rho_{4,5} = 2{,}24$. Тогда мы можем объединить в одну группу объекты 4 и 5, то есть в объединенном столбце «4 и 5» будет наименьшее из соответствующих чисел столбцов «4» и «5» первоначальной таблицы расстояний. Аналогично поступаем и со строками «4» и «5».

Получим новую таблицу.

Объекты	1	2	3	4 и 5
1	0	2,24	5,10	11,18
2		0	3,61	9,49
3			0	6,08
4 и 5				0

Находим в полученной таблице наименьшее из расстояний (если таких несколько, то выберем любое из них): $\rho_{min} = \rho_{1,2} = 2{,}24$. Тогда мы можем объединить в одну группу объекты 1 и 2, то есть в объединенном столбце «1 и 2» будет наименьшее из соответствующих чисел столбцов «1» и «2» предыдущей таблицы расстояний. Аналогично поступаем и со строками «1» и «2».

Получим новую таблицу.

Объекты	1 и 2	3	4 и 5
1 и 2	0	3,61	9,49
3		0	6,08
4 и 5			0

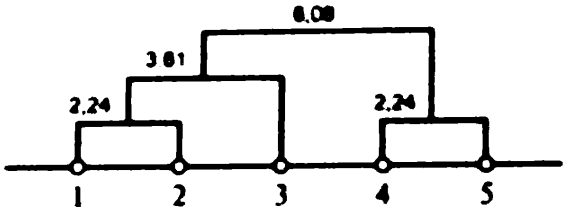
Находим в полученной таблице наименьшее из расстояний (если таких несколько, то выберем любое из них): $\rho_{min} = \rho_{1,2;3} = 3{,}61$. Тогда мы можем объединить в одну группу объекты 1, 2, 3, то есть в объединенном столбце «1, 2, 3» будет наименьшее из соответствующих чисел столбцов «1 и 2» и «3» предыдущей таблицы расстояний. Аналогично поступаем и со строками «1 и 2» и «3».

Получим новую таблицу.

Объекты	1, 2, 3	4, 5
1, 2, 3	0	6,08
4, 5		0

Мы получили два кластера: (1, 2, 3) и (4, 5).

На дендрограмме указаны порядок выбора элементов и соответствующие минимальные расстояния ρ_{min}.



Задача 60. Пять производственных объектов характеризуются двумя признаками: объемом продаж и среднегодовой стоимостью основных производственных фондов.

Объект	1	2	3	4	5
Объем продаж	2	5	7	12	13
Среднегодовая стоимость основных производственных фондов	7	9	10	8	5

Провести классификацию этих объектов с помощью принципа «ближайшего соседа».

Замечание. Можно было проводить классификацию объектов с помощью *принципа «дальнего соседа»*.

Глава 24

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ дает общую схему проверки статистических гипотез, основанную на тщательном изучении различных источников вариации (изменчивости, неоднородности) в сложной ситуации. Он позволяет оценить влияние одного или нескольких факторов на результирующий признак.

Предположения, лежащие в основе дисперсионного анализа, довольно жесткие и подчеркивают тот факт, что данный метод следует использовать только для таких зависимых переменных, которые были тщательно изучены и точно измерены. До тех пор, пока объемы выборок приблизительно равны, дисперсионный анализ может мириться с некоторым нарушением допущений модели. Но в ситуации выборок, сильно отличающихся по объему, следует воспользоваться другими методами (например, критерием хи-квадрат).

§ 24.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

На практике часто встречается ситуация, когда можно указать один фактор, влияющий на конечный результат, и этот фактор принимает конечное число значений. Такая ситуация может быть проанализирована при помощи *однофакторного дисперсионного анализа.*

Данные для однофакторного дисперсионного анализа — это k независимых выборок из k генеральных совокупностей. Однофакторный дисперсионный анализ сравнивает два источника вариации: между выборками (*межгрупповая вариация*) и внутри каждой выборки (*внутригрупповая вариация*). Каждая генеральная совокупность подчиняется нормальному распределению, причем все стандартные отклонения одинаковы.

Гипотеза H_0 утверждает, что все средние равны между собой. Альтернативная гипотеза H_1 говорит о том, что не все средние равны между собой (есть хотя бы две неравные средние).

Фактор A имеет k уровней. На каждом уровне проводится выборка объемом n_j ($j = 1, 2, ..., k$). Тогда общее число наблюдений равно $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Пусть x_{ij} ($i = 1, 2, ..., n_j$) — результаты j-й выборки. Отсюда $S = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n$, $S_A = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n_j - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n$, $S_0 = S - S_A$.

Статистика $F = \dfrac{S_A/(k-1)}{S_0/(n-k)}$. Доверительная вероятность p, $\alpha = 1 - p$.

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha;k-1;n-k}$. Если $F > F_{\alpha;k-1;n-k}$, то мы отклоняем гипотезу H_0 на уровне значимости α.

Пример 61. Предприятие решает вопрос о том, какую из трех систем контроля качества выбрать. Все три системы были тестированы. Результаты тестов были отражены в таблице.

Номер системы	Число выявленных бракованных изделий в партии продукции
1	1, 2, 3, 0, 2, 1
2	2, 3, 1, 0, 1
3	2, 2, 3, 2

Проверим гипотезу об отсутствии влияния различий между системами на результаты тестирования систем. Доверительная вероятность равна 95%. Предполагается, что выборки получены из независимых нормальных генеральных совокупностей с одной и той же генеральной дисперсией.

$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

H_0: различия между системами не влияют на результаты тестирования систем.

H_1: различия между системами влияют на результаты тестирования систем.

Заполним таблицу.

Номер системы	Число изделий x_{ij}	Сумма	n_j
1	1, 2, 3, 0, 2, 1	9	6
2	2, 3, 1, 0, 1	7	5
3	2, 2, 3, 2	9	4
Сумма	–	25	15

Поясним, как заполняется таблица. Сумму элементов в каждой строке 2-го столбца пишем в соответствующей строке 3-го столбца, а число элементов в каждой строке 2-го столбца — в соответствующей

строке 4-го столбца. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Тогда $S = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n = 1^2 + 2^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 - 25^2/15 \approx$ $\approx 13{,}33.$

$S_A = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n_j - (\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2/n = 9^2/6 + 7^2/5 + 9^2/4 - 25^2/15 \approx 1{,}88.$

$S_0 = S - S_A = 13{,}33 - 1{,}88 = 11{,}45.$

Статистика $F = \dfrac{S_A/(k-1)}{S_0/(n-k)} = \dfrac{1{,}88/(3-1)}{11{,}45/(15-3)} \approx 0{,}99.$

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha;k-1;n-k} = F_{0{,}05;3-1;15-3} = 3{,}89 > 0{,}99 = F.$

Мы принимаем гипотезу на уровне значимости 5%. Различия между системами контроля не влияют на результаты тестирования систем.

Задача 61. Предприятие решает вопрос о том, какую из трех систем контроля качества выбирать. Все три системы были тестированы. Результаты тестов были отражены в таблице.

Номер системы	Число выявленных бракованных изделий в партии продукции
1	2, 1, 0, 3, 3, 1
2	3, 3, 2, 2, 1
3	2, 2, 2, 3

Проверить гипотезу об отсутствии влияния различий между системами на результаты тестирования систем. Доверительная вероятность равна 99%. Предполагается, что выборки получены из независимых нормальных генеральных совокупностей с одной и той же генеральной дисперсией.

Замечание. Excel позволяет провести однофакторный дисперсионный анализ. Воспользуемся надстройкой *Пакет анализа.*

Сервис → Анализ данных → Однофакторный дисперсионный анализ → OK. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Входной интервал* указывается ссылка на ячейки, содержащие исходные данные. В графе *Группирование* нужно указать, как сгруппированы данные (*по строкам, по столбцам*). Если первые из ячеек содержат пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». *Альфа* (уровень значимости) по умолчанию предполагается равным 0,05. Если исследователя это значение не устраивает, то рядом со словами *Альфа* нужно указать требуемое значение. Также указываются параметры вывода (*Выходной*

интервал, *Новый рабочий лист*, *Новая рабочая книга*). *ОК*. Откроется итоговое окно.

В первой таблице для каждой выборки будут указаны ее объем (*Счет*), сумма элементов (*Сумма*), выборочное среднее (*Среднее*) и выборочная дисперсия (*Дисперсия*). Вторая таблица имеет следующий вид.

Источник вариации	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-значение*	*F критическое*
Между группами	S_A	$k-1$	$\dfrac{S_A}{k-1}$	$\dfrac{S_A/(k-1)}{S_0/(n-k)}$		$F_{\alpha;k-1;n-k}$
Внутри групп	S_0	$n-k$	$\dfrac{S_0}{n-k}$			
Итого	S	$n-1$				

Если *P-значение* меньше *Альфа* (то есть $F > F$ *критическое*), то гипотеза H_0 отвергается.

§ 24.2. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим влияние двух факторов A и B на конечный результат. Здесь дисперсионный анализ основывается на результатах эксперимента, проводимого на различных уровнях каждого из факторов. Все предположения § 24.1 остаются в силе.

Считаем, что взаимосвязь факторов отсутствует. Для простоты ограничимся случаем, когда для каждой пары уровней рассматриваемых факторов проводится по одному наблюдению (*двухфакторный дисперсионный анализ без повторений*).

Пусть n_A — число уровней фактора A, n_B — число уровней фактора B. Тогда общее число наблюдений для всех возможных пар уровней факторов A и B равно $n = n_A n_B$.

Гипотеза H_0^A утверждает, что фактор A не влияет на конечный результат.

Гипотеза H_0^B утверждает, что фактор B не влияет на конечный результат.

Пусть x_{ij} — результат наблюдения при i-м уровне фактора A и j-м уровне фактора B.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{x} = \frac{1}{n_A n_B}\sum_{i=1}^{n_A}\sum_{j=1}^{n_B} x_{ij},\ \overline{x}_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij}/n_B,\ \overline{x}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n_A} x_{ij}/n_A,$$

$$S_A = n_B\sum_{i=1}^{n_A}(\overline{x}_{i\bullet} - \overline{x})^2,\ S_B = n_A\sum_{j=1}^{n_B}(\overline{x}_{\bullet j} - \overline{x})^2,$$

$$S = \sum_{i=1}^{n_A}\sum_{j=1}^{n_B}(x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n_A}\sum_{j=1}^{n_B}x_{ij}^2 - n_A n_B(\overline{x})^2,\ S_0 = S - S_A - S_B.$$

Статистика $F_A = S_A(n_B - 1)/S_0$. Статистика $F_B = S_B(n_A - 1)/S_0$.

Доверительная вероятность p, $\alpha = 1 - p$. По таблице F-распределения находим граничные точки $F_{\alpha;n_A-1;(n_A-1)(n_B-1)}$ (для H_0^A) и $F_{\alpha;n_B-1;(n_A-1)(n_B-1)}$ (для H_0^B).

Если $F_A > F_{\alpha;n_A-1;(n_A-1)(n_B-1)}$, то мы отклоняем гипотезу H_0^A на уровне значимости α.

Если $F_B > F_{\alpha;n_B-1;(n_A-1)(n_B-1)}$, то мы отклоняем гипотезу H_0^B на уровне значимости α.

Пример 62. Таблица содержит результаты наблюдений за влиянием факторов A и B на конечный результат.

Уровни фактора A	Уровни фактора B			
	1	2	3	4
1	3	7	6	8
2	4	2	5	7
3	6	3	4	3

Оказывает ли влияние фактор A на конечный результат? Оказывает ли влияние фактор B на конечный результат? Доверительная вероятность равна 95%.

Заполним таблицу.

Уровни фактора A	Уровни фактора B				Сумма	$\overline{x}_{i\bullet}$
	1	2	3	4		
1	3	7	6	8	24	6
2	4	2	5	7	18	4,5
3	6	3	4	3	16	4
Сумма	13	12	15	18	58	
$\overline{x}_{\bullet j}$	4,33	4	5	6		

Поясним, как заполняется таблица.

В предпоследней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. В предпоследнем столбце указана сумма чисел соответствующей строки.

Разделив эти суммы на число слагаемых и округлив результаты до двух цифр после запятой, мы получим последние строку и столбец.

Здесь число уровней фактора A равно $n_A = 3$, а число уровней фактора B равно $n_B = 4$.

$$\overline{x} = \frac{1}{n_A n_B} \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij} = 58/(3\times 4) \approx 4{,}83.$$

$$S_A = n_B \sum_{i=1}^{n_A} (\overline{x}_{i\bullet} - \overline{x})^2 = 4((6-4{,}83)^2 + (4{,}5-4{,}83)^2 + (4-4{,}83)^2) \approx 8{,}67.$$

$$S_B = n_A \sum_{j=1}^{n_B} (\overline{x}_{\bullet j} - \overline{x})^2 = 3((4{,}33-4{,}83)^2 + (4-4{,}83)^2 + (5-4{,}83)^2 + (6-4{,}83)^2) \approx 7{,}01.$$

$$S = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij}^2 - n_A n_B (\overline{x})^2 = 3^2 + 7^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 3\times 4\times 4{,}83^2 \approx 42{,}05.$$

$S_0 = S - S_A - S_B = 42{,}05 - 8{,}67 - 7{,}01 = 26{,}37.$

H_0^A: фактор A не влияет на конечный результат.

H_1^A: фактор A влияет на конечный результат.

H_0^B утверждает, что фактор B не влияет на конечный результат.

H_1^B утверждает, что фактор B влияет на конечный результат.

Доверительная вероятность $p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Статистика $F_A = S_A(n_B - 1)/S_0 = 8{,}67(4-1)/26{,}37 \approx 0{,}99$.

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha;n_A-1;(n_A-1)(n_B-1)} = F_{0{,}05;3-1;(3-1)(4-1)} = 5{,}14 > F_A = 0{,}99$.

Мы принимаем гипотезу H_0^A на уровне значимости 5%, то есть фактор A не влияет на конечный результат.

Статистика $F_B = S_B(n_A - 1)/S_0 = 7{,}01(3-1)/26{,}37 \approx 0{,}53$.

По таблице F-распределения находим граничную точку $F_{\alpha;n_B-1;(n_A-1)(n_B-1)} = F_{0{,}05;4-1;(3-1)(4-1)} = 4{,}76 > F_B = 0{,}53$.

Мы принимаем гипотезу H_0^B на уровне значимости 5%, то есть фактор B не влияет на конечный результат.

Задача 62. Таблица содержит результаты наблюдений за влиянием факторов A и B на конечный результат.

Уровни фактора A	Уровни фактора B			
	1	2	3	4
1	2	6	5	7
2	5	3	6	8
3	6	2	2	3

Оказывает ли влияние фактор A на конечный результат? Оказывает ли влияние фактор B на конечный результат? Доверительная вероятность равна 99%.

Замечание. Excel позволяет провести двухфакторный дисперсионный анализ без повторений. Воспользуемся надстройкой *Пакет анализа.*

Сервис → *Анализ данных* → *Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений* → *OK*. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK*. Откроется итоговое окно.

Если для соответствующего источника вариации (строки или столбцы) *P-значение* меньше *Альфа* (то есть $F > F$ *критическое*), то соответствующая гипотеза H_0 отвергается.

Excel позволяет также провести двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями. *Сервис* → *Анализ данных* → *Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями* → *OK*. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Число строк для выборки* нужно указать число повторений. *OK*. Откроется итоговое окно.

Глава 25

МЕРЫ СВЯЗИ

Меры связи дают информацию о тесноте и направлении причинно-следственных связей между переменными. Даже при наличии сильной статистической связи между переменными не обязательно следует вывод о том, что одна из этих переменных является причиной изменения другой переменной.

Необходимо отметить, что для возможного предсказания наличие причинно-следственной связи не является обязательным. Если между переменными существует статистическая зависимость, то предсказывать одну переменную на основе другой можно и при отсутствии между ними причинно-следственной связи.

Как правило, о существовании связи между переменными говорит изменение значений одной переменной при изменении значений другой переменной. Если связь существует, то насколько она сильна? Каков характер и направление связи?

При *положительной связи* переменные изменяются в одном направлении, то есть при увеличении (уменьшении) значений одной переменной значения другой переменной также увеличиваются (уменьшаются).

При *отрицательной связи* переменные изменяются в разных направлениях, то есть при увеличении (уменьшении) значений одной переменной значения другой переменной уменьшаются (увеличиваются).

§ 25.1. КОЭФФИЦИЕНТ ФЕХНЕРА

Коэффициент Фехнера (*коэффициент корреляции знаков*) — это наиболее простой показатель для измерения тесноты зависимости между двумя переменными. Он основан на сравнении знаков отклонений индивидуальных значений каждого признака от своей средней величины.

Коэффициент Фехнера K_Φ вычисляется по следующей формуле: $K_\Phi = (a - b)/(a + b)$, где a — число совпадений знаков, b — число несовпадений знаков.

Коэффициент Фехнера может принимать значения от -1 до 1. Так как он зависит только от знаков и не учитывает величину самих отклонений от средних значений, то коэффициент Фехнера характеризует не столько тесноту связи, сколько ее наличие и направление.

Пример 63. Определим коэффициент Фехнера для переменных, значения которых указаны в таблице.

x_i	1	2	6	4	5
y_i	6	7	4	5	2

Средние значения переменных x и y равны соответственно $\overline{x} = (1 + 2 + 6 + 4 + 5)/5 = 3{,}6$ и $\overline{y} = (6 + 7 + 4 + 5 + 2)/5 = 4{,}8$.

Определим отклонения значений переменных от средних величин. Заполним таблицу.

$x_i - \overline{x} = x_i - 3{,}6$	$-2{,}6$	$-1{,}6$	2,4	0,4	1,4
$y_i - \overline{y} = y_i - 4{,}8$	1,2	2,2	$-0{,}8$	0,2	$-2{,}8$

Поясним, как заполняется таблица. Из каждого числа предыдущей таблицы вычитаем соответствующее среднее значение.

Число совпадений знаков $a = 1$ (в 5-м столбце), число несовпадений знаков $b = 4$ (в остальных столбцах).

Тогда коэффициент Фехнера равен $K_\Phi = (a - b)/(a + b) = (1 - 4)/(1 + 4) = -0{,}6 < 0$. Связь между переменными является отрицательной.

Задача 63. Определить коэффициент Фехнера для переменных, значения которых указаны в таблице.

x_i	2	3	1	5	4
y_i	8	9	4	6	5

Более совершенным показателем тесноты связи является коэффициент корреляции Пирсона, рассмотренный в главе 17.

§ 25.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ АССОЦИАЦИИ И КОНТИНГЕНЦИИ

Особое место занимает изучение взаимосвязи между переменными, каждая из которых принимает только два значения.

В этом случае таблица сопряженности имеет следующий вид:

a	b
c	d

Коэффициент ассоциации:

$$k_a = (ad - bc)/(ad + bc).$$

Коэффициент контингенции:

$$k_{кон} = (ad - bc)/\sqrt{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}.$$

Коэффициент контингенции всегда меньше коэффициента ассоциации и дает более корректную оценку тесноты связи.

Пример 64. Определим связь между способом подготовки к зачету и результатом зачета с помощью коэффициентов ассоциации и контингенции.

Способ подготовки	Зачет	Незачет
По лекциям	40	10
По учебникам	30	20

Здесь $a = 40$, $b = 10$, $c = 30$, $d = 20$.

Коэффициент ассоциации $k_a = (ad - bc)/(ad + bc) = (40\times20 - 10\times20)/(40\times20 + 10\times20) \approx 0{,}45$. Коэффициент контингенции $k_{кон} = (ad - bc)/\sqrt{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} =$

$= (40\times20 - 10\times20)/\sqrt{(40 + 10)(30 + 20)(40 + 30)(10 + 20)} \approx 0{,}22 > 0$.

Слабая положительная связь.

Задача 64. Определить связь между способом подготовки к зачету и результатом зачета с помощью коэффициентов ассоциации и контингенции.

Способ подготовки	Зачет	Незачет
По лекциям	45	5
По учебникам	35	15

§ 25.3. МЕРЫ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ ХИ-КВАДРАТ

После того, как с помощью критерия хи-квадрат установлена связь между переменными, нужно оценить силу этой связи. Здесь на

помощь приходят коэффициент Крамера, коэффициент взаимной сопряженности Пирсона и коэффициент взаимной сопряженности Чупрова.

Коэффициент Крамера V вычисляется по следующей формуле: $V=\sqrt{\frac{\chi^2}{n\times\min(r-1,c-1)}}$, где χ^2 — значение полученной статистики хи-квадрат, n — общее число наблюдений, r и c — соответственно число строк и столбцов в таблице сопряженности.

Пример 65. Определим коэффициент Крамера в примере 40.

Здесь $n = 225$, $r = 4$, $c = 4$, $\chi^2 = 24{,}4$.

Тогда $\min(r-1, c-1) = \min(4-1, 4-1) = 3$. Поэтому коэффициент Крамера равен $V=\sqrt{\frac{\chi^2}{n\times\min(r-1,c-1)}}=\sqrt{\frac{24{,}4}{225\times3}}\approx 0{,}19$.

Задача 65. Определить коэффициент Крамера в задаче 40.

Коэффициент Крамера может принимать значения между 0 и 1. Из-за простоты расчета этот показатель используется довольно часто. Но он показывает только относительную силу связи (например, при $V = 0{,}75$ связь более сильная, чем при $V = 0{,}45$).

Коэффициент взаимной сопряженности Пирсона C вычисляется по следующей формуле: $C=\sqrt{\chi^2/(\chi^2+n)}$.

Пример 66. Определим коэффициент взаимной сопряженности Пирсона в примере 40.

Коэффициент взаимной сопряженности Пирсона равен $C = \sqrt{\chi^2/(\chi^2+n)} = \sqrt{24{,}4/(24{,}4+225)} \approx 0{,}31$.

Задача 66. Определить коэффициент взаимной сопряженности Пирсона в задаче 40.

Коэффициент взаимной сопряженности Чупрова $K_ч$ вычисляется по следующей формуле: $K_ч=\sqrt{\frac{\chi^2}{n(r-1)(c-1)}}$.

Пример 67. Определим коэффициент взаимной сопряженности Чупрова в примере 40.

Коэффициент взаимной сопряженности Чупрова равен

$$K_{\text{ч}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(r-1)(c-1)}} = \sqrt{\frac{24{,}4}{225\times 3\times 3}} \approx 0{,}11.$$

Задача 67. Определить коэффициент взаимной сопряженности Чупрова в задаче 40.

Коэффициент взаимной сопряженности Чупрова всегда меньше коэффициента взаимной сопряженности Пирсона.

Глава 26

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В EXCEL

Пакет Excel позволяет анализировать временные ряды. Изобразим с помощью *Мастера диаграмм* временной ряд (*Вставка* → *Мастер диаграмм* или щелчок мышкой по кнопке *Мастер диаграмм*, далее следовать указаниям). Выделим диаграмму щелчком левой кнопки мыши. С помощью правой кнопки мыши откроем контекстное меню и выберем команду *Добавить линию тренда*.

На вкладке *Тип* выберем одну из следующих линий тренда: *линейная*, *логарифмическая*, *полиномиальная* (степень от 2 до 6), *степенная*, *экспоненциальная*, *линейная фильтрация* (то есть скользящая средняя, возможное число точек от 2 до 5).

После этого заполним вкладку *Параметры*. Есть возможность получить прогнозные значения. Поставив «галочку» рядом со словами *показывать уравнение на диаграмме*, получим аналитическое выражение выбранного уравнения тренда. Если исследователя интересует значение коэффициента детерминации, то нужно поставить «галочку» рядом со словами *поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации* (R^2). *OK*.

Глава 27

АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Для анализа и прогнозирования внутригодичных колебаний используют модель сезонных колебаний Фурье:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Гармоника k определяет степень точности модели. Исследователь выбирает k среди возможных значений 1, 2, 3, 4.

Параметры a_0, a_k, b_k определяются методом наименьших квадратов: $a_0 = \sum_{t=1}^{n} y_t/n$, $a_k = 2/n\sum_{t=1}^{n} y_t \cos kt$, $b_k = 2/n\sum_{t=1}^{n} y_t \sin kt$.

При анализе внутригодовой динамики полагают $n = 12$, а сами месячные периоды рассматривают как части окружности.

Пример 68. По данным таблицы построим модель сезонных колебаний, используя ряд Фурье при $k = 1$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	10,2	10,5	11	11,2	11,3	11,8	11,9	12,3	11,6	11,1	10,9	10,4

Заполним таблицу.

Месяц	t	y_t	$\cos kt$	$\sin kt$	$y_t \cos kt$	$y_t \sin kt$
1	0	10,2	1	0	10,2	0
2	π/6	10,5	0,866	0,5	9,093	5,25
3	π/3	11	0,5	0,866	5,5	9,526
4	π/2	11,2	0	1	0	11,2
5	2π/3	11,3	−0,5	0,866	−5,65	9,786
6	5π/6	11,8	−0,866	0,5	−10,219	5,9
7	π	11,9	−1	0	−11,9	0
8	7π/6	12,3	−0,866	−0,5	−10,652	−6,15
9	4π/3	11,6	−0,5	−0,866	−5,8	−10,046
10	3π/2	11,1	0	−1	0	−11,1
11	5π/3	10,9	0,5	−0,866	5,45	−9,439
12	11π/6	10,4	0,866	−0,5	9,006	−5,2
Сумма	—	134,2	—	—	−4,972	−0,273

Поясним, как заполняется таблица.

Значения 3-го столбца взяты из условия. В 4-м и 5-м столбцах указаны косинусы и синусы чисел 2-го столбца. 6-й (7-й) столбец равен произведению 3-го и 4-го (5-го) столбцов. Результаты округляем до трех цифр после запятой. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Параметр $a_0 = \sum_{t=1}^{n} y_t/n = 134{,}2/12 \approx 11{,}18$.

Параметр $a_k = 2/n \sum_{t=1}^{n} y_t \cos kt = 2/12 \times (-4{,}972) \approx -0{,}83$.

Параметр $b_k = 2/n \sum_{t=1}^{n} y_t \sin kt = 2/12 \times (-0{,}273) \approx -0{,}05$.

Тогда модель сезонных колебаний имеет следующий вид: $\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 11{,}18 - 0{,}83\cos t - 0{,}05\sin t$.

Задача 68. По данным таблицы построить модель сезонных колебаний, используя ряд Фурье при $k = 1$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	10,4	10,7	10,8	11,4	11,1	11,6	11,7	12,5	11,8	11,3	10,7	10,6

Замечание. Excel позволяет анализировать периодические данные с помощью быстрого преобразования Фурье. Предполагается, что число наблюдений равно 2^{2n} (n — любое натуральное число в диапазоне от 1 до 6). Если число наблюдений отлично от 2^{2n}, то рекомендуется добавить нули вместо недостающих данных.

Сервис → Анализ данных → Анализ Фурье → OK. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *OK.*

Глава 28

ИНДЕКСЫ

§ 28.1. ИНДЕКСЫ РОСТА И ПРИРОСТА

Индекс (темп) роста — это отношение показателя в настоящий момент времени к величине этого показателя в прошедший момент времени, выраженное в процентах. *Индекс (темп) прироста* — это отношение разности показателей в настоящий и прошедший моменты времени к величине этого показателя в прошедший момент времени, выраженное в процентах.

Индекс прироста = индекс роста – 100%. Поэтому все сказанное в дальнейшем об индексах роста верно и для индексов прироста.

Пример 69. Цена товара составила в феврале 50 рублей, а в мае — 60 рублей. Найдем индексы роста и прироста.

Индекс роста = $60/50 \times 100\% = 120\%$, то есть цена повысилась в 1,2 раза.

Индекс прироста = $(60 - 50)/50 \times 100\% = 20\%$, то есть цена повысилась на 20%.

Задача 69. Цена товара составила в феврале 75 рублей, а в мае — 90 рублей. Найти индексы роста и прироста.

§ 28.2. БАЗИСНЫЕ И ЦЕПНЫЕ ИНДЕКСЫ

При расчете *базисного индекса роста* данные за некоторый момент времени принимаются за базисные. Тогда базисный индекс роста равен отношению показателя в каждый момент времени и показателя в базисный момент времени.

Цепной индекс роста — это отношение показателя в последующий момент времени к величине показателя в предшествующий момент времени.

Пример 70. Цена товара составила в феврале 50 рублей, в марте — 70 рублей, в апреле — 80 рублей, в мае — 95 рублей. Выберем февраль за базовый месяц.

Тогда I (март, февраль) = 70/50 × 100% = 140%, то есть цена товара в марте по отношению к цене февраля повысилась на 40%.

I (апрель, февраль) = 80/50 × 100% = 160%, то есть цена товара в апреле по отношению к цене февраля повысилась на 60%.

I (май, февраль) = 95/50 × 100% = 190%, то есть цена товара в мае по отношению к цене февраля повысилась на 90%.

Определим цепные индексы.

I (апрель, март) = 80/70 × 100% ≈ 114%.

I (май, апрель) = 95/80 × 100% = 118,75%.

Задача 70. Цена товара составила в феврале 40 рублей, в марте — 60 рублей, в апреле — 70 рублей, в мае — 100 рублей. Определить базисные и цепные индексы (март — базовый месяц).

§ 28.3. ПЕРЕХОД ОТ ОДНИХ ИНДЕКСОВ К ДРУГИМ

Перемножив последовательно цепные индексы, мы получим базисный индекс. Цепной индекс в момент времени t равен умноженному на 100% отношению базисного индекса в момент времени t к базисному индексу в предшествующий момент времени.

Пример 71. В примере 70 цепной индекс I (апрель, март) = I (апрель, февраль) / I (март, февраль) × 100% = 1,6/1,4 × 100% ≈ 114%.

Базисный индекс I (май, февраль) = I (март, февраль) × I (апрель, март) × I (май, апрель) × 100% = 1,4 × 1,14 × 1,1875 × 100% ≈ 190%.

Задача 71. В задаче 70 выразить базисный индекс I (май, март) через цепные индексы и цепной индекс I (май, апрель) через базисные индексы.

§ 28.4. СРЕДНИЙ ИНДЕКС РОСТА ДЛЯ СГРУППИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Индекс группы $I = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i I_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$, где x_i — значение i-го элемента в момент времени t, I_i — индекс роста i-го элемента группы в долях, n — число элементов в группе.

Пример 72. Известны данные по объему продаж товаров *А*, *Б*, *В*, *Г* в 2006 году и рост (в %) объема продаж в 2007 году. Определим средний индекс роста.

Товар	Объем продаж в 2006 году	Рост (в %) за год	Объем продаж в 2007 году
А	50	20	$50 + 0{,}2 \times 50 = 60$
Б	60	10	$60 + 0{,}1 \times 60 = 66$
В	70	30	$70 + 0{,}3 \times 70 = 91$
Г	40	50	$40 + 0{,}5 \times 40 = 60$
Сумма	220	—	277

Средний индекс роста равен $I = 277/220 \times 100\% \approx 126\%$.

Задача 72. Известны данные по объему продаж товаров *А*, *Б*, *В*, *Г* в 2006 году и рост (в %) объема продаж в 2007 году. Определить средний индекс роста.

Товар	Объем продаж в 2006 году	Рост (в %) за год
А	45	10
Б	30	15
В	50	30
Г	20	20

Глава 29

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

В экономическом анализе индексы используются для определения экономической значимости причин, объясняющих абсолютное различие сравниваемых уровней. Для удобства возле каждого символа справа ставятся подстрочные знаки: 0 — для базисного уровня, 1 — для отчетного уровня.

По степени охвата единиц совокупности индексы делятся на два класса: индивидуальные и общие.

Индивидуальные индексы характеризуют изменение только одного элемента и служат для характеристики изменения отдельных элементов сложного явления (например, как изменилась цена лезвий «Шпага» в отчетном периоде по сравнению с базисным периодом).

Общие индексы характеризуют изменение индексируемого показателя в целом по сложной совокупности, отдельные элементы которой несоизмеримы в физических единицах (например, индекс цен на продовольственные товары). Общие индексы могут быть построены как агрегатные или как средние из индивидуальных индексов.

§ 29.1. АГРЕГАТНЫЕ ИНДЕКСЫ

При построении *агрегатных индексов* с помощью определенных соизмерителей выражают итоговые величины в отчетном и базисном периодах, а затем первая из этих величин сопоставляется со второй.

§ 29.1.1. Агрегатные индексы физического объема

Агрегатный индекс физического объема Пааше определяется по следующей формуле: $I_q^{\Pi} = \sum q_1 p_1 / \sum q_0 p_1$, где p — цена, q — выпуск продукции.

Агрегатный индекс физического объема Ласпейреса определяется по следующей формуле: $I_q^Л = \sum q_1 p_0 / \sum q_0 p_0$.

Разность между числителем и знаменателем показывает изменение стоимости продукции (в абсолютном выражении) за счет изменения объема продукции.

Пример 73. На основании приведенных данных определим агрегатные индексы физического объема Ласпейреса и Пааше.

Год	Товар X		Товар Y	
	Объем продукции	Цена	Объем продукции	Цена
2004	15	4	16	7
2005	20	5	18	9

Агрегатный индекс физического объема Ласпейреса равен $I_q^Л = \sum q_1 p_0 / \sum q_0 p_0 = (20 \times 4 + 18 \times 7)/(15 \times 4 + 16 \times 7) \approx 1{,}198$, то есть выпуск продукции в 2005 году увеличился на 19,8%.

Агрегатный индекс физического объема Пааше равен $I_q^П = \sum q_1 p_1 / \sum q_0 p_1 = (20 \times 5 + 18 \times 9)/(15 \times 5 + 16 \times 9) \approx 1{,}196$, то есть выпуск продукции в 2005 году увеличился на 19,6%.

Оба индекса ($I_q^Л = 1{,}198$ и $I_q^П = 1{,}196$) отражают одну и ту же тенденцию – увеличение физического объема выпуска продукции предприятия в 2005 году.

Задача 73. На основании приведенных данных определить агрегатные индексы физического объема Ласпейреса и Пааше.

Год	Товар X		Товар Y	
	Объем продукции	Цена	Объем продукции	Цена
2004	20	5	18	8
2005	24	7	21	10

Агрегатный индекс физического объема показывает, во сколько раз изменился физический объем продукции в отчетном периоде по сравнению с базисным периодом.

На практике вычисляют ряд индексов за последовательные периоды времени. При этом необходимо использовать какой-то один выбранный вариант (индекс Ласпейреса или Пааше), иначе сравнение значений индекса за различные периоды времени потеряет всякий смысл.

§ 29.1.2. Агрегатные индексы цен

Агрегатный индекс цен Пааше определяется по следующей формуле: $I_p^{П} = \sum p_1 q_1 / \sum p_0 q_1$, где p — цена, q — выпуск продукции.

Агрегатный индекс цен Ласпейреса определяется по следующей формуле: $I_p^{Л} = \sum p_1 q_0 / \sum p_0 q_0$.

Индекс потребительских цен рассчитывается по методике Ласпейреса.

Пример 74. Определим агрегатные индексы цен Ласпейреса и Пааше в примере 73.

Агрегатный индекс цен Пааше равен $I_p^{П} = \sum p_1 q_1 / \sum p_0 q_1 = (5\times20 + 9\times18)/(4\times20 + 7\times18) \approx 1{,}272$, то есть цены в 2005 году увеличились на 27,2%.

Агрегатный индекс цен Ласпейреса равен $I_p^{Л} = \sum p_1 q_0 / \sum p_0 q_0 = (5\times15 + 9\times16)/(4\times15 + 7\times16) \approx 1{,}273$, то есть цены в 2005 году увеличились на 27,3%.

Задача 74. Определить агрегатные индексы цен Ласпейреса и Пааше в задаче 73.

§ 29.2. СРЕДНИЕ ИНДЕКСЫ

Общие индексы могут быть вычислены и как средние из индивидуальных индексов в форме среднего арифметического или среднего гармонического индексов. Мы ограничимся рассмотрением средних индексов цен.

§ 29.2.1. Средние арифметические индексы цен

Средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, определяется по следующей формуле: $I_{ap}^{Л} = \sum i_p q_0 p_0 / \sum q_0 p_0$, где $i_p = p_1/p_0$ — индивидуальные индексы цен.

Пример 75. На основании приведенных данных определим средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса.

Товар	Выпуск в 2004 г.	Цена в 2004 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	15	4	5
Y	16	7	6

Средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, равен $I_{ap}^{Л} = \sum i_p q_0 p_0 / \sum q_0 p_0 = (1{,}05 \times 15 \times 4 + 1{,}06 \times 16 \times 7)/(15 \times 4 + 16 \times 7) \approx 1{,}057$.

Задача 75. На основании приведенных данных определить средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса.

Товар	Выпуск в 2004 г.	Цена в 2004 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	20	5	6
Y	18	8	8

Средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше, определяется по следующей формуле: $I_{ap}^{П} = \sum i_p q_1 p_0 / \sum q_1 p_0$.

Пример 76. На основании приведенных данных определим средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше.

Товар	Выпуск в 2005 г.	Цена в 2004 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	20	4	5
Y	18	7	6

Средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше, равен $I_{ap}^{П} = \sum i_p q_1 p_0 / \sum q_1 p_0 = (1{,}05 \times 20 \times 4 + 1{,}06 \times 18 \times 7)/(20 \times 4 + 18 \times 7) \approx 1{,}056$.

Задача 76. На основании приведенных данных определить средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше.

Товар	Выпуск в 2005 г.	Цена в 2004 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	24	5	6
Y	21	8	8

§ 29.2.2. Средние гармонические индексы цен

Средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, определяется по следующей формуле: $I_{гарм}^{Л} = \sum q_0 p_1 / \sum \frac{q_0 p_1}{i_p}$, где $i_p = p_1/p_0$ — индивидуальные индексы цен.

Пример 77. На основании приведенных данных определим средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса.

Товар	Выпуск в 2004 г.	Цена в 2005 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	15	5	5
Y	16	9	6

Средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, равен $I^{Л}_{гарм} = \sum q_0 p_1 / \sum \frac{q_0 p_1}{i_p} = (15\times5 + 16\times9)/(15\times5/1{,}05 + 16\times9/1{,}06) \approx 1{,}057$.

Задача 77. На основании приведенных данных определить средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса.

Товар	Выпуск в 2004 г.	Цена в 2005 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	20	7	6
Y	18	10	8

Средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше, определяется по следующей формуле: $I^{П}_{гарм} = \sum q_1 p_1 / \sum \frac{q_1 p_1}{i_p}$, где $i_p = p_1/p_0$ — индивидуальные индексы цен.

Пример 78. На основании приведенных данных определим средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше.

Товар	Выпуск в 2005 г.	Цена в 2005 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	20	5	5
Y	18	9	6

Средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше, равен $I^{П}_{гарм} = \sum q_1 p_1 / \sum \frac{q_1 p_1}{i_p} = (20\times5 + 18\times9)/(20\times5/1{,}05 + 18\times9/1{,}06) \approx 1{,}056$.

Задача 78. На основании приведенных данных определить средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше.

Товар	Выпуск в 2005 г.	Цена в 2005 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	24	7	6
Y	21	10	8

§ 29.2.3. Индекс цен Фишера

Общий индекс цен может быть построен и как средняя геометрическая из агрегатных индексов цен Ласпейреса и Пааше: $I_p = \sqrt{I_p^Л I_p^П} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \sum p_0 q_1}}$. Это *индекс цен Фишера.*

Пример 79. Определим индекс цен Фишера в примере 74.

$I_p = \sqrt{I_p^Л I_p^П} = \sqrt{1{,}273 \times 1{,}272} \approx 1{,}272.$

Задача 79. Определить индекс цен Фишера в задаче 74.

§ 29.3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СРЕДНИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Индекс переменного состава — это отношение средних уровней определенного показателя за два периода. Так, *индекс цен переменного состава* равен $I_{пс}^p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} / \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}$.

Индекс фиксированного состава характеризует среднее изменение усредняемого показателя при постоянстве структуры совокупности. Так, *индекс цен фиксированного состава* равен $I_{фс}^p = \sum p_1 q_1 / \sum p_0 q_1$.

Индекс структуры (или *индекс структурных сдвигов*) $I_{стр}$ показывает, в какой степени изменение средней величины индексируемого показателя произошло за счет изменения структуры (состава) совокупности. Этот индекс равен частному индексов переменного состава и фиксированного состава: $I_{стр} = I_{пс} / I_{фс}$.

Например, *индекс ценовых структурных сдвигов* равен $I_{стр}^p = I_{пс}^p / I_{фс}^p = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} / \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}$.

Пример 80. Определим индекс цен переменного состава, индекс цен фиксированного состава и индекс ценовых структурных сдвигов в примере 73.

Индекс цен переменного состава равен $I_{пс}^p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} / \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} =$

$= \frac{5 \times 20 + 9 \times 18}{20 + 18} / \frac{4 \times 15 + 7 \times 16}{15 + 16} \approx 1{,}243.$

Индекс цен фиксированного состава $I^p_{фс} = \sum p_1q_1/\sum p_0q_1 = (5\times20 + 9\times18)/(4\times20 + 7\times18) \approx 1{,}272$.

Тогда индекс ценовых структурных сдвигов $I^p_{стр} = I^p_{пс}/I^p_{фс} = 1{,}243/1{,}272 \approx 0{,}977$.

Задача 80. Определить индекс цен переменного состава, индекс цен фиксированного состава и индекс ценовых структурных сдвигов в задаче 73.

§ 29.4. ИНДЕКСНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ФАКТОРОВ ДИНАМИКИ

Многие статистические показатели находятся между собой в определенной связи. Индексы этих показателей находятся в точно такой же зависимости, как и сами показатели.

Например, индексы физического объема I_q и цен I_p являются факторными по отношению к *индексу стоимости продукции* I_{pq}: $I_{pq} = I_pI_q$, то есть $\sum p_1q_1/\sum p_0q_0 = (\sum p_1q_1/\sum p_0q_1)(\sum q_1p_0/\sum q_0p_0)$.

Эти индексы образуют индексную систему из трех индексов.

Пример 81. Определим индекс стоимости продукции в примерах 73, 74.

Индекс стоимости продукции $I_{pq} = (\sum p_1q_1/\sum p_0q_1)(\sum q_1p_0/\sum q_0p_0) = 1{,}272\times1{,}198 \approx 1{,}524$, то есть при росте физического объема на 19,8% и роста цен на 27,2% товарооборот в фактических ценах в отчетном периоде вырос по сравнению с базисным периодом на 52,4%.

Задача 81. Определить индекс стоимости продукции в задачах 73, 74.

Пример 82. Индекс переменного состава, индекс фиксированного состава и индекс структурных сдвигов — это пример взаимосвязанных индексов.

Задача 82. Привести пример взаимосвязанных индексов.

Индексная система позволяет определить влияние отдельных факторов на формирование уровня результативного показателя.

Например, при факторных признаках a, b, c система взаимосвязанных индексов имеет следующий вид:

$$I_{abc} = \frac{\sum a_1b_1c_1}{\sum a_0b_0c_0} = \frac{\sum a_1b_0c_0}{\sum a_0b_0c_0} \times \frac{\sum a_1b_1c_0}{\sum a_1b_0c_0} \times \frac{\sum a_1b_1c_1}{\sum a_1b_1c_0}.$$

§ 29.5. ТЕРРИТОРИАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ

В основе построения территориальных индексов лежат парные сравнения региональной экономики.

Территориальный индекс — это относительная величина сравнения двух одноименных показателей, относящихся к разным территориям.

Рассмотрим возможные варианты построения территориального индекса цен для двух регионов.

В качестве фиксированного показателя можно взять объем продукции региона А, который сравнивается с регионом Б: $I_p = \sum p_A q_A / \sum p_Б q_A$.

Также за фиксированный показатель может быть принят объем продукции $q_Б$ региона Б: $I_p = \sum p_A q_Б / \sum p_Б q_Б$.

Возможен вариант, когда в качестве весов используют суммарный объем продукции $q_{А+Б}$ регионов А и Б: $I_p = \sum p_A q_{А+Б} / \sum p_Б q_{А+Б}$.

Пример 83. Построим территориальные индексы цен по следующим данным.

Продукция	Регион А		Регион Б	
	Объем продукции	Цена	Объем продукции	Цена
X	15	4	16	7
Y	20	5	18	9

Если в качестве фиксированного показателя взять объем продукции региона А, то территориальный индекс цен равен $I_p = \sum p_A q_A / \sum p_Б q_A =$ $= (4\times15 + 5\times20)/(7\times15 + 9\times20) \approx 0{,}561$, то есть уровень цен в регионе А ниже на 43,9%, чем в регионе Б.

Если в качестве фиксированного показателя взять объем продукции региона Б, то территориальный индекс цен равен $I_p = \sum p_A q_Б / \sum p_Б q_Б =$ $= (4\times16 + 5\times18)/(7\times16 + 9\times18) \approx 0{,}562$, то есть уровень цен в регионе А ниже на 43,8%, чем в регионе Б.

Если в качестве фиксированного показателя взять объем продукции регионов А и Б, то территориальный индекс цен равен $I_p =$ $= \sum p_A q_{А+Б} / \sum p_Б q_{А+Б} = (4\times(15 + 16) + 5\times(20 + 18))/(7\times(15 + 16) +$ $+ 9\times(20 + 18)) \approx 0{,}562$, то есть уровень цен в регионе А ниже на 43,8%, чем в регионе Б.

Мы видим, что при различных фиксированных показателях ответы различаются.

Задача 83. Построить территориальные индексы цен по следующим данным.

Продукция	Регион А		Регион Б	
	Объем продукции	Цена	Объем продукции	Цена
X	20	5	18	8
Y	24	7	21	10

Конечно, рассмотренные примеры построения территориальных индексов не исчерпывают всех проблем, возникающих при территориальных сопоставлениях различных показателей. Знание конкретного объекта исследования и опыт статистической работы помогают в решении этих проблем.

Глава 30

λ-КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА-СМИРНОВА

λ-критерий Колмогорова-Смирнова применяется для проверки гипотезы о распределении непрерывной случайной величины. При его использовании сравниваются эмпирическая $F_э(x)$ и предполагаемая $F(x)$ функции распределения.

Алгоритм проведения проверки:

1. Производится выборка объемом $n \geqslant 50$.

2. Находим эмпирическую функцию распределения $F_э(x)$ (см. главу 7).

3. По данным выборки x_i для предполагаемой функции распределения $F(x)$ определим $F(x_i)$.

4. Вычислим значение статистики: $\lambda = \max\limits_{x_i} |F(x_i) - F_э(x_i)|\sqrt{n}$.

5. По уровню значимости α из специальной таблицы находим граничную точку λ_α.

α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

6. Если $\lambda < \lambda_\alpha$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны. Если $\lambda > \lambda_\alpha$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны.

Пример 84. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены в следующей таблице.

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	10	11	8	9	12	10	13	15	12

Определим с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

H_0: различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны, то есть нет никаких предпочтений.

H_1: различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны, то есть предпочтения имеются.

Функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [0, 10], имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ x/10, 0 < x \leqslant 10, \\ 1, x > 10. \end{cases}$$

Заполним таблицу.

x_i	n_i	n_i/n	$F_э(x_i)$	$F(x_i) = 0{,}1x_i$	$\lvert F(x_i) - F_э(x_i)\rvert$
1	10	0,10	0,10	0,1	0
2	11	0,11	0,21	0,2	0,01
3	8	0,08	0,29	0,3	0,01
4	9	0,09	0,38	0,4	0,02
5	12	0,12	0,50	0,5	0
6	10	0,10	0,60	0,6	0
7	13	0,13	0,73	0,7	0,03
8	15	0,15	0,88	0,8	0,08
9	12	0,12	1,00	0,9	0,1
Сумма	$n = 100$	—	—	—	—

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых двух столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел 2-го столбца. Каждое число 2-го столбца делим на $n = 100$ и результат пишем в 3-м столбце. Каждое число 4-го столбца равно сумме числа из этой же строки 3-го столбца и предыдущего числа 4-го столбца. Каждое число 1-го столбца подставляем в формулу $F(x_i) = 0{,}1x_i$ и результат пишем в 5-м столбце. 6-й столбец — это модуль разности 4-го и 5-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце:

$$\max_{x_i} |F(x_i) - F_э(x_i)| = 0{,}1.$$

Тогда статистика $\lambda = \max\limits_{x_i} |F(x_i) - F_э(x_i)|\sqrt{n} = 0{,}1\sqrt{100} = 1$.

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ из специальной таблицы находим граничную точку $\lambda_\alpha = 1{,}358$.

Так как $\lambda < \lambda_\alpha$ $(1 < 1{,}358)$, то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Данные выборки согласуются с равномерным распределением на отрезке [0, 10], то есть нет никаких предпочтений.

Задача 84. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены в следующей таблице.

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	13	15	12	11	8	9	12	10	10

Определить с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

Если имеются две случайные выборки объемами n_1 и n_2 ($n_1 \geqslant 50$, $n_2 \geqslant 50$), то с помощью λ-критерия Колмогорова-Смирнова можно проверить гипотезу H_0: две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности с предполагаемой функцией распределения $F(x)$. В этом случае статистика $\lambda = \max\limits_{x_i} |F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)| \sqrt{n}$, где $n = n_1 n_2/(n_1 + n_2)$, $F_{1э}(x_i)$ и $F_{2э}(x_i)$ — эмпирические функции распределения, построенные по данным соответственно первой и второй выборок.

Пример 85. В двух выборках был задан вопрос о том, сколько порций мороженого респонденты съедают в неделю. Результаты опросов приведены в таблице.

Число порций	Частота (выборка 1)	Частота (выборка 2)
0–10	2	4
10–20	11	13
20–30	14	7
30–40	18	23
40–50	13	11
50–60	6	9
60–70	23	18
70–80	14	8
80–90	6	6

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверим гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же целевой популяции любителей мороженого (то есть число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения).

H_0: число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения.

Заполним таблицу.

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых трех столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Каждое число 2-го (3-го) столбца делим на $n_1 = 107$ ($n_2 = 99$), результат округляем до трех цифр после запятой и пишем в 4-м (6-м) столбце. Каждое число 5-го (7-го) столбца равно сумме числа из этой же строки 4-го (6-го) столбца и предыдущего чис-

x_i	n_{1i}	n_{2i}	n_{1i}/n_1	$F_{1э}(x_i)$	n_{2i}/n_2	$F_{2э}(x_i)$	$\lvert F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)\rvert$
0–10	2	4	0,019	0,019	0,040	0,040	0,021
10–20	11	13	0,103	0,122	0,131	0,171	0,049
20–30	14	7	0,131	0,253	0,071	0,242	0,011
30–40	18	23	0,168	0,421	0,232	0,474	0,053
40–50	13	11	0,121	0,542	0,111	0,585	0,043
50–60	6	9	0,056	0,598	0,091	0,676	0,078
60–70	23	18	0,215	0,813	0,182	0,858	0,045
70–80	14	8	0,131	0,944	0,081	0,939	0,005
80–90	6	6	0,056	1,000	0,061	1,000	0
Сумма	$n_1 = 107$	$n_2 = 99$	—	—	—	—	—

ла 5-го (7-го) столбца. 8-й столбец – это модуль разности 5-го и 7-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце:
$\max\limits_{x_i} |F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)| = 0{,}078$.

Так как $n = n_1 n_2/(n_1 + n_2) = 107 \times 99/(107 + 99) \approx 51{,}422$, то статистика $\lambda = \max\limits_{x_i} |F_{1э}(x_i) - F_{2э}(x_i)| \sqrt{n} = 0{,}078\sqrt{51{,}422} \approx 0{,}559$.

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ из специальной таблицы находим граничную точку $\lambda_\alpha = 1{,}358$.

Так как $\lambda < \lambda_\alpha$ (0,559 < 1,358), то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Число съеденных порций мороженого определяется одной и той же функцией распределения.

Задача 85. В двух выборках был задан вопрос о том, сколько порций мороженого респонденты съедают в неделю. Результаты опросов приведены в таблице.

Число порций	Частота (выборка 1)	Частота (выборка 2)
0–10	3	5
10–20	12	14
20–30	13	6
30–40	19	24
40–50	12	10
50–60	5	10
60–70	22	16
70–80	15	11
80–90	7	7

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же целевой популяции любителей мороженого (то есть число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения).

Ответы

1. Градусы: 86,4; 151,2; 72; 50,4.

2.

Интервал	Середина интервала	n_i	w_i	w_i/Δ	Накопленная частота
0–5	2,5	11	0,11	0,022	0,11
5–10	7,5	21	0,21	0,042	0,32
10–15	12,5	34	0,34	0,068	0,66
15–20	17,5	18	0,18	0,036	0,84
20–25	22,5	8	0,08	0,016	0,92
25–30	27,5	8	0,08	0,016	1

3. 13,25; 46,19; 44,11. **4.** 5. **5.** 12. **6.** 12,2. **7.** 10. **8.** 7,5. **9.** 12,6. **10.** 7,7. **11.** 5,3. **12.** 10%. **13.** 4,17. **14.** 3. **15.** 9,2. **16.** 1,2. **17.** 65,2%. **18.** 26,1%. **19.** 51,3%. **20.** −0,26. **21.** −1,70. **22.** (77,78; 80,22). **23.** 239. **24.** (77,5; 80,5). **25.** 240. **26.** (0,09; 0,15). **27.** 77860. **28.** (122,04; 157,96). **29.** Автомат нужно отрегулировать. **30.** Станок настроен правильно. **31.** Выборка не противоречит утверждению производителя. **32.** Выборка не противоречит утверждению производителя. **33.** Риски инвестиций равны. **34.** Автоматы фасуют чай в пачки разного среднего веса. **35.** По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали. **36.** По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали. **37.** Побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин. **38.** Износоустойчивость шин одинакова. **39.** Автомат настроен правильно. **40.** Есть связь между оценками. **41.** Между результатами исследований есть связь. **42.** $y = 58{,}42 + 2{,}43x$. **43.** 0,884; 0,781.

e_i	1,35	−1,95	4,92	−0,65	2,22	−0,38	−5,68	−3,22	−3,78	7,18

44. 71,79 тыс. руб. **45.** Между переменными x, y есть линейная связь. **46.** Между переменными x, y есть линейная связь. **47.** (0,90; 3,96). **48.** (67,04; 76,54). **49.** (56,79; 86,79). **50.** $z = \beta_0 + \beta_1 x$, $z = \ln y$. **51.** $y = \beta_0 + \beta_1 z$, $z = \ln x$. **52.** $y = \beta_0 + \beta_1 z$, $z = 1/x$. **53.** $z = A + \beta x$, $z = \ln y$, $\beta_0 = e^A$. **54.** 0,772. **55.** 14,3 тыс. руб. и 17,7 тыс. руб. **56.** 123 тыс. руб. и 71,6 тыс. руб. **57.** 15,3 тыс. руб. **58.** 17,2 тыс. руб. **59.** Константу сгла-

живания нужно изменить. **60.** (1, 2, 3) и (4, 5). **61.** Не влияют. **62.** Не влияют. **63.** –0,2. **64.** 0,59 и 0,25. **65.** 0,12. **66.** 0,21. **67.** 0,01. **68.** $\hat{y}_t = 11{,}22 - 0{,}73\cos t - 0{,}14\sin t$. **69.** 120% и 20%. **70.** Базисные индексы: 67%, 100%, 117%, 167%. Цепные индексы: 150%, 117%, 143%. **71.** I (май, март) = I (май, апрель) × I (апрель, март). I (май, апрель) = = I (май, март)/I (апрель, март). **72.** 119%. **73.** 18,0% и 18,1%. **74.** 31,2% и 31,1%. **75.** 1,072. **76.** 1,072. **77.** 1,071. **78.** 1,071. **79.** 1,311. **80.** 1,308; 1,3125; 0,997. **81.** 1,549. **83.** 0,67; 0,669; 0,670. **84.** Данные не указывают на какие-либо предпочтения. **85.** Определяется одной и той же функцией распределения.

Программа учебного курса «Теория статистики»

1. Зачем нужна статистика?
2. Статистическое наблюдение. Планирование статистического наблюдения. Время наблюдения. Сплошные и несплошные наблюдения. Исследование основного массива. Монографическое исследование.
3. Выборочный метод. Генеральная совокупность, выборка. Причины применения выборочного метода. Случайный отбор. Таблица случайных чисел.
4. Сводка и группировка статистических данных. Простая и многомерная группировки. Комбинационная группировка.
5. Абсолютные и относительные статистические величины. Статистический показатель. Моментные и интервальные абсолютные величины.
6. Диаграммы и графики.
7. Вариационный ряд, варианта, частота. Равновеликие и неравновеликие интервалы. Эмпирическая функция распределения. Накопленная частота. Гистограмма. Полигон. Кумулята.
8. Расчет сводных характеристик выборки. Выборочная средняя, выборочная дисперсия. Генеральная средняя, генеральная дисперсия. Несмещенная оценка. Исправленная выборочная дисперсия. Ложный нуль. Условный эмпирический момент. Поправка Шеппарда.
9. Мода. Нахождение моды для вариационного ряда с равновеликими интервалами. Модальный интервал.
10. Медиана. Нахождение медианы для вариационного ряда с равновеликими интервалами. Медианный интервал.
11. Процентиль, дециль, квартиль. Децильный коэффициент дифференциации.
12. Средние величины. Средняя геометрическая. Среднегодовой коэффициент роста. Средняя гармоническая.
13. Показатели вариации. Размах вариации. Аномальные значения.
14. Интерквартильная широта.
15. Среднее линейное отклонение.
16. Показатели линейной вариации. Коэффициент осцилляции.
17. Относительное линейное отклонение. Коэффициент вариации.
18. Асимметрия. Центральный момент третьего порядка. Правосторонняя асимметрия. Левосторонняя асимметрия.

19. Эксцесс. Центральный момент четвертого порядка. Ряд низковершинен. Ряд островершинен.

20. Доверительный интервал для генеральной средней при известной генеральной дисперсии.

21. Объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней при известной генеральной дисперсии.

22. Доверительный интервал для генеральной средней при неизвестной генеральной дисперсии.

23. Объем выборки, необходимый для оценки генеральной средней при неизвестной генеральной дисперсии.

24. Доверительный интервал для генеральной доли.

25. Объем выборки, необходимый для оценки генеральной доли.

26. Интервалы предсказания.

27. Испытание гипотез, процедура испытания гипотез, односторонняя и двусторонняя проверки, статистика.

28. Испытание гипотезы на основе выборочной средней при известной генеральной дисперсии.

29. Испытание гипотезы на основе выборочной средней при неизвестной генеральной дисперсии.

30. Испытание гипотезы на основе выборочной доли.

31. Испытание гипотезы о двух генеральных дисперсиях, отношение дисперсий (F-критерий).

32. Сравнение средних величин двух выборок при известных генеральных дисперсиях.

33. Испытание гипотезы по выборочным средним (генеральные дисперсии неизвестны, случай равенства генеральных дисперсий).

34. Испытание гипотезы по выборочным средним (генеральные дисперсии неизвестны и не равны друг другу).

35. Испытание гипотезы по двум выборочным долям.

36. Испытание гипотез по спаренным данным (зависимые выборки).

37. Испытание гипотезы о принадлежности нового наблюдения генеральной совокупности.

38. Непараметрические испытания гипотез. Наблюдаемая и ожидаемая частоты. Таблицы сопряженности. Критерий χ^2. Поправка Йетса.

39. Порядковые испытания. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена.

40. Простая модель линейной регрессии. Расчет коэффициентов в модели парной линейной регрессии.

41. Коэффициент корреляции Пирсона. Объясненная, необъясненная и общая вариации переменной y. Коэффициент детерминации. Ошибки и остатки.

42. Предсказания и прогнозы на основе модели линейной регрессии.

43. Основные предпосылки в модели парной линейной регрессии.

44. Испытание гипотезы для оценки линейности связи. Испытание гипотезы для оценки линейности связи на основе оценки коэффициента корреляции в генеральной совокупности.

45. Испытание гипотезы для оценки линейности связи на основе показателя наклона линейной регрессии. Стандартная ошибка.

46. Доверительные интервалы в линейном регрессионном анализе. Доверительный интервал для показателя наклона линии линейной регрессии.

47. Доверительный интервал для среднего значения переменной y при заданном значении переменной x.

48. Доверительный интервал для индивидуальных значений переменной y при заданном значении переменной x.

49. Множественная линейная регрессия. Результативный признак. Фактор. Регрессия и Excel.

50. Нелинейные связи.

51. Мультиколлинеарность и ее последствия. Установление мультиколлинеарности. Частные коэффициенты корреляции. Методы устранения мультиколлинеарности.

52. Временные ряды. Элементы временного ряда (тренд, сезонная вариация, ошибки MAD и MSE).

53. Расчет сезонной вариации в аддитивной модели. Центрированная скользящая средняя.

54. Десезонализация данных в аддитивной модели.

55. Расчет уравнения тренда в аддитивной модели.

56. Расчет ошибок в аддитивной модели.

57. Прогнозирование в аддитивной модели.

58. Расчет сезонной вариации в мультипликативной модели. Центрированная скользящая средняя.

59. Десезонализация данных в мультипликативной модели.

60. Расчет уравнения тренда в мультипликативной модели.

61. Расчет ошибок в мультипликативной модели.

62. Прогнозирование в мультипликативной модели.

63. Экспоненциальное сглаживание. Простая модель экспоненциального сглаживания. Константа сглаживания. Экспоненциальное сглаживание с поправкой на тренд.

64. Контролируемый прогноз. Трекинг-сигнал. Итоговая сумма ошибок. Среднее абсолютное отклонение. Верхняя и нижняя границы контроля. Жесткий контроль. Слабый контроль.

65. Кластерный анализ. Кластеры. Расстояние. Однородные объекты. Дендрограмма. Классификация объектов с помощью принципа «ближайшего соседа».

66. Дисперсионный анализ. Межгрупповая вариация. Внутригрупповая вариация. Однофакторный дисперсионный анализ.

67. Двухфакторный дисперсионный анализ. Уровни фактора. Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений. Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями.

68. Меры связи. Положительная связь. Отрицательная связь. Коэффициент Фехнера (коэффициент корреляции знаков).

69. Коэффициенты ассоциации и контингенции.

70. Меры связи на основе критерия хи-квадрат. Коэффициент Крамера. Коэффициент взаимной сопряженности Пирсона. Коэффициент взаимной сопряженности Чупрова.

71. Анализ временных рядов в Excel.

72. Анализ Фурье.

73. Индекс (темп) роста. Индекс (темп) прироста. Базисные и цепные индексы. Переход от одних индексов к другим. Средний индекс роста для сгруппированных данных.

74. Экономические индексы. Индивидуальные и общие индексы. Агрегатные индексы. Агрегатные индексы физического объема. Агрегатный индекс физического объема Пааше. Агрегатный индекс физического объема Ласпейреса. Изменение стоимости продукции за счет изменения объема продукции.

75. Агрегатные индексы цен. Агрегатный индекс цен Пааше. Агрегатный индекс цен Ласпейреса.

76. Средние индексы. Средние арифметические индексы цен. Средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатный индексу Пааше. Средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатный индексу Ласпейреса.

77. Средние гармонические индексы цен. Средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатный индексу Пааше. Средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатный индексу Ласпейреса.

78. Индекс цен Фишера.

79. Анализ динамики средних показателей. Индекс переменного состава. Индекс цен переменного состава. Индекс фиксированного состава. Индекс цен фиксированного состава. Индекс структуры (индекс структурных сдвигов). Индекс ценовых структурных сдвигов.

80. Индексный метод анализа факторов динамики. Индекс стоимости продукции. Взаимосвязанные индексы. Система взаимосвязанных индексов при трех факторных признаках.

81. Территориальные индексы. Возможные варианты построения территориального индекса цен для двух регионов.

82. λ-критерий Колмогорова-Смирнова.

Задачи для контрольной работы по курсу «Теория статистики»

1–10. Автомат фасует сахар в пакеты. Проведена случайная выборка объемом n пакетов. Средний вес пакета сахара в выборке $\bar{X}$ кг, выборочное стандартное отклонение s кг. Найти доверительный интервал для среднего веса пакета сахара в генеральной совокупности с доверительной вероятностью p в случае:

а) стандартное отклонение автомата σ кг;

б) стандартное отклонение автомата неизвестно.

Определить необходимый объем выборки для достижения ширины доверительного интервала $\pm\Delta$. Проверить гипотезу о равенстве генеральной средней 1 кг.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
n	30	34	33	35	36	32	37	38	39	31
σ	0,01	0,07	0,03	0,06	0,09	0,02	0,08	0,04	0,10	0,05
Δ	0,10	0,15	0,18	0,12	0,19	0,11	0,13	0,16	0,14	0,17
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
s	0,05	0,10	0,04	0,08	0,02	0,09	0,06	0,03	0,07	0,01

11–20. Проведена выборка объемом n_1 деталей. r_1 из них оказались бракованными. Найти доверительный интервал доли бракованных изделий в генеральной совокупности для доверительной вероятности p. Определить необходимый объем выборки для достижения ширины доверительного интервала $\pm\Delta$. В повторной выборке объема n_2 r_2 деталей оказались бракованными. Понизилась ли доля брака?

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_1	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
r_1	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
Δ	0,01	0,02	0,09	0,08	0,07	0,03	0,04	0,06	0,12	0,05
n_2	1100	1150	1250	1330	1430	1570	1620	1780	1900	2000
r_2	190	185	170	165	155	140	135	120	115	108
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

21–30. Для производства каждой из $n_1 = 53$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1$ с (выборочная дисперсия s_1^2 с^2). Для производства каждой из $n_2 = 43$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2$ с (выборочная дисперсия s_2^2 с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность равна p.

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$\overline{X}_1$	38	39	33	37	35	37	37	38	42	40
s_1^2	4	5	7	8	4	5	7	8	3	2
$\overline{X}_2$	31	32	31	34	32	36	35	33	40	34
s_2^2	2	3	8	7	5	4	7	8	5	4
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

31–40. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали n_1 мужчин и n_2 женщин. У m_1 мужчин и m_2 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают реже, чем у мужчин? Доверительная вероятность равна p.

	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
n_1	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
m_1	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
n_2	1100	1150	1250	1330	1430	1570	1620	1780	1900	2000
m_2	190	185	170	165	155	140	135	120	115	108
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

41–50. а) Результаты экзамена по математике указаны в таблице.

Оценка	**Число студентов**
5	a
4	b
3	c
2	d

Построить секторную диаграмму.

б) Определить среднюю гармоническую, размах вариации, среднее линейное отклонение, коэффициент осцилляции, относительное линейное отклонение, коэффициент вариации, показатель асимметрии и эксцесс для следующего вариационного ряда.

Значение	a	b	c
Частота	d	f	g

в) Определить моду, медиану, перцентиль P_a, децильный коэффициент дифференциации для следующего вариационного ряда.

Значение	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	a	b	c	d	f	g

г) Определить коэффициент Фехнера для переменных x и y, значения которых указаны в таблице.

x	a	b	c
y	d	f	g

д) Определить связь между способом подготовки к зачету и результатом зачета с помощью коэффициентов ассоциации и контингенции.

Способ подготовки	Зачет	Незачет
По лекциям	a	b
По учебникам	f	g

е) На основании приведенных данных определить агрегатные индексы физического объема Ласпейреса и Пааше, агрегатные индексы цен Ласпейреса и Пааше, индекс цен Фишера, индекс цен переменного состава, индекс цен фиксированного состава и индекс ценовых структурных сдвигов, индекс стоимости продукции.

Год	Товар X		Товар Y	
	Объем продукции	Цена	Объем продукции	Цена
2004	a	c	f	g
2005	b	d	h	k

ж) На основании приведенных данных определить средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса.

Товар	Выпуск в 2004 г.	Цена в 2004 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	a	c	g
Y	b	d	k

з) На основании приведенных данных определить средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше.

Товар	Выпуск в 2005 г.	Цена в 2004 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	a	c	g
Y	b	d	k

и) На основании приведенных данных определить средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса.

Товар	Выпуск в 2004 г.	Цена в 2005 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	a	c	g
Y	b	d	k

к) На основании приведенных данных определить средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше.

Товар	Выпуск в 2005 г.	Цена в 2005 г.	Рост цены в 2005 г., %
X	a	c	g
Y	b	d	k

л) Построить территориальные индексы цен по следующим данным.

Год	Регион А		Регион Б	
	Объем продукции	Цена	Объем продукции	Цена
2004	a	c	f	g
2005	b	d	h	g

	a	b	c	d	f	g	h	k
41	11	27	2	3	15	3	11	8
42	13	28	6	4	16	4	13	9
43	14	29	1	5	17	6	14	2
44	15	22	3	6	18	7	12	6
45	16	30	4	7	19	8	20	1
46	17	21	5	8	11	9	15	3
47	18	23	6	9	13	2	16	4
48	19	24	7	2	14	6	17	5
49	12	25	8	6	12	1	18	6
50	20	26	9	1	20	5	19	7

51–60. Ежегодные коэффициенты роста равны соответственно a, b и c. Определить среднегодовой коэффициент роста.

	51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
a	1,11	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,12	1,2
b	1,27	1,28	1,29	1,22	1,3	1,21	1,23	1,24	1,25	1,26
c	1,02	1,06	1,01	1,03	1,04	0,05	1,06	1,07	1,08	1,09

61–70. а) Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов? Доверительная вероятность равна p.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	a	f	m	s
четыре	b	g	n	t
три	c	h	j	x
два	d	k	q	y

б) Определить коэффициент Крамера, коэффициент взаимной сопряженности Пирсона, коэффициент взаимной сопряженности Чупрова в пункте а).

	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
a	21	22	23	24	25	26	27	28	29	20
b	26	27	28	29	20	21	22	23	24	25
c	29	20	21	22	23	24	25	26	27	28
d	8	7	9	6	9	8	6	7	8	7
f	16	17	18	19	17	18	19	18	19	17
g	15	14	13	16	14	13	16	14	15	14
h	18	19	18	19	17	16	17	18	19	17
k	6	9	8	6	7	8	7	8	7	9
m	11	12	13	10	11	12	13	10	11	12
n	19	17	18	19	18	19	17	16	17	18
j	22	23	21	20	24	22	21	20	23	24
q	7	9	6	9	8	6	7	8	7	8
s	6	7	6	7	7	7	6	7	6	6
t	6	5	5	6	6	5	5	6	5	6
x	12	13	10	11	12	11	12	13	10	11
y	18	19	17	18	19	18	19	17	17	16
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

71–80. По данным таблицы построить модель сезонных колебаний, используя ряд Фурье при $k = 1$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	a	b	c	d	f	g	h	k	m	n	j	q

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
a	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0
b	12,4	12,3	12,6	12,7	12,7	12,9	13,0	13,1	13,2	13,3
c	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13,0	13,1	13,3	13,4	13,5
d	13,1	13,2	13,2	13,2	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6
f	12,8	12,8	12,9	12,8	12,9	12,8	12,9	13,0	13,1	13,2
g	13,3	13,4	13,3	13,4	13,3	13,4	13,5	13,6	13,5	13,8
h	13,4	13,5	13,5	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	13,8	13,9
k	14,2	14,1	14,1	14,2	14,3	14,2	14,1	14,2	14,1	14,3
m	13,5	13,6	13,6	13,4	13,3	13,4	13,5	13,4	13,5	13,6
n	13,0	13,1	13,1	13,2	13,4	13,5	13,4	13,6	13,7	13,9
j	12,4	12,4	12,5	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	12,8	12,9
q	12,3	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,6	12,7	12,8	12,8

81–90. За последние 10 месяцев средний объем продаж равен *a* тыс. руб., а выборочное стандартное отклонение *s* руб. Предполагается, что объем продаж распределен нормально. Определить интервал предсказания для объема продаж текущего месяца с доверительной вероятностью *p*.

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
a	220	270	280	290	225	240	260	235	265	275
s	6000	5000	7000	8000	9000	3000	4500	2500	8500	7500
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

91–100. Из текущей продукции произведен выбор распределенной случайной величины X валиков. Найти реализацию оценки математического ожидания и стандартного отклонения распределенной случайной величины X — отклонения диаметра валика от номинала.

	от –20 до –15	от –15 до –10	от –10 до –5	от –5 до 0	от 0 до 5	от 5 до 10	от 10 до 15	от 15 до 20	от 20 до 25	от 25 до 30
91	7	11	14	25	50	40	27	16	7	3
92	6	12	13	26	51	41	27	13	8	3
93	5	13	15	24	52	42	25	15	8	1
94	4	14	16	23	53	42	25	14	7	2
95	3	15	17	22	54	41	26	13	6	3
96	7	12	15	24	53	39	28	12	6	4
97	6	13	16	23	51	38	27	16	8	2
98	5	13	17	23	52	39	26	15	7	3
99	4	14	18	22	53	40	25	16	6	1
100	3	11	19	25	54	40	24	18	5	1

101–110. Пять производственных объектов характеризуются двумя признаками: объемом продаж и среднегодовой стоимостью основных производственных фондов.

Объект	1	2	3	4	5
Объем продаж	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Среднегодовая стоимость основных производственных фондов	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*

Провести классификацию этих объектов с помощью принципа «ближайшего соседа».

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*
101	9	3	4	3	3	1	1	8	3	4
102	5	5	4	3	1	8	9	8	8	2
103	7	7	3	2	5	7	2	5	6	8
104	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
105	1	8	3	4	5	2	9	9	6	3
106	4	6	2	8	8	9	8	8	3	1
107	3	7	4	6	7	7	8	1	8	4
108	7	4	6	1	8	8	6	8	5	4
109	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
110	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3

111–120. В таблице указан объем продаж (тыс. руб.) за последние 10 недель.

Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем продаж	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13

Дать прогноз объема продаж на 11-ю неделю методами простого экспоненциального сглаживания и экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. Прогноз объема продаж на 1-ю неделю равен F_1. $T_1 = 0$. Определить трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны ±4. Нужно ли менять константу сглаживания?

	111	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
α	0,7	0,8	0,9	0,75	0,85	0,4	0,6	0,3	0,2	0,65
b	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3
F_1	3	2	2	3	2	3	4	2	2	3

121–130. Дать прогноз объема продаж на следующие три дня. Указание: 1 неделя = 7 дней.

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вск
121	1	3	2	9	2	8	5
	3	3	1	6	4	10	3
122	3	4	2	6	7	12	5
	1	3	2	7	3	6	9
123	9	4	7	5	4	2	3
	13	6	8	6	7	5	2
124	1	5	3	5	4	10	5
	2	3	2	7	5	9	4
125	1	5	2	6	2	9	8
	1	4	3	7	7	11	6

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вск
126	8	3	5	4	3	9	2
	9	7	8	8	5	4	6
127	2	6	4	6	7	9	10
	2	5	1	7	5	11	15
128	15	5	8	6	3	8	4
	10	6	9	6	5	6	6
129	1	3	4	7	3	6	9
	2	3	1	7	2	9	10
130	1	4	2	5	5	11	17
	2	7	9	6	4	9	7

131–140. Два человека дегустируют 10 сортов кофе. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений. Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность p.

	131	**132**	**133**	**134**	**135**	**136**	**137**	**138**	**139**	**140**
Дег. 1	8	7	8	7	1	1	3	5	2	9
	10	6	2	1	4	9	7	1	1	3
	1	5	9	5	6	4	9	9	4	1
	2	9	7	10	9	10	6	10	10	4
	6	1	1	2	10	5	10	6	5	7
	3	2	10	8	2	2	4	2	3	2
	4	4	3	9	5	3	2	4	6	10
	5	8	4	6	8	6	5	7	8	5
	9	3	5	3	3	8	1	3	7	6
	7	10	6	4	7	7	8	8	9	8
Дег. 2	9	8	8	1	2	6	7	5	3	6
	8	3	6	8	5	9	6	1	1	10
	1	2	9	2	7	2	4	4	7	4
	10	4	10	5	1	5	1	9	2	2
	2	1	3	10	3	8	10	10	5	1
	6	10	5	4	10	10	9	8	10	7
	7	9	2	7	6	4	8	3	4	8
	4	6	7	6	4	7	3	2	9	9
	3	5	1	3	8	3	2	6	6	5
	5	7	4	9	9	1	5	7	8	3
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99

141–150. В таблице указана цена товара с февраля по май. Найти соответствующие индексы роста и прироста, а также соответствующие цепные и базисные индексы (февраль — базовый месяц).

	февраль	март	апрель	май
141	20	30	50	75
142	30	45	70	90
143	25	40	50	80
144	40	70	85	100
145	25	50	70	100

	февраль	март	апрель	май
146	20	45	50	70
147	30	40	45	60
148	40	50	60	80
149	45	55	70	80
150	35	50	60	90

151–160. Автомат фасует сахар в пакеты. В случайной выборке объема n пакетов средний вес $\overline{X}$ кг, выборочное стандартное отклонение s кг. Вес очередного пакета сахара $X_{нов}$ кг. Надо ли отрегулировать автомат? Предполагается, что вес пакетов сахара распределен нормально. Доверительная вероятность p.

	151	**152**	**153**	**154**	**155**	**156**	**157**	**158**	**159**	**160**
$\overline{X}$	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
$X_{нов}$	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95
n	30	34	33	35	36	32	37	38	39	31
p	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
s	0,05	0,10	0,04	0,08	0,02	0,09	0,06	0,03	0,07	0,01

161–170. По результатам наблюдений найти оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии $y = a + bx$, коэффициент корреляции Пирсона, коэффициент детерминации, проверить гипотезу о наличии линейной связи. Если гипотеза верна, то построить доверительный интервал для коэффициента наклона линии линейной регрессии и дать прогноз для $x = x_0$.

	x					y					x_0
161	1	5	3	4	7	1	5	5	2	8	2
162	3	6	7	8	7	1	3	5	5	4	4
163	4	7	5	4	5	3	1	2	2	1	6
164	9	8	3	4	1	0	1	4	3	5	7
165	1	0	3	3	0	2	3	5	6	4	2
166	0	4	7	8	5	2	6	8	7	5	6
167	4	2	3	4	3	8	6	8	7	6	5
168	7	5	1	0	3	8	6	4	2	4	4
169	3	5	7	2	5	1	3	5	0	1	4
170	4	4	8	9	5	6	2	9	9	4	7

171–180. По результатам наблюдений с помощью пакета Excel найти точечные и интервальные оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$. Является ли модель статистически значимой? Все ли коэффициенты статистически значимы?

	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
x_1	8	8	7	1	1	2	1	6	1	3
	2	6	1	8	4	5	9	9	8	1
	9	9	5	2	6	7	4	2	3	5
	7	6	5	5	9	1	1	5	2	4
	1	8	5	1	9	3	5	8	2	9
	8	3	2	4	1	1	2	2	4	9
	3	5	8	8	2	5	1	4	1	3
	3	8	2	5	2	1	4	5	9	1
	4	2	9	2	5	2	1	7	5	2
	1	8	6	1	8	2	3	7	4	8
x_2	1	2	8	8	3	3	9	5	2	5
	5	2	8	1	5	3	6	2	5	7
	0	9	5	4	2	4	8	8	3	2
	5	9	9	7	1	6	2	7	4	1
	8	9	6	2	5	8	4	3	1	2
	8	3	2	7	2	1	3	5	2	1
	3	3	1	1	5	5	7	8	7	3
	1	2	9	8	8	7	2	4	6	7
	5	3	5	5	3	6	5	6	3	4
	2	7	4	6	7	2	2	7	8	8
y	2	8	1	5	4	1	6	4	3	7
	1	5	3	2	6	9	1	9	5	7
	5	3	5	8	8	4	9	1	4	5
	2	8	4	3	5	1	3	2	6	4
	4	9	9	8	3	5	2	6	9	2
	6	4	5	5	5	2	7	1	2	8
	6	1	1	9	1	7	1	2	1	1
	9	4	9	4	4	1	4	4	3	3
	7	6	1	1	1	3	3	6	9	4
	3	7	5	5	2	2	9	6	4	2

181–190. Известны данные по объему продаж товаров *А*, *Б*, *В*, *Г* в 2006 году и рост объема продаж (в %) в 2007 году. Найти средний индекс роста.

	Объем продаж				Рост объема продаж			
	А	*Б*	*В*	*Г*	*А*	*Б*	*В*	*Г*
181	20	30	50	75	10	15	5	20
182	30	45	70	90	30	10	20	25
183	25	40	50	80	20	5	40	10
184	40	70	85	100	40	30	10	5
185	25	50	70	100	10	20	15	5
186	20	45	55	70	5	20	15	10
187	30	40	45	60	30	15	20	5
188	40	50	60	80	5	40	50	30
189	45	55	70	80	40	10	25	20
190	35	50	60	90	25	20	30	15

191–200. а) Оценивается чистая прибыль за январь для предприятий отрасли. Проведена случайная выборка объемом n предприятий. Средняя чистая прибыль предприятия в выборке $\overline{X}$ млн. руб., выборочное стандартное отклонение s млн. руб. Определить доверительный интервал для чистой прибыли предприятия в генеральной совокупности с доверительной вероятностью p. Определить необходимый объем выборки для достижения ширины доверительного интервала $\pm\Delta$ млн. руб. Проверить гипотезу о равенстве генеральной средней 1 млн. руб.

б) Для выборки объема n человек средний годовой доход на человека равен 100 $\overline{X}$ тыс. руб., выборочное стандартное отклонение $100s$ тыс. руб. Годовой доход очередного респондента равен $100X_{\text{нов}}$ тыс. руб. Можно ли утверждать, что все респонденты принадлежат к одной целевой популяции? Предполагается, что годовой доход распределен нормально. Доверительная вероятность p.

	$\overline{X}$	$X_{\text{нов}}$	n	Δ	p	s
191	0,99	1,01	30	0,10	0,95	0,05
192	0,98	1,02	34	0,15	0,99	0,10
193	0,97	1,03	33	0,18	0,95	0,04
194	0,96	1,04	35	0,12	0,99	0,08
195	0,95	1,05	36	0,19	0,95	0,02
196	1,01	0,99	32	0,11	0,99	0,09
197	1,02	0,98	37	0,13	0,95	0,06
198	1,03	0,97	38	0,16	0,99	0,03
199	1,04	0,96	39	0,14	0,95	0,17
200	1,05	0,95	31	0,17	0,99	0,01

Раздел III

МИКРО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Микроэкономическая статистика исследует экономику на уровне предприятия. Именно микроэкономическая статистика является исходной базой для рассмотрения всей совокупности социально-экономических процессов, протекающих на уровне макроэкономики. Закономерности функционирования предприятия, условия применения и потребления ресурсов внеоборотного и оборотного капитала, характеристики результатов деятельности предприятия — все эти вопросы рассматриваются в микроэкономической статистике. Именно с помощью микроэкономической статистики выявляются значимые характеристики и стороны деятельности предприятия. Возникновение микроэкономической статистики обусловлено практической потребностью в систематизации методов и методик анализа в условиях значительного усложнения хозяйственных связей.

Главная задача микроэкономической статистики — оценка результатов хозяйственной деятельности предприятия и выявление факторов, обусловивших успехи и неудачи в анализируемом периоде. Методы микроэкономической статистики помогают в обработке и интерпретации исходных данных.

Особенно тщательно нужно подходить к отбору необходимых данных и базовых показателей. При проведении аналитических процедур показатели деятельности предприятия всегда с чем-то сравниваются. Сравнения могут производиться с предыдущим периодом, с планом и со среднеотраслевыми показателями. Любые отклонения от нормативных или плановых значений показателей (даже если они имеют позитивный характер) должны тщательно анализироваться.

Совокупность анализируемых показателей должна иметь некую основу, объясняющую логику ее построения. Не нужно без необходимости гнаться за точностью оценок, это может потребовать излишних затрат времени и средств. Как правило, наибольшую ценность представляет выявление тенденций и закономерностей.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ ФИНАНСОВОЙ ОТЧЕТНОСТИ

Каждый год предприятие составляет итоговую финансовую отчетность — бухгалтерский баланс и счет прибылей и убытков. Важно уметь читать и понимать смысл этих отчетов.

§ 2.1. БУХГАЛТЕРСКИЙ БАЛАНС

Бухгалтерский баланс содержит информацию о финансовом состоянии и результатах деятельности предприятия на определенный момент времени. Из бухгалтерского баланса можно узнать, откуда поступили вложенные в данный бизнес средства и куда они были размещены на момент составления баланса.

Бухгалтерский баланс отражает все операции, производимые в ходе хозяйственной деятельности предприятия.

§ 2.2. АКТИВЫ

Активы — это все материальные ресурсы, имеющие денежную стоимость и находящиеся в распоряжении предприятия. Активы подразделяются на материальные и нематериальные активы. *Материальные активы* — это имущество предприятия (например, здания, оборудование, машины, автомобили, запасы сырья). Под *нематериальными активами* понимается владение каким-либо правом (например, патентом или правом на получение прибыли в будущем).

Все включенные в бухгалтерский баланс активы имеют денежную оценку. Однако такие важные факторы, как управленческие способ-

ности персонала, хорошие производственные отношения и моральное состояние, нельзя включить в бухгалтерский баланс.

Внеоборотные активы имеют достаточно высокую стоимость и длительный срок использования предприятием (здания, сооружения, земля, машины, оборудование, транспортные средства и т. д.). Из-за того, что стоимость внеоборотных активов очень высока, ее не вычитают из прибыли в год приобретения, а распределяют на ожидаемый срок эксплуатации в виде амортизационных отчислений.

Оборотные активы — это денежная наличность и статьи баланса, которые можно быстро и легко перевести в наличные средства. Примером оборотных активов являются запасы готовой продукции и *дебиторская задолженность* (задолженность клиентов перед предприятием).

§ 2.3. ПАССИВЫ

Пассивы — это финансовые обязательства предприятия. Они возникают при использовании кредитов или ссуд. В зависимости от срока погашения различают краткосрочные и долгосрочные обязательства.

Краткосрочные обязательства — это кредиторская задолженность, подлежащая погашению в течение одного года (задолженность торговым кредиторам, банковский овердрафт).

Долгосрочные обязательства — это кредиторская задолженность, подлежащая погашению более чем через один год. К долгосрочным обязательствам относятся банковские кредиты (но не банковский овердрафт, погашение которого производится по первому требованию) и невыплаченные суммы по лизингу.

§ 2.4. СОБСТВЕННЫЙ КАПИТАЛ

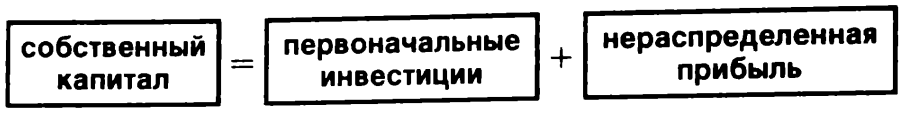
Собственный капитал — это стоимость всего имущества предприятия после уплаты всех долгов.

В основе бухгалтерского баланса лежит следующее уравнение бухгалтерского баланса:

собственный капитал = **суммарные активы** − **суммарные пассивы** =

= **внеоборотные активы** + **оборотные активы** − **краткосрочные обязательства** − **долгосрочные обязательства**.

Собственный капитал предприятия на конкретную дату можно посчитать и иначе:



где нераспределенная прибыль — это прибыль, реинвестированная в процессе хозяйственной деятельности.

Нераспределенная прибыль представляет собой остаток прибыли после налогообложения, выплаты процентов и дивидендов. Как правило, она составляет значительную часть финансирования новых капиталовложений.

§ 2.5. ОТЧЕТ О ДВИЖЕНИИ ДЕНЕЖНЫХ СРЕДСТВ

Бухгалтерский баланс содержит информацию о финансовом состоянии и результатах деятельности предприятия на определенный момент времени. А вот в отчете о движении денежных средств отражены *потоки денежных средств*, то есть фактические физические перемещения денежных средств из одних рук в другие в виде поступлений и платежей, имеющих место в процессе хозяйственной деятельности предприятия. *Поступления* — это денежные средства, полученные предприятием. *Платежи* — это денежные средства, отданные предприятием.

Каждый раз, когда предприятие выписывает чек, образуется платеж денежных средств. Если же чек выписывается на предприятие, то возникает поступление денежных средств. Поэтому существует мало возможностей для искажения реального состояния дел на предприятии.

Увеличение пассивов предприятия — это источник денежных средств. Уменьшение пассивов предприятия говорит об использовании денежных средств.

Уменьшение активов предприятия — это источник денежных средств. Увеличение активов предприятия говорит об использовании денежных средств.

Отчет о движении денежных средств отражает изменения в кассовой позиции за некоторый период времени. *Сальдо на начало периода* — это размер денежной наличности предприятия на начало периода. *Сальдо на конец периода* — это размер денежной наличности предприятия на конец периода.

Расчет движения денежных средств производится по следующей формуле:

Отчет о движении денежных средств не лишен недостатков. Он отражает уже сложившуюся ситуацию и носит исторический характер. Для инвестора, интересующегося платежеспособностью предприятия, более полезным был бы прогноз движения денежных средств предприятия.

§ 2.6. СЧЕТ ПРИБЫЛЕЙ И УБЫТКОВ

Счет прибылей и убытков показывает доходы и расходы предприятия от операций между двумя соседними датами составления бухгалтерского баланса. Из него видны результаты работы предприятия за этот период: получило ли оно прибыль или понесло убытки.

При составлении счета прибылей и убытков доходы и расходы признаются не тогда, когда они оплачены деньгами, а тогда, когда они начислены. Например, реализация товаров считается совершившимся фактом, когда продавец выполнил условия договора купли-продажи, а не когда за товар получены деньги. Доход признается полученным, если его можно объективно оценить и обоснованно предположить поступление средств в будущем.

Счет прибылей и убытков строится по принципу начисления, который точнее сопоставляет полученные доходы и понесенные расходы за рассматриваемый период. Это позволяет определить фактические значения доходов и расходов, но многие перемещения денежных средств не показываются.

Счет прибылей и убытков отражает далеко не все, что произошло на предприятии за отчетный период. Он не содержит сведений о фактах, которые не поддаются достаточно точной оценке (например, прием на работу нового сотрудника). Также счет прибылей и убытков не отражает операций, не связанных с реализацией (например, выпуск новых акций).

Манипулировать данными счета прибылей и убытков гораздо легче, чем данными отчета о движении денежных средств. Зато счет прибылей и убытков позволяет, например, однозначно разграничить плату за потребленную в прошлом месяце электроэнергию и плату за здание, которое предприятие будет арендовать ближайшие 15 лет.

§ 2.7. РАСЧЕТ ПРИБЫЛИ

Объем продаж — это доход от продажи продукции. *Себестоимость проданной продукции* показывает, во сколько обошлось предприятию приобретение или изготовление товаров. *Валовая прибыль* вычисляется по следующей формуле:

валовая прибыль = **объем продаж** − **себестоимость проданной продукции**.

Под *расходами* будем понимать накладные расходы, понесенные в ходе осуществления продаж за определенный период времени.

Чистая прибыль вычисляется по следующей формуле:

чистая прибыль = **валовая прибыль** − **расходы**.

Пример 1. В апреле объем продаж составил 200000 руб. Себестоимость проданной продукции равна 90000 руб., а расходы (арендная плата, зарплата и т. д.) — 30000 руб. Определим валовую прибыль и чистую прибыль.

Валовая прибыль = объем продаж – себестоимость проданной продукции = 200000 – 90000 = 110000 руб.

Чистая прибыль = валовая прибыль – расходы = 110000 – 30000 = = 80000 руб.

Задача 1. В апреле объем продаж составил 250000 руб. Себестоимость проданной продукции равна 110000 руб., а расходы (арендная плата, зарплата и т. д.) — 40000 руб. Определить валовую прибыль и чистую прибыль.

Прибыль предприятия может зависеть от целого ряда факторов искусственного характера. Например, при слиянии предприятия с другим предприятием совокупная прибыль станет больше. Следует помнить, что прибыль и наличные деньги — это не одно и то же.

Счет прибылей и убытков отражает доходы и расходы за определенный период времени. Но некоторые расходы (арендная плата, страхование и т. д.) могут осуществляться предоплатой.

Прибыль — это лишь один из показателей. Поэтому при анализе результатов деятельности предприятия нужно ориентироваться не только и не столько на прибыль, сколько на совокупность показателей, характеризующих финансовый и имущественный потенциалы предприятия.

§ 2.8. ПОЯСНЕНИЯ К ФИНАНСОВОЙ ОТЧЕТНОСТИ

Предприятие сопровождает свою финансовую отчетность пояснениями. Эти пояснения содержат:

1) сведения об используемых методах учета (способ начисления амортизации, метод оценки запасов товарно-материальных ценностей и т. д.);

2) подробное описание некоторых статей активов и пассивов (условия и сроки погашения задолженности, условия выплаты арендной платы и т. д.);

3) информацию о структуре акционерного капитала предприятия (условия владения акциями и т. д.);

4) сведения об основных операциях (приобретение другого предприятия, отделение ранее присоединенного предприятия и т. д.);

5) внебалансовые статьи (форвардные контракты, свопы, опционы и т. д.).

Нередко пояснения к финансовой отчетности дают больше информации об истинном финансовом состоянии предприятия, чем сами отчеты.

Финансовая отчетность предприятия предоставляет информацию о текущем финансовом положении предприятия, а также об эффективности деятельности предприятия за истекший период. На основе финансовой отчетности создаются модели, используемые в финансовом планировании. Финансовая отчетность предприятия позволяет наметить основные плановые показатели.

Глава 3

ОЦЕНКА ЗАПАСОВ ТОВАРНО-МАТЕРИАЛЬНЫХ ЦЕННОСТЕЙ

Для расчета себестоимости проданной продукции нужно уметь оценивать *запасы товарно-материальных ценностей.* Большинство запасов оценивается по себестоимости. Это не лучшее решение проблемы. Предприятие может располагать крупными запасами продукции одного типа, которая могла быть закуплена в разные периоды и по разной цене. Поэтому практически невозможно установить себестоимость каждой единицы запаса.

В настоящий момент существуют три основных метода оценки запасов:

- ФИФО (*англ.* First In First Out — FIFO);
- ЛИФО (*англ.* Last In First Out — LIFO);
- по средневзвешенной.

Рассмотрим основные методы оценки запасов товарно-материальных ценностей подробнее.

§ 3.1. МЕТОД ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ ФИФО

В этом методе оценки стоимости запасов предполагается, что партия товара, первой поступившая в запасы, первой и реализуется.

Пример 2. Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации 500 единиц продукции по цене 10 руб. В апреле закуплены для реализации 300 единиц продукции по цене 11 руб. В мае проданы 400 единиц продукции по цене 20 руб. В июне проданы 200 единиц продукции по цене 21 руб. В июле закуплены для реализации 150 единиц продукции по цене 11,5 руб. В августе проданы 100 единиц продукции по цене 21,5 руб.

Определим стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО.

Заполним таблицу.

Месяц	Закупка, руб. (по закупочным ценам)	Продажа, руб. (по оценочной стоимости)	Запасы после операции купли-продажи, руб. (по оценочной стоимости)
март	500×10		500×10
апрель	300×11		500×10
			300×11
май		400×10	100×10
			300×11
июнь		100×10	200×11
		100×11	
июль	150×11,5		200×11
			150×11,5
август		100×11	100×11
			150×11,5

Поясним, как заполняется таблица.

Во 2-м столбце указаны закупки соответствующего месяца. В 3-м столбце указаны продажи соответствующего месяца. В 4-м столбце указан уровень запасов после операции купли-продажи соответствующего месяца.

После мартовских закупок на складе находятся 500 единиц продукции, а после апрельских — 500 единиц (мартовских) и 300 единиц (апрельских). В мае проданы 400 единиц продукции.

В методе оценки запасов ФИФО при продаже делается предположение, что запасы, закупленные первыми, первыми и реализуются. Поэтому считаем, что в мае были проданы 400 единиц (мартовских), а на складе остаются 100 единиц (мартовских) и 300 единиц (апрельских).

В июне проданы 200 единиц продукции: 100 единиц (мартовских) и 100 единиц (апрельских). После этой продажи на складе находятся 200 единиц (апрельских), а после июльских закупок — 200 единиц (апрельских) и 150 единиц (июльских).

В августе были проданы 100 единиц (апрельских). Поэтому после этого на складе находятся 100 единиц (апрельских) и 150 единиц (июльских).

Оценка стоимости запасов на конец августа методом оценки запасов ФИФО равна 100×11 + 150×11,5 = 2825 руб.

Задача 2. Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации 300 единиц продукции по цене 15 руб. В апреле закуплены для реализации 400 единиц продукции по цене 16 руб. В мае проданы 500 единиц продукции по цене 30 руб. В июне проданы 100 единиц продукции по цене 31 руб. В июле закуплены для реализации 200 единиц продукции по цене 16,5 руб. В августе проданы 50 единиц продукции по цене 31,5 руб.

Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО.

§ 3.2. МЕТОД ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ ЛИФО

В этом методе оценки стоимости запасов предполагается, что партия товара, поступившая в запасы последней, реализуется первой. Это предположение имеет место только на бумаге.

Пример 3. В примере 2 определим стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО.

Заполним таблицу.

Месяц	Закупка, руб. (по закупочным ценам)	Продажа, руб. (по оценочной стоимости)	Запасы после операции купли-продажи, руб. (по оценочной стоимости)
март	500×10		500×10
апрель	300×11		500×10
			300×11
май		300×11	400×10
		100×10	
июнь		200×10	200×10
июль	150×11,5		200×10
			150×11,5
август		100×11,5	200×10
			50×11,5

Поясним, как заполняется таблица.

В методе оценки запасов ЛИФО при продаже делается предположение, что запасы, закупленные последними, реализуются первыми. Поэтому считаем, что в мае были проданы 300 единиц (апрельских) и 100 единиц (мартовских), а на складе остаются 400 единиц (мартовских).

В июне были проданы 200 единиц (мартовских). После этой продажи на складе находятся 200 единиц (мартовских), а после июльских закупок — 200 единиц (мартовских) и 150 единиц (июльских).

В августе были проданы 100 единиц (июльских). Поэтому после этого на складе находятся 200 единиц (мартовских) и 50 единиц (июльских).

Оценка стоимости запасов на конец августа методом оценки запасов ЛИФО равна 200×10 + 50×11,5 = 2575 руб.

Задача 3. В задаче 2 определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО.

§ 3.3. МЕТОД ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ ПО СРЕДНЕВЗВЕШЕННОЙ

В этом методе оценки стоимости запасов для продукции, находящейся в запасе, вычисляется средняя стоимость. Метод средневзвешенной часто применяется там, где имеются большие количества относительно мелких трудноразличимых единиц продукции, каждая из которых имеет низкую стоимость и которые трудно идентифицировать с конкретной ценой (например, гвозди).

Пример 4. В примере 2 определим стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов по средневзвешенной.

Заполним таблицу.

Месяц	Закупка, руб. (по закупочным ценам)	Продажа, руб. (по себестоимости)	Запасы после операции купли-продажи, руб. (по оценочной стоимости)
март	500×10		500×10
апрель	300×11		$800\times\frac{500\times10+300\times11}{800}\approx$ $\approx 800\times10{,}38$
май		400×10,38	400×10,38
июнь		200×10,38	200×10,38
июль	150×11,5		$350\times\frac{200\times10{,}38+150\times11{,}5}{350}=$ $=350\times10{,}86$
август		100×10,86	250×10,86

Поясним, как заполняется таблица.

После апрельских закупок на складе находятся 800 единиц продукции: 500 единиц (мартовских) и 300 единиц (апрельских).

Определим их среднюю себестоимость. Для этого суммарную стоимость запасов 500×10 + 300×11 нужно разделить на общее число единиц продукции в запасе (800 единиц), то есть $\frac{500\times10+300\times11}{800}\approx$ $\approx 10{,}38$ руб. Поэтому оценочная стоимость запасов после апрельских закупок равна 800×10,38 руб.

Из этих запасов в мае и июне продано 400 и 200 единиц продукции соответственно.

После июльских закупок на складе находятся 350 единиц продукции: 200 единиц по цене 10,38 руб. и 150 единиц по цене 11,5 руб.

Определим их среднюю себестоимость. Для этого суммарную стоимость запасов 200×10,38 + 150×11,5 нужно разделить на общее

число единиц продукции в запасе (350 единиц), то есть $\frac{200\times10{,}38 + 150\times11{,}5}{350} = 10{,}86$ руб. Поэтому оценочная стоимость запасов после июльских закупок равна 350×10,86 руб.

После продажи в августе 100 единиц продукции на складе остаются 250 единиц.

Оценка стоимости запасов на конец августа методом оценки запасов по средневзвешенной равна 250×10,86 = 2715 руб.

Задача 4. В задаче 2 определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов по средневзвешенной.

§ 3.4. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ НА РАСЧЕТ ПРИБЫЛИ

Валовая прибыль вычисляется по следующей формуле:

валовая прибыль = **объем продаж (по ценам реализации)** − **себестоимость проданной продукции**,

где **себестоимость проданной продукции** = **запас на начало периода** + **закупки (по закупочной стоимости)** − **запас на конец периода (оценочная стоимость)**.

В период колебания цен все три метода оценки запасов показывают различную стоимость запасов на конец периода. Следовательно, величина валовой прибыли для каждого из этих методов различна.

Пример 5. Определим валовую прибыль в примерах 2–4.

В каждом из примеров объем продаж равен 400×20 + 200×21 + + 100×21,5 = 14350 руб., запас на начало периода равен 0, а закупки — 500×10 + 300×11 + 150×11,5 = 10025 руб. Заполним таблицу.

	ФИФО, руб.	ЛИФО, руб.	Метод средневзвешенной, руб.
Объем продаж	14350	14350	14350
Запас на начало марта	0	0	0
Закупки	10025	10025	10025
Запас на конец августа	2825	2575	2715
Себестоимость проданной продукции	7200	7450	7310
Валовая прибыль	7150	6900	7040

Поясним, как заполняется таблица. Запас на конец августа найден в примерах 2–4.

В каждом столбце из суммы чисел 2-й и 3-й строк (Запас на начало марта + Закупки) вычитаем число 4-й строки (Запас на конец августа) и результат пишем в 5-й строке (Себестоимость проданной продукции).

В каждом столбце из числа 1-й строки (Объем продаж) вычитаем число 5-й строки (Себестоимость проданной продукции) и результат пишем в 6-й строке (Валовая прибыль).

Мы видим, что в условиях повышения цен значение валовой прибыли выше при применении метода оценки запасов ФИФО.

Задача 5. Определить валовую прибыль в задачах 2–4.

Глава 4

АМОРТИЗАЦИЯ

При оценке внеоборотных активов возникают те же проблемы, что и при оценке запасов. Как распределить стоимость внеоборотного актива на весь период его эксплуатации?

Амортизация — это распределение первоначальной стоимости внеоборотного актива на период его эксплуатации способом, учитывающим остаточную стоимость этого актива.

Существуют два основных метода расчета амортизации:

✧ равномерное начисление износа;

✧ начисление износа с сокращающейся балансовой стоимости.

Рассмотрим основные методы расчета амортизации подробнее.

§ 4.1. МЕТОД РАВНОМЕРНОГО НАЧИСЛЕНИЯ ИЗНОСА

В методе равномерного начисления износа предполагается, что предприятие получает от использования актива равноценную пользу в течение всего периода эксплуатации. Расчет ежегодно начисляемого износа производится по следующей формуле: ежегодное начисление на износ $= \frac{S-P}{n}$, где S — первоначальная стоимость актива, P — остаточная стоимость актива, n — период эксплуатации актива.

Метод равномерного начисления износа очень популярен из-за своей простоты. Расчеты по нему не требуют много времени и специальных знаний. Этот метод очень удобен для активов, с которых предприятие регулярно получает доход в виде хозяйственной деятельности (например, патентов и лицензий).

Пример 6. Предприятие купило станок за $S = 29000$ руб., период эксплуатации которого $n = 4$ года. После этого станок можно будет продать на вторичном рынке за $P = 5000$ руб. (остаточная стоимость). Определим методом равномерного начисления износа

ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

Ежегодное начисление на износ равно $\frac{S-P}{n} = \frac{29000-5000}{4} =$ $= 6000$ руб.

Заполним таблицу.

Год	Первоначальная стоимость, руб.	Начисления на износ на счете прибылей и убытков, руб.	Накопленная амортизация, руб.	Балансовая стоимость на конец года, руб.
1	29000	6000	6000	23000
2	29000	6000	12000	17000
3	29000	6000	18000	11000
4	29000	6000	24000	5000

Поясним, как заполняется таблица.

Накопленная амортизация = (Ежегодное начисление на износ) × × (номер года) = 6000×(номер года).

Балансовая стоимость на конец года = Первоначальная стоимость – Накопленная амортизация, то есть в каждой строке из числа 2-го столбца вычитаем число 4-го столбца и результат пишем в 5-й столбец.

Задача 6. Предприятие купило станок за $S = 27000$ руб., период эксплуатации которого $n = 4$ года. После этого станок можно будет продать на вторичном рынке за $P = 7000$ руб. (остаточная стоимость). Определить методом равномерного начисления износа ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

§ 4.2. МЕТОД НАЧИСЛЕНИЯ ИЗНОСА С СОКРАЩАЮЩЕЙСЯ БАЛАНСОВОЙ СТОИМОСТИ

Для некоторых внеоборотных активов предприятие получает максимальную пользу в первые годы их эксплуатации (например, от компьютера). Тогда при начислении амортизации используется *норма амортизации* — величина, показывающая, какую долю от оставшейся балансовой стоимости актива нужно списать в очередной год.

Норма амортизации вычисляется по следующей формуле: норма амортизации $= 1 - \sqrt[n]{P/S}$, где S — первоначальная стоимость актива, P — остаточная стоимость актива ($P \neq 0$), n — период эксплуатации актива.

Метод начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости никогда полностью не сводит уровень остаточной стоимости до нуля. Правда, когда величина балансовой стоимости актива становится очень незначительной по сравнению с первоначальной стоимостью, она может быть списана полностью в последний год.

Пример 7. В примере 6 определим методом начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости норму амортизации, ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

Норма амортизации $= 1 - \sqrt[n]{P/S} = 1 - \sqrt[4]{5000/29000} \approx 0{,}356$, то есть ежегодные начисления на износ составляют 35,6% от балансовой стоимости станка на конец предыдущего года.

Заполним таблицу.

Год	Первоначальная стоимость, руб.	Начисления на износ на счете прибылей и убытков, руб.	Накопленная амортизация, руб.	Балансовая стоимость на конец года, руб.
1	29000	10324	10324	18676
2	29000	6648,66	16972,66	12027,34
3	29000	4281,73	21254,39	7745,61
4	29000	2757,44	24011,83	4988,17

Поясним, как заполняется таблица.

Начисления на износ на счете прибылей и убытков для 1-го года равны 29000×0,356 = 10324 руб. Этот результат запишем в 1-й строке 3-го столбца.

В дальнейшем каждое число 3-го столбца равно произведению числа из предыдущей строки последнего столбца и нормы амортизации 0,356. Все результаты округляем до двух цифр после запятой.

Каждое число 4-го столбца есть сумма числа из этой же строки 3-го столбца и числа из предыдущей строки 4-го столбца.

Из чисел 2-го столбца вычитаем числа 4-го столбца и результат пишем в последний столбец.

Мы видим, что из-за ошибок округления балансовая стоимость на конец 4-го года 4988,17 руб. отличается от остаточной стоимости $P = 5000$ руб.

Задача 7. В задаче 6 определить методом начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости норму амортизации, ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

§ 4.3. МЕТОД СУММЫ ГОДИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Если остаточная стоимость $P = 0$, то метод начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости использовать нельзя. В этом случае для начисления ускоренной амортизации можно применить метод суммы годичных чисел — метод ускоренной амортизации со списанием суммы, равной долям оставшихся лет в общей сумме лет.

Пример 8. Пусть в примере 6 остаточная стоимость $P = 0$. Определим методом суммы годичных чисел ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

Так как станок используется 4 года, то сумма годичных чисел равна $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Поэтому в 1-й, 2-й, 3-й и 4-й годы сумма амортизационных отчислений равна 4/10, 3/10, 2/10 и 1/10 от первоначальной стоимости станка (29000 руб.). Заполним таблицу.

Год	Первоначальная стоимость, руб.	Начисления на износ на счете прибылей и убытков, руб.	Накопленная амортизация, руб.	Балансовая стоимость на конец года, руб.
1	29000	11600	11600	17400
2	29000	8700	20300	8700
3	29000	5800	26100	2900
4	29000	2900	29000	0

Задача 8. Пусть в задаче 6 остаточная стоимость $P = 0$. Определить методом суммы годичных чисел ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

§ 4.4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ НАЧИСЛЕНИЯ АМОРТИЗАЦИИ

Два предприятия с одинаковым составом внеоборотных активов могут получить различные финансовые результаты из-за использования разных методов начисления амортизации. Выбор метода начисления амортизации влияет на показываемую чистую прибыль предприятия на конец финансового года.

В методе уменьшающегося остатка (методе начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости, методе суммы годичных чисел) на первые годы приходится большая часть отчислений на износ, что увеличивает общие затраты и сокращает чистую прибыль

и обязательства по налогам. Но в последние годы списания актива величина годовых амортизационных отчислений уже меньше, чем в методе равномерного начисления износа, то есть возрастает прибыль и увеличивается налог. Поэтому предприятие уплатит ту же самую сумму налога, перераспределенную во времени, то есть в первые годы эксплуатации актива предприятие как бы получает бесплатный кредит от государства. Обычно этот «кредит» используют для обновления внеоборотных активов.

Выбор метода амортизации определяется не видом актива, а предполагаемым режимом использования объекта. Например, в большинстве случаев амортизация зданий определяется методом равномерного начисления износа, а амортизация транспортных средств — методом начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости.

В пользу метода уменьшающегося остатка обычно приводят два аргумента:

1) затраты на содержание и ремонт объекта растут по мере увеличения его срока службы (то есть методом уменьшающегося остатка получается более точный конечный финансовый результат);

2) многие внеоборотные активы теряют значительную часть своей рыночной стоимости уже в первые годы эксплуатации.

В период инфляции выбор метода начисления износа с сокращающейся балансовой стоимостью выгоден предприятию тем, что оно платит свои налоги обесцененными деньгами.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовые функции, которые позволяют вычислить величину амортизации.

Финансовая функция *АМР* (в Excel 2002 эта функция называется *АПЛ*) возвращает величину амортизации за один период, начисляемую равномерным способом: $f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *АМР* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графах *стоимость* и *ликвидная_стоимость* указываются первоначальная стоимость актива и ликвидационная стоимость актива соответственно. В графе *время_амортизации* нужно указать срок использования актива. *ОК*. Например, при первоначальной стоимости актива 3000 руб., ликвидационной стоимости 1000 руб. и сроке использования актива 4 года величина ежегодной амортизации равна *АМР* (3000; 1000; 4) = = 500 руб.

Финансовая функция *ДОБ* (в Excel 2002 эта функция называется *ФУО*) возвращает величину амортизации за один период, начисляемую методом сокращающегося остатка: $f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *ДОБ* $\rightarrow$ $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *остаточная_стоимость* указывается ликвидационная стои-

мость актива. В графе *время_эксплуатации* нужно указать срок использования актива. В графе *период* указывается, амортизационные начисления за какой год интересуют исследователя. Необязательный аргумент *месяц* показывает число месяцев в 1-м году (по умолчанию 1-й год = 12 месяцев). *ОК*.

Например, амортизационные начисления за 3-й год методом сокращающегося остатка равны *ДОБ* (3000; 1000; 4; 3) ≈ 415,87 руб.

Финансовая функция *АМГД* (в Excel 2002 эта функция называется *АСЧ*) возвращает величину амортизации для указанного периода, начисляемую по методу суммы годичных чисел: f_x → *финансовые* → → *АМГД* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *жизнь* нужно указать срок эксплуатации актива. *ОК*. Например, амортизационные начисления за 3-й год по методу суммы годичных чисел равны *АМГД* (3000; 1000; 4; 3) = 400 руб.

При анализе результатов деятельности предприятия рекомендуется ознакомиться с пояснениями к финансовой отчетности предприятия и определить амортизационную политику предприятия. Это поможет в оценке активов предприятия.

Широко распространено заблуждение, когда к амортизационным отчислениям относятся как к реальному источнику денежных потоков. Денежные средства и амортизация — вещи невзаимосвязанные. Амортизация — это чисто бухгалтерская операция по распределению стоимости актива на какое-то количество лет без значительного сокращения суммы годовой прибыли. Предприятие не может в буквальном смысле откладывать амортизационные отчисления, чтобы потом приобрести на эти деньги новый актив.

На практике активы группируются по классам и списываются в течение установленного числа лет. Например, срок амортизации активов какого-то класса может быть установлен 3 года, хотя сам актив может прослужить и 10 лет. Поэтому при сравнении предприятий следует обратить внимание на амортизационную политику.

Глава 5

РАСЧЕТ ЗАДОЛЖЕННОСТИ НА КОНЕЦ ОТЧЕТНОГО ПЕРИОДА

§ 5.1 РАСЧЕТ САЛЬДО ДЕБИТОРСКОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ НА КОНЕЦ ОТЧЕТНОГО ПЕРИОДА

Сальдо дебиторской задолженности на конец отчетного периода — это сумма, которую задолжали предприятию клиенты на конец отчетного периода. Сальдо дебиторской задолженности на конец отчетного периода вычисляется по следующей формуле:

сальдо дебиторской задолженности на конец отчетного периода	=	**сальдо дебиторской задолженности на начало отчетного периода**	+	**продажи в кредит**	−	**поступления от дебиторов**	.

Пример 9. Сальдо дебиторской задолженности на начало финансового года было равно 20000 руб. В течение года имели место следующие операции: продажи в кредит равны 50000 руб., а поступления от дебиторов — 45000 руб. Определим сальдо дебиторской задолженности на конец финансового года.

Сальдо дебиторской задолженности на конец финансового года = = сальдо дебиторской задолженности на начало финансового года + + продажи в кредит − поступления от дебиторов = 20000 + 50000 − − 45000 = 25000 руб.

Задача 9. Сальдо дебиторской задолженности на начало финансового года было равно 25000 руб. В течение года имели место следующие операции: продажи в кредит равны 45000 руб., а поступления от дебиторов — 40000 руб. Определить сальдо дебиторской задолженности на конец финансового года.

§ 5.2. РАСЧЕТ САЛЬДО КРЕДИТОРСКОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ НА КОНЕЦ ОТЧЕТНОГО ПЕРИОДА

Сальдо кредиторской задолженности на конец отчетного периода — это сумма, которую предприятие задолжало поставщикам на конец отчетного периода. Сальдо кредиторской задолженности на конец отчетного периода вычисляется по следующей формуле:

Пример 10. Сальдо кредиторской задолженности на начало финансового года было равно 20000 руб. В течение года имели место следующие операции: закупки в кредит равны 55000 руб., а выплаты по кредиторской задолженности — 40000 руб. Определим сальдо кредиторской задолженности на конец финансового года.

Сальдо кредиторской задолженности на конец финансового года = = сальдо кредиторской задолженности на начало финансового года + + закупки в кредит – выплаты по кредиторской задолженности = = 20000 + 55000 – 40000 = 35000 руб.

Задача 10. Сальдо кредиторской задолженности на начало финансового года было равно 25000 руб. В течение года имели место следующие операции: закупки в кредит равны 35000 руб., а выплаты по кредиторской задолженности — 45000 руб. Определить сальдо кредиторской задолженности на конец финансового года.

Глава 6

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

§ 6.1. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДОКУМЕНТОВ ФИНАНСОВОЙ ОТЧЕТНОСТИ

Финансовая отчетность предприятия — это наиболее объективный источник информации о предприятии и эффективности его деятельности, который доступен менеджерам, инвесторам и конкурентам. Инвесторы на основании финансовой отчетности делают вывод о целесообразности инвестиций в акции предприятия. Опубликованные финансовые отчеты помогают конкурентам оценить относительную устойчивость предприятия в отрасли.

Внутри предприятия документы финансовой отчетности используются для оценки сильных и слабых сторон финансовой деятельности предприятия, его готовности к использованию предоставляемых возможностей и противостоянию грозящим рискам, проистекающим из внешней среды бизнеса, а также соответствия достигнутых предприятием результатов ожиданиям его инвесторов. Необходимо сопоставить результаты предприятия с результатами его ближайших конкурентов и со среднеотраслевыми стандартами.

Анализ данных прошлых периодов — это первый шаг в определении финансовой стратегии предприятия и установлении четких задач на будущее. Такой анализ создает некоторый контроль над деятельностью предприятия в будущем.

§ 6.2. СУТЬ АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Из всего вышесказанного следует, что необходим простой инструмент, позволяющий сосредоточить внимание на самых важных областях деятельности предприятия и сопоставить результаты деятельно-

сти различных предприятий. Одним из таких инструментов является *анализ финансовых коэффициентов*, который использует вычисление финансовых коэффициентов как отправную точку для интерпретации финансовой отчетности.

Коэффициент — это отношение одного показателя к другому. Анализ финансовых коэффициентов используется в целях контроля за хозяйственной деятельностью предприятия и для выявления сильных и слабых сторон предприятия относительно конкурентов, а также при планировании деятельности предприятия на будущее.

Расчет финансовых коэффициентов сосредоточен в основном на трех ключевых областях бизнеса:

- ✧ прибыльность (управление процессом покупки и продажи);
- ✧ использование ресурсов (управление активами);
- ✧ доходы инвесторов.

Как определить те возможности, которые обеспечивают эффективность хозяйственной деятельности предприятия (то есть наиболее высокую отдачу при минимально возможном размере инвестиций и разумной степени риска)? Ответ на это вопрос дают такие финансовые показатели, как эффективность использования ресурсов и рентабельность.

§ 6.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

В этом разделе мы попытаемся дать ответ на следующий вопрос: каков объем продаж на каждый вложенный инвестором рубль в рассматриваемом отчетном периоде?

§ 6.3.1. Коэффициент оборачиваемости активов

Коэффициент оборачиваемости активов вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент оборачиваемости активов}} = \boxed{\text{объем продаж}} : \boxed{\text{суммарные чистые активы}},$$

где $$\boxed{\text{суммарные чистые активы}} = \boxed{\text{внеоборотные активы}} + \boxed{\text{оборотные активы}} - \boxed{\text{краткосрочные обязательства}}.$$

Коэффициент оборачиваемости активов показывает, какой объем продаж приходится на каждый вложенный инвестором рубль в рассматриваемом отчетном периоде.

Пример 11. На конец финансового года внеоборотные активы предприятия равны 100000 руб., оборотные активы — 40000 руб., а краткосрочные обязательства — 30000 руб. В течение отчетного финансового года объем продаж равен 300000 руб. Определим коэффициент оборачиваемости активов.

Суммарные чистые активы = внеоборотные активы + оборотные активы – краткосрочные обязательства = 100000 + 40000 – 30000 = = 110000 руб.

Тогда коэффициент оборачиваемости активов = (объем продаж)/(суммарные чистые активы) = 300000/110000 ≈ 2,73, то есть на каждый вложенный инвестором рубль приходится объем продаж 2,73 руб. в рассматриваемом отчетном периоде.

Задача 11. На конец финансового года внеоборотные активы предприятия равны 120000 руб., оборотные активы — 50000 руб., а краткосрочные обязательства — 60000 руб. В течение отчетного финансового года объем продаж равен 350000 руб. Определить коэффициент оборачиваемости активов.

Коэффициент оборачиваемости активов у розничного торговца всегда выше, чем у производителя, так как производителю необходимо осуществлять крупные инвестиции в машины и оборудование (то есть производство более капиталоемкое). А розничный торговец продает товары, произведенные кем-то другим.

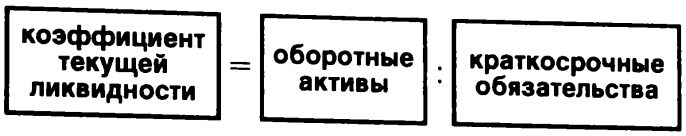
На коэффициент оборачиваемости активов можно повлиять, изменив либо объем продаж (с помощью маркетинговой деятельности), либо размер вложенного капитала (изменив структуру краткосрочного капитала предприятия или за счет изменения инвестиций во внеоборотные активы).

§ 6.3.2. Ликвидность

Ликвидность — это показатель способности предприятия погашать краткосрочные обязательства за счет оборотных активов. Предприятие считается ликвидным, если в его распоряжении имеется достаточно оборотных активов для покрытия всех краткосрочных долговых обязательств.

Ликвидность анализируют с помощью двух финансовых коэффициентов: коэффициента текущей ликвидности и коэффициента срочной ликвидности.

Коэффициент текущей ликвидности вычисляется по следующей формуле:



Коэффициент текущей ликвидности показывает соотношение между стоимостью оборотных активов предприятия, которые ликвидны в том смысле, что могут быть обращены в наличные денежные средства в следующем финансовом году, и задолженностью, которая подлежит погашению в том же финансовом году.

Оптимальный размер ликвидности определяется хозяйственной деятельностью предприятия. У большинства промышленных предприятий коэффициент текущей ликвидности держится на относительно высоком уровне (порядка 1,25–1,85), так как запасы в основном состоят из сырья, полуфабрикатов и готовой продукции. Поэтому в случае необходимости их трудно оперативно реализовать за полную стоимость.

Пример 12. На конец финансового года запасы предприятия равны 30000 руб., дебиторская задолженность — 15000 руб., кассовая наличность — 5000 руб., а краткосрочные обязательства — 55000 руб. Определим коэффициент текущей ликвидности.

Оборотные активы = запасы + дебиторская задолженность + кассовая наличность = 30000 + 15000 + 5000 = 50000 руб.

Тогда коэффициент текущей ликвидности = (оборотные активы)/(краткосрочные обязательства) = 50000/55000 ≈ 0,91.

Мы видим, что предприятие является неликвидным, так как в случае немедленного погашения всех краткосрочных обязательств помимо реализации всех собственных оборотных активов оно должно найти дополнительные денежные средства из иных источников.

Для погашения каждого рубля краткосрочных обязательств предприятие сможет немедленно мобилизовать 0,91 руб. путем реализации запасов, истребования дебиторской задолженности и использования кассовой наличности, а 1 – 0,91 = 0,09 руб. придется привлекать со стороны.

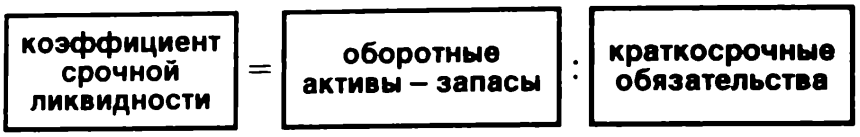
Задача 12. На конец финансового года запасы предприятия равны 35000 руб., дебиторская задолженность — 13000 руб., кассовая наличность — 4000 руб., а краткосрочные обязательства — 58000 руб. Определить коэффициент текущей ликвидности.

Очень большое значение коэффициента текущей ликвидности указывает на нединамичное управление предприятием. Это может

произойти при чрезмерном накоплении запасов или при предоставлении слишком продолжительного кредита потребителям.

Основной недостаток коэффициента текущей ликвидности — это оценка предприятия так, как если бы оно находилось на грани ликвидации. Коэффициент текущей ликвидности отражает статичное состояние и не учитывает постоянно происходящих на предприятии динамических изменений. Для более обоснованной оценки кредитоспособности предприятия следует проанализировать движение денежных средств предприятия.

Коэффициент срочной ликвидности вычисляется по следующей формуле:



Коэффициент срочной ликвидности показывает, какая часть задолженности может быть погашена в короткий срок за счет оборотных активов, если запасы не представляется возможным перевести в наличные денежные средства. Для промышленного предприятия такое предположение вполне разумно.

Счета дебиторов превращаются в денежные средства в относительно короткий промежуток времени. Поэтому, скорее всего, вся дебиторская задолженность будет погашена. А вот прохождение запасов через процесс производства, продажу и превращение в счета дебиторов может занять немало времени. Да и предприимчивые покупатели не упустят возможности приобрести товар по заниженным ценам, воспользовавшись отчаянным положением продавца.

Приемлемое значение коэффициента срочной ликвидности находится в диапазоне от 0,8 до 1,2.

Пример 13. Определим коэффициент срочной ликвидности в примере 12.

Оборотные активы – запасы = дебиторская задолженность + кассовая наличность = 15000 + 5000 = 20000 руб.

Тогда коэффициент срочной ликвидности = (оборотные активы – – запасы)/(краткосрочные обязательства) = 20000/55000 ≈ 0,36.

Мы видим, что в случае немедленного погашения всех краткосрочных обязательств, если предприятие по каким-то причинам не сможет реализовать свои запасы, ему придется привлекать со стороны 1 – 0,36 = 0,64 руб. на каждый рубль краткосрочных обязательств.

Задача 13. Определить коэффициент срочной ликвидности в задаче 12.

Очень часто на практике наблюдается ситуация, когда у предприятия при постоянном коэффициенте текущей ликвидности происходит снижение коэффициента срочной ликвидности. Это говорит о том, что товарные запасы предприятия растут относительно дебиторской задолженности и денежных средств.

Финансовые институты, предоставляющие услуги по кредитованию, при оценке ликвидности запасов испытывают трудности и чувствуют себя увереннее при работе только с дебиторской задолженностью и денежными средствами. Поэтому коэффициент срочной ликвидности пользуется большей популярностью, чем коэффициент текущей ликвидности.

Превышение краткосрочной задолженности над суммой оборотных активов не всегда свидетельствует о плохом финансовом положении предприятия. Например, у многих супермаркетов, имеющих широкую торговую сеть, низкие показатели ликвидности из-за невысокой дебиторской задолженности и значительных закупок товаров в кредит. Тщательный анализ движения денежных средств показывает способность этих супермаркетов погашать кредиторскую задолженность в срок.

Оценка ликвидности предприятия с помощью коэффициентов ликвидности полностью статична и сводится к рассмотрению предприятия в определенной ситуации: все ликвидные активы в данный момент рассматриваются как средства погашения задолженности. Предприятие же использует свои денежные потоки для осуществления платежей во временной перспективе.

§ 6.3.3. Влияние хозяйственных операций на уровень ликвидности

С точки зрения возможных требований о немедленном погашении задолженности кредиторам предприятию выгодно иметь наличные денежные средства или активы, которые можно перевести в наличные денежные средства. Низкий же показатель ликвидности говорит о том, что только небольшая часть ресурсов задействована в оборотном капитале и предприятие использует коммерческий кредит в качестве источника краткосрочного финансирования. Контролируя запасы и дебиторскую задолженность, устанавливая доверительные отношения с торговыми кредиторами, можно управлять оборотным капиталом предприятия.

Для оценки используют следующие показатели:

✧ коэффициент оборачиваемости запасов;

✧ период оборачиваемости дебиторской задолженности;

✧ период оборачиваемости кредиторской задолженности.

Оптимальный уровень этих показателей в значительной степени зависит от специфики отрасли, в которой действует предприятие, и от системы управления предприятием. Далее рассмотрим перечисленные показатели подробнее.

Коэффициент оборачиваемости запасов вычисляется по следующей формуле:

Коэффициент оборачиваемости запасов показывает, какова оборачиваемость запасов в течение финансового года. Чем выше коэффициент оборачиваемости запасов, тем меньше размер денежных средств, связанных в запасах.

Пример 14. На конец финансового года запасы предприятия равны 30000 руб., а себестоимость проданной продукции — 120000 руб. Определим коэффициент оборачиваемости запасов.

Коэффициент оборачиваемости запасов = (себестоимость проданной продукции)/(средний размер запаса) = 120000/30000 = 4, то есть в течение финансового года оборачиваемость запасов равна 4.

Задача 14. На конец финансового года запасы предприятия равны 35000 руб., а себестоимость проданной продукции — 105000 руб. Определить коэффициент оборачиваемости запасов.

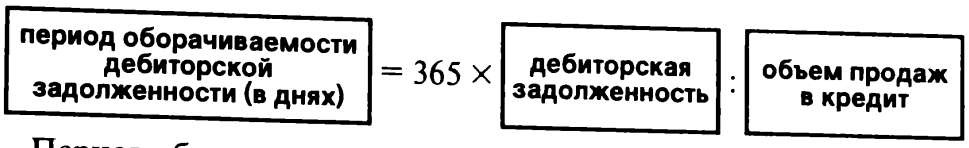
Большое значение коэффициента оборачиваемости запасов говорит о том, что запасы не лежат на складе мертвым грузом в ожидании переработки и реализации, а быстро проходят по цепочке производство → реализация → дебиторская задолженность → денежная наличность.

Поддержание запасов на минимальном уровне снижает риск затоваривания и указывает на эффективное использование капитала. Информационные технологии предоставили возможность значительно сократить уровень запасов в производственной сфере, оптовой и розничной торговле.

Если коэффициент оборачиваемости запасов значительно превышает уровень, характерный для данной отрасли, то повышается риск недостаточности запасов. Это может вызвать снижение сервисного

обслуживания потребителей и отрицательно сказаться на конкурентных позициях предприятия.

Период оборачиваемости дебиторской задолженности вычисляется по следующей формуле:



Период оборачиваемости дебиторской задолженности показывает, через сколько дней в среднем дебиторы погашают свою задолженность предприятию.

Производитель часто вынужден предоставлять благоприятные условия коммерческого кредита для поддержания конкурентоспособности в борьбе за оптовых и розничных торговцев.

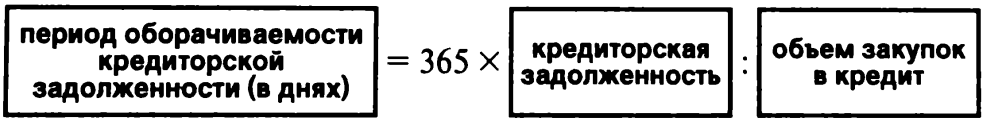
Предприятие стремится свести к минимуму уровень дебиторской задолженности, поощряя за раннее погашение задолженности и уведомляя о наступлении срока погашения обязательств.

Пример 15. На конец финансового года дебиторская задолженность предприятия равна 30000 руб., а объем продаж в кредит — 150000 руб. Определим период оборачиваемости дебиторской задолженности.

Период оборачиваемости дебиторской задолженности = = 365×(дебиторская задолженность)/(объем продаж в кредит) = = 365×30000/150000 = 73 дня, то есть в прошедшем финансовом году дебиторы погашали свою задолженность предприятию в среднем через 73 дня.

Задача 15. На конец финансового года дебиторская задолженность предприятия равна 35000 руб., а объем продаж в кредит — 100000 руб. Определить период оборачиваемости дебиторской задолженности.

Период оборачиваемости кредиторской задолженности вычисляется по следующей формуле:



Период оборачиваемости кредиторской задолженности показывает, через сколько дней в среднем предприятие оплачивало предъявленные счета кредиторов.

Пример 16. На конец финансового года кредиторская задолженность предприятия равна 30000 руб., а объем закупок в кредит —

90000 руб. Определим период оборачиваемости кредиторской задолженности.

Период оборачиваемости кредиторской задолженности = = 365×(кредиторская задолженность)/(объем закупок в кредит) = = 365×30000/90000 ≈ 122 дня, то есть в прошедшем финансовом году предприятие оплачивало предъявленные счета кредиторов в среднем через 122 дня после предъявления этих счетов.

Задача 16. На конец финансового года кредиторская задолженность предприятия равна 35000 руб., а объем закупок в кредит — 140000 руб. Определить период оборачиваемости кредиторской задолженности.

Обычно люди больше заботятся о получении своих денег, а не о выплате взятых кредитов. Увеличение периода оборачиваемости кредиторской задолженности может улучшить на предприятии положение с наличностью, но следует остерегаться недовольства поставщиков.

Интересно сравнить периоды оборачиваемости дебиторской задолженности и кредиторской задолженности, чтобы посмотреть, надолго ли в среднем предприятие оставляет при себе полученные денежные средства, прежде чем снова расстаться с ними.

Три рассмотренных показателя (коэффициент оборачиваемости запасов, период оборачиваемости дебиторской задолженности и период оборачиваемости кредиторской задолженности) наиболее ценны для среднего звена руководства предприятием при выработке целей и осуществлении контроля управления. Однако их невозможно вычислить тем, кто не работает на этом предприятии и не имеет доступа к информации, так как такая информация нигде не публикуется.

Из-за колебания уровня запасов в течение года указанное в балансе количество запасов можно рассматривать лишь как приблизительную оценку реального среднего размера запасов. В опубликованном счете прибылей и убытков не указывается доля продаж и закупок, осуществляемых в кредит. Поэтому к любой оценке этих финансовых коэффициентов, сделанной аналитиками, не работающими на изучаемом предприятии, нужно подходить очень осторожно.

§ 6.4. РЕНТАБЕЛЬНОСТЬ

В этом параграфе мы постараемся найти ответ на вопрос о том, насколько прибыльна каждая продажа.

Рентабельность предприятия — это отношение фактической прибыли к объему продаж. Используя счет прибылей и убытков, вычис-

ляют два показателя рентабельности предприятия: чистую маржу и валовую маржу.

Чистая маржа вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{чистая маржа}} = \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} : \boxed{\text{объем продаж}} \right) \times 100\%.$$

Чистая маржа показывает, какая доля объема продаж остается у предприятия в виде чистой прибыли после покрытия себестоимости проданной продукции и всех расходов предприятия. Этот показатель может служить указателем допустимого уровня рентабельности, при котором предприятие еще не терпит убытки. На чистую маржу можно влиять ценовой политикой предприятия (валовая маржа и наценка) и контролем над затратами.

Валовая маржа вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{валовая маржа}} = \left(\boxed{\text{валовая прибыль}} : \boxed{\text{объем продаж}} \right) \times 100\%.$$

Наблюдается обратная зависимость между валовой маржой и оборачиваемостью запасов: чем ниже оборачиваемость запасов, тем выше валовая маржа; чем выше оборачиваемость запасов, тем ниже валовая маржа.

Производители должны обеспечивать себе более высокую валовую маржу по сравнению с торговлей, так как их продукт больше времени находится в производственном процессе. Валовая маржа определяется политикой ценообразования.

С валовой маржой не следует путать другой инструмент ценообразования — *наценку*, которая вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{наценка}} = \left(\boxed{\text{валовая прибыль}} : \boxed{\begin{array}{c}\text{себестоимость} \\ \text{проданной продукции}\end{array}} \right) \times 100\%.$$

При установлении наценки следует исходить из желаемой стратегической позиции предприятия относительно конкурентов. На одном конце рыночного спектра находятся предприятия, обеспечивающие высокое качество и назначающие заведомо высокие цены (то есть имеющие невысокий объем продаж). На другом конце рыночного спектра — предприятия, продающие большие объемы товара по низким ценам.

Пример 17. Определим в примере 1 чистую маржу, валовую маржу и наценку.

Чистая маржа = (чистая прибыль)/(объем продаж)×100% = = 80000/200000×100% = 40%. Поэтому из каждого 1 руб. объема про-

даж чистая прибыль после покрытия себестоимости проданной продукции и всех расходов предприятия составляет 0,4 руб.

Валовая маржа = (валовая прибыль)/(объем продаж)×100% = = 110000/200000×100% = 55%.

Наценка = (валовая прибыль)/(себестоимость проданной продукции)×100% = 110000/90000×100% ≈ 122%.

Задача 17. Определить в задаче 1 чистую маржу, валовую маржу и наценку.

§ 6.5. ОЦЕНКА ФИНАНСОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Детальный анализ финансовых коэффициентов применим только для внутренних целей менеджмента. Инвесторам же необходим простой показатель, отражающий в обобщенном виде другие финансовые коэффициенты и дающий ответ на вопрос о том, как действует данное предприятие по сравнению с другими предприятиями данной отрасли. Под финансовыми результатами мы будем понимать прибыль, полученную на каждый вложенный в предприятие рубль.

Основной показатель здесь — это *коэффициент рентабельности чистых активов ROCE* (*англ.* Return on Capital Employed), который вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{ROCE}} = \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} : \boxed{\text{суммарные чистые активы}} \right) \times 100\%,$$

где $\boxed{\text{суммарные чистые активы}} = \boxed{\text{внеоборотные активы}} + \boxed{\text{оборотные активы}} - \boxed{\text{краткосрочные обязательства}}$.

Величина *ROCE* показывает, какова чистая прибыль с каждого рубля, вложенного инвесторами в предприятие.

С помощью этого показателя инвестор может решить вопрос о том, стоит ли вкладывать деньги в предприятие или лучше поместить их в банк под проценты.

Так как

$$\boxed{\text{ROCE}} = \boxed{\text{чистая прибыль}} : \boxed{\text{суммарные чистые активы}} =$$

$$= \left(\boxed{\text{объем продаж}} : \boxed{\text{суммарные чистые активы}} \right) \times \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} : \boxed{\text{объем продаж}} \right) =$$

$$= \boxed{\text{коэффициент оборачиваемости активов}} \times \boxed{\text{чистая маржа}},$$

то коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* испытывает влияние эффективности использования ресурсов (оценивается коэффициентом оборачиваемости активов) и рентабельности (оценивается чистой маржой).

Пример 18. В примере 11 чистая прибыль равна 35000 руб. Определим коэффициент рентабельности чистых активов.

Коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* = = (чистая прибыль)/(суммарные чистые активы)×100% = = 35000/110000×100% ≈ 32%, то есть чистая прибыль с каждого рубля, вложенного инвесторами в предприятие, равна 0,32 руб.

Задача 18. В задаче 11 чистая прибыль равна 40000 руб. Определить коэффициент рентабельности чистых активов.

§ 6.6. ОГРАНИЧЕНИЯ АНАЛИЗА КОЭФФИЦИЕНТОВ

Различия учетной политики предприятий, принцип учета по себестоимости, отсутствие приемлемых сопоставимых данных, различия условий деятельности предприятий, изменение покупательной способности денег, внутригодовые колебания учетной информации — все это накладывает ограничения на возможности анализа коэффициентов. При анализе коэффициентов не принимаются во внимание качественные характеристики товаров и услуг, рабочей силы, трудовых отношений.

Невозможно оценить весь набор рассмотренных коэффициентов как «плохой» или «хороший», пока не будут проведены детальный анализ или сопоставление этих показателей с предыдущими результатами предприятия и со стандартными показателями по отрасли в целом. Поэтому следует проявлять осторожность в толковании финансовых показателей и не делать поспешных выводов без полной информации о предприятии и отрасли в целом.

Не существует абсолютного стандарта для оценки того, является ли финансовый коэффициент слишком высоким или слишком низким. При вычислении финансовых коэффициентов используются числовые показатели, которые определяются произвольными методами. Довольно трудно определить группу сравнимых предприятий. Ведь предприятия отличаются по размерам, степени охвата рынка, методу оценки запасов, методу начисления амортизации и т. д.

Хотя финансовые коэффициенты и подвержены влиянию условностей, возникающих при применении бухгалтерских расчетов или

методов оценки, но в совокупности эти показатели могут подготовить основу для дальнейшего анализа деятельности предприятия.

Важно уметь не только рассчитывать коэффициенты, но и правильно их интерпретировать. Интерпретация финансовых коэффициентов — сложная работа, которая требует от аналитиков высокой квалификации и большого опыта. Ибо не существует правильной или неправильной интерпретации — это процесс творческий и субъективный.

Поэтому анализ результатов деятельности предприятия с использованием финансовых коэффициентов может служить лишь общим руководством. В процессе принятия финансовых решений не следует полностью на него полагаться.

Глава 7

УЧЕТ ЗАТРАТ

Ресурсы предприятия ограничены. Поэтому нужен план их эффективного использования. Этот план должен содержать прогноз будущих объема продаж и себестоимости проданной продукции. Основная цель — это контроль над затратами и максимизация прибыли предприятия.

§ 7.1. ЦЕНТРЫ ЗАТРАТ

Затраты — это расходы, отнесенные на конкретный продукт, работника или производственный процесс. Без знания фактических затрат ведения хозяйственной деятельности невозможно принять правильные решения о деятельности предприятия в будущем. Одна из целей предприятия — окупаемость затрат в долгосрочном плане.

Некоторые виды затрат можно легко отождествить с конкретным продуктом или производственным процессом. Но большая часть затрат менее специфична. Такие затраты называются *накладными расходами*. Для управления накладными расходами руководство предприятия связывает их с центрами затрат.

Центры затрат — это подразделения или единицы оборудования, в отношении которых затраты могут быть конкретизированы для целей контроля и управления. Предприятие — это своеобразная иерархия центров затрат. Примеры центров затрат: филиал предприятия, производственная линия.

Некоторые затраты непосредственно связаны с центром затрат и могут быть распределены на него. Другие виды затрат можно распределить сразу по нескольким центрам затрат. Это распределение должно быть пропорциональным полученной выгоде от этих затрат (на основе объема продаж, числа работников, занимаемой площади и т. д.). Например, арендная плата за помещения супермаркета распределяется между отделами пропорционально занимаемой площади.

§ 7.2. ЦЕНТРЫ ПРИБЫЛИ

Лишь некоторые подразделения предприятия непосредственно приносят доходы. Это — *центры прибыли.* Центры прибыли — это одновременно и центры затрат, но не все центры затрат являются центрами прибыли. Все затраты должны покрываться центрами прибыли.

Счет прибылей и убытков предприятия следует разделить по центрам прибыли. Будет получена дополнительная информация об относительном вкладе каждого центра прибыли в общую прибыль предприятия. Это укажет на целесообразность расширения или сокращения каких-то подразделений предприятия.

§ 7.3. НОРМАТИВНЫЕ И ФАКТИЧЕСКИЕ ЗАТРАТЫ

Большинство видов хозяйственной деятельности связано с производством товаров, предназначенных для продажи потребителю. На каждой стадии производства продукт требует определенных затрат и приобретает добавочную стоимость. Именно затраты определяют цены, обеспечивающие прибыль.

Для установления себестоимости продукта используется система учета фактических затрат по заказам или по процессам. При этом фактические затраты служат основой для нормативных затрат, с которыми гораздо проще работать. Использовать фактические затраты в качестве основы для определения цены невозможно из-за того, что цены объявляются потребителю задолго до производства продукта. Но всегда необходимо проводить сопоставление нормативных и фактических затрат.

Нормативные затраты — это затраты, заранее определенные с помощью простых и гибких правил. В условиях инфляции, колебания валютных курсов, конкуренции между поставщиками нормативные затраты представляют собой островок стабильности. Ведь при непрекращающемся движении товарных потоков и постоянном движении цен выяснение реальной стоимости товара может занять очень много времени. А при наличии существенных расхождений между нормативными и фактическими затратами можно сконцентрироваться на исследовании проблемных ситуаций.

Недостаток нормативных затрат заключается в их возможном значительном отличии от фактических затрат. Ведь нормативные затраты устанавливаются на основе стандартного объема производства, стандартной структуры расходов, стандартных ставок заработной

платы, стандартного времени выполнения операций. Возможно, ни один из этих стандартов никогда не станет реальностью. Это может привести к неверным решениям при назначении цен на продукцию из-за переоценки или недооценки запасов.

Нормативные затраты необходимо периодически пересматривать. На многих предприятиях в некотором объеме ведется учет и фактических затрат. Затраты на материалы и накладные расходы можно проанализировать по материалам бухгалтерии. А рабочее и машинное время отслеживают с помощью специальных *маршрутно-технологических карт*, где отмечается время начала и окончания каждой работы, количество обработанных деталей.

Если фактические затраты сильно отличаются от нормативных затрат, то зачем нужны такие нормативные затраты? Пришло время заменить эти нормативные затраты на новые.

Глава 8

ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА И ЗАТРАТЫ

§ 8.1. ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА

Очень важно понимать взаимосвязь между затратами и достигаемыми объемами продаж и прибылью. Любой вводимый ресурс, который используется для производства продукции, называется *фактором производства*.

Пример 19. Земля, здания, оборудование, труд — это примеры факторов производства.

Задача 19. Привести примеры факторов производства.

Различают постоянные и переменные факторы производства. *Постоянные факторы производства* для своего изменения требуют значительного периода времени. *Переменные факторы производства* могут быстро изменяться в ответ на изменение спроса.

Пример 20. Здания — это пример постоянного фактора производства.

Задача 20. Привести примеры постоянных факторов производства.

Пример 21. Количество часов, отработанных сотрудниками-почасовиками, — это пример переменного фактора производства.

Задача 21. Привести примеры переменных факторов производства.

§ 8.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАТРАТ

Каждый фактор производства сопряжен с определенными затратами. Затраты, связанные с постоянными факторами производства, изменяются только в долгосрочном плане и не зависят от объема

продаж. Затраты, не зависящие от объема продаж, называются *постоянными затратами.*

Пример 22. Затраты на отопление заводоуправления — это постоянные затраты. Заработная плата административного персонала зависит от окладов, а не от объема выпуска. Это постоянные затраты.

Задача 22. Привести примеры постоянных затрат.

Независимость постоянных затрат от объема производства следует понимать исключительно в том смысле, что при заданных общих условиях (например, производственные фонды, списочный состав работников) постоянные затраты не зависят от объема выпуска продукции. При изменении указанных условий (например, при изменениях в производственных фондах, сокращении списочного состава работников) постоянные затраты могут соответственно измениться.

Независимо от того, сколько продукции производится за данный период, постоянные затраты должны быть осуществлены в полном объеме. Поэтому их иногда называют *затратами готовности предприятия к производству.*

Затраты на использование переменного фактора производства зависят от объема продаж. Это *переменные затраты.*

Пример 23. Затраты на тару для готовой продукции — это переменные затраты. Сдельная оплата труда — это пример переменных затрат.

Задача 23. Привести примеры переменных затрат.

Понятие постоянности затрат довольно условно. Чем более длительные периоды времени рассматриваются, тем большее количество затрат относят к разряду переменных. Практически любое решение руководства предприятия ведет к увеличению или снижению затрат. Поэтому любые затраты, в принципе, можно назвать переменными. Следовательно, при разделении затрат на постоянные и переменные нужно проявлять некоторую гибкость.

Существуют затраты, которым присущи черты и постоянных, и переменных затрат. Это *полупеременные затраты.*

Пример 24. Стоимость использования телефона относится к категории переменных затрат, но фиксированная плата попадает под определение постоянных затрат. Схема стимулирования продаж, основанная на фиксированной ставке до определенного уровня с установленным процентом комиссионных за каждый рубль дохода свыше этого уровня, – это пример полупеременных затрат. Техническое обслуживание оборудования, включающее ежегодный капитальный ре-

монт независимо от объема выпуска (постоянный элемент) и замену частей после производства каждой тысячи единиц (переменный элемент), — это тоже пример полупеременных затрат.

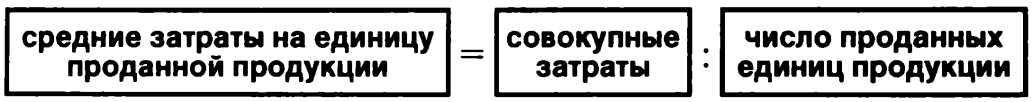
Задача 24. Привести примеры полупеременных затрат.

Совокупные затраты — это сумма всех постоянных и переменных затрат для данного достигнутого объема продаж.

Предприятие стремится минимизировать свои совокупные затраты. Использование переменных факторов производства придает любому бизнесу гибкость и способность оперативно реагировать на изменение экономических условий и рыночной конъюнктуры.

В краткосрочном периоде количество имеющихся в распоряжении предприятия постоянных факторов производства ограничено. Предприятие может производить продукцию только в пределах этих ограничений. Дальнейший рост предприятия может быть достигнут только за счет дополнительных инвестиций капитала в постоянные факторы производства.

Средние затраты на единицу проданной продукции вычисляются по следующей формуле:



Пример 25. Совокупные затраты равны 100000 руб., число проданных единиц продукции — 5000. Определим средние затраты на единицу проданной продукции.

Средние затраты на единицу проданной продукции = (совокупные затраты)/(число проданных единиц продукции) = 100000/5000 = = 20 руб./единицу.

Задача 25. Совокупные затраты равны 150000 руб., число проданных единиц продукции — 6000. Определить средние затраты на единицу проданной продукции.

При открытии нового предприятия объем продаж сначала низок, а средние затраты на единицу проданной продукции относительно высоки. По мере развития и становления предприятия объем продаж увеличивается. Совокупные затраты также увеличиваются. Но изначально постоянные затраты имеют большее значение, так как требуются здания, оборудование и т. д.

Постоянные затраты с течением времени не меняются. Поэтому средние затраты на единицу проданной продукции сокращаются. Это *эффект масштаба*.

Еще одно преимущество эффекта масштаба — это *специализация*. На крупном предприятии существует разграничение функциональных обязанностей, что приводит к значительной экономии.

Но эффект масштаба имеет и недостатки. Чем крупнее предприятие, тем сложнее им управлять. Рост бюрократического аппарата ведет к росту средних затрат на единицу проданной продукции. Это *отрицательный эффект масштаба*. В этом случае нужно пересмотреть набор используемых ресурсов.

Глава 9

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ КАЛЬКУЛЯЦИЯ СЕБЕСТОИМОСТИ

Традиционные системы калькуляции себестоимости продукции, в которых косвенные издержки считаются постоянными и не связанными с принимаемым решением (*нерелевантными*), все чаще подвергаются критике. Так как многие предприятия реализуют на рынке широкий ассортимент продукции, то косвенные издержки (то есть издержки, которые невозможно отнести единственным способом к какой-то целевой затрате) перестают быть относительно небольшими. Поэтому ошибки в результате неправильных решений на основе недостаточной информации стали более вероятными и дорогостоящими.

Снижающиеся затраты на обработку информации привели к созданию *функциональной системы калькуляции затрат — системы ABC* (*англ.* activity-based costing systems).

§ 9.1. СРАВНЕНИЕ ТРАДИЦИОННОЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМ КАЛЬКУЛЯЦИИ СЕБЕСТОИМОСТИ

В традиционной системе калькуляции себестоимости накладные расходы распределяются между производственными и обслуживающими подразделениями, а затем затраты обслуживающих подразделений перераспределяются на производственные подразделения (так называемые центры затрат).

В функциональной системе калькуляции себестоимости накладные расходы распределяются по основным видам деятельности, а не по подразделениям. *Виды деятельности* — это совокупность многих различных задач, для решения которых совершаются соответствующие действия.

Пример 26. Примеры видов деятельности: наладка оборудования, закупка материалов, контроль качества продукции.

Задача 26. Привести примеры видов деятельности.

В функциональной системе калькуляции себестоимости, как правило, центров затрат значительно больше, чем в традиционной системе. Также прослеживается тенденция выделять отдельно факторы издержек для центров поддержки и распределять затраты на вспомогательные виды деятельности непосредственно на целевые затраты без этапа перераспределения их на производственные центры.

В традиционной системе калькуляции затрат применяются только факторы издержек, зависящие от объема производства. В системе ABC используются факторы издержек как зависящие от объема производства, так и не зависящие от него.

Пример 27. Примеры факторов издержек, зависящих от объема производства: часы работы оборудования, необходимые для выпуска продукции; часы труда, непосредственно затрачиваемого для выпуска продукции.

Задача 27. Привести примеры факторов издержек, зависящих от объема производства.

Пример 28. Число наладок оборудования (то есть переходов с выпуска одного вида продукции на другой) — это пример фактора издержек, не зависящего от объема производства.

Задача 28. Привести примеры факторов издержек, не зависящих от объема производства.

Если значительная доля затрат предприятия не связана с объемом выпускаемой продукции, то применение традиционной системы калькуляции затрат может привести к завышению расходов по одним видам продукции и к занижению по другим.

Пример 29. Предприятие производит продукты *X* и *Y*. Продукт *X* выпускается в больших количествах крупными партиями, но нерегулярно, потребляет 35% часов труда основных работников. Продукт *Y* выпускается в ограниченных количествах маленькими партиями и потребляет 10% часов труда основных работников. Объем продаж продуктов *X* и *Y* равен 700000 и 200000 руб. соответственно. Прямые издержки продуктов *X* и *Y* равны 300000 и 50000 руб. соответственно.

После подробного исследования стало ясно, что на каждый продукт за отчетный период приходится по 20% от числа всех обработанных за это время партий продукции и что накладные расходы, начис-

ленные на центр издержек, колеблются в долгосрочном плане в соответствии со спросом на продукцию и выросли до 900000 руб. Определим объявленную прибыль производства продуктов *X* и *Y* с помощью традиционной и функциональной систем учета затрат.

Заполним таблицу с помощью традиционной системы учета затрат.

Показатели (руб.)	Продукт X	Продукт Y
Объем продаж	700000	200000
Прямые издержки	300000	50000
Начисленные накладные расходы	315000	90000
Объявленная прибыль	85000	60000

Поясним, как заполняется таблица.

Традиционная система учета затрат в качестве базы распределения для начисления накладных расходов использует часы труда основных работников.

Для продукта *X* начисленные накладные расходы равны 0,35×900000 = 315000 руб.

Для продукта *Y* начисленные накладные расходы равны 0,1×900000 = 90000 руб.

Объявленная прибыль = объем продаж – прямые издержки – начисленные накладные расходы.

Заполним таблицу с помощью функциональной системы учета затрат.

Показатели (руб.)	Продукт X	Продукт Y
Объем продаж	700000	200000
Прямые издержки	300000	50000
Начисленные накладные расходы	180000	180000
Объявленная прибыль	220000	(30000)

Поясним, как заполняется таблица.

Функциональная система учета затрат в качестве базы распределения для начисления накладных расходов использует долю обрабатываемых партий продукции как фактор издержек. В функциональной системе учета затрат накладные расходы определяются не только выходом продукции.

Для продукта *X* начисленные накладные расходы равны 0,2×900000 = 180000 руб.

Для продукта *Y* начисленные накладные расходы равны 0,2×900000 = 180000 руб.

Функциональная система учета затрат показывает, что производство продукта *Y* убыточно.

Задача 29. Предприятие производит продукты *X* и *Y*. Продукт *X* выпускается в больших количествах крупными партиями, но нерегулярно, потребляет 40% часов труда основных работников. Продукт *Y* выпускается в ограниченных количествах маленькими партиями и потребляет 8% часов труда основных работников. Объем продаж продуктов *X* и *Y* равен 750000 и 250000 руб. соответственно. Прямые издержки продуктов *X* и *Y* равны 330000 и 60000 руб. соответственно.

После подробного исследования стало ясно, что на каждый продукт за отчетный период приходится по 25% от числа всех обработанных за это время партий продукции и что накладные расходы, начисленные на центр издержек, колеблются в долгосрочном плане в соответствии со спросом на продукцию и выросли до 850000 руб. Определить объявленную прибыль производства продуктов *X* и *Y* с помощью традиционной и функциональной систем учета затрат.

§ 9.2. РАСЧЕТ СЕБЕСТОИМОСТИ С ПОМОЩЬЮ ТРАДИЦИОННОЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМ УЧЕТА ЗАТРАТ

Пример 30. Предприятие производит продукты *X* и *Y*.

Показатели	Продукт X	Продукт Y
Объем продаж, ед.	3500	1500
Использование сырья, ед./ед. продукции	6	8
Затраты на основные материалы, руб./ед. продукции	24	21
Труд основных работников, ч/ед. продукции	2	3
Время работы оборудования, ч/ед. продукции	2	1
Затраты на труд основных работников, руб.	10	15
Число производственных циклов	4	6
Число доставок продукта	8	5
Число доставок материалов	20	30
Число производственных заказов	14	11

Накладные расходы на наладку равны 3500 руб., на оборудование — 70000 руб., на получение материалов — 40000 руб., на упаковку — 26000 руб., на инженерное обеспечение – 38000 руб. Определим себестоимость продукции, используя традиционную систему учета затрат и предполагая, что все накладные расходы начисляются на основе времени работы основных работников.

Суммарные накладные расходы = расходы на наладку + расходы на оборудование + расходы на получение материалов + расходы на

упаковку + расходы на инженерное обеспечение = 3500 + 70000 + + 40000 + 26000 + 38000 = 177500 руб.

Суммарные часы труда основных работников = (объем продаж продукта *X*)×(труд основных работников на единицу продукта *X*) + + (объем продаж продукта *Y*)×(труд основных работников на единицу продукта *Y*) = 3500×2 + 1500×3 = 11500 ч.

Тогда ставка накладных расходов по труду основных работников = = (суммарные накладные расходы)/(суммарные часы труда основных работников) = 177500/11500 ≈ 15,43 руб. на 1 ч труда основных работников.

Заполним таблицу себестоимости продукции.

Показатели (руб.)	Единица продукта X	Единица продукта Y
Основные производственные материалы	24	21
Затраты на труд основных работников	10	15
Накладные расходы	30,86	46,29
Суммарные затраты	64,86	82,29

Поясним, как заполняется таблица.

Накладные расходы = (труд основных работников)×(ставка накладных расходов по труду основных работников). Тогда для единицы продукта *X* накладные расходы = 2×15,43 = 30,86 руб., а для единицы продукта *Y* накладные расходы = 3×15,43 = 46,29 руб. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Задача 30. Предприятие производит продукты *X* и *Y*.

Показатели	Продукт X	Продукт Y
Объем продаж, ед.	3400	1600
Использование сырья, ед./ед. продукции	5	9
Затраты на основные материалы, руб./ед. продукции	23	22
Труд основных работников, ч/ед. продукции	3	4
Время работы оборудования, ч/ед. продукции	3	2
Затраты на труд основных работников, руб.	9	14
Число производственных циклов	5	7
Число доставок продукта	8	6
Число доставок материалов	25	30
Число производственных заказов	13	12

Накладные расходы на наладку равны 3600 руб., на оборудование — 75000 руб., на получение материалов — 35000 руб., на упаковку — 27000 руб., на инженерное обеспечение — 39000 руб. Определить себестоимость продукции, используя традиционную систему учета за-

трат и предполагая, что все накладные расходы начисляются на основе времени работы основных работников.

Пример 31. В примере 30 определим себестоимость продукции, используя традиционную систему учета затрат и предполагая, что накладные расходы подразделения приемки материала покрываются на основе ставки распределения накладных расходов на обработку получаемых материалов, а оставшиеся накладные расходы покрываются на основе ставки времени работы оборудования.

Затраты на основные производственные материалы = (затраты на основные производственные материалы для единицы продукта *X*)× ×(объем продаж продукта *X*) + (затраты на основные производственные материалы для единицы продукта *Y*)×(объем продаж продукта *Y*) = = 24×3500 + 21×1500 = 115500 руб.

Тогда ставка накладных расходов на получение материалов = (накладные расходы на получение материалов)/(затраты на основные производственные материалы) = 40000/115500 ≈ 0,3463.

Другие накладные расходы = суммарные накладные расходы – накладные расходы на получение материалов = 177500 – 40000 = 137500 руб.

Суммарное время работы оборудования = (время работы оборудования для производства единицы продукта *X*)×(объем продаж продукта *X*) + (время работы оборудования для производства единицы продукта *Y*)×(объем продаж продукта *Y*) = 2×3500 + 1×1500 = 8500 ч. Отсюда ставка накладных расходов на час работы оборудования = = (другие накладные расходы)/(суммарное время работы оборудования) = 137500/8500 ≈ 16,18 руб./час работы оборудования.

Заполним таблицу себестоимости продукции.

Показатели (руб.)	Единица продукта X	Единица продукта Y
Основные производственные материалы	24	21
Затраты на труд основных работников	10	15
Накладные расходы на получение материалов	8,31	7,27
Другие накладные расходы (на основе часов работы оборудования)	32,36	16,18
Суммарные затраты	74,67	59,45

Поясним, как заполняется таблица.

Каждое число 1-й строки умножаем на ставку накладных расходов на получение материалов (0,3463), результат округляем до двух цифр после запятой и пишем в 3-й строке.

Другие накладные расходы (на основе часов работы оборудования) = (ставка накладных расходов на час работы оборудования)×(время работы оборудования). Для единицы продукта *X* это 16,18×2 = 32,36 руб., а для единицы продукта *Y* это 16,18×1 = 16,18 руб. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Задача 31. В задаче 30 определить себестоимость продукции, используя традиционную систему учета затрат и предполагая, что накладные расходы подразделения приемки материала покрываются на основе ставки распределения накладных расходов на обработку получаемых материалов, а оставшиеся накладные расходы покрываются на основе ставки времени работы оборудования.

Пример 32. В примерах 30, 31 определим производственные затраты с помощью функциональной системы калькуляции себестоимости.

Число производственных циклов = число производственных циклов продукта X + число производственных циклов продукта $Y = 4 + 6 = 10$. Тогда затраты на наладку = (расходы на наладку)/(число производственных циклов) = 3500/10 = 350 руб./цикл.

Число доставок материалов = число доставок материалов для продукта X + число доставок материалов для продукта $Y = 20 + 30 = 50$. Отсюда расходы на одну доставку материалов = (расходы на получение материалов)/(число доставок материалов) = 40000/50 = 800 руб./доставку.

Число доставок продукта = число доставок продукта X + число доставок продукта $Y = 8 + 5 = 13$. Поэтому расходы на упаковку одного заказа = (расходы на упаковку)/(число доставок продукта) = 26000/13 = = 2000 руб./доставку.

Число производственных заказов = число производственных заказов для продукта X + число производственных заказов для продукта $Y = 14 + 11 = 25$. Тогда расходы на выполнение производственного заказа = (расходы на инженерное обеспечение)/(число производственных заказов) = 38000/25 = 1520 руб./заказ.

Заполним таблицу себестоимости продукции.

Показатели (руб.)	Единица продукта X	Единица продукта Y
Основные производственные материалы	24	21
Затраты на труд основных работников	10	15
Накладные расходы по оборудованию	16,48	8,24
Расходы на наладку оборудования	0,4	1,4
Расходы на получение материалов	4,57	16
Расходы на упаковку	4,57	6,67
Расходы на инженерное обеспечение	6,08	11,15
Суммарные производственные расходы	66,10	79,46

Поясним, как заполняется таблица.

Ставка накладных расходов по оборудованию = (накладные расходы по оборудованию)/(суммарное время работы оборудования) = = 70000/8500 ≈ 8,24 руб./ч.

Накладные расходы по оборудованию для единицы продукта X = = (время работы оборудования для продукта X)×(ставка накладных расходов по оборудованию) = 2×8,24 = 16,48 руб. Аналогично накладные расходы по оборудованию для единицы продукта Y = 1×8,24 = = 8,24 руб.

Расходы на наладку оборудования для единицы продукта X = (расходы на одну наладку)×(число производственных циклов для продукта X)/(объем продаж продукта X) = 350×4/3500 = 0,4 руб. Аналогично расходы на наладку оборудования для единицы продукта Y = (расходы на одну наладку)×(число производственных циклов для продукта Y)/(объем продаж продукта Y) = 350×6/1500 = 1,4 руб.

Расходы на доставку материалов для единицы продукта X = (расходы на одну доставку материалов)×(число доставок материалов для продукта X)/(объем продаж продукта X) = 800×20/3500 ≈ 4,57 руб. Аналогично расходы на доставку материалов для единицы продукта Y = 800×30/1500 = 16 руб.

Расходы на упаковку единицы продукта X = (расходы на упаковку одного заказа)×(число доставок продукта X)/(объем продаж продукта X) = 2000×8/3500 ≈ 4,57 руб. Аналогично расходы на упаковку единицы продукта Y = 2000×5/1500 ≈ 6,67 руб.

Расходы на инженерное обеспечение для единицы продукта X = = (расходы на выполнение производственного заказа)×(число производственных заказов для продукта X)/(объем продаж продукта X) = = 1520×14/3500 = 6,08 руб. Аналогично расходы на инженерное обеспечение для единицы продукта Y = 1520×11/1500 ≈ 11,15 руб.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Задача 32. В задачах 30, 31 определить производственные затраты с помощью функциональной системы калькуляции себестоимости.

Функциональная система калькуляции себестоимости находит все более широкое применение. Это не может не радовать. Ведь в функциональной системе калькуляции себестоимости соблюдаются условия использования данных учета, существенных для финансового анализа. Поток информации в такой системе напрямую связан с экономическими решениями, выражает экономическую прибыль и себестоимость отдельного производства, товарной продукции или структурного подразделения предприятия.

Характер оценки затрат и экономических начислений в функциональной системе калькуляции себестоимости намного нагляднее, чем в традиционной системе. Хотя при надлежащей реализации использование функциональной системы калькуляции себестоимости требует больших усилий.

Глава 10

АНАЛИЗ ОТКЛОНЕНИЙ

Отклонения, рассматриваемые в этой главе, используются как в системе калькуляции себестоимости по нормативным переменным издержкам, так и в системе калькуляции себестоимости по нормативным издержкам с их полным определением.

Как правило, формулы для вычисления отклонений очень просты. Но для выяснения причины различий элементы отклонений высокого уровня приходится разбивать на составные части.

Анализ отклонений способен существенно помочь в управлении предприятием, но при чрезмерном использовании может просто захлестнуть потоком информации. Поэтому ограничиваются несколькими ключевыми сопоставлениями.

§ 10.1. ОТКЛОНЕНИЯ ПО МАТЕРИАЛАМ

Затраты на материалы, используемые в производстве продукта, зависят от цены материалов и от количества материалов. Так как фактическое количество использованных материалов, скорее всего, отличается от нормативного, а фактические цены — от нормативных цен, то фактические затраты будут отличаться от нормативных.

Отклонение по цене материала вычисляется по следующей формуле:

отклонение по цене материала = (**нормативная цена** − **фактическая цена**) × **количество приобретенного материала** .

Пример 33. Нормативная и фактическая цены равны соответственно 15 руб./кг и 16 руб./кг, а количество приобретенного материала — 100 кг. Определим отклонение по цене материала.

Отклонение по цене материала = (нормативная цена − фактическая цена)×(количество приобретенного материала) = (15 − 16)×100 = = −100 руб.

Задача 33. Нормативная и фактическая цены равны соответственно 14 руб./кг и 12 руб./кг, а количество приобретенного материала — 150 кг. Определить отклонение по цене материала.

Фактические цены могут превышать нормативные из-за изменений на рынке материалов. Положительное отклонение по цене материала может быть из-за закупок материала более низкого качества, что в дальнейшем приведет к ухудшению качества выпускаемой продукции или увеличению отходов производства.

Отклонение по использованию материала вычисляется по следующей формуле:

отклонение по использованию материала = (**нормативное количество материала для фактического выпуска продукции** − **фактическое количество материала**) × **нормативная цена материала** .

Пример 34. Нормативное количество материала для фактического выпуска продукции равно 100 кг. Фактически же было использовано 110 кг. Нормативная цена материала равна 50 руб./кг. Определим отклонение по использованию материала.

Отклонение по использованию материала = (нормативное количество материала для фактического выпуска продукции – фактическое количество материала)×(нормативная цена материала) = = (100 – 110)×50 = –500 руб.

Задача 34. Нормативное количество материала для фактического выпуска продукции равно 50 кг. Фактически же было использовано 40 кг. Нормативная цена материала равна 60 руб./кг. Определить отклонение по использованию материала.

Причинами возникновения отклонения по использованию материала могут быть небрежное отношение сотрудников с материалом, закупка материала низкого качества, хищения материала, изменение требований по контролю за качеством или методов производства.

Общее отклонение по затратам на материал равно сумме отклонения по цене материала и отклонения по использованию материала. Общее отклонение по затратам на материал вычисляется по следующей формуле:

общее отклонение по затратам на материал = **фактический выпуск продукции** × **нормативные издержки на материал на единицу продукции** − **фактические затраты на материал** .

Пример 35. Нормативные издержки на материал на единицу продукции равны 100 руб./кг, а фактический выпуск продукции со-

ставил 50 кг. Фактические затраты на материал равны 4800 руб. Определим общее отклонение по затратам на материал.

Общее отклонение по затратам на материал = (фактический выпуск продукции)×(нормативные издержки на материал) – (фактические затраты на материал) = 50×100 – 4800 = 200 руб.

Задача 35. Нормативные издержки на материал на единицу продукции равны 50 руб./кг, а фактический выпуск продукции составил 20 кг. Фактические затраты на материал равны 1100 руб. Определить общее отклонение по затратам на материал.

§ 10.2. ОТКЛОНЕНИЕ ПО ТРУДОЗАТРАТАМ

Отклонение по ставке заработной платы вычисляется по следующей формуле:

отклонение по ставке заработной платы = (**нормативная ставка заработной платы** – **фактическая ставка заработной платы**) × **фактически отработанное время** .

Пример 36. Нормативная ставка заработной платы равна 100 руб./ч, а фактически отработанное время составило 10 ч. Фактическая ставка заработной платы равна 105 руб./ч. Определим отклонение по ставке заработной платы.

Отклонение по ставке заработной платы = (нормативная ставка заработной платы – фактическая ставка заработной платы)×(фактически отработанное время) = (100 – 105)×10 = –50 руб.

Задача 36. Нормативная ставка заработной платы равна 90 руб./ч, а фактически отработанное время составило 20 ч. Фактическая ставка заработной платы равна 84 руб./ч. Определить отклонение по ставке заработной платы.

Отклонение по производительности труда вычисляется по следующей формуле:

отклонение по производительности труда = (**нормативное рабочее время для фактического выпуска продукции** – **фактически отработанное время**) × **нормативная ставка заработной платы** .

Пример 37. Нормативное рабочее время для фактического выпуска продукции равно 100 ч, а фактически отработанное время составило 90 ч. Нормативная ставка заработной платы равна 80 руб./ч. Определим отклонение по производительности труда.

Отклонение по производительности труда = (нормативное рабочее время для фактического выпуска продукции – фактически отработанное время)×(нормативная ставка заработной платы) = (100 – 90)× ×80 = 800 руб.

Задача 37. Нормативное рабочее время для фактического выпуска продукции равно 80 ч, а фактически отработанное время составило 85 ч. Нормативная ставка заработной платы равна 90 руб./ч. Определить отклонение по производительности труда.

Причинами возникновения отклонения по производительности труда являются материалы низкого качества, сложность работы, плохое техническое обслуживание оборудования, использование нового оборудования, изменение производственных процессов.

Общее отклонение по трудозатратам вычисляется по следующей формуле:

общее отклонение по трудозатратам = **фактический выпуск продукции** × **нормативные трудозатраты на единицу продукции** – **фактические трудозатраты** .

Пример 38. Нормативные трудозатраты на единицу продукции равны 10 руб./ед., а фактический выпуск продукции составил 100 единиц. Фактические трудозатраты равны 800 руб. Определим общее отклонение по трудозатратам.

Общее отклонение по трудозатратам = (фактический выпуск продукции)×(нормативные трудозатраты на единицу продукции) – фактические трудозатраты = 100×10 – 800 = 200 руб.

Задача 38. Нормативные трудозатраты на единицу продукции равны 15 руб./ед., а фактический выпуск продукции составил 90 единиц. Фактические трудозатраты равны 1400 руб. Определить общее отклонение по трудозатратам.

Отклонения по материалам и трудозатратам являются основными и используются наиболее часто.

§ 10.3. ПЕРЕМЕННЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ НАКЛАДНЫЕ РАСХОДЫ

Отклонение переменных накладных расходов по затратам вычисляется по следующей формуле:

отклонение переменных накладных расходов по затратам = **сметные переменные накладные расходы на объем фактического ввода ресурсов** – **фактические переменные производственные накладные расходы** .

Пример 39. Предполагается, что переменные накладные расходы будут изменяться в зависимости от времени труда основных работников. Ставка заработной платы основных работников равна 90 руб./ч, а труд основных работников составил 1000 ч. Фактические переменные производственные накладные расходы равны 85000 руб. Определим отклонение переменных накладных расходов по затратам.

Сметные переменные накладные расходы на объем фактического ввода ресурсов = (ставка заработной платы основных работников)×(труд основных работников) = 90×1000 = 90000 руб. Тогда отклонение переменных накладных расходов по затратам = сметные переменные накладные расходы на объем фактического ввода ресурсов – фактические переменные производственные накладные расходы = 90000 – 85000 = 5000 руб.

Задача 39. Предполагается, что переменные накладные расходы будут изменяться в зависимости от времени труда основных работников. Ставка заработной платы основных работников равна 80 руб./ч, а труд основных работников составил 900 ч. Фактические переменные производственные накладные расходы равны 75000 руб. Определить отклонение переменных накладных расходов по затратам.

Величина отклонения переменных накладных расходов по затратам зависит от эффективности использования таких составляющих, как электричество, техническое обслуживание, косвенные материальные затраты и т. д.

Отклонение переменных накладных расходов по эффективности вычисляется по следующей формуле:

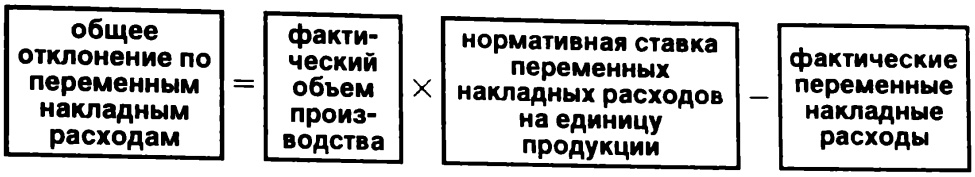
отклонение переменных накладных расходов по эффективности = (**нормативные часы по исходному ресурсу** – **фактические часы по исходному ресурсу**) × **ставка переменных накладных расходов** .

Пример 40. В примере 39 нормативные часы по труду основных работников равны 950 ч. Определим отклонение переменных накладных расходов по эффективности.

Отклонение переменных накладных расходов по эффективности = (нормативные часы по исходному ресурсу – фактические часы по исходному ресурсу)×(ставка переменных накладных расходов) = = (950 – 1000)×90 = –4500 руб.

Задача 40. В задаче 39 нормативные часы по труду основных работников равны 940 ч. Определить отклонение переменных накладных расходов по эффективности.

Общее отклонение по переменным накладным расходам вычисляется по следующей формуле:



§ 10.4. ОТКЛОНЕНИЕ ПО ПОСТОЯННЫМ НАКЛАДНЫМ РАСХОДАМ

Предполагается, что постоянные накладные расходы при изменениях уровня деятельности остаются неизменными, но под влиянием других факторов (например, из-за повышения цен) они могут меняться.

Отклонение по постоянным накладным расходам вычисляется по следующей формуле:

Пример 41. Сметные постоянные накладные расходы равны 100000 руб., а фактические постоянные накладные расходы — 90000 руб. Определим отклонение по постоянным накладным расходам.

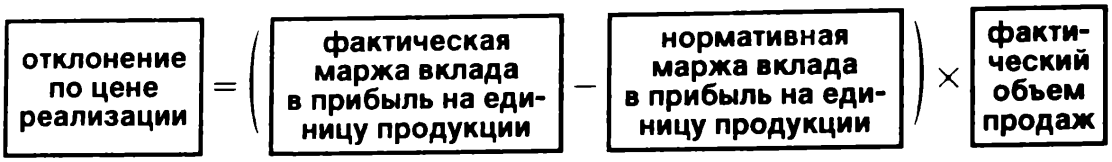
Отклонение по постоянным накладным расходам = сметные постоянные накладные расходы – фактические постоянные накладные расходы = 100000 – 90000 = 10000 руб.

Задача 41. Сметные постоянные накладные расходы равны 110000 руб., а фактические постоянные накладные расходы — 115000 руб. Определить отклонение по постоянным накладным расходам.

§ 10.5. ОТКЛОНЕНИЯ ПО РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ

Общее отклонение по марже реализации — это разность между фактической прибылью и сметной прибылью. Отклонения по реализации продукции возникают из-за изменения цен реализации и объема продаж.

Отклонение по цене реализации вычисляется по следующей формуле:



Пример 42. Нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции равна 4 руб./ед., а фактический объем продаж составил 3000 единиц. Фактическая маржа вклада в прибыль на единицу продукции равна 6 руб./ед. Определим отклонение по цене реализации.

Отклонение по цене реализации = (фактическая маржа вклада в прибыль на единицу продукции – нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции)×(фактический объем продаж) = = (6 – 4)×3000 = 6000 руб.

Задача 42. Нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции равна 5 руб./ед., а фактический объем продаж составил 4000 единиц. Фактическая маржа вклада в прибыль на единицу продукции равна 5,5 руб./ед. Определить отклонение по цене реализации.

Отклонение по объему продаж вычисляется по следующей формуле:

Пример 43. Сметный объем продаж равен 3000 единиц, а нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции — 4 руб./ед. Фактический объем продаж составил 2900 единиц. Определим отклонение по объему продаж.

Отклонение по объему продаж = (фактический объем продаж – – сметный объем продаж)×(нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции) = (2900 – 3000)×4 = –400 руб.

Задача 43. Сметный объем продаж равен 4000 единиц, а нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции — 5 руб./ед. Фактический объем продаж составил 4200 единиц. Определить отклонение по объему продаж.

Существуют разные точки зрения о целесообразности разбиения общего отклонения по марже реализации на отклонение по цене реализации и на отклонение по объему продаж, так как эти составляющие взаимосвязаны и изменение цены реализации, как правило, влияет на объем продаж. При более высоких ценах реализации не-

возможно рассчитывать на то, что удастся реализовать больше продукции, чем заложено в смете.

Какие отклонения являются значимыми? Это зависит от типа производства и объема выпуска продукции. Абсолютная величина отклонения не всегда свидетельствует о значимости показателя. Обычно существенным считается отклонение, составляющее 10% нормативных затрат.

Принятие решений о том, игнорировать отклонения или учитывать их, входит в компетенцию менеджера, характеризует опыт и квалификацию менеджера.

Если отклонения (благоприятные или неблагоприятные) наблюдаются систематически, то следует пересмотреть нормативы, чтобы они больше соответствовали реальному состоянию дел.

Результаты анализа отклонений должны быстро поступать в распоряжение менеджеров. Иначе ценность такой информации будет невелика. Чтобы не терять зря время, внимание уделяется только отклонениям, превышающим определенный уровень.

Сами по себе отклонения — это лишь показатель потенциальных проблем. При анализе благоприятного отклонения может быть найдено полностью компенсированное неблагоприятное отклонение.

Глава 11

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Качество продукции характеризует надежность и долговечность, параметрические, эксплуатационные, потребительские, технологические и дизайнерские свойства изделия, уровень его стандартизации и унификации. Повышение качества продукции — это одна из форм конкурентной борьбы на рынке товара.

Как оценить работу предприятия по улучшению качества продукции? Ответ на этот вопрос дают *средний коэффициент сортности* и *индекс роста качества продукции.*

Пример 44. На основании приведенных данных определим средний коэффициент сортности по плану и фактически и индекс роста качества продукции.

Сорт продукции	Цена, руб.	Выпуск продукции, ед.	
		План	Факт
1	7	3000	3500
2	6	1500	1200
3	5	1000	500

Заполним таблицу.

Сорт продукции	Цена, руб.	Выпуск продукции, ед.		Стоимость выпуска продукции			
		План	Факт	План	Факт	по цене 1-го сорта	
						План	Факт
1	7	3000	3500	21000	24500	21000	24500
2	6	1500	1200	9000	7200	10500	8400
3	5	1000	500	5000	2500	7000	3500
Сумма	—	—	—	35000	34200	38500	36400

Поясним, как заполняется таблица.

5-й (6-й) столбец есть произведение 2-го и 3-го (4-го) столбцов. Каждое число 3-го (4-го) столбца умножаем на цену продукции 1-го сорта (7 руб.) и результат пишем в 7-м (8-м) столбце.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Средний коэффициент сортности (по плану) = 35000/38500 ≈ ≈ 0,909.

Средний коэффициент сортности (фактически) = 34200/36400 ≈ ≈ 0,940.

Индекс роста качества продукции равен 0,940/0,909 ≈ 1,034.

Задача 44. На основании приведенных данных определить средний коэффициент сортности по плану и фактически и индекс роста качества продукции.

Сорт продукции	Цена, руб.	Выпуск продукции, ед.	
		План	Факт
1	6	3100	3400
2	5	1400	1300
3	4	1100	400

Глава 12

АНАЛИЗ РИТМИЧНОСТИ РАБОТЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Ритмичность — это характеристика равномерного выпуска продукции в соответствии с графиком в объеме и ассортименте, предусмотренном планом. Ритмичность является основным условием своевременного выпуска и реализации продукции. Неритмичность ухудшает все экономические показатели работы предприятия.

Для оценки ритмичности работы предприятия используют такие показатели, как коэффициент ритмичности и коэффициент вариации.

Коэффициент ритмичности $K_{ритм}$ равен сумме удельных весов выпуска за каждый период, но не более планового их уровня. Коэффициент ритмичности не может быть больше единицы. Чем ближе коэффициент ритмичности к единице, тем выше ритмичность работы предприятия.

Коэффициент вариации $K_{вар}$ вычисляется по следующей формуле:

$$K_{вар} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/n}}{\overline{x}},$$

где n — число периодов, x_i — фактический выпуск продукции в i-м периоде ($i = 1, ..., n$), $\overline{x}$ — плановый средний выпуск продукции за период.

Пример 45. На основании приведенных данных определим коэффициент ритмичности и коэффициент вариации.

Период	Выпуск продукции, ед.	
	План	Факт
1	3000	2900
2	3500	3600
3	4000	4100

Заполним таблицу.

Период	Выпуск продукции, руб.		Удельный вес продукции		Доля продукции, зачтенная в выполнение плана по ритмичности
	План	Факт, x_i	План	Факт	
1	3000	2900	0,286	0,274	0,274
2	3500	3600	0,333	0,340	0,333
3	4000	4100	0,381	0,386	0,381
Сумма	10500	10600	1,000	1,000	0,988 = $K_{\text{ритм}}$

Поясним, как заполняется таблица. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Каждое число 2-го (3-го) столбца делим на итоговую сумму этого столбца, результат округляем до трех цифр после запятой и пишем в 4-м (5-м) столбце. В каждой строке выбираем минимальное из чисел 4-го и 5-го столбцов и результат пишем в 6-м столбце.

Тогда плановый средний выпуск $\overline{x} = 10500/3 = 3500$ руб.

Заполним таблицу.

Период	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	2900	−600	360000
2	3600	100	10000
3	4100	600	360000
Сумма	10600	—	730000

Поясним, как заполняется таблица. Из каждого числа 2-го столбца вычитаем $\overline{x} = 3500$ и результат пишем в 3-м столбце. 4-й столбец — это квадрат 3-го столбца. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Тогда коэффициент вариации равен:

$$K_{\text{вар}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/n}}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{730000/3}}{3500} \approx 0{,}14,$$ то есть выпуск продукции по периодам отклоняется от графика в среднем на 14%.

Задача 45. На основании приведенных данных определить коэффициент ритмичности и коэффициент вариации.

Период	Выпуск продукции, ед.	
	План	Факт
1	4000	3900
2	4200	4400
3	4400	4500

Глава 13

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ И ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОСНОВНЫХ СРЕДСТВ. ФОНДООТДАЧА

Одним из важнейших факторов увеличения объема производства продукции на промышленных предприятиях является обеспечение их основными средствами в необходимом количестве и ассортименте и более полное и эффективное их использование. Повышение эффективности использования основных производственных средств позволяет расширить производство без дополнительных капиталовложений. *Основные средства* — это совокупность материально-вещественных ценностей, используемых в качестве средств труда в течение длительного времени (свыше одного года). Анализ обычно начинается с изучения основных средств, их динамики и структуры.

§ 13.1. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ И ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОСНОВНЫХ СРЕДСТВ

Для анализа движения и технического состояния основных средств вычисляются следующие коэффициенты:

1. Коэффициент обновления $K_{обн}$:

коэффициент обновления = **стоимость поступивших основных средств** : **стоимость основных средств на конец периода** .

2. Срок обновления основных средств $T_{обн}$:

срок обновления основных средств = **стоимость основных средств на начало периода** : **стоимость поступивших основных средств** .

3. Коэффициент выбытия $K_{выб}$:

коэффициент выбытия = **стоимость выбывших основных средств** : **стоимость основных средств на начало периода** .

4. Коэффициент прироста $K_{пр}$:

коэффициент прироста = **сумма прироста основных средств** : **стоимость основных средств на начало периода**,

где **сумма прироста основных средств** = **стоимость поступивших основных средств** − **стоимость выбывших основных средств**.

5. Коэффициент износа $K_{изн}$:

коэффициент износа = **сумма износа основных средств** : **первоначальная стоимость основных средств**.

6. Коэффициент годности $K_{год}$:

коэффициент годности = **остаточная стоимость основных средств** : **первоначальная стоимость основных средств**,

где **остаточная стоимость основных средств** = **первоначальная стоимость основных средств** − **сумма износа основных средств**.

Пример 46. На основании приведенных данных проведем анализ движения и технического состояния основных средств.

Показатели	Прошлый год (руб.)	Отчетный год (руб.)
Первоначальная стоимость основных средств	200000	210000
Износ основных средств	50000	52000
Стоимость поступивших основных средств	27000	29000
Стоимость выбывших основных средств	21000	22000
Стоимость основных средств на начало периода	180000	186000

Заполним таблицу.

Показатели	Прошлый год (руб.)	Отчетный год (руб.)	Изменения
Коэффициент обновления	0,145	0,150	0,005
Срок обновления основных средств	6,67	6,41	−0,26
Коэффициент выбытия	0,117	0,118	0,001
Коэффициент прироста	0,033	0,038	0,005
Коэффициент износа	0,25	0,248	−0,002
Коэффициент годности	0,75	0,752	0,002

Поясним, как заполняется таблица.

Стоимость основных средств на конец периода = стоимость основных средств на начало периода + стоимость поступивших основных средств – стоимость выбывших основных средств. Тогда стоимость основных средств на конец прошлого года = 180000 + 27000 – – 21000 = 186000 руб., а стоимость основных средств на конец отчетного года = 186000 + 29000 – 22000 = 193000 руб.

Коэффициент обновления $K_{обн}$ = (стоимость поступивших основных средств)/(стоимость основных средств на конец периода). Отсюда в прошлом году $K_{обн}$ = 27000/186000 ≈ 0,145, а в отчетном году $K_{обн}$ = 29000/193000 ≈ 0,150.

Срок обновления основных средств $T_{обн}$ = (стоимость основных средств на начало периода)/(стоимость поступивших основных средств). Поэтому в прошлом году $T_{обн}$ = 180000/27000 ≈ 6,67, а в отчетном году $T_{обн}$ = 186000/29000 ≈ 6,41.

Коэффициент выбытия $K_{выб}$ = (стоимость выбывших основных средств)/(стоимость основных средств на начало периода). Тогда в прошлом году $K_{выб}$ = 21000/180000 ≈ 0,117, а в отчетном году $K_{выб}$ = = 22000/186000 ≈ 0,118.

Сумма прироста основных средств = стоимость поступивших основных средств – стоимость выбывших основных средств. Отсюда в прошлом году сумма прироста основных средств = 27000 – 21000 = = 6000 руб., а в отчетном году сумма прироста основных средств = = 29000 – 22000 = 7000 руб.

Коэффициент прироста $K_{пр}$ = (сумма прироста основных средств)/(стоимость основных средств на начало периода). Поэтому в прошлом году $K_{пр}$ = 6000/180000 ≈ 0,033, а в отчетном году $K_{пр}$ = = 7000/186000 ≈ 0,038.

Коэффициент износа $K_{изн}$ = (сумма износа основных средств)/(первоначальная стоимость основных средств). Тогда в прошлом году $K_{изн}$ = 50000/200000 = 0,25, а в отчетном году $K_{изн}$ = = 52000/210000 ≈ 0,248.

Остаточная стоимость основных средств = первоначальная стоимость основных средств – сумма износа основных средств. Отсюда в прошлом году остаточная стоимость основных средств = 200000 – – 50000 = 150000 руб., а в отчетном году остаточная стоимость основных средств = 210000 – 52000 = 158000 руб.

Коэффициент годности $K_{год}$ = (остаточная стоимость основных средств)/(первоначальная стоимость основных средств). Поэтому в прошлом году $K_{год}$ = 150000/200000 = 0,75, а в отчетном году $K_{год}$ = = 158000/210000 ≈ 0,752.

Заметим, что коэффициент износа $K_{изн}$ + коэффициент годности $K_{год}$ = 1. Из каждого числа 3-го столбца вычитаем соответствующее число 2-го столбца и результат пишем в 4-й столбец.

Задача 46. На основании приведенных данных провести анализ движения и технического состояния основных средств.

Показатели	Прошлый год (руб.)	Отчетный год (руб.)
Первоначальная стоимость основных средств	205000	215000
Износ основных средств	51000	53000
Стоимость поступивших основных средств	28000	27000
Стоимость выбывших основных средств	20000	21000
Стоимость основных средств на начало периода	183000	191000

§ 13.2. АНАЛИЗ ФОНДООТДАЧИ

Фондоотдача λ^F — это отношение стоимости годового объема продукции N к среднегодовой стоимости основных фондов F: $\lambda^F = N/F$. Фондоотдача характеризует, сколько произведено продукции с каждого рубля стоимости основных фондов.

Фондоемкость = 1/(фондоотдача) = $1/\lambda^F = F/N$. Фондоемкость показывает, сколько стоимости основных фондов фактически приходится на производство единицы продукции.

Пример 47. На основании приведенных данных определим влияние использования основных фондов на объем продукции методом цепных подстановок и интегральным методом.

Показатели (руб.)	План	Факт
Стоимость годового объема продукции N	122000	123576
Среднегодовая стоимость основных фондов F	132000	134281

Заполним таблицу.

Показатели	План	Факт	Отклонение
Стоимость годового объема продукции N, руб.	122000	123576	1576
Среднегодовая стоимость основных фондов F, руб.	$132000 = F_{план}$	$134281 = F_{факт}$	$2281 = \Delta F$
Фондоотдача $\lambda^F = N/F$	$0{,}9242 = \lambda^F_{план}$	$0{,}9203 = \lambda^F_{факт}$	$-0{,}0039 = \Delta\lambda^F$

Поясним, как заполняется таблица. Для первых двух столбцов каждое число 1-й строки делим на соответствующее число 2-й стро-

ки и результат пишем в 3-й строке. 3-й столбец есть разность 2-го и 1-го столбцов.

В *методе цепных подстановок* влияние изменения величины фондов $\Delta N_F = \lambda^F_{план} \times \Delta F = 0{,}9242 \times 2281 \approx 2108{,}10$ руб., а влияние изменения величины фондоотдачи $\Delta N_\lambda = \Delta\lambda^F \times F_{факт} = (-0{,}0039) \times 134281 \approx$ $\approx -523{,}70$ руб. Суммарное влияние двух факторов равно 2108,10 + + (−523,70) = 1584,4 руб.

В *интегральном методе* влияние изменения величины фондов $\Delta N_F = \lambda^F_{план} \times \Delta F + \Delta\lambda^F \times \Delta F/2 = 0{,}9242 \times 2281 + (-0{,}0039) \times 2281/2 \approx 2103{,}65$ руб., а влияние изменения величины фондоотдачи $\Delta N_\lambda = F_{план} \times \Delta\lambda^F +$ $+ \Delta\lambda^F \times \Delta F/2 = 132000 \times (-0{,}0039) + (-0{,}0039) \times 2281/2 \approx -519{,}25$ руб. Суммарное влияние двух факторов равно 2103,65 + (−519,25) = 1584,4 руб.

Задача 47. На основании приведенных данных определить влияние использования основных фондов на объем продукции методом цепных подстановок и интегральным методом.

Показатели (руб.)	План	Факт
Стоимость годового объема продукции N	121000	122485
Среднегодовая стоимость основных фондов F	130000	132693

Глава 14

АНАЛИЗ МАТЕРИАЛООТДАЧИ

Материалоотдача λ^M — это отношение стоимости N произведенной продукции к сумме материальных затрат M: $\lambda^M = N/M$. Материалоотдача характеризует, сколько произведено продукции с каждого рубля потребленных материальных ресурсов (сырья, материалов, топлива, энергии и т. д.).

Материалоемкость = 1/(материалоотдача) = $1/\lambda^M = M/N$. Материалоемкость показывает, сколько материальных затрат фактически приходится на производство единицы продукции.

Пример 48. На основании приведенных данных определим влияние изменения затрат материальных ресурсов на объем продукции интегральным методом.

Показатели	План	Факт
Продукция N, руб.	122000	123576
Затраты материальных ресурсов M, руб.	50000	51319

Заполним таблицу.

Показатели	План	Факт	Отклонение
Продукция N, руб.	122000	123576	1576
Затраты материальных ресурсов M, руб.	$50000 = M_{план}$	51319	$1319 = \Delta M$
Материалоотдача $\lambda^M = N/M$	$2{,}44 = \lambda^M_{план}$	2,4080	$-0{,}0320 = \Delta\lambda^M$

Поясним, как заполняется таблица. Для первых двух столбцов каждое число 1-й строки делим на соответствующее число 2-й строки и результат пишем в 3-й строке. 3-й столбец есть разность 2-го и 1-го столбцов.

Влияние изменения затрат материальных ресурсов $\Delta N_M = \lambda^M_{план} \times \Delta M + \Delta\lambda^M \times \Delta M/2 = 2{,}44 \times 1319 + (-0{,}0320) \times 1319/2 \approx 3197{,}26$ руб.

Влияние изменения материалоотдачи $\Delta N_{\lambda} = \Delta\lambda^{M} \times M_{план} +$ $+ \Delta\lambda^{M} \times \Delta M/2 = 50000 \times (-0{,}0320) + (-0{,}0320) \times 1319/2 \approx -1621{,}10$ руб.

Суммарное влияние двух факторов равно $3197{,}26 + (-1621{,}10) =$ $= 1576{,}16$ руб.

Задача 48. На основании приведенных данных определить влияние изменения затрат материальных ресурсов на объем продукции интегральным методом.

Показатели	План	Факт
Продукция N, руб.	121000	122618
Затраты материальных ресурсов M, руб.	52000	53247

На практике при анализе деятельности предприятий обычно вычисляют материалоотдачу по отдельным группам материальных ценностей, а внутри них — по конкретным видам материалов.

Глава 15

АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА

Важнейшим показателем эффективности использования труда является *производительность труда* λ^R — отношение среднегодовой стоимости N произведенной продукции к среднегодовой численности производственного персонала R: $\lambda^R = N/R$. Производительность труда — показатель реализованной продукции на одного работающего.

Трудоемкость = 1/(производительность труда) = $1/\lambda^R = R/N$. Трудоемкость показывает трудовые затраты на производство единицы продукции.

Пример 49. На основании приведенных данных проанализируем интегральным методом степень влияния использования труда на объем продукции.

Показатели	План	Факт
Продукция N, руб.	122000	123576
Среднегодовая численность производственного персонала R, чел.	28	29

Заполним таблицу.

Показатели	План	Факт	Отклонение
Продукция N, руб.	122000	123576	1576
Среднегодовая численность производственного персонала R, чел.	$28 = R_{план}$	29	$1 = \Delta R$
Производительность труда $\lambda^R = N/R$	$4357{,}1429 = \lambda^R_{план}$	4261,2414	$-95{,}9015 = \Delta\lambda^R$

Поясним, как заполняется таблица. Для первых двух столбцов каждое число 1-й строки делим на соответствующее число 2-й стро-

ки и результат пишем в 3-й строке. 3-й столбец есть разность 2-го и 1-го столбцов.

Влияние изменения среднегодовой численности производственного персонала $\Delta N_R = \lambda^R_{\text{план}} \times \Delta R + \Delta\lambda^R \times \Delta R/2 = 4357{,}1429 \times 1 + + (-95{,}9015) \times 1/2 \approx 4309{,}19$ руб.

Влияние изменения производительности труда $\Delta N_\lambda = = \Delta\lambda^R \times R_{\text{план}} + \Delta\lambda^R \times \Delta R/2 = 28 \times (-95{,}9015) + (-95{,}9015) \times 1/2 \approx -2733{,}19$ руб.

Суммарное влияние двух факторов равно $4309{,}19 + (-2733{,}19) = = 1576$ руб.

Задача 49. На основании приведенных данных проанализировать интегральным методом степень влияния использования труда на объем продукции.

Показатели	План	Факт
Продукция N, руб.	121000	122618
Среднегодовая численность производственного персонала R, чел.	27	28

Глава 16

АНАЛИЗ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

Хозяйственная деятельность любого предприятия неразрывно связана с движением денежных средств. Каждая хозяйственная операция вызывает либо поступление, либо расходование денежных средств. От полноты и своевременности обеспечения процессов снабжения, производства и сбыта продукции денежными ресурсами зависят результаты основной деятельности предприятия, степень его финансовой устойчивости и платежеспособности, конкурентные преимущества, необходимые для текущего и перспективного развития.

По направленности движения денежных средств различают приток денежных средств (*положительный денежный поток*) и отток денежных средств (*отрицательный денежный поток*). *Чистый денежный поток* — это разность между положительным и отрицательным денежными потоками денежных средств в анализируемом периоде времени.

Управление денежными потоками требует постоянного мониторинга равномерности и синхронности формирования положительного и отрицательного денежных потоков. С этой целью вычисляют среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации и коэффициент корреляции.

Пусть n — число интервалов, $x_i(y_i)$ — значение положительного (отрицательного) денежного потока в i-м интервале ($i = 1, ..., n$), $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ ($\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$) — средняя величина положительного (отрицательного) денежного потока за рассматриваемый промежуток времени, $\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2/n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/n - (\overline{x})^2$, $\sigma_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2/n = \sum_{i=1}^{n} y_i^2/n - (\overline{y})^2$.

Тогда среднеквадратические отклонения σ_1 и σ_2 показывают абсолютное отклонение индивидуальных значений денежных потоков от $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно.

Коэффициенты вариации $V_1 = \sigma_1/\overline{x}$ и $V_2 = \sigma_2/\overline{y}$ характеризуют относительную меру отклонения индивидуальных значений положительного и отрицательного денежных потоков от $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно.

$$\textit{Коэффициент корреляции } r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}}$$

показывает степень синхронизации денежных потоков за анализируемый период. Чем ближе значение r к единице, тем меньше разрыв между значениями положительного и отрицательного денежных потоков, то есть потоки синхронизированы по временным интервалам.

В такой ситуации меньше риск возникновения *дефицита денежных средств* (если отрицательный денежный поток превышает положительный) или *избыточности денежной массы* (если положительный денежный поток превышает отрицательный).

Дефицит денежных средств приводит к неплатежеспособности, а при избыточной денежной массе в условиях инфляции происходит обесценение денег.

Пример 50. На основании приведенных данных определим чистый денежный поток по каждому месяцу, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации по положительному и отрицательному денежным потокам, а также коэффициент корреляции между положительным и отрицательным денежными потоками.

Денежный поток, тыс. руб.	Месяц					
	1	2	3	4	5	6
Положительный	10	11	11	12	13	14
Отрицательный	9	10	11	13	15	12

Заполним таблицу.

Месяц	x_i	y_i	Чистый денежный поток	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	10	9	1	100	81	90
2	11	10	1	121	100	110
3	11	11	0	121	121	121
4	12	13	–1	144	169	156
5	13	15	–2	169	225	195
6	14	12	2	196	144	168
Сумма	71	70		851	840	840

Поясним, как заполняется таблица. Значения 2-го и 3-го столбцов берутся из исходной таблицы. 4-й столбец есть разность 2-го и 3-го столбцов. Каждое число 2-го (3-го) столбца возводим в квадрат и результат пишем в 5-м (6-м) столбце. 7-й столбец есть произведение 2-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Тогда:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 71/6 \approx 11{,}83 \text{ тыс. руб.},$$

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n = 70/6 \approx 11{,}67 \text{ тыс. руб.},$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/n - (\overline{x})^2 = 851/6 - 11{,}83^2 \approx 1{,}88,$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2/n - (\overline{y})^2 = 840/6 - 11{,}67^2 \approx 3{,}81.$$

Отсюда среднеквадратические отклонения по положительному и отрицательному денежным потокам равны соответственно $\sigma_1 = \sqrt{1{,}88} \approx 1{,}37$ тыс. руб. и $\sigma_2 = \sqrt{3{,}81} \approx 1{,}95$ тыс. руб.

Коэффициенты вариации по положительному и отрицательному денежным потокам равны соответственно $V_1 = \sigma_1/\overline{x} = 1{,}37/11{,}83 \approx 0{,}116$ и $V_2 = \sigma_2/\overline{y} = 1{,}95/11{,}67 \approx 0{,}167$.

Коэффициент корреляции между положительным и отрицательным денежными потоками равен

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} =$$

$$= \frac{6\times 840 - 71\times 70}{\sqrt{(6\times 851 - 71^2)(6\times 840 - 70^2)}} \approx 0{,}734.$$

Задача 50. На основании приведенных данных определить чистый денежный поток по каждому месяцу, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации по положительному и отрицательному денежным потокам, а также коэффициент корреляции между положительным и отрицательным денежными потоками.

Денежный поток, тыс. руб.	Месяц					
	1	2	3	4	5	6
Положительный	11	12	13	12	13	15
Отрицательный	10	11	11	13	12	14

Замечание. Для вычисления коэффициента корреляции можно воспользоваться статистическими функциями *ПИРСОН* (массив 1; массив 2) или *КОРРЕЛ* (массив 1; массив 2) мастера функций f_x пакета Excel. *Массив 1* и *массив 2* — это ссылки на ячейки, содержащие значения денежных потоков.

Практически любое решение руководства предприятия оказывает влияние на структуру источников и целевое использование денежных средств. Необходимо постоянно поддерживать оптимальное соотношение между поступлениями и расходами денежных средств. Ускорение или затягивание расчетов при получении и осуществлении платежей, непредвиденные отклонения от предполагаемых условий, сезонность бизнеса, резкий рост или постепенное снижение производства могут сделать управление движением денежных средств трудноразрешимой проблемой.

Обычный объем финансирования для поддержания текущей деятельности предприятия на заданном уровне зависит от эффективного управления запасами, обоснованности предоставления кредита клиентам, разумного использования кредиторской задолженности и доступности долгосрочных кредитных ресурсов. Потребности предприятия в финансировании возрастают при снижении объема продаж, увеличении объема производства или ужесточении условий кредита поставщиков.

Сезонные и циклические изменения в экономике также влияют на динамику движения денежных средств предприятия. Данные об экономических тенденциях попадают в распоряжение предприятия гораздо позже проявления этих тенденций. Стоит отметить, что многие экономические прогнозы очень часто страдают ошибками в оценке времени и степени предстоящих экономических перемен.

Глава 17

СТАТИСТИКА ПОСТАВОК И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ

Поставка продукции — это отпуск или отправка потребителям продукции предприятия. В поставку продукции не включается отпуск продукции на склад.

Продукция, на которую покупателем предоставлены расчетные документы, называется *реализованной* и подлежит фактическому учету.

Для оценки поставок продукции используется *индекс выполнения договорных поставок по объему* $I_{объем}$, который определяется по следующей формуле: $I_{объем} = \sum q_1 p / \sum q_0 p$, где q_1 и q_0 — соответственно количество поставленной продукции каждого вида фактически и по договорам, p — договорная цена продукции.

Тогда *общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту* равен $I_{ассортимент} = \sum (q_1 p)_1 / \sum q_0 p$, где $(q_1 p)_1$ — фактический объем продукции, засчитанный в счет выполнения договорных обязательств по ассортименту.

Общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту всегда не больше единицы.

Пример 51. На основании приведенных данных определим индекс выполнения договорных поставок по объему и общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту.

Продукция	Обязательства, руб.	Поставлено фактически в ценах договора, руб.
А	50000	55000
Б	70000	68000

Заполним таблицу.

Продукция	$q_0 p$	$q_1 p$	Зачтено в счет выполнения договорных обязательств по ассортименту, руб.
А	50000	55000	50000
Б	70000	68000	68000
Сумма	120000	123000	118000

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых трех столбцов взяты из предыдущей таблицы. В 4-м столбце находятся минимальные значения из соответствующих чисел 2-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Индекс выполнения договорных поставок по объему $I_{объем} = \sum q_1 p / \sum q_0 p = 123000/120000 = 1{,}025$ (= 102,5%).

Общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту $I_{ассортимент} = \sum (q_1 p)_1 / \sum q_0 p = 118000/120000 \approx 0{,}983$ (= 98,3%).

Задача 51. На основании приведенных данных определить индекс выполнения договорных поставок по объему и общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту.

Продукция	Обязательства, руб.	Поставлено фактически в ценах договора, руб.
А	60000	62000
Б	80000	75000

Глава 18

ПОКАЗАТЕЛИ ЧАСТОТЫ И РАВНОМЕРНОСТИ ПОСТАВОК ПРОДУКЦИИ

Поставка продукции производится, как правило, партиями и с интервалами.

Средняя частота поставок $\overline{t}$ равна средней длине интервалов между очередными поставками и определяется по следующей формуле: $\overline{t} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i q_i / \sum_{i=1}^{n-1} q_i$, где t_i — длина интервалов между поставками, q_i — объем поставки на конец интервала.

Если величина поставок одинакова (q_i = const), то средняя частота поставок определяется по следующей формуле: $\overline{t} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i/(n-1)$.

Для оценки равномерности поставок используют *коэффициент вариации* $V = \sigma/\overline{t} \times 100\%$, где σ — стандартное отклонение.

Для различных по величине поставок стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i (t_i - \overline{t})^2 / \sum_{i=1}^{n} q_i}$.

Для одинаковых по величине поставок стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i (t_i - \overline{t})^2 / (n-1)}$.

Пример 52. На основании приведенных данных определим длительности интервалов между поставками, среднюю частоту поставок и коэффициент вариации. Все поставки одинаковы.

Даты фактической поставки	17.01	29.01	08.02	27.02

Здесь $n = 4$ поставки.

Длительности интервалов между поставками равны соответственно $t_1 = 12$ дней, $t_2 = 10$ дней, $t_3 = 19$ дней.

Так как все поставки одинаковы, то средняя частота поставок равна $\bar{t} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i q_i / \sum_{i=1}^{n-1} q_i = (12 + 10 + 19)/(4 - 1) \approx 13{,}7$ дня.

Стандартное отклонение равно: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2/(n-1)} = \sqrt{((12 - 13{,}7)^2 + (10 - 13{,}7)^2 + (19 - 13{,}7)^2)/(4-1)} \approx 3{,}9$ дня.

Отсюда коэффициент вариации равен $V = \sigma/\bar{t} \times 100\% = 3{,}9/13{,}7 \times 100\% \approx 28{,}5\%$.

Задача 52. На основании приведенных данных определить длительности интервалов между поставками, среднюю частоту поставок и коэффициент вариации. Все поставки одинаковы.

Даты фактической поставки	18.01	27.01	10.02	26.02

Глава 19

СТАТИСТИКА ЧИСЛЕННОСТИ РАБОТНИКОВ

§ 19.1. ЧИСЛЕННОСТЬ РАБОТНИКОВ

К основным показателям численности работников предприятия относятся списочный состав и среднесписочная численность работников.

В *списочный состав* включаются все работники, принятые на постоянную, сезонную или временную работу на срок один день и более, со дня зачисления их на работу в соответствии с заключенным договором.

Среднесписочная численность работников равна средней арифметической численности работников за периоды наблюдения.

Явочный состав показывает, сколько человек из списочного состава явилось на работу. Тогда среднесписочную численность работников определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{среднесписочная численность работников}} = \left(\boxed{\text{число фактически отработанных человеко-дней}} + \boxed{\text{число человеко-дней простоев}} + \boxed{\text{число человеко-дней неявок}} \right) : \boxed{\text{общее число дней}}.$$

Пример 53. Списочная численность работников предприятия с 1 по 12 апреля равна 50 человек, с 13 по 22 апреля — 60 человек, с 23 по 30 апреля — 55 человек. Определим среднесписочную численность работников предприятия в апреле.

12 дней списочная численность работников предприятия была 50 человек, затем 10 дней — 60 человек, а последние 8 дней — 55 человек.

Тогда среднесписочная численность работников предприятия равна $(12\times50 + 10\times60 + 8\times55)/30 \approx 55$ человек.

Задача 53. Списочная численность работников предприятия с 1 по 11 марта равна 150 человек, с 12 по 19 марта — 157 человек,

с 20 по 31 марта — 156 человек. Определить среднесписочную численность работников предприятия в марте.

Пример 54. Среднесписочная численность работников предприятия в апреле равна 50 человек, в мае — 60 человек, в июне — 58 человек. Определим среднесписочную численность работников предприятия во втором квартале.

Среднесписочная численность работников предприятия во втором квартале равна (50 + 60 + 58)/3 = 56 человек.

Задача 54. Среднесписочная численность работников предприятия в апреле равна 100 человек, в мае — 97 человек, в июне — 105 человек. Определить среднесписочную численность работников предприятия во втором квартале.

Пример 55. В апреле работниками предприятия отработано 6000 человеко-дней, было 10 человеко-дней простоев и 200 человеко-дней неявок. Определим среднесписочную численность работников предприятия в апреле.

Среднесписочная численность работников предприятия = (число фактически отработанных человеко-дней + число человеко-дней простоев + число человеко-дней неявок)/(общее число дней) = = (6000 + 10 + 200)/30 = 207 человек.

Задача 55. В апреле работниками предприятия отработано 9000 человеко-дней, было 20 человеко-дней простоев и 100 человеко-дней неявок. Определить среднесписочную численность работников предприятия в апреле.

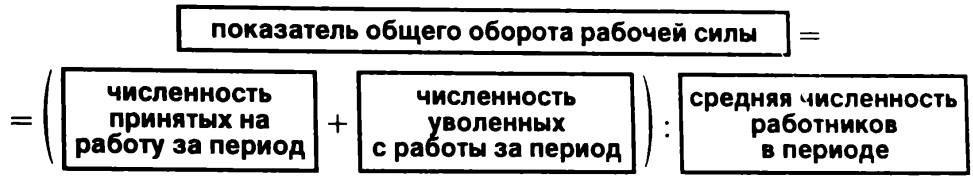
§ 19.2. ПОКАЗАТЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ РАБОТНИКОВ

Численность работников предприятия изменяется из-за приема на работу и увольнения сотрудников. Для сравнительного анализа численности работников предприятия используют относительные показатели.

Индекс численности рабочей силы определяется по следующей формуле:

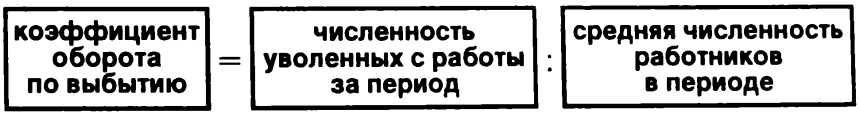
индекс численности рабочей силы = **численность работников на конец периода** : **численность работников на начало периода** .

Показатель общего оборота рабочей силы характеризует интенсивность изменения численности работников и определяется по следующей формуле:



Коэффициент оборота по приему определяется по следующей формуле:

Коэффициент оборота по выбытию определяется по следующей формуле:



Коэффициент текучести кадров определяется по следующей формуле:

Пример 56. Число работников предприятия на начало 2007 года было равно 500 человек. В течение года принято на работу 100 человек, уволено с работы 120 человек (в том числе по собственному желанию, за прогул, за нарушение трудовой дисциплины 60 человек). Определим показатели изменения численности работников предприятия.

Численность работников предприятия на конец 2007 года = число работников предприятия на начало 2007 года + численность принятых на работу в 2007 году – численность уволенных с работы в 2007 году = 500 + 100 – 120 = 480 человек.

Тогда средняя численность работников предприятия в 2007 году = = (численность работников на начало 2007 года + численность работников на конец 2007 года)/2 = (500 + 480)/2 = 490 человек.

Индекс численности рабочей силы = (численность работников на конец 2007 года)/(численность работников на начало 2007 года) = = 480/500 = 0,96, то есть численность работников предприятия к концу года сократилась на 4%.

Показатель общего оборота рабочей силы = (численность принятых на работу в 2007 году + численность уволенных с работы в 2007 году)/(средняя численность работников предприятия в 2007 году) =

= (100 + 120)/490 ≈ 0,449 (= 44,9%), то есть за год состав работников предприятия обновился на 44,9%.

Коэффициент оборота по приему = (численность принятых на работу в 2007 году)/(средняя численность работников предприятия в 2007 году) = 100/490 ≈ 0,204 (= 20,4%).

Коэффициент оборота по выбытию = (численность уволенных с работы в 2007 году)/(средняя численность работников предприятия в 2007 году) = 120/490 ≈ 0,245 (= 24,5%).

Коэффициент текучести кадров = (численность уволенных с работы в 2007 году по собственному желанию, за прогул, за нарушение трудовой дисциплины)/(средняя численность работников предприятия в 2007 году) = 60/490 ≈ 0,122 (= 12,2%).

Задача 56. Число работников предприятия на начало 2007 года было равно 600 человек. В течение года принято на работу 110 человек, уволено с работы 130 человек (в том числе по собственному желанию, за прогул, за нарушение трудовой дисциплины 80 человек). Определить показатели изменения численности работников предприятия.

Глава 20

СТАТИСТИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАБОЧЕГО ВРЕМЕНИ

Рабочее время — это время, затрачиваемое на производство продукции или выполнение определенного объема работ и услуг.

Измерение рабочего времени производится в человеко-часах или человеко-днях. *Один человеко-час* равен одному часу работы работника на своем рабочем месте. *Один человеко-день* — это явка работника на работу и факт, что он приступил к работе (независимо от продолжительности рабочего времени).

Использование рабочего времени характеризуют специальные показатели. Рассмотрим эти показатели подробнее.

Календарный фонд рабочего времени — это число дней определенного календарного периода (года, квартала, месяца и т. д.), приходящихся на одного работника или на совокупность работников.

Календарный фонд рабочего времени определяется по следующей формуле:

календарный фонд рабочего времени = **отработанные работниками человеко-дни** + **целодневные простои в человеко-днях** + **неявки на работу в человеко-днях** .

Табельный фонд рабочего времени определяется по следующей формуле:

табельный фонд рабочего времени = **календарный фонд рабочего времени** − **праздничные и выходные дни** .

Максимально возможный фонд рабочего времени — это максимальное количество времени, которое может быть отработано в соответствии с трудовым законодательством:

максимально возможный фонд рабочего времени = **календарный фонд рабочего времени** − **ежегодные отпуска в человеко-днях** − **праздничные и выходные дни** .

Коэффициент использования календарного фонда рабочего времени применяется для анализа и сопоставления степени использования рабочего времени на уровне предприятий, отраслей и экономики в целом и определяется по следующей формуле:

коэффициент использования календарного фонда рабочего времени = **число фактически отработанных человеко-дней** : **календарный фонд рабочего времени в человеко-днях** .

Коэффициент использования табельного фонда рабочего времени применяется при межотраслевых сравнениях рабочего времени и определяется по следующей формуле:

коэффициент использования табельного фонда рабочего времени = **число фактически отработанных человеко-дней** : **табельный фонд рабочего времени в человеко-днях** .

Коэффициент использования максимально возможного фонда рабочего времени характеризует степень фактического использования времени, которое могли бы отработать работники предприятия, и определяется по следующей формуле:

коэффициент использования максимально возможного фонда рабочего времени = **число фактически отработанных человеко-дней** : **максимально возможный фонд рабочего времени в человеко-днях** .

Коэффициент использования рабочего периода показывает степень использования рабочего времени и определяется по следующей формуле:

коэффициент использования рабочего периода = **среднее число фактически отработанных работником дней за период** : **число дней, которое должен был отработать работник по режиму работы предприятия** ,

где **среднее число фактически отработанных работником дней за период** = **общее число отработанных человеко-дней** : **среднесписочная численность работников** ,

число дней, которое должен был отработать работник по режиму работы предприятия = **максимально возможный фонд рабочего времени в человеко-днях** : **среднесписочная численность работников** .

Так как существуют потери рабочего времени в человеко-часах (например, опоздания на работу, внутрисменные простои, прежде-

временные уходы с работы), то показатели, характеризующие использование рабочего времени в человеко-днях, не дают полного представления об использовании рабочего времени в течение рабочего дня. Поэтому дополнительно вычисляют показатели использования рабочего времени в человеко-часах.

Коэффициент использования рабочего дня определяется по следующей формуле:

коэффициент использования рабочего дня = **средняя фактическая продолжительность рабочего дня** : **средняя установленная продолжительность рабочего дня**,

где средняя установленная продолжительность рабочего дня зависит от предприятия, а средняя фактическая продолжительность рабочего дня определяется по следующей формуле:

средняя фактическая продолжительность рабочего дня = **отработанные человеко-часы** : **отработанные человеко-дни**.

Интегральный коэффициент использования рабочего времени характеризует степень использования рабочего времени как в течение рабочего дня, так и за весь период, и определяется по следующей формуле:

интегральный коэффициент использования рабочего времени = **коэффициент использования рабочего периода** × **коэффициент использования рабочего дня**.

Пример 57. На основании приведенных данных определим показатели использования рабочего времени.

Среднесписочная численность работников	500
Число работников с продолжительностью рабочего дня 8 ч.	475
Число работников с продолжительностью рабочего дня 7 ч.	25
Отработанные работниками человеко-дни	107000
Целодневные простои в человеко-днях	20
Неявки на работу, человеко-дней	75480
Ежегодные отпуска в человеко-днях	11000
Выходные и праздничные человеко-дни	56000
Отработанные человеко-часы	834600

Календарный фонд рабочего времени = отработанные работниками человеко-дни + целодневные простои в человеко-днях + неявки на работу в человеко-днях = 107000 + 20 + 75480 = 182500 человеко-дней.

Табельный фонд рабочего времени = (календарный фонд рабочего времени) – (праздничные и выходные дни) = 182500 – 56000 = = 126500 человеко-дней.

Максимально возможный фонд рабочего времени = (календарный фонд рабочего времени) – (ежегодные отпуска в человеко-днях) – (праздничные и выходные дни) = 182500 – 11000 – 56000 = = 115500 человеко-дней.

Коэффициент использования календарного фонда рабочего времени = (число фактически отработанных человеко-дней)/(календарный фонд рабочего времени в человеко-днях) = 107000/182500 ≈ 0,586 (= 58,6%).

Коэффициент использования табельного фонда рабочего времени = (число фактически отработанных человеко-дней)/(табельный фонд рабочего времени в человеко-днях) = 107000/126500 ≈ 0,846 (= 84,6%).

Коэффициент использования максимально возможного фонда рабочего времени = (число фактически отработанных человеко-дней)/(максимально возможный фонд рабочего времени в человеко-днях) = 107000/115500 ≈ 0,926 (= 92,6%).

Среднее число фактически отработанных работником дней за период = (общее число отработанных человеко-дней)/(среднесписочная численность работников) = 107000/500 = 214 дней.

Число дней, которое должен был отработать работник по режиму работы предприятия = (максимально возможный фонд рабочего времени в человеко-днях)/(среднесписочная численность работников) = = 115500/500 = 231 день.

Коэффициент использования рабочего периода = (среднее число фактически отработанных работником дней за период)/(число дней, которое должен был отработать работник по режиму работы предприятия) = 214/231 ≈ 0,926.

Мы видим, что значения коэффициента использования максимально возможного фонда рабочего времени и коэффициента использования рабочего периода равны. Экономический смысл обоих коэффициентов одинаков.

Средняя фактическая продолжительность рабочего дня = (отработанные человеко-часы)/(отработанные человеко-дни) = 834600/107000 = = 7,8 ч.

Средняя установленная продолжительность рабочего дня = = (475×8 + 25×7)/500 = 7,95 ч.

Тогда коэффициент использования рабочего дня = (средняя фактическая продолжительность рабочего дня)/(средняя установленная продолжительность рабочего дня) = 7,8/7,95 ≈ 0,981 (= 98,1%).

Интегральный коэффициент использования рабочего времени = = (коэффициент использования рабочего периода)×(коэффициент использования рабочего дня) = 0,926×0,981 ≈ 0,908.

Задача 57. На основании приведенных данных определить показатели использования рабочего времени.

Среднесписочная численность работников	500
Число работников с продолжительностью рабочего дня 8 ч.	450
Число работников с продолжительностью рабочего дня 7 ч.	50
Отработанные работниками человеко-дни	106000
Целодневные простои в человеко-днях	30
Неявки на работу, человеко-дней	76470
Ежегодные отпуска в человеко-днях	10000
Выходные и праздничные человеко-дни	57000
Отработанные человеко-часы	816200

Глава 21

АНАЛИЗ УРОВНЯ И ДИНАМИКИ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ

Заработная плата — это сумма выплат в денежной и натуральной форме, получаемых наемными работниками через регулярные периоды времени за отработанное время или выполненную работу, а также не отработанное, но подлежащее оплате время (например, ежегодные отпуска).

Средняя заработная плата — это заработная плата, приходящаяся в среднем на одного работника или на единицу отработанного времени. Динамика уровней средней заработной платы анализируется с помощью индексов переменного состава, постоянного состава и структурных сдвигов.

Индекс переменного состава заработной платы I_{nc} показывает, как изменяется средний уровень заработной платы в отчетном периоде по сравнению с базисным периодом в зависимости от изменения средней заработной платы отдельных категорий персонала и удельного веса численности работников с различным уровнем оплаты.

Индекс переменного состава заработной платы определяется по следующей формуле:

$$I_{nc} = \frac{\sum F_1}{\sum T_1} / \frac{\sum F_0}{\sum T_0} = \frac{\sum X_1 T_1}{\sum T_1} / \frac{\sum X_0 T_0}{\sum T_0} = \frac{\sum X_1 d_1}{\sum X_0 d_0},$$

где F_1 и F_0 — фонд начисления заработной платы отдельных категорий работников в отчетном и базисном периодах соответственно, T_1 и T_0 — среднесписочная численность отдельных категорий работников в отчетном и базисном периодах соответственно, X_1 и X_0 — средняя заработная плата по категориям работников в отчетном и базисном периодах соответственно, $d_1 = T_1/\sum T_1$, $d_0 = T_0/\sum T_0$.

Индекс фиксированного состава заработной платы $I_{фс}$ показывает, как изменяется уровень заработной платы без учета структурного фактора, и определяется по следующей формуле: $I_{фс} = (\sum X_1 T_1)/(\sum X_0 T_1)$.

Индекс структурных сдвигов $I_{стр}$ позволяет определить влияние структурного фактора и определяется по следующей формуле:

$$I_{стр} = I_{пс}/I_{фс}.$$

Пример 58. На основании приведенных данных определим индексы переменного состава, постоянного состава и структурных сдвигов.

Рабочие	Средняя численность рабочих, чел.		Фонд заработной платы, тыс. руб.	
	базисный период T_0	отчетный период T_1	базисный период X_0T_0	отчетный период X_1T_1
Квалифицированные	1000	1500	8000	10000
Малоквалифицированные	1200	1100	5000	6000

Индекс переменного состава заработной платы равен: $I_{пс} = \frac{\sum X_1T_1}{\sum T_1} : \frac{\sum X_0T_0}{\sum T_0} = \frac{10000 + 6000}{1500 + 1100} : \frac{8000 + 5000}{1000 + 1200} \approx 1{,}041$, то есть за счет изменения индивидуальных уровней заработной платы и увеличения доли квалифицированных рабочих общая средняя заработная плата увеличилась на 4,1%.

Индекс фиксированного состава заработной платы равен: $I_{фс} = \frac{\sum X_1T_1}{\sum X_0T_1} = (10000 + 6000)/(8000/1000 \times 1500 + 5000/1200 \times 1100) \approx$ $\approx 0{,}965$, то есть без учета изменений в составе рабочих средняя заработная плата понизилась на 3,5%.

Индекс структурных сдвигов равен $I_{стр} = I_{пс}/I_{фс} = 1{,}041/0{,}965 \approx$ $\approx 1{,}079$, то есть за счет изменений в составе рабочих средняя заработная плата повысилась на 7,9%.

Задача 58. На основании приведенных данных определить индексы переменного состава, постоянного состава и структурных сдвигов.

Рабочие	Средняя численность рабочих, чел.		Фонд заработной платы, тыс. руб.	
	базисный период T_0	отчетный период T_1	базисный период X_0T_0	отчетный период X_1T_1
Квалифицированные	1200	1700	9000	11000
Малоквалифицированные	1300	1200	6000	7000

Глава 22

СТРУКТУРА КАПИТАЛА

Структура капитала предприятия — это сочетание различных источников долгосрочного финансирования, обеспечивающих общий объем инвестиций для предприятия. Существуют два основных источника долгосрочного финансирования предприятия:

1) инвестиции собственников предприятия (акции, нераспределенная прибыль);

2) долгосрочная ссуда.

§ 22.1. ГИРИНГ (ЛЕВЕРИДЖ)

Гиринг (леверидж) показывает долю заемного капитала в собственном капитале предприятия, то есть в какой степени долгосрочный капитал предприятия основан на задолженности и в какой — на акционерном капитале. Он вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{гиринг (леверидж)}} = \boxed{\text{используемый капитал}} : \boxed{\text{акционерный капитал}},$$

где

$$\boxed{\text{используемый капитал}} = \boxed{\text{акционерный капитал}} + \boxed{\text{долгосрочные заемные средства}}.$$

Приемлемый в данный момент гиринг (леверидж) определяется рентабельностью предприятия и отношением руководства предприятия к рискам.

Пример 59. Предприятие выпустило акций на 250000 руб. и взяло долгосрочную банковскую ссуду на 150000 руб. Определим гиринг (леверидж).

Используемый капитал = акционерный капитал + долгосрочные заемные средства = 250000 + 150000 = 400000 руб.

Тогда гиринг (леверидж) = (используемый капитал)/(акционерный капитал) = 400000/250000 = 1,6, то есть общая сумма средств, инвестированных в предприятие, в 1,6 раза превышает средства, полученные за счет выпуска акций.

Задача 59. Предприятие выпустило акций на 200000 руб. и взяло долгосрочную банковскую ссуду на 100000 руб. Определить гиринг (левередж).

Единственно правильного показателя гиринга (левериджа) не существует. Все зависит от деятельности предприятия, состояния дел в данной отрасли, стратегических планов предприятия и т. д. В каждом конкретном случае значение гиринга (левериджа) определяется конкурентными обстоятельствами и выбором сравнительного ориентира. Низкий показатель гиринга (левериджа) может свидетельствовать об осторожности руководства предприятия, высокой обеспеченности предприятия денежными средствами или просто о том, что руководство предприятия находится в поисках перспективного проекта, который потребует долгосрочных заимствований.

Обычно на фондовом рынке акции предприятий, использующих заемные средства, оцениваются выше.

Принятие решения о соотношении собственного капитала и заемного капитала — это всегда компромисс между доходностью и риском. Стремление получить высокую доходность сталкивается с желанием избежать риска. Такие «подарки» судьбы, как отказ крупных клиентов предприятия платить по своим обязательствам или резкое ухудшение экономической ситуации в стране, могут сказаться на финансовом положении предприятия. Поэтому всегда следует иметь ликвидный резерв на случай непредвиденных обстоятельств.

При чрезмерном расширении предприятия не хватает ресурсов для поддержания достигнутого масштаба операций. Первым признаком этого является хроническая нехватка денежных средств для обеспечения повседневных потребностей предприятия. Ситуация усугубляется, когда быстрый рост предприятия не был полностью профинансирован на предыдущих этапах. Долгосрочные займы — это один из способов выхода из такого опасного положения.

Подводя итог, можно сказать, что гиринг (левередж) должен быть настолько высок, насколько это возможно, чтобы не быть причиной банкротства. Это обеспечивает более высокий доход от привлеченного капитала. Проценты за кредит подлежат вычету из налогооблагаемой суммы. Поэтому по сравнению с собственными средствами займ является более дешевым, но может причинить большой вред обороту наличности предприятия.

Очень часто привилегированные акции рассматриваются не как часть акционерного капитала, а как часть долга с фиксированным процентом.

§ 22.2. ВЛИЯНИЕ ГИРИНГА (ЛЕВЕРИДЖА) НА ПРИБЫЛЬ АКЦИОНЕРОВ

Два основных способа финансирования (акции и долгосрочная ссуда) имеют свои преимущества и недостатки. В случае выпуска акций все риски принимают на себя акционеры. Но при выпуске большого числа акций прибыль на акцию становится очень низкой. Проблему можно решить, взяв ссуду. Но за пользование ссудой платятся проценты. Любое дополнительное финансирование следует использовать для увеличения прибыли.

Процент по задолженности — это юридическое обязательство, которое должно быть оплачено независимо от того, имеет ли предприятие какие-то поступления или не имеет. Следовательно, задолженность повышает финансовый риск, который берет на себя предприятие. Чем больше доля общих активов, финансируемых с помощью займов, а не из средств акционерного капитала, тем выше потенциальные убытки предприятия в случае сокращений поступлений.

Предприятия предпочитают поддерживать низкий гиринг (леверидж) во время экономического спада, когда возрастает риск снижения прибыли. Во время экономического подъема гиринг (леверидж) предприятия находится на высоком уровне.

На практике используется еще один финансовый показатель — *коэффициент рентабельности акционерного капитала ROSF* (*англ.* Return on Shareholders' Funds). Он вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{ROSF}} = \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} - \boxed{\text{процент по ссуде}} \right) : \boxed{\text{акционерный капитал}}.$$

Пример 60. Чистая прибыль предприятия из примера 59 в истекшем году составила 60000 руб. За взятую ссуду предприятие ежегодно платит 12%. Определим коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF*.

Процент по ссуде = 0,12×150000 = 18000 руб.

Тогда коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF* = (чистая прибыль – процент по ссуде)/(акционерный капитал) = = (60000 – 18000)/250000 = 0,168.

Задача 60. Чистая прибыль предприятия из задачи 59 в истекшем году составила 70000 руб. За взятую ссуду предприятие ежегодно платит 14%. Определить коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF*.

Преобразуем формулу для вычисления коэффициента рентабельности акционерного капитала *ROSF*:

$$\boxed{\text{ROSF}} = \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} - \boxed{\text{процент по ссуде}}\right) : \boxed{\text{акционерный капитал}} =$$

$$= \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} - \boxed{\text{процент по ссуде}}\right) : \boxed{\text{суммарные чистые активы}} \times \boxed{\text{суммарные чистые активы}} : \boxed{\text{акционерный капитал}}.$$

Но $\boxed{\text{суммарные чистые активы}} = \boxed{\text{привлеченный суммарный капитал}} = \boxed{\text{используемый капитал}}$.

Тогда коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF* равен:

$$\boxed{\text{ROSF}} = \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} - \boxed{\text{процент по ссуде}}\right) : \boxed{\text{суммарные чистые активы}} \times \boxed{\text{используемый капитал}} : \boxed{\text{акционерный капитал}} =$$

$$= \boxed{\text{ROCE}} \times \boxed{\text{гиринг}},$$

где *ROCE* — это коэффициент рентабельности чистых активов, вычисляемый по формуле:

$$\boxed{\text{ROCE}} = \left(\boxed{\text{чистая прибыль}} - \boxed{\text{процент по ссуде}}\right) : \boxed{\text{суммарные чистые активы}}.$$

Получена следующая формула:

$$\boxed{\text{ROSF}} = \boxed{\text{ROCE}} \times \boxed{\text{гиринг}}.$$

Зная любые два из трех коэффициентов (*ROSF*, *ROCE* и гиринг), из этой формулы всегда можно найти третий коэффициент.

Пример 61. Проверим выполнение равенства *ROSF* = = *ROCE*×гиринг в примерах 59 и 60.

Коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* = = (чистая прибыль – процент по ссуде)/(суммарные чистые активы) = (60000 – 18000)/(250000 + 150000) = 0,105.

Тогда *ROCE*×гиринг = 0,105×1,6 = 0,168 = *ROSF*.

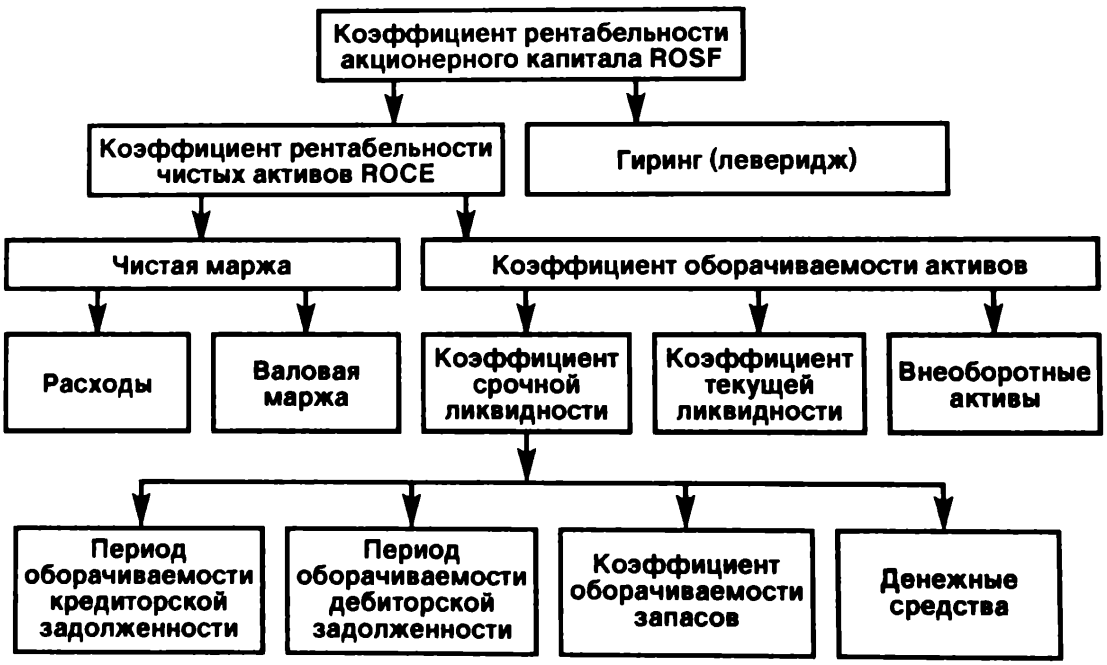
Задача 61. Проверить выполнение равенства *ROSF* = = *ROCE*×гиринг в задачах 59 и 60.

Глава 23

АНАЛИЗ КАНАЛОВ ФОРМИРОВАНИЯ ПРИБЫЛИ

Все финансовые коэффициенты тесно взаимосвязаны друг с другом. При их анализе важно обнаружить эти связи и показать, как различные количественные характеристики деятельности предприятия связаны с общими результатами деятельности предприятия (коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* и коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF*).

Бессмысленно рассматривать отдельный финансовый коэффициент и пытаться сопоставить его с каким-то идеальным нормативом. Все коэффициенты должны рассматриваться вместе с учетом взаимосвязей различных областей деятельности предприятия. Для полноты картины следует проанализировать изучаемые показатели за несколько лет и сравнить их с нормативами по отрасли. Здесь на помощь приходит специальная модель — *дерево прибыли*, которое имеет следующий вид:

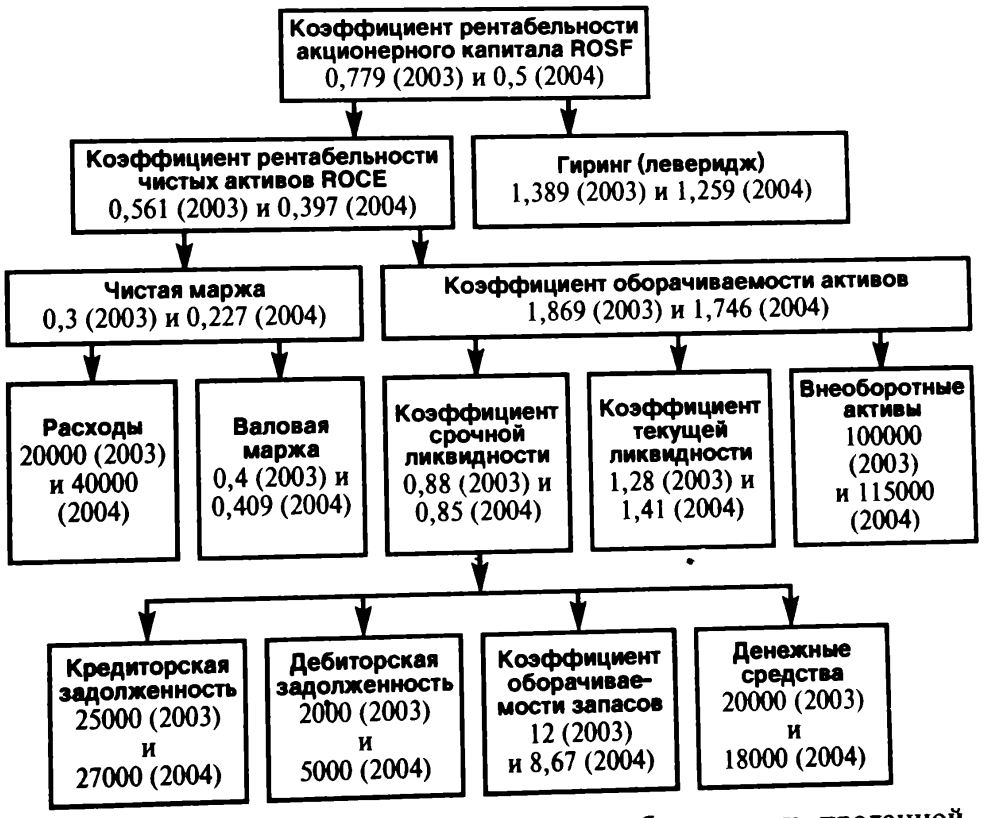


Пример 62. Известны результаты работы предприятия в 2003 и 2004 годах соответственно.

	2003, руб.	2004, руб.
Объем продаж	200000	220000
Себестоимость проданной продукции	120000	130000
Расходы	20000	40000
Внеоборотные активы	100000	115000
Запасы	10000	15000
Дебиторская задолженность	2000	5000
Денежная наличность	20000	18000
Краткосрочная кредиторская задолженность	25000	27000
Долгосрочный заемный капитал	30000	26000

Считается, что вся прибыль предприятия была распределена. Определим финансовые коэффициенты, построим дерево прибыли и проанализируем результаты работы предприятия.

Строим дерево прибыли.



Валовая прибыль = объем продаж – себестоимость проданной продукции. Тогда в 2003 году валовая прибыль = 200000 – 120000 =

= 80000 руб., а в 2004 году валовая прибыль = 220000 – 130000 = = 90000 руб.

Чистая прибыль = валовая прибыль – расходы. Отсюда в 2003 году чистая прибыль = 80000 – 20000 = 60000 руб., а в 2004 году чистая прибыль = 90000 – 40000 = 50000 руб. Будем считать, что это чистая прибыль после уплаты процентов по ссуде.

Так как вся прибыль была распределена, то акционерный капитал = активы – пассивы. Поэтому в 2003 году акционерный капитал = (100000 + 10000 + 2000 + 20000) – (25000 + 30000) = 77000 руб., а в 2004 году акционерный капитал = (115000 + 15000 + 5000 + + 18000) – (27000 + 26000) = 100000 руб.

Коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF* = (чистая прибыль – процент по ссуде)/(акционерный капитал). Тогда в 2003 году *ROSF* = 60000/77000 ≈ 0,779, а в 2004 году *ROSF* = = 50000/100000 = 0,5.

Отметим эти значения на дереве прибыли. Мы видим, что коэффициент рентабельности акционерного капитала понизился с 0,779 до 0,5.

Суммарные чистые активы = внеоборотные активы + оборотные активы – краткосрочная кредиторская задолженность. Отсюда в 2003 году суммарные чистые активы равны 100000 + (10000 + 2000 + + 20000) – 25000 = 107000 руб., а в 2004 году суммарные чистые активы равны 115000 + (15000 + 5000 + 18000) – 27000 = 126000 руб.

Коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* = = (чистая прибыль – процент по ссуде)/(суммарные чистые активы). Поэтому в 2003 году коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* = 60000/107000 ≈ 0,561, а в 2004 году коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* = 50000/126000 ≈ 0,397.

Так как *ROSF* = *ROCE*×гиринг, то гиринг = *ROSF*/*ROCE*. Тогда в 2003 году гиринг = 0,779/0,561 ≈ 1,389, а в 2004 году гиринг = = 0,5/0,397 ≈ 1,259. Мы видим, что в 2004 году коэффициент рентабельности акционерного капитала *ROSF* сократился из-за уменьшения коэффициента рентабельности чистых активов *ROCE* и гиринга (левериджа).

Чистая маржа = (чистая прибыль)/(объем продаж). Отсюда в 2003 году чистая маржа = 60000/200000 = 0,3, а в 2004 году чистая маржа = = 50000/220000 ≈ 0,227.

Коэффициент оборачиваемости активов = (объем продаж)/(суммарные чистые активы). Поэтому в 2003 году коэффициент оборачиваемости активов равен 200000/107000 ≈ 1,869, а в 2004 году коэффициент оборачиваемости активов равен 220000/126000 ≈ 1,746. Мы видим, что в 2004 году коэффициент рентабельности чистых активов *ROCE* сократился из-за уменьшения чистой маржи и коэффициента оборачиваемости активов.

Валовая маржа = (валовая прибыль)/(объем продаж). Тогда в 2003 году валовая маржа равна 80000/200000 = 0,4, а в 2004 году валовая маржа равна 90000/220000 ≈ 0,409. Мы видим, что значение валовой маржи практически не изменилось, а уменьшение чистой маржи в 2004 году произошло из-за роста расходов.

Коэффициент текущей ликвидности = (оборотные активы)/(краткосрочная кредиторская задолженность). Отсюда в 2003 году коэффициент текущей ликвидности равен (10000 + 2000 + + 20000)/25000 = 1,28, а в 2004 году коэффициент текущей ликвидности равен (15000 + 5000 + 18000)/27000 ≈ 1,41.

Коэффициент срочной ликвидности = (оборотные активы – запасы)/(краткосрочная кредиторская задолженность). Поэтому в 2003 году коэффициент срочной ликвидности равен (2000 + 20000)/25000 = = 0,88, а в 2004 году коэффициент срочной ликвидности равен (5000 + + 18000)/27000 ≈ 0,85. Мы видим, что уменьшение коэффициента оборачиваемости активов в 2004 году связано с увеличением коэффициента текущей ликвидности.

Коэффициент оборачиваемости запасов = (себестоимость проданной продукции)/(запасы). Тогда в 2003 году коэффициент оборачиваемости запасов равен 120000/10000 = 12, а в 2004 году коэффициент оборачиваемости запасов равен 130000/15000 ≈ 8,67.

Данные о продажах и закупках в кредит не публикуются, поэтому вместо периодов оборачиваемости дебиторской и кредиторской задолженностей укажем на дереве прибыли дебиторскую и кредиторскую задолженности соответственно.

Задача 62. Известны результаты работы предприятия в 2003 и 2004 годах соответственно.

	2003, руб.	**2004, руб.**
Объем продаж	205000	210000
Себестоимость проданной продукции	110000	120000
Расходы	25000	35000
Внеоборотные активы	105000	112000
Запасы	12000	17000
Дебиторская задолженность	3000	6000
Денежная наличность	19000	16000
Краткосрочная кредиторская задолженность	26000	28000
Долгосрочный заемный капитал	29000	27000

Считается, что вся прибыль предприятия была распределена. Определить финансовые коэффициенты, построить дерево прибыли и проанализировать результаты работы предприятия.

Анализ финансовых коэффициентов можно использовать и для определения задач предприятия на будущее, и для оценки влияния потенциальных изменений в будущем на деятельность предприятия, и для составления бизнес-плана с учетом возможных сценариев развития. Он позволяет оценить уязвимость предприятия по отношению к возможным событиям в будущем.

Строить дерево прибыли лучше всего в виде электронной таблицы (например, с помощью пакета Excel).

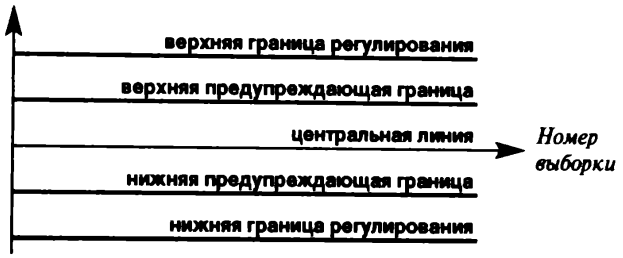
Глава 24

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА

§ 24.1. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ

Технологические процессы подвержены изменчивости. Как определить, что технологический процесс находится под контролем? Случайные или неслучайные изменения мы наблюдаем? Ответы на эти вопросы дают контрольные карты.

Контрольные карты, разработанные в 1920-х годах Уолкером Шевардом из *Bell Telephone Company*, привлекают внимание к результатам, которые выходят за границы предельных значений.



Алгоритм работы:

1. Через одинаковые промежутки времени производится выборка объемом n, и для нее рассчитывается интересующая нас характеристика. Результат наносится на карту.

2. Если произошел выход за границы регулирования, то следует немедленная остановка процесса.

3. Если мы находимся между предупреждающими границами, то процесс под контролем.

4. Если мы находимся между предупреждающей границей и границей регулирования, то надо немедленно произвести повторную выборку. Если и для повторной выборки мы вышли за предупреждающие границы, то следует немедленная остановка процесса.

5. Процесс не находится под контролем, если не менее восьми последовательных точек расположены по одну сторону от централь-

ной линии или не менее восьми последовательных точек образуют последовательность, направленную либо вверх, либо вниз.

Замечание. Excel позволяет изобразить контрольную карту. В первом столбце укажем интересующую нас характеристику выборки. Следующие два столбца содержат значения предупреждающих границ (многократно повторенные). В двух других столбцах указаны значения границ регулирования (многократно повторенные). Выделив эти пять столбцов, выберем команду *Вставка* → *Мастер диаграмм* или щелкнем по кнопке *Мастер диаграмм*. Откроется диалоговое окно мастера диаграмм.

В списке *Тип* выберем *График*. *Вид графика* выберем *с маркерами, помечающими точки данных*. *Далее*. Нужно указать группировку данных (*ряды в столбцах*). *Далее*. Откроется диалоговое окно *Параметры диаграммы*. Щелкнув на вкладке *Линии сетки*, уберем координатную сетку. Щелкнув на вкладке *Легенда*, снимем флажок *Добавить легенду*. *Готово*. Появится контрольная карта.

§ 24.2. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ a И σ

Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$ с математическим ожиданием a и стандартным отклонением σ. Производится выборка объемом n.

Центральная линия: a. Предупреждающие границы (верхняя и нижняя): $a \pm 2\sigma/\sqrt{n}$. Границы регулирования (верхняя и нижняя): $a \pm 3\sigma/\sqrt{n}$. После этого можно применить алгоритм из § 24.1.

Пример 63. Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(3,1)$ с математическим ожиданием 3 и стандартным отклонением 1. Производится выборка объемом $n = 6$.

Центральная линия: 3.

Предупреждающие границы: $a \pm 2\sigma/\sqrt{n} = 3 \pm 2\times1/\sqrt{6}$, то есть 2,18 (нижняя) и 3,82 (верхняя).

Границы регулирования: $a \pm 3\sigma/\sqrt{n} = 3 \pm 3\times1/\sqrt{6}$, то есть 1,78 (нижняя) и 4,22 (верхняя).

Задача 63. Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(4,2)$ с математическим ожиданием 4 и стандартным отклонением 2. Производится выборка объемом $n = 5$. Найти центральную линию, предупреждающие границы и границы регулирования.

§ 24.3. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ ИЗМЕНЧИВОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ a И σ

Для выборки объемом n по специальной таблице определяются числа d_n, r_w, r_A. Центральная линия: $d_n\sigma$. Верхняя предупреждающая граница: $r_w\sigma$. Верхняя граница регулирования: $r_A\sigma$.

Вычисляем значение *размаха выборки* R = (максимальное значение выборки – минимальное значение выборки) и наносим на карту. Так как R неотрицательно, то все границы только верхние.

Пример 64. Вернемся к примеру 63.

Для выборки объемом $n = 6$ по специальной таблице определяются числа $d_n = 2{,}534$, $r_w = 4{,}35$, $r_A = 5{,}6$. Найдем границы для размаха.

Центральная линия: $d_n\sigma = 2{,}534 \times 1 = 2{,}534$. Верхняя предупреждающая граница: $r_w\sigma = 4{,}35 \times 1 = 4{,}35$. Верхняя граница регулирования: $r_A\sigma = 5{,}6 \times 1 = 5{,}6$. Теперь можно применить алгоритм из § 24.1 с поправкой, что все границы только верхние.

Задача 64. В задаче 63 найти границы для размаха. $d_n = 2{,}326$, $r_w = 4{,}2$, $r_A = 5{,}45$.

§ 24.4. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ a И σ

Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$, но a и σ неизвестны. В этом случае строятся только границы регулирования. Производятся m выборок объемом n. Для каждой из них вычисляются средняя $\overline{X}_i$ и размах R_i, $i = 1, \ldots, m$.

По полученным данным находим $\overline{\overline{X}} = (\overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_m)/m$ и $\overline{R} = (R_1 + \ldots + R_m)/m$.

Для выборки объемом n по специальной таблице определяются числа A, B, C.

Центральная линия для средней: $\overline{\overline{X}}$. Центральная линия для размаха: $\overline{R}$. Границы регулирования для средней: $\overline{\overline{X}} \pm A\overline{R}$. Нижняя и верхняя границы регулирования для размаха: $B\overline{R}$ и $C\overline{R}$ соответственно. Теперь можно применить алгоритм из § 24.1.

Пример 65. Каждые 4 часа производится выборка объемом $n = 7$.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6	7
Средняя	63,5	63,6	63,7	63,9	63,4	63	63,2
Размах	2	1	1,7	0,9	1,2	1,6	1,8

Номер выборки	8	9	10	11	12	13	Сумма
Средняя	63,3	63,7	63,5	63,3	63,3	63,6	825
Размах	1,3	1,6	1,3	1,8	1	1,8	19

Найдем границы регулирования и центральные линии для средних и размаха.

Всего $m = 13$ выборок.

Центральная линия для средней: $\overline{\overline{X}} = (\overline{X}_1 + ... + \overline{X}_m)/m = 825/13 \approx \approx 63,5$.

Центральная линия для размаха: $\overline{R} = (R_1 + ... + R_m)/m = 19/13 \approx \approx 1,5$.

$n = 7$. По специальной таблице определяются числа $A = 0,42$, $B = 0,08$, $C = 1,92$.

Границы регулирования для средней: $\overline{\overline{X}} \pm A\overline{R} = 63,5 \pm 0,42 \times 1,5$, то есть 62,87 (нижняя) и 64,13 (верхняя).

Нижняя граница регулирования для размаха: $B\overline{R} = 0,08 \times 1,5 = = 0,12$. Верхняя граница регулирования для размаха: $C\overline{R} = 1,92 \times 1,5 = = 2,88$.

Задача 65. Каждые 3 часа производится выборка объемом $n = 4$. $A = 0,73$, $B = 0$, $C = 2,28$.

Найти границы регулирования и центральные линии для средних и размаха.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6	7
Средняя	25	24,9	25,2	25,1	24,8	25	25,3
Размах	0,3	0,4	0,5	0,1	0,4	0,2	0,3

§ 24.5. КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Часто нас интересует не конкретный количественный параметр, а наличие или отсутствие дефектов у изделия. В этом случае используют контрольные карты качественных признаков. Они бывают двух типов: *p-карты* (используется удельный вес бракованных изделий) и *c-карты* (используется число бракованных изделий в выборке).

§ 24.5.1. P-карты. Аппроксимация нормальным распределением

Производятся выборки объемом n. Оценивается доля бракованных изделий в генеральной совокупности. p = (число бракованных изделий во всех выборках)/(общее число обследованных изделий). $q = 1 - p$. Используется нормальное распределение, если $n \geqslant 30$, $np > 5$, $nq > 5$. По специальным формулам находим границы.

Центральная линия: p.

Предупреждающие границы: $p \pm 2\sqrt{pq/n}$. Границы регулирования: $p \pm 3\sqrt{pq/n}$.

После этого можно применить алгоритм из § 24.1.

Пример 66. Доля бракованных изделий $p = 0{,}011$. Производились выборки объема $n = 1000$ единиц.

Определим границы. $n = 1000 > 30$, $np = 1000 \times 0{,}011 = 11 > 5$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}011 = 0{,}989$, $nq = 1000 \times 0{,}989 = 989 > 5$. Все условия выполнены. Используем нормальное распределение.

Центральная линия: $p = 0{,}011$.

Предупреждающие границы: $p \pm 2\sqrt{pq/n} = 0{,}011 \pm 2\sqrt{0{,}011 \times 0{,}989/1000}$, то есть 0,004 (нижняя) и 0,018 (верхняя).

Границы регулирования: $p \pm 3\sqrt{pq/n} = 0{,}011 \pm 3\sqrt{0{,}011 \times 0{,}989/1000}$, то есть 0,001 (нижняя) и 0,021 (верхняя).

Задача 66. Доля бракованных изделий $p = 0{,}012$. Производились выборки объема $n = 1000$ единиц. Определить границы.

§ 24.5.2. P-карты. Аппроксимация распределением Пуассона

Если нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась отрицательной, то вычисления надо произвести заново с использованием распределения Пуассона.

Также распределение Пуассона используется при выполнении условий $n \geqslant 30$, $np < 5$, $p < 0{,}1$.

Пример 67. Доля бракованных изделий $p = 0{,}025$. Производились выборки объема $n = 200$ единиц.

Нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась равной –0,008. Воспользуемся распределением Пуассона.

$\lambda = np = 200 \times 0{,}025 = 5$. Вероятность того, что в выборке k дефектов, равна $p(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = 5^k e^{-5}/5!$. Это и есть распределение Пуассо-

на. Здесь $k! = 1 \times 2 \times ... \times k$ (произведение натуральных чисел от 1 до k).

Значения функции $p(k)$ и $k!$ можно посчитать на калькуляторе или воспользоваться мастером функций f_x Excel: $p(k)$ = ПУАССОН(k; λ; 0) и $k!$ = ПЕРЕСТ (k; k).

Заполним таблицу.

Верхняя предупреждающая граница соответствует кумулятивной вероятности 0,975, а верхняя граница регулирования соответствует кумулятивной вероятности 0,999. Мы последовательно перебираем число возможных бракованных изделий в выборке, начиная с нуля.

Кумулятивную вероятность можно вычислять обычным способом, но лучше воспользоваться Excel (ведь нас интересуют только 1-й и 4-й столбцы), а именно, ПУАССОН(k; λ; 1). Как только результат в 4-м столбце превысит 0,999, вычисления прекращаем.

Если в выборке больше 9 бракованных изделий, то мы выходим за верхнюю предупреждающую границу. Если в выборке больше 12 бракованных изделий, то мы выходим за верхнюю границу регулирования. Именно при этих значениях были превышены значения 0,975 и 0,999 соответственно.

Число бракованных изделий в выборке, k	Доля бракованных изделий, k/n = k/200	Вероятность p(k) = ПУАССОН(k; λ; 0)	Кумулятивная вероятность ПУАССОН (k; λ; 1)
Нижняя граница регулирования 0,001			
0	0	0,0067	0,0067
Нижняя предупреждающая граница 0,025			
1	0,005	0,0337	0,0404
2	0,01	0,0843	0,1247
3	0,015	0,1405	0,2652
4	0,02	0,1756	0,4408
5	0,025	0,1756	0,6162
6	0,03	0,1463	0,7628
7	0,035	0,1045	0,8673
8	0,04	0,0653	0,9326
9	0,045	0,0336	0,9689
Верхняя предупреждающая граница 0,975			
10	0,05	0,0181	0,9870
11	0,055	0,0082	0,9953
12	0,06	0,0034	0,9986
Верхняя граница регулирования 0,999			
13	0,065	0,0013	0,9999971

Задача 67. Доля бракованных изделий p = 0,048. Производились выборки объема n = 100 единиц. Найти границы аппроксимацией распределением Пуассона.

§ 24.5.3. С-карты

Бракованное изделие может содержать более одного дефекта. Для контроля числа дефектов на единицу продукции используются *с-карты.*

Среднее число дефектов на единицу продукции c = общее число дефектов/общее число обследованных изделий.

Границы регулирования: $c \pm 3\sqrt{c}$.

Пример 68. Выборка из 100 предметов выявила 200 дефектов.

Среднее число дефектов на единицу продукции c = общее число дефектов/общее число обследованных изделий = 200/100 = 2.

Границы регулирования: $c \pm 3\sqrt{c} = 2 \pm 3\sqrt{2}$. Нас интересует верхняя граница регулирования 6,2.

Задача 68. Выборка из 200 предметов выявила 5000 дефектов. Определить среднее число дефектов на единицу продукции и верхнюю границу регулирования.

§ 24.6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИЕМОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Очень часто приходится проверять качество продукции, закупаемой у внешних поставщиков. Можно применить *схему одноэтапной выборки*:

1) для проверки производится выборка объемом 15 единиц;

2) продукция принимается, если в выборке не более 1 бракованного изделия.

Схема двухэтапной выборки:

1) для проверки производится выборка объемом 20 единиц;

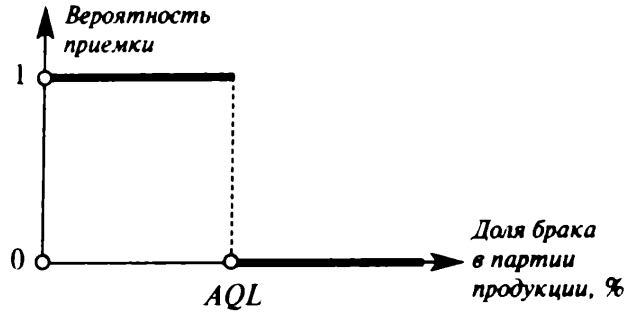
2) продукция принимается, если в выборке не обнаружено бракованных изделий;

3) продукция отклоняется, если в выборке обнаружено более 2 бракованных изделий;

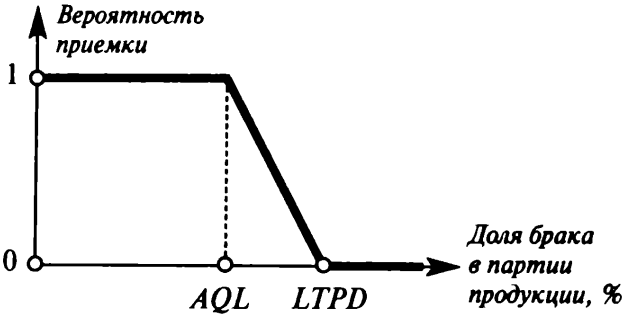
4) если в выборке обнаружено 1 или 2 бракованных изделия, то производится повторная выборка объемом 20 единиц;

5) если в повторной выборке обнаружено не более 1 бракованного изделия, то продукция принимается (иначе отклоняется).

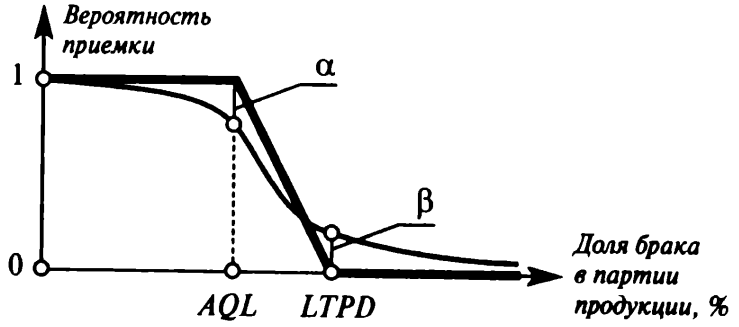
Возможен и другой подход. Потребитель задает *допустимый уровень качества AQL.* Если доля брака в партии продукции не превышает *AQL,* то продукцию принимаем (иначе отклоняем). Получается *кривая оперативной характеристики.*



На практике таких идеальных схем не существует. Поэтому потребитель задает 2 числа: *AQL* и *допустимый процент бракованных изделий в партии LTPD*. Если процент бракованных изделий в партии не превышает *AQL*, то продукцию принимаем. Если процент бракованных изделий в партии превышает *LTPD*, то продукцию отклоняем. Если процент бракованных изделий в партии попадает в промежуток от *AQL* до *LTPD*, то какие-то партии принимаются, какие-то нет.



К сожалению, на практике эта схема искажается. *Риск производителя* α — это вероятность того, что схема забракует приемлемую продукцию. *Риск потребителя* β — это вероятность того, что схема приведет к принятию неприемлемой для потребителя продукции.



Если α и β заданы заранее, построить схему приемки очень сложно.

Пример 69. Из партии в 200 единиц производится выборка n = = 5 единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия в 200 единиц будет отвергнута.

Построим кривую оперативной характеристики.

Число бракованных изделий подчиняется биномиальному распределению. Вероятность k «успехов» в n испытаниях $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = (n!)/(k!\times(n-k)!)$, p — вероятность «успеха» в одном испытании, $q = 1 - p$.

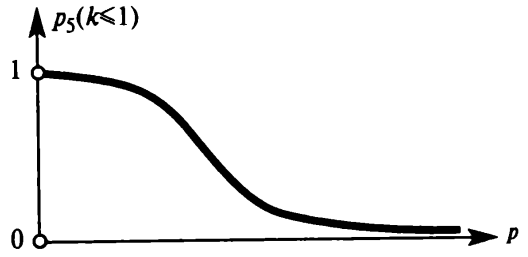
Можно воспользоваться Excel (мастер функций): $p_n(k)$ = БИНОМРАСП(k; n; p; 0). В нашем случае $n = 5$, то есть определяем $p_5(k)$. Мы примем партию продукции, если число бракованных изделий не превысит 1, то есть $k \leqslant 1$. Поэтому $p_5(k \leqslant 1) = p_5(0) + p_5(1)$.

В Excel $p_5(k \leqslant 1)$ = БИНОМРАСП(1; 5; p; 1). Будем задавать различные значения p и вычислять $p_5(k \leqslant 1)$.

p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
$p_5(k\leqslant 1)$	0,999	0,9774	0,9186	0,8352	0,7373	0,6328	0,5283	0,337

Построим график. Это и есть кривая оперативной характеристики.

Если доля брака 0,01, то вероятность приемки 0,999; если доля брака 0,05, то вероятность приемки 0,9774 и т. д.



Задача 69. Из партии в 200 единиц производится выборка $n = 6$ единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия в 200 единиц будет отвергнута. Построить кривую оперативной характеристики.

Пример 70. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: $AQL = 0{,}01$, $LTPD = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}01$. Если в выборке n = 100 единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выясним, удовлетворяет ли эта схема заявленным параметрам.

$n = 100$. Вероятность приемки партии продукции равна: p_{100}(число бракованных изделий $k \leqslant 2$) = $p_{100}(k \leqslant 2)$ = БИНОМРАСП(2; 100; p; 1). Тогда вероятность отказа в приемке равна $1 - p_{100}(k \leqslant 2)$ = 1 – БИНОМРАСП(2; 100; p; 1).

Риск производителя α — это вероятность отказа в приемке партии продукции при $p = AQL$, то есть в нашей схеме $\alpha = 1 -$ БИНОМРАСП(2; 100; AQL; 1) = 1 – БИНОМРАСП(2; 100; 0,01; 1) $\approx$ 0,0794, что превышает объявленные 0,05.

Риск потребителя β — это вероятность приемки партии продукции при $p = LTPD$, то есть в нашей схеме β = БИНОМРАСП(2; 100; $LTPD$; 1) = БИНОМРАСП(2; 100; 0,05; 1) $\approx$ 0,1183, что превышает объявленные 0,01.

И с точки зрения производителя, и с точки зрения потребителя выбранная схема плоха и требует замены.

Задача 70. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: $AQL = 0{,}05$, $LTPD = 0{,}25$, $\alpha = 0{,}15$, $\beta = 0{,}03$. Если в выборке $n = 15$ единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выяснить, удовлетворяет ли эта схема заявленным параметрам.

Ответы

1. 140000 руб. и 100000 руб. **2.** 4100 руб. **3.** 3975 руб. **4.** 4047,5 руб. **5.** 9575 руб., 9450 руб. и 9522,5 руб. **6.** 5000 руб.
7. Норма амортизации 0,286.

Год	Начисление на износ, руб.	Балансовая стоимость на конец года, руб.
1	7722	19278
2	5513,51	13764,49
3	3936,64	9827,85
4	2810,76	7017,09

8.

Год	Начисление на износ, руб.	Балансовая стоимость на конец года, руб.
1	10800	16200
2	8100	8100
3	5400	2700
4	2700	0

9. 30000 руб. **10.** 15000 руб. **11.** 3,18. **12.** 0,90. **13.** 0,29. **14.** 3. **15.** 128 дней. **16.** 91 день. **17.** 40%, 56% и 127%. **18.** 36%. **25.** 25 руб. **29.** 80000 руб. и 122000 руб.; 207500 руб. и (22500 руб.). **30.** 64,46 руб./ед. и 79,28 руб./ед. **31.** 71,47 руб./ед. и 64,37 руб./ед. **32.** 64,42 руб./ед. и 79,37 руб./ед. **33.** 300 руб. **34.** 600 руб. **35.** −100 руб. **36.** −120 руб. **37.** −450 руб. **38.** −50 руб. **39.** −3000 руб. **40.** 3200 руб. **41.** −5000 руб. **42.** 2000 руб. **43.** 1000 руб. **44.** 0,893; 0,931; 1,043. **45.** 0,991; 0,064.

46.

Показатели	Прошлый год (руб.)	Отчетный год (руб.)	Изменения
Коэффициент обновления	0,147	0,137	−0,01
Срок обновления основных средств	6,54	7,07	0,53
Коэффициент выбытия	0,109	0,110	0,001
Коэффициент прироста	0,044	0,031	−0,013
Коэффициент износа	0,249	0,247	−0,002
Коэффициент годности	0,751	0,753	0,002

47. Метод цепных подстановок: $\Delta N_F = 2506{,}64$ руб., $\Delta N_\lambda = -1021{,}74$ руб.; интегральный метод: $\Delta N_F = 2496{,}28$ руб., $\Delta N_\lambda = -1032{,}10$ руб. **48.** $\Delta N_M = 2886{,}62$ руб., $\Delta N_\lambda = -1268{,}26$ руб. **49.** $\Delta N_R = 4430{,}35$ руб., $\Delta N_\lambda = -2812{,}35$ руб. **50.** Среднеквадратические отклонения 1,21 тыс. руб. и 1,37 тыс. руб. Коэффициенты вариации 0,096 и 0,116. Коэффициент корреляции 0,762. **51.** 0,979 и 0,964. **52.** 9 дней, 14 дней и 16 дней; 13 дней; 2,9 дня. **53.** 154 человека. **54.** 101 человек. **55.** 304 че-

ловека. **56.** 0,967; 0,414; 0,190; 0,224; 0,140. **57.** 182500 человеко-дней; 125500 человеко-дней; 115500 человеко-дней; 0,581; 0,845; 0,918; 212 дней; 231 день; 7,7 ч.; 7,9 ч.; 0,975; 0,895. **58.** 1,034; 0,984; 1,051. **59.** 1,5. **60.** 0,28. **62.** *ROSF* 0,833 и 0,573. *ROCE* 0,619 и 0,447. Гиринг 1,346 и 1,282. Чистая маржа 0,341 и 0,262. Валовая маржа 0,463 и 0,429. Коэффициент оборачиваемости активов 1,814 и 1,707. Коэффициент текущей ликвидности 1,308 и 1,393. Коэффициент срочной ликвидности 0,846 и 0,786. Коэффициент оборачиваемости запасов 9,167 и 7,059. **63.** 4; 2,21 и 5,79; 1,32 и 6,68. **64.** 4,652; 8,4 и 10,9. **65.** Для средней 25,04; 24,81 и 25,27. Для размаха 0,31; 0 и 0,71. **66.** 0,012; 0,005 и 0,019; 0,002 и 0,022. **67.** Верхняя предупреждающая граница — 9 бракованных изделий в выборке. Верхняя граница регулирования — 12 бракованных изделий в выборке. **68.** 25 и 40. **69.**

p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
$p_6(k \leqslant 1)$	0,9985	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,2333

70. Для потребителя схема очень плоха.

Программа учебного курса «Микроэкономическая статистика»

1. Что такое микроэкономическая статистика?

2. Основные понятия, используемые при составлении финансовой отчетности. Бухгалтерский баланс. Активы. Материальные и нематериальные активы. Внеоборотные и оборотные активы. Дебиторская задолженность. Пассивы. Краткосрочные и долгосрочные обязательства. Собственный капитал. Уравнение бухгалтерского баланса. Нераспределенная прибыль. Отчет о движении денежных средств. Поступления и платежи. Сальдо на начало периода. Сальдо на конец периода. Расчет движения денежных средств. Счет прибылей и убытков.

3. Расчет прибыли. Объем продаж. Себестоимость проданной продукции. Валовая прибыль. Расходы. Чистая прибыль.

4. Оценка запасов товарно-материальных ценностей. Метод оценки запасов ФИФО.

5. Метод оценки запасов ЛИФО.

6. Метод оценки запасов по средневзвешенной.

7. Влияние различных методов оценки запасов на расчет прибыли.

8. Амортизация. Метод равномерного начисления износа. Ежегодное начисление на износ. Балансовая стоимость актива на конец года.

9. Метод начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости. Норма амортизации. Ежегодное начисление на износ. Балансовая стоимость актива на конец года.

10. Метод суммы годичных чисел. Ежегодное начисление на износ. Балансовая стоимость актива на конец года. Сравнение методов начисления амортизации.

11. Расчет дебиторской задолженности на конец отчетного периода.

12. Расчет кредиторской задолженности на конец отчетного периода.

13. Анализ результатов деятельности предприятия. Интерпретация документов финансовой отчетности. Суть анализа финансовых коэффициентов. Эффективность использования ресурсов. Коэффициент оборачиваемости активов.

14. Ликвидность. Коэффициент текущей ликвидности. Коэффициент срочной ликвидности.

15. Влияние хозяйственных операций на уровень ликвидности. Коэффициент оборачиваемости запасов. Период оборачиваемости дебиторской задолженности. Период оборачиваемости кредиторской задолженности.

16. Рентабельность. Чистая маржа. Валовая маржа. Наценка.

17. Оценка финансовых результатов деятельности предприятия. Коэффициент рентабельности чистых активов, его связь с коэффициентом оборачиваемости активов и чистой маржой.

18. Затраты. Учет затрат. Накладные расходы. Центры затрат. Центры прибыли. Нормативные и фактические затраты.

19. Факторы производства и затраты. Постоянные и переменные факторы производства. Классификация затрат. Постоянные, переменные и полупеременные затраты. Совокупные затраты. Средние затраты на единицу проданной продукции. Эффект масштаба. Специализация. Отрицательный эффект масштаба.

20. Структура капитала. Гиринг (леверидж).

21. Влияние гиринга (левериджа) на прибыль акционеров. Коэффициент рентабельности акционерного капитала.

22. Связь между коэффициентом рентабельности акционерного капитала, гирингом и коэффициентом рентабельности чистых активов.

23. Анализ каналов формирования прибыли. Дерево прибыли.

24. Функциональная калькуляция себестоимости (система ABC). Сравнение традиционной и функциональной систем калькуляция себестоимости. Виды деятельности. Факторы издержек, зависящие от объема производства. Факторы издержек, не зависящие от объема производства.

25. Расчет себестоимости с помощью традиционной системы учета затрат.

26. Расчет себестоимости с помощью функциональной системы учета затрат.

27. Анализ отклонений. Отклонения по материалам. Отклонение по цене материала. Отклонение по использованию материала. Общее отклонение по затратам на материал.

28. Отклонение по трудозатратам. Отклонение по ставке заработной платы. Отклонение по производительности труда. Общее отклонение по трудозатратам.

29. Переменные производственные накладные расходы. Отклонение переменных накладных расходов по трудозатратам. Отклонение переменных накладных расходов по эффективности. Общее отклонение по переменным накладным расходам.

30. Отклонение по постоянным накладным расходам.

31. Отклонение по реализации продукции. Общее отклонение по марже реализации. Отклонение по цене реализации. Отклонение по объему продаж.

32. Анализ качества продукции. Средний коэффициент сортности. Коэффициент вариации.

33. Анализ ритмичности работы предприятия. Ритмичность. Коэффициент ритмичности. Коэффициент вариации.

34. Анализ движения и технического состояния основных средств. Основные средства. Коэффициент обновления. Срок обновления. Коэффициент выбытия. Коэффициент прироста. Сумма прироста основных средств.

Коэффициент износа. Коэффициент годности. Остаточная стоимость основных средств.

35. Анализ фондоотдачи. Фондоотдача. Фондоемкость.

36. Анализ материалоотдачи. Материалоотдача. Материалоемкость.

37. Анализ производительности труда. Производительность труда. Трудоемкость.

38. Анализ сбалансированности денежных потоков. Положительный денежный поток. Отрицательный денежный поток. Чистый денежный поток. Среднеквадратическое отклонение. Коэффициент вариации. Коэффициент корреляции. Дефицит денежных средств. Избыточность денежной массы.

39. Статистика поставок и реализации продукции. Поставка продукции. Реализованная продукция. Индекс выполнения договорных поставок по объему. Общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту.

40. Показатели частоты и равномерности поставок продукции. Длительности интервалов между поставками. Средняя частота поставок. Стандартное отклонение. Коэффициент вариации.

41. Статистика численности работников. Численность работников предприятия. Списочный состав. Явочный состав. Среднесписочная численность работников.

42. Показатели изменения численности работников. Индекс численности рабочей силы. Показатель общего оборота рабочей силы. Коэффициент оборота по приему. Коэффициент оборота по выбытию. Коэффициент текучести кадров.

43. Статистика использования рабочего времени. Рабочее время. Один человеко-час, один человеко-день. Календарный фонд рабочего времени. Табельный фонд рабочего времени. Максимально возможный фонд рабочего времени. Коэффициент использования календарного фонда рабочего времени. Коэффициент использования табельного фонда рабочего времени. Коэффициент использования максимально возможного фонда рабочего времени. Коэффициент использования рабочего периода. Среднее число фактически отработанных работником дней за период. Среднее число дней, которое должен был отработать работник по режиму работы предприятия. Коэффициент использования рабочего дня. Средняя фактическая продолжительность рабочего дня. Интегральный коэффициент использования рабочего времени.

44. Анализ уровня и динамики заработной платы. Заработная плата. Средняя заработная плата. Индекс переменного состава заработной платы. Индекс фиксированного состава заработной платы. Индекс структурных сдвигов.

45. Статистический контроль качества. Изменчивость технологического процесса. Контрольные карты. Центральная линия. Предупреждающие границы. Границы регулирования. Алгоритм работы.

46. Контрольные карты средних арифметических технологического процесса при известных a и σ.

47. Контрольные карты изменчивости технологического процесса при известных a и σ. Размах вариации.

48. Контрольные карты количественных признаков при неизвестных a и σ.

49. Контрольные карты качественных признаков. p-карты. Аппроксимация нормальным распределением.

50. p-карты. Аппроксимация распределением Пуассона.

51. Контрольные карты качественных признаков. c-карты. Среднее число дефектов на единицу продукции. Границы регулирования.

52. Статистический приемочный контроль качества качественных признаков. Схема одноэтапной выборки. Схема двухэтапной выборки. Допустимый уровень качества. Кривая оперативной характеристики. Допустимый процент бракованных изделий. Риски производителя и потребителя.

Задачи для контрольной работы по курсу «Микроэкономическая статистика»

1–10. Предприятие производит продукты *X* и *Y*. Продукт *X* выпускается в больших количествах крупными партиями, но нерегулярно, потребляет *e*% часов труда основных работников. Продукт *Y* выпускается в ограниченных количествах маленькими партиями и потребляет *f*% часов труда основных работников. Объем продаж продуктов *X* и *Y* равен *a* и *b* руб. соответственно. Прямые издержки продуктов *X* и *Y* равны *c* и *d* руб. соответственно. После подробного исследования стало ясно, что на каждый продукт за отчетный период приходится по *g*% от числа всех обработанных за это время партий продукции и что накладные расходы, начисленные на центр издержек, колеблются в долгосрочном плане в соответствии со спросом на продукцию и выросли до *h* руб. Определить объявленную прибыль производства продуктов *X* и *Y* с помощью традиционной и функциональной систем учета затрат.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1	730000	265000	350000	70000	45	11	22	865000
2	720000	235000	325000	80000	30	7	23	835000
3	710000	225000	335000	90000	31	9	24	825000
4	760000	280000	380000	65000	33	12	26	880000
5	770000	290000	390000	45000	32	13	28	890000
6	790000	270000	370000	75000	38	5	29	870000
7	780000	260000	360000	55000	39	6	21	860000
8	725000	210000	310000	85000	34	14	30	810000
9	735000	220000	320000	95000	44	16	32	820000
10	765000	230000	365000	40000	42	15	27	830000

11–20. а) Предприятие производит продукты *X* и *Y*. Накладные расходы на наладку равны *q* руб., на оборудование — *r* руб., на получение материалов — *s* руб., на упаковку — *t* руб., на инженерное обеспечение — *z* руб. Определить себестоимость продукции, используя традиционную систему учета затрат и предполагая, что все накладные расходы начисляются на основе времени работы основных работников.

б) Определить себестоимость продукции, используя традиционную систему учета затрат и предполагая, что накладные расходы подразделения приемки материала покрываются на основе ставки распределения накладных расходов на обработку получаемых материалов, а оставшиеся накладные расходы покрываются на основе ставки времени работы оборудования.

в) Определить производственные затраты с помощью функциональной системы калькуляции себестоимости.

Показатели	Продукт X	Продукт Y
Объем продаж, ед.	a	b
Использование сырья, ед./ед. продукции	c	d
Затраты на основные материалы, руб./ед. продукции	e	f
Труд основных работников, ч/ед. продукции	g	h
Время работы оборудования, ч/ед. продукции	k	m
Затраты на труд основных работников, руб.	n	p
Число производственных циклов	w	v
Число доставок продукта	a_1	a_2
Число доставок материалов	a_3	a_4
Число производственных заказов	a_5	a_6

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	3600	3700	3800	3900	3650	3750	3775	3675	3850	3950
b	1600	1700	1800	1900	1650	1750	1775	1675	1850	1950
c	7	8	9	4	3	7	8	9	4	3
d	8	9	6	7	5	8	9	6	7	5
e	25	26	27	28	29	29	28	27	26	25
f	23	24	26	25	27	25	26	24	23	22
g	5	2	3	5	4	3	5	6	2	4
h	6	4	5	7	5	6	8	7	5	6
k	6	8	7	5	6	8	7	7	9	8
m	4	7	6	4	5	6	4	5	7	5
n	17	18	19	14	13	17	18	19	14	13
p	18	19	16	17	15	18	19	16	17	15
q	3650	3750	3850	3950	3700	3800	3900	3775	3875	3975
r	76000	77000	78000	79000	76500	77500	77500	76500	78500	79500
s	37000	38000	39000	43000	34000	37500	38500	39500	34500	43500
t	28000	29000	26500	27500	25000	28500	29500	26300	27400	25500
z	32500	33000	33500	34500	36500	37000	37500	32000	36000	35000

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
w	3	4	6	4	2	5	6	5	3	5
v	5	2	3	5	4	3	5	6	2	4
a_1	7	9	8	9	9	6	8	7	5	6
a_2	6	8	7	5	6	4	4	3	8	9
a_3	25	28	27	25	29	23	28	22	26	28
a_4	28	34	29	27	35	25	32	24	33	31
a_5	15	12	13	15	14	13	15	16	12	11
a_6	16	14	15	17	15	16	18	17	15	16

21–30. а) Нормативная и фактическая цены равны соответственно c руб./кг и d руб./кг, а количество приобретенного материала — e кг. Определить отклонение по цене материала.

б) Нормативное количество материала для фактического выпуска продукции равно e кг. Фактически же было использовано f кг. Нормативная цена материала равна g руб./кг. Определить отклонение по использованию материала.

в) Нормативные издержки на материал на единицу продукции равны h руб./кг, а фактический выпуск продукции составил k кг. Фактические затраты на материал равны m руб. Определить общее отклонение по затратам на материал.

	c	d	e	f	g	h	k	m
21	7	8	25	23	5	6	60	400
22	8	9	26	24	2	4	80	370
23	9	6	27	26	3	5	70	360
24	4	7	28	25	5	7	50	340
25	3	5	29	27	4	5	60	315
26	7	8	29	25	3	6	80	467
27	8	9	28	26	5	8	70	540
28	9	6	27	24	6	7	70	500
29	4	7	26	23	2	5	90	470
30	3	5	25	22	4	6	80	502

31–40. а) Нормативная ставка заработной платы равна c руб./ч, а фактически отработанное время составило e ч. Фактическая ставка заработной платы равна d руб./ч. Определить отклонение по ставке заработной платы.

б) Нормативное рабочее время для фактического выпуска продукции равно e ч, а фактически отработанное время составило f ч. Нормативная ставка заработной платы равна c руб./ч. Определить отклонение по производительности труда.

в) Нормативные трудозатраты на единицу продукции равны *n* руб./ед., а фактический выпуск продукции составил *m* единиц. Фактические трудозатраты равны *g* руб. Определить общее отклонение по трудозатратам.

	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
c	70	80	90	40	30	70	80	90	40	30
d	80	90	60	70	50	80	90	60	70	50
e	25	26	27	28	29	29	28	27	26	25
f	23	24	26	25	27	25	26	24	23	22
g	59	102	130	59	64	103	75	96	102	74
m	4	7	6	4	5	6	4	5	7	5
n	17	18	19	14	13	17	18	19	14	13

41–50. а) Предполагается, что переменные накладные расходы будут изменяться в зависимости от времени труда основных работников. Ставка заработной платы основных работников равна *c* руб./ч, а труд основных работников составил *d* ч. Фактические переменные производственные накладные расходы равны *e* руб. Определить отклонение переменных накладных расходов по затратам.

б) Нормативные часы по труду основных работников равны *f* ч. Определить отклонение переменных накладных расходов по эффективности.

	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
c	70	80	90	40	30	70	80	90	40	30
d	80	90	60	70	50	80	90	60	70	50
e	5700	7260	5270	2850	1529	5290	7280	5270	2600	1525
f	83	94	66	75	57	85	96	64	73	52

51–60. Сметные постоянные накладные расходы равны *c* руб., а фактические постоянные накладные расходы — *d* руб. Определить отклонение по постоянным накладным расходам.

	c	*d*
51	170000	180000
52	180000	190000
53	190000	160000
54	140000	170000
55	130000	150000

	c	*d*
56	270000	260000
57	280000	275000
58	189000	196000
59	240000	267000
60	230000	250000

61–70. а) Нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции равна *c* руб./ед., а фактический объем продаж составил *e* еди-

ниц. Фактическая маржа вклада в прибыль на единицу продукции равна *d* руб./ед. Определить отклонение по цене реализации.

б) Сметный объем продаж равен *e* единиц, а нормативная маржа вклада в прибыль на единицу продукции — *c* руб./ед. Фактический объем продаж составил *f* единиц. Определить отклонение по объему продаж.

	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
c	70	80	90	40	30	70	80	90	40	30
d	80	90	60	70	50	80	90	60	70	50
e	2500	2600	2700	2800	2900	2900	2800	2700	2600	2500
f	2300	2400	2600	2500	2700	2500	2600	2400	2300	2200

71–80. На основании приведенных данных определить индекс выполнения договорных поставок по объему и общий индекс выполнения договорных поставок по ассортименту.

Продукция	**Обязательства, руб.**	**Поставлено фактически в ценах договора, руб.**
А	*a*	*b*
Б	*c*	*d*

	a	*b*	*c*	*d*
71	61000	68000	90000	71000
72	62000	69000	89000	72000
73	63000	70000	88000	73000
74	64000	67000	87000	74000
75	65000	61000	86000	91000
76	66000	62000	85000	92000
77	67000	63000	84000	93000
78	68000	64000	83000	94000
79	69000	65000	82000	95000
80	70000	66000	81000	96000

81–90. а) На основании приведенных данных определить средний коэффициент сортности по плану и фактически и индекс роста качества продукции.

Сорт продукции	**Цена, руб.**	**Выпуск продукции, ед.**	
		План	**Факт**
1	*c*	*a*	*g*
2	*d*	*b*	*h*
3	*e*	*f*	*k*

б) На основании приведенных данных определить коэффициент ритмичности и коэффициент вариации.

Период	Выпуск продукции, ед.	
	План	Факт
1	*a*	*g*
2	*b*	*h*
3	*f*	*k*

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*
81	3600	1600	8	7	5	2300	3500	1650	2600
82	3700	1700	9	8	6	2400	3600	1840	2800
83	3800	1800	9	6	2	2600	3700	1925	2700
84	3900	1900	8	7	2	2500	3800	1950	2550
85	3650	1650	9	5	4	2700	3600	1700	2600
86	3750	1750	9	7	5	2500	3700	1690	2800
87	3775	1775	6	3	2	2600	3600	1800	2700
88	3675	1675	9	5	4	2400	3560	1700	2700
89	3850	1850	7	4	3	2300	3800	1925	2900
90	3950	1950	8	5	3	2200	3900	1965	2800

91–100. На основании приведенных данных провести анализ движения и технического состояния основных средств.

Показатели	Прошлый год (руб.)	Отчетный год (руб.)
Первоначальная стоимость основных средств	*a*	*b*
Износ основных средств	*f*	*g*
Стоимость поступивших основных средств	*h*	*k*
Стоимость выбывших основных средств	*d*	*e*
Стоимость основных средств на начало периода	*c*	

	a	*b*	*f*	*g*	*h*	*k*	*d*	*e*	*c*
91	360000	365000	23000	35000	16500	26000	11000	16000	340000
92	370000	375000	24000	36000	18400	28000	13700	17000	350000
93	380000	385000	26000	37000	19250	27000	13800	18000	360000
94	390000	396000	25000	38000	19500	25500	13900	19000	320000
95	365000	369000	27000	36000	17000	26000	13650	16500	325000
96	375000	378000	25000	37000	16900	28000	13750	17500	345000
97	377500	379500	26000	36000	18000	27000	13775	17750	335000
98	367500	369000	24000	35600	17000	27000	13675	16750	330000
99	385000	388000	23000	38000	19250	29000	13850	18500	340000
100	395000	399000	22000	39000	19650	28000	13950	19500	355000

101–110. а) На основании приведенных данных определить влияние использования основных фондов на объем продукции методом цепных подстановок и интегральным методом.

Показатели (руб.)	План	Факт
Стоимость годового объема продукции N	d	e
Среднегодовая стоимость основных фондов F	a	c

б) На основании приведенных данных определить влияние изменения затрат материальных ресурсов на объем продукции интегральным методом.

Показатели	План	Факт
Продукция N, руб.	d	e
Затраты материальных ресурсов M, руб.	b	f

в) На основании приведенных данных проанализировать интегральным методом степень влияния использования труда на объем продукции.

Показатели	План	Факт
Продукция N, руб.	d	e
Среднегодовая численность производственного персонала R, чел.	g	h

	d	e	b	f	a	c	g	h
101	111000	116000	54000	54564	134000	134567	24	25
102	113700	117000	55000	55694	135000	135693	23	25
103	113800	118000	56000	56395	136000	136396	27	29
104	113900	119000	52000	52973	132000	132977	21	22
105	113650	116500	52500	52698	132500	132691	22	23
106	113750	117500	54500	54795	134500	134793	24	26
107	113775	117750	53500	53967	133500	133962	23	24
108	113675	116750	53000	53851	133000	133858	28	30
109	113850	118500	54000	54679	134000	134676	30	31
110	113950	119500	55500	55474	135500	135473	31	33

111–120. На основании приведенных данных определить длительности интервалов между поставками, среднюю частоту поставок и коэффициент вариации. Все поставки одинаковы.

Даты фактической поставки	a	b	c	d

	a	*b*	*c*	*d*
111	19.02	26.02	11.03	25.03
112	17.03	23.03	14.04	27.04
113	16.04	25.04	18.05	29.05
114	14.05	29.05	13.06	28.06
115	18.06	21.06	12.07	26.07

	a	*b*	*c*	*d*
116	15.07	28.07	15.08	21.08
117	12.08	22.08	10.09	23.09
118	11.09	27.09	16.10	22.10
119	13.10	24.10	17.11	24.11
120	14.11	22.11	11.12	28.12

121–130. На основании приведенных данных определить чистый денежный поток по каждому месяцу, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации по положительному и отрицательному денежным потокам, а также коэффициент корреляции между положительным и отрицательным денежными потоками.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	*p*
121	16	15	17	18	15	13	15	16	16	14	17	18
122	13	14	18	19	16	14	12	14	18	17	18	19
123	14	16	19	16	17	16	13	15	17	16	19	16
124	16	18	14	17	18	15	15	17	15	14	14	17
125	15	16	13	15	19	17	14	15	16	15	13	15
126	14	17	17	18	19	15	13	16	18	16	17	18
127	16	19	18	19	18	16	15	18	17	14	18	19
128	17	18	19	16	17	14	16	17	17	15	19	16
129	13	16	14	17	16	13	12	15	19	17	14	17
130	15	17	13	15	15	12	14	16	18	15	13	15

131–140. а) Списочная численность работников предприятия с 1 по 11 марта равна *a* человек, с 12 по 19 марта — *b* человек, с 20 по 31 марта — *c* человек. Определить среднесписочную численность работников предприятия в марте.

б) Списочная численность работников предприятия в апреле равна *a* человек, в мае — *b* человек, в июне — *c* человек. Определить среднесписочную численность работников предприятия во втором квартале.

	131	**132**	**133**	**134**	**135**	**136**	**137**	**138**	**139**	**140**
a	350	451	552	653	754	855	956	556	657	758
b	359	458	557	656	759	851	954	559	652	754
c	355	456	553	651	752	857	959	555	653	756

141–150. Предприятие выпустило акций на *a* тыс. руб. и взяло долгосрочную банковскую ссуду на *b* тыс. руб. Определить гиринг (леверидж). Чистая прибыль предприятия в истекшем году составила

c тыс. руб. За взятую ссуду предприятие ежегодно платит $i\%$. Определить коэффициент рентабельности акционерного капитала $ROSF$. Проверить выполнение равенства $ROSF = ROCE \times$гиринг.

	141	**142**	**143**	**144**	**145**	**146**	**147**	**148**	**149**	**150**
a	220	270	280	290	225	240	260	235	265	275
b	115	125	135	145	105	195	185	175	165	155
c	60	50	70	80	90	30	45	25	85	75
d	13	14	15	11	10	16	17	18	19	12

151–160. Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации a единиц продукции по цене f руб. В апреле закуплены для реализации b единиц продукции по цене g руб. В мае проданы c единиц продукции по цене h руб. В июне проданы d единиц продукции по цене k руб. В июле закуплены для реализации e единиц продукции по цене m руб. В августе проданы t единиц продукции по цене n руб.

а) Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО.

б) Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО.

в) Определить стоимость запасов на конец периода методом средневзвешенной.

г) Определить валовую прибыль в пунктах а), б), в).

	f	g	h	m	k	n	a	c	b	d	e	t
151	25	26	36	27	37	38	220	115	210	120	60	30
152	26	28	38	29	39	40	270	125	220	170	50	20
153	27	28	39	30	40	41	280	135	230	180	70	40
154	29	31	41	32	42	43	290	145	250	190	80	40
155	28	29	39	30	41	42	225	105	265	125	90	30
156	22	24	34	26	35	36	240	195	270	140	30	20
157	21	23	33	24	34	35	260	185	210	160	45	30
158	23	25	35	26	36	37	235	175	255	135	25	20
159	24	26	36	27	38	39	265	165	235	165	85	40
160	20	21	31	23	32	33	275	155	285	175	75	30

161–170. а) Предприятие купило станок за S руб., период эксплуатации которого n лет. После этого станок можно будет продать на вторичном рынке за P руб. (остаточная стоимость). Определить методом равномерного начисления износа ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

б) Определить методом начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости норму амортизации, ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

в) Пусть остаточная стоимость $P = 0$. Определить методом суммы годичных чисел ежегодные начисления на износ и балансовую стоимость станка на конец каждого года.

	S	P	n
161	220000	115000	6
162	270000	125000	5
163	280000	135000	7
164	290000	145000	8
165	225000	105000	9

	S	P	n
166	240000	195000	3
167	260000	185000	5
168	235000	175000	6
169	265000	165000	3
170	275000	155000	7

171–180. а) В апреле работниками предприятия отработано a человеко-дней, было b человеко-дней простоев и c человеко-дней неявок. Определить среднесуточную численность работников предприятия в апреле.

б) Число работников предприятия на начало 2007 года было равно d человек. В течение года принято на работу b человек, уволено с работы c человек (в том числе по собственному желанию, за прогул, за нарушение трудовой дисциплины f человек). Определить показатели изменения численности работников предприятия.

	171	**172**	**173**	**174**	**175**	**176**	**177**	**178**	**179**	**180**
a	9100	9200	9300	9400	9500	9600	9700	9800	9750	9850
b	19	18	17	16	12	11	14	29	22	24
c	35	45	55	65	75	85	95	59	68	77
d	630	620	640	650	670	680	690	700	800	900
f	23	41	49	57	68	79	82	51	64	69

181–190. На основании приведенных данных определить показатели использования рабочего времени.

Среднесписочная численность работников	500
Число работников с продолжительностью рабочего дня 8 ч.	a
Число работников с продолжительностью рабочего дня 7 ч.	b
Отработанные работниками человеко-дни	c
Целодневные простои в человеко-днях	d
Неявки на работу, человеко-дней	f
Ежегодные отпуска в человеко-днях	g
Выходные и праздничные человеко-дни	h
Отработанные человеко-часы	k

	a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*
181	430	70	107000	10	75490	10100	57900	816300
182	440	60	108000	90	74410	10200	57800	816400
183	460	40	109000	35	73465	10300	57700	816500
184	470	30	105000	45	77455	10400	57600	816600
185	480	20	104000	55	78445	10500	57500	816700
186	490	10	103000	70	79430	10600	57400	816800
187	420	80	102000	60	80440	10700	57300	816900
188	465	35	101000	40	81460	10800	57200	816100
189	455	45	107000	30	75470	10900	57100	817300
190	445	55	109000	20	73480	11000	56000	817200

191–200. На основании приведенных данных определить индексы переменного состава, постоянного состава и структурных сдвигов.

Рабочие	**Средняя численность рабочих, чел.**		**Фонд заработной платы, тыс. руб.**	
	базисный период T_0	**отчетный период** T_1	**базисный период** X_0T_0	**отчетный период** X_1T_1
Квалифицированные	*a*	*b*	*c*	*d*
Малоквалифицированные	*f*	*g*	*h*	*k*

	a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*
191	2300	2700	1500	1300	8000	11100	7500	8200
192	1300	1800	1600	1400	7000	11200	7600	8300
193	1400	1900	1700	1500	9500	11300	7700	8400
194	1500	2100	1800	1700	9600	11400	7800	8100
195	1600	2200	1900	1800	9700	11500	7900	8000
196	1700	2300	2100	1900	9800	11600	7200	8500
197	1800	2300	2300	1600	9900	11700	7300	8600
198	1900	2400	1300	1700	9300	11800	7400	8700
199	2100	2500	1400	1800	9400	11900	7100	8800
200	2200	2600	1200	2300	9200	12100	8000	8900

201–210. а) Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$ с математическим ожиданием a и стандартным отклонением σ. Производится выборка объемом n. Найти центральную линию, предупреждающие границы и границы регулирования.

б) Из партии в m единиц производится выборка n единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся пар-

тия продукции будет отвергнута. Построить кривую оперативной характеристики.

в) Выборка из m предметов выявила b дефектов. Определить среднее число дефектов на единицу продукции и верхнюю границу регулирования.

	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
a	7	8	9	7	11	12	10	14	18	15
σ	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,3	0,4	0,2	0,4	0,2
n	5	6	7	5	6	7	5	7	6	8
m	200	300	400	500	250	350	450	550	150	275
b	3500	4500	5500	1500	2750	2000	3000	4000	5000	2500

211–220. Доля бракованных изделий p. Производились выборки объемом n единиц. Определить границы. Если нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась отрицательной, то произвести вычисления заново с использованием распределения Пуассона.

	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
p	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
n	100	800	600	500	400	300	700	200	900	150

221–230. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: AQL, $LTPD$, α, β. Если в выборке n единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выяснить, удовлетворяет ли эта схема заявленным условиям.

	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
AQL	0,04	0,06	0,07	0,03	0,02	0,08	0,09	0,04	0,06	0,07
$LTPD$	0,15	0,20	0,22	0,23	0,18	0,14	0,16	0,17	0,12	0,24
α	0,10	0,09	0,08	0,10	0,09	0,08	0,09	0,08	0,10	0,08
β	0,12	0,14	0,16	0,16	0,14	0,12	0,12	0,14	0,16	0,12
n	35	45	55	18	27	20	30	40	50	25

231–240. Совокупные затраты равны a тыс. руб., а число проданных единиц продукции — f. Определить средние затраты на единицу проданной продукции.

	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
a	220	270	280	290	225	240	260	235	265	275
f	600	500	700	800	900	300	450	250	850	750

Раздел IV

МАКРО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Макроэкономическая статистика — это прикладная статистическая дисциплина, которая разрабатывает методологию исследования социально-экономических явлений и процессов с целью выявления закономерностей их развития на макроуровне. Основываясь на положениях экономической теории, макроэкономическая статистика с помощью системы показателей обеспечивает количественную характеристику уровня жизни населения, функционирования экономики страны и регионов.

На основе макроэкономических показателей формулируются федеральные и региональные программы. Макроэкономические показатели применяются в международных переговорах, разработке совместных программ экономической деятельности, внешнеторговых соглашениях.

В качестве макроэкономической модели рынка макроэкономическая статистика использует принятую в международной практике систему национальных счетов. Система национальных счетов применяется для построения эконометрических моделей и прогнозирования, она необходима на всех уровнях экономической деятельности при оценке финансовых результатов, определении направления инвестирования, оценке степени риска, для развития внешнеэкономических связей и международных сопоставлений. Именно система национальных счетов позволяет узнать, имеется ли экономический рост, как изменяются цены, каков уровень благосостояния населения и т. д.

В этом разделе мы рассмотрим применение макроэкономической статистики в исследовании актуальных социально-экономических проблем и практическое использование макростатистических показателей.

Глава 2

СТАТИСТИКА ЕСТЕСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ

Численность населения не остается постоянной. *Естественное движение населения* — это изменение численности населения за счет рождений и смертей.

Рассмотрим основные показатели, характеризующие естественное движение населения. Эти показатели рассчитываются на 1000 человек (то есть в промилле, ‰).

Коэффициент рождаемости определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент рождаемости} = \left(\text{число родившихся живыми за год} : \text{среднегодовая численность населения}\right) \times 1000,$$

где

$$\text{среднегодовая численность населения} = \left(\text{численность населения на начало года} + \text{численность населения на конец года}\right) : 2.$$

Коэффициент смертности определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент смертности} = \left(\text{число умерших за год} : \text{среднегодовая численность населения}\right) \times 1000.$$

Коэффициент естественного прироста (убыли) определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент естественного прироста (убыли)} = \text{коэффициент рождаемости} - \text{коэффициент смертности}.$$

При изучении рождаемости широко применяется *коэффициент плодовитости*, который определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент плодовитости} = \left(\text{число родившихся живыми за год} : \text{среднегодовая численность женщин в возрасте 15–49 лет}\right) \times 1000,$$

где $$\boxed{\text{среднегодовая численность женщин в возрасте 15–49 лет}} = \left(\boxed{\text{численность женщин в возрасте 15–49 лет на начало года}} + \boxed{\text{численность женщин в возрасте 15–49 лет на конец года}}\right) : 2.$$

При изучении смертности часто используется *коэффициент младенческой смертности*, который определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент младенческой смертности}} = \left(\boxed{\text{число умерших детей в возрасте до 1 года}} : \boxed{\text{число родившимися живыми за год}}\right) \times 1000.$$

Пусть T_x — сумма человеко-лет, которые предстоит прожить совокупности лиц от возраста x до предельного возраста включительно, l_x — численность изучаемого поколения, дожившего до возраста x.

Тогда *показатель средней продолжительности предстоящей жизни* равен $l_x^0 = T_x/l_x$.

Коэффициент оборота населения определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент оборота населения}} =$$

$$= \left(\left(\boxed{\text{число родившихся живыми за год}} + \boxed{\text{число умерших за год}}\right) : \boxed{\text{среднегодовая численность населения}}\right) \times 1000.$$

Коэффициент эффективности воспроизводства населения показывает удельный вес естественного прироста в общем обороте населения и определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент эффективности воспроизводства населения}} = \frac{\boxed{\text{число родившихся живыми за год}} - \boxed{\text{число умерших за год}}}{\boxed{\text{число родившихся живыми за год}} + \boxed{\text{число умерших за год}}} \times 100\%.$$

Пример 1. На основании приведенных данных определим показатели естественного движения населения в регионе *А*.

Численность населения на начало года, человек	36000
Численность населения на конец года, человек	35500
Число родившихся живыми за год, человек	250
Число умерших за год, человек	300
Численность женщин в возрасте 15–49 лет на начало года	12000

Численность женщин в возрасте 15–49 лет на конец года	12200
Число умерших детей в возрасте до 1 года, человек	5

Среднегодовая численность населения = (численность населения на начало года + численность населения на конец года)/2 = (36000 + + 35500)/2 = 35750 человек.

Тогда коэффициент рождаемости = (число родившихся живыми за год)/(среднегодовая численность населения)×1000 = 250/35750×1000 ≈ ≈ 6,99‰.

Коэффициент смертности = (число умерших за год)/(среднегодовая численность населения)×1000 = 300/35750×1000 ≈ 8,39‰.

Коэффициент естественного прироста (убыли) = коэффициент рождаемости – коэффициент смертности = 6,99 – 8,39 = –1,4‰, то есть убыль населения на каждые 1000 человек равна 1,4.

Среднегодовая численность женщин в возрасте 15—49 лет = (численность женщин в возрасте 15–49 лет на начало года) + (численность женщин в возрасте 15—49 лет на конец года)/2 = (12000 + + 12200)/2 = 12100 женщин.

Тогда коэффициент плодовитости = (число родившихся живыми за год)/(среднегодовая численность женщин в возрасте 15—49 лет)×1000 = 250/12100×1000 ≈ 20,66‰.

Коэффициент младенческой смертности = (число умерших детей в возрасте до 1 года)/(число родившимися живыми за год)×1000 = = 5/250×1000 = 20‰.

Коэффициент оборота населения = (число родившихся живыми за год + число умерших за год)/(среднегодовая численность населения)×1000 = (250 + 300)/35750×1000 ≈ 15,38‰.

Коэффициент эффективности воспроизводства населения = = (число родившихся живыми за год – число умерших за год)/(число родившихся живыми за год + число умерших за год)×100% = = (250 – 300)/ (250 + 300)×100% ≈ –9,1%.

Задача 1. На основании приведенных данных определить показатели естественного движения населения в регионе *А*.

Численность населения на начало года, человек	36500
Численность населения на конец года, человек	36000
Число родившихся живыми за год, человек	240
Число умерших за год, человек	310
Численность женщин в возрасте 15–49 лет на начало года	13000
Численность женщин в возрасте 15–49 лет на конец года	13300
Число умерших детей в возрасте до 1 года, человек	6

Глава 3

СТАТИСТИКА МИГРАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ

Миграция населения — это передвижение людей через границы тех или иных территорий с переменой места жительства навсегда или на более или менее длительное время. Перемещение населения внутри страны называется *внутренней миграцией*, а перемещение населения из одной страны в другую — *внешней миграцией*.

Миграционный прирост определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{миграционный прирост}} = \boxed{\text{число прибывших}} - \boxed{\text{число выбывших}}.$$

Объем миграции определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{объем миграции}} = \boxed{\text{число прибывших}} + \boxed{\text{число выбывших}}.$$

Так как показатели объема миграции зависят от численности соответствующей территории, для анализа миграционных процессов используют относительные показатели интенсивности миграции на 1000 жителей в расчете на год.

Коэффициент прибытия показывает число прибывших на 1000 человек населения в среднем за год и определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент прибытия}} = \left(\boxed{\text{число прибывших}} : \boxed{\text{среднегодовая численность населения}} \right) \times 1000.$$

Коэффициент выбытия показывает число выбывших на 1000 человек населения в среднем за год и определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент выбытия}} = \left(\boxed{\text{число выбывших}} : \boxed{\text{среднегодовая численность населения}} \right) \times 1000.$$

Общий коэффициент интенсивности миграции определяется по следующей формуле:

общий коэффициент интенсивности миграции = **коэффициент прибытия** − **коэффициент выбытия**.

При положительном общем коэффициенте интенсивности миграции наблюдается *приток населения* на данную территорию, при отрицательном — *отток населения*.

Коэффициент интенсивности миграционного оборота определяется по следующей формуле:

коэффициент интенсивности миграционного оборота = **коэффициент прибытия** + **коэффициент выбытия**.

Коэффициент эффективности миграции определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент эффективности миграции} = \frac{\text{число прибывших} - \text{число выбывших}}{\text{число прибывших} + \text{число выбывших}} \times 100\%.$$

Пример 2. На основании приведенных данных определим показатели миграции населения в регионе *А*.

Среднегодовая численность населения, человек	36000
Число прибывших, человек	120
Число выбывших, человек	100

Миграционный прирост = число прибывших – число выбывших = = 120 – 100 = 20 человек.

Объем миграции = число прибывших + число выбывших = = 120 + 100 = 220 человек.

Коэффициент прибытия = (число прибывших)/(среднегодовая численность населения)×1000 = 120/36000×1000 ≈ 3,33‰.

Коэффициент выбытия = (число выбывших)/(среднегодовая численность населения)×1000 = 100/36000×1000 ≈ 2,78‰.

Общий коэффициент интенсивности миграции = коэффициент прибытия – коэффициент выбытия = 3,33 – 2,78 = 0,55‰ > 0. Наблюдается приток населения в регион *А*.

Коэффициент интенсивности миграционного оборота = коэффициент прибытия + коэффициент выбытия = 3,33 + 2,78 = 6,11‰.

Коэффициент эффективности миграции = (число прибывших – – число выбывших)/(число прибывших + число выбывших)×100% = = (120 – 100)/(120 + 100)×100% ≈ 9,1%.

Задача 2. На основании приведенных данных определить показатели миграции населения в регионе *А*.

Среднегодовая численность населения, человек	36500
Число прибывших, человек	140
Число выбывших, человек	110

Глава 4

СТАТИСТИКА ЗАНЯТОСТИ И БЕЗРАБОТИЦЫ

Экономически активное население — это часть населения, которая предлагает свой труд для производства товаров и услуг.

Коэффициент экономической активности определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент экономической активности} = \left(\text{численность экономически активного населения} : \text{численность населения}\right) \times 100\%.$$

Численность экономически активного населения включает занятых и безработных.

Количественно занятость характеризуется *коэффициентом занятости*, который определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент занятости} = \left(\text{численность занятых} : \text{численность экономически активного населения}\right) \times 100\%.$$

К *безработным* относятся лица не моложе 16 лет, которые в рассматриваемый период не имели работы, занимались ее поиском и были готовы приступить к работе.

Коэффициент безработицы определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент безработицы} = \left(\text{численность безработных} : \text{численность экономически активного населения}\right) \times 100\%.$$

Коэффициент зарегистрированной безработицы определяется по следующей формуле:

$$\text{коэффициент зарегистрированной безработицы} = \left(\text{численность зарегистрированных безработных} : \text{численность экономически активного населения}\right) \times 100\%.$$

Коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике — это число незанятых в экономике, приходящееся на одного занятого. Этот показатель определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике}} =$$

$$= \left(\left(\boxed{\text{численность населения}} - \boxed{\text{численность занятых}} \right) : \boxed{\text{численность занятых}} \right) \times 100\%.$$

Пример 3. На основании приведенных данных определим показатели занятости и безработицы в регионе *А*.

Численность населения, человек	36000
Численность экономически активного населения, человек	16000
Численность безработных, человек	2000
Численность безработных, зарегистрированных в службе занятости, человек	500

Коэффициент экономической активности = (численность экономически активного населения)/(численность населения)×100% = = 16000/36000×100% ≈ 44,4%.

Численность занятых = численность экономически активного населения – численность безработных = 16000 – 2000 = 14000 человек. Тогда коэффициент занятости = (численность занятых)/(численность экономически активного населения)×100% = 14000/16000×100% = = 87,5%.

Коэффициент безработицы = (численность безработных)/(численность экономически активного населения)×100% = = 2000/16000×100% = 12,5%.

Коэффициент зарегистрированной безработицы = (численность зарегистрированных безработных)/(численность экономически активного населения)×100% = 500/16000×100% = 3,125%.

Коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике = (численность населения – численность занятых)/(численность занятых)×100% = (36000 – 14000)/14000×100% ≈ 157,1%.

Задача 3. На основании приведенных данных определить показатели занятости и безработицы в регионе *А*.

Численность населения, человек	37000
Численность экономически активного населения, человек	17000
Численность безработных, человек	3000
Численность безработных, зарегистрированных в службе занятости, человек	1000

Глава 5

РАСЧЕТ ВАЛОВОГО ВЫПУСКА

Валовой выпуск — это стоимость товаров и услуг, произведенных в отчетном периоде. Валовой выпуск оценивается в текущих (то есть рыночных) ценах, действующих на момент производства товаров или оказания услуг. Продукция и услуги включаются в валовой выпуск того периода, в котором они были произведены (независимо от того, когда произошла их продажа).

Холдинговая прибыль — это дополнительный доход предприятия из-за повышения цен на продукцию, находящуюся в запасе. Холдинговая прибыль не включается в валовой выпуск.

Пример 4. В отчетном году предприятие произвело 20000 единиц продукции. Из них было продано 15000 единиц по цене 36 руб. за единицу. Остальная продукция была отправлена в запас и реализована в следующем году по цене 39 руб. за единицу. Определим валовой выпуск за отчетный год и холдинговую прибыль.

Так как в валовой выпуск включается вся продукция, произведенная в отчетном году по ценам отчетного года, то валовой выпуск равен $20000 \times 36 = 720000$ руб.

Холдинговая прибыль равна $(20000 - 15000)(39 - 36) = 15000$ руб.

Пример 5. На основании приведенных данных определим валовой выпуск предприятия за отчетный год.

Показатели	Сумма, тыс. руб.
Реализация готовой продукции отчетного периода	500
Работы промышленного характера	100
Бартер	25
Продукция для подразделений предприятия	200
Оплата труда в натуральной форме	30
Незавершенное производство на начало года	150
Незавершенное производство на конец года	130
Запасы готовой продукции на начало года	80
Запасы готовой продукции на конец года	90

Валовой выпуск = Реализация готовой продукции отчетного периода + Работы промышленного характера + Бартер + Продукция для подразделений предприятия + Оплата труда в натуральной форме + (Незавершенное производство на конец года – Незавершенное производство на начало года) + (Запасы готовой продукции на начало года на конец года – Запасы готовой продукции на начало года) = = 500 + 100 + 25 + 200 + 30 + (130 – 150) + (90 – 80) = 845 тыс. руб.

Задача 4. В отчетном году предприятие произвело 15000 единиц продукции. Из них было продано 10000 единиц по цене 10 руб. за единицу. Остальная продукция была отправлена в запас и реализована в следующем году по цене 14 руб. за единицу. Определить валовой выпуск за отчетный год и холдинговую прибыль.

Задача 5. На основании приведенных данных определить валовой выпуск предприятия за отчетный год.

Показатели	Сумма, тыс. руб.
Реализация готовой продукции отчетного периода	600
Работы промышленного характера	150
Бартер	35
Продукция для подразделений предприятия	250
Оплата труда в натуральной форме	40
Незавершенное производство на начало года	160
Незавершенное производство на конец года	140
Запасы готовой продукции на начало года	70
Запасы готовой продукции на конец года	80

Глава 6

ВАЛОВАЯ ДОБАВЛЕННАЯ СТОИМОСТЬ

Промежуточное потребление — это стоимость всех потребленных благ (кроме потребления основных фондов) и рыночных услуг в течение данного периода с целью производства других товаров и услуг.

В промежуточное потребление не включаются:

✧ затраты капитального характера (строительство и капитальный ремонт основных фондов, амортизация и т. д.);

✧ приобретение ценных бумаг;

✧ арендная плата за землю;

✧ продукты и услуги, предоставленные предприятием своим работникам бесплатно в качестве оплаты труда.

Валовая добавленная стоимость — это интегральный показатель эффективности экономической системы, который определяется по следующей формуле:

валовая добавленная стоимость = **валовой выпуск** − **промежуточное потребление** .

Чистая добавленная стоимость определяется по следующей формуле:

чистая добавленная стоимость = **валовая добавленная стоимость** − **амортизация** .

Пример 6. На основании приведенных данных о деятельности предприятий региона *А* в отчетном году определим валовую добавленную стоимость и чистую добавленную стоимость.

Показатели	Сумма, млн. руб.
Реализация готовой продукции отчетного периода	500
Запасы готовой продукции на начало года	80
Запасы готовой продукции на конец года	90

Показатели	Сумма, млн. руб.
Бартер	100
Стоимость сырья	200
Оплата труда	120
Реклама	30
Амортизация	70

Валовой выпуск = Реализация готовой продукции отчетного периода + (Запасы готовой продукции на конец года – Запасы готовой продукции на начало года) + Бартер = 500 + (90 – 80) + 100 = 610 млн. руб.

Промежуточное потребление = Стоимость сырья + Оплата труда + + Реклама = 200 + 120 + 30 = 350 млн. руб.

Валовая добавленная стоимость = валовой выпуск – промежуточное потребление = 610 – 350 = 260 млн. руб. Это вклад предприятий в валовой внутренний продукт региона.

Чистая добавленная стоимость = валовая добавленная стоимость – – амортизация = 260 – 70 = 190 млн. руб.

Задача 6. На основании приведенных данных о деятельности предприятий региона *А* в отчетном году определить валовую добавленную стоимость и чистую добавленную стоимость.

Показатели	Сумма, млн. руб.
Реализация готовой продукции отчетного периода	600
Запасы готовой продукции на начало года	90
Запасы готовой продукции на конец года	100
Бартер	150
Стоимость сырья	250
Оплата труда	130
Реклама	50
Амортизация	80

Глава 7

СЧЕТ ПРОИЗВОДСТВА

Счет производства — это первое звено всей системы национальных счетов. На его основе формируются ежемесячные, ежеквартальные и годовые показатели, связанные с производством товаров и услуг.

В *ресурсной части счета* показываются следующие показатели:

- ✧ валовой выпуск товаров и услуг;
- ✧ налоги на продукты;
- ✧ субсидии на продукты;
- ✧ чистые налоги на импорт;
- ✧ валовой выпуск в рыночных ценах.

Налоги на продукты взимаются пропорционально стоимости товаров и услуг, произведенных предприятиями (налог с продаж, налог на добавленную стоимость, акцизы и т. д.).

Субсидии — это дотации, выплачиваемые пропорционально количеству или стоимости товаров и услуг, производимых, продаваемых или импортируемых предприятиями.

Чистые налоги на импорт — это разница между величиной налогов на импорт и субсидий на импорт.

В итоге ресурсной части счета производства мы получаем *валовой выпуск в рыночных ценах* по следующей формуле:

валовой выпуск в рыночных ценах = **валовой выпуск в основных ценах** + **чистые налоги на продукты** + **чистые налоги на импорт**,

где **чистые налоги на продукты** = **налоги на продукты** − **субсидии на продукты**.

В части «Использование» счета производства указываются промежуточное потребление и валовой внутренний продукт в рыночных ценах, который определяется по следующей формуле:

валовой внутренний продукт в рыночных ценах = **валовой выпуск в рыночных ценах** − **промежуточное потребление**.

Пример 7. На основании приведенных данных об экономической деятельности региона *А* в отчетном году построим счет производства.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Выпуск продукции в отраслях материального производства (в основных ценах)	10000
Выручка от отраслей, оказывающих платные услуги (в основных ценах)	5000
Затраты на содержание организаций	1000
Выручка от индивидуальной трудовой деятельности	60
Промежуточное потребление	9000
Налоги на продукты	800
Субсидии на продукты	200
Чистые налоги на импорт	50

Валовой выпуск продуктов и услуг в основных ценах = Выпуск продукции в отраслях материального производства (в основных ценах) + Выручка от отраслей, оказывающих платные услуги (в основных ценах) + Затраты на содержание организаций + Выручка от индивидуальной трудовой деятельности = 10000 + 5000 + 1000 + 60 = = 16060 млрд. руб.

Заполним таблицу.

Использование		Ресурсы	
Промежуточное потребление	9000	Валовой выпуск продуктов и услуг в основных ценах	16060
ВВП в рыночных ценах	7710	Налоги на продукты	800
		Субсидии на продукты	200
		Чистые налоги на импорт	50
		Валовой выпуск в рыночных ценах	16710
Всего	16710	Всего	16710

Поясним, как заполняется таблица.

Валовой выпуск в рыночных ценах = валовой выпуск продуктов и услуг в основных ценах + налоги на продукты – субсидии на продукты + чистые налоги на импорт = 16060 + 800 – 200 + 50 = = 16710 млрд. руб.

Тогда Всего (ресурсы) = Всего (использование) = Валовой выпуск в рыночных ценах = 16710 млрд. руб.

Валовой внутренний продукт в рыночных ценах = валовой выпуск в рыночных ценах – промежуточное потребление = 16710 – 9000 = = 7710 млрд. руб.

Задача 7. На основании приведенных данных об экономической деятельности региона *А* в отчетном году построить счет производства.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Выпуск продукции в отраслях материального производства (в основных ценах)	11000
Выручка от отраслей, оказывающих платные услуги (в основных ценах)	6000
Затраты на содержание организаций	1500
Выручка от индивидуальной трудовой деятельности	70
Промежуточное потребление	8000
Налоги на продукты	700
Субсидии на продукты	300
Чистые налоги на импорт	160

Все счета системы национальных счетов можно построить на уровне отрасли, сектора или экономики в целом. Принципы построения счетов одинаковы. Но при определении некоторых показателей имеются особенности расчета. Например, в счете производства балансирующей статьей на уровне экономики в целом будет валовой внутренний продукт, а на уровне сектора или отрасли — валовая добавленная стоимость.

Глава 8

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА В СОПОСТАВИМЫХ ЦЕНАХ

Существует несколько методов вычисления валового внутреннего продукта (ВВП) в сопоставимых ценах. Мы ограничимся рассмотрением *метода дефлятирования с помощью индексов цен*, который применяется для оценки компонентов конечного использования валового внутреннего продукта в сопоставимых ценах.

Валовой внутренний продукт в отчетном периоде в сопоставимых ценах определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{ВВП в сопоставимых ценах}} = \boxed{\text{ВВП в текущих ценах}} : I_p.$$

То есть $\sum q_1 p_0 = \sum q_1 p_1 / \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$, где ВВП в сопоставимых ценах = $= \sum q_1 p_0$, ВВП в текущих ценах = $\sum q_1 p_1$, индекс цен (или *индекс дефлятор ВВП*) $I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$.

Глава 9

СЧЕТА ОБРАЗОВАНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ

Счета образования и распределения доходов отражают производственные, распределительные и перераспределительные операции.

§ 9.1. СЧЕТ ОБРАЗОВАНИЯ ДОХОДОВ

Счет образования доходов отражает распределительные операции, связанные с производством, и является составной частью первичного распределения доходов.

Первичные доходы — это доходы, получаемые институционными единицами непосредственно в ходе производственной деятельности. Они выплачиваются из добавленной стоимости, создаваемой в производстве. В счете образования доходов сопоставляются ресурсы и их использование.

В *ресурсной части счета образования доходов* указывается валовая добавленная стоимость (а на уровне экономики в целом — валовой внутренний продукт). Эта величина переносится из счета производства.

В *части «Использование» счета образования доходов* указываются следующие расходы производителей из добавленной стоимости:

- ✧ оплата труда;
- ✧ чистые налоги на производство и импорт;
- ✧ валовая прибыль экономики (валовой смешанный доход).

Оплата труда выплачивается наемным работникам, занятым в производстве.

Чистые налоги на производство и импорт определяются по следующей формуле:

чистые налоги на производство и импорт = **налоги на производство и импорт** − **субсидии на производство и импорт**.

Здесь налоги на производство и импорт не содержат налогов на доходы, выплачиваемых получателями доходов от производства, а субсидии выплачиваются в результате участия в производстве.

Валовая прибыль экономики (*валовой смешанный доход*) определяется по следующей формуле:

валовая прибыль (валовой смешанный доход) =

= **валовой внутренний продукт** − **оплата труда** − **налоги на производство и импорт** + **субсидии на производство и импорт** =

= **валовой внутренний продукт** − **оплата труда** − **чистые налоги на производство и импорт** .

Валовая прибыль — это та часть добавленной стоимости, которая остается у производителей после оплаты труда наемных работников и уплаты налогов на производство и импорт. Она определяет прибыль (или убыток), полученную от производства, до учета доходов от собственности.

Пример 8. На основании приведенных данных о структуре валового внутреннего продукта региона *А* в отчетном году построим счет образования доходов.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовой внутренний продукт	900
Оплата труда	360
Налоги на производство и импорт	150
Субсидии на производство и импорт	90

Заполним таблицу.

Использование		Ресурсы	
Оплата труда	360	Валовой внутренний продукт (валовая добавленная стоимость)	900
Чистые налоги на производство и импорт	60		
Валовая прибыль (валовой смешанный доход)	480		
Всего	900	Всего	900

Поясним, как заполняется таблица.

Всего (Ресурсы) = Валовой внутренний продукт (валовая добавленная стоимость) = 900 млрд. руб.

Чистые налоги на производство и импорт = налоги на производство и импорт – субсидии на производство и импорт = 150 – 90 = = 60 млрд. руб.

Валовая прибыль (валовой смешанный доход) = валовой внутренний продукт – оплата труда – чистые налоги на производство и импорт = 900 – 360 – 60 = 480 млрд. руб.

Всего (Использование) = оплата труда + чистые налоги на производство и импорт + валовая прибыль (валовой смешанный доход) = = 360 + 60 + 480 = 900 млрд. руб.

Задача 8. На основании приведенных данных о структуре валового внутреннего продукта региона *А* в отчетном году построить счет образования доходов.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовой внутренний продукт	800
Оплата труда	350
Налоги на производство и импорт	130
Субсидии на производство и импорт	80

§ 9.2. СЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ ДОХОДОВ

Счет распределения первичных доходов показывает, как создаваемые в процессе производства товаров и услуг первичные доходы распределяются между институционными единицами вследствие их участия в процессе производства или владения необходимыми для целей производства активами.

В счете распределения первичных доходов сопоставляются ресурсы и их использование.

В *ресурсной части счета распределения первичных доходов* указываются:

- ✧ валовая прибыль (валовой смешанный доход);
- ✧ оплата труда наемных работников;
- ✧ чистые налоги на производство и импорт;
- ✧ доходы от собственности, полученные от «остального мира».

Значения валовой прибыли (валового смешанного дохода), оплаты труда наемных работников, чистых налогов на производство и импорт берутся из счета образования доходов.

Доходы от собственности, полученные от «остального мира», — это доходы от собственности на финансовые или непроизводственные

активы (проценты по вкладам и ценным бумагам, дивиденды, рента, плата за использование авторских прав и т. д.).

В части *«Использование» счета распределения первичных доходов* указываются:

✧ доходы от собственности, переданные «остальному миру»;

✧ сальдо первичных доходов (на уровне отрасли, сектора) либо валовой национальный доход (на уровне экономики).

На уровне отрасли или сектора *доходы от собственности, полученные от «остального мира»* (*переданные «остальному миру»*), отражают получение (передачу) доходов в рамках внешнеэкономических связей и движения доходов между секторами.

На уровне экономики *доходы от собственности, полученные от «остального мира»* (*переданные «остальному миру»*), отражают получение (передачу) доходов в рамках внешнеэкономических связей.

Валовой внутренний продукт и валовой национальный доход различаются на сальдо доходов из-за границы (то есть на разницу между суммой первичных доходов, полученной от нерезидентов, и суммой первичных доходов, уплаченной им):

валовой национальный доход =

= **валовой внутренний продукт** + **доходы от собственности, полученные от «остального мира»** − **доходы от собственности, переданные «остальному миру»** .

В доходы от собственности, переданные «остальному миру», входят и проценты по обслуживанию внешнего долга.

Пример 9. На основании приведенных данных построим счет распределения первичных доходов региона *А* из примера 8.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Поступления процентов по кредитам, предоставленным иностранным государствам	4
Чистая рента за использование земли иностранными государствами	6
Дивиденды, выплаченные нерезидентам за участие в акционерном капитале	5
Плата за использование авторских прав, торговых знаков, патентов, принадлежащих другим странам	1

Заполним таблицу.

Использование		Ресурсы	
Доходы от собственности, переданные «остальному миру»	6	Валовая прибыль (валовой смешанный доход)	480
Валовой национальный доход	904	Оплата труда наемных работников	360
		Чистые налоги на производство и импорт	60
		Доходы от собственности, полученные от «остального мира»	10
Всего	910	Всего	910

Поясним, как заполняется таблица.

Значения валовой прибыли (валового смешанного дохода), оплаты труда наемных работников, чистых налогов на производство и импорт взяты из счета образования доходов.

Доходы от собственности, полученные от «остального мира» = = Поступления процентов по кредитам, предоставленным иностранным государствам + Чистая рента за использование земли иностранными государствами = 4 + 6 = 10 млрд. руб.

Доходы от собственности, переданные «остальному миру» = Дивиденды, выплаченные нерезидентам за участие в акционерном капитале + Плата за использование авторских прав, торговых знаков, патентов, принадлежащих другим странам = 5 + 1 = 6 млрд. руб.

Валовой национальный доход = валовой внутренний продукт + + доходы от собственности, полученные от «остального мира» – доходы от собственности, переданные «остальному миру» = 900 + 10 – 6 = = 904 млрд. руб.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Задача 9. На основании приведенных данных построить счет распределения первичных доходов региона *А* из задачи 8.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Поступления процентов по кредитам, предоставленным иностранным государствам	5
Чистая рента за использование земли иностранными государствами	7
Дивиденды, выплаченные нерезидентам за участие в акционерном капитале	4
Плата за использование авторских прав, торговых знаков, патентов, принадлежащих другим странам	2

§ 9.3. СЧЕТ ВТОРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ

Счет вторичного распределения доходов показывает, как сальдо первичных доходов экономики трансформируется в располагаемый доход посредством получения и выплаты текущих трансфертов. Этот счет имеет большое значение для отдельных секторов и очень незначительное значение для всей экономики в целом.

Трансферт — это односторонняя экономическая операция, в результате которой происходит получение дохода экономической единицей на безвозмездной основе.

Классификация трансфертов:

- ✧ текущие платежи на доходы и богатство;
- ✧ отчисление на социальное страхование;
- ✧ штрафы, пени, выигрыши в лотереях и т. д.

В счете вторичного распределения доходов сопоставляются ресурсы и их использование.

В *ресурсной части счета вторичного распределения доходов* указываются валовой национальный доход и трансферты, полученные от «остального мира».

В *части «Использование» счета вторичного распределения доходов* указываются трансферты, переданные «остальному миру», и валовой располагаемый национальный доход (на уровне секторов — валовой располагаемый доход), который определяется по следующей формуле:

валовой располагаемый национальный доход =

= **валовой национальный доход** + **трансферты, полученные от «остального мира»** − **трансферты, переданные «остальному миру»** .

Пример 10. На основании приведенных данных построим счет вторичного распределения доходов региона *А* из примеров 8, 9.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Трансферты, полученные от «остального мира»	13
Трансферты, переданные «остальному миру»	18

Заполним таблицу.

Поясним, как заполняется таблица.

Валовой располагаемый национальный доход = валовой национальный доход + трансферты, полученные от «остального мира» − − трансферты, переданные «остальному миру» = 904 + 13 − 18 = = 899 млрд. руб.

Использование		Ресурсы	
Трансферты, переданные «остальному миру»	18	Валовой национальный доход	904
Валовой располагаемый национальный доход	899	Трансферты, полученные от «остального мира»	13
Всего	917	Всего	917

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Задача 10. На основании приведенных данных построить счет вторичного распределения доходов региона *А* из задач 8, 9.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Трансферты, полученные от «остального мира»	11
Трансферты, переданные «остальному миру»	16

Счета вторичного распределения доходов могут послужить источником информации о налогах и налоговом бремени секторов и отраслей экономики.

Глава 10

СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОХОДОВ, СЧЕТ ОПЕРАЦИЙ С КАПИТАЛОМ, СЧЕТ ПРОДУКТОВ И УСЛУГ

§ 10.1. СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОХОДОВ

Счет использования доходов показывает, как на уровне экономики и на уровне ее секторов используется валовой располагаемый национальный доход. В счете использования доходов сопоставляются ресурсы и их использование.

В *ресурсной части счета* указывается валовой располагаемый национальный доход (из счета вторичного распределения доходов).

В *части «Использование»* отражаются:

✧ расходы на конечное потребление домашних хозяйств, государственных учреждений и некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйств;

✧ валовое сбережение (для всей экономики — валовое национальное сбережение);

Конечное потребление — это стоимость продуктов и услуг, использованных непосредственно для удовлетворения индивидуальных и коллективных потребностей.

Валовое национальное сбережение определяется по следующей формуле:

валовое национальное сбережение = **валовой располагаемый национальный доход** − **конечное потребление** .

Пример 11. На основании приведенных данных построим счет использования доходов региона *А* из примера 10.

Показатель	Сумма, млрд. руб.
Конечное потребление	530

Заполним таблицу.

Использование		Ресурсы	
Конечное потребление	530	Валовой располагаемый национальный доход	899
Валовое сбережение	369		
Всего	899	Всего	899

Поясним, как заполняется таблица.

Валовое сбережение = валовой располагаемый национальный доход – конечное потребление = 899 – 530 = 369 млрд. руб.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Задача 11. На основании приведенных данных построить счет использования доходов региона *А* из задачи 10.

Показатель	Сумма, млрд. руб.
Конечное потребление	520

§ 10.2. СЧЕТ ОПЕРАЦИЙ С КАПИТАЛОМ

Счет операций с капиталом предназначен для характеристики процесса реального накопления основных и оборотных фондов, а также источников его финансирования.

В счете операций с капиталом сопоставляются ресурсы и их использование.

В *ресурсной части счета* указываются валовое сбережение (из счета использования доходов) и трансферты, полученные от «остального мира» (из счета вторичного распределения доходов).

В *части «Использование» счета операций с капиталом* указываются:

✧ валовое накопление основных фондов (приобретение новых и существующих основных фондов; затраты на улучшение непроизводственных материальных активов; расходы в связи с передачей права собственности на непроизводственные активы);

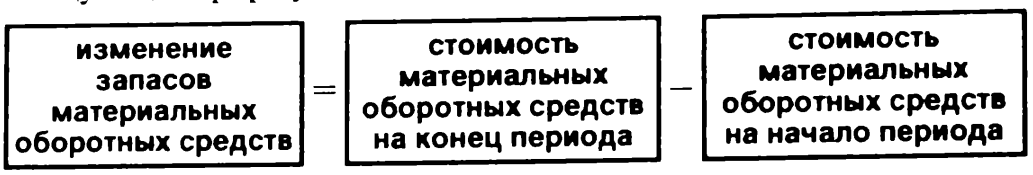
✧ изменение запасов материальных оборотных средств;

✧ чистые покупки земли и нематериальных активов (за вычетом продаж);

✧ трансферты, переданные «остальному миру» (из счета вторичного распределения доходов);

✧ чистые кредиты или чистые долги нации.

Изменение запасов материальных оборотных средств определяется по следующей формуле:



Чистые кредиты (или чистые долги) нации определяются по следующей формуле:

Пример 12. На основании приведенных данных построим счет операций с капиталом региона *А* из примеров 10, 11.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовое накопление основного капитала, включая прирост ценностей	200
Изменение запасов материальных оборотных средств	40

Заполним таблицу.

Использование		Ресурсы	
Валовое накопление основного капитала, включая прирост ценностей	200	Валовое сбережение	369
Изменение запасов материальных оборотных средств	40	Трансферты, полученные от «остального мира»	13
Трансферты, переданные «остальному миру»	18		
Чистые кредиты (или чистые долги) нации	124		
Всего	382	Всего	382

Поясним, как заполняется таблица.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Чистые кредиты (или чистые долги) нации = Всего (Ресурсы) – – Валовое накопление основного капитала, включая прирост ценностей – Изменение запасов материальных оборотных средств – Трансферты, переданные «остальному миру» = 382 – 200 – 40 – 18 = = 124 млрд. руб. > 0.

Это означает либо утечку капитала за рубеж, либо прирост денежных ресурсов экономических единиц без использования этих ресурсов на формирование материального фонда накопления.

Задача 12. На основании приведенных данных построить счет операций с капиталом региона *А* из задач 10, 11.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовое накопление основного капитала, включая прирост ценностей	180
Изменение запасов материальных оборотных средств	30

§ 10.3. СЧЕТ ПРОДУКТОВ И УСЛУГ

Счет продуктов и услуг строится на завершающем этапе составления системы национальных счетов. Он содержит основные статьи всех рассмотренных ранее счетов и имеет следующий вид.

Использование		Ресурсы	
Промежуточное потребление		Валовой выпуск товаров и услуг	
Конечное потребление		Импорт товаров и услуг	
Валовое накопление основного капитала		Чистые налоги на продукты	
Изменение запасов материальных оборотных средств		Чистые налоги на импорт	
Экспорт товаров и услуг		Статистическое расхождение	
Всего		Всего	

Статистическое расхождение определяется по следующей формуле:

статистическое расхождение = **Всего (Ресурсы)** – **Всего (Использование)** .

Чем меньше статистическое расхождение, тем выше качество расчетов. Допустимый уровень погрешности — 5%.

Глава 11

БАЛАНС ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ И РАСХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ

Баланс денежных доходов и расходов населения — это основной источник информации об объеме и структуре денежных доходов, расходов и сбережений населения. Он отражает ту часть валового национального дохода, которая поступает в распоряжение населения в форме денежных доходов.

С помощью баланса денежных доходов и расходов населения определяются реальные и номинальные доходы и покупательная способность населения, рассчитываются распределение населения по уровню доходов и доля населения, живущего ниже уровня бедности. Баланс денежных доходов и расходов населения — это промежуточный этап в построении системы макроэкономических показателей.

Доходная часть баланса денежных доходов и расходов населения состоит из поступлений из различных источников, выявленных с помощью статистической и финансовой отчетности, выборочных обследований и т. д.

Расходная часть баланса денежных доходов и расходов населения состоит из трансфертов, выплаченных населением, прироста сбережений населения во вкладах и ценных бумагах, расходов на приобретение товаров и услуг.

Пример 13. На основании приведенных данных построим баланс денежных доходов и расходов населения региона *А*.

Показатели	Сумма, млн. руб.
Доходы рабочих и служащих от предприятий (кроме оплаты труда)	200
Оплата труда	3500
Покупка товаров	3600
Оплата жилья и коммунальных услуг	400

Показатели	Сумма, млн. руб.
Продажа сельскохозяйственной продукции	150
Прирост вкладов в банках	70
Дивиденды	130
Оплата образовательных услуг	240
Стипендии	50
Пенсии и пособия	280
Проценты по вкладам	20
Обязательные платежи и добровольные взносы	180
Выигрыши в лотерею	10
Покупка жилья	250
Покупка иностранной валюты	600
Доходы от продажи иностранной валюты	550

Заполним таблицу.

Доходы	Сумма, млн. руб.
Доходы рабочих и служащих от предприятий (кроме оплаты труда)	200
Оплата труда	3500
Продажа сельскохозяйственной продукции	150
Дивиденды	130
Стипендии	50
Пенсии и пособия	280
Проценты по вкладам	20
Выигрыши в лотерею	10
Доходы от продажи иностранной валюты	550
Всего денежных доходов	4890
Доходы	**Сумма, млн. руб.**
Покупка товаров	3600
Оплата жилья и коммунальных услуг	400
Прирост вкладов в банках	70
Оплата образовательных услуг	240
Обязательные платежи и добровольные взносы	180
Покупка жилья	250
Покупка иностранной валюты	600
Всего денежных расходов и сбережений	5340

Превышение расходов над доходами равно 5340 – 4890 = 450 млн. руб.

Задача 13. На основании приведенных данных построить баланс денежных доходов и расходов населения региона *А*.

Показатели	Сумма, млн. руб.
Доходы рабочих и служащих от предприятий (кроме оплаты труда)	210
Оплата труда	3520
Покупка товаров	3610
Оплата жилья и коммунальных услуг	430
Продажа сельскохозяйственной продукции	140
Прирост вкладов в банках	80
Дивиденды	120
Оплата образовательных услуг	250
Стипендии	60
Пенсии и пособия	270
Проценты по вкладам	30
Обязательные платежи и добровольные взносы	190
Выигрыши в лотерею	20
Покупка жилья	240
Покупка иностранной валюты	590
Доходы от продажи иностранной валюты	560

Сравнение баланса доходов и расходов населения за несколько периодов позволяет проанализировать изменения в структуре денежных доходов и расходов.

Глава 12

МАТЕРИАЛЬНЫЕ БАЛАНСЫ

Материальные балансы продукции — это система показателей, с помощью которых в натуральных, условно-натуральных и денежных оценках изучается объем, состав ресурсов и потребления отдельных продуктов.

Схема материального баланса выглядит следующим образом:

Использование		Ресурсы	
Запасы на начало года		Производственное потребление	
Производство		Потери	
Импорт		Экспорт	
Поступления из госрезерва		Личное потребление	
		В госрезерв	
		Запасы на конец года	
Итого ресурсов		Итого использовано	

Итог по ресурсной части равен итогу по части «Использование».

Пример 14. На основании приведенных данных о балансе ресурсов и использовании продукта *X* (в тоннах) в регионе *A* определим недостающие показатели.

Показатели	2003	2004	2005
РЕСУРСЫ			
Запасы на начало года	?	440	390
Производство	5500	?	6500
Импорт	900	890	?
Итого ресурсов	?	7400	7800
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ			
Производственное потребление	1200	?	1500
Потери	20	30	10

Показатели	2003	2004	2005
Экспорт	100	90	110
Личное потребление	5200	5400	?
Запасы на конец года	440	390	400

Так как итог по ресурсной части равен итогу по части «Использование», то итог по ресурсной части в 2003 году = итогу по части «Использование» в 2003 году = Производственное потребление в 2003 году + Потери в 2003 году + Экспорт в 2003 году + Личное потребление в 2003 году + Запасы на конец 2003 года = 1200 + 20 + 100 + 5200 + + 440 = 6960 тонн.

Тогда Запасы на начало 2003 года = итог по ресурсной части в 2003 году – Производство в 2003 году – Импорт в 2003 году = 6960 – 5500 – – 900 = 560 тонн.

Производство в 2004 году = итог по ресурсной части в 2004 году – – Запасы на начало 2004 года – Импорт в 2004 году = 7400 – 440 – – 890 = 6070 тонн.

Итог по части «Использование» в 2004 году = итог по ресурсной части в 2004 году = 7400 тонн. Тогда Производственное потребление в 2004 году = Итог по части «Использование» в 2004 году – Потери в 2004 году – Экспорт в 2004 году – Личное потребление в 2004 году – – Запасы на конец 2004 года = 7400 – 30 – 90 – 5400 – 390 = 1490 тонн.

Импорт в 2005 году = итог по ресурсной части в 2005 году – Запасы на начало 2005 года – Производство в 2005 году = 7800 – 390 – – 6500 = 910 тонн.

Итог по части «Использование» в 2005 году = итог по ресурсной части в 2005 году = 7800 тонн. Тогда Личное потребление в 2005 году = = Итог по части «Использование» в 2005 году – Производственное потребление в 2005 году – Потери в 2005 году – Экспорт в 2005 году – Запасы на конец 2005 года = 7800 – 1500 – 10 – 110 – 400 = 5780 тонн.

Задача 14. На основании приведенных данных о балансе ресурсов и использовании продукта *X* (в тоннах) в регионе *A* определить недостающие показатели.

Показатели	2003	2004	2005
РЕСУРСЫ			
Запасы на начало года	?	450	380
Производство	5600	?	6600
Импорт	800	870	?
Итого ресурсов	?	7500	7700
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ			
Производственное потребление	1300	?	1600
Потери	30	10	20

Показатели	2003	2004	2005
Экспорт	110	100	120
Личное потребление	5100	5300	?
Запасы на конец года	450	380	410

При наличии данных по материальным балансам за несколько лет анализ структуры баланса проводится с помощью показателей структурных сдвигов.

Глава 13

СТАТИСТИКА УРОВНЯ ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ

§ 13.1. ИНДЕКСЫ ДОХОДОВ

Совокупные доходы населения складываются из личных доходов населения (заработная плата, премии, отпускные, доходы от предпринимательства собственности и т. д.) и стоимости предоставляемых государственными и общественными организациями услуг и материальных благ (бесплатно или на льготных условиях).

Индекс совокупных доходов населения в текущих ценах определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{индекс совокупных доходов населения в текущих ценах}} = \boxed{\text{номинальные совокупные доходы населения в отчетном периоде}} : \boxed{\text{номинальные совокупные доходы населения в базисном периоде}}.$$

Индекс реальных доходов населения определяется по следующей формуле:

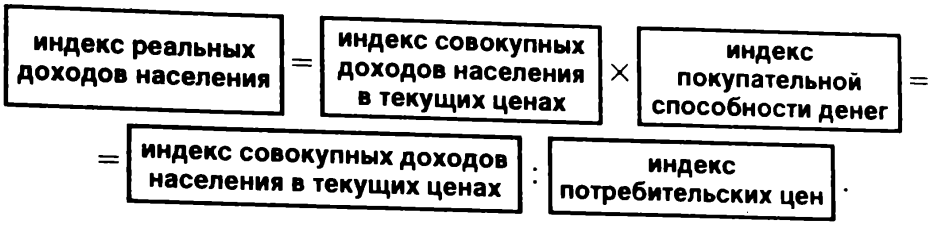
$$\boxed{\text{индекс реальных доходов населения}} = \boxed{\text{реальные совокупные доходы населения в отчетном периоде}} : \boxed{\text{реальные совокупные доходы населения в базисном периоде}}.$$

Реальные доходы населения — это номинальные совокупные доходы населения с поправкой на индекс потребительских цен:

$$\boxed{\text{реальные доходы населения}} = \boxed{\text{совокупные доходы населения}} : \boxed{\text{индекс потребительских цен}} =$$

$$= \boxed{\text{совокупные доходы населения}} \times \boxed{\text{индекс покупательной способности денег}}.$$

Тогда



Пример 15. Среднемесячная заработная плата за вычетом налогов в базисном году составила 10000 руб., в отчетном году — 11000 руб. Цены на потребительские товары и услуги повысились в отчетном году на 12% по сравнению с базисным годом. Выплаты трансфертов (в ценах соответствующих лет) на одного человека составили в базисном году 500 руб., в отчетном году — 600 руб. Определим индекс совокупных доходов населения в текущих ценах и индекс реальных доходов населения.

Индекс совокупных доходов населения в текущих ценах = (номинальные совокупные доходы населения в отчетном периоде)/(номинальные совокупные доходы населения в базисном периоде) = $= (12 \times 11000 + 600)/(12 \times 10000 + 500) \approx 1{,}100$ (= 110,0%).

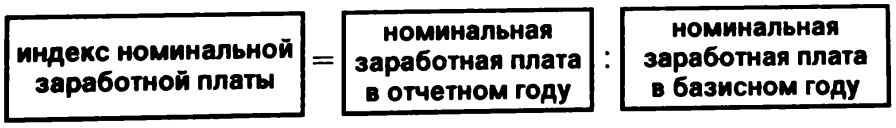
Индекс реальных доходов населения = (индекс совокупных доходов населения в текущих ценах)/(индекс потребительских цен) = $= 1{,}100/1{,}12 \approx 0{,}982$ (= 98,2%).

Хотя номинальные доходы населения выросли в отчетном году на 10,0% по сравнению с базисным годом, реальные доходы населения за этот период снизились на 1,8%.

Задача 15. Среднемесячная заработная плата за вычетом налогов в базисном году составила 15000 руб., в отчетном году — 16000 руб. Цены на потребительские товары и услуги повысились в отчетном году на 13% по сравнению с базисным годом. Выплаты трансфертов (в ценах соответствующих лет) на одного человека составили в базисном году 1000 руб., в отчетном году — 1100 руб. Определить индекс совокупных доходов населения в текущих ценах и индекс реальных доходов населения.

§ 13.2. ИНДЕКСЫ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ

Индекс номинальной заработной платы определяется по следующей формуле:



Номинальная располагаемая заработная плата определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{номинальная располагаемая заработная плата}} = \boxed{\text{номинальная заработная плата}} : \left(1 - \boxed{\text{доля налогов в номинальной заработной плате}}\right).$$

Индекс номинальной располагаемой заработной платы определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{индекс номинальной располагаемой заработной платы}} = \boxed{\text{номинальная располагаемая заработная плата в отчетном году}} : \boxed{\text{номинальная располагаемая заработная плата в базисном году}}.$$

Реальная заработная плата определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{реальная заработная плата}} = \boxed{\text{номинальная располагаемая заработная плата}} : \boxed{\text{индекс потребительских цен}} =$$

$$= \boxed{\text{номинальная располагаемая заработная плата}} \times \boxed{\text{индекс покупательной способности денег}}.$$

Индекс реальной заработной платы определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{индекс реальной заработной платы}} = \boxed{\text{индекс номинальной располагаемой заработной платы в отчетном году}} : \boxed{\text{индекс номинальной располагаемой заработной платы в базисном году}}.$$

Пример 16. Среднемесячная заработная плата за вычетом налогов в базисном году составила 10000 руб., в отчетном году — 11000 руб. Цены на потребительские товары и услуги повысились в отчетном году на 12% по сравнению с базисным годом. Доля налогов в общей заработной плате составила в базисном году 13%, в отчетном году — 15%. Определим индекс номинальной заработной платы, индекс номинальной располагаемой заработной платы и индекс реальной заработной платы.

Индекс номинальной заработной платы = (номинальная заработная плата в отчетном году)/(номинальная заработная плата в базисном году) = 11000/10000 = 1,1 (= 110%).

Номинальная располагаемая заработная плата в базисном году = = (номинальная заработная плата в базисном году)/(1 – доля налогов в номинальной заработной плате в базисном году) = 10000(1 – 0,13) = = 8700 руб.

Аналогично номинальная располагаемая заработная плата в отчетном году = 11000(1 – 0,15) = 9350 руб.

Индекс номинальной располагаемой заработной платы = (номинальная располагаемая заработная плата в отчетном году)/(номинальная располагаемая заработная плата в базисном году) = 9350/8700 ≈ ≈ 1,075 (= 107,5%).

Индекс реальной заработной платы = (индекс номинальной располагаемой заработной платы)/(индекс потребительских цен) = = 1,075/1,12 ≈ 0,960 (= 96,0%), то есть реальная заработная плата в отчетном году снизилась на 4%.

Задача 16. Среднемесячная заработная плата за вычетом налогов в базисном году составила 15000 руб., в отчетном году — 16000 руб. Цены на потребительские товары и услуги повысились в отчетном году на 13% по сравнению с базисным годом. Доля налогов в общей заработной плате составила в базисном году 14%, в отчетном году — 16%. Определить индекс номинальной заработной платы, индекс номинальной располагаемой заработной платы и индекс реальной заработной платы.

Глава 14

ИНДЕКСЫ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

Статистика рынка ценных бумаг служит основой для расчета показателей, достаточно точно характеризующих состояние и перспективы рынка. Традиционным направлением использования индексного метода является анализ состояния рынка ценных бумаг.

Индексы рынка ценных бумаг — это индексы цен акций, обращающихся на рынке ценных бумаг. Такие индексы определяют динамику изменения цен акций на рынке ценных бумаг.

Индексы рынка ценных бумаг могут рассчитываться ежедневно, еженедельно, ежеквартально, по полугодиям, ежегодно. Биржевые индексы являются ключевыми показателями для прогнозирования общего положения дел на фондовом рынке и в отдельных отраслях.

На практике используют четыре методических приема для построения интегральных индексов:

1) определяется темп роста (снижения) средней цены акций, определенной по формуле простой средней арифметической;

2) определяется темп роста (снижения) средневзвешенной цены акций (в качестве веса часто используют количество обращающихся акций);

3) определяется средний арифметический темп прироста (снижения) цен акций;

4) определяется средний геометрический темп прироста (снижения) цен акций.

Пример 17. На основании приведенных данных определим индексы цен акций.

Предприятие	Курс акций в базисном периоде	Курс акций в текущем периоде	Количество выпущенных акций, млн. ед.
А	25	27	15
Б	35	33	10
В	50	55	5

1) Определим *темп роста (снижения) средней цены акций, вычисленной по формуле простой средней арифметической.*

Индекс цен акций = (простая средняя арифметическая цена акций в текущем периоде)/(простая средняя арифметическая цена акций в базисном периоде) = ((27 + 33 + 55)/3)((25 + 35 + 50)/3) ≈ ≈ 1,045, то есть прирост цен акций составил 4,5%.

2) Определим *темп роста (снижения) средневзвешенной цены акций, взяв в качестве веса количество обращающихся акций.*

Индекс цен акций = (27×15 + 33×10 + 55×5)/(25×15 + 35×10 + + 50×5) ≈ 1,036, то есть прирост цен акций составил 3,6%.

По аналогичной методике рассчитывается индекс S&P 500. Эта же методология используется при расчетах с опционами и фьючерсами.

3) Определим *средний арифметический темп прироста (снижения) цен акций.*

Средний арифметический темп прироста цен акций = = ((27 – 25)/25 + (33 – 35)/35 + (55 – 50)/50)/3 ≈ 0,041, то есть средний прирост цен акций составил 4,1%.

4) Определим *средний геометрический темп прироста (снижения) цен акций.*

Средний геометрический темп прироста цен акций = $= \sqrt[3]{(1 + (27 - 25)/25)(1 + (33 - 35)/35)(1 + (55 - 50)/50)} \approx 1{,}039$, то есть средний прирост цен акций составил 3,9%.

Если отвлечься от числовых различий в величине полученных индексов, то можно увидеть, что все индексы однонаправлено характеризуют общую тенденцию движения курсов акций.

Задача 17. На основании приведенных данных определить индексы цен акций.

Предприятие	Курс акций в базисном периоде	Курс акций в текущем периоде	Количество выпущенных акций, млн. ед.
А	26	28	11
Б	33	31	14
В	52	56	16

Главное назначение интегральных показателей — выявить основное направление движения курсов акций на рынке для характеристики деловой активности в экономике.

Глава 15

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Есть n отраслей. Рассматривается процесс производства за один год. Пусть x_i — общий (валовой) объем продукции i-й отрасли, x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью в процессе производства, y_i — объем конечной продукции i-й отрасли для непроизводственного потребления. Имеют место *соотношения баланса* $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$, $i = 1, \ldots, n$ (продукция i-й отрасли используется другими отраслями и потребителями).

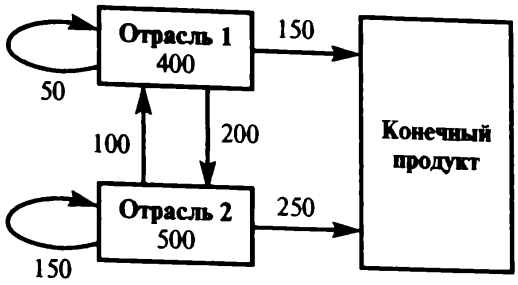
Коэффициенты прямых затрат $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ показывают затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли. Считаем, что $a_{ij} = \text{const}$. Тогда $x_{ij} = a_{ij}x_j$ и $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Введем следующие обозначения: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — *вектор валового выпуска*, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — *матрица прямых затрат* (*структурная матрица*), $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ — *вектор конечного продукта.*

Получаем матричное уравнение $X = AX + Y$. Матрица $A \geqslant 0$ (все элементы неотрицательны) называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \geqslant 0$ существует решение $X \geqslant 0$ этого уравнения. В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной.*

Утверждение. Матрица $A \geqslant 0$ продуктивна, если $\max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$ и существует j такой, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$, то есть наибольшая из сумм элементов в столбцах матрицы A не превосходит 1, причем есть хотя бы один столбец, где сумма меньше 1.

Пример 18.



Имеем $x_1 = 400$, $x_2 = 500$, $y_1 = 150$, $y_2 = 250$, $x_{11} = 50$, $x_{12} = 200$, $x_{21} = 100$, $x_{22} = 150$.

Отсюда $a_{11} = x_{11}/x_1 = 50/400 = 0{,}125$, $a_{12} = x_{12}/x_2 = 200/500 = 0{,}4$, $a_{21} = x_{21}/x_1 = 100/400 = 0{,}25$, $a_{22} = x_{22}/x_2 = 150/500 = 0{,}3$.

Структурная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Тогда $\max(0{,}125 + 0{,}25;\ 0{,}4 + 0{,}3) = 0{,}7 < 1$. Матрица A продуктивна.

$X = AX + Y$. Пусть новый вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix}$.

Тогда соответствующий вектор конечного продукта $Y = X - AX =$

$$= EX - AX = (E - A)X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 0{,}125 & 0 - 0{,}4 \\ 0 - 0{,}25 & 1 - 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}875 & -0{,}4 \\ -0{,}25 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}875 \times 300 + (-0{,}4) \times 450 \\ -0{,}25 \times 300 + 0{,}7 \times 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}5 \\ 240 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Математическая функция МУМНОЖ мастера функций f_x пакета Excel позволяет быстро перемножить матрицы. Перед вызовом этой функции надо выделить мышкой диапазон ячеек нужного размера, куда после выполнения процедуры будет помещен ответ. $f_x \rightarrow$ *Математические* $\rightarrow$ *МУМНОЖ* $\rightarrow$ *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графах *массив 1* и *массив 2* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения 1-го и 2-го матричных множителей соответственно. После этого нажимается не *OK*, а одновременная комбинация клавиш *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

Пусть новый вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$.

Найдем соответствующий вектор валового выпуска X (это можно сделать, так как матрица A продуктивна).

$Y = (E - A)X$. Тогда $X = (E - A)^{-1}Y$. Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.*

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}875 & -0{,}4 \\ -0{,}25 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

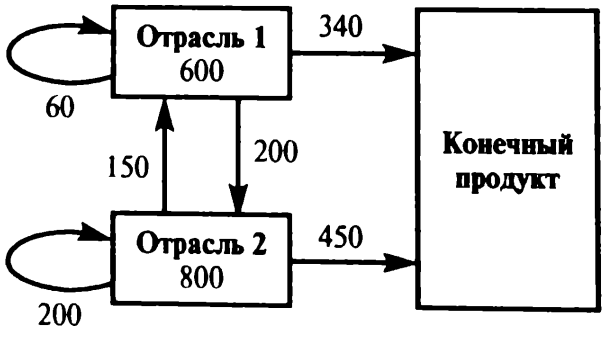
Вспомним, что обратная матрица для матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле: $B^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$\text{Тогда } X = (E - A)^{-1}Y = \frac{1}{0{,}875 \times 0{,}7 - (-0{,}25) \times (-0{,}4)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}5125} \begin{pmatrix} 260 \\ 312{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 507 \\ 610 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Математическая функция МОБР мастера функций f_x пакета Excel позволяет быстро найти обратную матрицу. Перед вызовом этой функции надо выделить мышкой диапазон ячеек нужного размера (порядок обратной матрицы равен порядку исходной матрицы), куда после выполнения процедуры будет помещен ответ. $f_x \rightarrow$ *Математические* $\rightarrow$ *МОБР* $\rightarrow$ *OK.* Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *массив* указывается ссылка на ячейки, содержащие элементы исходной матрицы. После этого нажимается не *OK*, а одновременная комбинация клавиш *Ctrl* + *Shift* + *Enter.*

Задача 18. Убедиться, что модель продуктивна. Найти вектор конечного продукта для нового вектора валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \end{pmatrix}$. Найти вектор валового выпуска для нового вектора конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}$.



Ответы

1. 6,62‰; 8,55‰; −1,93‰; 18,25‰; 25‰; 15,17‰; −12,73%. **2.** 30 человек; 250 человек; 3,84‰; 3,01‰; 0,83‰; 6,85‰; 12%. **3.** 45,9%; 82,4%; 17,6%; 5,9%; 164,3%. **4.** 150000 руб.; 20000 руб. **5.** 1010 тыс. руб. **6.** 430 млн. руб.; 330 млн. руб.; 250 млн. руб.

7.

Использование		Ресурсы	
Промежуточное потребление	8000	Валовой выпуск продуктов и услуг в основных ценах	18570
ВВП в рыночных ценах	11130	Налоги на продукты	700
		Субсидии на продукты	300
		Чистые налоги на импорт	160
		Валовой выпуск в рыночных ценах	19130
Всего	19130	Всего	19130

8.

Использование		Ресурсы	
Оплата труда	350	Валовой внутренний продукт (валовая добавленная стоимость)	800
Чистые налоги на производство и импорт	50		
Валовая прибыль (валовой смешанный доход)	400		
Всего	800	Всего	800

9.

Использование		Ресурсы	
Доходы от собственности, переданные «остальному миру»	6	Валовая прибыль (валовой смешанный доход)	400
Валовой национальный доход	806	Оплата труда наемных работников	350
		Чистые налоги на производство и импорт	50
		Доходы от собственности, полученные от «остального мира»	12
Всего	812	Всего	812

10.

Использование		Ресурсы	
Трансферты, переданные «остальному миру»	16	Валовой национальный доход	806
Валовой располагаемый национальный доход	801	Трансферты, полученные от «остального мира»	11
Всего	817	Всего	817

11.

Использование		Ресурсы	
Конечное потребление	520	Валовой располагаемый национальный доход	801
Валовое сбережение	281		
Всего	801	Всего	801

12.

Использование		Ресурсы	
Валовое накопление основного капитала, включая прирост ценностей	180	Валовое сбережение	281
Изменение запасов материальных оборотных средств	30	Трансферты, полученные от «остального мира»	11
Трансферты, переданные «остальному миру»	16		
Чистые кредиты (или чистые долги) нации	66		
Всего	292	Всего	292

13. 460 млн. руб.

Доходы	Сумма, млн. руб.
Доходы рабочих и служащих от предприятий (кроме оплаты труда)	210
Оплата труда	3520
Продажа сельскохозяйственной продукции	140
Дивиденды	120
Стипендии	60
Пенсии и пособия	270
Проценты по вкладам	30
Выигрыши в лотерею	20
Доходы от продажи иностранной валюты	560
Всего денежных доходов	4930
Доходы	**Сумма, млн. руб.**
Покупка товаров	3610
Оплата жилья и коммунальных услуг	430
Прирост вкладов в банках	80
Оплата образовательных услуг	250
Обязательные платежи и добровольные взносы	190
Покупка жилья	240
Покупка иностранной валюты	590
Всего денежных расходов и сбережений	5390

14. 6990; 590; 6180; 6480; 720; 5550. **15.** 1,069; 0,946. **16.** 1,067; 1,042; 0,922. **17.** 1,036; 1,037; 0,031; 1,029. **18.** Модель продуктивна, $\begin{pmatrix} 275 \\ 400 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 530{,}6 \\ 710{,}2 \end{pmatrix}$.

Программа учебного курса «Макроэкономическая статистика»

1. Что такое макроэкономическая статистика? Система национальных счетов.

2. Статистика естественного движения населения. Естественное движение населения. Коэффициент рождаемости. Среднегодовая численность населения. Коэффициент смертности. Коэффициент естественного прироста (убыли). Коэффициент плодовитости. Коэффициент младенческой смертности. Показатель средней продолжительности предстоящей жизни. Коэффициент оборота населения. Коэффициент эффективности воспроизводства населения.

3. Статистика миграции населения. Миграция населения. Внутренняя миграция. Внешняя миграция. Миграционный прирост. Объем миграции. Коэффициент прибытия. Коэффициент выбытия. Общий коэффициент интенсивности миграции. Приток населения. Отток населения. Коэффициент интенсивности миграционного оборота. Коэффициент эффективности миграции.

4. Статистика занятости и безработицы. Экономически активное население. Коэффициент экономической активности. Коэффициент занятости. Безработные. Коэффициент безработицы. Коэффициент зарегистрированной безработицы. Коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике.

5. Расчет валового выпуска. Валовой выпуск. Холдинговая прибыль.

6. Валовая добавленная стоимость. Промежуточное потребление. Чистая добавленная стоимость.

7. Счет производства. Ресурсная часть счета. Налоги на продукты. Субсидии. Чистые налоги на импорт. Чистые налоги на продукты. Валовой выпуск в рыночных ценах. Часть «Использование». Валовой внутренний продукт в рыночных ценах.

8. Вычисление валового внутреннего продукта в сопоставимых ценах. Метод дефлятирования с помощью индексов цен. Индекс цен.

9. Счет образования доходов. Первичные доходы. Ресурсная часть счета. Часть «Использование». Оплата труда. Налоги на производство и импорт. Субсидии на производство и импорт. Чистые налоги на производство и импорт. Валовая прибыль (валовой смешанный доход).

10. Счет распределения первичных доходов. Ресурсная часть счета. Доходы от собственности, полученные от «остального мира». Часть «Использование». Доходы от собственности, переданные «остальному миру». Валовой национальный доход.

11. Счет вторичного распределения доходов. Трансферт. Классификация трансфертов. Ресурсная часть счета. Трансферты, полученные от «остального мира». Часть «Использование». Трансферты, переданные «остальному миру».

12. Счет использования доходов. Ресурсная часть счета. Часть «Использование». Конечное потребление. Валовое национальное сбережение.

13. Счет операций с капиталом. Ресурсная часть счета. Часть «Использование». Валовое накопление основных фондов. Изменение запасов материальных оборотных средств. Чистые кредиты (или чистые долги) нации.

14. Счет продуктов и услуг. Ресурсная часть счета. Часть «Использование». Статистическое расхождение.

15. Баланс денежных доходов и расходов населения.

16. Материальные балансы продукции.

17. Статистика уровня жизни населения. Индексы доходов. Совокупные доходы населения. Индекс совокупных доходов населения в текущих ценах. Индекс реальных доходов населения. Реальные доходы населения.

18. Индексы заработной платы. Индекс номинальной заработной платы. Номинальная располагаемая заработная плата. Индекс номинальной располагаемой заработной платы. Реальная заработная плата. Индекс реальной заработной платы.

19. Индексы рынка ценных бумаг. Определение темпа роста (снижения) средней цены акций, вычисленной по формуле средней арифметической.

20. Определение темпа роста (снижения) средневзвешенной цены акций (в качестве веса используется количество обращающихся акций).

21. Определение среднего арифметического темпа роста (снижения) цен акций.

22. Определение среднего геометрического темпа роста (снижения) цен акций.

23. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ). Соотношения баланса. Коэффициенты прямых затрат. Вектор валового выпуска, вектор конечного продукта. Матрица прямых затрат (структурная матрица), матрица полных затрат, продуктивная матрица. Продуктивная модель Леонтьева. Уравнение Леонтьева. Критерий продуктивности матрицы.

Задачи для контрольной работы по курсу «Макроэкономическая статистика»

1–10. а) На основании приведенных данных определить показатели естественного движения населения в регионе *A*.

Численность населения на начало года, человек	*a*
Численность населения на конец года, человек	*b*
Число родившихся живыми за год, человек	*c*
Число умерших за год, человек	*d*
Численность женщин в возрасте 15–49 лет на начало года	*f*
Численность женщин в возрасте 15–49 лет на конец года	*g*
Число умерших детей в возрасте до 1 года, человек	*h*

б) На основании приведенных данных определить показатели миграции населения в регионе *A*.

Среднегодовая численность населения, человек	*a*
Число прибывших, человек	*b*
Число выбывших, человек	*c*

в) На основании приведенных данных определить показатели занятости и безработицы в регионе *A*.

Численность населения, человек	*a*
Численность экономически активного населения, человек	*f*
Численность безработных, человек	10*d*
Численность безработных, зарегистрированных в службе занятости, человек	10*c*

г) В отчетном году предприятие произвело *a* единиц продукции. Из них было продано *f* единиц по цене *c* руб. за единицу. Остальная продукция была отправлена в запас и реализована в следующем году по цене *d* руб. за единицу. Определить валовой выпуск в отчетном году и холдинговую прибыль.

д) На основании приведенных данных определить валовой выпуск предприятия за отчетный год.

Показатели	Сумма, тыс. руб.
Реализация готовой продукции отчетного периода	a
Работы промышленного характера	f
Бартер	h
Продукция для подразделений предприятия	d
Оплата труда в натуральной форме	c
Незавершенное производство на начало года	k
Незавершенное производство на конец года	m
Запасы готовой продукции на начало года	n
Запасы готовой продукции на конец года	p

е) На основании приведенных данных о деятельности предприятий региона A в отчетном году определить валовую прибыль и чистую добавленную стоимость.

Показатели	Сумма, млн. руб.
Реализация готовой продукции отчетного периода	d
Запасы готовой продукции на начало года	k
Запасы готовой продукции на конец года	m
Бартер	c
Стоимость сырья	p
Оплата труда	$5h$
Реклама	h
Амортизация	h

ж) На основании приведенных данных об экономической деятельности региона A в отчетном году построить счет производства.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Выпуск продукции в отраслях материального производства (в основных ценах)	a
Выручка от отраслей, оказывающих платные услуги (в основных ценах)	f
Затраты на содержание организаций	$5c$
Выручка от индивидуальной трудовой деятельности	p
Промежуточное потребление	g
Налоги на продукты	$10n$
Субсидии на продукты	k
Чистые налоги на импорт	m

з) На основании приведенных данных о структуре валового внутреннего продукта региона *A* в отчетном году построить счет образования доходов.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовой внутренний продукт	$5k$
Оплата труда	d
Налоги на производство и импорт	m
Субсидии на производство и импорт	n

к) На основании приведенных данных построить счет распределения первичных доходов региона *A* из пункта з).

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Поступления процентов по кредитам, предоставленным иностранным государствам	h
Чистая рента за использование земли иностранными государствами	q
Дивиденды, выплаченные нерезидентам за участие в акционерном капитале	r
Плата за использование авторских прав, торговых знаков, патентов, принадлежащих другим странам	s

л) На основании приведенных данных построить счет вторичного распределения доходов региона *A* из пунктов з) и к).

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Трансферты, полученные от «остального мира»	$0{,}01c$
Трансферты, переданные «остальному миру»	$0{,}01d$

м) На основании приведенных данных построить счет использования доходов региона *A* из пункта л).

Показатель	Сумма, млрд. руб.
Конечное потребление	k

н) На основании приведенных данных построить счет операций с капиталом региона *A* из пункта м).

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовое накопление основного капитала, включая прирост ценностей	m
Изменение запасов материальных оборотных средств	$1{,}5n$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	37500	37600	37400	37300	37800	37900	37200	37550	37650	37750
b	37400	37300	37300	37200	37600	37650	37000	37150	37250	37550
c	250	260	270	280	290	230	220	210	255	275
d	320	330	340	350	360	325	310	315	345	300
f	14000	15000	16000	17000	18000	19000	14500	14600	14700	14800
g	14400	15500	16300	17200	18400	19400	14800	14900	14800	14900
h	6	7	8	5	4	7	6	5	4	8
k	150	170	180	190	130	155	175	185	195	135
m	130	155	175	185	125	140	160	170	180	120
n	50	70	80	90	30	55	75	85	95	35
p	60	85	90	95	45	70	80	90	99	50
q	7	6	5	4	8	6	7	8	5	4
r	3	4	2	1	3	4	1	2	2	3
s	1	3	4	1	2	2	3	3	4	2

11–20. а) На основании приведенных данных построить баланс денежных доходов и расходов населения региона *A*.

Показатели	Сумма, млн. руб.
Доходы рабочих и служащих от предприятий (кроме оплаты труда)	*a*
Оплата труда	*b*
Покупка товаров	*c*
Оплата жилья и коммунальных услуг	*d*
Продажа сельскохозяйственной продукции	*f*
Прирост вкладов в банках	*g*
Дивиденды	*h*
Оплата образовательных услуг	*k*
Стипендии	*m*
Пенсии и пособия	*n*
Проценты по вкладам	*p*
Обязательные платежи и добровольные взносы	*q*

Показатели	Сумма, млн. руб.
Выигрыши в лотерею	*r*
Покупка жилья	*s*
Покупка иностранной валюты	*t*
Доходы от продажи иностранной валюты	*z*

б) На основании приведенных данных о балансе ресурсов и использовании продукта *X* (в тоннах) в регионе *A* определить недостающие показатели.

Показатели	2003	2004	2005
РЕСУРСЫ			
Запасы на начало года	?	*d*	*n*
Производство	10*z*	?	10*t*
Импорт	10*g*	4*a*	?
Итого ресурсов	?	2*b*	2*c*
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ			
Производственное потребление	10*f*	?	5*s*
Потери	1,5*r*	*r*	0,5*r*
Экспорт	*m* + 50	*m* + 40	*h*
Личное потребление	20*s*	10*t*	?
Запасы на конец года	*d*	*d* + 10	*d* + 20

в) Среднемесячная заработная плата за вычетом налогов в базисном году составила 5*b* руб., в отчетном году — 5*c* руб. Цены на потребительские товары и услуги повысились в отчетном году на *r*% по сравнению с базисным годом. Выплаты трансфертов (в ценах соответствующих лет) на одного человека составили в базисном году 5*k* руб., в отчетном году — 5*n* руб.

Определить индекс совокупных доходов населения в текущих ценах и индекс реальных доходов населения.

г) Среднемесячная заработная плата в базисном году составила 5*b* руб., в отчетном году — 5*c* руб. Цены на потребительские товары и услуги повысились в отчетном году на *r*% по сравнению с базисным годом. Доля налогов в общей заработной плате составила в базисном году 0,3*g*%, в отчетном году — *p*%.

Определить индекс номинальной заработной платы, индекс располагаемой номинальной заработной платы, индекс реальной заработной платы.

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
b	3529	3528	3527	3526	3525	3524	3523	3522	3521	3510
c	3615	3616	3617	3618	3619	3620	3611	3612	3613	3614
d	436	437	438	439	440	431	432	433	434	435
f	146	145	144	143	142	141	150	147	148	149
g	88	89	90	87	86	85	84	83	82	81
h	124	125	126	127	128	129	130	121	122	123
k	253	254	255	256	257	258	259	260	252	251
m	62	61	70	69	68	67	66	65	64	63
n	272	273	274	275	276	277	278	279	280	271
p	34	33	32	31	40	39	38	37	36	35
q	192	194	196	198	200	191	193	195	197	199
r	21	23	25	27	29	30	22	24	26	28
s	245	243	241	250	248	246	244	242	249	247
t	595	597	599	600	593	591	592	594	598	596
z	566	565	567	568	561	562	563	564	570	569

21–30. На основании приведенных данных определить индексы цен акций.

Предприятие	Курс акций в базисном периоде	Курс акций в текущем периоде	Количество выпущенных акций, млн. ед.
А	*a*	*b*	*h*
Б	*c*	*d*	*k*
В	*f*	*g*	*m*

	a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*
21	25	23	31	38	59	52	21	25	28
22	29	22	32	37	58	53	22	26	29
23	26	21	39	35	57	54	23	27	20
24	27	20	38	34	56	59	24	28	21
25	24	28	37	36	51	58	25	29	28
26	23	25	35	33	52	57	26	20	26
27	22	29	34	30	53	55	27	21	27
28	21	26	36	31	54	50	28	22	24
29	20	27	33	32	55	56	29	23	22
30	28	24	30	39	50	51	20	24	21

31–40. Убедиться, что модель Леонтьева продуктивна. Найти вектор конечного продукта для нового вектора валового выпуска $X=\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Найти вектор валового выпуска для для нового вектора конечного продукта $Y=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
x_1	500	400	200	600	700	800	900	700	900	200
x_2	700	900	300	300	400	300	300	600	600	900
x_{11}	50	30	45	20	75	85	150	120	200	100
x_{12}	100	40	90	80	125	95	70	150	400	75
x_{21}	60	70	100	70	70	170	40	80	20	50
x_{22}	90	120	70	100	150	100	120	75	125	120
d	400	200	600	700	800	900	700	600	200	500
e	900	300	300	400	300	400	600	900	700	700
f	800	900	700	600	200	500	400	200	600	700
g	300	400	600	900	700	700	900	300	300	400

Раздел V

СТАТИСТИКА ФИНАНСОВ

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

В широком смысле финансовая математика — это любые финансовые вычисления для достижения какой-либо цели. Коммерческие и финансовые вычисления сопровождают нас постоянно. В каком банке хранить деньги? Какой вид вклада лучше всего выбрать? Положить ли деньги в банк или закупить товары впрок? Обменять ли средства на иностранную валюту или положить их в банк? Ехать ли за товарами на оптовый рынок или покупать их в ближайшем магазине? Подобные вопросы постоянно возникают перед людьми. Поэтому задачи, формально относящиеся к области финансовой математики, приходится решать очень часто.

С развитием денежного обращения и используемого в расчетах математического аппарата совершенствовались и финансовые вычисления. Они стали необходимыми для успешного проведения любой коммерческой деятельности. Вместе с современными методами анализа и моделирования финансовых ситуаций финансовые вычисления переросли в новое, все более влиятельное направление организации и управления предпринимательской деятельности — финансовый менеджмент.

Но ядром финансового менеджмента остается финансовая математика — вполне определенный круг финансовых вычислений. Речь идет, прежде всего, об аппарате и методах расчетов, необходимых при финансовых операциях, когда оговариваются значения трех параметров: стоимостные характеристики (размеры платежей, кредитов, долговых обязательств), временные данные (даты и сроки выплат, отсрочки платежей, продолжительность льготных периодов), специфические элементы (процентные и учетные ставки). Все эти параметры равноправны, игнорирование какого-либо одного из них может привести к нежелательным финансовым последствиям для одной из участвующих сторон.

Между различными видами параметров существуют функциональные зависимости. Изучение этих зависимостей и разработка на их основе методов решения финансовых задач — важнейшее направление деятельности специалистов в области финансов.

Финансовая математика имеет сугубо практическое значение. Она применяется в банковском и сберегательном деле, страховании, в работе финансовых организаций, торговых фирм и инвестиционных компаний, фондовых и валютных бирж, во внешнеэкономической деятельности. Но не следует полагать, что с помощью финансовой математики решаются все проблемы финансово-банковской и инвестиционной практики.

Методы и понятия финансовой математики обязательно используются в качестве исходных инструментов при создании более сложных методов количественного финансового анализа. С рассмотрения основных понятий финансовой математики мы и начнем.

Проценты — это доход от предоставления капитала в долг. Будем обозначать проценты латинской буквой *I*. *Процентная ставка* — это величина, которая характеризует интенсивность начисления процентов.

Исходную инвестированную сумму будем называть *первоначальной суммой* и обозначать латинской буквой *P*. *Наращенная сумма* S — это первоначальная сумма P + проценты I: $S = P + I$. *Коэффициент наращения* k показывает, во сколько раз выросла первоначальная сумма: $k = S/P$.

Период начисления — это промежуток времени, за который начисляются проценты. *Интервал начисления* — это минимальный промежуток времени, по прошествии которого происходит начисление процентов. Например, первоначальная сумма может быть инвестирована на 2 года (период начисления), а проценты на нее будут начисляться каждый квартал (интервал начисления).

Различают два способа начисления процентов: декурсивный и антисипативный. При *декурсивном способе* проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Декурсивная процентная ставка называется *ссудным процентом*. При *антисипативном (предварительном) способе* проценты начисляются в начале каждого интервала начисления. Антисипативная процентная ставка называется *учетной ставкой*.

В обоих способах начисления процентов процентные ставки могут быть либо *простыми* (в течение всего периода начисления применяются к первоначальной сумме), либо *сложными* (в каждом интервале начисления применяются к текущей наращенной сумме).

Глава 2

ПРОСТЫЕ СТАВКИ ССУДНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Пусть P — первоначальная сумма, S — наращенная сумма, i — годовая процентная ставка (проценты простые). Так как проценты простые, то в течение всего периода начисления они применяются к первоначальной сумме P.

Предположим, что первоначальная сумма P была помещена в банк под i процентов годовых (проценты простые).

Прошел 1 год. Тогда наращенная сумма $S = P$ (первоначальная сумма) + iP (проценты) = $P(1 + i)$.

Прошел еще 1 год (то есть вклад лежит уже 2 года). Тогда наращенная сумма после двух лет $S = P(1 + i)$ (наращенная сумма после одного года) + iP (проценты) = $P(1 + 2i)$.

Прошел еще 1 год (то есть вклад лежит уже 3 года). Тогда наращенная сумма после трех лет $S = P(1 + 2i)$ (наращенная сумма после двух лет) + iP (проценты) = $P(1 + 3i)$. И т. д.

Если n — период начисления процентов (в годах), то наращенная сумма через n лет $S = P(1 + ni)$.

Пример 1. Первоначальная сумма $P = 5000$ руб. помещена в банк на $n = 2$ года под $i = 15\%$ годовых (проценты простые).

Тогда наращенная сумма после двух лет $S = P(1 + 2i) = 5000(1 + 2\times0{,}15) = 6500$ руб.

Задача 1. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб. помещена в банк на $n = 0{,}5$ года под $i = 10\%$ годовых (проценты простые). Найти наращенную сумму.

Зная первоначальную сумму P, наращенную сумму S, простую годовую процентную ставку i, можно определить период начисления n (в годах): $S = P(1 + ni) \Rightarrow 1 + ni = S/P \Rightarrow ni = S/P - 1 \Rightarrow n = \dfrac{S - P}{iP}$.

Пример 2. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб., наращенная сумма $S = 4500$ руб., $i = 20\%$ годовых (проценты простые).

Тогда период начисления $n = \dfrac{S-P}{iP} = \dfrac{4500-3000}{0{,}2\times 3000} = 2{,}5$ года.

Задача 2. Первоначальная сумма $P = 6000$ руб., наращенная сумма $S = 7200$ руб., $i = 10\%$ годовых (проценты простые). Найти период начисления.

Зная первоначальную сумму P, наращенную сумму S, период начисления n (в годах), можно определить простую годовую процентную ставку i: $S = P(1 + ni) \Rightarrow 1 + ni = S/P \Rightarrow ni = S/P - 1 \Rightarrow i = \dfrac{S-P}{nP}$.

Пример 3. Первоначальная сумма $P = 2000$ руб., наращенная сумма $S = 2200$ руб., период начисления $n = 0{,}5$ года. Тогда простая процентная ставка $i = \dfrac{S-P}{nP} = \dfrac{2200-2000}{0{,}5\times 2000} = 0{,}2$ (= 20% годовых).

Задача 3. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб., наращенная сумма $S = 3300$ руб., период начисления $n = 0{,}5$ года. Найти простую процентную ставку.

§ 2.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДИСКОНТИРОВАНИЕ

Математическим дисконтированием называется операция, когда по наращенной сумме S, периоду начисления n и простой процентной ставке i нужно определить первоначальную сумму P: $S = P(1 + ni) \Rightarrow$
$\Rightarrow P = \dfrac{S}{1 + ni}$.

Пример 4. Наращенная сумма $S = 7000$ руб., период начисления $n = 0{,}25$ года (один квартал), простая процентная ставка $i = 12\%$ годовых. Тогда первоначальная сумма $P = \dfrac{S}{1 + ni} = \dfrac{7000}{1 + 0{,}25\times 0{,}12} \approx$
$\approx 6796{,}12$ руб.

Задача 4. Наращенная сумма $S = 6000$ руб., период начисления $n = 0{,}5$ года, простая процентная ставка $i = 15\%$ годовых. Найти первоначальную сумму.

§ 2.2. АНГЛИЙСКАЯ, НЕМЕЦКАЯ И ФРАНЦУЗСКАЯ ПРАКТИКИ НАЧИСЛЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ

В формуле $S = P(1 + ni)$ период начисления n измеряется в годах. Это не всегда удобно, так как период начисления может быть мень-

ше года (например, с 18 марта 2007 года по 20 октября 2007 года). В этом случае полагают $n = t/K$, где t — период начисления (в днях), K — продолжительность года (в днях). Тогда $S = P(1 + it/K)$. Дата выдачи и дата погашения ссуды всегда считаются за один день.

В *немецкой практике* начисления процентов один полный месяц равен 30 дням, продолжительность года $K = 360$ дней.

Во *французской практике* период начисления процентов равен фактическому сроку, продолжительность года $K = 360$ дней.

В *английской практике* период начисления процентов равен фактическому сроку, продолжительность года $K = 365$ дней (невисокосный год) или 366 дней (високосный год).

Пример 5. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб. помещена в банк под $i = 12\%$ годовых (проценты простые) на срок с 18 марта 2007 года по 20 октября 2007 года. Найдем наращенную сумму в каждой из практик начисления процентов.

В немецкой практике начисления процентов продолжительность года $K = 360$ дней, $t = 14$ (март) + 6×30 (апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь) + 20 (октябрь) – 1 (день открытия и день закрытия счета всегда считаются за один день) = 213 дней. Тогда $S = P(1 + it/K) = 3000\times(1 + 0{,}12\times213/360) = 3213$ руб.

Во французской практике продолжительность года $K = 360$ дней, $t = 14$ (март) + 30 (апрель) + 31 (май) + 30 (июнь) + + 31 (июль) + 31 (август) + 30 (сентябрь) + 20 (октябрь) – 1 (день открытия и день закрытия счета всегда считаются за один день) = 216 дней. Тогда $S = P(1 + it/K) = 3000\times(1 + 0{,}12\times216/360) = 3216$ руб.

В английской практике продолжительность года $K = 365$ дней, $t = 216$ дней. Тогда $S = P(1 + it/K) = 3000\times(1 + 0{,}12\times216/365) \approx \approx 3213{,}04$ руб.

Задача 5. Первоначальная сумма $P = 2000$ руб. помещена в банк под $i = 15\%$ годовых (проценты простые) на срок с 19 февраля 2007 года по 27 ноября 2007 года. Найти наращенную сумму в каждой из практик начисления процентов.

§ 2.3. СЛУЧАЙ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОСТОЙ СТАВКИ ССУДНОГО ПРОЦЕНТА

Пусть на интервалах начисления (в годах) $n_1, n_2, \ldots, n_k$ применялись простые процентные ставки $i_1, i_2, \ldots, i_k$ соответственно. Тогда наращенная сумма $S = P(1 + n_1i_1 + n_2i_2 + \ldots + n_ki_k) = P\left(1 + \sum_{j=1}^{k} n_ji_j\right)$.

Пример 6. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб. В первой половине года применялась простая процентная ставка $i_1 = 15\%$ годовых, во второй половине года применялась простая процентная ставка $i_2 = 12\%$ годовых.

Тогда наращенная сумма $S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2) = 3000 \times (1 + 0{,}5 \times 0{,}15 + 0{,}5 \times 0{,}12) = 3405$ руб.

Задача 6. Первоначальная сумма $P = 4000$ руб. В первой половине года применялась простая процентная ставка $i_1 = 11\%$ годовых, во второй половине года применялась простая процентная ставка $i_2 = 14\%$ годовых. Найти наращенную сумму.

Глава 3

ПРОСТЫЕ УЧЕТНЫЕ СТАВКИ

Это антисипативный способ начисления простых процентов. Сумма получаемого дохода рассчитывается исходя из наращенной суммы S. S — это величина получаемого кредита. Заемщик получает в начале периода начисления процентов сумму $P = S - D$, где D — это дисконт (разность между размером кредита S и непосредственно выданной суммой P). Такая операция называется *дисконтированием по простой учетной ставке* (*банковским учетом*).

Пусть d — простая учетная ставка, n — период начисления процентов (в годах). Тогда $D = ndS$ и $P = S - D = S - ndS = S(1 - nd)$.

На практике простые учетные ставки применяются при учете (покупке) векселей.

Пример 7. Кредит $S = 7000$ руб. выдается на $n = 0{,}5$ года по простой учетной ставке $d = 11\%$ годовых. Тогда заемщик получит сумму $P = S(1 - nd) = 7000(1 - 0{,}5 \times 0{,}11) = 6615$ руб.

Задача 7. Кредит $S = 8000$ руб. выдается на $n = 0{,}25$ года (один квартал) по простой учетной ставке $d = 12\%$ годовых. Какую сумму получит заемщик?

Если период начисления меньше года (например, с 18 марта по 20 октября), то полагают $n = t/K$, где K — продолжительность года (в днях), t — период начисления (в днях). Тогда $P = S(1 - dt/K)$.

Пример 8. Вексель на сумму $S = 20000$ руб. с датой погашения 27 ноября 2007 года был учтен банком 11 августа 2007 года по простой учетной ставке $d = 12\%$ годовых. Продолжительность года $K = 365$ дней. Определим, какая сумма была выплачена банком.

$t = 21$ (август) + 30 (сентябрь) + 31 (октябрь) + 27 (ноябрь) − 1 = = 108 дней, $P = S(1 - dt/K) = 20000(1 - 0{,}12 \times 108/365) \approx 19289{,}86$ руб.

Задача 8. Вексель на сумму $S = 15000$ руб. с датой погашения 25 октября 2007 года был учтен банком 9 сентября 2007 года по простой учетной ставке $d = 15\%$ годовых. Продолжительность года $K = 365$ дней. Определить, какая сумма была выплачена банком.

Зная P, n, d, можно найти S. $P = S(1 - nd)$. Тогда $S = P/(1 - nd)$.

Пример 9. Вексель учтен банком за $n = 0{,}5$ года до даты погашения по простой учетной ставке $d = 14\%$ годовых. Банк выплатил сумму $P = 15000$ руб. Определим номинальную стоимость векселя.

$S = P/(1 - nd) = 15000/(1 - 0{,}5\times 0{,}14) \approx 16129{,}03$ руб.

Задача 9. Вексель учтен банком за $n = 0{,}25$ года до даты погашения по простой учетной ставке $d = 15\%$ годовых. Банк выплатил сумму $P = 7000$ руб. Определить номинальную стоимость векселя.

Зная P, n, S, можно найти простую учетную ставку d: $P = S(1 - nd)$ $\Rightarrow P/S = 1 - nd \Rightarrow nd = 1 - P/S = (S - P)/S \Rightarrow d = \dfrac{S - P}{nS}$.

Пример 10. Вексель номинальной стоимостью $S = 12000$ руб. учтен банком за $n = 0{,}5$ года до даты погашения. Банк выплатил сумму $P = 11500$ руб. Определим простую учетную ставку d.

$$d = \frac{S - P}{nS} = \frac{12000 - 11500}{0{,}5\times 12000} \approx 0{,}08 \ (= 8\% \text{ годовых}).$$

Задача 10. Вексель номинальной стоимостью $S = 10000$ руб. учтен банком за $n = 0{,}25$ года до даты погашения. Банк выплатил сумму $P = 9600$ руб. Определить простую учетную ставку d.

Зная P, d, S, можно найти период начисления процентов (в годах) $n = \dfrac{S - P}{dS}$. Если $n = t/K$, то $t/K = \dfrac{S - P}{dS} \Rightarrow t = \dfrac{K(S - P)}{dS}$.

Пример 11. Кредит $S = 9000$ руб. выдается по простой учетной ставке $d = 12\%$ годовых. Заемщик получил сумму $P = 8000$ руб. Продолжительность года $K = 365$ дней. Определим, на какой срок был выдан кредит.

$$t = \frac{K(S - P)}{dS} = \frac{365(9000 - 8000)}{0{,}12\times 9000} \approx 338 \text{ дней}.$$

Задача 11. Кредит $S = 11000$ руб. выдается по простой учетной ставке $d = 14\%$ годовых. Заемщик получил сумму $P = 10500$ руб. Продолжительность года $K = 365$ дней. Определить, на какой срок был выдан кредит.

Глава 4

СЛОЖНЫЕ СТАВКИ ССУДНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Пусть P — первоначальная сумма, S — наращенная сумма, i — годовая процентная ставка (проценты сложные). Так как проценты сложные, то в конце каждого интервала начисления процентная ставка применяется к наращенной сумме на начало этого интервала начисления.

Предположим, что первоначальная сумма P была помещена в банк под i процентов годовых (проценты сложные).

Прошел 1 год. Тогда наращенная сумма $S = P$ (сумма на начало этого интервала начисления) + iP (проценты) = $P(1 + i)$.

Прошел еще 1 год (то есть вклад лежит уже 2 года). Тогда наращенная сумма после двух лет $S = P(1 + i)$ (наращенная сумма после одного года) + $iP(1 + i)$ (проценты) = $P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$.

Прошел еще 1 год (то есть вклад лежит уже 3 года). Тогда наращенная сумма после трех лет $S = P(1 + i)^2$ (наращенная сумма после двух лет) + $iP(1 + i)^2$ (проценты) = $P(1 + i)^2(1 + i) = P(1 + i)^3$. И т. д.

Если n — период начисления процентов (в годах), то наращенная сумма через n лет $S = P(1 + i)^n$.

Пример 12. Первоначальная сумма $P = 5000$ руб. помещена в банк на $n = 2$ года под $i = 15\%$ годовых (проценты сложные).

Тогда наращенная сумма после двух лет $S = P(1 + i)^n = 5000(1 + 0{,}15)^2 = 6612{,}5$ руб.

Задача 12. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб. помещена в банк на $n = 3$ года под $i = 10\%$ годовых (проценты сложные). Найти наращенную сумму.

Зная первоначальную сумму P, наращенную сумму S, сложную годовую процентную ставку i, можно определить период начисления n (в годах):

$S = P(1 + i)^n \Rightarrow (1 + i)^n = S/P \Rightarrow \ln(1 + i)^n = \ln(S/P) \Rightarrow$
$\Rightarrow n\ln(1 + i) = \ln(S/P) \Rightarrow n = \ln(S/P)/\ln(1 + i)$.

Пример 13. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб., наращенная сумма $S = 4500$ руб., $i = 20\%$ годовых (проценты сложные).

Тогда период начисления $n = \ln(S/P)/\ln(1 + i) = \dfrac{\ln(4500/3000)}{\ln(1 + 0{,}2)} \approx$
$\approx 2{,}2$ года.

Задача 13. Первоначальная сумма $P = 6000$ руб., наращенная сумма $S = 7200$ руб., $i = 10\%$ годовых (проценты сложные). Найти период начисления.

Зная первоначальную сумму P, наращенную сумму S, период начисления n (в годах), можно определить сложную годовую процентную ставку i:

$$S = P(1 + i)^n \Rightarrow (1 + i)^n = S/P \Rightarrow 1 + i = \sqrt[n]{S/P} \Rightarrow i = \sqrt[n]{S/P} - 1.$$

Пример 14. Первоначальная сумма $P = 2000$ руб., наращенная сумма $S = 3500$ руб., период начисления $n = 3$ года.

Тогда сложная процентная ставка $i = \sqrt[n]{S/P} - 1 =$
$= \sqrt[3]{3500/2000} - 1 \approx 0{,}205$ (= 20,5% годовых).

Задача 14. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб., наращенная сумма $S = 4000$ руб., период начисления $n = 2$ года. Найти сложную процентную ставку.

§ 4.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДИСКОНТИРОВАНИЕ

Математическим дисконтированием называется операция, когда по наращенной сумме S, периоду начисления n и сложной процентной ставке i нужно определить первоначальную сумму P. Это делается следующим образом: $S = P(1 + i)^n \Rightarrow P = S/(1 + i)^n = S(1 + i)^{-n}$.

Пример 15. Наращенная сумма $S = 7000$ руб., период начисления $n = 2$ года, сложная процентная ставка $i = 12\%$ годовых. Тогда первоначальная сумма $P = S/(1 + i)^n = 7000/(1 + 0{,}12)^2 \approx 5580{,}36$ руб.

Задача 15. Наращенная сумма $S = 6000$ руб., период начисления $n = 3$ года, сложная процентная ставка $i = 15\%$ годовых. Найти первоначальную сумму.

§ 4.2. СЛУЧАЙ, КОГДА ПЕРИОД НАЧИСЛЕНИЯ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ЦЕЛЫМ ЧИСЛОМ

Если период начисления n не является целым числом, то формула $S = P(1 + i)^n$ дает приблизительный (и весьма неточный) результат. Поэтому используют другой подход.

Определение. Целая часть $[n]$ числа n — это наибольшее целое число, не превосходящее n.

Пример 16. $[1{,}6] = 1$, $[-2{,}5] = -3$, $[0{,}7] = 0$, $[5] = 5$.

Задача 16. Чему равны целые части чисел $-3{,}5$ и $2{,}9$?

Определение. Дробная часть $\{n\}$ числа n — это разность между числом n и его целой частью: $\{n\} = n - [n]$. Всегда $0 \leqslant \{n\} < 1$.

Пример 17. $\{1{,}6\} = 0{,}6$; $\{-2{,}3\} = 0{,}7$; $\{0{,}7\} = 0{,}7$; $\{5\} = 0$.

Задача 17. Чему равны дробные части чисел $-3{,}5$ и $2{,}9$?

Если период начисления n не является целым числом, то $n = [n]$ (целая часть) + $\{n\}$ (дробная часть).

Тогда наращенная сумма $S = P(1 + i)^{[n]}(1 + \{n\}i)$.

Пример 18. Первоначальная сумма $P = 6000$ руб. помещена в банк на $n = 2{,}5$ года под $i = 20\%$ годовых (проценты сложные). Найдем наращенную сумму двумя способами.

$S = P(1 + i)^n = 6000(1 + 0{,}2)^{2{,}5} \approx 9464{,}65$ руб.

$S = P(1 + i)^{[n]}(1 + \{n\}i) = 6000(1 + 0{,}2)^2(1 + 0{,}5 \times 0{,}2) = 9504$ руб.

Задача 18. Первоначальная сумма $P = 8000$ руб. помещена в банк на $n = 2{,}25$ года под $i = 15\%$ годовых (проценты сложные). Найти наращенную сумму двумя способами.

§ 4.3. СЛУЧАЙ ИЗМЕНЕНИЯ СЛОЖНОЙ СТАВКИ ССУДНОГО ПРОЦЕНТА

Пусть на интервалах начисления (в годах) $n_1, n_2, \ldots, n_k$ применялись сложные процентные ставки $i_1, i_2, \ldots, i_k$ соответственно. Тогда наращенная сумма $S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2}\ldots(1 + i_k)^{n_k} = P\prod_{j=1}^{k}(1 + i_j)^{n_j}$.

Пример 19. Первоначальная сумма $P = 3000$ руб., $n_1 = 2$ года применялась сложная процентная ставка $i_1 = 15\%$ годовых, затем $n_2 = 3$ года применялась сложная процентная ставка $i_2 = 12\%$ годовых.

Тогда наращенная сумма $S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} = 3000(1 + 0.15)^2 \times$ $\times(1 + 0{,}12)^3 \approx 5574{,}05$ руб.

Задача 19. Первоначальная сумма $P = 4000$ руб., $n_1 = 3$ года применялась сложная процентная ставка $i_1 = 11\%$ годовых, затем $n_2 = 2$ года применялась сложная процентная ставка $i_2 = 14\%$ годовых. Найти наращенную сумму.

§ 4.4. НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ НЕСКОЛЬКО РАЗ В ГОДУ. НОМИНАЛЬНАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

Начисление сложных процентов может происходить несколько раз в году. В этом случае указывают *номинальную процентную ставку* j, на основании которой рассчитывают процентную ставку для каждого интервала начисления.

Если в году m интервалов начисления, то на каждом из них процентная ставка равна j/m. Тогда наращенная сумма $S = P(1 + j/m)^{nm}$. Аналогично вышесказанному из этой формулы можно выразить любую величину через остальные: $P = S/(1 + j/m)^{nm}$, $n = \dfrac{\ln(S/P)}{m\ln(1 + j/m)}$, $j = m(\sqrt[nm]{S/P} - 1)$.

Пример 20. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб., период начисления $n = 2$ года, сложная процентная ставка $j = 12\%$ годовых ежеквартально. Найдем наращенную сумму.

$m = 4$ (в году 4 квартала). Тогда наращенная сумма $S = P(1 + j/m)^{nm} = 7000(1 + 0{,}12/4)^{2\times4} \approx 8867{,}39$ руб.

Задача 20. Первоначальная сумма $P = 6000$ руб., период начисления $n = 3$ года, сложная процентная ставка $j = 12\%$ годовых ежемесячно. Найти наращенную сумму.

§ 4.5. НЕПРЕРЫВНОЕ НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

$S = P(1 + j/m)^{nm}$. Устремим продолжительность интервала начисления к нулю, то есть $m \to \infty$. Это *непрерывное начисление сложных процентов.*

Тогда $S = \lim\limits_{m\to\infty} P(1 + j/m)^{nm} = P \lim\limits_{m\to\infty} (1 + j/m)^{\frac{nm}{j}j} = P \lim\limits_{m\to\infty} (1 + j/m)^{m/j})^{nj}$.

Но $\lim\limits_{m\to\infty} (1 + j/m)^{m/j}) = e$ (второй замечательный предел). Тогда $S = Pe^{nj}$.

Отсюда $P = S/e^{nj}$, $j = \dfrac{\ln(S/P)}{n}$, $n = \dfrac{\ln(S/P)}{j}$.

Пример 21. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб., период начисления $n = 2$ года, сложная процентная ставка $j = 12\%$ годовых. Начисление процентов происходит непрерывно. Найдем наращенную сумму.

$S = Pe^{nj} = 7000e^{2\times0,12} \approx 8898,74$ руб.

Задача 21. Найти наращенную сумму в задаче 20 при непрерывном начислении процентов. Сравнить с результатом задачи 20.

Глава 5

СЛОЖНЫЕ УЧЕТНЫЕ СТАВКИ

Это антисипативный способ начисления сложных процентов. Пусть P — первоначальная сумма, S — наращенная сумма, d — годовая сложная учетная ставка, n — период начисления процентов.

Тогда $S = P/(1 - d)^n$. Отсюда $P = S(1 - d)^n \Rightarrow (1 - d)^n = P/S \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 - d = \sqrt[n]{P/S} \Rightarrow d = 1 - \sqrt[n]{P/S}$.

Так как $(1 - d)^n = P/S \Rightarrow \ln(1 - d)^n = \ln(P/S) \Rightarrow n\ln(1 - d) = \ln(P/S)$ $\Rightarrow n = \dfrac{\ln(P/S)}{\ln(1 - d)}$.

Пример 22. Первоначальная сумма $P = 6000$ руб., период начисления $n = 2$ года, сложная учетная ставка $d = 15\%$ годовых.

Тогда наращенная сумма $S = P/(1 - d)^n = 6000/(1 - 0{,}15)^2 \approx 8304{,}5$ руб.

Задача 22. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб., период начисления $n = 3$ года, сложная учетная ставка $d = 12\%$ годовых. Найти наращенную сумму.

Замечание. Аналогично § 4.3 и § 4.4 можно рассмотреть случаи изменения сложных учетных ставок и начисления процентов m раз в году.

Глава 6

УЧЕТ ИНФЛЯЦИОННОГО ОБЕСЦЕНЕНИЯ ДЕНЕГ

Инфляция характеризуется обесценением национальной валюты (то есть снижением ее покупательной способности) и общим повышением цен в стране. Рассмотрим влияние инфляции на финансовые операции.

§ 6.1. УРОВЕНЬ (ТЕМП) ИНФЛЯЦИИ. ИНДЕКС ИНФЛЯЦИИ

Пусть S — это сумма денег, для которой рассматривается покупательная способность при отсутствии инфляции. S_α — это сумма денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции, то есть один и тот же набор товаров можно купить на суммы S (при отсутствии инфляции) и S_α (с учетом инфляции). Понятно, что $S_\alpha > S$.

Обозначим $\Delta S = S_\alpha - S$. Тогда величина $\alpha = \Delta S/S = (S_\alpha - S)/S$ называется *уровнем (темпом) инфляции*. Это индекс прироста. Он показывает, на сколько процентов в среднем выросли цены за рассматриваемый период.

$\Delta S = S_\alpha - S \Rightarrow S_\alpha = S + \Delta S$. Но $\alpha = \Delta S/S \Rightarrow \Delta S = \alpha S$. Тогда $S_\alpha = S + \Delta S = S + \alpha S = S(1 + \alpha)$. Величину $I_и = 1 + \alpha$ называют *индексом инфляции*. Это индекс роста. Он показывает, во сколько раз в среднем выросли цены за рассматриваемый период.

Пример 23. Каждый месяц цены растут на 1,5%. Каков ожидаемый уровень инфляции за год?

Распространен неправильный ответ 12×1,5% = 18%. Но ведь цены растут на 1,5% каждый месяц от достигнутого уровня, то есть рост идет по сложной процентной ставке. Тогда годовой индекс инфляции $I_и^{год} = (1 + 0{,}015)^{12} \approx 1{,}2$, то есть цены за год вырастут в 1,2 раза, или на 20%.

Задача 23. Каждый месяц цены растут на 2%. Каков ожидаемый уровень инфляции за год?

Пример 24. Уровень инфляции в марте составил 2%, в апреле — 1%, в мае — 3%.

Тогда индекс инфляции за рассматриваемый период равен $(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}01)(1 + 0{,}03) \approx 1{,}061$, то есть уровень инфляции за рассматриваемый период составил 6,1%.

Задача 24. Уровень инфляции в марте составил 3%, в апреле — 5%, в мае — 3%. Каков уровень инфляции за рассматриваемый период?

Рассмотрим теперь способы начисления процентов в условиях инфляции. Мы ограничимся только случаями простых и сложных ставок ссудного процента.

§ 6.2. СТАВКА, УЧИТЫВАЮЩАЯ ИНФЛЯЦИЮ, ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ. ФОРМУЛА ФИШЕРА

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления, i — годовая простая ставка ссудного процента. Тогда наращенная сумма $S = P(1 + ni)$. Эта сумма не учитывает инфляцию.

Пусть уровень инфляции за рассматриваемый период n равен α. S_α — это сумма денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции. Тогда $S_\alpha = S(1 + \alpha)$ (см. § 6.1) $= P(1 + ni)(1 + \alpha)$.

Но сумму S_α можно получить, поместив первоначальную сумму P на срок n под простую ставку ссудных процентов i_α, учитывающую инфляцию: $S_\alpha = P(1 + ni_\alpha)$.

Отсюда $P(1 + ni)(1 + \alpha) = P(1 + ni_\alpha) \Rightarrow (1 + ni)(1 + \alpha) = 1 + ni_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 + ni + \alpha + ni\alpha = 1 + ni_\alpha \Rightarrow i_\alpha = (ni + \alpha + ni\alpha)/n$. Именно под такую простую ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму на срок n, чтобы при уровне инфляции а за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов i.

Если $n = 1$ год, то $i_\alpha = i + \alpha + i\alpha$. Это *формула Фишера*.

Величина $\alpha + i\alpha$ называется *инфляционной премией*.

$ni + \alpha + ni\alpha = ni_\alpha \Rightarrow i = (ni_\alpha - \alpha)/(n + n\alpha)$. Это *формула реальной доходности* в виде годовой простой ставки ссудных процентов для случая, когда первоначальная сумма была инвестирована под простую ставку ссудных процентов i_α на срок n при уровне инфляции α за рассматриваемый период.

Пример 25. Период начисления $n = 3$ месяца, ожидаемый ежемесячный уровень инфляции 2%. Под какую простую ставку ссудных

процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность $i = 5\%$ годовых (проценты простые)?

Ожидаемый индекс инфляции за период начисления $n = 3$ месяца $= 0{,}25$ года $I_и = (1 + 0{,}02)^3 \approx 1{,}061$, то есть уровень инфляции α за рассматриваемый период $\alpha = 0{,}061$. Тогда $i_\alpha = (ni + \alpha + ni\alpha)/n = (0{,}25\times0{,}05 + 0{,}061 + 0{,}25\times0{,}05\times0{,}061)/0{,}25 \approx 0{,}297$ (= 29,7% годовых).

Задача 25. Период начисления $n = 6$ месяцев, ожидаемый ежемесячный уровень инфляции 1,5%. Под какую простую ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность $i = 6\%$ годовых (проценты простые)?

Пример 26. Первоначальная сумма положена на срок апрель-июнь под простую ставку ссудных процентов $i_\alpha = 15\%$ годовых. Уровень инфляции в апреле составил 1%, в мае — 1,5%, в июне — 2%. Какова реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов?

Индекс инфляции за рассматриваемый период $n = 3$ месяца $= 0{,}25$ года $I_и = (1 + 0{,}01)(1 + 0{,}015)(1 + 0{,}02) \approx 1{,}046$, то есть уровень инфляции за рассматриваемый период $\alpha = 0{,}046$. Тогда реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов $i = (ni_\alpha - \alpha)/(n + n\alpha) = (0{,}25\times0{,}15 - 0{,}046)/(0{,}25 + 0{,}25\times0{,}046) \approx -0{,}033$ (= −3,3% годовых), то есть операция убыточна.

Задача 26. Первоначальная сумма положена на срок январь-июнь под простую ставку ссудных процентов $i_\alpha = 25\%$ годовых. Уровень инфляции в январе составил 0,5%, в феврале — 2%, в марте — 1%, в апреле — 0,5%, в мае — 3%, в июне — 1%. Какова реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов?

§ 6.3. СТАВКА, УЧИТЫВАЮЩАЯ ИНФЛЯЦИЮ, ДЛЯ СЛУЧАЯ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления, i — годовая сложная ставка ссудного процента. Тогда наращенная сумма $S = P(1 + i)^n$. Эта сумма не учитывает инфляцию.

Пусть уровень инфляции за рассматриваемый период n равен α. S_α — это сумма денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции. Тогда $S_\alpha = S(1 + \alpha)$ (см. § 6.1) $= P(1 + i)^n(1 + \alpha)$.

Но сумму S_α можно получить, поместив первоначальную сумму P на срок n под сложную ставку ссудных процентов i_α, учитывающую инфляцию: $S_\alpha = P(1 + i_\alpha)^n$.

Отсюда $P(1 + i)^n(1 + \alpha) = P(1 + i_\alpha)^n \Rightarrow (1 + i)^n(1 + \alpha) = (1 + i_\alpha)^n \Rightarrow$ $\Rightarrow (1 + i)\sqrt[n]{1 + \alpha} = 1 + i_\alpha \Rightarrow i_\alpha = (1 + i)\sqrt[n]{1 + \alpha} - 1$. Именно под такую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму на срок n, чтобы при уровне инфляции α за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов i.

$(1 + i)\sqrt[n]{1 + \alpha} = 1 + i_\alpha \Rightarrow i = (1 + i_\alpha)/\sqrt[n]{1 + \alpha} - 1$. Это *формула реальной доходности* в виде сложной годовой ставки ссудных процентов для случая, когда первоначальная сумма была инвестирована под сложную ставку ссудных процентов i_α на срок n при уровне инфляции α за рассматриваемый период.

Пример 27. Период начисления $n = 3$ года, ожидаемый ежегодный уровень инфляции 14%. Под какую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность $i = 5\%$ годовых (проценты сложные)?

Ожидаемый индекс инфляции за период начисления $n = 3$ года $I_и = (1 + 0{,}14)^3 \approx 1{,}48$, то есть уровень инфляции α за рассматриваемый период $\alpha = 0{,}48$.

Тогда $i_\alpha = (1 + i)\sqrt[n]{1 + \alpha} - 1 = (1 + 0{,}05)\sqrt[3]{1 + 0{,}48} - 1 \approx 0{,}197$ (= 19,7% годовых).

Задача 27. Период начисления $n = 2$ года, ожидаемый ежегодный уровень инфляции 12%. Под какую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность $i = 6\%$ годовых (проценты сложные)?

Пример 28. Первоначальная сумма положена на $n = 3$ года под сложную ставку ссудных процентов $i_\alpha = 20\%$ годовых. Уровень инфляции за 1-й год составил 16%, за 2-й год — 14%, за 3-й год — 13%. Какова реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов?

Индекс инфляции за рассматриваемый период $n = 3$ года $I_и = (1 + 0{,}16)(1 + 0{,}14)(1 + 0{,}13) \approx 1{,}494$, то есть уровень инфляции α за рассматриваемый период $\alpha = 0{,}494$. Тогда реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов $i = (1 + i_\alpha)/\sqrt[n]{1 + \alpha} - 1 = (1 + 0{,}2)/\sqrt[3]{1 + 0{,}494} - 1 \approx 0{,}05$ (= 5% годовых).

Задача 28. Первоначальная сумма положена на $n = 2$ года под сложную ставку ссудных процентов $i_\alpha = 15\%$ годовых. Уровень инфляции за 1-й год составил 12%, за 2-й год — 14%. Какова реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов?

Замечание. Аналогично можно найти процентную ставку, учитывающую инфляцию, и для других процентных ставок.

Глава 7

СРАВНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ

В предыдущих главах мы изучили простые и сложные процентные ставки, простые и сложные учетные ставки. Очень часто перед инвестором стоит задача выбора одного из этих вариантов инвестирования первоначальной суммы. Как выбрать вариант, при котором наращенная сумма будет максимальна? Возникает задача сравнения между собой различных процентных и учетных ставок.

Две ставки называются *эквивалентными*, если при одинаковой первоначальной сумме P и на одинаковом периоде начисления n они приводят к одинаковой наращенной сумме S. При сравнении двух ставок из разных классов для одной из них находят эквивалентную ей ставку из другого класса и проводят сравнение двух ставок из одного класса.

§ 7.1. НАХОЖДЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ ПРОСТОЙ УЧЕТНОЙ СТАВКИ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления. При использовании простой процентной ставки i наращенная сумма $S_1 = P(1 + ni)$. При использовании простой учетной ставки d наращенная сумма $S_2 = P/(1 - nd)$.

Так как ставки эквивалентны, то наращенные суммы равны: $S_1 = S_2$, то есть $P(1 + ni) = P/(1 - nd)$.

Отсюда $1 + ni = \dfrac{1}{1 - nd} \Rightarrow ni = \dfrac{1}{1 - nd} - 1 = \dfrac{nd}{1 - nd} \Rightarrow i = \dfrac{d}{1 - nd}$.

Пример 29. Какой вариант инвестирования первоначальной суммы на $n = 0{,}25$ года лучше: под простую процентную ставку 16% годовых или под простую учетную ставку 15% годовых?

Найдем эквивалентную простую процентную ставку для простой учетной ставки $d = 15\%$ годовых на периоде начисления $n = 0{,}25$ года.

$i = \frac{d}{1-nd} = \frac{0{,}15}{1-0{,}25\times0{,}15} \approx 0{,}156$ (= 15,6% годовых) < 0,16.

Лучше вариант с простой процентной ставкой.

Задача 29. Какой вариант инвестирования первоначальной суммы на $n = 0{,}5$ года лучше: под простую процентную ставку 18% годовых или под простую учетную ставку 16% годовых?

Замечание. Выразив из равенства $i = \frac{d}{1-nd}$ ставку d через i ($d = \frac{i}{1+ni}$), мы найдем эквивалентную простую учетную ставку d для простой процентной ставки i.

§ 7.2. НАХОЖДЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления. При использовании простой процентной ставки i наращенная сумма $S_1 = P(1 + ni)$. При использовании сложной процентной ставки $i_{сл}$ наращенная сумма $S_2 = P(1 + i_{сл})^n$.

Так как ставки эквивалентны, то наращенные суммы равны: $S_1 = S_2$, то есть $P(1 + ni) = P(1 + i_{сл})^n$.

Отсюда $1 + ni = (1 + i_{сл})^n \Rightarrow i = ((1 + i_{сл})^n - 1)/n$.

Пример 30. Какой вариант инвестирования первоначальной суммы на $n = 3$ года лучше: под простую процентную ставку 18% годовых или под сложную процентную ставку 15% годовых?

Найдем эквивалентную простую процентную ставку для сложной процентной ставки $i_{сл} = 15\%$ годовых на периоде начисления $n = 3$ года.

$i = ((1 + i_{сл})^n - 1)/n = ((1 + 0{,}15)^3 - 1)/3 \approx 0{,}174$ (= 17,4% годовых) < 0,18. Лучше вариант с простой процентной ставкой.

Задача 30. Какой вариант инвестирования первоначальной суммы на $n = 2$ года лучше: под простую процентную ставку 17% годовых или под сложную процентную ставку 15,5% годовых?

Замечание. Выразив из равенства $1 + ni = (1 + i_{сл})^n$ ставку $i_{сл}$ через i ($i_{сл} = \sqrt[n]{1+ni} - 1$), мы найдем эквивалентную сложную процентную ставку $i_{сл}$ для простой процентной ставки i.

§ 7.3. НАХОЖДЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ НОМИНАЛЬНОЙ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления. При использовании простой процентной ставки i наращенная сумма $S_1 = P(1 + ni)$. При использовании номинальной сложной процентной ставки j (проценты за год начисляются m раз) наращенная сумма $S_2 = P(1 + j/m)^{nm}$.

Так как ставки эквивалентны, то наращенные суммы равны: $S_1 = S_2$, то есть $P(1 + ni) = P(1 + j/m)^{nm}$.

Отсюда $1 + ni = (1 + j/m)^{nm} \Rightarrow i = ((1 + j/m)^{nm} - 1)/n$.

Пример 31. Какой вариант инвестирования первоначальной суммы на $n = 3$ года лучше: под простую процентную ставку 18% годовых или под сложную процентную ставку 15% годовых ежеквартально?

Найдем эквивалентную простую процентную ставку для номинальной сложной процентной ставки $j = 15\%$ годовых (здесь $m = 4$) на периоде начисления $n = 3$ года.

$i = ((1 + j/m)^{nm} - 1)/n = ((1 + 0{,}15/4)^{3\times4} - 1)/3 \approx 0{,}185$ (= 18,5% годовых) > 0,18. Лучше вариант с номинальной сложной процентной ставкой.

Задача 31. Какой вариант инвестирования первоначальной суммы на $n = 2$ года лучше: под простую процентную ставку 19% годовых или под сложную процентную ставку 14% годовых ежемесячно?

Замечание. Выразив из равенства $1 + ni = (1 + j/m)^{nm}$ ставку j через i ($j = m(\sqrt[nm]{1 + ni} - 1)$), мы найдем эквивалентную номинальную сложную процентную ставку j для простой процентной ставки i.

§ 7.4. НАХОЖДЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ НОМИНАЛЬНОЙ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ. ЭФФЕКТИВНАЯ СЛОЖНАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления. При использовании сложной процентной ставки $i_{сл}$ наращенная сумма $S_1 = P(1 + i_{сл})^n$. При использовании номинальной сложной процентной ставки j (проценты за год начисляются m раз) наращенная сумма $S_2 = P(1 + j/m)^{nm}$.

Так как ставки эквивалентны, то наращенные суммы равны: $S_1 = S_2$, то есть $P(1 + i_{сл})^n = P(1 + j/m)^{nm}$.

Отсюда $1 + i_{сл} = (1 + j/m)^m \Rightarrow i_{сл} = (1 + j/m)^m - 1$. Эта формула определяет *эффективную годовую ставку* сложных процентов, эквивалентную номинальной сложной процентной ставке, и не зависит от периода начисления n.

Пример 32. Найдем эффективную годовую ставку сложных процентов, эквивалентную номинальной сложной процентной ставке $j = 10\%$ годовых ежеквартально.

Здесь $m = 4$. Тогда $i_{сл} = (1 + j/m)^m - 1 = (1 + 0{,}1/4)^4 - 1 \approx 0{,}104$ (= 10,4% годовых). Вместо начисления каждый квартал 2,5% можно один раз в год начислять 10,4%. От этого наращенная сумма не изменится.

Задача 32. Найти эффективную годовую ставку сложных процентов, эквивалентную номинальной сложной процентной ставке $j = 12\%$ годовых ежемесячно.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовые функции ($f_x \rightarrow$ *финансовые*). Их количество значительно возрастет после установки надстройки *Пакет анализа* (*Сервис* → *Надстройки* → *Пакет анализа*). В частности, финансовая функция ЭФФЕКТ (EFFECT) возвращает эффективную годовую ставку сложных процентов $i_{сл}$, если заданы *номинальная_ставка* (годовая номинальная сложная процентная ставка j) и *кол_пер* (m, количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты). В примере 32 ЭФФЕКТ (0,1; 4) ≈ 0,104.

§ 7.5. НАХОЖДЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НОМИНАЛЬНОЙ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Выразив из равенства $1 + i_{сл} = (1 + j/m)^m$ ставку j через $i_{сл}$ ($j = m(\sqrt[m]{1 + i_{сл}} - 1)$), мы найдем эквивалентную номинальную ставку сложных процентов (проценты начисляются m раз в году) для сложной процентной ставки $i_{сл}$. Формула не зависит от периода начисления n.

Пример 33. Найдем годовую номинальную сложную процентную ставку (проценты начисляются каждый месяц), эквивалентную сложной процентной ставке $i_{сл} = 15\%$ годовых.

Здесь $m = 12$. Тогда $j = m(\sqrt[m]{1 + i_{сл}} - 1) = 12(\sqrt[12]{1 + 0{,}15} - 1) \approx 0{,}141$ (= 14,1% годовых).

Вместо начисления один раз в год 15% можно начислять каждый месяц $\approx 14{,}1\%/12 = 1{,}175\%$. От этого наращенная сумма не изменится.

Задача 33. Найти годовую номинальную сложную процентную ставку (проценты начисляются каждые полгода), эквивалентную сложной процентной ставке $i_{сл} = 20\%$ годовых.

Замечание 1. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию НОМИНАЛ (NOMINAL) ($f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ НОМИНАЛ), которая возвращает годовую номинальную сложную процентную ставку *j*, если заданы *эффект_ставка* (эффективная годовая ставка сложных процентов) и *кол_пер* (*m*, количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты). В примере 33 НОМИНАЛ (0,15; 12) $\approx 0{,}141$.

Замечание 2. Аналогично рассмотренным методом можно найти эквивалентные ставки для различных вариантов процентных и учетных ставок.

Глава 8

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

§ 8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Аннуитет (*финансовая рента*) — это ряд последовательных платежей через одинаковые промежутки времени.

Пример 34. Регулярные взносы в пенсионный фонд — это пример аннуитета.

Задача 34. Привести пример аннуитета.

R_j — это величина отдельного платежа ренты. *Срок ренты* t — это время от начала реализации ренты до момента последнего платежа. *Интервал ренты* — это время между двумя последовательными платежами. Если все платежи равны между собой, то это *постоянная рента*, иначе — *переменная рента*.

Существуют ренты *постнумерандо* (все платежи осуществляются в конце интервалов ренты) и *пренумерандо* (все платежи осуществляются в начале интервалов ренты). Иногда ренты пренумерандо называют *приведенными*.

Для расчета наращения или дисконтирования платежей используется сложная процентная ставка i.

Наращенная (будущая) сумма ренты S — это все платежи вместе с процентами на дату последней выплаты.

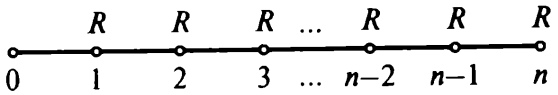
Современная (приведенная) стоимость ренты — это все платежи вместе с процентами, пересчитанные на начальный момент времени ренты с помощью операции математического дисконтирования (см. § 4.1).

Существуют ренты *верные* (выплата не ограничена никакими условиями) и *условные* (выплата обусловлена наступлением какого-то события). Страховые взносы — это пример условной ренты. Срок реализации *отложенных рент* откладывается на некоторое время.

Пусть p — число рентных платежей в году, а число m показывает, сколько раз в году начисляются проценты. Ренты, для которых $p = m$, называются *простыми*. Ренты, для которых $p \neq m$, называются *общими*.

§ 8.2. НАХОЖДЕНИЕ НАРАЩЕННОЙ СУММЫ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ ПОСТНУМЕРАНДО

Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в конце каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты.



Платеж в конце 1-го года даст наращенную сумму $R(1 + i)^{n-1}$. Платеж в конце 2-го года даст наращенную сумму $R(1 + i)^{n-2}$. Платеж в конце 3-го года даст наращенную сумму $R(1 + i)^{n-3}$. И т. д.

Наращенная (будущая) сумма ренты $S = R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-3} + \ldots + R(1 + i) + R$. Мы получили сумму n первых членов геометрической прогрессии с $b_1 = R$ и знаменателем $q = 1 + i$.

Тогда $S = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = R \dfrac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} = R \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}$.

Пример 35. Вкладчик в течение $n = 5$ лет вносит в банк $R = 1000$ руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке $i = 15\%$ годовых.

Тогда наращенная (будущая) сумма ренты:

$$S = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = 1000 \frac{(1 + 0{,}15)^5 - 1}{0{,}15} \approx 6742{,}38 \text{ руб.}$$

Задача 35. Вкладчик в течение $n = 3$ лет вносит в банк $R = 1200$ руб. Проценты на вклад начисляются по сложной процентной ставке $i = 14\%$ годовых. Найти наращенную (будущую) сумму ренты.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию БС, которая возвращает наращенную (будущую) сумму ренты S на основе периодических постоянных (равных по величине) платежей R и постоянной процентной ставки i.

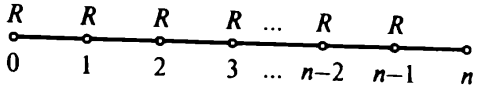
$f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *БС* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *Ставка* — это процентная ставка за период (у нас это i). *Кпер* — это общее число платежей по аннуитету. *Плт* — это выплата в каждый период (у нас это R, берем со знаком «–»).

Пс — это приведенная стоимость *A* ренты (если не указана, то по умолчанию полагается равной нулю). *Тип* равен 0 (для ренты постнумерандо) или 1 (для ренты пренумерандо). Если *Тип* не указан, то по умолчанию полагается равным 0. *ОК.*

В примере 35 S = БС(0,15; 5; −1000) ≈ 6742,38 руб.

§ 8.3. НАХОЖДЕНИЕ НАРАЩЕННОЙ СУММЫ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ ПРЕНУМЕРАНДО

Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в начале каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты.



Платеж в начале 1-го года даст наращенную сумму $R(1+i)^n$. Платеж в начале 2-го года даст наращенную сумму $R(1+i)^{n-1}$. Платеж в начале 3-го года даст наращенную сумму $R(1+i)^{n-2}$. И т. д.

Наращенная (будущая) сумма ренты $S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i)^2 + R(1+i)$. Мы получили сумму n первых членов геометрической прогрессии с $b_1 = R(1+i)$ и знаменателем $q = 1+i$.

Тогда $S = b_1\dfrac{q^n-1}{q-1} = R(1+i)\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = R(1+i)\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$.

Пример 36. Определим наращенную (будущую) сумму в примере 35 для ренты пренумерандо.

$$S = R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} = 1000(1+0{,}15)\frac{(1+0{,}15)^5-1}{0{,}15} \approx 7753{,}74 \text{ руб.}$$

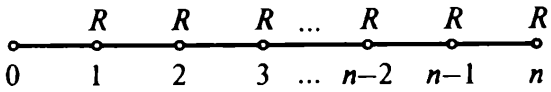
Задача 36. Определить наращенную (будущую) сумму в задаче 35 для ренты пренумерандо.

Замечание. При решении примера 36 можно воспользоваться финансовой функцией БС мастера функций f_x пакета Excel. S = = БС (0,15; 5; −1000; ; 1) ≈ 7753,74 руб.

Из сравнения рент постнумерандо и пренумерандо ясно, что все формулы для ренты пренумерандо получаются из формул для ренты постнумерандо подстановкой вместо R величины $R(1+i)$. Поэтому в дальнейшем будем работать в основном с рентой постнумерандо.

§ 8.4. НАХОЖДЕНИЕ СОВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ДЛЯ ПРОСТОЙ РЕНТЫ

Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в конце каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты. Определим современную стоимость ренты, то есть используем операцию математического дисконтирования (см. § 4.1).



Платеж в конце 1-го года даст современную стоимость $R/(1 + i)$. Платеж в конце 2-го года даст современную стоимость $R/(1 + i)^2$. Платеж в конце 3-го года даст современную стоимость $R/(1 + i)^3$. И т. д.

Современная стоимость ренты $A = R/(1 + i) + R/(1 + i)^2 + R/(1 + i)^3 + \ldots + R/(1 + i)^{n-1} + R/(1 + i)^n$. Мы получили сумму n первых членов геометрической прогрессии с $b_1 = R/(1 + i)$ и знаменателем $q = 1/(1 + i)$.

Тогда $A = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = \dfrac{R}{1 + i} \dfrac{1/(1 + i)^n - 1}{1/(1 + i) - 1} = R \dfrac{1 - 1/(1 + i)^n}{i}$.

Это современная стоимость простой ренты постнумерандо. Подставив в эту формулу вместо R величину $R(1 + i)$, мы получим современную стоимость простой ренты пренумерандо: $A = R(1 + i) \dfrac{1 - 1/(1 + i)^n}{i}$.

Пример 37. Определим современную стоимость простой ренты из примера 35.

$$A = R \frac{1 - 1/(1 + i)^n}{i} = 1000 \frac{1 - 1/(1 + 0{,}15)^5}{0{,}15} \approx 3352{,}16 \text{ руб.}$$

Задача 37. Определить современную стоимость простой ренты из задачи 35.

Пример 38. Определим современную стоимость простой ренты из примера 36.

$$A = R(1 + i) \frac{1 - 1/(1 + i)^n}{i} = 1000(1 + 0{,}15) \frac{1 - 1/(1 + 0{,}15)^5}{0{,}15} \approx$$

$\approx 3854{,}98$ руб.

Задача 38. Определить современную стоимость простой ренты из задачи 36.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию ПС, которая возвращает приведенную (к текущему моменту) стоимость инвестиций A.

$f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *ПС* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Бс* (необязательный аргумент) указывается требуемое значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты (если не указано, то по умолчанию полагается равным нулю). *ОК*.

В примере 37 ПС(0,15; 5; −1000) ≈ 3352,16 руб. В примере 38 ПС(0,15; 5; −1000; ; 1) ≈ 3854,98 руб.

§ 8.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ОТДЕЛЬНОГО ПЛАТЕЖА ПРОСТОЙ РЕНТЫ

Зная процентную ставку i, количество выплат n и наращенную сумму S (или современную стоимость A) простой ренты, можно определить величину отдельного платежа R.

Для простой ренты постнумерандо наращенная (будущая) сумма ренты $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$. Отсюда $R = \dfrac{Si}{(1+i)^n - 1}$.

Пример 39. Определим размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке $i = 12\%$ годовых для накопления через $n = 3$ года суммы $S = 50000$ руб.

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{50000 \times 0{,}12}{(1+0{,}12)^3 - 1} \approx 14817{,}45 \text{ руб.}$$

Задача 39. Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке $i = 14\%$ годовых для накопления через $n = 4$ года суммы $S = 70000$ руб.

Для простой ренты пренумерандо наращенная (будущая) сумма ренты $S = R(1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Отсюда $R = \dfrac{Si}{(1+i)((1+i)^n - 1)}$.

Пример 40. Пусть в примере 39 платежи осуществляются в начале года.

Тогда $R = \dfrac{Si}{(1+i)((1+i)^n - 1)} = \dfrac{50000 \times 0{,}12}{(1+0{,}12)((1+0{,}12)^3 - 1)} \approx$

$\approx 13229{,}87$ руб.

Задача 40. Решить задачу 39 при условии, что платежи осуществляются в начале года.

Для простой ренты постнумерандо современная стоимость $A = R\dfrac{1 - 1/(1+i)^n}{i}$. Отсюда $R = \dfrac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n}$.

Пример 41. Взят кредит на сумму $A = 50000$ руб. сроком на $n = 3$ года под 14% годовых.

Тогда размер ежегодных погасительных платежей в конце года

$$R = \frac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n} = \frac{50000 \times 0{,}14}{1 - 1/(1+0{,}14)^3} \approx 21536{,}57 \text{ руб.}$$

Задача 41. Взят кредит на сумму $A = 60000$ руб. сроком на $n = 4$ года под 15% годовых. Найти размер ежегодных погасительных платежей в конце года.

Для простой ренты пренумерандо современная стоимость $A = R(1+i)\dfrac{1 - 1/(1+i)^n}{i}$. Отсюда $R = \dfrac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)}$.

Пример 42. Пусть в примере 41 платежи осуществляются в начале каждого года.

Тогда $R = \dfrac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)} = \dfrac{50000 \times 0{,}14}{(1+0{,}14)(1 - 1/(1+0{,}14)^3)} \approx$ $\approx 18891{,}73$ руб.

Задача 42. Решить задачу 41 при условии, что платежи осуществляются в начале каждого года.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию ПЛТ, которая возвращает сумму периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки.

$f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *ПЛТ* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

В примере 39 ПЛТ(0,12; 3; ; 50000) $\approx -14817{,}45$ руб. В примере 40 ПЛТ(0,12; 3; ; 50000; 1) $\approx -13229{,}87$ руб. В примере 41 ПЛТ(0,14; 3; 50000) $\approx -21536{,}57$ руб. В примере 42 ПЛТ(0,14; 3; 50000; ; 1) $\approx$ $\approx -18891{,}73$ руб.

§ 8.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА ПРОСТОЙ РЕНТЫ

Зная величину отдельного платежа R, процентную ставку i и наращенную сумму S (или современную стоимость A) простой ренты, можно определить количество выплат n.

Для простой ренты постнумерандо наращенная (будущая) сумма ренты $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$. Отсюда $(1+i)^n - 1 = Si/R \Rightarrow (1+i)^n = 1 + Si/R$ $\Rightarrow n\ln(1+i) = \ln(1+Si/R) \Rightarrow n = \dfrac{\ln(1+Si/R)}{\ln(1+i)}$.

Подставив в последнюю формулу вместо R выражение $R(1+i)$, мы получим срок ренты пренумерандо: $n = \ln\left(1 + \dfrac{Si}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i)$.

Пример 43. Размер ежегодных платежей $R = 5000$ руб., процентная ставка $i = 12\%$ годовых, наращенная сумма $S = 30000$ руб. Определим сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

Для ренты постнумерандо $n = \dfrac{\ln(1+Si/R)}{\ln(1+i)} =$

$= \dfrac{\ln(1 + 30000\times0{,}12/5000)}{\ln(1+0{,}12)} \approx 4{,}8$ лет.

Для ренты пренумерандо $n = \ln\left(1 + \dfrac{Si}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i) =$

$= \ln\left(1 + \dfrac{30000\times0{,}12}{5000(1+0{,}12)}\right)/\ln(1+0{,}12) \approx 4{,}4$ лет.

Задача 43. Размер ежегодных платежей $R = 8000$ руб., процентная ставка $i = 14\%$ годовых, наращенная сумма $S = 40000$ руб. Определить сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

Для простой ренты постнумерандо современная стоимость $A = R\dfrac{1 - 1/(1+i)^n}{i}$. Отсюда $n = -\dfrac{\ln(1 - Ai/R)}{\ln(1+i)}$.

Подставив в последнюю формулу вместо R выражение $R(1+i)$, мы получим срок ренты пренумерандо: $n = -\ln\left(1 - \dfrac{Ai}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i)$.

Пример 44. Определим сроки погашения кредита $A = 30000$ руб. при ежегодных платежах $R = 9000$ руб. и процентной ставке $i = 15\%$ годовых для рент постнумерандо и пренумерандо.

Для ренты постнумерандо $n = -\ln\left(1 - \dfrac{Ai}{R}\right)/\ln(1+i) =$

$= -\ln\left(1 - \dfrac{30000\times0{,}15}{9000}\right)/\ln(1+0{,}15) \approx 5$ лет.

Для ренты пренумерандо $n = -\ln\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right)/\ln(1+i) =$

$= -\ln\left(1 - \frac{30000\times0{,}15}{9000(1+0{,}15)}\right)/\ln(1+0{,}15) \approx 4{,}1$ лет.

Задача 44. Определить сроки погашения кредита $A = 45000$ руб. при ежегодных платежах $R = 12000$ руб. и процентной ставке $i = 11\%$ годовых для рент постнумерандо и пренумерандо.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию КПЕР, которая возвращает общее количество периодов выплаты n для аннуитета на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

$f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *КПЕР* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *ОК*.

В примере 43 КПЕР(0,12; –5000; ; 30000) ≈ 4,8 и КПЕР(0,12; –5000; ; 30000; 1) ≈ 4,4. В примере 44 КПЕР(0,15; –9000; 30000) ≈ 5 и КПЕР(0,15; –9000; 30000; ; 1) ≈ 4,1.

§ 8.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ПРОСТОЙ РЕНТЫ

Зная величину отдельного платежа R, количество выплат n и наращенную сумму S (или современную стоимость A) простой ренты, можно попытаться найти процентную ставку. Но получается нелинейное уравнение.

Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию СТАВКА, которая возвращает процентную ставку по аннуитету за один период. Значение функции вычисляется путем итерации и может давать нулевое значение или несколько значений. Если последовательные результаты функции СТАВКА не сходятся с точностью 0,0000001 после 20 итераций, то СТАВКА возвращает сообщение об ошибке #число!.

$f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *СТАВКА* $\rightarrow$ *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Предположение* указывается предполагаемая величина процентной ставки (если значение не указано, то по умолчанию оно равно 10%). *ОК*.

Пример 45. Определим, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год $R = 5000$ руб., чтобы через $n = 5$ лет накопить сумму $S = 40000$ руб.

Для ренты постнумерандо СТАВКА(5; −5000; ; 40000) = 24%.
Для ренты пренумерандо СТАВКА(5; −5000; ; 40000; 1) = 16%.

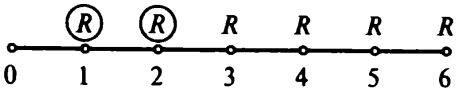
Задача 45. Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год $R = 6000$ руб., чтобы через $n = 4$ года накопить сумму $S = 35000$ руб.

§ 8.8. ОТЛОЖЕННАЯ РЕНТА

Срок реализации отложенных рент откладывается на некоторое время — *период отсрочки.*

Пример 46. Простая рента с ежегодными платежами $R = 1000$ руб., процентной ставкой $i = 12\%$ годовых и сроком $n = 4$ года отложена на 2 года. Найдем наращенную сумму S и современную стоимость A ренты.

Добавим к нашей ренте на бумаге платежи $R = 1000$ руб. в конце 1-го и 2-го годов.



Получили простую ренту сроком $n_1 = 6$ лет. Ее наращенная сумма

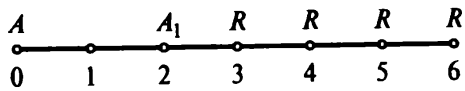
$$S_1 = R\frac{(1+i)^{n_1}-1}{i} = 1000\frac{(1+0{,}12)^6-1}{0{,}12} \approx 8115{,}19 \text{ руб.}$$

Но эта простая рента состоит из простой ренты сроком $n_2 = 2$ года (добавленные на бумаге платежи) и нашей отложенной ренты.

Для добавленной ренты наращенная сумма в конце 2-го года $S_2 = R\frac{(1+i)^{n_2}-1}{i} = 1000\frac{(1+0{,}12)^2-1}{0{,}12} = 2120$ руб., а в конце 6-го года — $S_3 = S_2(1+i)^{6-2} = 2120(1+0{,}12)^4 \approx 3335{,}86$ руб.

Отсюда $S = S_1 - S_3 = 8115{,}19 - 3335{,}86 = 4779{,}33$ руб.

Для нахождения современной стоимости A отложенной ренты можно применить аналогичный прием. Но мы поступим иначе.



Найдем приведенную стоимость нашей ренты через 2 года:

$$A_1 = R\frac{1-1/(1+i)^n}{i} = 1000\frac{1-1/(1+0{,}12)^4}{0{,}12} \approx 3037{,}35 \text{ руб.}$$

А теперь применим к сумме A_1 операцию математического дисконтирования со сложной процентной ставкой $i = 12\%$ годовых (см. § 4.1): $A = A_1/(1+i)^2 = 3037{,}35/(1+0{,}12)^2 \approx 2421{,}36$ руб.

Задача 46. Простая рента с ежегодными платежами $R = 1200$ руб., процентной ставкой $i = 14\%$ годовых и сроком $n = 5$ лет отложена на 3 года. Найти наращенную сумму S и современную стоимость A ренты.

§ 8.9. СВЕДЕНИЕ ОБЩЕЙ РЕНТЫ К ПРОСТОЙ РЕНТЕ

Пусть p — число рентных платежей в году, а число m показывает, сколько раз в году начисляются проценты. Для общей ренты $p \neq m$, а для простой ренты $p = m$.

Для простой ренты довольно несложно определяются все ее параметры. Поэтому для вычисления параметров общей ренты очень важно уметь преобразовывать общую ренту в простую ренту.

Пусть W и R — величины выплат общей и простой рент соответственно, p — число рентных платежей в году для общей ренты, m — число интервалов начисления процентов в году, j и i — процентные ставки за интервал начисления процентов общей и простой рент соответственно, n — общее число интервалов начисления процентов.

Данные ренты эквивалентны, то есть процентные ставки за периоды рент совпадают и эквивалентные этим рентам значения, соответствующие одному и тому же моменту времени, совпадают. Тогда $(1 + j)^p = (1 + i)^m \Rightarrow j = (1 + i)^{m/p} - 1$.

Наращенные суммы для обеих рент одинаковы:

$$R\frac{(1+i)^m - 1}{i} = W\frac{(1+j)^p - 1}{j} \Rightarrow \frac{R}{i} = \frac{W}{j} \Rightarrow R = \frac{Wi}{j} = \frac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1}.$$

Пример 47. Заменим общую ренту сроком 3 года с выплатами по $W = 15000$ руб. в конце каждого полугодия и начислением процентов по ставке 12% годовых ежеквартально простой рентой с поквартальными выплатами.

Здесь $p = 2$, $m = 4$, $i = 0{,}12/m = 0{,}12/4 = 0{,}03$.

Поквартальные выплаты $R = \dfrac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1} = \dfrac{15000 \times 0{,}03}{(1 + 0{,}03)^{4/2} - 1} \approx$

$\approx 7389{,}16$ руб.

Задача 47. Заменить общую ренту сроком 3 года с выплатами по $W = 20000$ руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 15% годовых ежемесячно простой рентой с ежемесячными выплатами.

§ 8.10. НАРАЩЕННАЯ СУММА ОБЩЕЙ РЕНТЫ

Подставив в формулу для наращенной суммы простой ренты $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ выражение $R = \dfrac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1}$, мы найдем наращенную сумму общей ренты:

$$S = \frac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = W\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p} - 1}.$$

Здесь n — это общее количество интервалов начисления процентов за весь срок ренты.

Пример 48. Найдем наращенную сумму общей ренты сроком 3 года с выплатами по $W = 5000$ руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 14% годовых по полугодиям.

Здесь $p = 4$, $m = 2$, $i = 0{,}14/m = 0{,}14/2 = 0{,}07$, $n = 3m = 3\times 2 = 6$.

Тогда $S = W\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p} - 1} = 5000\dfrac{(1+0{,}07)^6 - 1}{(1+0{,}07)^{2/4} - 1} \approx 72763{,}56$ руб.

Задача 48. Найти наращенную сумму общей ренты сроком 2 года с выплатами по $W = 7000$ руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 11% годовых ежемесячно.

§ 8.11. СОВРЕМЕННАЯ СТОИМОСТЬ ОБЩЕЙ РЕНТЫ

Подставив в формулу для современной стоимости простой ренты $A = R\dfrac{1 - 1/(1+i)^n}{i}$ выражение $R = \dfrac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1}$, мы найдем современную стоимость общей ренты:

$$A = \frac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1} \times \frac{1 - 1/(1+i)^n}{i} = W\frac{1 - 1/(1+i)^n}{(1+i)^{m/p} - 1}.$$

Пример 49. Найдем современную стоимость общей ренты из примера 48.

$$A = W\frac{1 - 1/(1+i)^n}{(1+i)^{m/p} - 1} = 5000\frac{1 - 1/(1+0{,}07)^6}{(1+0{,}07)^{2/4} - 1} \approx 48485{,}43 \text{ руб.}$$

Задача 49. Найти современную стоимость общей ренты из задачи 48.

§ 8.12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТОЙ РЕНТЫ В ОБЩУЮ РЕНТУ

Необходимость в таком преобразовании возникает, когда нужно найти величину выплат общей ренты по заданному значению наращенной суммы или современной стоимости. $R = \dfrac{Wi}{(1+i)^{m/p}-1}$. Отсюда $W = R\dfrac{(1+i)^{m/p}-1}{i}$.

Пример 50. Выдан кредит $A = 40000$ руб. на 2 года по ставке 12% годовых ежемесячно. Определим размер поквартальных платежей W.

Здесь $p = 4$, $m = 12$, $i = 0{,}12/m = 0{,}12/12 = 0{,}01$, $n = 2m = 2\times12 = 24$.

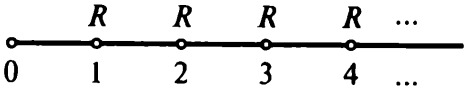
$$R = \frac{Ai}{1-1/(1+i)^n} = \frac{40000\times0{,}01}{1-1/(1+0{,}01)^{24}} \approx 1882{,}94 \text{ руб.}$$

$$W = R\frac{(1+i)^{m/p}-1}{i} = 1882{,}94\,\frac{(1+0{,}01)^{12/4}-1}{0{,}01} \approx 5705{,}5 \text{ руб.}$$

Задача 50. Выдан кредит $A = 50000$ руб. на 3 года по ставке 16% годовых ежеквартально. Определить размер полугодовых платежей W.

§ 8.13. ПРОСТАЯ БЕССРОЧНАЯ РЕНТА

Бессрочная рента не ограничена никаким сроком, то есть срок ренты $n \to \infty$.



Современная стоимость простой бессрочной ренты $A = \lim\limits_{n\to\infty}\left(R\dfrac{1-1/(1+i)^n}{i}\right) = R/i$. Отсюда $R = Ai$.

Пример 51. Инвестирование суммы $A = 40000$ руб. под $i = 5\%$ годовых обеспечивает выплаты $R = Ai = 40000 \times 0{,}05 = 2000$ руб. в конце каждого года.

Задача 51. Сумму $A = 50000$ руб. инвестировали под $i = 4\%$ годовых. Найти размер ежегодных выплат в конце каждого года.

Бессрочная рента пренумерандо отличается от бессрочной ренты постнумерандо только платежом в момент времени $t = 0$. Поэтому для простой бессрочной ренты пренумерандо современная стоимость $A = R + R/i$.

§ 8.14. ОБЩАЯ БЕССРОЧНАЯ РЕНТА

Общая бессрочная рента — это бессрочная рента, для которой период выплат отличается от периода начисления процентов.

Пример 52. Найдем современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по $W = 5000$ руб. в конце каждого квартала и начислением процентов по ставке 12% годовых ежемесячно.

Здесь $p = 4$, $m = 12$, $i = 0{,}12/m = 0{,}12/12 = 0{,}01$.

$$R = \frac{Wi}{(1+i)^{m/p} - 1} = \frac{5000 \times 0{,}01}{(1+0{,}01)^{12/4} - 1} \approx 1650{,}11 \text{ руб.}$$

Тогда современная стоимость $A = R/i = 1650{,}11/0{,}01 = 165011$ руб.

Задача 52. Найти современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по $W = 8000$ руб. в конце каждого полугодия и начислением процентов по ставке 16% годовых ежеквартально.

§ 8.15. БЕССРОЧНАЯ РЕНТА ПРЕНУМЕРАНДО

Бессрочная рента пренумерандо отличается от бессрочной ренты постнумерандо только платежом в момент времени $t = 0$. Поэтому для простой бессрочной ренты пренумерандо современная стоимость $A = R + R/i$, а для общей бессрочной ренты пренумерандо современная стоимость $A = W + R/i = W + \dfrac{Wi}{i((1+i)^{m/p} - 1)} = W + \dfrac{W}{(1+i)^{m/p} - 1} = \dfrac{W}{1 - 1/(1+i)^{m/p}}$.

Пример 53. Найдем современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по $W = 10000$ руб. в начале каждого квартала и начислением процентов по ставке 18% годовых по полугодиям.

Здесь $p = 4$, $m = 2$, $i = 0{,}18/m = 0{,}18/2 = 0{,}09$.

Современная стоимость $A = \dfrac{W}{1 - 1/(1+i)^{m/p}} = \dfrac{10000}{1 - 1/(1+0{,}09)^{2/4}} \approx$

$\approx 237114{,}52$ руб.

Задача 53. Найти современную стоимость общей бессрочной ренты с выплатами по $W = 9000$ руб. в начале каждого полугодия и процентной ставкой 12% годовых ежеквартально.

Глава 9

АРИФМЕТИКА ИПОТЕКИ

Ипотека — это кредитование под залог жилья. Как начисляются и уплачиваются проценты? Каков план погашения долга?

§ 9.1. ВАРИАНТ 1: АННУИТЕТ

Пример 54. Банк выдает кредит на сумму $A = 30000$ долл., срок $n = 5$ лет, процентная ставка $i = 5\%$ годовых. Составим план погашения долга.

Один из возможных вариантов — простая рента постнумерандо. Известны современная стоимость ренты A, срок n и процентная ставка i. Тогда (см. § 8.5) ежегодный платеж $R = \dfrac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n} = \dfrac{30000 \times 0{,}05}{1 - 1/(1+0{,}05)^5} \approx 6929{,}24$ долл. Всего за 5 лет будет выплачено $5 \times 6929{,}24 = 34646{,}2$ долл.

Схема типична для западного банка. Можно рассмотреть в качестве вариантов простую ренту пренумерандо или общую ренту.

Задача 54. Банк выдает кредит на сумму $A = 40000$ долл., срок $n = 10$ лет, процентная ставка $i = 10\%$ годовых. Составить план погашения долга с помощью простой ренты постнумерандо.

§ 9.2. ВАРИАНТ 2: СПРАВЕДЛИВЫЙ, НО НЕ ОЧЕНЬ УДОБНЫЙ

Кредит погашается равномерно с уплатой процентов на остаток долга. Платеж в j-й год определяется формулой A/n ($1/n$-я часть суммы кредита) + $iA(n + 1 - j)/n$ ($i\%$ от остатка долга на начало j-го года).

Пример 55. Применим этот вариант в примере 54. Заполним таблицу.

Год	1/n-я часть суммы кредита	5% от остатка долга	Суммарная выплата	Остаток долга
0	0	0	0	30000
1	6000	1500	7500	24000
2	6000	1200	7200	18000
3	6000	900	6900	12000
4	6000	600	6600	6000
5	6000	300	6300	0
Сумма	30000	4500	34500	

Для нулевого года указан только остаток долга.

Во 2-м столбце указана $1/n = 1/5$-я часть кредита.

Каждое число 3-го столбца равно 5% от числа из последнего столбца предыдущей строки.

4-й столбец (выплата в j-м году) — это сумма соответствующих чисел из 2-го и 3-го столбцов.

Каждое число последнего столбца есть разность числа из последнего столбца предыдущей строки и числа из 2-го столбца этой же строки.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Всего за 5 лет будет выплачено 34500 долл. Это несколько меньше, чем в предыдущем варианте (поэтому вариант справедливый). Но выплаты смещены к началу срока погашения кредита (поэтому для заемщика вариант не очень удобный). Схема типична для российского банка.

Задача 55. Применить этот вариант в задаче 54.

§ 9.3. ВАРИАНТ 3: ПРОСТОЙ, НО ГРАБИТЕЛЬСКИЙ

К основной сумме долга прибавляются простые проценты за 5 лет. И все это делится на срок погашения кредита. Такова ежегодная выплата.

Пример 56. Применим этот вариант в примере 54.

$(30000 + 0{,}05 \times 5 \times 30000)/5 = 37500/5 = 7500$ долл.

Всего за 5 лет будет выплачено 37500 долл. Здесь заемщик платит проценты на всю сумму кредита в течение всего срока погашения, даже на ту часть долга, которую он уже вернул.

Задача 56. Что обещает грабительский вариант в задаче 54?

§ 9.4. ВАРИАНТ 4: «ХВОСТ», ПОГАШАЕМЫЙ В КОНЦЕ СРОКА

Заемщик вносит в течение $n - 1$ года определенную фиксированную сумму плюс проценты на остаток долга, а в последний год возвращает остаток долга и проценты по нему.

Пример 57. Применим этот вариант в примере 54. Пусть размер ежегодного платежа равен 5000 долл.

Год	Погашение кредита	5% от остатка долга	Суммарная выплата	Остаток долга
0	0	0	0	30000
1	5000	1500	6500	25000
2	5000	1250	6250	20000
3	5000	1000	6000	15000
4	5000	750	5750	10000
5	10000	500	10500	0
Сумма	30000	5000	35000	

Задача 57. Применить этот вариант в задаче 54, приняв размер основного ежегодного платежа (без процентов) 3000 долл.

Глава 10

СТАТИСТИКА КРЕДИТА

Кредит — это предоставление финансовых ресурсов одним хозяйствующим субъектом другому хозяйствующему субъекту на основе возвратности, на какой-либо срок и с выплатой процента.

Кредиты бывают *краткосрочными* (на срок до одного года), *среднесрочными* (на срок от одного года до пяти лет) и *долгосрочными* (на срок свыше пяти лет).

Благодаря кредиту в хозяйстве активно используются средства, высвобожденные в ходе работы предприятий, в процессе выполнения государственного бюджета, а также сбережения граждан и ресурсы банков.

Средний размер кредита равен $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} P_i t_i / \sum_{i=1}^{n} t_i$, где P_i — размер i-го кредита, t_i — срок i-го кредита, n — число выданных кредитов.

Средний срок пользования ссудами $\overline{t}$ — это время, в течение которого все ссуды оборачиваются один раз при условии их непрерывной оборачиваемости. Средний срок пользования ссудами определяется по следующим формулам: $\overline{t} = \sum_{i=1}^{n} P_i t_i / \sum_{i=1}^{n} P_i$ или $\overline{t} = \sum_{i=1}^{n} P_i / \sum_{i=1}^{n} P_i / t_i$.

Среднее число оборотов ссуд за год $\overline{m}$ определяется по следующим формулам: $\overline{m} = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i / \sum_{i=1}^{n} P_i = K/\overline{t}$, где $m_i = K/t_i$ — число оборотов i-й ссуды за год, K — число дней (или месяцев) в году.

Пример 58. Банк выдал предприятию три кредита.

Номер ссуды	Размер ссуды, тыс. руб.	Срок ссуды, мес.
1	110	5
2	60	6
3	70	2

Определим средний размер кредита, средний срок пользования ссудами, среднее число оборотов ссуд за год.

Заполним таблицу.

Номер ссуды	P_i	t_i	$P_i t_i$
1	110	5	550
2	60	6	360
3	70	2	140
Сумма	240	13	1050

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых трех столбцов взяты из условия. 4-й столбец равен произведению 2-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Средний размер кредита равен $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} P_i t_i / \sum_{i=1}^{n} t_i = 1050/13 \approx 80{,}77$ тыс. руб.

Средний срок пользования ссудами равен $\overline{t} = \sum_{i=1}^{n} P_i t_i / \sum_{i=1}^{n} P_i =$ $= 1050/240 = 4{,}375$ мес.

Среднее число оборотов ссуд за год равно $\overline{m} = K/\overline{t} = 12/4{,}375 \approx$ $\approx 2{,}74$.

Задача 58. Банк выдал предприятию три кредита.

Номер ссуды	Размер ссуды, тыс. руб.	Срок ссуды, мес.
1	120	7
2	50	3
3	60	4

Определить средний размер кредита, средний срок пользования ссудами, среднее число оборотов ссуд за год.

Средняя процентная ставка по кредитам $\overline{i}$ определяется по следующей формуле: $\overline{i} = \sum_{j=1}^{n} i_j P_j t_j / \sum_{j=1}^{n} P_j t_j$, где i_j — годовая процентная ставка j-й ссуды, t_j — срок j-й ссуды в годах.

Пример 59. На основании приведенных данных определим среднюю процентную ставку по кредитам.

Размер кредита, тыс. руб.	Срок кредита, лет	Процентная ставка, % годовых
60	0,5	12
110	0,25	11

Заполним таблицу.

Номер ссуды	P_j	t_j	i_j	$P_j t_j$	$i_j P_j t_j$
1	60	0,5	0,12	30	3,6
2	110	0,25	0,11	27,5	3,025
Сумма	–	–	–	57,5	6,625

Поясним, как заполняется таблица.

Значения первых четырех столбцов взяты из условия. 5-й (6-й) столбец равен произведению 2-го и 3-го (4-го и 5-го) столбцов.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Средняя процентная ставка по кредитам равна $\overline{i} = \sum_{j=1}^{n} i_j P_j t_j / \sum_{j=1}^{n} P_j t_j =$ $= 6{,}625/57{,}5 \approx 0{,}1152$ (= 11,52% годовых).

Задача 59. На основании приведенных данных определить среднюю процентную ставку по кредитам.

Размер кредита, тыс. руб.	Срок кредита, лет	Процентная ставка, % годовых
70	2	12
120	3	14

Самостоятельным объектом в статистике кредита является изучение просроченных ссуд по объему, составу, динамике.

Абсолютная сумма просроченных кредитов банку $P_{пр}$ — это сумма остатков задолженности по кредитам банка на конец года: $P_{пр} = \sum_{i=1}^{n} P_{inp}$.

Различают следующие относительные показатели просроченной задолженности:

а) *по сумме* $k_{пр(P)} = \sum_{i=1}^{n} P_{inp} / \sum_{i=1}^{n} P_i$;

б) *по сроку* $k_{пр(t)} = \sum_{i=1}^{n} t_{inp} / \sum_{i=1}^{n} t_i$, где t_{inp} — число просроченных дней по погашению i-го кредита;

в) *по сумме и сроку* $k_{пр} = \sum_{i=1}^{n} P_{inp} t_{inp} / \sum_{i=1}^{n} P_i t_i$.

Пример 60. На основании приведенных данных определим по банку в целом на 1 января 2006 года абсолютную сумму просроченных кредитов и относительные показатели просроченной задолженности по сумме, по сроку, по сумме и сроку.

Номер кредита	Сумма кредита, тыс. руб.	Срок кредита, дни	Просроченная задолженность на 1 января 2006 г., тыс. руб.	Число просроченных дней на 1 января 2006 г.
1	50	90	10	5
2	80	60	16	20

Заполним таблицу.

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых пяти столбцов взяты из условия. 6-й (7-й) столбец равен произведению 4-го и 5-го (2-го и 3-го) столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Номер кредита	P_i	t_i	P_{inp}	t_{inp}	$P_{inp}t_{inp}$	$P_i t_i$
1	50	90	10	5	50	4500
2	80	60	16	20	320	4800
Сумма	130	150	26	25	370	9300

Абсолютная сумма просроченных кредитов банку $P_{пр} = \sum_{i=1}^{n} P_{inp} =$ = 26 тыс. руб.

Относительные показатели просроченной задолженности:

а) по сумме $k_{пр(P)} = \sum_{i=1}^{n} P_{inp} / \sum_{i=1}^{n} P_i = 26/130 = 0{,}2$ (= 20%);

б) по сроку $k_{пр(t)} = \sum_{i=1}^{n} t_{inp} / \sum_{i=1}^{n} t_i = 25/150 \approx 0{,}167$ (= 16,7%);

в) по сумме и сроку $k_{пр} = \sum_{i=1}^{n} P_{inp} t_{inp} / \sum_{i=1}^{n} P_i t_i = 370/9300 \approx 0{,}040$ (= 4,0%).

Задача 60. На основании приведенных данных определить по банку в целом на 1 января 2006 года абсолютную сумму просроченных кредитов и относительные показатели просроченной задолженности по сумме, по сроку, по сумме и сроку.

Номер кредита	Сумма кредита, тыс. руб.	Срок кредита, дни	Просроченная задолженность на 1 января 2006 г., тыс. руб.	Число просроченных дней на 1 января 2006 г.
1	60	180	11	6
2	90	160	18	22

Выявление статистических закономерностей в поведении ссудной задолженности является важным средством улучшения управления кредитными отношениями.

Глава 11

СТАТИСТИКА ОБОРАЧИВАЕМОСТИ КРЕДИТА

Среднее число оборотов кредита $\overline{n}$ характеризует число оборотов, совершаемых краткосрочным кредитом за изучаемый период, и определяется по следующей формуле: $\overline{n} = O_n/\overline{O}$, где O_n — *оборот кредита по погашению* (сумма погашенных кредитов), $\overline{O}$ — средние остатки кредитов, не возвращенных в срок.

Изучение динамики оборачиваемости кредита по отраслям промышленности производится с помощью индексов среднего числа оборотов кредитов.

Индекс среднего числа оборотов кредита переменного состава I_{nc} показывает относительное изменение среднего числа оборотов кредита за счет двух факторов (изменение числа оборотов кредита по отраслям и структурные сдвиги в средних остатках кредита) и определяется по следующей формуле: $I_{nc} = \dfrac{\overline{n}_1}{\overline{n}_0} = \dfrac{\Sigma O_{n1}}{\Sigma \overline{O}_1} / \dfrac{\Sigma O_{n0}}{\Sigma \overline{O}_0}$, $\Delta \overline{n} = \overline{n}_1 - \overline{n}_0$.

Индекс среднего числа оборотов кредита фиксированного состава $I_{фс}$ показывает относительное изменение среднего числа оборотов кредита за счет изменения оборачиваемости кредита в отраслях и определяется по следующей формуле: $I_{фс} = \dfrac{\Sigma n_1 \overline{O}_1}{\Sigma \overline{O}_1} / \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_1}{\Sigma \overline{O}_1} = \dfrac{\Sigma n_1 \overline{O}_1}{\Sigma n_0 \overline{O}_1} = \dfrac{\Sigma O_{n1}}{\Sigma n_0 \overline{O}_1}$, $\Delta^{фс} \overline{n} = \overline{n}_1 - \overline{n}'_0$, где $\overline{n}'_0 = \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_1}{\Sigma \overline{O}_1}$.

Индекс структурных сдвигов $I_{стр}$ показывает относительное изменение средней оборачиваемости кредита за счет структурных сдвигов в средних остатках кредита и определяется по следующей формуле: $I_{стр} = \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_1}{\Sigma \overline{O}_1} / \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_0}{\Sigma \overline{O}_0}$, $\Delta^{стр} \overline{n} = \overline{n}'_0 - \overline{n}_0$.

Абсолютное изменение среднего числа оборотов кредита за счет двух факторов (изменение числа оборотов кредита по отраслям и структурные сдвиги в средних остатках кредита) составит $\Delta\overline{n} = \Delta^{фс}\overline{n} + \Delta^{стр}\overline{n}$.

Пример 61. На основании приведенных данных о краткосрочном кредитовании отраслей промышленности (млн. руб.) определим индекс среднего числа оборотов кредита переменного состава, индекс среднего числа оборотов кредита фиксированного состава, индекс структурных сдвигов, а также абсолютное изменение среднего числа оборотов кредита за счет двух факторов вместе (изменение числа оборотов кредита по отраслям и структурные сдвиги в средних остатках кредита) и каждого в отдельности.

Отрасль промышленности	Средние остатки кредитов		Погашено кредитов	
	2004, $\overline{O}_0$	2005, $\overline{O}_1$	2004, O_{n0}	2005, O_{n1}
А	25	45	350	500
Б	30	35	250	450

Индекс среднего числа оборотов кредита переменного состава равен

$$I_{пс} = \frac{\overline{n}_1}{\overline{n}_0} = \frac{\Sigma O_{n1}}{\Sigma \overline{O}_1} / \frac{\Sigma O_{n0}}{\Sigma \overline{O}_0} = \frac{500 + 450}{45 + 35} / \frac{350 + 250}{25 + 30} \approx 11{,}875/10{,}909 \approx$$

$\approx 1{,}089$ (= 108,9%).

$\Delta\overline{n} = \overline{n}_1 - \overline{n}_0 = 11{,}875 - 10{,}909 = 0{,}966$ оборота.

В 2005 году среднее число оборотов кредита по двум отраслям промышленности увеличилось на 8,9%, или на 0,966 оборота.

Индекс среднего числа оборотов кредита фиксированного состава равен $I_{фс} = \dfrac{\Sigma O_{n1}}{\Sigma n_0 \overline{O}_1} = \dfrac{\Sigma O_{n1}}{\Sigma (O_{n0}/\overline{O}_0)\overline{O}_1} = \dfrac{500 + 450}{(350/25)\times 45 + (250/30)\times 35} \approx$

$\approx 950/921{,}667 \approx 1{,}031$ (= 103,1%).

$$\Delta^{фс}\overline{n} = \overline{n}_1 - \overline{n}'_0 = \frac{\Sigma O_{n1}}{\Sigma \overline{O}_1} - \frac{\Sigma n_0 \overline{O}_1}{\Sigma \overline{O}_1} = (950 - 921{,}667)/(45 + 35) \approx$$

$\approx 0{,}354$ оборота.

В 2005 году среднее число оборотов кредита по двум отраслям промышленности только за счет изменения оборотов кредита в каждой отрасли промышленности увеличилось на 3,1%, или на 0,354 оборота.

Индекс структурных сдвигов равен: $I_{стр} = \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_1}{\Sigma \overline{O}_1} / \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_0}{\Sigma \overline{O}_0} =$

$= \dfrac{921{,}667}{45 + 35} / \dfrac{\Sigma n_0 \overline{O}_0}{\Sigma \overline{O}_0} \approx 11{,}521/10{,}909 \approx 1{,}056$ (= 105,6%).

$\Delta^{стр}\overline{n} = \overline{n}'_0 - \overline{n}_0 = 11{,}521 - 10{,}909 = 0{,}612$ оборота.

В 2005 году среднее число оборотов кредита по двум отраслям промышленности только за счет структурных сдвигов увеличилось на 5,6%, или на 0,612 оборота.

Задача 61. На основании приведенных данных о краткосрочном кредитовании отраслей промышленности (млн. руб.) определить индекс среднего числа оборотов кредита переменного состава, индекс среднего числа оборотов кредита фиксированного состава, индекс структурных сдвигов, а также абсолютное изменение среднего числа оборотов кредита за счет двух факторов вместе (изменение числа оборотов кредита по отраслям и структурные сдвиги в средних остатках кредита) и каждого в отдельности.

Отрасль промышленности	Средние остатки кредитов		Погашено кредитов	
	2004, $\overline{O}_0$	2005, $\overline{O}_1$	2004, O_{n0}	2005, O_{n1}
А	23	47	340	510
Б	31	34	230	460

Глава 12

СТАТИСТИКА ДЕНЕЖНОГО ОБРАЩЕНИЯ

§ 12.1. ПОКАЗАТЕЛИ ДЕНЕЖНОГО ОБРАЩЕНИЯ

Денежное обращение — это движение денег при выполнении ими своих функций в наличной и безналичной формах. Закон денежного обращения устанавливает количество денег, необходимое для выполнения ими функций средств обращения и платежа:

количество денег, необходимых в качестве средств обращения и платежа = (**сумма цен реализуемых товаров и услуг** − **сумма цен проданных в кредит товаров, срок оплаты по которым не наступил** + **сумма платежей по долговым обязательствам** − **сумма взаимно погашающихся платежей**) : **среднее число оборотов денег как средств обращения и платежа** .

Увеличенная денежная масса при том же объеме товаров и услуг на рынке ведет к обесцениванию денег. Наличное и безналичное обращения образуют *общий денежный оборот страны*, где действуют единые деньги одного наименования и унифицированной нарицательной стоимости.

Объем денежного оборота — это совокупность денежных операций, с помощью которых происходит движение денег. Он определяется суммированием операций по поступлению (или списанию) денег за период.

Средний остаток денег — это средняя величина из остатков денег на счете на отдельные даты.

Скорость документооборота характеризует деятельность банковских учреждений по расчетам. При изучении скорости документооборота используют следующие показатели оборачиваемости отдельных средств в расчетах:

✧ длительность пребывания средств в расчетах;
✧ число оборотов за период средств в расчетах.

Длительность пребывания средств в расчетах определяется по следующей формуле:

длительность пребывания средств в расчетах = **средний остаток средств на счете** × **число дней в периоде** : **оборот по расходу (списанию) средств со счета** .

Число оборотов за период средств в расчетах определяется по следующей формуле:

число оборотов за период средств в расчетах = **оборот по расходу (списанию) средств со счета** : **средний остаток средств на счете** =

= **число дней в периоде** : **длительность пребывания средств в расчетах** .

Пример 62. Средний остаток средств на счете за год составил 900 тыс. руб., а оборот по списанию средств с этого счета — 30000 тыс. руб. Продолжительность года равна 360 дней. Определим длительность пребывания средств в расчетах и число оборотов за год средств в расчетах.

Длительность пребывания средств в расчетах = (средний остаток средств на счете)×(число дней в году)/(оборот по расходу (списанию) средств со счета) = 900×360/30000 = 10,8 дня.

Число оборотов за год средств в расчетах = (число дней в году)/(длительность пребывания средств в расчетах) = 360/10,8 ≈ 33,3.

Задача 62. Средний остаток средств на счете за год составил 850 тыс. руб., а оборот по списанию средств с этого счета — 40000 тыс. руб. Продолжительность года равна 360 дней. Определить длительность пребывания средств в расчетах и число оборотов за год средств в расчетах.

Показатели оборачиваемости денежных средств используются в сравнительном анализе и при выявлении динамических тенденций.

§ 12.2. ПОКАЗАТЕЛИ СКОРОСТИ ОБРАЩЕНИЯ ДЕНЕЖНОЙ МАССЫ

Совокупная денежная масса — это сумма всех наличных и безналичных средств в обращении в государстве. При определении денежной массы исходят из *денежных агрегатов* — абсолютных показате-

лей, под которыми понимают специфическую классификацию платежных средств по уровню их ликвидности.

Используют следующие денежные агрегаты:

✧ M_0 = наличные деньги в обращении;

✧ $M_1 = M_0$ + средства на счетах до востребованиях в банках;

✧ совокупный объем денежной массы $M_2 = M_1$ + срочные вклады в банках;

✧ $M_3 = M_2$ + депозитные сертификаты + облигации государственного займа.

Количество денежной массы определяется государством. Главное условие стабильности денежной единицы страны — соответствие потребности хозяйства в деньгах их фактическому потреблению в наличном и безналичном оборотах.

Скорость обращения денег — это интенсивное движение денег при выполнении ими функций обращения и платежа.

Скорость обращения денег измеряется двумя показателями: количеством оборотов денег и продолжительностью одного оборота денежной массы.

Количество оборотов денег определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{количество оборотов денег}} = \boxed{\text{валовой внутренний продукт в текущих ценах}} : M_2.$$

где M_2 — денежный агрегат (совокупный объем денежной массы в изучаемом периоде).

Продолжительность одного оборота денежной массы определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{продолжительность одного оборота денежной массы}} = \boxed{\text{число календарных дней в периоде}} : \boxed{\text{количество оборотов денег}}.$$

Пример 63. На основании приведенных данных определим количество оборотов денег и продолжительность одного оборота денежной массы. Продолжительность года равна 360 дней.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовой внутренний продукт в текущих ценах	4000
Совокупный объем денежной массы (в среднем за год)	350

Количество оборотов денег за год = (валовой внутренний продукт в текущих ценах)/M_2 = 4000/350 ≈ 11,43.

Продолжительность одного оборота денежной массы = (число календарных дней в периоде)/(количество оборотов денег за год) = = 360/11,43 ≈ 31,5 дня.

Задача 63. На основании приведенных данных определить количество оборотов денег за год и продолжительность одного оборота денежной массы. Продолжительность года равна 360 дней.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовой внутренний продукт в текущих ценах	4500
Совокупный объем денежной массы (в среднем за год)	300

§ 12.3. ПОКАЗАТЕЛИ КУПЮРНОГО СТРОЕНИЯ ДЕНЕЖНОЙ МАССЫ

Купюрное строение денежной массы — это удельный вес денежных знаков различного достоинства в общей массе обращающихся денег. Рациональное купюрное строение денежной массы позволяет повысить производительность труда кассовых работников и ускорить оборачиваемость денег.

Достоинство средней купюры, выпущенной в обращение, характеризует динамику купюрного строения денежной массы и определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{достоинство средней купюры, выпущенной в обращение}} = \sum n_i x_i / \sum x_i,$$

где x_i — достоинство купюр i-го вида, n_i — число купюр i-го вида в обращении.

Пример 64. На основании приведенных данных определим достоинство средней купюры, выпущенной в обращение.

Достоинство купюр	1	2	5	10	50	100	500	1000
Число купюр в обращении	400	250	200	350	150	100	80	50

Заполним таблицу.

Номер	x_i	n_i	$n_i x_i$
1	1	400	400
2	2	250	500
3	5	200	1000
4	10	350	3500
5	50	150	7500
6	100	100	10000
7	500	80	40000
8	1000	50	50000
Сумма	—	1580	112900

Поясним, как заполняется таблица. Значения 2-го и 3-го столбцов взяты из условия. 4-й столбец равен произведению 2-го и 3-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Достоинство средней купюры, выпущенной в обращение, равно $\sum n_i x_i / \sum x_i = 112900/1580 \approx 71{,}46$ руб.

Задача 64. На основании приведенных данных определить достоинство средней купюры, выпущенной в обращение.

Достоинство купюр	1	2	5	10	50	100	500	1000
Число купюр в обращении	350	300	250	400	100	150	70	60

Глава 13

ЧТО ТАКОЕ СТРАХОВАНИЕ?

Страхование — это система экономических отношений, включающая образование *страхового фонда* и его использование (распределение и перераспределение) для преодоления и возмещения разного рода потерь, ущерба, вызванных неблагоприятными событиями (*страховыми случаями*), с помощью выплат *страхового возмещения* и *страховых сумм*.

Страховщик создает и использует страховой фонд. *Страхователь* вносит в страховой фонд платежи. Взаимные обязательства страховщика и страхователя регламентируются *договором страхования*.

Застрахован может быть только риск, по которому можно оценить вероятность наступления страхового случая, определить размер возможного ущерба и эквивалентную страховую сумму. Средства, собранные страховщиком для выплаты страхового возмещения, возвращаются страхователям, пострадавшим в данный момент времени.

Так как страхование занимается финансовой стороной таких явлений и процессов, которые проявляются в массе случаев и которые могут наступить, а могут и не наступить, то для управления такими явлениями и процессами необходимо располагать достаточной и объективной информацией. Здесь на помощь приходит статистика, которая занимается:

- ✧ сбором, обработкой и анализом информации страхового рынка;
- ✧ выявлением закономерностей появления страховых событий;
- ✧ оценкой частоты страховых событий, их тяжести и опустошительности;
- ✧ установлением тарифных ставок.

В следующих главах мы рассмотрим подробнее имущественное страхование и личное страхование.

Глава 14

СТАТИСТИКА ИМУЩЕСТВЕННОГО СТРАХОВАНИЯ

Имущественное страхование — это страхование, объектом которого выступают *материальные ценности* (здания, транспортные средства, материалы, продукция и т. д.). Имущественное страхование осуществляется на случай аварий, пожара, порчи, хищений и т. д.

§ 14.1. ПОКАЗАТЕЛИ ИМУЩЕСТВЕННОГО СТРАХОВАНИЯ

Показатели имущественного страхования бывают абсолютными, средними и относительными.

К *абсолютным показателям* относятся страховое поле (число всех объектов), число застрахованных объектов, число застрахованных в добровольном порядке объектов, число страховых случаев, число пострадавших объектов, страховая сумма всех застрахованных объектов, страховая сумма пострадавших объектов, сумма поступивших страховых платежей, сумма выплат страхового возмещения.

Абсолютные показатели служат основой для вычисления *средних показателей.*

Средняя страховая сумма застрахованных объектов определяется по следующей формуле:

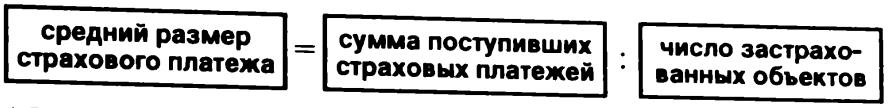
средняя страховая сумма застрахованных объектов = **страховая сумма всех застрахованных объектов** : **число застрахованных объектов** .

Средняя страховая сумма пострадавших объектов определяется по следующей формуле:

средняя страховая сумма пострадавших объектов = **страховая сумма пострадавших объектов** : **число пострадавших объектов** .

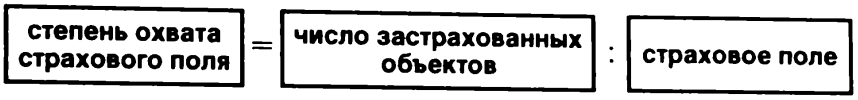
Средний размер выплаченного страхового возмещения определяется по следующей формуле:

Средний размер страхового платежа определяется по следующей формуле:

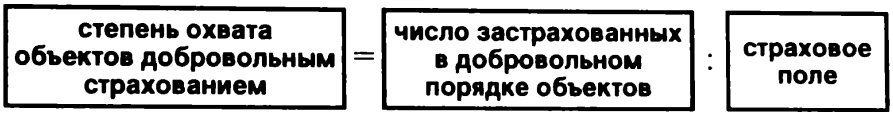


Абсолютные и средние показатели служат основой для вычисления *относительных показателей.*

Степень охвата страхового поля определяется по следующей формуле:



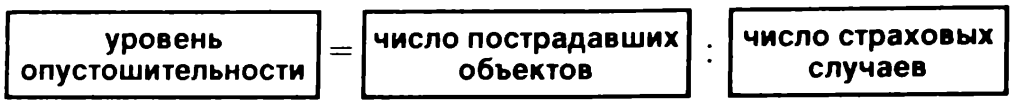
Степень охвата объектов добровольным страхованием используется для характеристики уровня развития добровольного страхования и определяется по следующей формуле:



Доля пострадавших объектов характеризует удельный вес поврежденных в отчетном периоде объектов и определяется по следующей формуле:

Частота страховых случаев показывает число страховых случаев на 100 застрахованных объектов и определяется по следующей формуле:

Уровень опустошительности характеризует силу одного страхового случая (землетрясения, урагана, наводнения и т. д.), выражающегося в масштабах разрушения, и определяется по следующей формуле:



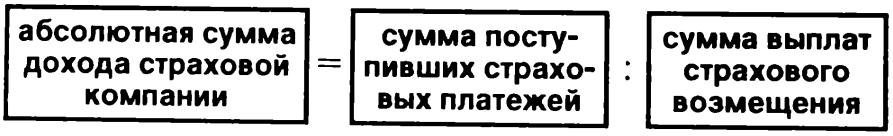
Показатель полноты уничтожения характеризует удельный вес суммы возмещения в страховой сумме пострадавших объектов и определяется по следующей формуле:

Показатель полноты уничтожения не превышает единицы.

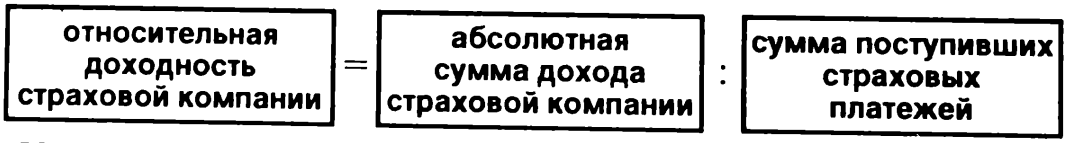
Коэффициент выплат страхового возмещения характеризует размер выплат страхового возмещения на 1 руб. поступивших страховых платежей и определяется по следующей формуле:

Коэффициент выплат страхового возмещения используется для анализа финансового состояния страховых компаний. Чем меньше коэффициент выплат страхового возмещения, тем рентабельнее страховая компания.

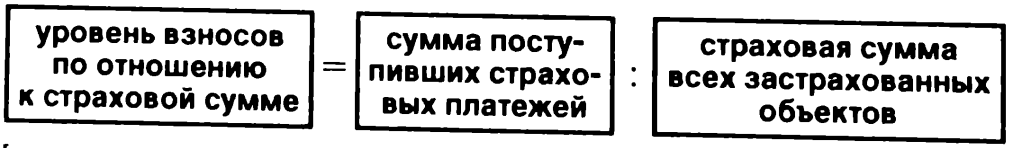
Абсолютная сумма дохода страховой компании определяется по следующей формуле:



Относительная доходность страховой компании определяется по следующей формуле:

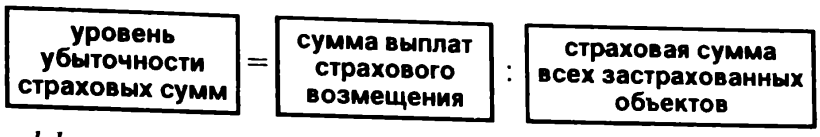


Уровень взносов по отношению к страховой сумме показывает размер страховых платежей на 1 рубль страховой суммы и определяется по следующей формуле:

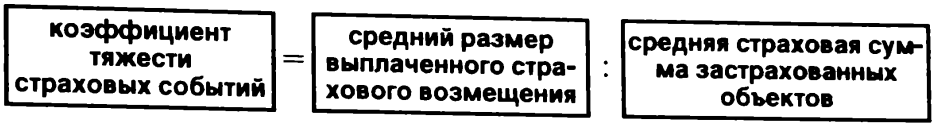


Уровень взносов по отношению к страховой сумме — это сложившаяся усредненная ставка страховых платежей по всем видам застрахованного имущества.

Уровень убыточности страховых сумм определяется по следующей формуле:



Коэффициент тяжести страховых событий определяется по следующей формуле:



Снижение убыточности страховых сумм достигается уменьшением тяжести страховых событий и доли пострадавших объектов.

Пример 65. На основании приведенных данных по страховым компаниям региона *А* определим средние и относительные показатели имущественного страхования за отчетный год.

Показатели	
Страховое поле	500000
Число застрахованных объектов	250000
Число застрахованных в добровольном порядке объектов	150000
Число страховых случаев	7000
Число пострадавших объектов	5000
Страховая сумма всех застрахованных объектов, тыс. руб.	40000
Страховая сумма пострадавших объектов, тыс. руб.	10000
Сумма поступивших страховых платежей, тыс. руб.	1600
Сумма выплат страхового возмещения, тыс. руб.	800

Средняя страховая сумма застрахованных объектов = (страховая сумма всех застрахованных объектов)/(число застрахованных объектов) = 40000/250000 = 0,16 тыс. руб. = 160 руб.

Средняя страховая сумма пострадавших объектов = (страховая сумма пострадавших объектов)/(число пострадавших объектов) = = 10000/5000 = 2 тыс. руб. = 2000 руб.

Средний размер выплаченного страхового возмещения = (сумма выплат страхового возмещения)/(число пострадавших объектов) = = 800/5000 = 0,16 тыс. руб. = 160 руб.

Средний размер страхового платежа = (сумма поступивших страховых платежей)/(число застрахованных объектов) = 1600/250000 = = 0,0064 тыс. руб. = 6,4 руб.

Степень охвата страхового поля = (число застрахованных объектов)/(страховое поле) = 250000/500000 = 0,5.

Степень охвата объектов добровольным страхованием = (число застрахованных в добровольном порядке объектов)/(страховое поле) = = 150000/500000 = 0,3.

Доля пострадавших объектов = (число пострадавших объектов)/(число застрахованных объектов) = 5000/250000 = 0,02.

Частота страховых случаев = (число страховых случаев)/(число застрахованных объектов)×100% = 7000/250000×100% = 2,8%.

Уровень опустошительности = (число пострадавших объектов)/(число страховых случаев) = 5000/7000 ≈ 0,71.

Показатель полноты уничтожения = (сумма выплат страхового возмещения)/(страховая сумма пострадавших объектов) = 800/10000 = = 0,08.

Коэффициент выплат страхового возмещения = (сумма выплат страхового возмещения)/(сумма поступивших страховых платежей) = = 800/1600 = 0,5.

Абсолютная сумма дохода страховой компании = сумма поступивших страховых платежей – сумма выплат страхового возмещения = = 1600 – 800 = 800 тыс. руб.

Относительная доходность страховой компании = (абсолютная сумма дохода страховой компании)/(сумма поступивших страховых платежей) = 800/1600 = 0,5.

Уровень взносов по отношению к страховой сумме = (сумма поступивших страховых платежей)/(страховая сумма всех застрахованных объектов) = 1600/40000 = 0,04.

Уровень убыточности страховых сумм = (сумма выплат страхового возмещения)/(страховая сумма всех застрахованных объектов) = = 800/40000 = 0,02.

Коэффициент тяжести страховых событий = (средний размер выплаченного страхового возмещения)/(средняя страховая сумма застрахованных объектов) = 160/160 = 1.

Задача 65. На основании приведенных данных по страховым компаниям региона *А* определить средние и относительные показатели имущественного страхования за отчетный год.

Показатели	
Страховое поле	510000
Число застрахованных объектов	240000
Число застрахованных в добровольном порядке объектов	160000
Число страховых случаев	8000
Число пострадавших объектов	6000
Страховая сумма всех застрахованных объектов, тыс. руб.	42000
Страховая сумма пострадавших объектов, тыс. руб.	11000
Сумма поступивших страховых платежей, тыс. руб.	1500
Сумма выплат страхового возмещения, тыс. руб.	700

§ 14.2. ТАРИФНАЯ СТАВКА

Тарифная ставка определяет, сколько денег каждый из страхователей должен внести в общий страховой фонд с единицы страховой суммы. От объективного обоснования тарифной ставки зависят взаимоотношения со страхователями и финансовое состояние страховой компании.

Полная тарифная ставка называется *брутто-ставкой*. Она состоит из нетто-ставки и нагрузки к ней. *Нетто-ставка* предназначена для создания страхового фонда. *Нагрузка* служит для покрытия накладных расходов страхования и образования резервных фондов. Чем меньше нагрузка, тем устойчивее финансовое состояние страховой компании.

Пусть q_i — уровень убыточности страховых сумм в i-м периоде ($i = 1, 2, ..., n$).

Тогда *средний уровень убыточности за период* равен $\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i/n$, а *стандартное отклонение индивидуальных уровней убыточности от среднего уровня* $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_i - \overline{q})^2/(n-1)}$.

Если значение доверительной вероятности равно p, то $\alpha = 1 - p$. По таблице t-распределения (распределения Стьюдента) найдем значение $t_{\alpha,n-1}$.

Нетто-ставка u_1 с доверительной вероятностью p равна $u_1 = \overline{q} + t_{\alpha,n-1}\sigma$. Тогда брутто-ставка равна $u = u_1/(1 - f)$, где f — нагрузка.

Пример 66. На основании приведенных данных определим нетто-ставку с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$ и брутто-ставку. Нагрузка $f = 0{,}25$.

Год	1	2	3
Уровень убыточности страховых сумм (в коп. со 100 руб. страховой суммы)	5	6	7

Здесь $n = 3$. Заполним таблицу.

Год	q_i	$q_i - \overline{q}$	$(q_i - \overline{q})^2$
1	5	−1	1
2	6	0	0
3	7	1	1
Сумма	18	—	2

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых двух столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Средний уровень убыточности за год равен $\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i/n = 18/3 = 6$.

Из каждого числа 2-го столбца вычитаем $\overline{q} = 6$ и результат пишем в 3-м столбце. В 4-м столбце указаны квадраты чисел 3-го столбца.

Стандартное отклонение индивидуальных уровней убыточности от среднего уровня равно $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_i - \overline{q})^2/(n-1)} = \sqrt{2/(3-1)} =$ $= 1$ коп.

Так как значение доверительной вероятности равно $p = 0{,}95$, то $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

По таблице t-распределения (распределения Стьюдента) найдем значение $t_{\alpha,n-1} = t_{0{,}05;3-1} = 2{,}920$.

Нетто-ставка равна $u_1 = \overline{q} + t_{\alpha,n-1}\sigma = 6 + 2{,}920 \times 1 = 8{,}92$ коп.

Тогда брутто-ставка $u = u_1/(1-f) = 8{,}92/(1 - 0{,}25) \approx 11{,}89$ коп.

Задача 66. На основании приведенных данных определить нетто-ставку с доверительной вероятностью $p = 0{,}99$ и брутто-ставку. Нагрузка $f = 0{,}2$.

Год	1	2	3
Уровень убыточности страховых сумм (в коп. со 100 руб. страховой суммы)	8	7	6

Глава 15

СТАТИСТИКА ЛИЧНОГО СТРАХОВАНИЯ

Личное страхование — это вид страхования, в котором объектом страховых отношений выступают имущественные интересы, связанные с жизнью, здоровьем, трудоспособностью и пенсионным обеспечением застрахованного лица.

Страховые суммы определяются в соответствии с пожеланиями страхователя исходя из его материальных возможностей. Страхователь пытается предотвратить материальные трудности, с которыми сталкивается в случае инвалидности или смерти.

Страховщик берет на себя обязательство выплатить страхователю оговоренную страховую сумму, если в течение срока действия договора страхования произойдет предусмотренный страховой случай в жизни застрахованного (смерть или дожитие застрахованного до определенного возраста).

Одна из задач статистики личного страхования — это обоснование ставок страховых платежей. При установлении тарифных ставок используются *таблицы смертности и средней продолжительности предстоящей жизни*, которые строятся на основе переписей населения и наблюдений страховых компаний.

Пусть l_x — число доживающих до возраста x из 100000 одновременно родившихся, d_x — число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + 1$. Тогда $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Вероятность умереть в возрасте x лет, не дожив до возраста $x + 1$ год, обозначим через q_x. Тогда $q_x = d_x/l_x$.

Пусть p_x — вероятность дожить до возраста x. Тогда $p_x = 1 - q_x$.

Все страховые расчеты дисконтируются на момент заключения договора по сложной процентной ставке i.

Пусть $V = 1/(1 + i)$, S — страховая сумма. Тогда *единовременная нетто-ставка* ${}_tE_x$ *на дожитие для лица в возрасте* x *лет на срок* t *лет* равна ${}_tE_x = l_{x+t}V^nS/l_x$.

Единовременная нетто-ставка на случай смерти ${}_nA_x$ для лица в возрасте x лет на срок n лет определяется по следующей формуле: ${}_nA_x = S(d_xV + d_{x+1}V^2 + \ldots + d_{x+n-1}V^n)/l_x$.

Пример 67. По данным таблицы смертности, число доживших до 40 лет равно $l_{40} = 88450$, а число доживших до 43 лет — $l_{43} = 86200$. Определим для лица в возрасте $x = 40$ лет единовременную нетто-ставку на дожитие сроком на $t = 3$ года со страховой суммы $S = 100$ руб. Ставка дисконтирования равна $i = 6\%$.

Единовременная нетто-ставка на дожитие равна ${}_tE_x = {}_3E_{40} =$

$$= \frac{Sl_{43}}{l_{40}(1+i)^3} = \frac{100\times 86200}{88450(1+0{,}06)^3} \approx 81{,}83 \text{ руб.}$$

Задача 67. По данным таблицы смертности, число доживших до 40 лет равно $l_{40} = 88400$, а число доживших до 43 лет — $l_{43} = 86100$. Определить для лица в возрасте $x = 40$ лет единовременную нетто-ставку на дожитие сроком на $t = 3$ года со страховой суммы $S = 100$ руб. Ставка дисконтирования равна $i = 7\%$.

Пример 68. По данным таблицы смертности, число доживших до 40 лет равно $l_{40} = 88450$, а число умирающих в соответствующем возрасте равно $d_{40} = 700$, $d_{41} = 740$, $d_{42} = 800$. Определим со страховой суммы $S = 100$ руб. единовременную нетто-ставку на случай смерти для лица в возрасте $x = 40$ лет сроком на $n = 3$ года. Ставка дисконтирования равна $i = 6\%$.

Единовременная нетто-ставка на случай смерти для лица в возрасте $x = 40$ лет сроком на $n = 3$ года равна ${}_nA_x = {}_3A_{40} = S(d_{40}V + d_{41}V^2 + d_{42}V^3)/l_{40} = 100(700/(1+0{,}06) + 740/(1+0{,}06)^2 + 800/(1+0{,}06)^3)/88450 \approx$ $\approx 2{,}25$ руб.

Задача 68. По данным таблицы смертности, число доживших до 40 лет равно $l_{40} = 88400$, а число умирающих в соответствующем возрасте равно $d_{40} = 750$, $d_{41} = 800$, $d_{42} = 860$. Определить со страховой суммы $S = 100$ руб. единовременную нетто-ставку на случай смерти для лица в возрасте $x = 40$ лет сроком на $n = 3$ года. Ставка дисконтирования равна $i = 7\%$.

Тарифная нетто-ставка по смешанному страхованию складывается из нетто-ставки на дожитие, на случай смерти и на случай утраты трудоспособности.

Брутто-ставка по смешанному страхованию определяется по следующей формуле:

брутто-ставка по смешанному страхованию = **нетто-ставка по смешанному страхованию** : $\left(1 - \right.$ **нагрузка** $\left.\right)$.

Пример 69. Нетто-ставка по смешанному страхованию равна 5 руб. Нагрузка 20%. Определим брутто-ставку по смешанному страхованию.

Брутто-ставка по смешанному страхованию = нетто-ставка по смешанному страхованию /(1 – нагрузка) = 5/(1 – 0,2) = 6,25 руб.

Задача 69. Нетто-ставка по смешанному страхованию равна 6 руб. Нагрузка 25%. Определить брутто-ставку по смешанному страхованию.

Глава 16

СРЕДНИЙ СРОК ПОГАШЕНИЯ ССУДЫ ОДНОМУ КРЕДИТОРУ

Заемщик должен одному кредитору суммы $P_1, ..., P_n$, погашаемые через $t_1, ..., t_n$ дней с процентными ставками $i_1, ..., i_n$ соответственно. Все долги можно выплатить сразу через t_s дней — это средний срок погашения ссуды. Сумма процентных платежей по каждой из ссуд должна равняться процентному платежу, начисленному на $P_1 + ... + P_n$ при средней процентной ставке i_s и среднем сроке t_s: $I_1 + ... + I_n = I_s$, то есть $P_1 i_1 t_1/K + ... + P_n i_n t_n/K = (P_1 + ... + P_n) i_s t_s/K$ (здесь K — продолжительность года).

Отсюда $P_1 i_1 t_1 + ... + P_n i_n t_n = (P_1 + ... + P_n) i_s t_s$, то есть $t_s = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} P_j i_j t_j}{i_s \sum\limits_{j=1}^{n} P_j}$.

Пример 70. Заемщик должен одному кредитору $P_1 = 5000$ руб. (срок погашения 17 марта, процентная ставка $i_1 = 11\%$ годовых), $P_2 = 6000$ руб. (срок погашения 12 мая, процентная ставка $i_2 = 12\%$ годовых), $P_3 = 8000$ руб. (срок погашения 27 мая, процентная ставка $i_3 = 14\%$ годовых). Когда лучше выплатить весь долг сразу (процентная ставка $i_s = 13\%$ годовых), чтобы при этом не понесли ущерба ни кредитор, ни заемщик?

Примем дату первого погашения 17 марта за нулевой момент времени. Тогда $t_1 = 0$, t_2 (17 марта — 12 мая) = 56 дней, t_3 = (17 марта — — 27 мая) = 71 день.

Средний срок погашения ссуды $t_s = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} P_j i_j t_j}{i_s \sum\limits_{j=1}^{n} P_j} =$

$= \dfrac{5000 \times 0{,}11 \times 0 + 6000 \times 0{,}12 \times 56 + 8000 \times 0{,}14 \times 71}{0{,}13(5000 + 6000 + 8000)} \approx 49$ дней (после 17 марта), то есть 5 мая.

Задача 70. Заемщик должен одному кредитору $P_1 = 7000$ руб. (срок погашения 17 июля, процентная ставка $i_1 = 9\%$ годовых), $P_2 = 9000$ руб. (срок погашения 23 августа, процентная ставка $i_2 = 10\%$ годовых), $P_3 = 10000$ руб. (срок погашения 14 сентября, процентная ставка $i_3 = 12\%$ годовых). Когда лучше выплатить весь долг сразу (процентная ставка $i_э = 11\%$ годовых), чтобы при этом не понесли ущерба ни кредитор, ни заемщик?

Глава 17

РЕАЛЬНАЯ СТАВКА ДОХОДНОСТИ С УЧЕТОМ НАЛОГА

В ряде стран проценты, получаемые при помещении некоторой денежной суммы в рост, облагаются налогом. Поэтому реальные наращенные суммы уменьшаются.

§ 17.1. СРЕДНЯЯ И ПРЕДЕЛЬНАЯ СТАВКИ НАЛОГА

Средняя ставка налога — это величина уплаченного налога в процентах от совокупного дохода, подлежащего налогообложению.

Предельная ставка налога — это ставка, по которой платится налог за каждый дополнительный рубль дохода.

Средняя ставка налога показывает общее влияние налогов, но предельная ставка более значима для большинства решений.

Пример 71. Схема налога на проценты: 5% с части дохода от 0 до 3000 руб., 7% с части дохода от 3000 до 10000 руб., 12% с части дохода от 10000 до 20000 руб., 20% с части дохода от 20000 до 50000 руб. и 30% с части дохода свыше 50000 руб. Начислены проценты в размере 47000 руб. Найдем среднюю и предельную ставки налога.

Разобьем 47000 руб. на части, соответствующие предельным ставкам налога: 47000 = 3000 + 7000 + 10000 + 27000. С каждой части возьмем соответствующий налог: 3000×0,05 + 7000×0,07 + 10000×0,12 + + 27000×0,2 = 7240 руб.

Средняя ставка налога 7240/47000×100% ≈ 15,4%.

Так как 20000 < 47000 < 50000, то предельная ставка налога равна 20%.

Задача 71. Схема налога на проценты: 3% с части дохода от 0 до 5000 руб., 5% с части дохода от 5000 до 15000 руб., 8% с части дохода от 15000 до 30000 руб., 12% с части дохода от 30000 до 50000 руб. и 20% с части дохода свыше 50000 руб. Начислены проценты в размере 56000 руб. Найти среднюю и предельную ставки налога.

§ 17.2. СЛУЧАЙ ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления, i — простая процентная ставка, q — ставка налога на проценты. Тогда проценты $I = Pin$, а величина налога на проценты $qI = qPin$. Отсюда наращенная сумма $S = P + I - qI = P(1 + in - qin) = P(1 + in(1 - q))$.

Пример 72. Первоначальная сумма $P = 5000$ руб., период начисления $n = 0{,}5$ года, простая процентная ставка $i = 15\%$ годовых, ставка налога на проценты $q = 12\%$.

Тогда наращенная сумма $S = P(1 + in(1 - q)) = 5000(1 + 0{,}15 \times 0{,}5 \times \times(1 - 0{,}12)) = 5330$ руб.

Задача 72. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб., период начисления $n = 0{,}25$ года, простая процентная ставка $i = 14\%$ годовых, ставка налога на проценты $q = 13\%$. Найти наращенную сумму.

§ 17.3. СЛУЧАЙ ПРОСТОЙ УЧЕТНОЙ СТАВКИ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления, d — простая учетная ставка, q — ставка налога на проценты.

Тогда проценты $I = Pnd/(1 - nd)$, а величина налога на проценты $qI = qPnd/(1 - nd)$.

Отсюда наращенная сумма $S = P/(1 - nd) - qPnd/(1 - nd) = P(1 - qnd)/(1 - nd)$.

Пример 73. Первоначальная сумма $P = 5000$ руб., период начисления $n = 0{,}5$ года, простая учетная ставка $d = 15\%$ годовых, ставка налога на проценты $q = 12\%$.

Тогда наращенная сумма $S = P(1 - qnd)/(1 - nd) = 5000 \times \times(1 - 0{,}12 \times 0{,}5 \times 0{,}15)/(1 - 0{,}5 \times 0{,}15) \approx 5356{,}76$ руб.

Задача 73. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб., период начисления $n = 0{,}25$ года, простая учетная ставка $d = 14\%$ годовых, ставка налога на проценты $q = 13\%$. Найти наращенную сумму.

§ 17.4. СЛУЧАЙ СЛОЖНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Пусть P — первоначальная сумма, n — период начисления, i — сложная процентная ставка, q — ставка налога на проценты.

Метод взыскания налога (сумма налога на проценты определяется сразу за весь период начисления или каждый год отдельно) в слу-

чае сложной процентной ставки не влияет на общую сумму налога. Но для плательщика налога вовсе не безразлично, когда он его платит.

Наращенная сумма без учета налога $S = P(1 + i)^n$, а проценты $I = P(1 + i)^n - P$.

Поэтому величина налога на проценты $qI = q(P(1 + i)^n - P)$.

Отсюда наращенная сумма с учетом налога $S = P(1 + i)^n - qI = P(1 + i)^n - q(P(1 + i)^n - P) = P((1 - q)(1 + i)^n + q)$.

Пример 74. Первоначальная сумма $P = 5000$ руб., период начисления $n = 3$ года, сложная процентная ставка $i = 15\%$ годовых, ставка налога на проценты $q = 12\%$.

Тогда наращенная сумма $S = P((1 - q)(1 + i)^n + q) = 5000 \times \times((1 - 0{,}12)(1 + 0{,}15)^3 + 0{,}12) = 7291{,}85$ руб.

Задача 74. Первоначальная сумма $P = 7000$ руб., период начисления $n = 2$ года, сложная процентная ставка $i = 14\%$ годовых, ставка налога на проценты $q = 13\%$. Найти наращенную сумму.

Замечание. Аналогичные рассуждения о реальной ставке доходности с учетом налога можно провести и для случаев номинальной ставки сложных процентов и непрерывного начисления процентов.

Глава 18

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

§ 18.1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПРИНЯТИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО РЕШЕНИЯ

Теперь мы займемся проблемой доходности инвестиций. Если предприятие хочет сохранить прочное положение на рынке и не утратить части стоимости, то оно должно обеспечить своим инвесторам требуемый уровень доходности. Это необходимо и для привлечения новых инвестиций. Поэтому нужно разработать методы оценки инвестиций, позволяющие сравнивать конкурирующие между собой инвестиционные проекты.

Инвестиционные решения — это решения о текущих затратах с целью получения доходов в будущем. *Краткосрочные решения* принимаются на относительно короткий период времени (например, от вложения денежных средств до получения прибыли от них пройдет один год). *Долгосрочные инвестиционные проекты* рассчитаны на более длительный период времени.

В этой главе мы проанализируем обоснованность долгосрочных инвестиционных решений для предприятий, целиком финансируемых за счет акционерного капитала (или выпуск простых акций, или за счет нераспределенной прибыли). Будем считать, что денежные потоки точно определены и нет необходимости делать поправку на риск. Денежные притоки или оттоки происходят в начале или конце каждого периода. Хотя вычисления в этом случае не совсем точны, но для большинства решений они достаточно приемлемы.

Следует отметить, что около 85% усилий, направленных на анализ инвестиционного проекта, тратятся на уточнение различных элементов возможного решения, а 15% усилий приходятся на различные расчеты. Так что не стоит предаваться соблазну производить расчеты до надлежащего определения диапазона данных.

Любую оценку стоимости инвестиционного проекта следует начинать с четкого определения рассматриваемых инвестиций и описания возможных альтернатив. Как правило, всегда есть две-три альтернативы инвестирования средств.

Все экономические расчеты при принятии инвестиционных решений должны быть основаны на прогнозе будущих доходов и расходов. Данные прошлых периодов не имеют отношения к решаемой задаче.

При проведении анализа инвестиционного проекта следует изучить вероятные изменения переменных и оценить чувствительность количественных оценок к изменению различных факторов. Это ограничит пределы погрешности прогнозируемых результатов. Конечно, невозможно полностью исключить риски.

Далеко не всякая бухгалтерская информация имеет значение при анализе инвестиционного проекта. Экономическое обоснование инвестиционного проекта опирается на оценку приростных изменений параметров бизнеса. Следует избегать использования себестоимости на единицу продукции, а проводить анализ на основе изменений за период выручки и затрат, являющихся следствием инвестиционного решения.

Невосполнимые затраты, связанные с созданием активов в прошлом, не должны учитываться при рассмотрении инвестиционного проекта. Ведь эти затраты никак не могут быть изменены реализацией этого инвестиционного проекта.

§ 18.2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ИЗДЕРЖКИ ПО ИНВЕСТИЦИЯМ

При выработке долгосрочных инвестиционных решений необходимо знать, какую отдачу принесут инвестиции, и сопоставить прибыль от инвестирования в различные проекты.

Тот, кто не любит рисковать, может вложить деньги в безрисковые ценные бумаги (такими считаются особо надежные государственные ценные бумаги), которые будут приносить постоянный доход. Доходность по инвестициям в такие ценные бумаги представляет собой *альтернативные издержки по инвестициям*, так как инвестированные в особо надежные государственные ценные бумаги средства не могут быть инвестированы еще куда-то.

Альтернативные издержки по инвестициям также называют *стоимостью капитала*, *минимально необходимой нормой прибыли*, *ставкой дисконтирования* и *процентной ставкой*. Предприятие должно рас-

сматривать только такие инвестиционные проекты, прибыль от которых выше альтернативных издержек по инвестициям.

При рассмотрении инвестиционных проектов мы должны решить, будет ли инвестирование капитала более прибыльным, чем простое помещение средств в безрисковые ценные бумаги или в банк под проценты при данной банковской процентной ставке. Кроме того, необходимо выбрать тот инвестиционный проект, который принесет максимальную выгоду.

§ 18.3. МЕТОД ЧИСТОЙ ПРИВЕДЕННОЙ СТОИМОСТИ

В методе чистой приведенной стоимости учитывается временна́я стоимость денег.

Предположим, что нам известен будущий денежный поток и его распределение по времени. Дисконтируем денежные потоки до их текущей стоимости (на нулевой момент времени, то есть на начало реализации проекта), используя минимально необходимую норму прибыли. Суммировав полученные результаты, найдем *чистую приведенную стоимость* (NPV) проекта.

Если полученное значение положительно, то реализация инвестиционного проекта более выгодна, чем помещение средств в безрисковые ценные бумаги. Если полученное значение отрицательно, то реализация инвестиционного проекта менее выгодна, чем помещение средств в безрисковые ценные бумаги. Нулевое значение чистой приведенной стоимости говорит о том, что предприятию безразлично, принять проект или отвергнуть его.

При принятии решений по инвестициям при оценке потоков денежных средств в них не включается амортизация, так как она не является расходом в форме наличных денежных средств. Затраты капитала на амортизируемые активы учитываются как расход наличных денежных средств в начале реализации инвестиционного проекта. Амортизационные отчисления — это просто метод бухгалтерского учета для соответствующего распределения вложений в активы по анализируемым отчетным периодам. Любое включение амортизационных отчислений в потоки денежных средств приводит к повторному счету.

Метод чистой приведенной стоимости особенно полезен, когда необходимо выбрать один из нескольких возможных инвестиционных проектов, имеющих различные размеры требуемых инвестиций, различную продолжительность реализации, различные денежные доходы.

Мы определяем чистую приведенную стоимость каждого инвестиционного проекта на основе альтернативных издержек по инвестициям. Положительность чистой приведенной стоимости говорит о прибыльности инвестиций. Затем выбираем, в рамках какого инвестиционного проекта положительная чистая приведенная стоимость наибольшая, так как именно это при прочих равных условиях и является индикатором самого рентабельного проекта.

Пример 75. Предприятие анализирует два инвестиционных проекта в 2 млн. руб.

Оценка чистых денежных поступлений приведена в таблице.

Год	Проект А, млн. руб.	Проект В, млн. руб.
1	0,9	0,8
2	1,6	1,1
3	—	0,6

Альтернативные издержки по инвестициям равны 12%. Определим чистую приведенную стоимость каждого проекта.

Чистая приведенная стоимость проекта A равна:

$$\frac{0,9}{1+0,12}+\frac{1,6}{(1+0,12)^2}-2\approx 0,08 \text{ млн. руб.}$$

Чистая приведенная стоимость проекта B равна:

$$\frac{0,8}{1+0,12}+\frac{1,1}{(1+0,12)^2}+\frac{0,6}{(1+0,12)^3}-2\approx 0,02 \text{ млн. руб.}$$

Так как $0,08 > 0,02$, то проект A предпочтительнее.

Положительная чистая приведенная стоимость инвестиций свидетельствует об увеличении рыночной стоимости средств акционеров, которое должно произойти, когда на фондовой бирже станет известно о принятии данного проекта. Она также показывает потенциальное увеличение текущего потребления для владельцев обыкновенных акций, которое возможно благодаря реализации проекта после возвращения использованных средств.

Задача 75. Предприятие анализирует два инвестиционных проекта в 2,5 млн. руб. Оценка чистых денежных поступлений приведена в таблице.

Год	Проект А, млн. руб.	Проект В, млн. руб.
1	1,2	0,9
2	1,8	1,3
3	—	0,8

Альтернативные издержки по инвестициям равны 11%. Определить чистую приведенную стоимость каждого проекта. Какой проект предпочтительнее?

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию ЧПС, которая возвращает величину чистой приведенной стоимости инвестиций, используя ставку дисконтирования, а также стоимости будущих выплат (отрицательные значения) и поступлений (положительные значения).

f_x → *финансовые* → *ЧПС* → *ОК*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *Ставка* — это альтернативные издержки по инвестициям. *Значения* — это выплаты (со знаком «–») и поступления (со знаком «+»). *ОК*.

В примере 75 для проекта *А* ЧПС(0,12; –2; 0,9; 1,6) ≈ 0,07 млн. руб. (из-за ошибок округления этот результат отличается от результата примера 75) и для проекта *В* ЧПС(0,12; –2; 0,8; 1,1; 0,6) ≈ 0,02 млн. руб.

Расчет чистой приведенной стоимости инвестиционного проекта — это самая легкая часть оценки проекта. Гораздо больше усилий и профессиональной подготовки нужно потратить на определение ожидаемых потоков денежных средств от проекта. В этом случае приходится полагаться на здравый смысл и профессиональное мастерство менеджеров предприятия.

Для проверки достоверности исходные данные испытывают на чувствительность и рассматривают изменения получаемых результатов при небольших изменениях исходных данных. Точность прошлых оценок и хорошо себя зарекомендовавшие подходы также могут оказаться полезными при оценке инвестиционного проекта.

§ 18.4. МЕТОД ВНУТРЕННЕЙ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ

В методе внутренней нормы доходности учитывается временна́я стоимость денег.

Внутренняя норма доходности (*дисконтированная норма прибыли*) *IRR* — это ставка дисконтирования, при которой чистая приведенная стоимость инвестиций равна нулю. Иначе говоря, при такой ставке сумма инвестированных средств будет окупаться в течение всей продолжительности инвестиционного проекта, а создания новой стоимости не произойдет.

Значение внутренней нормы доходности можно найти приближенно методом линейной интерполяции. Подбираем значение став-

ки дисконтирования r_0, при которой чистая приведенная стоимость инвестиций $NPV(r_0) < 0$.

Подбираем значение ставки дисконтирования r_1, при которой чистая приведенная стоимость инвестиций $NPV(r_1) > 0$. Тогда внутренняя норма доходности равна: $IRR \approx r_0 - \dfrac{(r_1 - r_0)NPV(r_0)}{NPV(r_1) - NPV(r_0)}$.

Пример 76. Определим внутреннюю норму доходности инвестиционного проекта *B* из примера 75.

Чистая приведенная стоимость проекта *B* при ставке дисконтирования *r* равна: $NPV(r) = \dfrac{0{,}8}{1+r} + \dfrac{1{,}1}{(1+r)^2} + \dfrac{0{,}6}{(1+r)^3} - 2$.

При $r_1 = 0{,}12$ чистая приведенная стоимость $NPV(r_1) = NPV(0{,}12) \approx$ $\approx 0{,}02$ млн. руб. > 0.

При $r_0 = 0{,}15$ чистая приведенная стоимость $NPV(r_0) = NPV(0{,}15) \approx$ $\approx -0{,}08$ млн. руб. < 0.

Тогда внутренняя норма доходности *IRR* равна:

$$IRR \approx r_0 - \frac{(r_1 - r_0)NPV(r_0)}{NPV(r_1) - NPV(r_0)} = 0{,}15 - \frac{(0{,}12 - 0{,}15)(-0{,}08)}{0{,}02 - (-0{,}08)} =$$

$= 0{,}126$ (= 12,6%).

Задача 76. Определить внутреннюю норму доходности инвестиционного проекта *B* из задачи 75.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовую функцию ВСД, которая возвращает значение внутренней нормы доходности для потока денежных средств. Значение функции вычисляется путем итерации и может давать нулевое значение или несколько значений. Если последовательные результаты функции ВСД не сходятся с точностью 0,0000001 после 20 итераций, то ВСД возвращает сообщение об ошибке #число!.

$f_x \rightarrow$ *финансовые* $\rightarrow$ *ВСД* $\rightarrow$ *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Предположение* указывается предполагаемая величина процентной ставки (если значение не указано, то по умолчанию оно равно 10%). *OK*. В примере 76 ВСД(–2; 0,8; 1,1; 0,6) $\approx$ $\approx$ 13%.

Для определения целесообразности реализации инвестиционного проекта нужно сопоставить внутреннюю норму доходности с альтернативными издержками по инвестициям или с принятой на данном предприятии минимальной нормой прибыли на инвестиции.

§ 18.5. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСТОЙ ПРИВЕДЕННОЙ СТОИМОСТИ И ВНУТРЕННЕЙ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ

Во многих ситуациях метод внутренней нормы доходности склоняется к тому же решению, что и метод чистой приведенной стоимости. Но бывают ситуации, когда метод внутренней нормы доходности приводит к ошибочным решениям.

При анализе *взаимоисключающих проектов* (принятие одного из них исключает принятие другого) рекомендуется метод чистой приведенной стоимости.

В методе внутренней нормы доходности подразумевается, что все поступления от инвестиционного проекта реинвестируются по собственно проектной норме доходности. Но это не обязательно фактическая альтернативная стоимость капитала.

В методе внутренней нормы доходности результат показывается в виде процентной ставки, а не абсолютного денежного значения. Поэтому этот метод отдаст предпочтение инвестированию 10 тыс. руб. под 100%, а не инвестированию 200 млн. руб. под 20%.

В *нестандартных денежных потоках* (выплаты и поступления чередуются) возможно получение нескольких значений внутренней нормы доходности.

С учетом вышеперечисленного инвестиционные проекты нужно оценивать на основе чистой приведенной стоимости.

§ 18.6. МЕТОД ОКУПАЕМОСТИ

Достоинство метода окупаемости — его простота. На практике этот метод применяется довольно часто, хотя при этом не учитывается временна́я стоимость денег.

Нужно определить *период окупаемости*, который показывает, сколько времени понадобится для того, чтобы инвестиционный проект окупил первоначально инвестированную сумму (то есть до превышения наличным доходом первоначальных инвестиций). Чем короче период окупаемости, тем инвестиционный проект лучше.

Пример 77. Определим период окупаемости каждого инвестиционного проекта в примере 75.

В проекте *А* для окупаемости первоначальных инвестиций в сумме 2 млн. руб. необходимо поступление 0,9 млн. руб. в первый год

и (2 – 0,9) = 1,1 млн. руб. (из 1,6 млн. руб.) во второй год. Поэтому период окупаемости проекта *A* равен 1 + 1,1/1,6 ≈ 1,7 лет.

В проекте *B* для окупаемости первоначальных инвестиций в сумме 2 млн. руб. необходимо поступление 0,8 млн. руб. в первый год, 1,1 млн. руб. во второй год и 2 – (0,8 + 1,1) = 0,1 млн. руб. (из 0,6 млн. руб.) в третий год. Поэтому период окупаемости проекта *B* равен 1 + 1 + 0,1/0,6 ≈ 2,2 лет.

Так как 1,7 < 2,2, то проект *A* предпочтительнее.

Задача 77. Определить период окупаемости каждого инвестиционного проекта в задаче 75.

Недостатки метода окупаемости:

1) не учитываются потоки денежных средств после завершения срока окупаемости;

2) не учитывается временна́я разница поступлений денежных средств (поэтому возможно одобрение инвестиционного проекта с отрицательной чистой приведенной стоимостью).

Учитывая приведенные недостатки, применение метода окупаемости не обязательно приведет к максимизации рыночной цены обыкновенных акций.

Существует ряд ситуаций, когда целесообразно применение метода окупаемости. Например, руководство предприятия в большей степени озабочено решением проблемы ликвидности, а не прибыльности (главное, чтобы инвестиции окупились как можно скорее).

Метод окупаемости также хорош в ситуации, когда инвестиции сопряжены с высокой степенью риска. Например, для отраслей с быстрыми технологическими изменениями.

Одна из модификаций метода окупаемости — *дисконтированный метод расчета периода окупаемости*, когда все потоки денежных средств дисконтированы до их приведенной стоимости, а период окупаемости определяется на основании дисконтированных потоков.

Окупаемость, рассчитанная по дисконтированным денежным потокам, достигается в тот момент, когда накопленная приведенная стоимость потоков до этого момента станет равной нулю. Это как раз тот момент времени, когда первоначально инвестированные средства полностью окупаются, а инвестиционный проект начинает приносить экономическую прибыль. При этом не следует забывать, что дисконтированный срок окупаемости подразумевает неизменность условий реализации инвестиционного проекта.

Дисконтированный метод расчета периода окупаемости также не учитывает все потоки денежных средств после завершения срока

окупаемости. Но из-за того, что в дисконтированном методе расчета периода окупаемости полученная величина периода окупаемости больше, чем в методе окупаемости, исключается меньшее количество денежных потоков. Поэтому переход от метода окупаемости к дисконтированному методу расчета периода окупаемости — это шаг в правильном направлении.

На практике метод окупаемости очень часто используется для грубой оценки инвестиционных проектов.

Недостатки метода окупаемости стали сказываться на его популярности. Но в семидесятых годах XX века резкий рост инфляции и быстрые изменения в технологии привели к невозможности точных прогнозов долгосрочных потоков денежных средств. Это привело к тому, что быстрая окупаемость инвестиций снова оказалась в центре внимания.

Метод окупаемости позволяет отсечь инвестиционные проекты с большой зависимостью от долгосрочных потоков денежных средств. Это особенно важно для отраслей с резкими изменениями технологий и спроса. Например, разработчик программного обеспечения должен окупить свой проект до появления на рынке аналогичных программ. Поэтому метод окупаемости хорош при проведении предварительного отбора инвестиционных проектов.

§ 18.7. УЧЕТНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ОКУПАЕМОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

В этом методе не учитывается временна́я стоимость денег. Для расчетов используются данные о прибыли, а не о поступлениях денежных средств.

Учетный коэффициент окупаемости инвестиций (*прибыль на инвестированный капитал, прибыль на используемый капитал*) вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{учетный коэффициент окупаемости инвестиций}} = \boxed{\text{среднегодовая прибыль}} : \boxed{\text{средняя стоимость инвестиций}},$$

где $$\boxed{\text{средне-годовая прибыль}} = \left(\boxed{\text{суммарные доходы}} - \boxed{\text{первоначальные инвестиции}} \right) : \boxed{\text{срок реализации проекта}}.$$

Средняя стоимость инвестиций зависит от метода начисления износа. При равномерном начисления износа *средняя стоимость инвестиций* вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{\text{средняя стоимость инвестиций}} = \left(\boxed{\text{первоначальные инвестиции}} + \boxed{\text{остаточная стоимость}} \right) : 2,$$

Пример 78. Пусть в примере 75 остаточная стоимость каждого проекта равна нулю. Определим их учетные коэффициенты окупаемости инвестиций.

Для проектов *A* и *B* средняя стоимость инвестиций = (первоначальные инвестиции + остаточная стоимость)/2 = (2 + 0)/2 = 1 млн. руб.

Для проекта *A* среднегодовая прибыль = (суммарные доходы − − первоначальные инвестиции)/(срок реализации проекта) = = (0,9 + 1,6 − 2)/2 = 0,25 млн. руб., а учетный коэффициент окупаемости инвестиций = (среднегодовая прибыль)/(средняя стоимость инвестиций) = 0,25/1 = 0,25 (= 25%).

Для проекта *B* среднегодовая прибыль = (суммарные доходы − первоначальные инвестиции)/(срок реализации проекта) = (0,8 + 1,1 + + 0,6 − 2)/3 ≈ 0,17 млн. руб., а учетный коэффициент окупаемости инвестиций = (среднегодовая прибыль)/(средняя стоимость инвестиций) = 0,17/1 = 0,17 (= 17%).

Задача 78. Пусть в задаче 75 остаточная стоимость каждого проекта равна нулю. Определить их учетные коэффициенты окупаемости инвестиций.

Как и период окупаемости, учетный коэффициент окупаемости инвестиций имеет свои недостатки. Он использует балансовую прибыль (а не денежные потоки) в качестве оценки прибыльности проектов. Существует множество путей вычисления балансовой прибыли, что дает возможность манипулировать учетным коэффициентом окупаемости инвестиций. Несоответствия в вычислении прибыли приводят к существенно различающимся значениям учетного коэффициента окупаемости инвестиций.

Балансовая прибыль страдает от таких «искажений», как затраты на амортизацию, прибыли или убытки от продажи основных активов, которые не являются настоящими денежными потоками и поэтому не оказывают влияния на благосостояние акционеров.

Применение средних величин искажает относящуюся к делу информацию о сроках получения дохода.

Первоначальные инвестиции и остаточная стоимость усреднены для отражения стоимости активов, связанных между собой в течение всего срока реализации инвестиционного проекта. Наблюдается *парадокс остаточной стоимости*: чем больше остаточная стоимость, тем меньше учетный коэффициент окупаемости инвестиций. Это может привести к принятию неправильного решения.

Хотя применение учетного коэффициента окупаемости инвестиций иногда приводит к принятию ошибочных инвестиционных решений, на практике он очень часто используется для обоснования инвестиционных проектов. Возможно, это связано с тем, что лица, принимающие решения, часто предпочитают анализировать инвестиции через прибыль, так как деятельность самих менеджеров часто оценивается именно по этому критерию.

Множество всевозможных методов анализа инвестиционного проекта порождает проблему их выбора. Анализируемый инвестиционный проект вовсе не обязательно будет хорош со всех точек зрения. Только исследователь может оценить объективную и всестороннюю схему действия проекта. Методы анализа инвестиционного проекта гарантируют лишь получение некоторых количественных оценок. А уже исследователь сам принимает решение с учетом стратегии предприятия, конкурентной среды и возможных рисков.

§ 18.8. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

1. Следует определить сумму, выделяемую на инвестиционные проекты.

2. Установление предельного срока окупаемости поможет избежать анализа непривлекательных проектов. После этого можно применить методику дисконтирования потоков денежных средств. Не нужно тратить время на сложные расчеты стоимости капитала. Прагматичная ставка дисконтирования вполне подойдет для этого.

3. Не пользуйтесь краткосрочными источниками для финансирования капитальных инвестиций.

4. Время, затраченное на повышение точности прогноза движения денежных средств, — это залог успеха. Нельзя получить правильный ответ на основе неверных прогнозов.

5. Следует обязательно предусмотреть затраты на научные исследования и поиск еще более привлекательных возможностей.

Глава 19

АНАЛИЗ ИНДЕКСОВ ДОХОДА И ЦЕН

Для выявления динамики благосостояния потребителей используются индексы номинального и реального доходов и индексы цен. Индексы реального дохода и цен рассчитываются обычно по *методике Ласпейреса* (в качестве удельных весов используются переменные базисного периода) или *методике Пааше* (в качестве удельных весов используются переменные отчетного периода).

Пусть имеется два товара X и Y; X^t, Y^t и P_X^t, P_Y^t — соответственно потребительский набор и цены текущего периода; X^0, Y^0 и P_X^0, P_Y^0 — соответственно потребительский набор и цены базисного периода.

Индекс реального дохода Ласпейреса вычисляется по следующей формуле: $R_L = (P_X^0 X^t + P_Y^0 Y^t)/(P_X^0 X^0 + P_Y^0 Y^0)$.

Индекс реального дохода Пааше вычисляется по следующей формуле: $R_P = (P_X^t X^t + P_Y^t Y^t)/(P_X^t X^0 + P_Y^t Y^0)$.

Оба индекса отражают динамику изменения реального дохода потребителей.

Если $R_L < 1$ (индекс реального дохода Ласпейреса меньше единицы), то благосостояние потребителей в текущем периоде снизилось по сравнению с базисным периодом. Если $R_P > 1$ (индекс реального дохода Пааше больше единицы), то благосостояние потребителей в текущем периоде увеличилось по сравнению с базисным периодом.

Пример 79. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение товаров X и Y.

Год	Объем потребления		Цены	
	X	Y	P_X	P_Y
2006	10	12	2	3
2007	14	15	4	5

Определим индексы реального дохода Ласпейреса и Пааше.

Примем год 2006 за базисный период.

Индекс реального дохода Ласпейреса равен $R_L = (P_X^0X^t + P_Y^0Y^t)/$ $/ (P_X^0X^0 + P_Y^0Y^0) = (2\times14 + 3\times15)/(2\times10 + 3\times12) \approx 1{,}3$.

Индекс реального дохода Пааше равен $R_P = (P_X^tX^t + P_Y^tY^t)/(P_X^tX^0 +$ $+ P_Y^tY^0) = (4\times14 + 5\times15)/(4\times10 + 5\times12) = 1{,}31 > 1$, то есть благосостояние потребителей в 2007 году увеличилось по сравнению с 2006 годом.

Задача 79. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение товаров X и Y.

Год	Объем потребления		Цены	
	X	Y	P_X	P_Y
2006	11	13	1	2
2007	12	14	3	4

Определить индексы реального дохода Ласпейреса и Пааше. Увеличилось ли благосостояние потребителей в 2007 году по сравнению с 2006 годом?

Индекс цен Ласпейреса вычисляется по следующей формуле: $P_L = (P_X^tX^0 + P_Y^tY^0)/(P_X^0X^0 + P_Y^0Y^0)$.

Индекс цен Пааше вычисляется по следующей формуле: $P_P = (P_X^tX^t$ $+ P_Y^tY^t)/(P_X^0X^t + P_Y^0Y^t)$.

Индекс номинального дохода вычисляется по следующей формуле: $I = (P_X^tX^t + P_Y^tY^t)/(P_X^0X^0 + P_Y^0Y^0)$.

Если $I > P_L$ (индекс номинального дохода больше индекса цен Ласпейреса), то благосостояние потребителей в текущем периоде увеличилось по сравнению с базисным периодом. Если $I < P_P$ (индекс номинального дохода меньше индекса цен Пааше), то благосостояние потребителей в текущем периоде снизилось по сравнению с базисным периодом.

Пример 80. Определим индекс номинального дохода и индексы цен Ласпейреса и Пааше в примере 79.

Индекс номинального дохода равен $I = (P_X^tX^t + P_Y^tY^t)/(P_X^0X^0 +$ $+ P_Y^0Y^0) = (4\times14 + 5\times15)/(2\times10 + 3\times12) \approx 2{,}34$.

Индекс цен Ласпейреса равен $P_L = (P_X^tX^0 + P_Y^tY^0)/(P_X^0X^0 + P_Y^0Y^0) =$ $= (4\times10 + 5\times12)/(2\times10 + 3\times12) \approx 1{,}79 < 2{,}34 = I$, то есть благосостояние потребителей в 2007 году увеличилось по сравнению с 2006 годом.

Индекс цен Пааше равен $P_P = (P_X^tX^t + P_Y^tY^t)/(P_X^0X^t + P_Y^0Y^t) =$ $= (4\times14 + 5\times15)/(2\times14 + 3\times15) \approx 1{,}79$.

Задача 80. Определить индекс номинального дохода и индексы цен Ласпейреса и Пааше в задаче 79. Увеличилось ли благосостояние потребителей в 2007 году по сравнению с 2006 годом?

Оценивая возможности применения индексов для оценки динамики благосостоянии, мы использовали двухтоварную модель выявленных предпочтений. Все полученные результаты верны и для индексов, рассчитанных по всей потребительской корзине.

Глава 20

СРЕДНИЕ ЦЕНЫ

Если для группы из m товаров известны цена каждого товара p_i и его товарооборот n_i, то *средняя цена* вычисляется по следующей формуле: $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m} n_i / \sum_{i=1}^{m} (n_i/p_i)$.

Отклонение цены товара от средней цены равно $p_i - \overline{p}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Удельный вес различных товаров в товарообороте равен $n_i / \sum_{i=1}^{m} n_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Пример 81. Известны следующие данные.

Товар	Цена, руб.	Товарооборот, руб.
A	45	20000
B	56	30000

Определим среднюю цену, отклонение цены каждого товара от средней цены и удельный вес различных товаров в товарообороте.

Здесь $m = 2$. Заполним таблицу.

Товар	p_i	n_i	n_i/p_i	$n_i / \sum_{i=1}^{m} n_i$	$p_i - \overline{p}$
A	45	20000	444	0,4	−6,02
B	56	30000	536	0,6	4,98
Сумма	—	50000	980	1	—

Поясним, как заполняется таблица. Числа 2-го и 3-го столбцов взяты из исходной таблицы. Числа 3-го столбца делим на числа 2-го столбца, результат округляем до целого числа и пишем в 4-м столбце. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Каждое число 3-го столбца делим на итоговую сумму чисел этого столбца и результат пишем в 5-м столбце. Там указан удельный вес различных товаров в товарообороте.

Средняя цена $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m} n_i / \sum_{i=1}^{m} (n_i/p_i) = 50000/980 \approx 51{,}02$ руб.

Из каждого числа 2-го столбца вычитаем среднюю цену $\overline{p} = 51{,}02$ руб. и результат пишем в 6-м столбце. Там указаны отклонения цен товаров от средней цены.

Задача 81. Известны следующие данные.

Товар	Цена, руб.	Товарооборот, руб.
A	52	30000
B	58	40000

Определить среднюю цену, отклонение цены каждого товара от средней цены и удельный вес различных товаров в товарообороте.

Если известна цена товара p_i и структура товарооборота d_i (%), то средняя цена вычисляется по следующей формуле: $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m} p_i d_i$.

Пример 82. Известны следующие данные о цене и структуре товарооборота товара *A*.

Цена, руб.	Структура товарооборота, %
45	0,3
48	0,7

Определим среднюю цену товара *A*.

Средняя цена товара *A* равна $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m} p_i d_i = 45 \times 0{,}3 + 48 \times 0{,}7 = 47{,}1$ руб.

Задача 82. Известны следующие данные о цене и структуре товарооборота товара *A*.

Цена, руб.	Структура товарооборота, %
44	0,4
46	0,6

Определить среднюю цену товара *A*.

Если известны цена p_i и объем продаж q_i (в единицах), то средняя цена вычисляется по следующей формуле: $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i / \sum_{i=1}^{m} q_i$.

Размах вариации цен R — это разность между наибольшей p_{max} и наименьшей p_{min} ценами: $R = p_{max} - p_{min}$.

Среднее квадратическое отклонение цен вычисляется по следующей формуле: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} q_i p_i^2 / \sum_{i=1}^{m} q_i - (\overline{p})^2}$.

Коэффициент вариации цен вычисляется по следующей формуле: $V = \sigma/\overline{p} \times 100\%$.

Пример 83. Известны следующие данные.

Цена товара, руб.	Объем продаж, единиц
38	200
42	150
44	120

Определим среднюю цену, размах вариации цен, среднее квадратическое отклонение цен и коэффициент вариации цен.

Здесь $m = 3$. Заполним таблицу.

Номер	p_i	q_i	$p_i q_i$	$q_i p_i^2 = p_i \times p_i q_i$
1	38	200	7600	288800
2	42	150	6300	264600
3	44	120	5280	232320
Сумма	—	470	19180	785720

Поясним, как заполняется таблица. Числа 2-го и 3-го столбцов взяты из исходной таблицы. 4-й (5-й) столбец равен произведению 2-го и 3-го (4-го) столбцов. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Средняя цена $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i / \sum_{i=1}^{m} q_i = 19180/470 \approx 40{,}81$ руб.

Размах вариации цен $R = p_{\max} - p_{\min} = 44 - 38 = 6$ руб.

Среднее квадратическое отклонение цен

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} q_i p_i^2 / \sum_{i=1}^{m} q_i - (\overline{p})^2} = \sqrt{785720/470 - 40{,}81^2} \approx 2{,}51 \text{ руб.}$$

Коэффициент вариации цен $V = \sigma/\overline{p} \times 100\% = 2{,}51/40{,}81 \times 100\% \approx$ $\approx 6{,}15\%$.

Задача 83. Известны следующие данные.

Цена товара, руб.	Объем продаж, единиц
37	250
41	160
45	130

Определить среднюю цену, размах вариации цен, среднее квадратическое отклонение цен и коэффициент вариации цен.

Глава 21

ОБЛИГАЦИИ

§ 21.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Двумя основными формами корпоративного капитала являются кредит и обыкновенные акции. В этой главе мы рассмотрим оценку стоимости облигаций — основного типа долгосрочных кредитов.

Облигация — это долговое обязательство, выпускаемое коммерческой компанией или государством, в соответствии с которым эмитент (то есть заемщик, выпустивший облигацию) гарантирует кредитору выплату определенной суммы в фиксированный момент времени в будущем и периодическую выплату назначенных процентов (по фиксированной или плавающей процентной ставке).

Номинальная (нарицательная) стоимость облигации — это величина денежной суммы, указанная на облигации, которую эмитент берет взаймы и обещает выплатить по истечении определенного срока (*срока погашения*).

Дата погашения — это день, когда должна быть выплачена номинальная стоимость облигации. Многие облигации содержат условие, по которому эмитент имеет право выкупа облигации до истечения срока погашения. Такие облигации называются *отзывными*. Эмитент облигации обязан периодически (обычно раз в год или полгода) выплачивать определенные проценты от номинальной стоимости облигации.

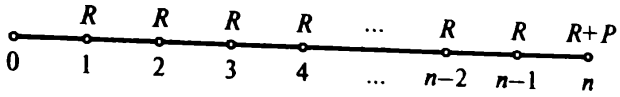
Купонная процентная ставка — это отношение суммы выплачиваемых процентов к номинальной стоимости облигации. Она определяет первоначальную рыночную стоимость облигации: чем выше купонная процентная ставка, тем выше рыночная стоимость облигации. В момент выпуска облигации купонная процентная ставка полагается равной рыночной процентной ставке.

В течение месяца с момента выпуска облигации называются *облигациями нового выпуска*. Если облигация продается на вторичном рынке более месяца, то она называется *обращающейся облигацией*.

§ 21.2. ОСНОВНОЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

Облигацию можно рассматривать как простую ренту постнумерандо, состоящую из выплат купонных процентов и возмещения номинальной стоимости облигации. Поэтому текущая стоимость облигации равна современной стоимости этой ренты.

Пусть i — текущая рыночная процентная ставка, k — купонная процентная ставка, P — номинальная стоимость облигации, n — оставшийся срок до погашения облигации, $R = kP$ — купонный платеж, A_n — текущая рыночная стоимость облигации.



Тогда $A_n = R\dfrac{1-1/(1+i)^n}{i} + P/(1+i)^n$. Мы воспользовались формулой для современной стоимости простой ренты постнумерандо.

Пример 84. Номинальная стоимость облигации $P = 5000$ руб., купонная процентная ставка $k = 15\%$, оставшийся срок до погашения облигации $n = 3$ года, текущая рыночная процентная ставка $i = 12\%$. Определим текущую рыночную стоимость облигации.

Величина купонных платежей равна $R = kP = 0{,}15 \times 5000 = 750$ руб. Тогда текущая рыночная стоимость облигации равна

$$A_n = R\frac{1-1/(1+i)^n}{i} + P/(1+i)^n = 750\frac{1-1/(1+0{,}12)^3}{0{,}12} + \frac{5000}{(1+0{,}12)^3} \approx$$

$\approx 5360{,}27$ руб., то есть в случае $i < k$ текущая рыночная стоимость облигации выше номинальной стоимости облигации P.

Задача 84. Определить текущую рыночную стоимость облигации в примере 84, если текущая рыночная процентная ставка $i = 18\%$.

§ 21.3. НОРМА ПРИБЫЛИ ОБЛИГАЦИИ

Другой важнейшей характеристикой облигации является *норма прибыли*. Норма прибыли вычисляется по следующей формуле:

норма прибыли = **текущая доходность за период** + **доходность за счет изменения цены за период**.

Здесь текущая доходность за период = купонный платеж : цена облигации в начале периода,

доходность за счет изменения цены за период = (цена облигации в конце периода − цена облигации в начале периода) : цена облигации в начале периода.

Отсюда

норма прибыли = (купонный платеж + цена облигации в конце периода − цена облигации в начале периода) : цена облигации в начале периода.

Пример 85. Облигация номинальной стоимостью $P = 1000$ руб. с купонной процентной ставкой $k = 10\%$ была куплена в начале года за 1200 руб. (то есть по цене выше номинальной стоимости). После получения купонного платежа в конце года облигация была продана за 1175 руб. Определим норму прибыли за год.

Величина купонных платежей равна $R = kP = 0{,}1 \times 1000 = 100$ руб.

Тогда норма прибыли = (купонный платеж + цена облигации в конце периода − цена облигации в начале периода)/(цена облигации в начале периода) = (100 + 1175 − 1200)/1200 = 0,0625 (= 6,25%).

Задача 85. Облигация номинальной стоимостью $P = 1000$ руб. с купонной процентной ставкой $k = 15\%$ была куплена в начале года за 700 руб. (то есть по цене ниже номинальной стоимости). После получения купонного платежа в конце года облигация была продана за 750 руб. Определить норму прибыли за год.

§ 21.4. ДОХОДНОСТЬ ОБЛИГАЦИИ ПРИ ПОГАШЕНИИ В КОНЦЕ СРОКА

Очень часто инвестор решает задачу сравнения между собой различных облигаций. Как определить процентную ставку (доходность), в соответствии с которой облигация приносит доход? Для этого нужно решить относительно i уравнение $A_n = R\dfrac{1 - 1/(1+i)^n}{i} + P/(1+i)^n$.

Мы рассмотрим два приближенных метода решения этого нелинейного уравнения.

§ 21.4.1. Метод средних

Находим *общую сумму выплат по облигации* (все купонные платежи и номинальная стоимость облигации):

общая прибыль = **общая сумма выплат** − **цена покупки облигации** ·

Тогда **средняя прибыль за один период** = **общая прибыль** : **число периодов** ·

средняя стоимость облигации = (**номинальная стоимость облигации** + **цена покупки облигации**) : 2.

Тогда доходность облигации вычисляется по следующей формуле:

доходность облигации ≈ **средняя прибыль за один период** : **средняя стоимость облигации** ·

Пример 86. Облигация номинальной стоимостью $P = 1000$ руб. с купонной процентной ставкой $k = 10\%$ и сроком погашения $n = 10$ лет была куплена за 1200 руб. Определим доходность облигации методом средних.

Величина купонных платежей равна $R = kP = 0{,}1 \times 1000 = 100$ руб. Тогда общая сумма выплат равна $nR + P = 10 \times 100 + 1000 = 2000$ руб.

Отсюда общая прибыль = общая сумма выплат − цена покупки облигации = 2000 − 1200 = 800 руб.

Поэтому средняя прибыль за один период = (общая прибыль)/(число периодов) = 800/10 = 80 руб.

Средняя стоимость облигации = (номинальная стоимость облигации + цена покупки облигации)/2 = (1000 + 1200)/2 = 1100 руб. Тогда доходность облигации ≈ (средняя прибыль за один период)/(средняя стоимость облигации) равна $80/1100 \approx 0{,}073$ (= 7,3%).

Задача 86. Облигация номинальной стоимостью $P = 1000$ руб. с купонной процентной ставкой $k = 15\%$ и сроком погашения $n = 10$ лет была куплена за 800 руб. Определить доходность облигации методом средних.

§ 21.4.2. Метод интерполяции

Метод интерполяции позволяет получить более точное приближенное значение доходности облигации, чем метод средних. Используя метод средних, нужно найти два различных близких зна-

чения текущей рыночной процентной ставки i_0 и i_1 таких, что текущая рыночная цена облигации A_n заключена между $A_n(i_1)$ и $A_n(i_0)$: $A_n(i_1) < A_n < A_n(i_0)$, где значения $A_n(i_0)$ и $A_n(i_1)$ вычисляются по следующей формуле: $A_n(i) = R\dfrac{1 - 1/(1+i)^n}{i} + P/(1+i)^n$. Здесь P — номинальная стоимость облигации, n — оставшийся срок до погашения облигации, R — купонный платеж.

Тогда приближенное значение доходности облигации равно: $i \approx i_0 + \dfrac{A_n - A_n(i_0)}{A_n(i_1) - A_n(i_0)}(i_1 - i_0)$.

Пример 87. Определим доходность облигации методом интерполяции в примере 86.

Методом средних получено значение доходности облигации $i = 0{,}073$. Положим $i_0 = 0{,}07$ и $i_1 = 0{,}08$ и определим текущую стоимость облигации при этих значениях рыночной процентной ставки:

$$A_n(i_0) = R\frac{1 - 1/(1+i_0)^n}{i_0} + P/(1+i_0)^n = 100\frac{1 - 1/(1+0{,}07)^{10}}{0{,}07} + \frac{1000}{(1+0{,}07)^{10}} \approx 1210{,}71 \text{ руб.}$$

$$A_n(i_1) = R\frac{1 - 1/(1+i_1)^n}{i_1} + P/(1+i_1)^n = 100\frac{1 - 1/(1+0{,}08)^{10}}{0{,}08} + \frac{1000}{(1+0{,}08)^{10}} \approx 1134{,}20 \text{ руб.}$$

Так как $A_n = 1200$ руб., то условия $A_n(i_1) < A_n < A_n(i_0)$ выполнены ($1134{,}20 < 1200 < 1210{,}71$). Тогда приближенное значение доходности облигации равно:

$$i \approx i_0 + \frac{A_n - A_n(i_0)}{A_n(i_1) - A_n(i_0)}(i_1 - i_0) = 0{,}07 + \frac{1200 - 1210{,}71}{1134{,}20 - 1210{,}71}(0{,}08 - 0{,}07) \approx$$
$$\approx 0{,}071\ (= 7{,}1\%).$$

Задача 87. Определить доходность облигации методом интерполяции в задаче 86.

§ 21.5. ДОХОДНОСТЬ ОТЗЫВНЫХ ОБЛИГАЦИЙ

Отзывные облигации содержат условие, по которому эмитент имеет право выкупа облигации до истечения срока погашения. Инвестор должен учитывать это условие при вычислении доходности такой облигации.

Доходность отзывной облигации находим из следующего уравнения: $A_N = R\frac{1-1/(1+i)^N}{i} + T/(1+i)^N$, где A_N — текущая рыночная стоимость облигации, N — оставшийся срок до момента отзыва облигации, R — купонный платеж, T — цена отзыва облигации (сумма, выплачиваемая эмитентом в случае досрочного погашения облигации).

Приближенное значение доходности отзывной облигации можно определить методом средних или методом интерполяции.

Замечание. Мастер функций f_x пакета Excel содержит финансовые функции *ЦЕНА* и *ДОХОД*, которые позволяют вычислить текущую рыночную стоимость облигации и доходность облигации соответственно. Чтобы эти функции были доступны, должна быть установлена надстройка *Пакет анализа*: выбрать *Сервис* → *Надстройки* и поставить «галочку» рядом с командой *Пакет анализа*. Если команда *Пакет анализа* отсутствует, то нужно доустановить Excel.

Финансовая функция *ЦЕНА* (*PRICE*) возвращает текущую рыночную стоимость облигации номинальной стоимостью 100 руб.: f_x → *финансовые* → *ЦЕНА* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *Дата_согл* (*Settlement*) — это дата, на которую определяется текущая рыночная стоимость A_n облигации (в формате даты). *Дата_вступл_в_силу* (*Maturity*) — это дата погашения облигации (в формате даты). *Ставка* (*Rate*) — это купонная процентная ставка *k*. *Доход* (*Yld*) — это текущая рыночная процентная ставка *i*. *Погашение* (*Redemption*) — это номинальная стоимость облигации (= 100 руб.). *Частота* (*Frequency*) — это число купонных платежей в году. *Базис* (*Basis*) — это практика начисления процентов, возможные значения: 0 или не указан (американская, 1 полный месяц = 30 дней, 1 год = 360 дней); 1 (английская); 2 (французская); 3 (срок равен фактическому числу дней, 1 год = 365 дней); 4 (немецкая). *OK*.

В примере 84 будем считать, что «9.6.2004» и «9.6.2007» — это дата, на которую определяется рыночная цена облигации, и дата погашения облигации соответственно. Тогда A_n = 50×*ЦЕНА*(«9.6.2004»; «9.6.2007»; 0,15; 0,12; 100; 1) ≈ 5360,27 руб.

Финансовая функция *ДОХОД* (*YIELD*) возвращает доходность облигации: f_x → *финансовые* → *ДОХОД* → *OK*. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. *Цена* (*Pr*) — это текущая рыночная стоимость облигации. *OK*.

В примере 86 будем считать, что «9.6.2004» и «9.6.2014» — это текущая дата и дата погашения облигации соответственно. Тогда доходность облигации *i* = ДОХОД(«9.6.2004»; «9.6.2014»; 0,1; 120; 100; 1) ≈ ≈ 0,071346946.

Глава 22

АКЦИИ

Акционерным обществом признается общество, уставный капитал которого разделен на определенное число акций. Участники акционерного общества (*акционеры*) не отвечают по его обязательствам и несут риск убытков, связанных с деятельностью общества, в пределах стоимости принадлежащих им акций.

Акции — это ценные бумаги, выпускаемые акционерным обществом для финансирования своей деятельности и указывающие на долю владельца в капитале данного акционерного общества. Существует несколько видов акций, различающихся по степени участия инвесторов в потенциальных рисках и прибылях, связанных с деятельностью эмитента. Мы рассмотрим только привилегированные и обыкновенные акции.

§ 22.1. ПРИВИЛЕГИРОВАННЫЕ АКЦИИ

Привилегированные акции — это акции, держатели которых обладают преимуществом перед держателями обыкновенных акций при распределении дивидендов и (в случае ликвидации акционерного общества) имущества акционерного общества. Доля привилегированных акций в общем объеме уставного капитала акционерного общества не должна превышать 25%. Привилегированные акции обычно не дают право голоса, но приносят фиксированные дивиденды, чем схожи с облигациями.

Различают следующие виды привилегированных акций:

✧ *кумулятивные привилегированные акции* (если прибыли недостаточно для выплаты дивидендов, то обязательства по выплате дивидендов по привилегированным акциям переносятся на следующий год);

✧ *погашаемые привилегированные акции* (предприятие может выкупить в будущем такие акции);

✧ *привилегированные акции с участием в дивидендах* (дают право на дополнительные выплаты);

✧ *конвертируемые привилегированные акции* (могут быть обменены на обыкновенные акции).

Привилегированные акции выпускаются в том случае, когда акционеры не хотят расширять количество людей, участвующих в управлении предприятием.

Если выплаты дивидендов продолжаются бесконечно долго, то доход от продажи такой акции представляет собой текущее значение бессрочной ренты постнумерандо: $A = D/k$, где A — курс привилегированной акции, D — дивиденды по привилегированной акции, k — доходность. Отсюда $k = D/A$.

Пример 88. По обращающимся привилегированным акциям выплачиваются ежегодные дивиденды $D = 120$ руб. Цена этой акции равна $A = 960$ руб. Определим доходность акции.

Доходность акции равна $k = D/A = 120/960 = 0{,}125$ (= 12,5%).

Задача 88. По обращающимся привилегированным акциям выплачиваются ежегодные дивиденды $D = 50$ руб. Цена этой акции равна $A = 500$ руб. Определить доходность акции.

Владельцы привилегированных акций имеют относительно мало прав, хотя и получают дивиденды определенного размера до выплаты дивидендов по обыкновенным акциям. Поэтому в настоящее время к выпуску привилегированных акций прибегают только в особых ситуациях (например, для планирования размеров выплачиваемых налогов или для обеспечения контроля над результатами голосования по принимаемым решениям). Выпуск привилегированных акций может сопровождаться правом обмена этих акций на обыкновенные акции.

В последнее время привилегированные акции утратили популярность, так как теперь основное внимание инвесторы уделяют росту дивидендов и повышению стоимости капитала.

§ 22.2. ОБЫКНОВЕННЫЕ АКЦИИ

Обыкновенные акции — это акции, по которым размер дивиденда заранее не фиксируется и не гарантируется, а определяется общим собранием акционеров по итогам хозяйственной деятельности акционерного общества за истекший год. Они дают их владельцам право на участие в управлении этим акционерным обществом по принципу «одна акция — один голос».

Владелец обыкновенной акции имеет право на получение ежегодно публикуемых материалов бухгалтерской отчетности и годового отчета.

Обыкновенные акции акционерных обществ продаются на открытых торгах на фондовых биржах. Курс акции может колебаться в зависимости от результатов хозяйственной деятельности акционерного общества и степени доверия, которое внушает будущее данного акционерного общества инвесторам. Инвестор полагает стоимость акции равной текущему значению ожидаемого по этой акции потока платежей (ожидаемые дивиденды и цена продажи акции).

Введем следующие обозначения: D_0 — последний из уже выплаченных дивидендов, D_t — ожидаемый в году t дивиденд (с точки зрения акционера). У каждого акционера свое значение D_t.

Пусть P_0 — рыночная цена акции в настоящий момент, $\hat{P}_0$ — теоретическая (внутренняя) цена акции в настоящий момент (именно такая цена должна быть в настоящий момент с точки зрения инвестора). Оценка $\hat{P}_0$ основывается на ожидаемом потоке платежей по акции и рисковости этого потока.

Рыночная цена акции P_0 одинакова для всех, а вот теоретическая (внутренняя) цена акции $\hat{P}_0$ у каждого инвестора своя (в зависимости от ожиданий).

Допускается существование некоторого «среднего» инвестора, для которого эти цены равны: $P_0 = \hat{P}_0$ (иначе равновесие рынка будет нарушено и для его восстановления потребуется покупка или продажа акций).

Пусть P_t — ожидаемая цена акции в конце года t, $\hat{P}_1$ — теоретическая (внутренняя) цена акции в конце 1-го года и т. д.

Введем следующие обозначения: g — ожидаемый темп роста дивидендов по прогнозам «среднего» инвестора, $\hat{k}_s$ — требуемый уровень дохода (норма прибыли) по акции с учетом уровня риска и других возможностей инвестирования, k_s — ожидаемая норма прибыли.

Инвестор купит акцию только при выполнении следующего условия: $\hat{k}_s \leqslant k_s$ (ожидаемая норма прибыли не ниже требуемого уровня дохода).

Реальную норму прибыли также будем обозначать через k_s. Она может быть даже отрицательной.

Ожидаемая дивидендная доходность в текущем году равна $\frac{D_1}{P_0}$, а ожидаемая доходность за счет изменения цены акции равна $\frac{P_1 - P_0}{P_0}$.

Сумма этих двух ожидаемых доходностей и определяет ожидаемую доходность по акции в текущем году: $k_s = \frac{D_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{D_1 + P_1}{P_0} - 1$.

Пример 89. Рыночная цена акции в настоящий момент $P_0 = 100$ руб. Ожидаемая цена акции в конце текущего года равна $P_1 = 105$ руб., а ожидаемый дивиденд в текущем году $D_1 = 10$ руб. Определим ожидаемую дивидендную доходность, ожидаемую доходность за счет изменения цены акции и ожидаемую доходность по акции в текущем году.

Ожидаемая дивидендная доходность в текущем году равна $\frac{D_1}{P_0} = \frac{10}{100} = 0{,}1\ (= 10\%)$.

Ожидаемая доходность за счет изменения цены акции равна $\frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{105 - 100}{100} = 0{,}05\ (= 5\%)$.

Тогда ожидаемая доходность по акции в текущем году $k_s = 10\% + 5\% = 15\%$.

Задача 89. Рыночная цена акции в настоящий момент $P_0 = 110$ руб. Ожидаемая цена акции в конце текущего года равна $P_1 = 120$ руб., а ожидаемый дивиденд в текущем году $D_1 = 5$ руб. Определить ожидаемую дивидендную доходность, ожидаемую доходность за счет изменения цены акции и ожидаемую доходность по акции в текущем году.

Теоретически прибыль предприятия может быть поделена на две части: выплачиваемые дивиденды и нераспределенная прибыль. Акционерам предприятия выгодно реинвестирование, когда предприятие успешно работает и когда у них нет более эффективного вложения капитала. В этом случае относительно небольшие дивиденды компенсируются ростом курса акций. Поэтому при покупке акций инвестор должен определить, что для него важнее: дивиденды или доход от прироста капитала.

§ 22.3. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ АКЦИЙ

Для инвестора теоретическая (внутренняя) цена акции $\hat{P}_0$ в настоящий момент равна текущему значению дивидендов, которые он надеется получить: $\hat{P}_0 = \frac{D_1}{1 + k_s} + \frac{D_2}{(1 + k_s)^2} + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + k_s)^t}$.

Существует взаимосвязь между ростом дивидендов и курсом акций. Чем устойчивее рост дивидендов, тем выше рейтинг акционерного общества у инвесторов и тем устойчивее курс акций.

§ 22.4. АКЦИИ НУЛЕВОГО РОСТА

Считаем, что по прогнозу «среднего» инвестора дивиденды по обыкновенным акциям останутся постоянными: $D_1 = D_2 = ... = D$, то есть $D_t = D$, где $t = 1, 2, ...$ Такая акция называется *акцией нулевого роста*. Теоретическая (внутренняя) цена акции нулевого роста представляет собой текущее значение бессрочной ренты постнумерандо: $\widehat{P}_0 = D/k_s$.

Пример 90. Дивиденд, выплачиваемый ежегодно по акции нулевого роста, равен $D = 400$ руб. Ожидаемая норма прибыли $k_s = 5\%$. Определим теоретическую (внутреннюю) цену акции.

Теоретическая (внутренняя) цена акции нулевого роста $\widehat{P}_0 = D/k_s = 400/0{,}05 = 8000$ руб.

Задача 90. Дивиденд, выплачиваемый ежегодно по акции нулевого роста, равен $D = 300$ руб. Ожидаемая норма прибыли $k_s = 8\%$. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции.

Так как у каждого инвестора свои прогнозы, то реальный курс акции часто отличен от теоретического курса акции. Зная курс акции нулевого роста в настоящий момент P_0 и последний из уже выплаченных дивидендов D, можно определить норму прибыли (доходность) этой акции по следующей формуле: $k_s = D/P_0$. Именно такую доходность ожидает получить по акции нулевого роста инвестор.

Пример 91. Курс акции нулевого роста в настоящий момент $P_0 = 400$ руб., а последний из уже выплаченных дивидендов $D = 40$ руб. Определим норму прибыли (доходность) этой акции.

Норма прибыли (доходность) акции нулевого роста равна $k_s = D/P_0 = 40/400 = 0{,}1$ (= 10%).

Задача 91. Курс акции нулевого роста в настоящий момент $P_0 = 300$ руб., а последний из уже выплаченных дивидендов $D = 15$ руб. Определить норму прибыли (доходность) этой акции.

§ 22.5. АКЦИИ НОРМАЛЬНОГО РОСТА

Акции нормального (постоянного) роста — это акции, по которым ожидается рост дивидендов с постоянным темпом g, то есть ожидаемый в году t дивиденд D_t определяется по следующей формуле сложных процентов: $D_t = D_0(1 + g)^t$.

Пример 92. Последний из уже выплаченных дивидендов по акциям нормального роста $D_0 = 400$ руб., а ожидаемый темп роста дивидендов $g = 10\%$. Определим дивиденд, который акционер ожидает получить в текущем году.

Здесь $t = 1$. Тогда дивиденд D_1, который акционер ожидает получить в текущем году, равен $D_1 = D_0(1 + g)^1 = 400(1 + 0{,}1) = 440$ руб.

Задача 92. Последний из уже выплаченных дивидендов по акциям нормального роста $D_0 = 450$ руб., а ожидаемый темп роста дивидендов $g = 5\%$. Определить дивиденд, который акционер ожидает получить в текущем году.

Теоретическая (внутренняя) цена акции нормального роста равна

$$\hat{P}_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + k_s)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_0(1 + g)^t}{(1 + k_s)^t} = D_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1 + g}{1 + k_s}\right)^t.$$

Мы получили бесконечную сумму элементов геометрической прогрессии с $b_1 = D_0 \dfrac{1 + g}{1 + k_s}$ и знаменателем $q = \dfrac{1 + g}{1 + k_s}$.

Если $|q| < 1$, то эта сумма равна $\hat{P}_0 = \dfrac{b_1}{1 - q} = \dfrac{D_0 \dfrac{1 + g}{1 + k_s}}{1 - \dfrac{1 + g}{1 + k_s}} =$

$= \dfrac{D_0(1 + g)}{k_s - g} = \dfrac{D_1}{k_s - g}$, где D_1 — это дивиденд, который акционер ожидает получить в текущем году.

Пример 93. Определим теоретическую (внутреннюю) цену акции нормального роста из примера 92 при требуемом уровне доходности $k_s = 12\%$.

Теоретическая (внутренняя) цена акции нормального роста равна

$$\hat{P}_0 = \frac{D_1}{k_s - g} = \frac{440}{0{,}12 - 0{,}1} = 22000 \text{ руб.}$$

Задача 93. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции нормального роста из задачи 92 при требуемом уровне доходности $k_s = 8\%$.

Если $g \geqslant k_s$, то условие $|q| < 1$ не выполняется и теоретическая (внутренняя) цена акции нормального роста в этом случае есть бесконечно большая величина.

Определим из равенства $P_0 = \dfrac{D_1}{k_s - g}$ ожидаемую норму прибыли (доходность) акции нормального роста. Здесь P_0 — это рыночная цена акции в настоящий момент.

Получаем, что $k_s = D_1/P_0 + g$, где D_1/P_0 — это дивидендная доходность и g — это доходность за счет изменения курса акции (курс акции нормального роста растет с тем же постоянным темпом роста g, что и дивиденды).

Пример 94. Рыночная цена акции нормального роста в настоящий момент $P_0 = 1000$ руб. Ожидается, что дивиденд в текущем году будет равен $D_1 = 50$ руб., а темп роста $g = 7\%$. Определим ожидаемую норму прибыли (доходность) этой акции.

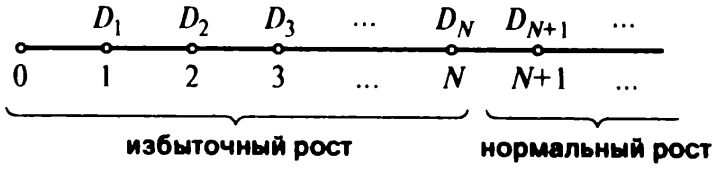
Ожидаемая норма прибыли (доходность) акции нормального роста $k_s = D_1/P_0 + g = 50/1000 + 0{,}07 = 0{,}12$ (= 12%).

Задача 94. Рыночная цена акции нормального роста в настоящий момент $P_0 = 500$ руб. Ожидается, что дивиденд в текущем году будет равен $D_1 = 60$ руб., а темп роста $g = 4\%$. Определить ожидаемую норму прибыли (доходность) этой акции.

§ 22.6. АКЦИИ ИЗБЫТОЧНОГО РОСТА

Очень часто начальный период деятельности предприятий характеризуется ускоренным ростом, превышающим рост экономики в целом. Такие предприятия называются *предприятиями избыточного роста*, а их акции — *акциями избыточного роста*. Для предприятия избыточного роста характерен избыточный рост дивидендов. После периода избыточного роста темпы роста предприятия (и дивидендов) остаются постоянными.

Введем следующие обозначения: k_s — требуемая норма прибыли, N — период избыточного роста, g_s — темп роста доходов и дивидендов в течение периода избыточного роста, g_n — постоянный темп роста после периода избыточного роста, D_0 — последний из уже выплаченных дивидендов.



Тогда теоретическая (внутренняя) цена акции избыточного роста $\hat{P}_0$ равна текущему значению дивидендов:

$$\hat{P}_0 = \frac{D_1}{1+k_s} + \frac{D_2}{(1+k_s)^2} + \frac{D_3}{(1+k_s)^3} + \ldots + \frac{D_N}{(1+k_s)^N} + \frac{\frac{D_{N+1}}{k_s - g_n}}{(1+k_s)^N} =$$

$$= \frac{D_0(1+g_s)}{1+k_s} + \frac{D_0(1+g_s)^2}{(1+k_s)^2} + \frac{D_0(1+g_s)^3}{(1+k_s)^3} + \ldots + \frac{D_0(1+g_s)^N}{(1+k_s)^N} +$$

$$+ \frac{D_0(1+g_s)^N(1+g_n)}{(k_s - g_n)(1+k_s)^N}.$$

После несложных (но утомительных) выкладок получаем, что теоретическая (внутренняя) цена акции избыточного роста равна:

$$\hat{P}_0 = \frac{D_0}{(g_s - k_s)(k_s - g_n)}\left(\left(\frac{1+g_s}{1+k_s}\right)^N (g_s - g_n)(1+k_s) - (1+g_s)(k_s - g_n)\right).$$

Пример 95. Период избыточного роста $N = 5$ лет, темп роста доходов и дивидендов в течение периода избыточного роста $g_s = 20\%$, постоянный темп роста после периода избыточного роста $g_n = 5\%$, последний из уже выплаченных дивидендов $D_0 = 400$ руб., требуемая норма прибыли $k_s = 10\%$. Определим теоретическую (внутреннюю) цену акции избыточного роста.

Теоретическая (внутренняя) цена акции избыточного роста равна:

$$\hat{P}_0 = \frac{D_0}{(g_s - k_s)(k_s - g_n)}\left(\left(\frac{1+g_s}{1+k_s}\right)^N (g_s - g_n)(1+k_s) - (1+g_s)(k_s - g_n)\right) =$$

$$= \frac{400}{(0{,}2 - 0{,}1)(0{,}1 - 0{,}05)}\left(\left(\frac{1+0{,}2}{1+0{,}1}\right)^5 (0{,}2 - 0{,}05)(1+0{,}1) - (1+0{,}2)\times\right.$$

$$\left.\times(0{,}1 - 0{,}05)\right) \approx 15594{,}67 \text{ руб.}$$

Задача 95. Период избыточного роста $N = 4$ года, темп роста доходов и дивидендов в течение периода избыточного роста $g_s = 25\%$, постоянный темп роста после периода избыточного роста $g_n = 10\%$, последний из уже выплаченных дивидендов $D_0 = 450$ руб., требуемая норма прибыли $k_s = 14\%$. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции избыточного роста.

Хотя акции и демонстрируют способность к резким взлетам и падениям при появлении различных сенсационных сообщений (например, о слиянии предприятий), все же это не тот товар, который за сутки может возрасти в цене в несколько раз.

Ответы

1. 7350 руб. **2.** 2 года. **3.** 20% годовых. **4.** 5581,4 руб. **5.** 3533,33 руб., 3561,11 руб., 3539,73 руб. **6.** 4500 руб. **7.** 7760 руб. **8.** 14716,44 руб. **9.** 7272,73 руб. **10.** 16% годовых. **11.** 119 дней. **12.** 9317 руб. **13.** 1,9 лет. **14.** 15,5% годовых. **15.** 3945,1 руб. **16.** –4 и 2. **17.** 0,5 и 0,9. **18.** 10976,75 руб. **19.** 7109,49 руб. **20.** 8584,61 руб. **21.** 8599,98 руб. **22.** 10271,88 руб. **23.** 26,8%. **24.** 11,4%. **25.** 25,2% годовых. **26.** 7,9% годовых. **27.** 18,72% годовых. **28.** 1,8% годовых. **29.** Лучше вариант с простой процентной ставкой. **30.** Лучше вариант с простой процентной ставкой. **31.** Лучше вариант с простой процентной ставкой. **32.** 12,7% годовых. **33.** 19,1% годовых. **35.** 4127,52 руб. **36.** 4705,37 руб. **37.** 2785,96 руб. **38.** 3175,99 руб. **39.** 14224,33 руб. **40.** 12477,49 руб. **41.** 21015,92 руб. **42.** 18274,71 руб. **43.** 4,05 и 3,65. **44.** 5,1 и 4,45. **45.** 26% и 16%. **46.** 7932,12 руб. и 2780,68 руб. **47.** 6584,02 руб. **48.** 61640,85 руб. **49.** 49714,22 руб. **50.** 10868,32 руб. **51.** 2000 руб. **52.** 98039,22 руб. **53.** 156783,25 руб. **54.** Размер ежегодных выплат 6509,82 долл. **55.** Выплаты (долл.): 8000, 7600, 7200, 6800, 6400, 6000, 5600, 5200, 4800, 4400. **56.** Размер ежегодных выплат 8000 долл. **57.** Выплаты (долл.): 7000, 6700, 6400, 6100, 5800, 5500, 5200, 4900, 4600, 14300. **58.** 87,86 тыс. руб.; 5,3 мес.; 2,7. **59.** 17,4% годовых. **60.** 29 тыс. руб.; 0,193; 0,117; 0,029. **61.** 1,135; 1,420 оборота; 1,024; 0,283 оборота; 1,108; 1,136 оборота. **62.** 7,65 дня; 47,1. **63.** 15; 24 дня. **64.** 72,14 руб. **65.** 175 руб.; 1833 руб.; 117 руб.; 6,25 руб.; 0,471; 0,314; 0,025; 3,3%; 0,75; 0,064; 0,467; 800 тыс. руб.; 0,533; 0,036; 0,017; 0,669. **66.** 13,96 коп.; 17,45 коп. **67.** 79,51 руб. **68.** 2,38 руб. **69.** 8 руб. **70.** 23 августа. **71.** 9,73% и 20%. **72.** 7213,15 руб. **73.** 7220,88 руб. **74.** 8254,56 руб. **75.** 0,04 млн. руб.; –0,05 млн. руб.; проект *А*. **76.** 10%. **77.** 1,7 лет; 2,375 лет. **78.** 20%; 13,6%. **79.** 1,08 и 1,07. Увеличилось. **80.** 2,49; 2,30 и 2,3. Увеличилось. **81.** 55,27 руб.; –3,27 руб. и 2,73 руб.; 0,43 и 0,57. **82.** 45,2 руб. **83.** 40,11 руб.; 8 руб.; 3,25 руб.; 8,1%. **84.** 4673,86 руб. **85.** 28,6%. **86.** 18,9%. **87.** 20,6%. **88.** 10%. **89.** 4,5%, 9,1% и 13,6%. **90.** 3750 руб. **91.** 5%. **92.** 472,5 руб. **93.** 15000 руб. **94.** 16%. **95.** 20166,34 руб.

Программа учебного курса «Статистика финансов»

1. Основные понятия финансовой математики. Проценты, процентная ставка, первоначальная и наращенная суммы, период начисления, интервал начисления, декурсивный и антисипативный способы начисления процентов, ссудный процент, учетная ставка, простые и сложные проценты.
2. Простые ставки ссудных процентов. Нахождение наращенной суммы. Математическое дисконтирование. Случай изменения простой ставки ссудного процента.
3. Английская, немецкая и французская практики начисления процентов.
4. Простые учетные ставки. Дисконт. Банковский учет.
5. Сложные ставки ссудных процентов. Нахождение наращенной суммы. Математическое дисконтирование. Случай, когда период начисления не является целым числом. Целая и дробная части числа. Случай изменения сложной ставки ссудного процента.
6. Начисление сложных процентов несколько раз в году. Номинальная процентная ставка.
7. Непрерывное начисление сложных процентов.
8. Сложные учетные ставки.
9. Учет инфляционного обесценения денег в принятии финансовых решений. Уровень (темп) инфляции. Индекс инфляции.
10. Ставка, учитывающая инфляцию, для случая простых процентов. Формула Фишера. Инфляционная премия.
11. Ставка, учитывающая инфляцию, для случая сложных процентов.
12. Сравнение операций. Эквивалентные процентные ставки. Нахождение эквивалентной простой процентной ставки для простой учетной ставки.
13. Нахождение эквивалентной простой процентной ставки для сложной процентной ставки.
14. Нахождение эквивалентной простой процентной ставки для номинальной ставки сложных процентов.
15. Нахождение эквивалентной номинальной ставки сложных процентов для сложной процентной ставки.
16. Модели финансовых потоков. Основные понятия: аннуитет (финансовая рента), величина отдельного платежа, срок ренты, интервал ренты, постоянная и переменная ренты, ренты постнумерандо и пренумерандо, процентная ставка. Наращенная (будущая) сумма ренты, современная (приведенная) стоимость ренты. Виды рент (верные и условные, отложенные, простые и общие).
17. Нахождение наращенной суммы для простой ренты постнумерандо.
18. Нахождение наращенной суммы для простой ренты пренумерандо.

19. Определение современной стоимости для простой ренты.

20. Определение величины отдельного платежа для простой ренты.

21. Определение срока простой ренты.

22. Определение процентной ставки для простой ренты.

23. Отложенная рента. Нахождение наращенной суммы и определение современной стоимости.

24. Сведение общей ренты к простой ренте.

25. Наращенная (будущая) сумма общей ренты.

26. Определение современной стоимости общей ренты.

27. Преобразование простой ренты в общую ренту.

28. Простая бессрочная рента.

29. Общая бессрочная рента.

30. Бессрочная рента пренумерандо.

31. Арифметика ипотеки. Вариант 1 (аннуитет). Вариант 2 (справедливый, но не очень удобный). Вариант 3 (простой, но грабительский). Вариант 4 («хвост», погашаемый в конце срока).

32. Статистика кредита. Кредит. Краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные кредиты. Средний размер кредита. Средний срок пользования ссудами. Среднее число оборотов ссуд за год. Средняя процентная ставка по кредитам. Абсолютная сумма просроченных кредитов по банку. Относительные показатели просроченной задолженности (по сумме, по сроку, по сумме и сроку).

33. Статистика оборачиваемости кредита. Среднее число оборотов кредита. Оборот кредита по погашению. Индекс среднего числа оборотов кредита переменного состава. Индекс среднего числа оборотов кредита фиксированного состава. Индекс структурных сдвигов. Абсолютное изменение среднего числа оборотов кредита.

34. Статистика денежного обращения. Показатели денежного обращения. Денежное обращение. Закон денежного обращения. Объем денежного оборота. Средний остаток денег. Скорость документооборота. Длительность пребывания средств в расчетах. Число оборотов за период средств в расчетах.

35. Показатели скорости обращения денежной массы. Совокупная денежная масса. Денежные агрегаты. Совокупный объем денежной массы. Скорость обращения денег. Количество оборотов денег. Продолжительность одного оборота денежной массы.

36. Показатели купюрного строения денежной массы. Купюрное строение денежной массы. Достоинство средней купюры, выпущенной в обращение.

37. Что такое страхование? Страхование, страховой фонд, страховое возмещение, страховые выплаты. Страховщик, страхователь, договор страхования. Статистика и страхование.

38. Статистика имущественного страхования. Имущественное страхование. Материальные ценности. Показатели имущественного страхования. Абсолютные показатели имущественного страхования: страховое поле (число всех объектов), число застрахованных объектов, число застрахованных в добровольном порядке объектов, число страховых случаев, число пострадавших объектов, страховая сумма всех застрахованных объектов, страховая

сумма пострадавших объектов, сумма поступивших страховых платежей, сумма выплат страхового возмещения. Средние показатели имущественного страхования. Средняя страховая сумма застрахованных объектов. Средняя страховая сумма пострадавших объектов. Средний размер выплаченного страхового возмещения. Средний размер страхового платежа.

39. Относительные показатели имущественного страхования. Степень охвата страхового поля. Степень охвата объектов добровольным страхованием. Доля пострадавших объектов. Частота страховых случаев. Уровень опустошительности. Показатель полноты уничтожения. Коэффициент выплат страхового возмещения. Абсолютная сумма дохода страховой компании. Относительная доходность страховой компании. Уровень взносов по отношению к страховой сумме. Уровень убыточности страховых сумм. Коэффициент тяжести страховых событий.

40. Тарифная ставка. Брутто-ставка, нетто-ставка, нагрузка. Средний уровень убыточности за период. Стандартное отклонение индивидуальных уровней убыточности от среднего уровня. Построение нетто-ставки и брутто-ставки с заданным значением доверительной вероятности.

41. Статистика личного страхования. Личное страхование. Страховые суммы. Действия страхователя и страховщика. Установление тарифных ставок. Таблицы смертности и средней продолжительности предстоящей жизни. Число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + 1$. Вероятность умереть в возрасте x лет, не дожив до возраста $x + 1$ год. Вероятность дожить до возраста x лет. Единовременная нетто-ставка на дожитие для лица в возрасте x лет на срок t лет. Единовременная нетто-ставка на случай смерти для лица в возрасте x лет на срок n лет. Тарифная нетто-ставка по смешанному страхованию. Тарифная брутто-ставка по смешанному страхованию.

42. Нахождение эквивалентной сложной процентной ставки для номинальной сложной процентной ставки. Эффективная сложная процентная ставка.

43. Средний срок погашения ссуды одному кредитору.

44. Средняя и предельная ставки налога.

45. Реальная ставка доходности с учетом налога. Случай простой процентной ставки. Случай простой учетной ставки. Случай сложной процентной ставки.

46. Методы оценки инвестиций в условиях определенности. Инвестиционные решения. Краткосрочные решения. Долгосрочные инвестиционные проекты. Альтернативные издержки по инвестициям (стоимость капитала, минимально необходимая норма прибыли, ставка дисконтирования, процентная ставка).

47. Метод чистой приведенной стоимости.

48. Метод внутренней нормы доходности. Внутренняя норма доходности (дисконтированная норма прибыли). Нахождение внутренней нормы доходности методом линейной интерполяции.

49. Сравнение методов чистой приведенной стоимости и внутренней нормы доходности.

50. Метод окупаемости. Период окупаемости. Недостатки метода окупаемости. Дисконтированный метод расчета периода окупаемости.

51. Учетный коэффициент окупаемости инвестиций (прибыль на инвестированный капитал, прибыль на используемый капитал). Среднегодовая прибыль. Средняя стоимость инвестиций. Недостатки учетного коэффициента окупаемости инвестиций.

52. Анализ индексов дохода и цен. Индексы реального дохода Ласпейреса и Пааше.

53. Индексы цен Ласпейреса и Пааше. Индекс номинального дохода.

54. Определение средней цены на основании цен товаров и товарооборотов. Отклонение цены товара от средней цены. Удельный вес различных товаров в товарообороте.

55. Определение средней цены на основании цен товаров и структуры товарооборота.

56. Определение средней цены на основании цен товара и объемов продаж. Размах вариации цен. Среднее квадратическое отклонение цен. Коэффициент вариации цен.

57. Облигации. Основные определения (эмитент, номинальная (нарицательная) стоимость облигации, срок погашения, дата погашения, отзывные облигации, купонная процентная ставка, облигации нового выпуска, обращающиеся облигации).

58. Основной метод оценки стоимости облигаций.

59. Норма прибыли облигации. Текущая доходность за период. Доходность за счет изменения цены за период.

60. Доходность облигации при погашении в конце срока. Метод средних. Общая сумма выплат по облигации. Общая прибыль. Средняя прибыль за один период. Средняя стоимость облигации.

61. Нахождение доходности облигации при погашении в конце срока методом интерполяции. Доходность отзывных облигаций. Цена отзыва облигации.

62. Акции. Акционерное общество, акционеры. Привилегированные акции. Доходность привилегированной акции.

63. Обыкновенные акции. Ожидаемая дивидендная доходность. Ожидаемая доходность за счет изменения курса акции. Ожидаемая доходность акции.

64. Оценка стоимости акций. Теоретическая (внутренняя) цена акции.

65. Акции нулевого роста. Теоретическая (внутренняя) цена акции нулевого роста. Норма прибыли (доходность) акции нулевого роста.

66. Акции нормального роста. Теоретическая (внутренняя) цена акции нормального роста. Дивидендная доходность акции нормального роста. Доходность за счет изменения курса акции нормального роста. Норма прибыли (доходность) акции нормального роста.

67. Предприятия избыточного роста. Акции избыточного роста. Теоретическая (внутренняя) цена акции избыточного роста.

68. Нахождение эквивалентной сложной процентной ставки для номинальной сложной процентной ставки. Эффективная сложная процентная ставка.

Задачи для контрольной работы по курсу «Статистика финансов»

1–10. а) Первоначальная сумма P руб. помещена в банк на срок n лет под $i\%$ годовых (проценты простые). Найти наращенную сумму, эквивалентные значения простой учетной ставки, сложной процентной ставки, сложной номинальной процентной ставки (проценты начисляются m раз в году). Найти наращенную сумму, если ставка налога на проценты $q\%$. Уровень инфляции за рассматриваемый период оказался равным $\alpha\%$. Какова реальная доходность операции?

б) Первоначальная сумма P руб., наращенная сумма S руб., процентная ставка $i\%$ годовых (проценты простые). Найти период начисления.

в) Первоначальная сумма P руб., наращенная сумма S руб., период начисления n лет. Найти простую процентную ставку.

г) Первоначальная сумма P руб. помещена в банк на срок с a по b под $i\%$ годовых (проценты простые). Найти наращенную сумму в английской, немецкой и французской практиках.

	P	n	i	q	m	α	S	a	b
1	6000	0,5	16	15	2	1,1	6300	12.03	27.08
2	7000	0,25	11	11	4	1,2	7200	03.04	15.09
3	8000	0,75	17	16	12	1,3	8400	11.05	09.10
4	9000	0,5	18	17	4	1,4	9300	17.06	23.11
5	6500	0,25	9	9	12	1,5	6900	24.07	05.12
6	5500	0,75	13	12	2	1,6	5800	23.03	14.08
7	7500	0,5	19	17	12	1,7	7700	16.04	26.09
8	5300	0,25	8	8	2	1,8	5700	19.05	21.10
9	6400	0,75	7	9	4	1,9	6800	24.06	09.11
10	7900	0,75	14	13	12	2	8200	11.07	15.12

11–20. а) Первоначальная сумма P руб. помещена в банк на срок n лет под простую учетную ставку $d\%$ годовых. Найти наращенную сумму, эквивалентные значения простой процентной ставки, сложной процентной ставки, сложной номинальной процентной ставки

(проценты начисляются m раз в году). Найти наращенную сумму, если ставка налога на проценты $q\%$. Уровень инфляции за рассматриваемый период оказался равным $\alpha\%$. Какова реальная доходность операции?

б) Первоначальная сумма P руб., наращенная сумма S руб., простая учетная ставка $d\%$ годовых. Найти период начисления.

в) Первоначальная сумма P руб., наращенная сумма S руб., период начисления n лет. Найти простую учетную ставку.

г) Первоначальная сумма P руб. помещена в банк на срок с a по b под простую учетную ставку $d\%$ годовых. Найти наращенную сумму в английской, немецкой и французской практиках.

	P	n	d	m	α	S	a	b	q
11	6000	0,5	16	2	1,1	6300	12.03	27.08	15
12	7000	0,25	11	4	1,2	7200	03.04	15.09	11
13	8000	0,75	17	12	1,3	8400	11.05	09.10	16
14	9000	0,5	18	4	1,4	9300	17.06	23.11	17
15	6500	0,25	9	12	1,5	6900	24.07	05.12	9
16	5500	0,75	13	2	1,6	5800	23.03	14.08	12
17	7500	0,5	19	12	1,7	7700	16.04	26.09	17
18	5300	0,25	8	2	1,8	5700	19.05	21.10	8
19	6400	0,75	7	4	1,9	6800	24.06	09.11	9
20	7900	0,75	14	12	2	8200	11.07	15.12	13

21–30. а) Первоначальная сумма P руб. помещена в банк на срок n лет под $i\%$ годовых (проценты сложные). Найти наращенную сумму, эквивалентные значения простой учетной ставки, простой процентной ставки, сложной номинальной процентной ставки (проценты начисляются m раз в году). Найти наращенную сумму, если ставка налога на проценты $q\%$. Уровень инфляции за рассматриваемый период оказался равным $\alpha\%$. Какова реальная доходность операции?

б) Первоначальная сумма P руб., наращенная сумма S руб., процентная ставка $i\%$ годовых (проценты сложные). Найти период начисления.

в) Первоначальная сумма P руб., наращенная сумма S руб., период начисления n лет. Найти сложную процентную ставку.

г) Первоначальная сумма P руб. помещена в банк на срок n лет под $i\%$ годовых. Найти наращенную сумму в случае непрерывного начисления процентов.

	P	n	i	m	α	S	q
21	6000	2	16	2	1,1	7300	15
22	7000	3	11	4	1,2	8200	11
23	8000	4	17	12	1,3	9400	16
24	9000	3	18	4	1,4	10300	17
25	6500	4	9	12	1,5	7900	9
26	5500	2	13	2	1,6	6800	12
27	7500	3	19	12	1,7	8700	17
28	5300	3	8	2	1,8	6700	8
29	6400	2	7	4	1,9	7800	9
30	7900	4	14	12	2	9200	13

31–40. а) Размер ежегодных платежей R руб., срок n лет, проценты начисляются по сложной процентной ставке $i\%$ годовых. Найти наращенную (будущую) сумму и современную стоимость простых рент постнумерандо и пренумерандо. Преобразовать эту простую ренту в общую ренту (проценты начисляются m раз в году, p платежей в году).

б) Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке $i\%$ годовых для накопления через n лет суммы S руб.

в) Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке $i\%$ годовых для погашения в течение n лет долга A руб.

г) Размер ежегодных платежей R руб., процентная ставка $i\%$ годовых, наращенная сумма S руб. Определить сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

д) Размер ежегодных платежей R руб., процентная ставка $i\%$ годовых, современная стоимость A руб. Определить сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

е) Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год R руб., чтобы через n лет накопить сумму S руб. (для рент постнумерандо и пренумерандо).

ж) Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год R руб., чтобы через n лет погасить долг A руб. (для рент постнумерандо и пренумерандо).

з) Простая рента с ежегодными платежами R руб., процентной ставкой $i\%$ годовых и сроком n лет отложена на t лет. Найти наращенную сумму и современную стоимость ренты.

и) Найти наращенную (будущую) сумму и современную стоимость общей ренты (проценты начисляются m раз в году, p платежей

в году). Размер платежей W руб., срок n лет, проценты начисляются по сложной процентной ставке $i\%$ годовых. Заменить эту ренту простой рентой.

к) Современная стоимость бессрочной ренты постнумерандо A руб., процентная ставка $i\%$ годовых. Найти размер ежегодных выплат.

л) Найти современную стоимость общих бессрочных рент постнумерандо и пренумерандо (проценты начисляются m раз в году по ставке $i/m\%$, p платежей в году). Размер платежей W руб.

	R	n	i	S	A	t	W	m	p
31	1500	4	16	7300	7300	2	1500	2	3
32	1600	4	11	8200	8200	3	1600	4	2
33	1700	5	17	9400	9400	4	1700	12	6
34	1800	5	15	10300	10300	3	1800	4	3
35	1900	4	9	7900	7900	4	1900	12	4
36	2000	3	13	6800	6800	3	2000	2	12
37	2100	4	19	8700	8700	2	2100	12	2
38	2200	3	8	6700	6700	2	2200	2	6
39	2300	3	7	7800	7800	4	2300	4	8
40	2400	3	14	9200	9200	3	2400	12	4

41–50. Банк выдает кредит на сумму A, срок n лет, процентная ставка $i\%$ годовых. Составить различные планы погашения долга.

	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
A	15000	16000	17000	18000	19000	20000	21000	22000	23000	24000
n	4	3	5	6	3	4	5	5	6	4
i	16	11	17	18	9	13	19	8	7	14

51–60. а) Банк выдал предприятию три кредита.

Номер ссуды	Размер ссуды, тыс. руб.	Срок ссуды, мес.
1	a	d
2	b	f
3	c	g

Определить средний размер кредита, средний срок пользования ссудами, среднее число оборотов ссуд за год.

б) На основании приведенных данных определить среднюю процентную ставку по кредитам.

Размер кредита, тыс. руб.	Срок кредита, лет	Процентная ставка, % годовых
a	d	h
b	f	k

в) На основании приведенных данных определить по банку в целом на 1 января 2006 года абсолютную сумму просроченных кредитов и относительные показатели просроченной задолженности по сумме, по сроку, по сумме и сроку.

Номер кредита	Сумма кредита, тыс. руб.	Срок кредита, дни	Просроченная задолженность на 1 января 2006 г., тыс. руб.	Число просроченных дней на 1 января 2006 г.
1	b	a	h	f
2	c	m	k	g

г) На основании приведенных данных о краткосрочном кредитовании отраслей промышленности (млн. руб.) определить индекс среднего числа оборотов кредита переменного состава, индекс среднего числа оборотов кредита фиксированного состава, индекс структурных сдвигов, а также абсолютное изменение среднего числа оборотов кредита за счет двух факторов вместе (изменение числа оборотов кредита по отраслям и структурные сдвиги в средних остатках кредита) и каждого в отдельности.

Отрасль промышленности	Средние остатки кредитов		Погашено кредитов	
	2004, $\overline{O}_0$	2005, $\overline{O}_1$	2004, O_{n0}	2005, O_{n1}
А	d	f	a	m
Б	g	h	b	c

д) Средний остаток средств на счете за год составил a тыс. руб., а оборот по списанию средств с этого счета — n тыс. руб. Продолжительность года равна K дней. Определить длительность пребывания средств в расчетах и число оборотов за год средств в расчетах.

е) На основании приведенных данных определить количество оборотов денег за год и продолжительность одного оборота денежной массы. Продолжительность года равна K дней.

Показатели	Сумма, млрд. руб.
Валовой внутренний продукт в текущих ценах	a
Совокупный объем денежной массы (в среднем за год)	h

ж) На основании приведенных данных определить достоинство средней купюры, выпущенной в обращение.

Достоинство купюр	1	2	5	10	50	100	500	1000
Число купюр в обращении	*a*	*m*	*b*	*c*	*h*	*k*	*f*	*g*

з) На основании приведенных данных определить нетто-ставку с доверительной вероятностью *p* и брутто-ставку. Нагрузка равна *r*.

Год	1	2	3
Уровень убыточности страховых сумм (в коп. со 100 руб. страховой суммы)	*d*	*f*	*g*

и) Нетто-ставка по смешанному страхованию равна *h* руб. Нагрузка равна *r*. Определить брутто-ставку по смешанному страхованию.

	51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
a	130	140	150	160	170	180	190	125	135	145
b	60	40	30	20	70	80	90	55	65	75
c	80	90	55	65	75	60	40	30	20	70
d	4	8	7	2	5	7	8	4	3	6
f	7	6	4	3	6	4	4	7	2	5
g	5	7	8	4	3	5	3	2	6	8
h	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21
k	15	16	17	18	19	20	21	11	13	14
m	170	180	190	125	135	145	130	140	150	160
K	360	365	360	365	360	365	360	365	360	365
n	41000	42000	43000	44000	45000	46000	47000	48000	49000	39000
p	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95
r	0,21	0,22	0,23	0,24	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31

61–70. Заемщик должен одному кредитору P_1 руб. (срок погашения *a*, процентная ставка i_1% годовых), P_2 руб. (срок погашения *b*, процентная ставка i_2% годовых), P_3 руб. (срок погашения *c*, процентная ставка i_3% годовых). Когда лучше выплатить весь долг сразу (процентная ставка i_s% годовых), чтобы при этом не понесли ущерба ни кредитор, ни заемщик?

	P_1	i_1	P_2	i_2	P_3	i_3	*a*	*b*	*c*	i_s
61	6000	16	6300	15	7300	15	12.03	17.06	27.08	15
62	7000	11	7200	12	8200	11	03.04	23.07	15.09	11

	P_1	i_1	P_2	i_2	P_3	i_3	a	b	c	i_s
63	8000	17	8400	16	7400	17	11.05	25.08	09.10	16
64	9000	18	9300	19	7300	16	17.06	04.07	23.11	17
65	6500	9	6900	8	8900	8	24.07	16.09	05.12	9
66	5500	13	5800	14	4800	13	23.03	09.06	14.08	12
67	7500	19	7700	18	8700	16	16.04	03.06	26.09	17
68	5300	8	5700	9	6700	8	19.05	07.09	21.10	8
69	6400	7	6800	9	7800	10	24.06	12.08	09.11	9
70	7900	14	8200	15	5200	12	11.07	05.10	15.12	13

71–80. На основании приведенных данных по страховым компаниям региона A определить средние и относительные показатели имущественного страхования за отчетный год.

Показатели	
Страховое поле	a
Число застрахованных объектов	b
Число застрахованных в добровольном порядке объектов	c
Число страховых случаев	d
Число пострадавших объектов	f
Страховая сумма всех застрахованных объектов, тыс. руб.	g
Страховая сумма пострадавших объектов, тыс. руб.	h
Сумма поступивших страховых платежей, тыс. руб.	k
Сумма выплат страхового возмещения, тыс. руб.	m

	a	b	c	d	f	g	h	k	m
71	520000	290000	170000	9000	7000	57000	12000	1300	900
72	530000	280000	180000	7000	5000	58000	13000	1100	400
73	540000	270000	190000	11000	8000	59000	14000	1600	600
74	550000	260000	150000	12000	9000	61000	15000	1550	750
75	560000	250000	140000	13000	4000	62000	16000	1650	650
76	570000	230000	130000	14000	6000	52000	17000	1700	630
77	580000	220000	110000	15000	7500	53000	18000	1800	620
78	590000	210000	160000	16000	6500	54000	19000	1900	700
79	610000	240000	155000	17000	6300	55000	15000	1500	500
80	620000	340000	165000	18000	6200	56000	14000	1400	800

81–90. а) Номинальная стоимость облигации P руб., купонная процентная ставка $k\%$, оставшийся срок до погашения облигации n лет, текущая рыночная процентная ставка $i\%$. Определить текущую рыночную стоимость облигации.

б) Облигация номинальной стоимостью P руб. с купонной процентной ставкой $k\%$ была куплена в начале года за a руб. После получения купонного платежа в конце года облигация была продана за S руб. Определить норму прибыли за год.

в) Облигация номинальной стоимостью P руб. с купонной процентной ставкой $k\%$ и сроком погашения n лет была куплена за S руб. Определить доходность облигации методом средних. Определить доходность облигации методом интерполяции.

	81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
P	6000	7000	8000	9000	6500	5500	7500	5300	6400	7900
n	2	3	4	3	4	2	3	3	2	4
i	16	11	17	18	9	13	19	8	7	14
S	7300	8200	9400	10300	7900	6800	8700	6700	7800	9200
a	7500	8600	9700	10800	8200	7100	8900	6800	7900	9500
k	18	13	19	19	12	16	21	10	19	17

91–100. По обращающимся привилегированным акциям выплачиваются ежегодные дивиденды D руб. Цена этой акции равна A руб. Определить доходность акции.

	91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
D	160	110	170	180	90	130	190	80	70	140
A	7300	8200	9400	10300	7900	6800	8700	6700	7800	9200

101–110. а) Рыночная цена акции в настоящий момент P_0 руб. Ожидаемая цена акции в конце текущего года равна P_1 руб., а ожидаемый дивиденд в текущем году D_1 руб. Определить ожидаемую дивидендную доходность, ожидаемую доходность за счет изменения цены акции и ожидаемую доходность по акции в текущем году.

б) Дивиденд, выплачиваемый ежегодно по акции нулевого роста, равен D руб. Ожидаемая норма прибыли $k_s\%$. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции.

в) Курс акции нулевого роста в настоящий момент P_0 руб., а последний из уже выплаченных дивидендов D руб. Определить норму прибыли (доходность) этой акции.

г) Последний из уже выплаченных дивидендов по акциям нормального роста D_0 руб., а ожидаемый темп роста дивидендов $g\%$. Определить дивиденд, который акционер ожидает получить в текущем году. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции нормального роста при требуемом уровне доходности $k_s\%$.

	D_0	D	N	g_s	g_n	g	k_s	P_0	D_1	P_1
101	150	150	3	26	11	4	16	7300	160	7400
102	160	160	4	27	9	3	11	8200	110	8400
103	170	170	5	24	12	5	17	9400	170	9500
104	180	180	3	28	13	6	18	10300	180	10500
105	190	190	4	23	5	3	9	7900	90	8000
106	200	200	5	26	9	4	13	6800	130	6900
107	210	210	3	27	14	5	19	8700	190	8900
108	220	220	4	24	4	5	8	6700	80	6800
109	230	230	5	28	3	6	7	7800	70	7900
110	240	240	3	23	11	4	14	9200	140	9500

111–120. а) По данным таблицы смертности, число доживших до 40 лет равно l_{40}, а число доживших до 43 лет равно l_{43}. Определить для лица в возрасте $x = 40$ лет единовременную нетто-ставку на дожитие сроком на $t = 3$ года со страховой суммы S руб. Ставка дисконтирования равна $i\%$.

б) По данным таблицы смертности, число доживших до 40 лет равно l_{40}, а число умирающих в соответствующем возрасте равно d_{40}, d_{41}, d_{42}. Определить со страховой суммы S руб. единовременную нетто-ставку на случай смерти для лица в возрасте $x = 40$ лет сроком на $n = 3$ года. Ставка дисконтирования равна $i\%$.

	l_{40}	l_{43}	S	i	d_{40}	d_{41}	d_{42}
111	88490	88190	1700	9	700	770	820
112	88480	88180	1800	8	710	775	825
113	88470	88170	1900	11	720	785	834
114	88460	88160	1500	12	730	790	840
115	88450	88150	1400	13	740	795	855
116	88440	88140	1300	14	706	778	822
117	88430	88130	1100	15	717	779	823
118	88420	88120	1600	16	725	786	832
119	88410	88110	1550	17	737	799	841
120	88445	88145	1650	18	744	792	856

121–130. Схема налога на проценты: $a\%$ с части дохода от 0 до 5000 руб., $b\%$ с части дохода от 5000 до 15000 руб., $c\%$ с части дохода от 15000 до 30000 руб., $d\%$ с части дохода от 30000 до 50000 руб. и $f\%$ с части дохода свыше 50000 руб. Начисленные проценты P руб. Найти среднюю и предельную ставки налога.

	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
P	60000	70000	80000	90000	65000	55000	75000	53000	64000	79000
a	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4
b	4	6	8	10	12	14	16	4	6	8
c	6	9	12	15	18	21	24	8	12	16
d	8	12	16	20	24	28	32	16	24	25
f	10	15	20	25	30	35	40	32	29	30

131–140. Предприятие анализирует два инвестиционных проекта в *a* млн. руб. Оценка чистых денежных поступлений приведена в таблице.

Год	Проект A, млн. руб.	Проект B, млн. руб.
1	*b*	*d*
2	*c*	*e*
3	—	*f*

Альтернативные издержки по инвестициям равны *g*%.

а) Определить чистую приведенную стоимость каждого проекта. Какой проект предпочтительнее?

б) Определить внутреннюю норму доходности каждого инвестиционного проекта.

в) Определить период окупаемости каждого инвестиционного проекта.

г) Пусть остаточная стоимость каждого проекта равна нулю. Определить их учетные коэффициенты окупаемости инвестиций.

	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
a	2,1	2,3	2,4	2,6	2,8	2,3	2,7	2,8	2,9	2,4
b	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
c	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4
d	0,8	0,9	0,7	0,6	0,5	0,8	0,9	0,7	0,6	0,5
e	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
f	1,6	1,7	1,8	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3
g	11	12	13	14	15	11	12	13	14	15

141–150. а) Известны следующие данные.

Товар	Цена, руб.	Товарооборот, руб.
A	*g*	*c*
B	*f*	*e*

Определить среднюю цену, отклонение цены каждого товара от средней цены и удельный вес различных товаров в товарообороте.

б) Известны следующие данные о цене и структуре товарооборота товара *A*.

Цена, руб.	Структура товарооборота, %
g	*s*
f	*t*

Определить среднюю цену товара *A*.

в) Известны следующие данные.

Цена товара, руб.	Объем продаж, единиц
g	*e*
f	*c*

Определить среднюю цену, размах вариации цен, среднее квадратическое отклонение цен и коэффициент вариации цен.

	141	**142**	**143**	**144**	**145**	**146**	**147**	**148**	**149**	**150**
c	60000	50000	70000	80000	90000	30000	45000	25000	85000	75000
g	470	380	590	650	760	190	270	120	670	560
f	600	500	700	800	900	300	450	250	850	750
e	50000	45000	60000	70000	80000	45000	35000	30000	75000	65000
s	0,3	0,2	0,25	0,35	0,45	0,7	0,8	0,75	0,65	0,55
t	0,7	0,8	0,75	0,65	0,55	0,3	0,2	0,25	0,35	0,45

151–160. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение товаров *X* и *Y*.

Год	Объем потребления		Цены	
	X	*Y*	P_X	P_Y
2006	*a*	*b*	*e*	*f*
2007	*c*	*d*	*g*	*h*

а) Определить индексы реального дохода Ласпейреса и Пааше. Увеличилось ли благосостояние потребителей в 2007 году по сравнению с 2006 годом?

б) Определить индекс номинального дохода и индексы цен Ласпейреса и Пааше. Увеличилось ли благосостояние потребителей в 2007 году по сравнению с 2006 годом?

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*g*
151	21	23	22	24	2	8	3	5
152	32	35	34	37	9	9	4	6
153	43	46	44	49	3	2	5	7

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*g*
154	51	55	53	58	8	3	6	8
155	62	67	64	69	4	4	7	9
156	74	78	75	79	7	3	8	2
157	81	86	82	88	5	4	9	3
158	91	94	93	97	6	5	2	4
159	22	25	24	28	7	6	3	4
160	33	37	35	39	6	7	4	3

Литература

Громыко Г. Л. Теория статистики. М.: ИНФРА-М, 2004.

Гусаров В. М. Статистика. М.: ЮНИТИ, 2003.

Елисеева И. И., Силаева С. А., Щирина А. Н. Практикум по макроэкономической статистике. М.: Проспект, 2004.

Ефимова М. Р., Ганченко О. И., Петрова Е. В. Практикум по общей теории статистики. М.: Финансы и статистика, 2005.

Ефимова М. Р., Петрова Е. В., Румянцев В. Н. Общая теория статистики. М.: ИНФРА-М, 1997.

Микроэкономическая статистика / Под редакцией С. Д. Ильенковой. М.: Финансы и статистика, 2004.

Ниворожкина Л. И., Чернова Т. В. Теория статистики. Р-н/Д: Мини тайп, Феникс, 2005.

Просветов Г. И. Анализ хозяйственной деятельности предприятия: Задачи и решения. 5-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Бизнес-планирование: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Маркетинговые исследования: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Математика в экономике: Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2005.

Просветов Г. И. Математические методы в экономике. 3-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2007.

Просветов Г. И. Математические модели в экономике. 2-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2006.

Просветов Г. И. Прогнозирование и планирование. Задачи и решения. 2-е изд. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

Просветов Г. И. Финансовый менеджмент: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2007.

Просветов Г. И. Цены и ценообразование: Задачи и решения. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2007.

Просветов Г. И. Эконометрика: Задачи и решения. 4-е изд. М.: Издательство РДЛ, 2007.

Сборник задач по общей теории статистики / Под редакцией Серга Л. К. М.: Филинъ, 2001.

Хили Дж. Статистика. Социологические и маркетинговые исследования. Киев: ДиаСофтЮП; СПб.: Питер, 2005.

Содержание

Предисловие 3

Раздел I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 1. Что такое теория вероятностей? 6

ГЛАВА 2. Основные понятия теории вероятностей 7

ГЛАВА 3. Действия с вероятностями 11
3.1. Сумма событий 11
3.2. Вероятность суммы несовместных событий 11
3.3. Произведение событий 12
3.4. Зависимые и независимые события 12
3.5. Вероятность произведения двух независимых событий 13
3.6. Условная вероятность 14
3.7. Вероятность произведения двух зависимых событий 14
3.8. Вероятность суммы двух совместных событий 15

ГЛАВА 4. Дерево вероятностей 17

ГЛАВА 5. Формула Байеса 21

ГЛАВА 6. Повторение испытаний 24
6.1. Схема Бернулли 24
6.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа 25
6.3. Теорема Пуассона 25
6.4. Интегральная теорема Лапласа 26

ГЛАВА 7. Относительная частота 27
7.1. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях 27

ГЛАВА 8. Дискретные случайные величины 29
8.1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины 29
8.2. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства 30
8.3. Дисперсия дискретной случайной величины, ее свойства 31
8.4. Биномиальный закон распределения вероятностей 32
8.5. Распределение Пуассона 32

ГЛАВА 9. Непрерывные случайные величины 34
9.1. Функция распределения, ее свойства 34
9.2. Плотность распределения вероятностей, ее свойства 34
9.3. Математическое ожидание непрерывной случайной величины 35
9.4. Дисперсия непрерывной случайной величины 36
9.5. Нормальный закон распределения вероятностей 36
9.6. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал 37
9.7. Показательный закон распределения вероятностей 39

Ответы 40
Программа учебного курса «Теория вероятностей» 41
Задачи для контрольной работы по курсу «Теория вероятностей» 43

Раздел II. ТЕОРИЯ СТАТИСТИКИ

ГЛАВА 1. Зачем нужна статистика? 48

ГЛАВА 2. Статистическое наблюдение 49

ГЛАВА 3. Выборочный метод 50

ГЛАВА 4. Сводка и группировка статистических данных 52

ГЛАВА 5. Абсолютные и относительные статистические величины 53

ГЛАВА 6. Диаграммы и графики 54

ГЛАВА 7. Вариационные ряды 56

ГЛАВА 8. Расчет сводных характеристик выборки 59

ГЛАВА 9. Мода и медиана 62
9.1. Мода 62
9.2. Медиана 63

ГЛАВА 10. Процентиль, дециль, квартиль 65

ГЛАВА 11. Средние величины 67

ГЛАВА 12. Показатели вариации 69
12.1. Размах вариации 69
12.2. Интерквартильная широта 70
12.3. Среднее линейное отклонение 70
12.4. Показатели относительной вариации 71

ГЛАВА 13. Асимметрия и эксцесс 73
13.1. Асимметрия 73
13.2. Эксцесс 74

ГЛАВА 14. Доверительные интервалы 75
14.1. Доверительный интервал для генеральной средней *a* (генеральная дисперсия σ^2 известна) 75
14.2. Доверительный интервал для генеральной средней *a* (генеральная дисперсия σ^2 неизвестна) 77
14.3. Доверительный интервал для генеральной доли 78
14.4. Интервалы предсказания 79

ГЛАВА 15. Испытание гипотез 80
15.1. Испытание гипотезы на основе выборочной средней при известной генеральной дисперсии σ^2 81
15.2. Испытание гипотезы на основе выборочной средней при неизвестной генеральной дисперсии 83
15.3. Испытание гипотезы на основе выборочной доли 84
15.4. Испытание гипотезы о двух генеральных дисперсиях 85
15.4.1. Двухвыборочный *F*-тест для дисперсии 86
15.5. Сравнение средних величин двух выборок при известных генеральных дисперсиях 87
15.5.1. Двухвыборочный *z*-тест для средних (Excel) 88
15.6. Испытание гипотезы по выборочным средним при неизвестных генеральных дисперсиях 89
15.6.1. Случай равенства генеральных дисперсий 90
15.6.2. Случай неравенства генеральных дисперсий 92
15.7. Испытание гипотезы по двум выборочным долям 93
15.8. Испытание гипотез по спаренным данным 95
15.8.1. Парный двухвыборочный *t*-тест для средних 96
15.9. Испытание гипотезы о принадлежности нового наблюдения генеральной совокупности 97
15.10. Непараметрические испытания 98

ГЛАВА 16. Порядковые испытания 102

ГЛАВА 17. Линейная регрессия 104
17.1. Простая модель линейной регрессии 104
17.2. Ошибки 106
17.3. Коэффициент корреляции Пирсона. Коэффициент детерминации 106
17.4. Предсказания и прогнозы на основе модели линейной регрессии ... 109
17.5. Основные предпосылки в модели парной линейной регрессии 109
17.6. Испытание гипотезы для оценки линейности связи 110
17.6.1. Испытание гипотезы для оценки линейности связи на основе оценки коэффициента корреляции в генеральной совокупности 110
17.6.2. Испытание гипотезы для оценки линейности связи на основе показателя наклона линейной регрессии 111
17.7. Доверительные интервалы в линейном регрессионном анализе 113
17.7.1. Доверительный интервал для показателя наклона линии линейной регрессии 113
17.7.2. Доверительный интервал для среднего значения переменной *y* при данном значении переменной *x* 114

17.7.3. Доверительный интервал для индивидуальных значений переменной *y* при заданном значении переменной *x* 114
17.8. Регрессия и Excel 115

ГЛАВА 18. Нелинейные связи 118

ГЛАВА 19. Мультиколлинеарность 119
19.1. Установление мультиколлинеарности 119
19.2. Методы устранения мультиколлинеарности 120

ГЛАВА 20. Временные ряды 121
20.1. Анализ аддитивной модели 121
20.2. Анализ мультипликативной модели 125

ГЛАВА 21. Экспоненциальное сглаживание 129
21.1. Простая модель экспоненциального сглаживания 129
21.2. Экспоненциальное сглаживание с поправкой на тренд 130

ГЛАВА 22. Контролируемый прогноз 132

ГЛАВА 23. Кластерный анализ 134

ГЛАВА 24. Дисперсионный анализ 137
24.1. Однофакторный дисперсионный анализ 137
24.2. Двухфакторный дисперсионный анализ 140

ГЛАВА 25. Меры связи 144
25.1. Коэффициент Фехнера 144
25.2. Коэффициенты ассоциации и контингенции 145
25.3. Меры связи на основе критерия хи-квадрат 146

ГЛАВА 26. Анализ временных рядов в Excel 149

ГЛАВА 27. Анализ Фурье 150

ГЛАВА 28. Индексы 152
28.1. Индексы роста и прироста 152
28.2. Базисные и цепные индексы 152
28.3. Переход от одних индексов к другим 153
28.4. Средний индекс роста для сгруппированных данных 153

ГЛАВА 29. Экономические индексы 155
29.1. Агрегатные индексы 155
29.1.1. Агрегатные индексы физического объема 155
29.1.2. Агрегатные индексы цен 157
29.2. Средние индексы 157
29.2.1. Средние арифметические индексы цен 157
29.2.2. Средние гармонические индексы цен 158

29.2.3. Индекс цен Фишера 160
29.3. Анализ динамики средних показателей 160
29.4. Индексный метод анализа факторов динамики 161
29.5. Территориальные индексы 162

ГЛАВА 30. λ-критерий Колмогорова-Смирнова 164

Ответы 168
Программа учебного курса «Теория статистики» 170
Задачи для контрольной работы по курсу «Теория статистики» 174

Раздел III. МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА 1. Что такое микроэкономическая статистика? 186

ГЛАВА 2. Основные понятия, используемые при составлении финансовой отчетности 188
2.1. Бухгалтерский баланс 188
2.2. Активы 188
2.3. Пассивы 189
2.4. Собственный капитал 189
2.5. Отчет о движении денежных средств 190
2.6. Счет прибылей и убытков 191
2.7. Расчет прибыли 192
2.8. Пояснения к финансовой отчетности 193

ГЛАВА 3. Оценка запасов товарно-материальных ценностей 194
3.1. Метод оценки запасов ФИФО 194
3.2. Метод оценки запасов ЛИФО 196
3.3. Метод оценки запасов по средневзвешенной 197
3.4. Влияние различных методов оценки запасов на расчет прибыли 198

ГЛАВА 4. Амортизация 200
4.1. Метод равномерного начисления износа 200
4.2. Метод начисления износа с сокращающейся балансовой стоимости 201
4.3. Метод суммы годичных чисел 203
4.4. Сравнение методов начисления амортизации 203

ГЛАВА 5. Расчет задолженности на конец отчетного периода 206
5.1. Расчет дебиторской задолженности на конец отчетного периода 206
5.2. Расчет кредиторской задолженности на конец отчетного периода ... 207

ГЛАВА 6. Анализ результатов деятельности предприятия 208
6.1. Интерпретация документов финансовой отчетности 208
6.2. Суть анализа финансовых коэффициентов 208
6.3. Эффективность использования ресурсов 209
6.3.1. Коэффициент оборачиваемости активов 209
6.3.2. Ликвидность 210
6.3.3. Влияние хозяйственных операций на уровень ликвидности .. 213

6.4. Рентабельность 216
6.5. Оценка финансовых результатов деятельности предприятия 218
6.6. Ограничения анализа коэффициентов 219

ГЛАВА 7. Учет затрат 221
7.1. Центры затрат 221
7.2. Центры прибыли 222
7.3. Нормативные и фактические затраты 222

ГЛАВА 8. Факторы производства и затраты 224
8.1. Факторы производства 224
8.2. Классификация затрат 224

ГЛАВА 9. Функциональная калькуляция себестоимости 228
9.1. Сравнение традиционной и функциональной систем калькуляция себестоимости 228
9.2. Расчет себестоимости с помощью традиционной и функциональной систем учета затрат 231

ГЛАВА 10. Анализ отклонений 236
10.1. Отклонения по материалам 236
10.2. Отклонение по трудозатратам 238
10.3. Переменные производственные накладные расходы 239
10.4. Отклонение по постоянным накладным расходам 241
10.5. Отклонения по реализации продукции 241

ГЛАВА 11. Анализ качества продукции 244

ГЛАВА 12. Анализ ритмичности работы предприятия 246

ГЛАВА 13. Анализ движения и технического состояния основных средств. Фондоотдача 248
13.1. Анализ движения и технического состояния основных средств 248
13.2. Анализ фондоотдачи 251

ГЛАВА 14. Анализ материалоотдачи 253

ГЛАВА 15. Анализ производительности труда 255

ГЛАВА 16. Анализ сбалансированности денежных потоков 257

ГЛАВА 17. Статистика поставок и реализации продукции 261

ГЛАВА 18. Показатели частоты и равномерности поставок продукции 263

ГЛАВА 19. Статистика численности работников 265
19.1. Численность работников 265
19.2. Показатели изменения численности работников 266

ГЛАВА 20. Статистика использования рабочего времени 269

ГЛАВА 21. Анализ уровня и динамики заработной платы 274

ГЛАВА 22. Структура капитала 276
22.1. Гиринг (левередж) 276
22.2. Влияние гиринга (левериджа) на прибыль акционеров 278

ГЛАВА 23. Анализ каналов формирования прибыли 280

ГЛАВА 24. Статистический контроль качества 285
24.1. Контрольные карты 285
24.2. Контрольные карты средних арифметических технологического процесса при известных a и σ 286
24.3. Контрольные карты изменчивости технологического процесса при известных a и σ 287
24.4. Контрольные карты количественных признаков при неизвестных a и σ 287
24.5. Контрольные карты качественных признаков 288
24.5.1. p-карты. Аппроксимация нормальным распределением 289
24.5.2. p-карты. Аппроксимация распределением Пуассона 289
24.5.3. c-карты 291
24.6. Статистический приемочный контроль качества качественных признаков 291

Ответы 295
Программа учебного курса «Микроэкономическая статистика» 297
Задачи для контрольной работы по курсу «Микроэкономическая статистика» 301

Раздел IV. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА 1. Что такое макроэкономическая статистика? 314

ГЛАВА 2. Статистика естественного движения населения 315

ГЛАВА 3. Статистика миграции населения 318

ГЛАВА 4. Статистика занятости и безработицы 321

ГЛАВА 5. Расчет валового выпуска 323

ГЛАВА 6. Валовая добавленная стоимость 325

ГЛАВА 7. Счет производства 327

ГЛАВА 8. Вычисление валового внутреннего продукта в сопоставимых ценах 330

ГЛАВА 9. Счета образования и распределения доходов 331
9.1. Счет образования доходов 331
9.2. Счет распределения первичных доходов 333
9.3. Счет вторичного распределения доходов 336

ГЛАВА 10. Счет использования доходов, счет операций с капиталом, счет продуктов и услуг 338
10.1. Счет использования доходов 338
10.2. Счет операций с капиталом 339
10.3. Счет продуктов и услуг 341

ГЛАВА 11. Баланс денежных доходов и расходов населения 342

ГЛАВА 12. Материальные балансы 345

ГЛАВА 13. Статистика уровня жизни населения 348
13.1. Индексы доходов 348
13.2. Индексы заработной платы 349

ГЛАВА 14. Индексы рынка ценных бумаг 352

ГЛАВА 15. Модель Леонтьева 354

Ответы 357
Программа учебного курса «Макроэкономическая статистика» 360
Задачи для контрольной работы по курсу «Макроэкономическая статистика» 362

Раздел V. СТАТИСТИКА ФИНАНСОВ

ГЛАВА 1. Основные понятия финансовой математики 370

ГЛАВА 2. Простые ставки ссудных процентов 372
2.1. Математическое дисконтирование 373
2.2. Английская, немецкая и французская практики начисления процентов 373
2.3. Случай изменения простой ставки ссудного процента 374

ГЛАВА 3. Простые учетные ставки 376

ГЛАВА 4. Сложные ставки ссудных процентов 378
4.1. Математическое дисконтирование 379
4.2. Случай, когда период начисления не является целым числом 380
4.3. Случай изменения сложной ставки ссудного процента 380
4.4. Начисление сложных процентов несколько раз в году. Номинальная процентная ставка 381
4.5. Непрерывное начисление сложных процентов 381

ГЛАВА 5. Сложные ставки ссудных процентов 383

ГЛАВА 6. Учет инфляционного обесценения денег 384
6.1. Уровень (темп) инфляции. Индекс инфляции 384
6.2. Ставка, учитывающая инфляцию, для случая простых процентов. Формула Фишера 385
6.3. Ставка, учитывающая инфляцию, для случая сложных процентов .. 386

ГЛАВА 7. Сравнение операций 388
7.1. Нахождение эквивалентной простой процентной ставки для простой учетной ставки 388
7.2. Нахождение эквивалентной простой процентной ставки для сложной процентной ставки 389
7.3. Нахождение эквивалентной простой процентной ставки для номинальной сложной процентной ставки 390
7.4. Нахождение эквивалентной сложной процентной ставки для номинальной сложной процентной ставки. Эффективная сложная процентная ставка 390
7.5. Нахождение эквивалентной номинальной сложной процентной ставки для сложной процентной ставки 391

ГЛАВА 8. Модели финансовых потоков 393
8.1. Основные понятия 393
8.2. Нахождение наращенной суммы для простой ренты постнумерандо 394
8.3. Нахождение наращенной суммы для простой ренты пренумерандо 395
8.4. Определение современной стоимости для простой ренты 396
8.5. Определение величины отдельного платежа для простой ренты 397
8.6. Определение срока простой ренты 398
8.7. Определение процентной ставки для простой ренты 400
8.8. Отложенная рента 401
8.9. Сведение общей ренты к простой ренте 402
8.10. Наращенная сумма общей ренты 403
8.11. Современная стоимость общей ренты 403
8.12. Преобразование простой ренты в общую ренту 404
8.13. Простая бессрочная рента 404
8.14. Общая бессрочная рента 405
8.15. Бессрочная рента пренумерандо 405

ГЛАВА 9. Арифметика ипотеки 406
9.1. Вариант 1: аннуитет 406
9.2. Вариант 2: справедливый, но не очень удобный 406
9.3. Вариант 3: простой, но грабительский 407
9.4. Вариант 4: «хвост», погашаемый в конце срока 408

ГЛАВА 10. Статистика кредита 409

ГЛАВА 11. Статистика оборачиваемости кредита 413

ГЛАВА 12. Статистика денежного обращения 416
12.1. Показатели денежного обращения 416
12.2. Показатели скорости обращения денежной массы 417
12.3. Показатели купюрного строения денежной массы 419

ГЛАВА 13. Что такое страхование? 421

ГЛАВА 14. Статистика имущественного страхования 422

14.1. Показатели имущественного страхования 422
14.2. Тарифная ставка 427

ГЛАВА 15. Статистика личного страхования 429

ГЛАВА 16. Средний срок погашения ссуды одному кредитору 432

ГЛАВА 17. Реальная ставка доходности с учетом налога 434
17.1. Средняя и предельная ставки налога 434
17.2. Случай простой процентной ставки 435
17.3. Случай простой учетной ставки 435
17.4. Случай сложной процентной ставки 435

ГЛАВА 18. Методы оценки инвестиций в условиях определенности 437
18.1. Общие принципы принятия инвестиционного решения 437
18.2. Альтернативные издержки по инвестициям 438
18.3. Метод чистой приведенной стоимости 439
18.4. Метод внутренней нормы доходности 441
18.5. Сравнение методов чистой приведенной стоимости и внутренней нормы доходности 443
18.6. Метод окупаемости 443
18.7. Учетный коэффициент окупаемости инвестиций 445
18.8. Критерии оценки инвестиционного проекта 447

ГЛАВА 19. Анализ индексов дохода и цен 448

ГЛАВА 20. Средние цены 451

ГЛАВА 21. Облигации 454
21.1. Основные определения 454
21.2. Основной метод оценки стоимости облигаций 455
21.3. Норма прибыли облигации 455
21.4. Доходность облигации при погашении в конце срока 456
21.4.1. Метод средних 457
21.4.2. Метод интерполяции 457
21.5. Доходность отзывных облигаций 458

ГЛАВА 22. Акции 460
22.1. Привилегированные акции 460
22.2. Обыкновенные акции 461
22.3. Оценка стоимости акций 463
22.4. Акции нулевого роста 464
22.5. Акции нормального роста 465
22.6. Акции избыточного роста 466

Ответы 468
Программа учебного курса «Статистика финансов» 469
Задачи для контрольной работы по курсу «Статистика финансов» 473
Литература 485

Учебно-практическое пособие

Просветов Георгий Иванович

СТАТИСТИКА: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.ФЦ.15.953.П.000115.06.03 от 16.06.2003 года

Подписано в печать 29.05.08 г.
Бумага газетная. Формат 60×84/16.
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Печ. л. 31,0. Тираж 2000 экз.
Зак. № 5625.

ООО Издательство «Альфа-Пресс»

117574, Москва, а/я 117
Тел.: (495) 777-40-60, 925-11-77
e-mail: best@bestbook.ru

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
Адрес: 140010, Моск. обл., Люберцы, Октябрьский пр-т, 403.
Тел.: (495) 554-21-86.

КНИГИ НАШЕГО ИЗДАТЕЛЬСТВА ВЫ МОЖЕТЕ КУПИТЬ В МАГАЗИНАХ:

МОСКВА

- «АКТУАЛЬНАЯ КНИГА», Усачева, 38 — Тел.: (495) 246-01-89
- Дом книги «Молодая гвардия», Бол. Полянка, 28 — Тел.: (495) 238-50-01
- Торговый дом «Библио-Глобус», Мясницкая, 6 — Тел.: (495) 928-87-58
- Сеть магазинов «Московский Дом Книги» — Единый справочный тел.: (495) 789-35-91
- «Московский Дом Книги», Новый Арбат, 8 — Тел.: (495) 290-35-80
- Дом деловой книги «Библиосфера», Марксистская, 9 — Тел.: (495) 670-52-17
- Дом книги «На Ладожской», Ладожская, 8, стр. 1 — Тел.: (495) 267-03-01
- «Академкнига», Вавилова, 55/7 — Тел.: (495) 124-55-00
- «Новый книжный», Мал. Сухаревская, вл. 12, ТЦ «Садовая галерея» — Тел.: (495) 937-85-81
- «Книги на Панфиловском», Зеленоград, Панфиловский пр-т, корп. 1106 — Тел.: (495) 532-76-61
- «Дом книги в Сокольниках», Русаковская, 27 — Тел.: (495) 264-81-21

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

- «Дом книги на Невском», Невский пр-т, 62 — Тел.: (812) 314-58-88
- «Дом деловой книги на Лиговском», Лиговский пр-т, 99 — Тел.: (812) 164-50-69
- Магазин «Профи», пр-т Обуховской обороны, 105 — Тел.: (812) 265-41-38

ЕКАТЕРИНБУРГ

- ИКГ «Фолиант», Ленина пр-т, 101 — Тел.: (343) 374-45-33

НОВОСИБИРСК

- «Топ-книга», Арбузова, 1/1 — Тел.: (3832) 36-10-26

РОСТОВ-НА-ДОНУ

- «Деловая литература», Серафимовича, 53 — Тел.: (863) 299-91-97

ЯКУТСК

- Сеть магазинов «Книжный маркет», Ярославского, 16/1 — Тел.: (4112) 42-89-60

www.bestbook.ru

WEB-МАГАЗИН ДЕЛОВОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОПТОВАЯ ПРОДАЖА:

ООО Издательство «АЛЬФА-ПРЕСС»
117574, Москва, а/я 117
Тел./факс: (495) 777-40-60, 540-73-03
e-mail: sales@bestbook.ru

ISBN 978-5-94280-246-0

Библио Глобус
Москва Мясницкая 6/3стр1 Тел 781-19-00
http://www.biblio-globus.ru 628-35-67
624-46-80
КТК: 080
Просветов Г.И. Статистик
Цена: 179.00