ПО МАТЕМАТИКЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ

1

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

1

- ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
- ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ
  СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
- ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
- ОСНОВЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

ФМ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

для втузов

1

Под редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова

Москва
Издательство
Физико-математической литературы
2001

ББК 22.1
С 23
УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:

А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН, И. Б. КОЖУХОВ,
А. С. ПОСПЕЛОВ, А. А. ПРОКОФЬЕВ

Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 1: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.—288 с.—ISBN 5-94052-034-0 (Ч. 1).

Содержит задачи по линейной алгебре, аналитической геометрии, а также общей алгебре. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.
Для студентов высших технических учебных заведений.

Учебное издание

ЕФИМОВ Александр Васильевич, КАРАКУЛИН Анатолий Федорович, КОЖУХОВ Игорь Борисович, ПОСПЕЛОВ Алексей Сегеевич, ПРОКОФЬЕВ Александр Александрович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТУЗОВ

Часть 1

Редактор *Л. А. Панюшкина*
Корректор *Т. С. Вайсберг*
Компьютерная графика *М. В. Ивановский*
Компьютерный набор *Г. М. Красникова*
Компьютерная верстка *А. С. Фурсов*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиеническое заключение № 77.99.02.953.Д.003724.07.01 от 05.07.2001

Подписано в печать 15.10.2001. Формат 60×88/16.
Печать офсетная с готовых диапозитивов.
Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 7000 экз.
Заказ № 388

Издательство Физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в типографии ОАО «Внешторгиздат».
127576, Москва, ул. Илимская, 7

ISBN 5-94052-034-0 (Ч. 1)
ISBN 5-94052-033-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНЫХ РЕДАКТОРОВ

Настоящее издание «Сборника задач по математике для втузов» подверглось значительной перестановке глав и их распределению по томам. В результате первый том содержит алгебраические разделы курса высшей математики, в том числе векторную алгебру и аналитическую геометрию, определители и матрицы, системы линейных уравнений, линейную алгебру и новый раздел — общую алгебру.

Второй том полностью посвящен изложению основ математического анализа, дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных, а также дифференциальным уравнениям.

В третьем томе собраны специальные разделы математического анализа, которые в различных наборах и объемах изучаются в технических вузах и университетах. Сюда относятся такие разделы, как векторный анализ, элементы теории функций комплексной переменной, ряды и их применение, операционное исчисление, методы оптимизации, уравнения в частных производных, а также интегральные уравнения.

Наконец, четвертый том содержит теоретические введения, типовые примеры и циклы задач по теории вероятностей и математической статистике.

Указанные выше изменения составляют лишь структурную переработку Сборника, никоим образом не затрагивая ни расположения материала внутри соответствующей главы, ни последовательности нумерации примеров и задач.

В смысловом отношении авторы внесли только следующие изменения. Во всех разделах Сборника исключены теоретические введения и циклы задач, связанные с численными методами. Дело в том, что в настоящее время существует целый ряд программных оболочек, каждая из которых реализует достаточно полный набор стандартных методов приближенного решения задач, а основные навыки работы с компьютером можно приобрести уже в школе. Авторы посчитали также необходимым добавить один новый раздел «Основы общей алгебры» и предложить цикл задач по тензорной алгебре в разделе «Линейная алгебра» в первый, «алгебраический» том Сборника. Это связано с тем, что круг идей и методов общей алгебры все глубже проникает в наукоемкие отрасли промышленности и, следовательно, становится необходимой частью образования и подготовки специалистов по инженерным специальностям.

Кроме отмеченного выше, авторами выполнена стандартная техническая работа по исправлению ошибок, описок и других неточностей, учтены также все замечания, возникавшие в процессе работы с предыдущими изданиями Сборника.

А. В. Ефимов, А. С. Поспелов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Идея создания «Сборника задач по математике для втузов», содержащего задачи по всем разделам курса математики инженерно-технических специальностей вузов, принадлежит Б. П. Демидовичу. Однако преждевременная смерть профессора Б. П. Демидовича помешала ему осуществить эту работу. Настоящий «Сборник задач», подготовленный авторским коллективом, имеющим большой педагогический опыт работы во втузах, — воплощение в жизнь идеи Б. П. Демидовича.

Общая структура «Сборника задач» предложена редактором А. В. Ефимовым и отражает содержание программы по математике для инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 510 часов и утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР 14 мая 1979 г. При составлении «Сборника задач» нашел отражение и опыт преподавания курса математики в Московском институте электронной техники, рассчитанного на 600–700 часов.

В сборник включены задачи и примеры по всем разделам втузовского курса математики. С целью закрепления материала школьной программы в нем, кроме того, приведен ряд задач, позволяющих более углубленно повторить основные разделы анализа и векторной алгебры, изучаемые в школе.

Одной из основных особенностей настоящего сборника является включение в большинство глав цикла расчетных задач, решение которых требует использования ЭВМ.

Предлагаемая первая часть сборника «Линейная алгебра и основы математического анализа» включает те разделы математики, которые как правило, изучаются на первом курсе. Сюда относятся векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, линейная алгебра, а также дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных и интегральное исчисление функций одной переменной.

Каждый раздел сборника задач снабжен кратким введением, содержащим как необходимые теоретические сведения (определения, формулы, теоремы), так и большое число подробно разобранных примеров. Начало решения примеров и задач отмечено знаком $\lhd$, а конец — знаком $\rhd$. К задачам, номера которых помечены соответственно одной или двумя звездочками, указания или решения даются в разделе «Ответы и указания».

Глава 1

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Векторная алгебра

1. Линейные операции над векторами. *Вектором* (*геометрическим вектором*) $\mathbf{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком отрезке $\overrightarrow{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\mathbf{a}$ (получен приложением вектора $\mathbf{a}$ к точке A). Длина отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора $\mathbf{a}$ и обозначается символом $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Вектор нулевой длины называется *нулевым вектором* и обозначается символом $\mathbf{0}$.

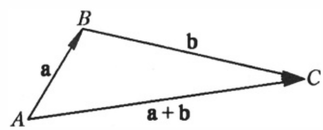


Рис. 1

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными* ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$), если множества представляющих их направленных отрезков совпадают.

В ряде задач часто бывает удобно не различать вектор и какой-либо представляющий его направленный отрезок. Именно в этом смысле, например, следует понимать выражение «построить вектор».

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ представляет вектор $\mathbf{a}$. Приложив к точке B заданный вектор $\mathbf{b}$, получим некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Вектор, представляемый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, называется *суммой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 1).

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на действительное число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\mathbf{a}$, такой, что:

1) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$;

2) векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

1.1. Доказать, что операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

а) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1$ (*коммутативность*);

в) $\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3$ (*ассоциативность*);

г) $\forall \mathbf{a}\, \exists!\, \mathbf{b}\ (\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0})$

(вектор $\mathbf{b}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{a}$, и обозначается символом $-\mathbf{a}$);

д) $\forall \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2\ \exists!\ \mathbf{a}_3\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2)$
(вектор $\mathbf{a}_3$ называется *разностью* векторов $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1$ и обозначается символом $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$).

1.2. Доказать равенства:

а) $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 + (-\mathbf{a}_1)$;

в) $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$, где $\mathbf{a}_0$ — *орт* вектора $\mathbf{a}$, т. е. вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$.

1.3. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ представлены ребрами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ соответственно. Построить векторы:

а) $\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}$; б) $\frac{1}{2}\mathbf{m} + \frac{1}{2}\mathbf{n} - \mathbf{p}$; в) $-\mathbf{m} - \mathbf{n} + \frac{1}{2}\mathbf{p}$.

1.4. Даны векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Построить векторы $3\mathbf{a}_1$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

1.5. Доказать, что:

а) операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

$$0\mathbf{a} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{a});$$

б) операции сложения векторов и умножения их на числа связаны следующими двумя свойствами *дистрибутивности*:

$$\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 \quad \text{и} \quad (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}.$$

1.6. Доказать равенства:

а) $\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$;

б) $\mathbf{a} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

Каков их геометрический смысл?

1.7. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ — медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$.

1.8. $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ — медианы треугольника ABC. Выразить через $\mathbf{p} = \overrightarrow{AK}$ и $\mathbf{q} = \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

1.9. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

1.10. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CM}$. Полагая $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, выразить $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1.11. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, причем $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{q}$. Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

1.12. M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

1.13. В пространстве заданы треугольники ABC и $A'B'C'$; M и M' — точки пересечения их медиан. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$ через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$.

1.14. Точки E и F — середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

1.15. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания AD к длине основания BC равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

1.16. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$.

а) При каком соотношении между α и β векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны.

б) Пусть α и β таковы, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ неколлинеарны. Полагая $\overrightarrow{BC} = \mathbf{p}$ и $\overrightarrow{MN} = \mathbf{q}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Система векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_2$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. В противном случае система называется *линейно независимой*.

1.17. Доказать следующие геометрические критерии линейной зависимости:

а) система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ *коллинеарны*, т. е. их направления совпадают или противоположны;

б) система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ *компланарны*, т. е. параллельны некоторой плоскости;

в) всякая система из $n \geqslant 4$ векторов линейно зависима.

1.18. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен вектор $\overrightarrow{AK}$ длины $|\overrightarrow{AK}| = \dfrac{1}{5}|\overrightarrow{AD}|$, а на диагонали AC — вектор $\overrightarrow{AL}$ длины $|\overrightarrow{AL}| = \dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны и найти λ такое, что $\overrightarrow{KL} = \lambda \cdot \overrightarrow{LB}$.

1.19. Разложить вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\mathbf{p} = \mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{r} = 2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$.

1.20 Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами: $\mathbf{p} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{b}+\dfrac{1}{2}\mathbf{c}$.

1.21. Даны четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Вычислить их сумму, если известно, что $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \alpha\mathbf{d}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \beta\mathbf{a}$ и векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны.

1.22. Доказать, что для любых заданных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ компланарны.

1.23. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Доказать, что векторы $\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $3\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}+5\mathbf{b}-3\mathbf{c}$ компланарны.

1.24. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Вычислить значения λ, при которых векторы $\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\lambda\mathbf{c}$ компланарны.

1.25. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Вычислить значения λ и μ, при которых векторы $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ коллинеарны.

2. Базис и координаты вектора. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется *базисом* в множестве всех геометрических векторов. Всякий геометрический вектор $\mathbf{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\mathbf{a} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3; \tag{1}$$

числа X_1, X_2, X_3 называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Запись (1) называют также разложением вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathfrak{B}$.

Аналогично, упорядоченная пара $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ неколлинеарных векторов называется базисом $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в множестве геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор $\mathbf{e}$ образует базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e})$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор $\mathbf{a}$ есть *линейная комбинация* векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т. е.

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{a}_k,$$

то каждая координата $X_i(\mathbf{a})$ вектора $\mathbf{a}$ равна сумме произведений коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на одноименные координаты векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:

$$X_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_i(\mathbf{a}_k), \quad i = 1, 2, 3.$$

Базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ называется *прямоугольным*, если векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}. \tag{2}$$

Проекцией вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{e}$ называется число $\text{пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{e}})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{a}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\mathbf{a}$ на базисные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно, а длина вектора $\mathbf{a}$ равна

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{3}$$

Числа

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}}) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}}) = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}}) = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

называются *направляющими косинусами* вектора $\mathbf{a}$.

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $\mathbf{a}_0 = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$.

1.26. Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overrightarrow{DE}$, где D и E — середины ребер OA и BC;

б) вектора $\overrightarrow{OF}$, где F — точка пересечения медиан основания ABC.

1.27. В тетраэдре $OABC$ медиана AL грани ABC делится точкой M в отношении $|\overrightarrow{AM}| : |\overrightarrow{ML}| = 3:7$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

1.28. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. В базисе из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overrightarrow{OM}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма;

б) вектора $\overrightarrow{OK}$, где K — середина стороны AD.

1.29. В трапеции $ABCD$ известно отношение длин оснований: $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \lambda$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{CB}$ в базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

1.30. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$ $(\alpha, \beta \neq \neq 0, 1;\ \alpha\beta \neq 1)$, O — точка пересечения CM и BN. В базисе из векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ найти координаты:

а)** вектора $\overrightarrow{OA}$;

б) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

1.31. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = = \gamma\overrightarrow{CA}$. Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых BF и CK, CK и AM, AM и BF соответственно. В базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найти координаты векторов $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{CR}$.

1.32. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. В базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ найти координаты:

а) векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;

б) векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DE}$.

1.33. Дан треугольник ABC, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Прямая MN пересекает BC в точке K.

а) Найти координаты вектора $\overrightarrow{AK}$ в базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

б) Доказать, что векторы $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KN}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NM}$ и $\mathbf{r} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MK}$ коллинеарны и определить коэффициент γ в равенстве $\mathbf{p} = \gamma\mathbf{q}$.

1.34. В тетраэдре $ABCD$ DM — медиана грани BCD и Q — центр масс этой грани. Найти координаты векторов $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AQ}$ в базисе $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

В дальнейшем, если не оговаривается противное, векторы представлены своими координатами в некотором прямоугольном базисе. Запись $\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}$ означает, что координаты вектора $\mathbf{a}$ равны X, Y и Z, т.е. $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$.

1.35. Заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \{-1, 2, 0\}$, $\mathbf{a}_2 = \{3, 1, 1\}$, $\mathbf{a}_3 = = \{2, 0, 1\}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \dfrac{1}{3}\mathbf{a}_3$. Вычислить:

а) $|\mathbf{a}_1|$ и координаты орта $\mathbf{a}_{1,0}$ вектора $\mathbf{a}_1$;

б) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{j}})$;

в) координату X вектора $\mathbf{a}$;

г) $\text{пр}_{\mathbf{j}}\mathbf{a}$.

1.36. Заданы векторы $\mathbf{e} = \left\{-1,\ 1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$ и $\mathbf{a} = \{2,\ -2,\ -1\}$. Убедиться, что они коллинеарны, и найти разложение вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathfrak{B} = (\mathbf{e})$.

1.37. На плоскости заданы векторы $\mathbf{e}_1 = \{-1,\ 2\}$, $\mathbf{e}_2 = \{2,\ 1\}$ и $\mathbf{a} = \{0,\ -2\}$. Убедиться, что $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)$ — базис в множестве всех векторов на плоскости. Построить заданные векторы и найти разложение вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathfrak{B}$.

1.38. Показать, что тройка векторов $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, 1, 0\}$ и $\mathbf{e}_3 = \{1,\ 1,\ 1\}$ образует базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ и написать соответствующее разложение по базису.

1.39. Заданы векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти:

а) координаты орта $\mathbf{a}_0$;

б) координаты вектора $\mathbf{a} - \dfrac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$;

в) разложение вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ по базису $\mathfrak{B} = (\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$;

г) $\text{пр}_{\mathbf{j}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

1.40. Найти координаты орта $\mathbf{a}_0$, если $\mathbf{a} = \{6,\ 7,\ -6\}$.

1.41. Найти $Z(\mathbf{a})$, если $X(\mathbf{a}) = 3$, $Y(\mathbf{a}) = -9$ и $|\mathbf{a}| = 12$.

1.42. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\mathbf{p} = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$, если $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

1.43. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, образующий с ортом $\mathbf{j}$ острый угол и имеющий длину $|\mathbf{x}| = 15$.

1.44. Найти вектор $\mathbf{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\mathbf{x}| = 2\sqrt{3}$.

1.45. Найти вектор $\mathbf{x}$, образующий с ортом $\mathbf{j}$ угол $60°$, с ортом $\mathbf{k}$ — угол $120°$, если $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{2}$.

1.46. При каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \beta\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ коллинеарны?

1.47*. Найти вектор $\mathbf{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, если $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{6}$.

1.48. Заданы векторы: $\mathbf{a} = \{1,\ 5,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{6,\ -4,\ -2\}$, $\mathbf{c} = \{0,\ -5,\ 7\}$ и $\mathbf{d} = \{-20,\ 27,\ -35\}$. Требуется подобрать числа α, β и γ так, чтобы векторы $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если «начало» каждого последующего вектора совместить с «концом» предыдущего.

1.49. В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла с вершиной O — прямые. Точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OH}$ в базисе из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OC}| = c$.

3. Декартовы прямоугольные координаты точки. Простейшие задачи аналитической геометрии. Говорят, что в трехмерном пространстве введена *декартова прямоугольная система координат* $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *началом координат*;

2) некоторый прямоугольный базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ в множестве всех геометрических векторов.

Оси Ox, Oy и Oz, проведенные через точку O в направлении базисных ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, называются *координатными осями* системы координат $\langle O, \mathfrak{B}\rangle = Oxyz$.

Если M — произвольная точка пространства, то направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$ называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ как геометрического вектора в базисе $\mathfrak{B}$,

$$x(M) = X(\overrightarrow{OM}), \quad y(M) = Y(\overrightarrow{OM}), \quad z(M) = Z(\overrightarrow{OM}).$$

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки в пространстве, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{4}$$

Отсюда на основании (3) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

При решении задач аналитической геометрии целесообразно максимально использовать методы векторной алгебры.

Пример 1. Заданы вершины $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$ и точка $E(-1, 2, 1)$ пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты вершины C.

◁ Так как координаты вершины A заданы, то для вычисления координат вершины C достаточно найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Пусть $\overrightarrow{BF}$ — медиана, проведенная из вершины B. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}) = 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BE}\right) \tag{5}$$

(здесь использован тот факт, что точка E делит медиану BF в отношении $2:1$). Далее, из условий задачи с помощью формулы (4) вычисляем координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{1, 2, 2\}$ и $\overrightarrow{BE} = \{-3, 0, 0\}$, откуда на основании (5) получаем $\overrightarrow{AC} = \{-7,\ 4,\ 4\}$ и, наконец, вновь используя формулу (4), находим координаты точки C:

$$x(C) = x(A) + X(\overrightarrow{AC}) = -6;$$

$$y(C) = y(A) + Y(\overrightarrow{AC}) = 4;$$

$$z(C) = z(A) + Z(\overrightarrow{AC}) = 3. \ \triangleright$$

Пусть на прямой l заданы точки M_1, M_2 и M, причем $M_1 \neq M_2$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. Так как они коллинеарны, то найдется такое действительное число λ, что $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$. Число λ называется *отношением*, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, причем оно положительно, если точка M находится внутри отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, отрицательно (и $\lambda \neq -1$), если M находится вне $\overrightarrow{M_1M_2}$, и равно 0, если $M = M_1$.

Пример 2. Зная координаты точек $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и отношение λ, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, найти координаты точки M.

$\triangleleft$ Пусть O — начало координат. Обозначим: $\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OM_2} = \mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$. Так как

$$\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{MM_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r},$$

то

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}),$$

откуда (так как $\lambda \neq -1$)

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1+\lambda}.$$

Полученная формула и дает решение задачи в векторной форме. Переходя в этой формуле к координатам, получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \ \triangleright \tag{6}$$

1.50. Точка $M(1,\ -5,\ 5)$ задана своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат $\langle O,\ \mathfrak{B} = (\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})\rangle$. Найти координаты этой точки в системе $\langle O',\ \mathfrak{B}' = (\mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')\rangle$, если:

а) $\overrightarrow{OO'} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$;

б) $O' = O$ и $\mathbf{i}' = -\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{i}$;

в) $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{j}$ и $\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$

(предварительно убедиться, что $\mathfrak{B}'$ — прямоугольный базис).

1.51. Даны три вершины $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ и $C(1,2,-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

1.52. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2,\ 6)$, $B(2,\ 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2,\ 2)$. Найти две другие вершины.

1.53. Определить координаты вершин треугольника, если известны середины его сторон: $K(2,\ -4)$, $M(6,\ 1)$, $N(-2,\ 3)$.

1.54. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(3,\ -3)$ равно 5.

1.55. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1,\ -4,\ 7)$ и $B(5,\ 6,\ -5)$.

1.56. Даны вершины треугольника $A(3,\ -1,\ 5)$, $B(4,\ 2,\ -5)$ и $C(-4,\ 0,\ 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

1.57. Отрезок с концами в точках $A(3,\ -2)$ и $B(6,\ 4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

1.58. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2,\ 0,\ 2)$ и $D(5,\ -2,\ 0)$ разделен на три равные части.

1.59*. Заданы точки $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(2,\ -2,\ 1)$, $C(3,\ 0,\ 3)$ и $D(16,\ 10,\ 18)$. E — точка пересечения плоскости OAB (O — начало координат) с прямой, проведенной через точку D параллельно прямой OC. Найти координаты точки E.

1.60*. Заданы точки $A(2,\ 5,\ 2)$ и $B(14,\ 5,\ 4)$; C — точка пересечения координатной плоскости Oxy с прямой, проведенной через точку B параллельно прямой OA. Найти координаты точки C.

1.61. Даны вершины треугольника $A(1,\ -1,\ -3)$, $B(2,\ 1,\ -2)$ и $C(-5,\ 2,\ -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

$\triangleleft$ Найдем разложение вектора $\overrightarrow{AE}$ по базису из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Пусть $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ и $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — орты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AE}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ (ср. с задачей 1.47), т. е. существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\overrightarrow{AE} = \lambda\mathbf{e} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right). \qquad (7)$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \mu(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \\ = \mu\overrightarrow{AB} + (1-\mu)\overrightarrow{AC}, \quad \mu > 0. \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) представляют собой два разложения вектора $\overrightarrow{AE}$ по базису из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|} = \mu \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{|\overrightarrow{AC}|} = 1 - \mu. \tag{9}$$

Решая систему (9), находим

$$\lambda = \frac{1}{1/|\overrightarrow{AC}| + 1/|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|},$$

так что формула (7) принимает вид

$$\overrightarrow{AE} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AB} + \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}. \tag{10}$$

Из условий задачи находим:

$$\overrightarrow{AB} = \{1,\ 2,\ 1\} \text{ и } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-6,\ 3,\ -3\} \text{ и } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{6},$$

и на основании (10) получаем

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

откуда

$$\overrightarrow{AE} = \left\{-\frac{3}{4},\ \frac{9}{4},\ 0\right\} \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{AE}| = \frac{3}{4}\sqrt{10}. \ \triangleright$$

1.62. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3,\ -2,\ 1)$, $B(3,\ 1,\ 5)$, $C(4,\ 0,\ 3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

1.63. Даны вершины треугольника $A(1,\ 0,\ 2)$, $B(1,\ 2,\ 2)$ и $C(5,\ 4,\ 6)$. Точка L делит отрезок $\overrightarrow{AC}$ в отношении $\lambda = \dfrac{1}{3}$, CE — медиана, проведенная из вершины C. Найти координаты точки M пересечения прямых BL и CE.

4. Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением* ненулевых векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ называется число

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2) = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\cos(\widehat{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2}).$$

Для скалярного произведения наряду с обозначением $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ используется также обозначение $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1) $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = 0$ (*условие перпендикулярности векторов*);

2) если $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2})$, то

$$0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi \Leftrightarrow \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 < 0.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:
1) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1$;
2) $(\lambda\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_2 = \lambda(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)$;
3) $\mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\mathbf{b}_2$.

Если векторы $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ представлены своими координатами в прямоугольном базисе, то скалярное произведение равно
$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \qquad (*)$$
Из этой формулы, в частности, следует формула для определения косинуса угла между векторами
$$\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

1.64. Взяв формулу $(*)$ за определение скалярного произведения, доказать справедливость алгебраических свойств 1), 2), 3) скалярного произведения.

1.65. $|\mathbf{a}_1| = 3$, $|\mathbf{a}_2| = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить:

а) $\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$;
б) $(3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)$;
в) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)^2$.

1.66. $|\mathbf{a}_1| = 3$, $|\mathbf{a}_2| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\mathbf{a}_1 + \alpha\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1 - \alpha\mathbf{a}_2$ будут перпендикулярны.

1.67. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, если известно, что $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{q}| = 3$ и $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

1.68. Определить угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = 20$ и $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$.

1.69. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. Вычислить длину его высоты $\overrightarrow{CH}$, если известно, что $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — взаимно перпендикулярные орты.

1.70. Вычислить $\text{пр}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 120^\circ$.

1.71. Известно, что $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2$ и $\overrightarrow{AC} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — взаимно перпендикулярные орты. Определить углы треугольника ABC.

1.72. Найти угол, образованный единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, если известно, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$ перпендикулярны.

1.73. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

1.74. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

1.75. Задан прямоугольник $ABCD$ и вне его произвольная точка M. Доказать равенство $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$. Вывести отсюда, что $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$.

1.76*. $ABCD$ — равнобочная трапеция, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ — основание, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ — боковая сторона, угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$.

1.77. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, вычислить $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$.

1.78. Даны векторы $\mathbf{a}_1 = \{4, -2, -4\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{6, -3, 2\}$. Вычислить:

а) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; б) $(2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)$; в) $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)^2$;
г) $|2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$; д) $\text{пр}_{\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_2$; е) $\text{пр}_{\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_1$;
ж) направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}_1$;
з) $\text{пр}_{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2)$; и) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$.

1.79. Даны точки $A(2, 2)$ и $B(5, -2)$. На оси абсцисс найти такую точку M, чтобы $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

1.80. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$.

1.81. Для заданных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ вычислить $\text{пр}_{\mathbf{c}}(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})$:

а) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$;
б) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

1.82. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ и $D(4, 7, -2)$ — квадрат.

1.83. Найти косинус угла φ между диагоналями AC и BD параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2, 1, 3)$, $B(5, 2, -1)$ и $C(-3, 3, -3)$.

1.84. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1, 2, 0)$ в положение $B(2, 1, 3)$.

1.85. Даны векторы $\mathbf{a} = \{1, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, -1\}$. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $2\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a}$, $\mathbf{x} + 2\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

1.86. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\mathbf{c}$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

◁ Если $\mathbf{c} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, то из условия задачи следует, что вектор $\mathbf{c}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbf{ca} = X + Y = \mathbf{ab} = 1,$$
$$\mathbf{cb} = Y + Z = \mathbf{ab} = 1,$$
$$|\mathbf{c}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 = 2.$$

Решая эту систему, находим $X_1 = -\dfrac{1}{3}$, $Y_1 = \dfrac{4}{3}$, $Z_1 = -\dfrac{1}{3}$ или $X_2 = 1$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 1$. ▷

1.87. Лучи $[OA)$, $[OB)$ и $[OC)$ образуют попарно равные углы величины $\dfrac{\pi}{3}$. Найти угол между биссектрисами углов $\angle AOB$ и $\angle BOC$.

1.88. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = \{2,\ 1,\ -1\}$ и удовлетворяющего условию $\mathbf{ax} = 3$.

1.89. Вектор $\mathbf{x}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}_1 = \{2,\ 3,\ -1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{1,\ -2,\ 3\}$ и удовлетворяет условию $\mathbf{x}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -6$. Найти координаты $\mathbf{x}$.

Если задан некоторый вектор $\mathbf{e}$, то *ортогональной составляющей* произвольного вектора $\mathbf{a}$ *вдоль вектора* $\mathbf{e}$ называется такой вектор $\mathbf{a}_\mathbf{e}$, который коллинеарен $\mathbf{e}$, а разность $\mathbf{a} - \mathbf{a}_\mathbf{e}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{e}$.

Аналогично, *ортогональной составляющей* вектора $\mathbf{a}$ *в плоскости* P называется вектор $\mathbf{a}_P$, компланарный плоскости P, причем разность $\mathbf{a} - \mathbf{a}_P$ перпендикулярна этой плоскости.

1.90. Для вектора $\mathbf{a} = \{-1,\ 2,\ 1\}$ найти ортогональную составляющую вдоль базисного орта $\mathbf{j}$ и ортогональную составляющую в плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$.

1.91. Заданы векторы $\mathbf{e} = \{1,\ 1,\ 1\}$ и $\mathbf{a} = \{-1,\ 2,\ 1\}$. Найти:

а) ортогональную составляющую вектора $\mathbf{a}$ вдоль вектора $\mathbf{e}$;

б) ортогональную составляющую вектора $\mathbf{a}$ в плоскости P, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$.

1.92. Заданы вершины треугольника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4,\ -1,\ 2)$ и $C(-5,\ 6,\ -4)$; BD — его высота, проведенная через вершину B. Найти координаты точки D.

1.93*. Заданы векторы $\mathbf{e}_1 = \{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1,\ 1,\ 1\}$ и $\mathbf{a} = \{-2,\ 0,\ 1\}$. Найти ортогональную составляющую $\mathbf{a}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ вектора в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Если базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ — прямоугольный, то координаты произвольного вектора $\mathbf{a} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ в этом базисе могут быть вычислены по формуле

$$X_i = \mathbf{ae}_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{11}$$

В частности, формула (11) позволяет легко найти связь между координатами одного и того же вектора в различных прямоугольных базисах.

Пример 3. Пусть базис $\mathfrak{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ получен из базиса $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ поворотом последнего вокруг точки O на угол $\varphi > 0$ (мы считаем, что $\varphi > 0$, если поворот произведен против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае) (рис. 2). Установить связь между координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$.

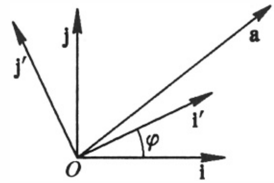


Рис. 2

◁ Пусть $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$. Тогда

$$X' = \mathbf{a}\mathbf{i}' = X\mathbf{i}\mathbf{i}' + Y\mathbf{j}\mathbf{i}', \quad Y' = \mathbf{a}\mathbf{j}' = X\mathbf{i}\mathbf{j}' + Y\mathbf{j}\mathbf{j}'. \tag{12}$$

С другой стороны, имеем:

$$\mathbf{i}\mathbf{i}' = \cos\varphi, \quad \mathbf{j}\mathbf{i}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi,$$
$$\mathbf{i}\mathbf{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi, \quad \mathbf{j}\mathbf{j}' = \cos\varphi.$$

Поэтому формулы преобразования координат (12) принимают вид

$$X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi,$$
$$Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \ \triangleright$$

1.94. Вывести формулы преобразования координат точек плоскости при переходе от системы координат $\langle O, \mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})\rangle$ к системе $\langle O', \mathfrak{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}')\rangle$, если $\overrightarrow{OO'} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, а базис $\mathfrak{B}'$ получен из базиса $\mathfrak{B}$ поворотом на угол $\varphi > 0$ вокруг точки O.

1.95. Написать формулы преобразования координат векторов при переходе от базиса $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ к базису $\mathfrak{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$, если

$$\mathbf{i}' = \cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = -\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k}.$$

1.96. В прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ вектор $\mathbf{a}$ имеет разложение $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Убедиться, что тройка векторов

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

также образует прямоугольный базис $\mathfrak{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$, и найти в этом базисе координаты вектора $\mathbf{a}$.

1.97. Проверить, что тройка векторов $\mathbf{e}_1 = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 1\}$ и $\mathbf{e}_3 = \{1, 2, 2\}$ образует (косоугольный) базис. Выразить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ через их координаты в этом базисе, если

$$\mathbf{a}_1 = X_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + X_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + X_3^{(1)}\mathbf{e}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_2 = X_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + X_2^{(2)}\mathbf{e}_2 + X_3^{(2)}\mathbf{e}_3.$$

5. Векторное произведение векторов. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется *правой*, если наблюдателю, находящемуся внутри телесного угла, образованного этими векторами, кратчайшие повороты от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ и от $\mathbf{e}_2$ к $\mathbf{e}_3$ кажутся происходящими против часовой стрелки. В противном случае тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется *левой*.

Векторным произведением вектора $\mathbf{a}_1$ на вектор $\mathbf{a}_2$ называется вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ (или $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$), определяемый следующими тремя условиями:

1) длина вектора $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т. е. $|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]| = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\sin(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$;

2) вектор $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ перпендикулярен плоскости векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$;

3) упорядоченная тройка $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ правая.

Из определения векторного произведения следует, что

$$\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0}.$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = -[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1]$;

2) $[\lambda\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \lambda[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$;

3) $[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}]$.

Если $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ — векторы, заданные своими координатами в правом прямоугольном базисе, то разложение векторного произведения $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ в том же базисе имеет вид

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\mathbf{i} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\mathbf{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\mathbf{k},$$

или, в символической записи (с использованием понятия определителя 3-го порядка; см. § 1 гл. 2)

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

1.98. $|\mathbf{a}_1| = 1$, $|\mathbf{a}_2| = 2$ и $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить:

а) $|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|$; б) $|[2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2]|$; в) $|[\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2]|$.

1.99. Какому условию должны удовлетворять векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, чтобы векторы $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ были коллинеарны?

1.100. Упростить выражения:

а) $[\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{k}] - [\mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{k}] + [\mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}]$,

б) $[\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a}]$,

в) $[2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a}] + [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}]$,

г) $2\mathbf{i}[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + 3\mathbf{j}[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + 4\mathbf{k}[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$.

1.101. Доказать, что $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] = 2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и выяснить геометрический смысл этого тождества.

1.102. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

1.103. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ связаны условием $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Доказать, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$. Каков геометрический смысл этого результата?

1.104. Доказать, что при любых векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{p}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{q}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{r}]$ компланарны.

1.105. $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$. Выразить через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ единичный вектор $\mathbf{c}_0$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и такой, что:

а) тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_0)$ правая;

б) тройка $(\mathbf{b}, \mathbf{c}_0, \mathbf{a})$ левая.

1.106. Заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \{3, -1, 2\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{1, 2, -1\}$. Найти координаты векторов:

а) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$; б) $[2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2]$; в) $[2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2]$.

1.107. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ и $C(4, 3, 2)$.

1.108. В треугольнике с вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$ найти высоту $h = |\overrightarrow{BD}|$.

1.109. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ будет коллинеарен вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = \{3, -1, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, 0\}$.

1.110. Для заданных векторов $\mathbf{a} = \{2, 0, 3\}$, $\mathbf{b} = \{-3, 5, 4\}$, $\mathbf{c} = \{3, 4, -1\}$ вычислить проекцию вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ на вектор $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}$.

1.111. Для заданных векторов $\mathbf{a} = \{2, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, -1, 3\}$, $\mathbf{d} = \{3, -1, 2\}$ вычислить проекцию вектора $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ на вектор $[\mathbf{b} - \mathbf{d}, \mathbf{c}]$.

1.112. Найти вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$, если $\mathbf{a} = \{2, 1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, 1\}$.

1.113. Найти вектор $[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}]]$, если $A(2, 2, 3)$, $B(1, 0, 4)$, $C(2, 3, 5)$.

1.114. Три ненулевых вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ связаны соотношениями $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

1.115. Сила $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

1.116. Даны три силы: $\mathbf{F}_1 = \{2, -1, -3\}$, $\mathbf{F}_2 = \{3, 2, -1\}$ и $\mathbf{F}_3 = \{-4, 1, 3\}$, приложенные к точке $A(-1, 4, 2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $O(2, 3, -1)$.

1.117. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ и $4\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \dfrac{\pi}{4}$.

1.118. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\mathbf{a}_1 = \{4, -2, -3\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{0, 1, 3\}$, образует с ортом $\mathbf{j}$ тупой угол и $|\mathbf{x}| = 26$.

1.119. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, если он перпендикулярен векторам $\mathbf{a}_1 = \{2, -3, 1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{1, -2, 3\}$, а также удовлетворяет условию $\mathbf{x}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 10$.

1.120. При каких условиях уравнение $\mathbf{a}_2 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{x}]$ имеет решение относительно $\mathbf{x}$? Сколько существует решений?

1.121. Найти составляющую вектора $\mathbf{a} = \{-1, 2, 0\}$, перпендикулярную плоскости векторов $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 1\}$ и $\mathbf{e}_2 = \{1, 1, 1\}$.

1.122. Как изменится выражение (13), если координаты векторов задать в левом прямоугольном базисе? Будет ли верна эта формула в случае косоугольного базиса?

1.123*. Вектор $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ называется *двойным векторным произведением* заданных векторов. Доказать, что справедливо равенство

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

6. Смешанное произведение векторов. *Смешанным произведением* упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ называется число $([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3)$.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) если V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, то

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = \begin{cases} V, & \text{если тройка } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ правая}, \\ -V, & \text{если тройка } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ левая}; \end{cases}$$

2) для того чтобы три вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнение условия $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = 0$.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т. е.

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]\mathbf{a}_1 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]\mathbf{a}_2.$$

Это свойство позволяет ввести обозначение $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ (результат не зависит от того, как расставить квадратные скобки в правой части). Смешанное произведение через координаты векторов в правом прямоугольном базисе записывается в виде

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

1.124. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\mathbf{a}_1| = 4$, $|\mathbf{a}_2| = 2$, $|\mathbf{a}_3| = 3$. Вычислить $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

1.125. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют левую тройку, $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$ и $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 30°$; $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$. Найти $\mathbf{abc}$.

1.126. Заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-2, 2, 1\}$ и $\mathbf{a}_3 = \{3, -2, 5\}$. Вычислить $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$. Какова ориентация троек:

а) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$; б) $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$; в) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2)$?

1.127. Установить, образуют ли векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ базис в множестве всех векторов, если:

а) $\mathbf{a}_1 = \{2, 3, -1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{a}_3 = \{1, 9, -11\}$;

б) $\mathbf{a}_1 = \{3, -2, 1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{2, 1, 2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{3, -1, -2\}$.

1.128. Доказать, что $|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3| \leqslant |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2||\mathbf{a}_3|$; в каком случае имеет место знак равенства?

1.129. Доказать, что при любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

1.130. Доказать тождество

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c})(4\mathbf{a} + \mathbf{b} + 5\mathbf{c}) = 0.$$

1.131. Доказать, что если $\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \gamma[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$, причем хотя бы одно из чисел α, β и γ отлично от нуля, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

1.132. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

1.133. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2, -3, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$ и $D(3, 2, 4)$.

1.134. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$ и $D(3, 4, -3)$ вычислить высоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

1.135. Проверить, компланарны ли данные векторы:

а) $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 14\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1.136. При каком λ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ будут компланарны?

а) $\mathbf{a} = \{\lambda, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{5, -1, 2\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 5, 4\}$;

б) $\mathbf{a} = \{1, 2\lambda, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, \lambda, 0\}$, $\mathbf{c} = \{0, \lambda, 1\}$.

1.137. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

1.138. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, а объем тетраэдра равен V:

а) $A(-1, 10, 0)$, $B(0, 5, 2)$, $C(6, 32, 2)$, $V = 29$;

б) $A(0, 1, 1)$, $B(4, 3, -3)$, $C(2, -1, 1)$, $V = 2$.

1.139. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

1.140. Доказать тождества:

а) $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = -\mathbf{abc}$;

б) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 3\mathbf{abc}$;

в) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = 2\mathbf{abc}$;

г) $\forall\alpha,\ \beta\ (\mathbf{ab}(\mathbf{c}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \mathbf{abc})$.

§ 2. Линейные геометрические объекты

1. Прямая на плоскости. Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ — *общее уравнение прямой*;

2) $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ перпендикулярно *нормальному* вектору $\mathbf{n} = \{A,\ B\}$;

3) $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ параллельно *направляющему вектору* $\mathbf{q} = \{l,\ m\}$ (*каноническое уравнение* прямой);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + ml, \end{cases}$ $t \in (-\infty,\ +\infty)$ — *параметрические уравнения* прямой, которые в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t,$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0,\ y_0\}$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0,\ y_0)$, $\mathbf{q} = \{l,\ m\}$ — направляющий вектор прямой;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой *в отрезках*, где a и b — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ — *нормальное уравнение* прямой, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы нормального вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой, а $p > 0$ — расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение 1) приводится к нормальному виду 6) путем умножения на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Если прямая L задана уравнением вида 6), а $M(x,\ y)$ — некоторая точка плоскости, то выражение

$$\delta(M,\ L) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

задает *отклонение точки M от прямой L*. Знак $\delta(M,\ L)$ указывает на взаимное расположение точки M, прямой L и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от прямой L, то $\delta(M, L) > 0$, а если точка M и начало координат находятся по одну сторону от прямой L, то $\delta(M, L) < 0$. Расстояние $\rho(M, L)$ от точки M до прямой L определяется равенством $\rho(M, L) = |\delta(M, L)|$.

Пример 1. Написать уравнение прямой L', параллельной двум заданным прямым L_1: $x + 2y - 1 = 0$, L_2: $x + 2y + 2 = 0$ и проходящей посередине между ними.

$\lhd$ 1-й метод. Так как вектор $\mathbf{n} = \{1, 2\}$, нормальный к заданным прямым L_1 и L_2, является в то же время нормальным и к прямой L', то достаточно найти какую-нибудь точку M', лежащую посередине между L_1 и L_2. Из уравнений для L_1 и L_2 находим любые две точки $M_1 \in L_1$ и $M_2 \in L_2$, например такие: $M_1(1, 0)$ и $M_2(-2, 0)$. Тогда точка $M'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, делящая отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ пополам, лежит посередине между L_1 и L_2. Поэтому уравнение прямой L' имеет вид

$$L': \; x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

2-й метод. Произвольная точка M принадлежит L' в том и только в том случае, когда $\rho(M, L_1) = \rho(M, L_2)$, т. е.

$$|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|. \tag{1}$$

Для того чтобы снять модули в этом соотношении, установим положение начала координат относительно заданных прямых L_1 и L_2. Нормальные уравнения этих прямых таковы:

$$L_1: \; \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{и} \quad L_2: \; -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$$

Так как нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ из точки O в сторону L_1 и L_2 противоположно направлены, то точка O находится в полосе между L_1 и L_2.

Поэтому соотношение (1) принимает вид $\delta(M, L_1) = \delta(M, L_2)$, или

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}},$$

т. е. L': $x + 2y + \frac{1}{2} = 0$. $\rhd$

В задачах 1.141–1.143 требуется:

1) написать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

2) привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

1.141. Прямая L задана точкой $M_0(x_0, y_0) \in L$ и нормальным вектором $\mathbf{n} = \{A, B\}$:

а) $M_0(-1, 2)$, $\mathbf{n} = \{2, 2\}$;

б) $M_0(2,\ 1)$, $\mathbf{n} = \{2,\ 0\}$;

в) $M_0(1,\ 1)$, $\mathbf{n} = \{2,\ -1\}$.

1.142. Прямая L задана точкой $M_0(x_0,\ y_0) \in L$ и направляющим вектором $\mathbf{q} = \{l,\ m\}$:

а) $M_0(-1,\ 2)$, $\mathbf{q} = \{3,\ -1\}$;

б) $M_0(1,\ 1)$, $\mathbf{q} = \{0,\ -1\}$;

в) $M_0(-1,\ 1)$, $\mathbf{q} = \{2,\ 0\}$.

1.143. Прямая L задана двумя своими точками $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$:

а) $M_1(1,\ 2)$, $M_2(-1,\ 0)$;

б) $M_1(1,\ 1)$, $M_2(1,\ -2)$;

в) $M_1(2,\ 2)$, $M_2(0,\ 2)$.

1.144. Заданы прямая L и точка M. Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M,\ L)$ от точки M до прямой L;

2) написать уравнение прямой L', проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой L;

3) написать уравнение прямой L'', проходящей через точку M параллельно заданной прямой L.

Исходные данные:

а) L: $-2x + y - 1 = 0$, $M(-1,\ 2)$;

б) L: $2y + 1 = 0$, $M(1,\ 0)$;

в) L: $x + y + 1 = 0$, $M(0,\ -1)$.

Пусть заданы две прямые L_1 и L_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) L_1 и L_2 — параллельные прямые, в частности, они совпадают;

2) L_1 и L_2 пересекаются.

В задачах 1.145–1.149 исследовать взаимное расположение заданных прямых L_1 и L_2. При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(L_1,\ L_2)$ между прямыми, а в случае 2) — косинус угла $(\widehat{L_1,\ L_2})$ и точку M_0 пересечения прямых.

1.145. $L_1:\ -2x + y - 1 = 0,\quad L_2:\ 2y + 1 = 0.$

1.146. $L_1:\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1},\quad L_2:\ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{0}.$

1.147. $L_1:\ x + y - 1 = 0,\quad L_2:\ 2x - 2y + 1 = 0.$

1.148. $L_1:\ x + y - 1 = 0,\quad L_2:\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-2}.$

1.149. $L_1:\ -x + 2y + 1 = 0,\quad L_2:\ 2x - 4y - 2 = 0.$

1.150. Треугольник ABC задан координатами своих вершин. Требуется:

1) написать уравнение стороны AB;

2) написать уравнение высоты CD и вычислить ее длину $h = |CD|$;

3) найти угол φ между высотой CD и медианой BM;

4) написать уравнения биссектрис L_1 и L_2 внутреннего и внешнего углов при вершине A.

Исходные данные:

а) $A(1,\ 2)$, $B(2,\ -2)$, $C(6,\ 1)$;

б) $A(2,\ -2)$, $B(6,\ 1)$, $C(-2,\ 0)$.

1.151. Показать, что точка $M(-1,\ 2)$ принадлежит прямой L: $x = 2t,\ y = -1 - 6t$. Найти соответствующее этой точке значение параметра t.

1.152. Вычислить расстояние от точки $M(1,\ 1)$ до прямой L: $x = -1 + 2t,\ y = 2 + t$.

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и при этом $B \neq 0$ (т. е. прямая не параллельна оси Oy), то эта прямая может быть описана *уравнением с угловым коэффициентом* вида $y = kx + b$.

Пример 2. Написать уравнение прямой L', проходящей через точку $M(2,\ 1)$ под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к прямой L: $2x + 3y + 4 = 0$.

◁ Углом между прямыми L и L' называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Поэтому (см. задачу 1.156)

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1,\ L_2}) = \left|\frac{k + 2/3}{1 + (-2/3)k}\right| = 1,$$

где k — угловой коэффициент прямой L'. Из этого уравнения находим $k_1 = \dfrac{1}{5}$, $k_2 = -5$. Следовательно, задача имеет два решения. Используя координаты точки M, мы можем записать для каждого случая уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}, \quad y = -5x + 11,$$

или в общем виде

$$x - 5y + 3 = 0, \quad 5x + y - 11 = 0. \ \triangleright$$

1.153. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,\ 4)$ и отстоящей от точки $A(0,\ 3)$ на расстояние $\rho = 1$.

1.154. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,\ 2)$ и удаленной от точки $A(-2,\ -5)$ вдвое дальше, чем от точки $B(1,\ 8)$.

1.155. Написать уравнение прямой, проходящей на расстоянии $\sqrt{10}$ от точки $A(5,\ 4)$ перпендикулярно прямой $2x + 6y - 3 = 0$.

1.156. Доказать, что если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1,\ L_2}) = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

1.157. Из точки $M(5, 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ к оси Ox и отражается от нее. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

1.158. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси абсцисс от начала координат отрезок длины 2 и образующей с прямой $2x - y + 3 = 0$ угол $45°$.

1.159. В уравнении прямой $4x + \lambda y - 20 = 0$ подобрать λ так, чтобы угол между этой прямой и прямой $2x - 3y + 6 = 0$ равнялся $45°$.

1.160. В равнобедренном треугольнике ABC заданы вершина $C(4, 3)$, уравнение $2x - y - 5 = 0$ основания AC и уравнение $x - y = 0$ боковой стороны AB. Написать уравнение стороны BC.

1.161. Написать уравнение прямой, которая отстоит от точки $A(-1, 2)$ на расстояние $\rho = \sqrt{34}$ и составляет с осью Ox угол, вдвое больший угла, составляемого с осью Ox прямой $2x - 6y + 5 = 0$.

1.162. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8, 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

1.163. Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым L_1 и L_2 и проходящей посередине между ними, если:

$$\text{а) } L_1\colon\ 3x - 2y - 1 = 0, \quad L_2\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3};$$

$$\text{б) } L_1\colon\ 3x - 15y - 1 = 0, \quad L_2\colon\ \frac{x+1/2}{5} = \frac{y+1/2}{1}.$$

1.164. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 1)$ под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к прямой L: $x = 1 + t,\ y = -2 - \dfrac{2}{3}t$.

1.165. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1, 3)$ и $C(-1, 1)$. Найти координаты двух его других вершин и написать уравнения его сторон.

1.166. Известны уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $N(-2, 0)$. Написать уравнения остальных его сторон.

1.167. Точка $A(5, -4)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x - 7y - 8 = 0$. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

1.168. Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1, 3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

1.169*. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок M_1M_2, где $M_1(-5, 1)$ и $M_2(3, 7)$.

1.170. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,\ 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $M_1(5,\ -1)$ и $M_2(3,\ 7)$.

1.171. Установить, лежат ли точка $M_0(1,\ -2)$ и начало координат в одном угле, в смежных или в вертикальных углах, образованных пересекающимися прямыми L_1 и L_2, если:

а) L_1: $2x - y - 5 = 0$, L_2: $3x + y + 10 = 0$;
б) L_1: $x - 2y - 1 = 0$, L_2: $3x - y - 2 = 0$.

1.172. Установить, какой из углов — острый или тупой, — образованных прямыми $3x - 5y - 4 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$, содержит точку $M(2,\ -5)$.

1.173. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2,\ 6)$, а также уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы $7x + y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины.

1.174. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2,\ -7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.

1.175. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(3,\ -1)$, а также уравнения биссектрисы $x - 4y + 10 = 0$ и медианы $6x + 10y - 59 = 0$, проведенных из различных вершин.

1.176. Даны уравнения $5x + 4y = 0$ и $3x - y = 0$ медиан треугольника и координаты $(-5,\ 2)$ одной из его вершин. Найти уравнения сторон.

1.177. Даны уравнения $y + 4 = 0$, $7x + 4y + 5 = 0$ биссектрис двух внутренних углов треугольника и уравнение $4x + 3y = 0$ стороны, соединяющей вершины, из которых выходят данные биссектрисы. Написать уравнения двух других сторон треугольника.

1.178. а) Доказать, что точка H пересечения высот треугольника лежит на одной прямой с точкой M пересечения его медиан и с центром N описанной окружности.

б) Проверить утверждение п. а) для треугольника с вершинами в точках $A(5,\ 8)$, $B(-2,\ 9)$, $C(-4,\ 5)$. Определить, в каком отношении λ точка H делит направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$.

1.179. В треугольнике $A(-3,\ -1)$, $B(1,\ -5)$, $C(9,\ 3)$, $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$. Показать, что точка пересечения прямых BN и CM лежит на медиане, проведенной из вершины A.

2. Плоскость и прямая в пространстве. Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ — *общее уравнение* плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ перпендикулярно *нормальному вектору* $\mathbf{n} = \{A,\ B,\ C\}$;

3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ — уравнение плоскости *в отрезках*, где a, b, c — величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно;

4) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ — *нормальное уравнение* плоскости, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону плоскости, а $p>0$ — расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение 1) приводится к нормальному виду 4) путем умножения на нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{\operatorname{sgn}D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если плоскость P задана нормальным уравнением вида 4), а $M(x,\,y,\,z)$ — некоторая точка пространства, то выражение

$$\delta(M,\,P)=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p$$

задает *отклонение точки M от плоскости P*. Знак $\delta(M,\,P)$ указывает на взаимное расположение точки M, плоскости P и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P, то $\delta(M,\,P)>0$, а если M и начало координат находятся по одну сторону от плоскости P, то $\delta(M,\,P)<0$.

Расстояние $\rho(M,\,P)$ от точки M до плоскости P определяется равенством $\rho(M,\,P)=|\delta(M,\,P)|$.

Прямая L в пространстве может быть задана:

1) *общими уравнениями*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, что равносильно ее заданию как линии пересечения плоскостей;

2) *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt,\end{cases}$$

или в векторной форме $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\mathbf{q}t$, где $\mathbf{r}_0=\{x_0,\,y_0,\,z_0\}$ — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой, а $\mathbf{q}=\{l,\,m,\,n\}$ — направляющий вектор прямой;

3) *каноническими уравнениями*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

что равносильно заданию прямой как линии пересечения трех плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

Пример 3. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(0, 2, 1)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = \{2, 0, 1\}$.

◁ Задача имеет единственное решение, так как векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 1, 0\}$ и $\mathbf{a} = \{2, 0, 1\}$ неколлинеарны. В качестве нормального вектора к плоскости может быть взять вектор

$$\mathbf{n} = [\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Уравнение плоскости имеет вид $(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0$, или $x + y - 2z = 0$. Так как в последнем уравнении отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

Другой способ. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости P в том и только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\mathbf{a}$ компланарны. Следовательно,

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $x + y - 2z = 0$. ▷

Пример 4. Прямая L задана общими уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Написать канонические уравнения этой прямой, а также уравнение ее проекции на координатную плоскость Oxz.

◁ Точка $M(0, 2, 2)$ удовлетворяет общим уравнениям прямой (проверьте!) и, следовательно, лежит на этой прямой. В качестве направляющего вектора прямой может быть взят вектор $\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, где $\mathbf{n}_1 = \{1, 1, -1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{2, -1, 0\}$ — нормальные векторы плоскостей, линией пересечения которых является заданная прямая. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

и канонические уравнения прямой таковы:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений

$$-2x + y - 2 = 0,$$
$$-3x + z - 2 = 0,$$
$$-3y + 2z + 2 = 0,$$

описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно (*уравнения прямой в проекциях*). В частности, уравнение $-3x+z-2=0$ есть уравнение проекции заданной прямой на плоскость Oxz. $\triangleright$

Пример 5. Заданы скрещивающиеся прямые

$$L_1: \ \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}$$

и

$$L_2: \ \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Найти расстояние $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми и написать уравнения общего перпендикуляра L к этим прямым.

$\triangleleft$ Найдем уравнение плоскости P, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2 (рис. 3). Точка $M_1(0, 1, -2)$ лежит на прямой L_1 и, следовательно, принадлежит искомой плоскости P. В качестве нормального вектора к этой плоскости возьмем вектор

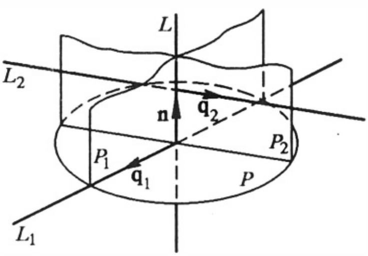


Рис. 3

$$\mathbf{n} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Уравнение плоскости P:

$$-2x - (y-1) - 4(z+2) = 0,$$

или, в общем виде, $2x+y+4z+7=0$.

Расстояние $\rho(L_1, L_2)$ равно расстоянию от любой точки прямой L_2, например, от точки $M_2(-1, -1, 2)$, до плоскости P. Нормальное уравнение плоскости P имеет вид

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x - \frac{1}{\sqrt{21}}y - \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{7}{\sqrt{21}} = 0,$$

откуда

$$\rho(L_1, L_2) = |\delta(M_2, P)| = \left|\frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{21}} - \frac{7}{\sqrt{21}}\right| = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Для того чтобы составить уравнения общего перпендикуляра L, найдем уравнения плоскостей P_1 и P_2, проходящих через заданные прямые L_1 и L_2 соответственно и перпендикулярных плоскости P. Имеем: $M_1(0, 1, -2) \in P_1$ и $\mathbf{n}_1 = [\mathbf{q}_1, \mathbf{n}] = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \perp P_1$, откуда P_1:

$x - 10y + 2z + 14 = 0$. Аналогично, $M_2(-1, -1, 2) \in P_2$ и $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{q}_2, \mathbf{n}] = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \perp P_2$, откуда P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} x - 10y + 2z + 11 = 0, \\ 3x - \ \ 2y - \ \ z + \ \ 3 = 0 \end{cases}$$

— общие уравнения прямой $L = P_1 \cap P_2$. ▷

1.180. Заданы плоскость P и точка M. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$, если:

а) P: $-2x + y - z + 1 = 0$, $M(1, 1, 1)$;

б) P: $x - y - 1 = 0$, $M(1, 1, 2)$.

1.181. Написать уравнение плоскости P', проходящей через заданные точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости P, если:

а) P: $-x + y - 1 = 0$, $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$;

б) P: $2x - y + z + 1 = 0$, $M_1(0, 1, 1)$, $M_2(2, 0, 1)$.

1.182. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, если:

а) $M(1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_1 = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-1, 0, 1\}$;

б) $M(0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_1 = \{2, 0, 1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{1, 1, 0\}$.

1.183. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\mathbf{a}$, если:

а) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $\mathbf{a} = \{3, 0, 1\}$;

б) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, -1)$, $\mathbf{a} = \{0, -1, 2\}$.

1.184. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2 и M_3, если:

а) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, -1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$.

Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) $P_1 \parallel P_2$, в частности, плоскости совпадают;

2) P_1 и P_2 пересекаются по некоторой прямой.

В задачах 1.185–1.188 исследовать взаимное расположение заданных плоскостей. При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между плоскостями, а в случае 2) — косинус угла между ними.

1.185. P_1: $-x + 2y - z + 1 = 0$, P_2: $y + 3z - 1 = 0$.

1.186. P_1: $2x - y + z - 1 = 0$, P_2: $-4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

1.187. P_1: $x - y + 1 = 0$, P_2: $y - z + 1 = 0$.

1.188. P_1: $2x - y - z + 1 = 0$, P_2: $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

1.189. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

1.190. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,\ 7,\ -5)$ и отсекающей от осей координат положительные и равные отрезки.

1.191. Три грани тетраэдра, расположенного во втором октанте ($x < 0,\ y > 0,\ z > 0$), совпадают с координатными плоскостями. Написать уравнение четвертой грани, зная длину ребер, ее ограничивающих: $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{29}$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$, и найти длину высоты OH тетраэдра.

1.192. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями P_1 и P_2, если:

а) $P_1\colon\ x - 3y + 2z - 5 = 0,\quad P_2\colon\ 3x - 2y - z + 3 = 0;$

б) $P_1\colon\ 2x - y + 5z - 3 = 0,\quad P_2\colon\ 2x - 10y + 4z - 2 = 0.$

1.193. Написать уравнение плоскости, равноудаленной от двух заданных плоскостей P_1 и P_2, если:

а) $P_1\colon\ 4x - y - 2z - 3 = 0,\quad P_2\colon\ 4x - y - 2z - 5 = 0;$

б) $P_1\colon\ 5x - 3y + z + 3 = 0,\quad P_2\colon\ 10x - 6y + 2z + 7 = 0.$

1.194. Установить, лежат ли точки $M_1(2,\ -1,\ 1)$ и $M_2(1,\ 2,\ -3)$ в одном угле, в смежных или в вертикальных углах, образованных плоскостями P_1 и P_2, если:

а) $P_1\colon\ 3x - y + 2z - 3 = 0,\quad P_2\colon\ x - 2y - z + 4 = 0;$

б) $P_1\colon\ 2x - y + 5z - 1 = 0,\quad P_2\colon\ 3x - 2y + 6z - 1 = 0.$

1.195. Известны координаты вершин тетраэдра: $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(5,\ 3,\ 0)$, $C(0,\ 1,\ 1)$, $D(-2,\ -4,\ 1)$. Написать уравнения его граней.

1.196. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,\ 1,\ -1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

1.197. Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой канонические уравнения и уравнения в проекциях (см. пример 4), если:

а) $L\colon \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$ б) $L\colon \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

1.198. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,\ 0,\ -3)$ параллельно:

а) вектору $\mathbf{q} = \{2,\ -3,\ 5\}$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

в) оси Ox; г) оси Oz;

д) прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

е) прямой $x = -2 + t,\ y = 2t,\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t$.

1.199. Написать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2, если:

а) $M_1(1,\ -2,\ 1)$, $M_2(3,\ 1,\ -1)$;

б) $M_1(3,\ -1,\ 0)$, $M_2(1,\ 0,\ -3)$.

1.200. Заданы прямая L: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ и точка $M(0,1,2)\notin L$ (проверить!). Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L;

г) вычислить расстояние $\rho(M,\ L)$;

д) найти проекцию точки M на прямой L.

1.201. Заданы плоскость P: $x+y-z+1=0$ и прямая L: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, причем $L\notin P$ (проверить!). Требуется:

а) вычислить $\sin\left(\widehat{P,\ L}\right)$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L перпендикулярно к плоскости P;

в) написать уравнения проекции прямой L на плоскость P.

1.202. Пусть заданы две прямые:

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\ \text{ и }\ L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

1.203. Используя результат задачи 1.202, убедиться, что прямые L_1 и L_2 принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости. Исходные данные:

а) L_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$, $\quad L_2$: $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$;

б) L_1: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\quad L_2$: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

1.204. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

1.205. Найти расстояние от точки $A(2,\ 3,\ -1)$ до заданной прямой L: а) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=3t+5, \\ y=2t, \\ z=-2t-25. \end{cases}$

1.206. Доказать, что прямые

$$L_1\colon \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2\colon \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

параллельны и найти расстояние $\rho(L_1,\ L_2)$.

1.207. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x-3y+2z+1=0$ с прямыми

$$\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-5}{2}.$$

1.208. При каком значении λ плоскость $5x-3y+\lambda z+1=0$ будет параллельна прямой

$$\begin{cases} x-4z-1=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

1.209. Найти уравнения проекции прямой $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{4}$ на плоскость $x-3y-z+8=0$.

1.210. Определить угол между прямой

$$\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$$

и плоскостью, проходящей через точки $A(2,\ 3,\ -1)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ -2,\ 1)$.

1.211. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(7,\ 1,\ 0)$ параллельно плоскости $2x+3y-z-15=0$ и пересекающей прямую $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

1.212. Написать канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3,\ -2,\ -4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

1.213. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми L_1: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1+\mathbf{q}_1 t$ и L_2: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_2+\mathbf{q}_2 t$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(L_1,\, L_2) = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2|}{|[\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2]|}.$$

Для заданных прямых L_1 и L_2 требуется:

а) доказать, что прямые не лежат в одной плоскости, т. е. являются скрещивающимися;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_2 параллельно L_1;

в) вычислить расстояние между прямыми;

г) написать уравнения общего перпендикуляра к прямым L_1 и L_2.

1.214. L_1: $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$,

L_2: $\dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$.

1.215. L_1: $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+3}{4}$,

L_2: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+7}{-3} = \dfrac{z-4}{8}$.

1.216. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z+2}{-3}$, L_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+7}{9}$.

1.217. L_1: $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{3}$,

L_2: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+8}{2} = \dfrac{z+12}{-1}$.

1.218. Куб $ABCDA'B'C'D'$ задан своими вершинами $A(0,\, 0,\, 0)$, $B(1,\, 0,\, 0)$, $C(1,\, 1,\, 0)$, $D(0,\, 1,\, 0)$, $A'(0,\, 0,\, 1)$, $B'(1,\, 0,\, 1)$, $C'(1,\, 1,\, 1)$, $D'(0,\, 1,\, 1)$. Выполнить следующие задания:

а) написать уравнения прямых $A'C$ и BC';

б) вычислить расстояние между прямыми $A'C$ и BC';

в) написать уравнения общего перпендикуляра к прямым $A'C$ и BC';

г) написать уравнение плоскости, проходящей через точки P, Q и H, где P — центр грани $ABB'A'$, Q делит $\overrightarrow{BC'}$ в отношении $\dfrac{1}{3}$ и H расположена на ребре BB' так, что длина вектора $\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HQ}$ минимальна;

д) определить угол между полученной в п. г) плоскостью и диагональю куба BD'.

§ 3. Кривые на плоскости

1. Уравнение кривой в декартовой системе координат. Говорят, что кривая Γ в системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x,\, y) = 0, \tag{1}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x,\, y)$ принадлежит кривой Γ в том и только в том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют соотношению (1). Если, в частности, $F(x,\, y) = f(x) - y$, то уравнение (1) может быть записано в виде

$$y = f(x), \tag{2}$$

и в этом случае кривая Γ совпадает с графиком функции $f(x)$.

В настоящем параграфе изучается связь между геометрическими свойствами кривой и ее уравнением в некоторых наиболее простых случаях.

Пример 1. Написать уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-a,\, 0)$, $B(0,\, a)$ и $C(a,\, 0)$ равна $3a^2$.

$\triangleleft$ Пусть Γ — кривая, удовлетворяющая условиям задачи; $M(x,\, y) \in \Gamma$ в том и только в том случае, когда

$$\rho^2(M,\, A) + \rho^2(M,\, B) + \rho^2(M,\, C) = 3a^2,$$

или

$$(x+a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 + (x-a)^2 + y^2 = 3a^2.$$

После простых преобразований получаем $x^2+y^2-\dfrac{2}{3}ay = 0$, или, выделяя полный квадрат,

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Это и есть искомое уравнение кривой, являющейся окружностью радиуса $\dfrac{a}{3}$ с центром в точке $M_0\left(0,\, \dfrac{a}{3}\right)$. $\triangleright$

В задачах 1.219–1.232 требуется установить, какие кривые определяются заданными уравнениями, и построить эти кривые.

1.219. $x + |y| = 0$. **1.220.** $|x| + y - x = 0$.

1.221. $x^2 - xy = 0$. **1.222.** $xy + y^2 = 0$.

1.223. $x^2 - y^2 = 0$. **1.224.** $xy = 0$.

1.225. $y^2 - 9 = 0$. **1.226.** $x^2 - x - 6 = 0$.

1.227. $x^2y - 7xy + 10y = 0$. **1.228.** $x^2 + y^2 = 4$.

1.229. $x^2 + (y+3)^2 = 1$. **1.230.** $x^2 + 2y^2 = 0$.

1.231. $2x^2 + y^2 + 2 = 0$. **1.232.** $x^2 + |y^2 - 1| = 0$.

1.233. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точек $M_1(3,\, 2)$ и $M_2(2,\, 3)$.

1.234. Написать уравнение кривой, разность квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1(-a,\ 0)$ и $M_2(a,\ 0)$ равна c.

1.235. Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до оси Ox вдвое больше расстояния до оси Oy.

1.236. Написать уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1(-3,\ 0)$ и $M_2(3,\ 0)$ равна 50.

1.237. Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до точки $M_1(-1,\ 1)$ вдвое меньше расстояния до точки $M_2(-4,\ 4)$.

1.238. Написать уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2,\ 0)$ и $F_2(2,\ 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

1.239. Написать уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2,\ -2)$ и $F_2(2,\ 2)$ равен 4.

1.240. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точки $F(2,\ 2)$ и от оси Ox.

1.241. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет окружность, найти ее центр C и радиус R:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

1.242. Написать уравнение окружности в каждом из следующих случаев (обозначено: C — центр окружности, R — радиус, M, M_1, M_2, M_3 — точки на окружности):

а) $C(2,\ -3)$, $R = 7$;

б) $M(2,\ 6)$, $C(-1,\ 2)$;

в) $M_1(3,\ 2)$, $M_2(-1,\ 6)$ — концы диаметра окружности;

г) $C(1,\ -1)$, прямая $5x - 12y + 9 = 0$ — касательная к окружности;

д) $M(1,\ 2)$, окружность касается координатных осей;

е) $M_1(3,\ 1)$, $M_2(-1,\ 3)$, $C \in L$: $3x - y - 2 = 0$;

ж)* $M_1(-1,\ 3)$, $M_2(0,\ 2)$, $M_3(1,\ -1)$.

1.243. Написать уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярного прямой $5x + 2y - 13 = 0$.

1.244. Вычислить кратчайшее расстояние от точки M_0 до окружности Γ, если:

а) $M_0(6,\ -8)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$;

б) $M_0(-7,\ 2)$, Γ: $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

1.245. Определить, как расположена прямая относительно окружности — пересекает, касается или проходит вне ее, если прямая и окружность заданы уравнениями:

а) $2x - y - 3 = 0,\ x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

б) $x - 2y - 1 = 0,\ x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

в) $x - y + 10 = 0,\ x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2. Алгебраические кривые второго порядка. *Алгебраической кривой второго порядка* называется кривая Γ, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3}$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю (в противном случае Γ — прямая, т. е. алгебраическая кривая первого порядка).

В общем случае может оказаться, что уравнение (3) определяет так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая Γ невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих трех видов (*каноническое уравнение*):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0, \tag{5}$$

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{6}$$

При этом кривая Γ называется соответственно *эллипсом*, *гиперболой* или *параболой*, а сама система координат, в которой ее уравнение имеет вид (4), (5) или (6), называется *канонической системой координат* для заданной кривой.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду подробно рассматривается в п. 4 § 3 гл. 3. Целью настоящего пункта является изучение основных геометрических свойств невырожденных кривых второго порядка на основе их канонических уравнений.

Эллипс с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 4.

Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ — его *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *главными осями*, а центр симметрии O — *центром* эллипса.

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2} \geqslant 0$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу. В частном случае $a = b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, или $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

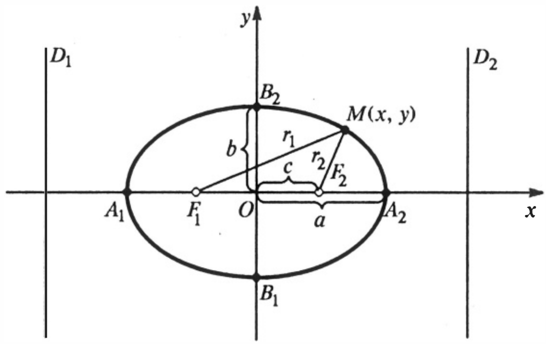


Рис. 4

Число $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ $(0 \leqslant e < 1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e = 0$ эллипс является окружностью).

Прямые D_1: $x = -\dfrac{a}{e}$ и D_2: $x = \dfrac{a}{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* эллипса.

1.246. Построить эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:
а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

1.247. Написать каноническое уравнение эллипса, если:
а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 5$, $c = 4$; в) $c = 3$, $e = \dfrac{3}{5}$; г) $b = 5$, $e = \dfrac{12}{13}$; д) $c = 2$ и расстояние между директрисами равно 5; е) $e = \dfrac{1}{2}$ и расстояние между директрисами равно 32.

1.248. Написать уравнение эллипса с полуосями a и b и центром в точке $C(x_0, y_0)$, если известно, что его главные оси параллельны координатным осям.

1.249. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти его центр C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

1.250. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = a - ex$$

(см. рис. 4). Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M эллипса выполняется равенство

$$r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a.$$

б) Пусть заданы точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $c \geqslant 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = \text{const} = 2a$, есть эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

1.251. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, D_1)$ и $\rho(M, D_2)$ — ее расстояния до директрис, то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

б) Пусть заданы точка $F(c, 0)$ и прямая D: $x - d = 0$, $d > c > 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\dfrac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e < 1$, есть эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = de$ и $b^2 = a^2 - c^2$.

1.252. Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1(2, \sqrt{3})$ и $M_2(0, 2)$. Написать его уравнение, найти фокальные радиусы точки M_1 и расстояния этой точки до директрис.

1.253. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние от которой до фокуса F_2 в четыре раза больше расстояния до фокуса F_1.

1.254. Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если сумма расстояний от нее до точек $F_1(-1,\ -1)$ и $F_2(1,\ 1)$ остается постоянной и равной $2\sqrt{3}$.

1.255. Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если расстояние от нее до точки $F(3,\ 0)$ остается в два раза меньше расстояния до прямой $x+y-1=0$.

1.256. Определить, как расположена прямая относительно эллипса: пересекает, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы уравнениями:

а) $2x-y-3=0,\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1;$

б) $2x+y-10=0,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1;$

в) $3x+2y-20=0,\ \dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{10}=1.$

1.257. Написать уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в его точке $M_0(x_0,\ y_0)$.

◁ Пусть сначала $y_0 \neq 0$, т.е. точка M_0 не совпадает ни с одной из вершин $A_1(-a,\ 0)$ и $A_2(a,\ 0)$. В этом случае уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ неявно определяет функцию $y=y(x)$, $-a<x<a$, график которой проходит через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ и совпадает с соответствующей (верхней при $y_0>0$ или нижней при $y_0<0$) половиной эллипса. Дифференцируя по x тождество $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2(x)}{b^2}=1$, найдем, что производная $y'(x_0)$ равна

$$y'(x_0)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Отсюда уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0),$$

или, с учетом равенства $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (7)$$

Если же $y_0=0$ (и, следовательно, $x_0=\pm a$), то уравнения касательных к эллипсу имеют вид $x=\pm a$, т.е. и в этом случае формула (7) остается верной. ▷

1.258. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5/2}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

1.259. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$, перпендикулярных прямой $2x-2y-13=0$.

1.260. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

1.261. Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

1.262. На эллипсе $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $2x-3y+25=0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

1.263. Доказать, что касательная к эллипсу в его произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиус-векторами $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ этой точки.

1.264*. Из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ под тупым углом α к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от эллипса.

Гипербола с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b>0$, имеет форму, изображенную на рис. 5.

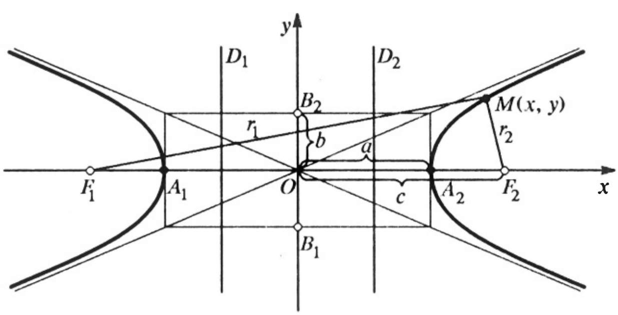


Рис. 5

Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы, точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ — ее *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *действительной* и *мнимой осями*, а центр симметрии O — *центром* гиперболы.

Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Точки $F_1(-c,\,0)$ и $F_2(c,\,0)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2} > 0$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей гиперболе.

Число $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$ $(1 < e < +\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы и является мерой ее «сплюснутости». В частном случае $a = b$ гипербола называется *равносторонней*; ее эксцентриситет равен $e = \sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Прямые D_1: $x = -\dfrac{a}{e}$ и D_2: $x = \dfrac{a}{e}$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от ее центра, называются *директрисами* гиперболы.

1.265. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти:

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

1.266. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$ (*сопряженную* к гиперболе задачи 1.265). Какова каноническая система координат для этой гиперболы? Найти:

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

1.267. Написать каноническое уравнение гиперболы, если: а) $a = 2$, $b = 3$; б) $b = 4$, $c = 5$; в) $c = 3$, $e = \dfrac{3}{2}$; г) $a = 8$, $e = \dfrac{5}{4}$; д) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$; е) $e = \dfrac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\dfrac{8}{3}$.

1.268. Написать уравнение гиперболы с полуосями a и b и центром в точке $C(x_0,\,y_0)$, если известно, что ее действительная и мнимая оси параллельны осям Ox и Oy соответственно.

1.269. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

1.270. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M)=a+ex, \quad r_2(M)=-a+ex,$$

если точка M лежит на правой ветви гиперболы, и

$$r_1(M)=-a-ex, \quad r_2(M)=a-ex,$$

если эта точка лежит на ее левой ветви. Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M гиперболы выполняется равенство

$$|r_1(M)-r_2(M)|=\text{const}=2a.$$

б) Пусть заданы точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $c>0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $||\overrightarrow{F_1M}|-|\overrightarrow{F_2M}||=$ $=\text{const}=2a$, $a>0$, есть гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$.

1.271. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, D_1)$ и $\rho(M, D_2)$ — расстояния от нее до директрис, то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)}=\frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)}=\text{const}=e.$$

б) Пусть заданы точка $F(c, 0)$ и прямая D: $x-d=0$, $c>d>0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\dfrac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, D)}=$ $=\text{const}=e>1$, есть гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $a=de$ и $b^2=c^2-a^2$.

1.272. Убедившись, что точка $M\left(-5, \dfrac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, найти фокальные радиусы этой точки и ее расстояния до директрис.

1.273. Найти точки гиперболы $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$, находящиеся на расстоянии 7 от фокуса F_1.

1.274. Написать уравнение гиперболы, если известно, что ее фокусами являются точки $F_1(-3, -4)$ и $F_2(3, 4)$, а расстояние между директрисами равно 3,6.

1.275. Написать уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x - y + 3 = 0$.

1.276. Показать, что кривая, заданная уравнением $xy = 1$ или $y = \dfrac{1}{x}$, есть равносторонняя гипербола. Написать ее каноническое уравнение, найти эксцентриситет, фокусы и уравнения директрис.

1.277*. Написать уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$.

1.278. Составить уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

1.279. Составить уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных прямой $4x + 3y - 7 = 0$.

1.280. Доказать, что касательные к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

1.281. Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A(-1, -7)$ к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$.

1.282. На гиперболе $\dfrac{x^2}{24} - \dfrac{y^2}{18} = 1$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $3x + 2y + 1 = 0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

1.283. Доказать, что касательная к гиперболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиус-векторами $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ этой точки.

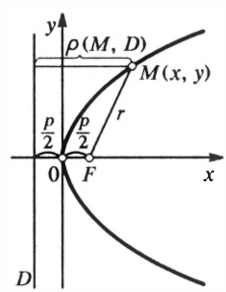


Рис. 6

1.284*. Из правого фокуса гиперболы $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ под углом α $(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi)$ к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от гиперболы.

Парабола с каноническим уравнением $y^2 = 2px$, $p > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 6.

Число p называется *параметром* параболы, точка O — ее *вершиной*, а ось Ox — осью параболы.

Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется *фокусом* параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ — *фокальным радиус-вектором*, а число $r = |\overrightarrow{FM}|$ — *фокальным радиусом* точки M параболы.

Прямая D: $x = -\frac{p}{2}$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $\frac{p}{2}$ от вершины параболы, называется ее *директрисой*.

1.285. Построить следующие параболы и найти их параметры:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$;
в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

1.286. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p = \frac{1}{2}$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $M(4, -8)$;

в) фокус параболы находится в точке $F(0, -3)$.

1.287. Написать уравнение параболы, если известно, что вершина ее находится в точке $A(x_0, y_0)$, параметр равен p, ось параллельна оси Ox и парабола расположена относительно прямой $x = x_0$:

а) в правой полуплоскости;

б) в левой полуплоскости.

1.288. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и величину параметра p:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x^2 = 2 - y$;

в) $y = 4x^2 - 8x + 7$; г) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;

д) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

1.289. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка параболы $y^2 = 2px$, $r(M)$ — ее фокальный радиус, а $\rho(M, D)$ — расстояние от точки M до директрисы (см. рис. 6), то выполняется равенство

$$\frac{r(M)}{\rho(M, D)} = \text{const} = 1.$$

б) Пусть заданы точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и прямая D: $x = -\frac{p}{2}$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, D)} = \mathrm{const} = 1$, есть парабола $y^2 = 2px$.

1.290. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если $y(M) = 6$.

1.291. Написать уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F(4, 3)$ и директриса D: $y + 1 = 0$;

б) фокус $F(2, -1)$ и директриса D: $x - y - 1 = 0$.

1.292. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$.

1.293. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$, параллельной прямой $2x + 2y - 3 = 0$.

1.294. Написать уравнение касательной к параболе $x^2 = 16y$, перпендикулярной прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

1.295. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = 36x$, проведенных из точки $A(2, 9)$.

1.296. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x + 3y - 14 = 0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

1.297. Доказать, что касательная к параболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальным радиус-вектором точки M и с лучом, исходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы.

1.298. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от параболы.

3. Уравнение кривой в полярной системе координат. Говорят, что на плоскости введена полярная система координат $\langle O, u\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *полюсом*;

2) некоторый луч u, исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки $M \neq O$ называются два числа: *полярный радиус* $r(M) = |\overrightarrow{OM}| > 0$ и *полярный угол* $\varphi(M)$ — угол, на который следует повернуть ось u для того, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (при этом, как обычно, $\varphi(M) > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi(M) < 0$ в противном случае). Запись $M(r, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ.

Полярный угол $\varphi(M)$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называется *главным*. В некоторых случаях главным значением полярного угла называют значение φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Пусть на плоскости введены правая декартова прямоугольная система координат Oxy (т.е. такая, что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy происходит против часовой стрелки) и полярная система $\langle O, u\rangle$, причем полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда связь между декартовыми прямоугольными и полярными координатами произвольной точки $M \neq O$ дается формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{8}$$

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $F(r, \varphi) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданном в декартовых прямоугольных координатах.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнением $r = 6\cos\varphi$.
◁ Прежде всего заметим следующее: если точка $M(r, \varphi)$ принадлежит заданной кривой, то для этой точки $\cos\varphi = \dfrac{r}{6} \geqslant 0$, и, следовательно, вся кривая расположена в секторе $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Для того чтобы построить кривую, перейдем в ее уравнении к декартовым координатам. Умножив обе части уравнения $r = 6\cos\varphi$ на r, получаем $r^2 = 6r\cos\varphi$, откуда на основании формул перехода (8) имеем $x^2 + y^2 = 6x$, или $(x-3)^2 + y^2 = 9$. Таким образом, заданная кривая — окружность радиуса 3 с центром в точке M_0 с координатами $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ или $r_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$. ▷

Пример 3. Вывести уравнение прямой в полярной системе координат.
◁ Если прямая L проходит через полюс и ее угловой коэффициент по отношению к полярной оси равен k, то уравнение этой прямой имеет вид $\operatorname{tg}\varphi = k$.

Пусть теперь прямая L не проходит через полюс. Напишем нормальное уравнение этой прямой в декартовой прямоугольной системе координат

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

и перейдем в этом уравнении к полярным координатам. Получаем (учитывая, что $\cos\beta = \sin\alpha$):

$$r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0, \quad r\cos(\varphi-\alpha) = p,$$

или

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}. \tag{9}$$

Уравнение (9) и есть искомое уравнение прямой в полярной системе координат. Оно может быть получено и непосредственно из следующего очевидного факта: $M \in L \Leftrightarrow \text{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{r} = r\cos(\varphi - \alpha) = \text{const} = p$ (рис. 7). ▷

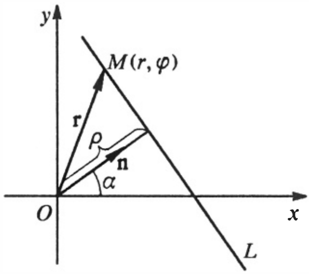


Рис. 7

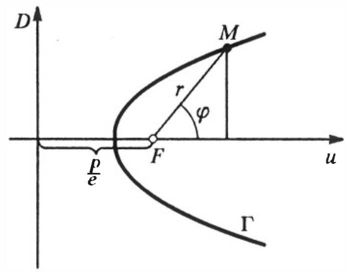


Рис. 8

П р и м е р 4. Пусть Γ — эллипс, ветвь гиперболы или парабола, F — фокус этой кривой, D — соответствующая директриса. Вывести уравнение кривой Γ в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью кривой (рис. 8).
◁ Общее свойство эллипса, гиперболы и параболы состоит в следующем (см. задачи 1.251, 1.270 и 1.289):

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{\rho(M,\,F)}{\rho(M,\,D)} = \text{const} = e, \tag{10}$$

где e — эксцентриситет кривой ($e < 1$ для эллипса, $e > 1$ для гиперболы и $e = 1$ для параболы).

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через $\dfrac{p}{e}$ (p — параметр кривой, называемый полуфокальным диаметром). Тогда из рис. 8 следует, что $\rho(M,\,F) = r$ и $\rho(M,\,D) = \dfrac{p}{e} + r\cos\varphi$. Подставляя эти выражения в (10), получаем

$$\frac{r}{p/e + r\cos\varphi} = e,$$

откуда

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{11}$$

Уравнение (11) и есть искомое уравнение в полярной системе координат, общее для эллипса, гиперболы и параболы. ▷

Записать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

1.299. $y = x$.
1.300. $y = 1$.
1.301. $x + y - 1 = 0$.
1.302. $x^2 + y^2 = a^2$.
1.303. $x^2 - y^2 = a^2$.
1.304. $x^2 + y^2 = ax$.

Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые:

1.305. $r = 5$.

1.306. $\operatorname{tg}\varphi = -1$.

1.307. $r\cos\varphi = 2$.

1.308. $r\sin\varphi = 1$.

1.309. $r = \dfrac{1/\sqrt{2}}{\cos(\varphi + \pi/4)}$.

1.310. $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \pi/4)}$.

1.311. $r = 2a\cos\varphi$.

1.312. $r = 2a\sin\varphi$.

1.313. $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

1.314. $\sin r = \dfrac{1}{2}$.

1.315. $r^2\sin 2\varphi = 2a^2$.

1.316. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

1.317. Написать в полярных координатах уравнения:

а) прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3;

б) луча, исходящего из полюса под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к полярной оси;

в) прямой, проходящей через полюс под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к полярной оси.

1.318. Написать в полярных координатах уравнение окружности, если:

а) радиус $R = 5$, окружность проходит через полюс, а ее центр лежит на полярной оси;

б) радиус $R = 3$ и окружность касается в полюсе полярной оси.

1.319. Определить полярные координаты центра и радиус каждой из следующих окружностей:

а) $r = 4\cos\varphi$; б) $r = 3\sin\varphi$; в) $r = -5\sin\varphi$;

г) $r = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \varphi\right)$; д) $r = 8\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

е) $r = 8\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \varphi\right)$.

1.320. В полярной системе координат вывести уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(r_0, \varphi_0)$.

1.321. Для эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ написать полярное уравнение, считая, что полярная ось сонаправлена с осью абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе; б) в правом фокусе.

1.322. Для правой ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ написать полярное уравнение, считая, что полярная ось сонаправлена с осью абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе; б) в правом фокусе.

1.323. Для параболы $y^2 = 6x$ написать полярное уравнение, считая, что полярная ось сонаправлена с осью абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

1.324. Написать канонические уравнения следующих кривых 2-го порядка:

а) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; в) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\varphi}$.

1.325. Вывести полярное уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится в центре эллипса.

1.326. Вывести полярное уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится в центре гиперболы.

1.327. Вывести полярное уравнение параболы $y^2 = 2px$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится в вершине параболы.

4. Параметрические уравнения кривой. Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на некотором промежутке I числовой оси (промежуток I может быть интервалом (a, b), отрезком $[a, b]$, а также одним из полуинтервалов $(a, b]$ или $[a, b)$, причем не исключаются случаи, когда $a = -\infty$ и (или) $b = +\infty$). Уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I, \tag{12}$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой Γ в декартовой прямоугольной системе координат, если выполнено следующее условие: для всякого значения *параметра* $t \in I$ точка $M\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ принадлежит кривой Γ и, наоборот, для всякой точки $M(x, y)$ кривой Γ существует такое значение параметра $t \in I$, что $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Исключением параметра t из (12) уравнение кривой может быть представлено в виде $F(x, y) = 0$.

Аналогично определяются параметрические уравнения кривой в полярных координатах.

Пример 5. Показать, что параметрические уравнения

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

определяют окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

◁ Если точка $M(x, y)$ такова, что $x = a\cos t$ и $y = a\sin t$ для некоторого значения $t \in [0, 2\pi)$, то

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2,$$

т.е. точка $M(x, y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Верно и обратное: если точка $M(x, y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = a^2$, то, полагая $t = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \mathbf{i}})$, $t \in [0, 2\pi)$, получим $x = a\cos t$ и $y = a\sin t$. $\triangleright$

Пример 6. Кривая Γ задана полярным уравнением $r = 2R\sin\varphi$. Составить параметрические уравнения этой кривой в полярных и декартовых прямоугольных координатах, выбирая в качестве параметра полярный угол φ.

$\triangleleft$ Нетрудно убедиться, что заданная кривая — окружность радиуса R с центром в точке $C(0, R)$. Параметрические уравнения этой кривой в полярных координатах:

$$r = 2R\sin t, \quad \varphi = t, \quad t \in [0, \pi).$$

Параметрические уравнения в декартовых прямоугольных координатах получаются, если в формулы перехода $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ вместо r и φ подставить их выражения в виде функций параметра t. В итоге получим

$$\begin{cases} x = r(t)\cos\varphi(t) = R\sin 2t, \\ y = r(t)\sin\varphi(t) = R(1 - \cos 2t), \quad t \in [0, \pi). \end{cases} \triangleright$$

1.328. Составить параметрические уравнения луча

$$\Gamma = \{(x, y) |\ x - y + 1 = 0,\ y \geqslant 0\},$$

принимая в качестве параметра:

а) абсциссу x; б) ординату y;

в) расстояние $\rho(M, M_0)$ от точки $M \in \Gamma$ до вершины M_0 луча;

г) полярный угол, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось сонаправлена с осью Ox.

1.329. Составить параметрические уравнения отрезка с концами в точках $M_1(1, 1)$ и $M_2(2, 3)$, принимая в качестве параметра:

а) расстояние $\rho(M, M_1)$; б) расстояние $\rho(M, M_2)$.

1.330. Составить параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{M_0M}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

1.331. Составить параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = 2Rx$, принимая в качестве параметра полярный угол, если полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится:

а) в начале координат; б) в центре окружности.

В задачах 1.332–1.340 требуется исключением параметра t найти уравнения заданных кривых в виде $F(x, y) = 0$ и построить эти кривые.

1.332. $x = -1 + 2t,\ y = 2 - t,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

1.333. $x = t^2 - 2t + 1,\ y = t - 1,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

1.334. $x = -1 + 2\cos t,\ y = 3 + 2\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi)$.
1.335. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi)$.
1.336. $x = 1 + 2\sec t,\ y = -1 + \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.
1.337. $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\ y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),\ t \in (0,\ +\infty)$.
1.338. $x = 2R\cos^2 t,\ y = R\sin 2t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.
1.339. $x = R\sin 2t,\ y = 2R\sin^2 t,\ t \in [0,\ \pi)$.
1.340. $x = 2p\operatorname{ctg}^2 t,\ y = 2p\operatorname{ctg} t,\ t \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1.341. Составить параметрические уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

1.342. Составить параметрические уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

1.343. Составить параметрические уравнения параболы $y^2 = 2px$, принимая в качестве параметра:

а) ординату y;

б) угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки;

в) угол между осью Ox и фокальным радиус-вектором $\overrightarrow{FM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5. Некоторые кривые, встречающиеся в математике и ее приложениях. В настоящем пункте, имеющем справочный характер, приведены уравнения и указаны основные геометрические свойства ряда специальных кривых (алгебраических и трансцендентных), встречающихся в практике инженерных расчетов. Вывод уравнений этих кривых может быть предложен в качестве задач повышенной трудности при изучении курса аналитической геометрии. Достаточно детальное изучение формы кривых может быть выполнено с привлечением методов дифференциального исчисления.

1. *Спирали*: *спираль Архимеда* $r = a\varphi$ (рис. 9), *гиперболическая спираль* $r = \frac{a}{\varphi}$ (рис. 10), *логарифмическая спираль* $r = a^{\varphi}$ (рис. 11); стрелкой указано направление обхода кривой, соответствующее возрастанию φ.

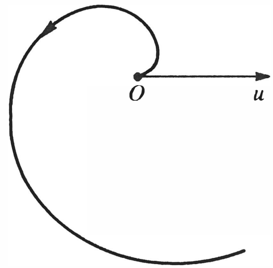


Рис. 9

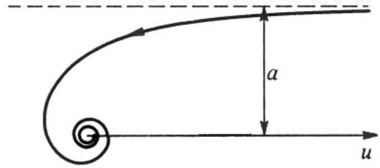


Рис. 10

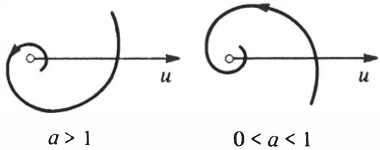


Рис. 11

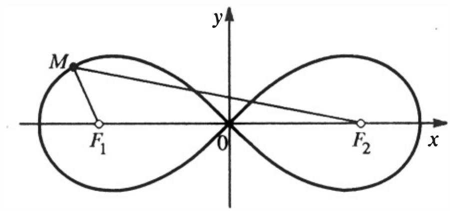


Рис. 12

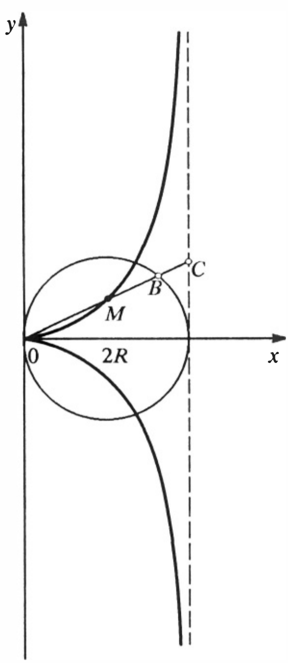


Рис. 13

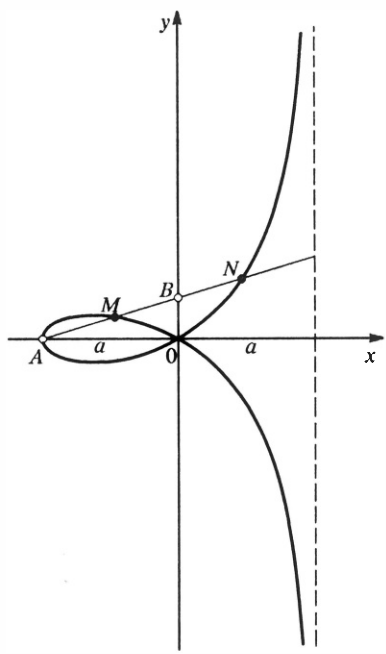


Рис. 14

2. *Лемниската Бернулли* $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ (рис. 12), или $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: $|\overrightarrow{F_1M}||\overrightarrow{F_2M}| = \text{const} = a^2$, где $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$.

3. *Циссоида* $y^2(2R-x) = x^3$ (рис. 13), или $r = 2R\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi = \varphi_0$ $\left(\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $|OM| = |BC|$.

4. *Строфоида* $x^2\big((x+a)^2+y^2\big) = a^2y^2$ (рис. 14), или $r = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm a\operatorname{tg}\varphi$ (полюс помещен в точку $A(-a, 0)$). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi = \varphi_0$ $\left(\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $|BM| = |BN| = |OB|$.

5. *Конхоида* $x^2y^2 + (x+a)^2(x^2-b^2) = 0$ (рис. 15), или $r = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm b$ (полюс помещен в точку $A(-a, 0)$). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi = \varphi_0$ $\left(\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

6. *Улитка Паскаля* $(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$ (рис. 16), или $r = 2a\cos\varphi \pm b$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi = \varphi_0$ $\left(\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

7. *Четырехлепестковая роза* $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (рис. 17), или $r = a|\sin 2\varphi|$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: всякая точка M этой кривой есть основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на отрезок AB постоянной длины $2a$, движущийся так, что концы его все время находятся на координатных осях.

8. *Астроида* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi)$, или $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 18). Характеристическое свойство: всякая точка M этой кривой есть основание перпендикуляра PM к отрезку AB постоянной длины a, движущемуся так, что концы его все время находятся на координатных осях.

9. *Эвольвента (развертка) окружности* $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, +\infty)$ (рис. 19). Характеристическое свойство: каждая точка M этой кривой есть конец нити, которая, оставаясь натянутой, разматывается с окружности $x^2+y^2 = a^2$ (в начальный момент конец нити находится в точке $A(a, 0)$).

10. *Циклоида* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ (рис. 20). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по оси Ox (в начальный момент точка M находится в начале координат).

11. *Эпициклоида* $x = (a+b)\cos t - a\cos\dfrac{a+b}{a}t$, $y = (a+b)\sin t - a\sin\dfrac{a+b}{a}t$, $t \in [0, +\infty)$ (рис. 21). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая

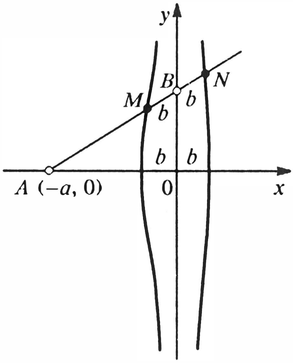


Рис. 15

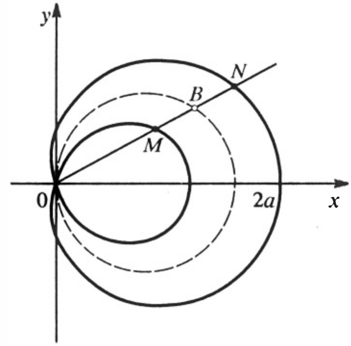


Рис. 16

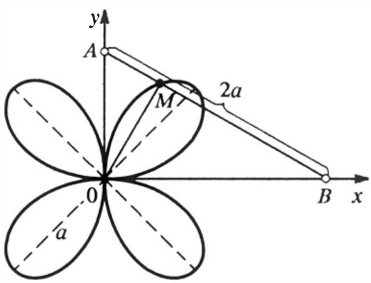


Рис. 17

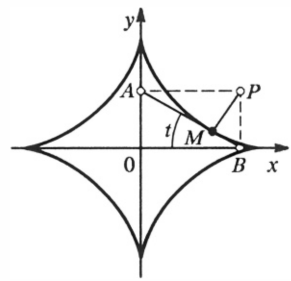


Рис. 18

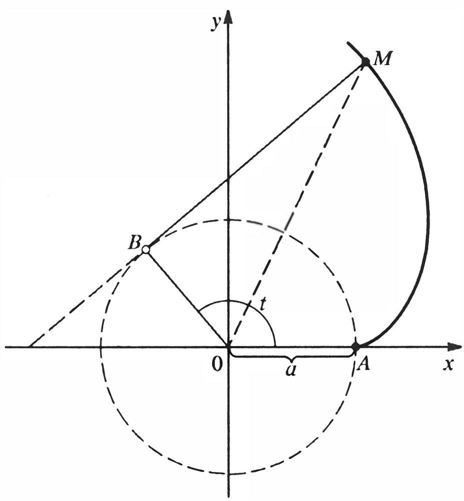


Рис. 19

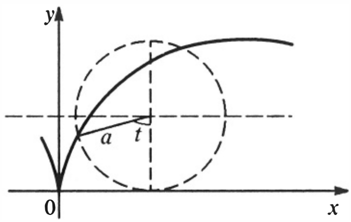


Рис. 20

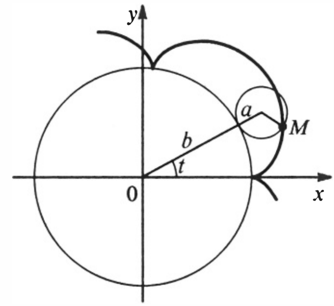


Рис. 21

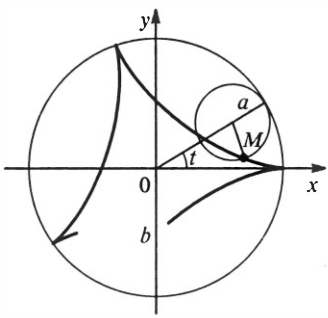


Рис. 22

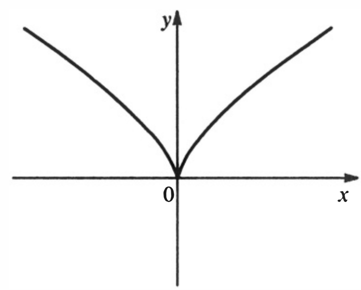


Рис. 23

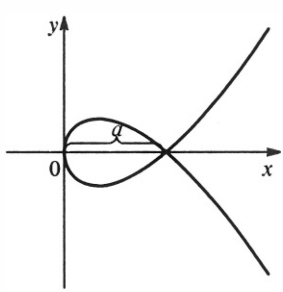


Рис. 24

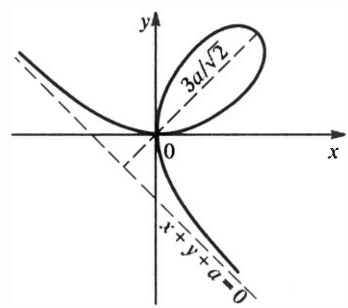


Рис. 25

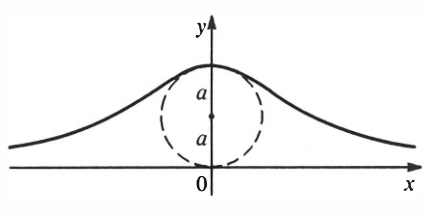


Рис. 26

катится без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = b^2$, оставаясь вне ее (в начальный момент точка M находится в положении $A(b,\ 0)$). В частном случае $a = b$ соответствующая кривая называется *кардиоидой*.

12. *Гипоциклоида* $x = (b - a)\cos t + a\cos\dfrac{b-a}{a}t,\ y = (b - a)\sin t - a\sin\dfrac{b-a}{a}t,\ \ t \in [0,\ +\infty)$ (рис. 22). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по окружности $x^2 + y^2 = b^2$, оставаясь внутри ее (в начальный момент точка M находится в положении $A(b,\ 0)$). В частном случае $a = \dfrac{b}{4}$ эта кривая совпадает с астроидой.

13. *Полукубическая парабола* $y^3 = ax^2$ (рис. 23).

14. *Петлевая парабола* $ay^2 = x(x - a)^2$ (рис. 24).

15. *Декартов лист* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (рис. 25).

16. *Локон Аньези* $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (рис. 26).

§ 4. Поверхности и кривые в пространстве

1. Уравнения поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат. Говорят, что поверхность S в системе координат $Oxyz$ имеет уравнение

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \tag{1}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x,\ y,\ z)$ принадлежит поверхности S в том и только том случае, когда ее координаты x, y и z удовлетворяют соотношению (1). Если, в частности, $F(x,\ y,\ z) = f(x,\ y) - z$, то уравнение (1) может быть записано в виде

$$z = f(x,\ y), \tag{2}$$

и в этом случае поверхность S совпадает с графиком функции двух переменных $f(x,\ y)$.

Кривая Γ в пространстве в общем случае определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S_1 и S_2 (определяемых неоднозначно), т. е. заданием системы двух уравнений

$$F_1(x,\ y,\ z) = 0, \quad F_2(x,\ y,\ z) = 0. \tag{3}$$

Пример 1. Вывести уравнение поверхности, каждая точка которой расположена вдвое ближе к точке $A(2,\ 0,\ 0)$, чем к точке $B(-4,\ 0,\ 0)$.

$\triangleleft$ Если S — поверхность, заданная условиями задачи, то $M(x,\ y,\ z) \in S$ в том и только том случае, когда $\rho(M,\ B) = 2\rho(M,\ A)$ или

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}.$$

Отсюда получаем

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 4\big((x-2)^2 + y^2 + z^2\big),$$
$$3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0$$

или, выделяя полный квадрат в слагаемых, содержащих x,

$$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16. \tag{4}$$

Уравнение (4) и есть искомое уравнение поверхности. Из него видно, что заданная поверхность S есть сфера радиуса 4 с центром в точке $M_0(4,\ 0,\ 0)$. ▷

Пример 2. Исследовать форму кривой Г, заданной уравнениями

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ y + z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Определить вид ее проекции на плоскость Oxy.

◁ Кривая Г задана как линия пересечения сферы $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36$ с плоскостью $y + z = 0$ и, следовательно, есть окружность. Так как центр сферы $C(1,\ 0,\ 0)$ лежит в плоскости сечения $y + z = 0$, то центр окружности совпадает с точкой C, а ее радиус равен радиусу сферы, т. е. $R = 4$.

Установим форму проекции окружности Г на плоскость Oxy. Исключая z из системы (5), получаем $(x-1)^2 + 2y^2 = 36$, или $\dfrac{(x-1)^2}{36} + \dfrac{y^2}{18} = 1$. Отсюда заключаем, что искомая проекция — эллипс, главные оси которого сонаправлены с осями Ox и Oy, центр находится в точке $C'(1,\ 0)$, а полуоси равны $a = 6,\ b = 3\sqrt{2}$. ▷

Установить, какие геометрические образы определяются заданными уравнениями:

1.344. $z + 5 = 0$.

1.345. $x - 2y + z - 1 = 0$.

1.346. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1.347. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$.

1.348. $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$.

1.349. $x^2 + 4z^2 = 0$.

1.350. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7 = 0$.

1.351. $x^2 - 4z^2 = 0$.

1.352. $xz = 0$.

1.353. $xyz = 0$.

1.354. $x^2 - 4x = 0$.

1.355. $xy - y^2 = 0$.

1.356. Вывести уравнение поверхности, разность квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(2,\ 3,\ -5)$ и $F_2(2,\ -7,\ -5)$ равна 13.

1.357. Вывести уравнение поверхности, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-a,\ 0,\ 0)$ и $F_2(a,\ 0,\ 0)$ равна постоянному числу $4a^2$.

1.358. Вывести уравнение поверхности, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,\ 0,\ -4)$ и $F_2(0,\ 0,\ 4)$ равна 10.

1.359. Вывести уравнение поверхности, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,\ -5,\ 0)$ и $F_2(0,\ 5,\ 0)$ равен 6.

1.360. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет сферу, найти ее центр C и радиус R:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$.

1.361. Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев (обозначено: C — центр сферы, R — радиус, M, M_1, M_2, M_3 — точки на сфере):

а) $C(-1,\ 2,\ 0)$, $R = 2$; б) $M(2,\ -1,\ -3)$, $C(3,\ -2,\ 1)$;

в) $M_1(2,\ -3,\ 5)$ и $M_2(4,\ 1,\ -3)$ — концы диаметра сферы;

г) $C(3,\ -5,\ -2)$, плоскость $2x - y - 3z + 11 = 0$ касается сферы;

д) $M_1(3,\ 1,\ -3)$, $M_2(-2,\ 4,\ 1)$, $M_3(-5,\ 0,\ 0)$, $C \in P$: $2x + y - z + 3 = 0$.

1.362. Составить уравнение сферы, центр которой лежит на прямой

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

и которая касается плоскостей $x+2y-2z-2 = 0$ и $x+2y-2z+4 = 0$.

1.363. Составить уравнение сферы, вписанной в тетраэдр, образованный плоскостями

$$3x - 2y + 6z - 8 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

1.364. Составить параметрические уравнения диаметра сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 11 = 0$, перпендикулярного к плоскости $5x - y + 2z - 17 = 0$.

1.365. На сфере $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ найти точку M_0, ближайшую к плоскости $3x - 4z + 19 = 0$, и вычислить расстояние от этой точки до плоскости.

1.366. Определить, как расположена плоскость относительно сферы (пересекает, касается или проходит вне ее), если плоскость и сфера заданы уравнениями:

а) $z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;

б) $y = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;

в) $x = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

1.367. Установить, какие кривые определяются следующими уравнениями:

а) $\begin{cases} x-5=0, \\ z+2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0. \end{cases}$

1.368. Найти центр и радиус окружности:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10y, \\ x+2y+2z-19=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100, \\ 2x-2y-z+9=0. \end{cases}$

Указание. Центр окружности есть проекция центра сферы на плоскость.

1.369. Найти проекцию на плоскость $z=0$ сечения сферы $x^2+y^2+z^2=4(x-2y-2z)$ плоскостью, проходящей через центр сферы и перпендикулярной к прямой $x=0$, $y+z=0$.

1.370. Точки $A(3,\ -2,\ 5)$ и $B(-1,\ 6,\ -3)$ являются концами диаметра окружности, проходящей через точку $C(1,\ -4,\ 1)$. Составить уравнения этой окружности.

1.371. Составить уравнения окружности, проходящей через три точки $M_1(3,\ -1,\ -2)$, $M_2(1,\ 1,\ -2)$ и $M_3(-1,\ 3,\ 0)$.

2. Алгебраические поверхности второго порядка. *Алгебраической поверхностью второго порядка* называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \tag{6}$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю (в противном случае S — алгебраическая поверхность первого порядка, т. е. плоскость).

Может оказаться, что уравнение (6) определяет так называемую *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей). Если же поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат ее уравнение (6) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности.

1. *Эллипсоид*: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 27).

2. *Гиперболоид*

а) *однополостный*: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 28*а*);

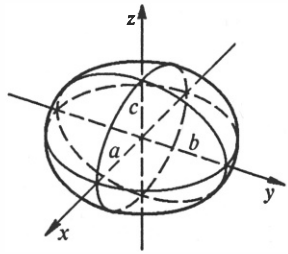


Рис. 27

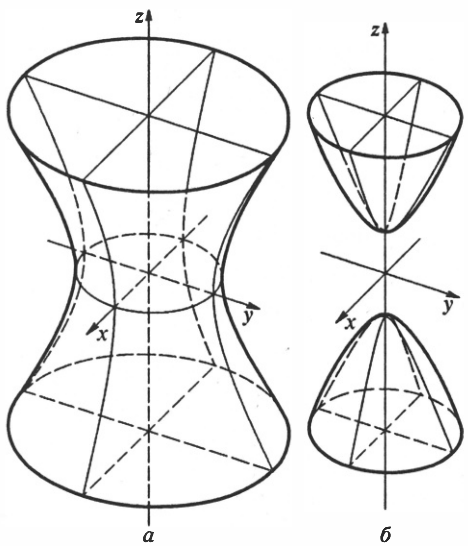


Рис. 28

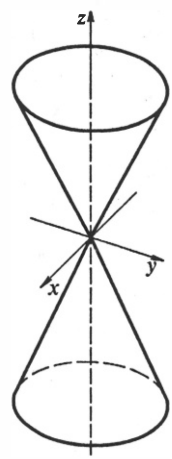


Рис. 29

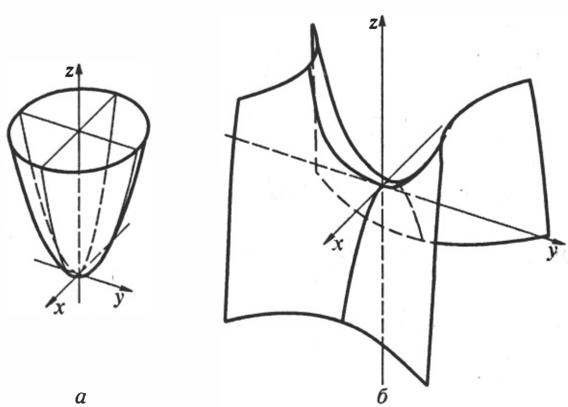


Рис. 30

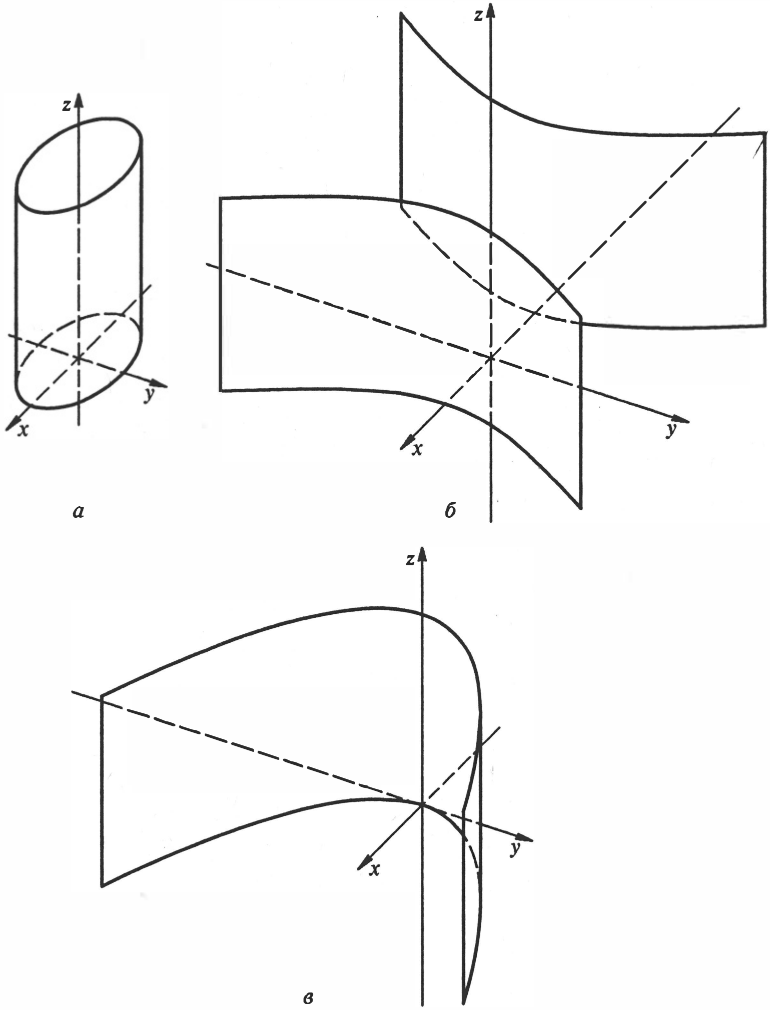


Рис. 31

б) *двуполостный*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. 28*б*).

3. *Конус второго порядка*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. 29).

4. *Параболоид*:

а) *эллиптический*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ (рис. 30*а*);

б) *гиперболический*: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ (рис. 30*б*).

5. *Цилиндр второго порядка*

а) *эллиптический*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 31*а*);

б) *гиперболический*: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 31*б*);

в) *параболический*: $y^2 = 2px,\ p > 0$ (рис. 31*в*).

Общие методы приведения уравнения (6) к каноническому виду опираются на теорию квадратичных форм и рассматриваются в п. 4 § 3 гл. 3. Цель настоящего пункта состоит в изучении основных геометрических свойств невырожденных поверхностей второго порядка с использованием их канонических уравнений.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений*.

Пример 3. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением

$$z = 2 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}. \tag{7}$$

◁ В сечении поверхности горизонтальной плоскостью $z = h$ имеем кривую Γ_h, проекция которой на плоскость Oxy определяется уравнением

$$h = 2 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25},$$

или

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h. \tag{8}$$

Уравнение (8) при $h > 2$ не имеет решений относительно (x, y). Это означает, что соответствующее сечение пусто, т. е. рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z = 2$. При $h \leqslant 2$ уравнение (8) определяет эллипс с полуосями $a = 4\sqrt{2-h}$ и $b = 5\sqrt{2-h}$, вырождающийся в точку $x = y = 0$ при $h = 2$. Заметим, что все эллипсы, получающиеся в сечениях поверхности плоскостями $z = h \leqslant 2$, подобны между собой $\left(\dfrac{a}{b} = \text{const} = \dfrac{4}{5}\right)$, причем с уменьшением h их полуоси неограниченно и монотонно возрастают.

Полученной информации достаточно, чтобы построить эскиз поверхности. Дальнейшее уточнение ее формы можно получить, если рассмотреть сечения координатными плоскостями Oxy и Oyz. Сечение плоскостью Oxz: $y = 0$ дает кривую $x^2 = 16(2-z)$, т. е. параболу с параметром $p = 8$, вершиной в точке $x = 0,\ z = 2$ и ветвями, направленными в сторону убывания значений z. Наконец, сечение плоскостью Oyz: $x = 0$ дает параболу $y^2 = 25(2-z)$ с параметром $p = \dfrac{25}{2}$, вершиной в точке $y = 0,\ z = 2$ и аналогично направленными ветвями.

Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 32).

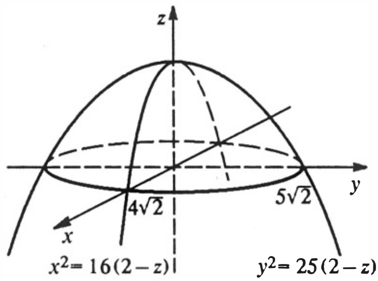


Рис. 32

Заданная поверхность есть эллиптический параболоид. Преобразование координат

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 2 - z$$

(которое сводится к сдвигу начала в точку $(0, 0, 2)$ — вершину параболоида и обращению направления оси Oz) приводит его исходное уравнение (7) к каноническому виду

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = z'. \ \triangleright \tag{9}$$

Установить тип заданных поверхностей и построить их:

1.372. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1.$ **1.373.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = 1.$

1.374. $x^2 + y^2 - z^2 = -1.$ **1.375.** $x^2 - y^2 = z^2.$

1.376. $x^2 + y^2 = 2az,\ a \neq 0.$ **1.377.** $x^2 - y^2 = 2az,\ a \neq 0.$

1.378. $2z = x^2 + \dfrac{y^2}{2}.$ **1.379.** $x^2 = 2az,\ a \neq 0.$

1.380. $z = 2 + x^2 + y^2.$ **1.381.** $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 6z.$

1.382. $x^2 + y^2 - z^2 = 4.$ **1.383.** $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0.$

1.384*. Доказать, что уравнение $z^2 = xy$ определяет конус с вершиной в начале координат.

1.385*. Доказать, что уравнение $z = xy$ определяет гиперболический параболоид.

1.386. Назвать и построить поверхности:

а) $x^2 = 2yz$; б) $z - a = xy$.

1.387. Составить уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида $y^2+z^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$.

1.388. Установить, какие кривые определяются следующими уравнениями:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z, \\ 3x-y+6z-14=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z, \\ x-2y+2=0. \end{cases}$

1.389. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ и $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$;

б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$;

в) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Указание. Перейти к параметрическим уравнениям прямой.

1.390. Доказать, что в каждом из указанных ниже случаев заданные поверхность и плоскость имеют одну общую точку, найти ее координаты:

а) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=2y,\qquad 2x-2y-z-10=0;$

б) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{25}=-1,\qquad 5x+2z+5=0;$

в) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{z^2}{9}=1,\qquad 4x-3y+12z-54=0.$

1.391. Доказать, что плоскость $2x-12y-z+16=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2-4y^2=2z$ по прямолинейным образующим (т. е. прямым, целиком лежащим на этой поверхности). Составить уравнения этих образующих.

1.392. Доказать, что плоскость $4x-5y-10z-20=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих образующих.

3. Классификация поверхностей по типу преобразований пространства. Выделяют три класса поверхностей: цилиндрические, конические и поверхности вращения,— инвариантных относительно преобразований соответствующего типа.

Цилиндрической поверхностью (*цилиндром*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований параллельного переноса $T(t\mathbf{q})$, определяемых любым вектором, коллинеарным некоторому вектору $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$. Из этого определения следует, что если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит цилиндру S, то и вся прямая $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ также принадлежит этому цилиндру.

Принята следующая терминология: всякая прямая, коллинеарная вектору $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$, называется *осью* цилиндра S; прямые $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, целиком принадлежащие цилиндру, называются его *образующими*; всякая кривая Γ, лежащая на цилиндре и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого цилиндра.

Пусть $\mathbf{q} = \{l, m, n\}$ — любой вектор, коллинеарный оси цилиндра S, а направляющая Γ задана уравнениями

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит цилиндру S в том и только том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x + tl$, $y + tm$, $z + tn$ лежит на образующей Γ, т. е.

$$\begin{cases} F_1(x + tl, y + tm, z + tn) = 0, \\ F_2(x + tl, y + tm, z + tn) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Исключая параметр t из системы (10), получим соотношение вида $F(x, y, z) = 0$, которое и является уравнением заданного цилиндра.

Пример 4. Написать уравнение цилиндра, ось которого совпадает с координатной осью Oz, а направляющая задана уравнениями $F(x, y) = 0$, $z - h = 0$.

◁ Полагая $\mathbf{q} = \mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$, получим систему (10) в виде $F(x, y) = 0$, $z + t - h = 0$. Этот результат означает, что точка $M(x, y, z)$ принадлежит цилиндру в том и только том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$ при произвольном значении координаты z. Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$, описывающее проекцию направляющей на плоскость Oxy, и есть уравнение заданного цилиндра. ▷

Построить заданные цилиндрические поверхности:

1.393. $y^2 + z^2 = 4$. **1.394.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

1.395. $x^2 + y^2 = ax$. **1.396.** $x^2 = 6z$.

1.397. $z = 4 - x^2$. **1.398.** $x^2 - xy = 0$.

1.399. $x^2 - z^2 = 0$. **1.400.** $y^2 + 2z^2 = 0$.

1.401. $xz = 4$. **1.402.** $y^2 + z^2 = -z$.

1.403. Составить уравнения трех цилиндрических поверхностей, описанных около сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ с осями, параллельными соответственно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz.

1.404. Найти уравнение цилиндра, проектирующего окружность

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (x-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

на плоскость: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

1.405. Найти уравнение проекции окружности

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 36, \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25 \end{cases}$$

на плоскость: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

1.406. Составить уравнение поверхности, каждая точка которой одинаково удалена от прямой $x = a$, $y = 0$ и плоскости Oyz. Построить поверхность.

1.407. Составить уравнение цилиндра, если:

а) ось коллинеарна вектору $\mathbf{q} = \{1, 2, 3\}$, а направляющая задана уравнениями $y^2 = 4x$, $z = 0$;

б) ось коллинеарна вектору $\mathbf{q} = \{1, 1, 1\}$, а направляющая задана уравнениями $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

1.408. Сфера $x^2+y^2+z^2 = 4z$ освещена лучами, параллельными прямой $x = 0$, $y = z$. Найти форму тени сферы на плоскости Oxy.

1.409. Построить тело, ограниченное поверхностями $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$, и написать уравнение диагоналей грани, лежащей в плоскости $x = 4$.

Конической поверхностью (*конусом*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований гомотетии $H(k, M_0)$ с произвольным коэффициентом k и центром в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называемой *вершиной* конуса. Из этого определения следует, что если точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит конусу, то вся прямая $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_1}{z_1 - z_0}$, проходящая через эту точку и вершину M_0 и называемая *образующей* конуса, целиком лежит на конусе. Всякая кривая Γ, лежащая на конусе и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого конуса.

Пусть задан конус S с вершиной $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющей

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0.$$

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит конусу S в том и только том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x + t(x - x_0)$, $y + t(y - y_0)$, $z + t(z - z_0)$ лежит на образующей Г, т. е.

$$\begin{cases} F_1\big(x + t(x - x_0),\, y + t(y - y_0),\, z + t(z - z_0)\big) = 0, \\ F_2\big(x + t(x - x_0),\, y + t(y - y_0),\, z + t(z - z_0)\big) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Исключая параметр t из системы (11), получим уравнение конуса в виде $F(x, y, z) = 0$.

Пример 5. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а направляющая задана уравнениями $F(x, y) = 0$, $z - h = 0$.

◁ Система (11) при этих условиях принимает вид

$$\begin{cases} F\big(x + t(x - x_0),\, y + t(y - y_0)\big) = 0, \\ z + t(z - z_0) - h = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $t = \dfrac{h - z}{z - z_0} = \dfrac{(h - z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \dfrac{h - z_0}{z - z_0} - 1$, что после подстановки в первое уравнение дает

$$F\left(x_0 + (h - z_0)\frac{x - x_0}{z - z_0},\, y_0 + (h - z_0)\frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) и есть уравнение заданного конуса. В частном случае $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (вершина конуса находится в начале координат) уравнение конуса принимает вид

$$F\left(h\frac{x}{z},\, h\frac{y}{z}\right) = 0. \tag{13}$$

Заметим, что уравнение (13) *однородно* относительно x, y и z (т. е. не меняется при замене x, y и z на tx, ty и tz при произвольном $t \neq 0$), а уравнение (12) однородно относительно $x - x_0$, $y - y_0$ и $z - z_0$. ▷

1.410. Пусть функция трех переменных $F(x, y, z)$ однородна относительно x, y и z, т. е.

$$\forall t \neq 0\ \exists\, s \in \mathbb{R}:\ F(tx, ty, tz) = t^s F(x, y, z).$$

Показать, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет конус с вершиной в начале координат, причем для любого h кривая

$$F\left(\frac{x}{h},\, \frac{y}{h},\, 1\right) = 0, \quad z - h = 0$$

есть его направляющая.

1.411. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = h; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25, \\ y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

Построить соответствующие конусы.

1.412. Составить уравнение конуса, если заданы координаты вершины M_0 и уравнения направляющей:

а) $M_0(0,\ -a,\ 0),\ x^2 = 2py,\ z = h;$

б) $M_0(0,\ 0,\ c),\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0;$

в) $M_0(0,\ -a,\ 0),\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ y + z = a;$

г) $M_0(3,\ -1,\ -2),\ x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ x - y + z = 0.$

Построить соответствующие конусы.

1.413. Построить конус, определить его вершину и направляющую в плоскости $z = h$, если конус задан уравнением:

а) $x^2 + (y-h)^2 - z^2 = 0$; б) $x^2 = 2yz$.

1.414. Составить уравнение кругового конуса, для которого оси координат являются его образующими.

1.415. Составить уравнения проекций линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ на координатные плоскости:

а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

1.416. Источник света, находящийся в точке $M_0(5,\ 0,\ 0)$, освещает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Найти форму тени на плоскости Oyz.

Поверхностью вращения называется поверхность, инвариантная относительно поворотов $R(\varphi,\ u)$ на любой угол φ вокруг некоторой фиксированной оси u. Эта поверхность может быть получена вращением вокруг оси u кривой, получающейся в сечении поверхности любой плоскостью, проходящей через эту ось.

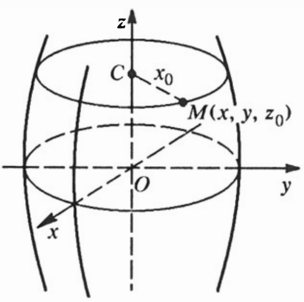


Рис. 33

Пример 6. Вывести уравнение поверхности, образованной вращением кривой $F(x,\ z) = 0,\ y = 0$ вокруг оси Oz (рис. 33).

◁ Сечение поверхности произвольной плоскостью $z = z_0$ есть окружность с центром в точке $C(0,\ 0,\ z_0)$ радиуса x_0, причем $F(x_0,\ z_0) = 0$. Поэтому для произвольной точки $M(x, y, z)$ этой окружности имеем: $z = z_0$ и $\rho(M, Oz) = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0$. Подставляя эти равенства в соотношение $F(x_0, z_0) = 0$, получаем

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) и есть искомое уравнение заданной поверхности вращения. ▷

1.417. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z = x^2$, $y = 0$:

а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Ox.

Построить обе поверхности.

1.418. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой $z = y$, $x = 0$:

а) вокруг оси Oy; б) вокруг оси Oz.

Построить обе поверхности.

1.419. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz:

а) кривой $z = e^{-x^2}$, $y = 0$;

б) кривой $z = \dfrac{4}{x^2}$, $y = 0$.

Построить обе поверхности в левой системе координат.

1.420. Показать, что $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ есть уравнение поверхности вращения с осью вращения Ox. Написать уравнение кривой в плоскости $z = 0$, вращением которой получена эта поверхность.

1.421. Показать, что $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ есть уравнение поверхности вращения. Найти ее ось вращения и уравнения какой-нибудь кривой, вращением которой образована эта поверхность.

Глава 2
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определители

1. Определители 2-го и 3-го порядков. Квадратная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

составленная из четырех действительных (или комплексных) чисел, называется *квадратной матрицей 2-го порядка. Определителем 2-го порядка*, соответствующим матрице A (или просто — *определителем матрицы* A), называется число

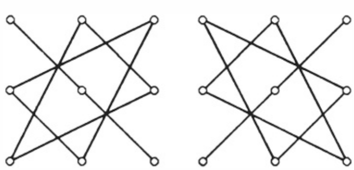
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица 3-го порядка, то соответствующим ей *определителем 3-го порядка* называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1)$$



а (+) б (−)

Рис. 34

Определители 3-го порядка обычно вычисляются с использованием следующего правила Саррюса: одно из трех слагаемых, входящих в правую часть (1) со знаком плюс, есть произведение элементов *главной* диагонали матрицы A, каждое из двух других — произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы (рис. 34*а*), а слагаемые, входящие в (1) со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно второй (*побочной*) диагонали (рис. 34*б*).

Вычислить определители 2-го порядка:

2.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$. **2.2.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **2.3.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2.4. $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$. **2.5.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$.

2.6. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi - 1 \\ 2\cos^2\varphi - 1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$. **2.7.** $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ -\dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

2.8. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$ **2.9.** $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0.$

2.10*. Доказать, что при действительных a, b, c, d корни уравнения $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ действительны.

2.11. Доказать, что для равенства нулю определителя 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки были пропорциональны (т. е. чтобы элементы одной строки получались из соответствующих элементов другой строки умножением на одно и то же число). То же верно и для столбцов.

Вычислить определители 3-го порядка:

2.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **2.13.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **2.14.** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

2.15. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$. **2.16.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \beta^2 & \beta \end{vmatrix}$, где $\beta = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$.

Решить уравнения:

2.19. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ **2.20.** $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

Решить неравенства:

2.21. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0.$ **2.22.** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

2.23. Доказать следующие свойства определителя 3-го порядка, используя его определение:

а) если строки матрицы определителя сделать столбцами с теми же номерами (т. е. *транспонировать* матрицу), то определитель не изменится;

б) если все элементы строки (столбца) умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число;

в) если переставить две строки (столбца) определителя, то он изменит знак; в частности, если две строки (столбца) определителя равны, то он равен нулю;

г) если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором — вторые слагаемые;

д) если одна строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Используя свойства определителя 3-го порядка, перечисленные в задаче 2.23, доказать следующие тождества (определители не развертывать):

2.24. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.25. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.26*. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Вычислить следующие определители, используя свойства определителя 3-го порядка, перечисленные в задаче 2.23:

2.27. $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$. **2.28.** $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$.

2.29. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **2.30.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

2.31. Проверить, что определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ делится на $x-y$, $y-z$ и $z-x$.

2.32. Проверить, что определитель

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

делится на $x+y$ и на x^2-xy+y^2.

2.33. Построить график функции

$$y = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (a \neq b).$$

2. Определители n-го порядка. Всякое взаимно однозначное отображение π множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел на себя называется *подстановкой n-го порядка.*

Всякая подстановка может быть записана в виде

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_{i_k} = \pi(i_k)$ — образ элемента $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ при отображении π. Для фиксированной подстановки π существует много различных способов записи вида (2), отличающихся нумерацией элементов верхней строки. В частности, запись вида

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется *канонической.*

Говорят, что пара элементов (i, j) образует *инверсию* в подстановке π, если $i < j$, но $\alpha_i > \alpha_j$. Число $s(\pi)$ всех инверсных пар определяет четность подстановки: подстановка называется *четной*, если $s(\pi)$ — четное число, и *нечетной*, если $s(\pi)$ — число нечетное.

Пример 1. Определить четность подстановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◁ Перейдем к канонической записи (3)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

и подсчитаем число инверсий. Так как инверсии образуют пары (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), то $s(\pi) = 4$ и π — четная подстановка. ▷

Определителем n-го порядка, соответствующим квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(или *определителем матрицы* A), называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{s(\pi)} a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)},$$

где сумма берется по всем подстановкам π n-го порядка.

Для определителя n-го порядка выполняются основные свойства, аналогичные свойствам а)–д) из задачи 2.23.

2.34. На множестве $\{1, \dots, 6\}$ найти подстановку π, если $\pi(k)$ является остатком от деления числа $3k$ на 7. Определить ее четность.

2.35. На множестве $\{1, \dots, 8\}$ найти подстановку π, если $\pi(k)$ является остатком от деления числа $5k$ на 9. Определить ее четность.

Определить четность подстановок:

2.36. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **2.37.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.38. $\begin{pmatrix} 2n & 2n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & 2n & \dots & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.39.

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & \ldots & n-k+1 & n-k & n-k-1 & \ldots & 2 & 1 \\ k & k-1 & \ldots & 1 & n & n-1 & \ldots & k+2 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

2.40. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. **2.41.** $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.
2.42. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$. **2.43.** $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

2.44. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

входило в некоторый определитель со знаком минус.

2.45. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в некоторый определитель со знаком плюс.

2.46. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

Пользуясь только определением, вычислить следующие определители:

2.47. $$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & \ldots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

2.48. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.49. Как изменится определитель, если:

а) к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку;

б) из каждой строки, кроме последней, вычесть все последующие строки;

в) из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней строки вычесть прежнюю первую строку;

г) его матрицу «повернуть на 90° вокруг центра»;

д) первый столбец переставить на последнее место, а остальные передвинуть влево, сохраняя их расположение.

3. Основные методы вычисления определителей n-го порядка. Метод понижения порядка определителя основан на следующем соотношении (i фиксировано):

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{(i,k)}, \tag{4}$$

где

$$A^{(i,k)} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} и представляет собой (с точностью до знака $(-1)^{i+k}$) определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

Соотношение (4) называется *разложением определителя по i-й строке*. Аналогично определяется *разложение определителя по столбцу*. Прежде чем применять метод понижения порядка, полезно, используя основные свойства определителя, обратить в нуль все, кроме одного, элементы его некоторой строки (столбца).

Пример 2. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

◁ Из первой строки вычтем, а ко второй прибавим удвоенную третью. Полученный определитель разложим по первому столбцу. Имеем

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далее опять обращаем в нуль все элементы первого столбца, кроме элемента в левом верхнем углу, и затем вычисляем определитель второго порядка:

$$D = 4\begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 20 \\ 0 & -27 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} -45 & 20 \\ -27 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(-90+540) = -1800. \ \triangleright$$

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании определителя, когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей, становятся равными нулю.

Пример 3. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$\triangleleft$ Вычитая первую строку из всех остальных, получаем

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8. \ \triangleright$$

Метод рекуррентных соотношений позволяет выразить данный определитель, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

Пример 4. Вычислить *определитель Вандермонда*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\triangleleft$ Покажем, что при любом n ($n \geqslant 2$) определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$. Доказательство проведем по индукции, используя метод рекуррентных соотношений.

Действительно, при $n = 2$ имеем

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Пусть наше утверждение доказано для определителей Вандермонда порядка $n-1$, т. е.

$$D_{n-1} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1} (a_i - a_j).$$

Преобразуем определитель D_n следующим образом: из последней n-й строки вычитаем $(n-1)$-ю, умноженную на a_1 и, вообще, последовательно вычитаем из k-й строки $(k-1)$-ю, умноженную на a_1. Получаем

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \dots & a_n^2 - a_1a_n \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по первому столбцу и вынесем из всех столбцов общие множители. Определитель принимает вид

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ \hdotsfor{5} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$
$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)D_{n-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение. Используя предположение индукции, окончательно выводим:

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j). \quad \triangleright$$

Вычислить определители, используя подходящее разложение по строке или столбцу:

2.50. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **2.51.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

2.52. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **2.53.** $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2.54. а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

2.55. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. **2.56.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

2.57. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$. **2.58.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

2.59. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ d & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **2.60.** $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

2.61. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **2.62.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2.63. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$. **2.64.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$.

2.65*. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

2.66. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Вычислить определители порядка n приведением их к треугольному виду:

2.67. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. **2.68.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

2.69. Вычислить определитель, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \min(i, j)$.

2.70. Вычислить определитель, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \max(i, j)$.

Вычислить определители порядка n методом рекуррентных соотношений:

2.71. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$. **2.72.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

2.73. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

2.74. Доказать, что для любого определителя выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A^{(k,j)} = \begin{cases} \det A, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

где $A^{(k,j)}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{kj} (см. (5)).

§ 2. Матрицы

1. Операции над матрицами. *Матрицей размера* $m \times n$ или $(m \times n)$-*матрицей* называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \dots$ $\dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Суммой $A + B$ *$(m \times n)$-матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Произведением αA *матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* α (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на α:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Произведением AB *$(m \times n)$-матрицы* $A = (a_{ij})$ *на $(n \times k)$-матрицу* $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$-матрица $C = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

2.75. Доказать следующие свойства алгебраических операций над матрицами:

а) $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$;

б) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

в) $A(BC) = (AB)C$, $A(B + C) = AB + AC$.

Вычислить линейные комбинации матриц A и B:

2.76. $3A + 2B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.77. $(1 + i)A + (1 - i)B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

2.78. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.79.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

2.80. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.81. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.82. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.83. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.84. а) $(4\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} (4\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ 1)$.

2.85. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.86. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. **2.87.** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $a \in \mathbb{R}$.

2.88. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **2.89.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

2.90. $f(x) = 3x^2 - 4$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.91. $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.92. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислить $AB - BA$:

2.93. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.94. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.95. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.

Найти все матрицы, перестановочные с данной:

2.96. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.97.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. **2.98.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.99. Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны нулевой матрице $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.100. Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны единичной матрице $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.101. Как изменится произведение AB матриц A и B, если:

а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A,

б) к i-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число α,

в) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B,

г) к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число α?

Матрица $A^\top$ называется *транспонированной* к матрице A, если выполняется условие $a_{ij}^\top = a_{ji}$ для всех i, j, где a_{ij} и $a_{ij}^\top$ — элементы матриц A и $A^\top$ соответственно.

2.102. Доказать следующие соотношения:

а) $(A^\top)^\top$; б) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$; в) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Вычислить $AA^\top$ и $A^\top A$ для заданных матриц A:

2.103. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. **2.104.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица B называется *симметричной*, если $B^\top = B$. Квадратная матрица C называется *кососимметричной*, если $C^\top = -C$.

2.105. Доказать, что любую матрицу A можно представить, и при этом единственным образом, в виде $A = B + C$, где B — симметричная, а C — кососимметричная матрицы.

2. Обратная матрица. Квадратная матрица A называется *вырожденной* (*особенной*), если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* (*неособенной*) в противном случае. Если A — невырожденная матрица, то существует и притом единственная матрица A^{-1} такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица (т. е. такая, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю). Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A.

Укажем основные методы вычисления обратной матрицы.

Метод присоединенной матрицы. Присоединенная матрица $A^{\vee}$ определяется как транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A (см. формулу (5) из § 1). Таким образом,

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A^{(1,1)} & A^{(2,1)} & \ldots & A^{(n,1)} \\ A^{(1,2)} & A^{(2,2)} & \ldots & A^{(n,2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{(1,n)} & A^{(2,n)} & \ldots & A^{(n,n)} \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$A^{\vee}A = AA^{\vee} = \det A \cdot E.$$

Отсюда следует, что если A — невырожденная матрица, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\vee}.$$

Пример 1. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

◁ Имеем $\det A = -4$. Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A:

$$A^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A^{(2,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A^{(3,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A^{(1,2)} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \; A^{(2,2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \; A^{(3,2)} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \; A^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \; A^{(3,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Поэтому

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \text{ и } A^{-1} = -\frac{1}{4}A^{\vee} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}. \;\triangleright$$

Метод элементарных преобразований. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для данной матрицы A n-го порядка построим прямоугольную матрицу $\Gamma_A = (A|E)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу. Далее, используя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу Γ_A к виду $(E|B)$, что всегда возможно, если A невырождена. Тогда $B = A^{-1}$.

Пример 2. Методом элементарных преобразований найти A^{-1} для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$ Образуем матрицу Γ_A:

$$\Gamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Обозначив через γ_1, γ_2, γ_3 строки матрицы Γ_A, произведем над ними следующие преобразования:

$$\begin{aligned} &\gamma_1' = \frac{1}{3}\gamma_1, && \gamma_1'' = \gamma_1' - \frac{2}{7}\gamma_2', && \gamma_1''' = \gamma_1'' - \frac{1}{24}\gamma_3'', \\ &\gamma_2' = \gamma_2 - \frac{4}{3}\gamma_1, && \gamma_2'' = \frac{3}{7}\gamma_2', && \gamma_2''' = \gamma_2'' - \frac{1}{12}\gamma_3'', \\ &\gamma_3' = \gamma_3 - \frac{2}{3}\gamma_1, && \gamma_3'' = \gamma_3' + \frac{1}{7}\gamma_2', && \gamma_3''' = \frac{7}{24}\gamma_3''. \end{aligned}$$

В результате последовательно получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

Методом присоединенной матрицы найти обратные для следующих матриц:

2.106. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.107.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **2.108.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

2.109. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **2.110.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2.111. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. **2.112.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.113. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Методом элементарных преобразований найти обратные для следующих матриц:

2.114. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **2.115.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.116. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.117.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.118. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. **2.119.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.120. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения:

2.121. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **2.122.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.123. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.124. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.125. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

2.126. Доказать следующие равенства:

а) $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$;

б) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

в) $(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}$.

Вычислить значение функции $g(x)$ при $x = A$:

2.127. $g(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.128. $g(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.129. $g(x) = (x^2 - 1)^{-1} - (x^2 + 1)^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 3. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы

1. Арифметические векторы. Всякая упорядоченная совокупность из n действительных (комплексных) чисел называется *действительным* (*комплексным*) *арифметическим вектором* и обозначается символом

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *компонентами* арифметического вектора $\mathbf{x}$.

Над арифметическими векторами вводятся следующие операции.

Сложение: если

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1}$$

Умножение на число: если λ — число (действительное или комплексное) и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — арифметический вектор, то

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \tag{2}$$

Множество всех действительных (комплексных) арифметических n-компонентных векторов с введенными выше операциями сложения (1) и умножения на число (2) называется *пространством арифметических векторов* (соответственно действительным или комплексным). Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматривается действительное пространство арифметических векторов, обозначаемое символом $\mathbb{R}^n$.

Система арифметических векторов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_s\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ (где $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ — нулевой вектор). В противном случае эта система называется *линейно независимой.*

Пусть Q — произвольное множество арифметических векторов. Система векторов $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s)$ называется *базисом* в Q, если выполнены следующие условия:

а) $\mathbf{e}_k \in Q$, $k = 1, 2, \ldots, s$;

б) система $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s)$ линейно независима;

в) для любого вектора $\mathbf{x} \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ такие, что

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{e}_k. \tag{3}$$

Формула (3) называется *разложением* вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathfrak{B}$. Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ однозначно определяются вектором $\mathbf{x}$ и называются *координатами* этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$.

Справедливы следующие утверждения:

1) Всякая система векторов $Q \in \mathbb{R}^n$ имеет по меньшей мере один базис; при этом оказывается, что все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* системы Q и обозначаемого $\operatorname{rang} Q$ или $r(Q)$.

2) Ранг всего пространства $\mathbb{R}^n$ равен n и называется *размерностью* этого пространства; при этом в качестве базиса $\mathbb{R}^n$ можно взять следую-

щую систему:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_n &= (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Этот базис принято называть *каноническим.*

Зафиксируем произвольный базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда всякому вектору $\mathbf{x}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе, т. е.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Необходимо различать компоненты вектора и его координаты в некотором базисе. Мы используем для них одинаковое обозначение, хотя следует помнить, что координаты вектора совпадают с его компонентами только в каноническом базисе.

Линейные операции (1) и (2) над арифметическими векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Leftrightarrow Z = X + Y \quad (\Leftrightarrow z_k = x_k + y_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow Y = \lambda \cdot X \qquad (\Leftrightarrow y_k = \lambda x_k, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

2.130. Доказать, что линейные операции (1) и (2) обладают следующими свойствами:

1а) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

1б) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

1в) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;

1г) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \ \ \exists! \mathbf{z} \ \ (\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z})$ (вектор $\mathbf{z}$ называется *разностью* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначается так: $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$);

2а) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$ для любых чисел λ и μ;

2б) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

3а) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;

3б) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

Заданы арифметические векторы:
$\mathbf{a}_1 = (4,\ 1,\ 3,\ -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,\ 2,\ -3,\ 2)$, $\mathbf{a}_3 = (16,\ 9,\ 1,\ -3)$,
$\mathbf{a}_4 = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{a}_5 = (1,\ -1,\ 15,\ 0)$.

Найти следующие линейные комбинации:

2.131. $3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$. **2.132.** $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_5$.

2.133. $2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_5$. **2.134.** $\dfrac{1}{2}\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3 - \dfrac{1}{2}\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5$.

Заданы те же, что и выше, арифметические векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$. Найти вектор $\mathbf{x}$ из уравнения:

2.135. $2\mathbf{x} + \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$.

2.136. $\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_5 + \mathbf{x} + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

2.137. $2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{x}) + 5(\mathbf{a}_4 + \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

2.138. $3(\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{x}) - 2(\mathbf{a}_5 - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

2.139. Доказать, что линейно зависима всякая система векторов:

а) содержащая два равных вектора;

б) содержащая два вектора, различающихся числовым множителем;

в) содержащая нулевой вектор;

г) содержащая линейно зависимую подсистему.

Выяснить, являются ли следующие системы арифметических векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

2.140. $\mathbf{x}_1 = (-3,\ 1,\ 5)$, $\mathbf{x}_2 = (6,\ -3,\ 15)$.

2.141. $\mathbf{x}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 0)$, $\mathbf{x}_2 = (2,\ 4,\ 6,\ 0)$.

2.142. $\mathbf{x}_1 = (2,\ -3,\ 1)$, $\mathbf{x}_2 = (3,\ -1,\ 5)$, $\mathbf{x}_3 = (1,\ -4,\ 3)$.

2.143. $\mathbf{x}_1 = (1,\ i,\ 2-i,\ 3+i)$, $\mathbf{x}_2 = (1-i,\ 1+i,\ 1-3i,\ 4-2i)$.

2.144*. Показать, что система арифметических векторов

$$\mathbf{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1),\ \mathbf{e}_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1),\ \mathbf{e}_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$\mathbf{e}_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1),\ \mathbf{e}_5 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

образует базис в $\mathbb{R}^5$.

Найти координаты заданного вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5)$ из задачи 2.144:

2.145.** $\mathbf{x} = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$.

2.146. $\mathbf{x} = (5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$.

2.147. Доказать, что если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависимы и вектор $\mathbf{a}_3$ не выражается линейно через векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, то векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ различаются лишь числовым множителем.

2.148. Доказать, что если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}$ линейно зависимы, то вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$.

2.149. Доказать, что упорядоченная система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ... ..., $\mathbf{a}_n$, не содержащая нулевого вектора, линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из этих векторов не выражается линейно через предыдущие.

2. Ранг матрицы. Пусть в матрице A размера $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m,\ n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы A.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется ее *рангом*, а любой минор порядка r, отличный от нуля, — *базисным минором.*

Строки (столбцы) матрицы A размера $m \times n$ можно рассматривать как систему арифметических векторов из $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{R}^m$).

Теорема о базисном миноре. *Ранг матрицы равен рангу системы ее строк (столбцов); при этом система строк (столбцов) матрицы, содержащая базисный минор, образует базис в системе всех строк (столбцов) этой матрицы.*

Приведем основные методы вычисления ранга матрицы.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

◁ Фиксируем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Минор 3-го порядка

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор M_2, также отличен от нуля. Однако оба минора 4-го порядка, окаймляющие M_3, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому ранг A равен трем. ▷

Метод элементарных преобразований основан на том факте, что элементарные преобразования (см. п. 2 § 2) матрицы не меняют ее ранга (см. задачу 2.158). Используя эти преобразования, матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} ($r \leqslant \min(m, n)$), равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

◁ Производя последовательно элементарные преобразования, будем иметь

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен двум, следовательно, таков же и ранг исходной матрицы. ▷

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

2.150. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

2.151. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

2.152. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.153. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2.154. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.155. $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 2+3i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & -1-i & 3-2i \\ 4 & -4i & 10+2i \end{pmatrix}$.

Чему равен ранг матрицы A при различных значениях λ?

2.156. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. **2.157.** $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$.

2.158. Показать, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

2.159. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

2.160. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

2.161. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

2.162. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

2.163. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. **2.164.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить ранг матрицы:

2.165. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. **2.166.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

2.167. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.168.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.169. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2.170. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.171. Доказать, что если произведение матриц AB определено, то $\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

2.172. Пусть A — невырожденная матрица, а матрицы B и C таковы, что AB, CA определены. Доказать, что $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang} B$ и $\operatorname{rang}(CA) = \operatorname{rang} C$.

2.173. Доказать, что если сумма матриц $A + B$ определена, то $\operatorname{rang}(A+B) \leqslant \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

Понятие ранга матрицы используется для исследования линейной зависимости системы арифметических векторов.

Пример 3. Выяснить, является ли система арифметических векторов $\mathbf{a}_1 = (2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -5, -3)$ линейно зависимой или линейно независимой. Найти ее ранг и какой-нибудь базис.

◁ Запишем матрицу A, вектор-столбцами которой являются $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

$$A = (\mathbf{a}_1^\top, \mathbf{a}_2^\top, \mathbf{a}_3^\top) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг A, как нетрудно видеть, равен 2. Следовательно, исходная система арифметических векторов линейно зависима, и ее ранг также равен 2 (по теореме о базисном миноре). Минор 2-го порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

отличен от нуля и потому может быть принят за базисный. Отсюда следует, что арифметические векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ образуют базис исходной системы.

Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

2.174. $\mathbf{x}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1, -1, -1)$.

2.175. $\mathbf{x}_1 = (4,\ -5,\ 2,\ 6)$, $\mathbf{x}_2 = (2,\ -2,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{x}_3 = (6,\ -3,\ 3,\ 9)$, $\mathbf{x}_4 = (4,\ -1,\ 5,\ 6)$.

Найти ранг системы векторов:

2.176. $\mathbf{a}_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,\ 1,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1,\ 0,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{a}_5 = (3,\ -5,\ 2,\ -3)$.

2.177. $\mathbf{a}_1 = (1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,\ -i,\ -1,\ i,\ 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{a}_4 = (3,\ -1,\ -1,\ -1,\ 3)$.

Найти все значения λ, при которых вектор $\mathbf{x}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

2.178. $\mathbf{a}_1 = (2,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\mathbf{a}_3 = (1,\ -6,\ 1)$, $\mathbf{x} = (7,\ -2,\ \lambda)$.

2.179. $\mathbf{a}_1 = (3,\ 2,\ 5)$, $\mathbf{a}_2 = (2,\ 4,\ 7)$, $\mathbf{a}_3 = (5,\ 6,\ \lambda)$, $\mathbf{x} = (1,\ 3,\ 5)$.

2.180. $\mathbf{a}_1 = (3,\ 2,\ 6)$, $\mathbf{a}_2 = (7,\ 3,\ 9)$, $\mathbf{a}_3 = (5,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{x} = (\lambda,\ 2,\ 5)$.

Найти ранг и какой-нибудь базис заданной системы векторов:

2.181. $\mathbf{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (3,\ 4,\ -1,\ 2)$.

2.182. $\mathbf{a}_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{a}_2 = (4,\ -3,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (4, -1, 15, 17)$, $\mathbf{a}_5 = (7,\ -6,\ -7,\ 0)$.

2.183. $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, -4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, -4, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2,\ -5,\ 8,\ -3)$, $\mathbf{a}_4 = (5,\ 26,\ -9,\ -12)$, $\mathbf{a}_5 = (3,\ -4,\ 1,\ 2)$.

Найти ранг и все базисы системы векторов:

2.184. $\mathbf{a}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{a}_3 = (3,\ 6,\ 0,\ 0)$.

2.185. $\mathbf{a}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2,\ 3,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3,\ 4,\ 5,\ 6)$, $\mathbf{a}_4 = (4,\ 5,\ 6,\ 7)$.

2.186. $\mathbf{a}_1 = (2,\ 1,\ -3,\ 1)$, $\mathbf{a}_2 = (4,\ 2,\ -6,\ 2)$, $\mathbf{a}_3 = (6, 3, -9, 3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$.

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Правило Крамера. Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \qquad (1)$$

или, в матричной форме, $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Правило Крамера. Если в системе (1) $\det A = \Delta \neq 0$, т.е. матрица A имеет обратную A^{-1}, то система (1) имеет, и притом единственное, решение

$$X = A^{-1}B,$$

или, в покомпонентной записи,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + 5x_2 &= -3. \end{aligned}$$

$\lhd$ Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ невырожденная, так как $\det A = -2 \neq 0$.

Присоединенная матрица $A^{\vee}$ имеет вид

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. ▷

Следующие системы решить по правилу Крамера:

2.187. $\begin{aligned} 3x - 5y &= 13, \\ 2x + 7y &= 81. \end{aligned}$

2.188. $\begin{aligned} 3x - 4y &= -6, \\ 3x + 4y &= 18. \end{aligned}$

2.189. $\begin{aligned} 2ax - 3by &= 0, \\ 3ax - 6by &= ab. \end{aligned}$

2.190. $\begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 15, \\ 5x - 3y + 2z &= 15, \\ 10x - 11y + 5z &= 36. \end{aligned}$

2.191. $\begin{aligned} 2x + y \qquad &= 5, \\ x \qquad + 3z &= 16, \\ 5y - z &= 10. \end{aligned}$

2.192. $\begin{aligned} x + y - 2z &= 6, \\ 2x + 3y - 7z &= 16, \\ 5x + 2y + z &= 16. \end{aligned}$

2.193.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \qquad &= -10, \\ 3x_2 + 2x_3 \qquad &= 1. \end{aligned}$$

2.194.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6. \end{aligned}$$

2.195*. Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, и притом только один, многочлен $y = f(x)$ степени $\leqslant 2$, для которого $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. Когда степень этого многочлена < 2 (равна 1, равна 0)?

По заданным условиям найти многочлен $f(x)$:

2.196. $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$.

2.197. $f_j(x_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

2.198. $\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -5. \end{aligned}$

2.199. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1, \\ x_1 - 4x_2 \qquad &= -5. \end{aligned}$

2.200.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

2.201.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned}$$

2.202. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 20 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 &= 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 40 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 37 &= 0. \end{aligned}$

2.203. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0,$
$6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0.$

2. Решение произвольных систем. Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{gathered} \tag{2}$$

или, в матричной форме,

$$AX = B, \tag{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = O$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Решением системы (2) называется всякий n-компонентный вектор-столбец X, обращающий матричное уравнение (3) в равенство (соответствующий решению X арифметический вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ также будем называть решением системы (2)).

Система называется *совместной*, если у нее существует по крайней мере одно решение, в противном случае она называется *несовместной*.

Две системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Теорема Кронекера–Капелли. *Для того чтобы система (2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}, \tag{4}$$

где $\overline{A} = (A|B)$ — расширенная матрица системы.

Пусть $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r$, т. е. система совместна. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный минор располагается в первых r $(1 \leqslant r \leqslant \min(m, n))$ строках и столбцах матрицы A. Отбросив последние $m - r$ уравнений системы (2), запишем *укороченную* систему:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{gathered} \tag{5}$$

которая эквивалентна исходной. Назовем неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ *базисными*, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *свободными* и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (5). Получаем систему относительно базисных неизвестных:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{aligned}$$

которая для каждого набора значений свободных неизвестных $x_{r+1} = c_1, \ldots, x_n = c_{n-r}$ имеет единственное решение $x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}), \ldots \ldots, x_r = (c_1, \ldots, c_{n-r})$, находимое по правилу Крамера. Соответствующее решение укороченной, а следовательно, и исходной систем имеет вид

$$X(c_1, \ldots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Формула (6), выражающая произвольное решение системы в виде вектор-функции от $n - r$ свободных неизвестных, называется *общим решением* системы (2).

Пример 2. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 4x_1 \qquad\quad + x_3 - 7x_4 &= 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

◁ Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$ (проверьте!), то исходная система совместна.

Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$. Тогда неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3, x_4 — свободные, а укороченная система имеет вид

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2 + x_3 + 3x_4, \\ 4x_1 \qquad &= 3 - x_3 + 7x_4. \end{aligned}$$

Полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и решая укороченную систему относительно базисных неизвестных, получаем

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2,$$
$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2.$$

Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

Исследовать совместность и найти общее решение следующих систем:

2.204. $\begin{aligned} x - \sqrt{3}y &= 1, \\ \sqrt{3}x - 3y &= \sqrt{3}. \end{aligned}$

2.205. $\begin{aligned} \sqrt{5}x - 5y &= \sqrt{5}, \\ x - \sqrt{5}y &= 5. \end{aligned}$

2.206. $\begin{aligned} 2x - y + z &= -2, \\ x + 2y + 3z &= -1. \\ x - 3y - 2z &= 3. \end{aligned}$

2.207. $\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 1, \\ 2x + y - 5z &= -1, \\ x - y - z &= -2. \end{aligned}$

2.208.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 &= -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22. \end{aligned}$$

2.209.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7. \end{aligned}$$

2.210.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned}$$

2.211.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2.212.
$$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8. \end{aligned}$$

2.213.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7. \end{aligned}$$

2.214.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2. \end{aligned}$$

2.215. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2,\\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3,\\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9,\\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$$

2.216. $$\begin{aligned} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 &= 5,\\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8,\\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9,\\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4. \end{aligned}$$

2.217. $$\begin{aligned} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 &= 28,\\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 &= 43,\\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 &= 58,\\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69. \end{aligned}$$

Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

2.218. $$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1,\\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9,\\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

2.219. $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1. \end{aligned}$$

2.220. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7,\\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9,\\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{aligned}$$

2.221. $$\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= 1. \end{aligned}$$

3. Однородные системы. Однородная система $AX = O$ всегда совместна, так как имеет *тривиальное* решение $X = O$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $r = \operatorname{rang} A < n$ (при $m = n$ это условие означает, что $\det A = 0$).

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n - r$ векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-r}$. Соответствующая ему в каноническом базисе (см. (4) из § 3) система вектор-столбцов $E_1, \ldots, E_{n-r}$ называется *фундаментальной системой решений*. Общее решение однородной системы имеет вид

$$X = c_1 E_1 + \ldots + c_{n-r} E_{n-r},$$

где $c_1, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Базисные решения $E_1, \ldots, E_{n-r}$ могут быть получены методом, изложенным в п. 2, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

Пример 3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующей однородной системы уравнений:

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0,\\
2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 0,\\
x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 &= 0,\\
x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

◁ Матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r = 2$ (проверьте!). Выберем в качестве базисного минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= 8x_3 - 2x_4 - x_5,\\
2x_1 - 2x_2 &= 3x_3 + 7x_4 - 2x_5,
\end{aligned}$$

откуда, полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, находим

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{19}{8}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3,\\
x_2 &= -\frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3.
\end{aligned}$$

Общее решение системы

$$X(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} -\dfrac{19}{8}c_1 - \dfrac{3}{8}c_2 + \dfrac{1}{2}c_3\\ -\dfrac{7}{8}c_1 + \dfrac{25}{8}c_2 - \dfrac{1}{2}c_3\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений

$$E_1 = X(1,0,0) = \begin{pmatrix} -19/8 \\ -7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = X(0,1,0) = \begin{pmatrix} -3/8 \\ 25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = X(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы общее решение может быть записано в виде $X(c_1, c_2, c_3) = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$. ▷

2.222. Доказать, что всякая линейная комбинация решений однородной системы уравнений также является ее решением.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем:

2.223. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$

2.224. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$

2.225. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0. \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$

2.226. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$

2.227.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2.228.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2.229. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 4x_4 + 8x_5 &= 0. \end{aligned}$

2.230. $\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_6 &= 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$

2.231. $\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$

2.232. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0,\\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$$

2.233*. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0,\\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 &= 0,\\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Определить значения параметра a, при которых система имеет нетривиальные решения, и найти эти решения:

2.234. $$\begin{aligned} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0,\\ ax_1 - x_2 + x_3 &= 0,\\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

2.235. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0,\\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 &= 0,\\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Если задана неоднородная система $AX = B$, то ее общее решение может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $AX = O$ и произвольного частного решения неоднородной системы.

Найти общие решения неоднородных систем, используя фундаментальную систему решений соответствующих однородных:

2.236. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2,\\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3. \end{aligned}$$

2.237. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1,\\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1,\\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= -1. \end{aligned}$$

2.238. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 1,\\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1. \end{aligned}$$

2.239. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0,\\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 2,\\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= -1. \end{aligned}$$

4. Метод последовательных исключений Жордана–Гаусса. С помощью элементарных преобразований над строками и перестановкой столбцов расширенная матрица системы (2) может быть приведена к виду

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,\,r+1} & \ldots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,\,r+1} & \ldots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \multicolumn{8}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,\,r+1} & \ldots & a'_{rn} & & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & b'_{r+1} \\ \multicolumn{8}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & b'_m \end{array}\right). \tag{7}$$

Матрица (7) является расширенной матрицей системы

$$\begin{array}{l} x_1 \qquad\quad + a'_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad x_2 \qquad + a'_{2,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad x_r + a'_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\ \hfill 0 = b'_{r+1}, \\ \hfill \ldots \\ \hfill 0 = b'_m, \end{array} \tag{8}$$

которая с точностью до обозначения неизвестных эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ отлично от нуля, то системы (8), а следовательно, и исходная система (2) несовместны.

Если же $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$, то система совместна и формулы (8) дают по существу явное выражение для базисных неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Пример 4. Методом Жордана–Гаусса найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad\quad + \ x_4 &= -3, \\ 3x_1 - \ x_2 - 2x_3 \qquad\quad &= \ \ 1, \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 - \ x_4 &= \ \ 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= \ \ 7. \end{aligned}$$

◁ Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Первые две строки последней матрицы составляют расширенную матрицу системы

$$x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1,$$
$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2,$$

эквивалентной исходной. Считая x_1, x_2 базисными неизвестными, а x_3 и x_4 свободными, получаем общее решение в виде

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

Методом Жордана–Гаусса исследовать совместность и найти общее решение следующих систем:

2.240.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 &= -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 &= 5. \end{aligned}$$

2.241.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2, \\ x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

2.242.

$$\begin{aligned} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 &= 84, \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 &= 72, \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 &= 59. \end{aligned}$$

2.243.

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 &= 20, \\ 14x_1 + 21x_2 &= 35, \\ 9x_3 + 11x_4 &= 0, \\ 16x_3 + 20x_4 &= 0, \\ 10x_5 + 12x_6 &= 22, \\ 15x_5 + 18x_6 &= 33. \end{aligned}$$

2.244.

$$\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 &= 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Глава 3
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением

1. Линейное пространство. Множество $\mathcal{L}$ называется *линейным* (*векторным*) *пространством*, если выполнены следующие условия:

1. В $\mathcal{L}$ введена операция сложения элементов, т. е. $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathcal{L}$ определено отображение

$$\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle \to z \in \mathcal{L}$$

(обозначение: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$), обладающее следующими свойствами:

1а) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$; 1б) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$; 1в) $\exists\, \mathbf{0} \in \mathcal{L}\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}$ $(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x})$ (элемент $\mathbf{0}$ называется *нулевым*); 1г) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\ \exists (-\mathbf{x}) \in \mathcal{L}$ $(\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0})$ (элемент $-\mathbf{x}$ называется *противоположным* элементу $\mathbf{x}$).

2. В $\mathcal{L}$ введена операция умножения элементов на действительные (комплексные) числа, т. е. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}$ определено отображение

$$\langle \lambda,\, \mathbf{x} \rangle \to \mathbf{y} \in \mathcal{L}$$

(обозначение: $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$), обладающее свойствами:

2а) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$; 2б) $\lambda(\mu \mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

3. Операции сложения элементов и умножения их на числа удовлетворяют законам дистрибутивности:

3а) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$; 3б) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Пространство $\mathcal{L}$ называется *действительным*, если в $\mathcal{L}$ операция умножения векторов на число определена только для действительных чисел, и *комплексным*, если эта операция определена для комплексных чисел.

Проверить, что следующие множества являются линейными пространствами:

3.1. Множество $\mathcal{V}_3$ всех геометрических векторов (операции над геометрическими векторами определены в § 1 гл. 1).

3.2. Множество $\mathbb{R}^n$ всех арифметических n-компонентных векторов $\mathbf{x} = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$ (операции над арифметическими векторами определены в § 3 гл. 2).

3.3. Множество $\mathcal{P}_n$ всех многочленов

$$p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

степени $\leqslant n-1$ с естественным образом введенными операциями сложения многочленов и умножения их на числа.

3.4. Множество $C_{[a,\,b]}$ всех функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a,\,b]$, с естественным образом введенными операциями сложения функций и умножения их на числа.

3.5. Множество $\mathcal{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$ (операции над матрицами определены в § 2 гл. 2).

Выяснить, являются ли следующие множества линейными пространствами:

3.6. Множество $\mathcal{V}_1$ всех геометрических векторов, коллинеарных фиксированной прямой.

3.7. Множество всех геометрических векторов, исходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой.

3.8. Множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\mathbf{x}| > a$, где $a > 0$ — фиксированное число.

3.9. Множество всех сходящихся последовательностей.

3.10. Множество всех расходящихся последовательностей.

3.11. Множество всех функций, интегрируемых на отрезке $[a,\,b]$.

3.12. Множество всех преобразований поворота трехмерного пространства геометрических векторов вокруг фиксированной оси.

Система векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s \subset \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_s\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$; в противном случае эта система называется *линейно независимой*.

Пусть $Q \subset \mathcal{L}$ — произвольное множество векторов линейного пространства. Упорядоченная система векторов $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s)$ называется *базисом* в Q, если:

а) $\mathbf{e}_k \in Q$, $k = 1, 2, \ldots, s$;

б) система $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s)$ линейно независима;

в) для любого $\mathbf{x} \in Q$ найдутся такие числа $x_1, \ldots, x_s$, что

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s} x_k \mathbf{e}_k. \tag{1}$$

Формула (1) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathfrak{B}$.

Коэффициенты $x_1, \ldots, x_s$ однозначно определяются вектором $\mathbf{x}$ и называются *координатами* этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$.

Если множество $Q \subset \mathcal{L}$ обладает базисами, то все они состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* Q (и обозначаемого $\operatorname{rang} Q$). В частности, если все пространство $\mathcal{L}$ имеет базис, то оно называется *конечномерным* и обозначается $\mathcal{L}_n$, где $n = \dim \mathcal{L}$ — число векторов в любом базисе, называемое *размерностью* пространства. В противном случае пространство $\mathcal{L}$ называется *бесконечномерным*.

Пусть $\mathcal{L}_n$ — произвольное n-мерное пространство, $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — фиксированный базис в нем. Тогда всякому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_n$ взаимно однозначно соответствует столбец его координат в этом базисе:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом линейные операции над векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Leftrightarrow Z = X + Y,$$
$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow Y = \lambda X.$$

Пусть $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — два различных базиса в $\mathcal{L}_n$. Каждый из векторов базиса $\mathfrak{B}'$ разложим по базису $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{e}'_k = t_{1k}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{nk}\mathbf{e}_n \Leftrightarrow E'_k = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрицей перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ называется матрица

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

k-й столбец которой есть столбец E'_k координат вектора $\mathbf{e}'_k$ в базисе $\mathfrak{B}$. Если $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из $\mathcal{L}_n$, X и X' — столбцы его координат в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно, то имеет место равенство

$$X' = (T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}X \tag{2}$$

(формула преобразования координат при преобразовании базиса).

Пример 1. Найти координаты геометрического вектора $\mathbf{x} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$, состоящем из векторов $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

◁ Выпишем координаты векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ в исходном базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ имеет вид

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ и используя формулу (2), находим

$$X' = (T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x = 2\mathbf{e}_2' - \mathbf{e}_3'$. ▷

3.13. Пусть Q — произвольная система векторов из $\mathcal{L}$. Подсистема $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s \subset Q$ называется *максимальной линейно независимой подсистемой* в Q, если $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s$ — линейно независимая система и всякая расширенная система $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s, \mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из Q, линейно зависима. Доказать, что всякий базис в Q есть максимальная линейно независимая подсистема в Q, и наоборот.

3.14. Если заданы произвольные k векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, то из них можно построить не более k линейно независимых комбинаций. Используя этот результат, доказать: если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — два различных базиса в системе Q, то они состоят из одинакового числа векторов (т. е. имеет смысл понятие ранга системы Q).

3.15. В пространстве $\mathcal{V}_3$ заданы векторы

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2' = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3' = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Доказать, что система $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ — базис в $\mathcal{V}_3$, и написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k})$. Найти координаты вектора $\mathbf{x} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

Пусть $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ и $\mathfrak{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ — прямоугольные базисы в $\mathcal{V}_3$. В задачах 3.16–3.18 найти матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ и выписать столбец координат вектора $\mathbf{x} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

3.16. Базис $\mathfrak{B}'$ получен изменением на противоположное направление всех трех базисных ортов $\mathfrak{B}$.

3.17. Базис $\mathfrak{B}'$ получен перестановкой $\mathbf{i}' = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{i}$.

3.18. Базис $\mathfrak{B}'$ получен поворотом базиса $\mathfrak{B}$ на угол φ вокруг орта $\mathbf{i}$.

3.19. Найти ранг и какой-нибудь базис системы геометрических векторов $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{x}_3 = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{x}_4 = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3.20. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы $\mathbf{e}_1' = (1, 2, -1, -2)$, $\mathbf{e}_2' = (2, 3, 0, -1)$, $\mathbf{e}_3' = (1, 2, 1, 4)$, $\mathbf{e}_4' = (1, 3, -1, 0)$. Доказать, что система $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4')$ — базис в $\mathbb{R}^4$, и написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$ (см. § 3 гл. 2). Найти координаты вектора $\mathbf{x} = (7, 14, -1, 2)$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

3.21. Доказать, что система арифметических векторов $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 0, 4)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, 5, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 6, 10, 14)$ линейно зависима, и написать какое-нибудь нетривиальное соотношение вида $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$. Найти ранг и все базисы этой системы.

3.22. Доказать, что система матриц вида

$$A_{\alpha\beta}=\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} 0&\dots&0&0&0&\dots&0\\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill}\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&1&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&0\\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill}\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \alpha,\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \beta & \end{array} \qquad \begin{array}{l}\alpha=1,\,\dots,\,m,\\ \beta=1,\,\dots,\,n\end{array}$$

образует базис в пространстве $\mathcal{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m \times$ $\times\, n$, и, следовательно, $\dim \mathcal{M}_{m,n} = mn$. Чему равны координаты произвольной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ в этом базисе?

3.23. Доказать, что система многочленов 1, t, t^2, …, t^{n-1} образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n$ всех многочленов степени $\leqslant n-1$ и, следовательно, $\dim \mathcal{P}_n = n$ (этот базис называется *каноническим*). Найти координаты:

а) многочлена $-3t^2+1$ в каноническом базисе пространства $\mathcal{P}_3$;

б) многочлена t^2-2t в каноническом базисе пространства $\mathcal{P}_4$.

3.24. Доказать, что система многочленов t^3+t^2+t+1, t^2+t+1, $t+1$, 1 линейно независима.

3.25. Доказать, что система многочленов t^2+1, $-t^2+2t$, t^2-t образует базис в пространстве $\mathcal{P}_3$. Выписать в этом базисе столбец координат многочлена $-2t^2+t-1$.

3.26. Доказать, что при произвольном t_0 система многочленов 1, $t-t_0$, $(t-t_0)^2$, …, $(t-t_0)^{n-1}$ образует базис в $\mathcal{P}_n$.

3.27. Найти матрицу перехода от канонического базиса 1, t, t^2, …, t^{n-1} к базису 1, $t-t_0$, $(t-t_0)^2$, …, $(t-t_0)^{n-1}$ в $\mathcal{P}_n$.

3.28. Найти координаты многочлена t^2-t+2 в базисе 1, $t-1$, $(t-1)^2$.

3.29. Доказать, что пространство $\mathcal{P}$ всех многочленов бесконечномерно. Вывести отсюда, что пространство $C_{[a,\,b]}$ функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a,\,b]$, также бесконечномерно.

В задачах 3.30–3.34 в произвольном пространстве $\mathcal{L}_n$ векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, …, $\mathbf{e}'_n$ и $\mathbf{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе $\mathfrak{B}$. Доказать, что система $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — базис в $\mathcal{L}_n$, и найти столбец X' координат вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

3.30. $E'_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix}$.

3.31. $E_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

3.32. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$E_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.33. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix}$.

3.34. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.35. Доказать следующие утверждения:

а) матрица перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ всегда невырождена, и $T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = (T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}$;

б) если $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица и $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ — некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}_n$, то система векторов

$$\mathbf{e}_i' = t_{1i}\mathbf{e}_1 + \dots + t_{ni}\mathbf{e}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

также образует базис в $\mathcal{L}_n$.

3.36. Доказать, что если $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ — базисы в $\mathcal{L}_n$, то справедливо матричное равенство

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}''} = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}''}.$$

В задачах 3.37, 3.38 в произвольном пространстве $\mathcal{L}_n$ векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_n'$ заданы своими координатами в некотором базисе. Требуется доказать, что системы $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n')$ — базисы в $\mathcal{L}_n$, и, используя результаты задач 3.35 и 3.36, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$.

3.37. $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$E_1' = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}.$$

3.38. $E_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix};$

$$E_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\\-4\end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix}2\\2\\5\\4\end{pmatrix}, \quad E_4' = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-4\end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ — два действительных (или комплексных) линейных пространства. Отображение φ: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ пространства $\mathcal{L}$ на пространство $\mathcal{L}'$ называется *изоморфизмом*, если:

а) φ взаимно однозначно;

б) $\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$ и для любого числа λ.

Если существует изоморфизм $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$, то пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ называются *изоморфными*: $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$.

В задачах 3.39–3.41 [1]) установить, является ли изоморфизмом заданное отображение $\mathcal{V}_3$ на $\mathbb{R}^3$.

3.39. $\varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (2x - y,\ z,\ x + y + z)$.

3.40. $\varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (x + y - 1,\ 2z,\ 3y)$.

3.41. $\varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (x + y,\ -y + 2z,\ x + 2y - 2z)$.

3.42. Отображение φ: $\mathcal{L}_n \to \mathbb{R}^n$ произвольного пространства $\mathcal{L}_n$ на пространство $\mathbb{R}^n$ арифметических векторов имеет вид

$$\varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}_n$, а $A = (a_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n. Доказать, что это отображение — изоморфизм и, следовательно, что $\mathcal{L}_n \simeq \mathbb{R}^n$.

3.43. Доказать, что множество всех комплексных чисел с обычным сложением и умножением на действительные числа образует линейное пространство, изоморфное пространству $\mathbb{R}^2$. Написать

[1]) Для обозначения координат геометрических векторов в прямоугольном базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ условимся в этой главе использовать строчные буквы x, y, z, в отличие от прописных букв, используемых в гл. 1, так как здесь прописными буквами мы будем обозначать вектор-столбцы.

матрицу перехода от базиса $\mathfrak{B} = (1,\ i)$ к базису $\mathfrak{B}' = (1+i,\ -i)$ в этом пространстве, и для числа $-2+3i$ написать разложение по базису $\mathfrak{B}'$.

2. Подпространства и линейные многообразия. *Подпространством* линейного пространства $\mathcal{L}$ называется такое подмножество $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, которое обладает свойствами:

а) $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathcal{L}' \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{L}'$;

б) $\mathbf{x} \in \mathcal{L}' \Rightarrow \lambda\mathbf{x} \in \mathcal{L}'$ для всякого числа λ.

Если $\mathcal{L}'$ — некоторое подпространство в $\mathcal{L}$, то множество векторов

$$\mathcal{L}' + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{L} | \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}' \in \mathcal{L}' \text{ для некоторого } \mathbf{x}_0 \in \mathcal{L}\}$$

называется *линейным многообразием*, полученным сдвигом подпространства $\mathcal{L}'$ на вектор $\mathbf{x}_0$.

3.44. Доказать, что всякое подпространство $\mathcal{L}'$ линейного пространства $\mathcal{L}$ также является линейным пространством (при этом $\dim \mathcal{L}' \leqslant \dim \mathcal{L}$).

В задачах 3.45–3.49 требуется установить, являются ли заданные множества подпространством в соответствующих пространствах. В случае положительного ответа найти их размерность.

3.45. Множество всех геометрических векторов из $\mathcal{V}_3$:

а) компланарных фиксированной плоскости;

б) удовлетворяющих условию $(\mathbf{x},\ \mathbf{a}) = 0$, где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор;

в) удовлетворяющих условию $|\mathbf{x}| = 1$.

3.46. Множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вида:

а) $\mathbf{x} = (0,\ x_2,\ 0,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,\ x_n)$;

б) $\mathbf{x} = (1,\ x_2,\ 1,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,\ x_n)$.

3.47*. Множество всех векторов произвольного пространства $\mathcal{L}_n$, координаты которых в фиксированном базисе удовлетворяют условиям:

а) $x_1 = x_n$; б) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$; в) $x_1 - x_2 = 1$;

г) $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

или, в матричной форме, $AX = O$, где A — заданная матрица размера $m \times n$.

3.48. Множество всех матриц A порядка n, удовлетворяющих условиям:

а) $A^\top = A$ (симметричные матрицы); б) $\det A = 0$.

3.49. Множество всех функций $f(t) \in C_{[a,\,b]}$ (см. задачу 3.4), удовлетворяющих условиям:

а) $f(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in [a,\ b]$;

б) $f(t_0) = 1$ для некоторого $t_0 \in [a,\ b]$;

в) $f(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1t + a_0$, т.е. $f(t)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

Пусть Q — произвольная система векторов из линейного пространства $\mathcal{L}$.

Линейной оболочкой системы Q называется множество векторов

$$\mathcal{L}(Q) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_s\mathbf{x}_s,\ \mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_s \in Q\}.$$

3.50. Доказать, что

а) $\mathcal{L}(Q)$ — подпространство в $\mathcal{L}$;

б) $\dim\mathcal{L}(Q) = \operatorname{rang} Q$, причем в качестве базиса в $\mathcal{L}(Q)$ можно взять любой базис системы Q.

3.51. Найти размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)$ арифметических векторов $\mathbf{x}_1 = (1,\ 0,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{x}_2 = (0,\ -1,\ 2,\ 0)$. Показать, что $\mathbf{x} = (1,\ -1,\ 4,\ -1) \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)$.

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки заданной системы арифметических векторов:

3.52. $\mathbf{x}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $\mathbf{x}_2 = (2,\ 1,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{x}_4 = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{x}_5 = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

3.53. $\mathbf{x}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1)$, $\mathbf{x}_3 = (2,\ 2,\ 0,\ 0,\ -1)$, $\mathbf{x}_4 = (1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 2)$, $\mathbf{x}_5 = (1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0)$.

3.54*. Показать, что линейная оболочка системы многочленов $-3t^2-1$, $2t^2+t$, $-t$ совпадает с пространством $\mathcal{P}_3$ всех многочленов степени $\leqslant 2$.

Пусть V — произвольная система геометрических векторов. *Геометрическим образом* системы V назовем множество точек, являющихся концами векторов из V, при условии, что все векторы исходят из начала координат.

3.55. Написать уравнение геометрического образа линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ и многообразия $\mathcal{L}(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

3.56. Написать уравнение геометрического образа линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ и многообразия $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)+\mathbf{b}$, если $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

3.57. Задана система уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 &= 1, \\ 3x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + \ \ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что множество решений этой системы есть линейное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^5$.

б) Сдвигом какого пространства получается это линейное многообразие? Найти ранг и какой-нибудь базис этого подпространства.

в) Найти какой-нибудь вектор сдвига.

3. Пространства со скалярным произведением. Действительное линейное пространство $\mathcal{E}$ называется *евклидовым пространством*, если каждой паре векторов x и y из $\mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом $(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ и называемое *скалярным произведением* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = (\mathbf{y},\, \mathbf{x})$;
2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1,\, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2,\, \mathbf{y})$;
3) $(\lambda\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\, \mathbf{y}),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
4) $(\mathbf{x},\, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем $(\mathbf{x},\, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Длиной вектора $\mathbf{x}$ называется число

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\, \mathbf{x})}.$$

Вектор $\mathbf{x}$, длина которого равна единице, называется *нормированным*.

Для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(\mathbf{x},\, \mathbf{y})|^2 \leqslant (\mathbf{x},\, \mathbf{x})(\mathbf{y},\, \mathbf{y}),$$

которое позволяет следующим образом определить угол между ненулевыми векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Ненулевые векторы $\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 0$.

Базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1,\, \ldots,\, \mathbf{e}_n)$ n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Если в пространстве $\mathcal{E}_n$ задан произвольный базис $(\mathbf{f}_1,\, \mathbf{f}_2,\, \ldots,\, \mathbf{f}_n)$, то векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(k-1)}\mathbf{e}_i, \quad k = 2,\, 3,\, \ldots,\, n,$$

где $c_i^{(k-1)} = \dfrac{(\mathbf{f}_k,\, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_i)}$, образуют ортогональный базис в этом пространстве (процесс ортогонализации Шмидта).

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *унитарным*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ из $\mathcal{U}$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое символом $(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ и называемое *скалярным произве-*

дением векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y},\, \mathbf{x})}$;

2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1,\, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2,\, \mathbf{y})$;

3) $(\lambda\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\, \mathbf{y}),\ \lambda \in \mathbb{C}$;

4) $(\mathbf{x},\, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем $(\mathbf{x},\, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

В унитарном пространстве не определяется угол между векторами. Однако все остальные определения и результаты, сформулированные выше для евклидова пространства, остаются справедливыми и для унитарного пространства.

Евклидовы и унитарные пространства в дальнейшем называются *пространствами со скалярным произведением*.

3.58. Доказать следующие свойства скалярного произведения в унитарном пространстве:

а) $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x},\, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x},\, \mathbf{y}_2)$; б) $(\mathbf{x},\, \lambda\mathbf{y}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$;

в) $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,\, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1,\, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_2,\, \mathbf{y})$; г) $(\mathbf{x},\, \mathbf{0}) = 0$.

3.59. Доказать, что базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1,\, \ldots,\, \mathbf{e}_r)$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}_n$ является ортонормированным в том и только том случае, когда выполнено любое из следующих условий:

а) если $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$, то $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n$;

б) если $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, то $x_k = (\mathbf{x},\, \mathbf{e}_k),\ k = 1,\, \ldots,\, n$.

3.60. Доказать, что любая система попарно ортогональных векторов линейно независима.

3.61. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, доказать следующие н е р а в е н с т в а т р е у г о л ь н и к а:

а) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$; б) $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leqslant |\mathbf{x} + \mathbf{y}|$.

3.62. а) Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ формула

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1,\, \ldots,\, y_n)$, задает скалярное произведение (получаемое евклидово пространство арифметических векторов в дальнейшем будем также обозначать символом $\mathbb{R}^n$).

б) Показать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический базис (см. § 3 гл. 2) является ортонормированным.

в) Написать неравенство Коши–Буняковского для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

г) Написать неравенства треугольника в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

3.63. Пусть $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1,\, y_2)$ — произвольные векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^2$. Показать, что скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ можно определить следующими способами:

а) $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$;

б) $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (1, -2)$ и $\mathbf{y} = (5, 1)$ каждым из указанных способов.

3.64. Доказать, что в пространстве $\mathcal{P}_n$ многочленов степени $\leqslant n-1$ скалярное произведение многочленов

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1}$$

и

$$q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_{n-1}t^{n-1}$$

можно определить способами:

а) $(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1}$;

б) $(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k) q(t_k)$, $t_1, \ldots, t_n$ — произвольные попарно различные действительные числа.

Вычислить скалярное произведение многочленов $p(t) = 1 + t + t^2$ и $q(t) = t - 2t^2 + 3t^3$ каждым из указанных способов ($n = 4$), если в случае б) $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

3.65. а) Доказать, что в пространстве $C_{[a, b]}$ соотношение:

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(t) g(t)\, dt$$

задает скалярное произведение.

б) Написать неравенство Коши–Буняковского для этого пространства.

в) Написать неравенства треугольника для этого пространства.

Применить процесс ортогонализации к следующим системам векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (со скалярным произведением из задачи 3.62 а):

3.66. $\mathbf{f}_1 = (1, -2, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (-1, 0, -1)$, $\mathbf{f}_3 = (5, -3, -7)$.

◁ Полагаем $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, -2, 2)$. Вектор $\mathbf{e}_2$ ищем в виде $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - c_1^{(1)}\mathbf{e}_1$. Так как $(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = -3$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 9$, то $c_1^{(1)} = \dfrac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = -\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $\mathbf{e}_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. Наконец, вектор $\mathbf{e}_3$ находим в виде следующей линейной комбинации: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - c_1^{(2)}\mathbf{e}_1 - c_2^{(2)}\mathbf{e}_2$. Вычисляя скалярные произведения $(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) = -3$, $(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) = 1$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$, находим значения коэффициентов $c_1^{(2)} = \dfrac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = -\dfrac{1}{3}$, $c_2^{(2)} = \dfrac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = 1$. Следовательно, $\mathbf{e}_3 = (6, -3, -6)$. ▷

3.67. $\mathbf{f}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{f}_2 = (3,\ 3,\ -1,\ -1)$, $\mathbf{f}_3 = (-2,\ 0,\ 6,\ 8)$.

3.68. $\mathbf{f}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{f}_2 = (4,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{f}_3 = (3,\ 1,\ 1,\ 0)$.

3.69. $\mathbf{f}_1 = (1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{f}_2 = (1,\ 1,\ -5,\ 3)$, $\mathbf{f}_3 = (3,\ 2,\ 8,\ -7)$.

3.70*. $\mathbf{f}_1 = (2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{f}_2 = (7,\ 4,\ 3,\ -3)$, $\mathbf{f}_3 = (1,\ 1,\ -6,\ 0)$, $\mathbf{f}_4 = (5,\ 7,\ 7,\ 8)$.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

3.71. $\mathbf{f}_1 = (1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{f}_2 = (1,\ 1,\ -5,\ 3)$, $\mathbf{f}_3 = (3,\ 2,\ 8,\ -7)$.

3.72. $\mathbf{f}_1 = (2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{f}_2 = (7,\ 4,\ 3,\ -3)$, $\mathbf{f}_3 = (1,\ 1,\ -6,\ 0)$, $\mathbf{f}_4 = (5,\ 7,\ 7,\ 8)$.

Проверить ортогональность следующих систем векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и дополнить их до ортогональных базисов:

3.73*. $\mathbf{e}_1 = (1,\ -2,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{e}_2 = (2,\ 1,\ -3,\ 1)$.

3.74. $\mathbf{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -2)$, $\mathbf{e}_3 = (2,\ 1,\ -1,\ 0,\ 2)$.

3.75. $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$.

3.76. $\mathbf{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{e}_2 = (1,\ 2,\ 3,\ -3)$.

3.77. Пусть L — линейное подпространство в $\mathcal{E}_n$. Доказать, что:

а) любой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$ однозначно представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{y}+\mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in L$ и $\mathbf{z}$ ортогонален к L ($\mathbf{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на L, а $\mathbf{z}$ — *ортогональной составляющей* $\mathbf{x}$ относительно L);

б) если $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_k)$ — базис L, то $\mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\mathbf{e}_i$, где коэффициенты c_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, однозначно находятся из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_i)c_i = (\mathbf{e}_j,\ \mathbf{x}), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ k,$$

а $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Используя результат задачи 3.77, найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ на линейное подпространство L евклидова пространства $\mathbb{R}^n$:

3.78. $\mathbf{x} = (-3,\ 5,\ 9,\ 3)$, L натянуто на векторы: $\mathbf{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_2 = (2,\ -1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_3 = (2,\ -7,\ -1,\ -1)$.

3.79. $\mathbf{x} = (4,\ -1,\ -3,\ 4)$, L натянуто на векторы: $\mathbf{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 3)$.

3.80. $\mathbf{x} = (5, 2, -2, 2)$, L натянуто на векторы: $\mathbf{e}_1 = (2, 1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 3, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 2, 8, 1)$.

3.81. Доказать, что в действительном евклидовом пространстве справедлива теорема Пифагора, а также ей обратная: два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$.

3.82*. Доказать, что теорема Пифагора остается справедливой и в унитарном пространстве: если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$. Показать вместе с тем, что обратное к теореме Пифагора утверждение в этом случае неверно.

§ 2. Линейные операторы

1. Алгебра линейных операторов. *Линейным оператором* в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется всякое отображение $\mathbf{A}$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ пространства $\mathcal{L}$ в себя, обладающее свойствами

$$\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в конечномерном пространстве $\mathcal{L}_n$ и $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — некоторый фиксированный базис. Разложим векторы $\mathbf{A}\mathbf{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$, по базису $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nk}\mathbf{e}_n, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора* $\mathbf{A}$ *в базисе* $\mathfrak{B}$. Матрицу оператора будем иногда обозначать также символом $[\mathbf{A}]$ или $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}}$, если существенно, о каком базисе идет речь.

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, то $Y = AX$, где X, Y — столбцы координат векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и A — матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

Пусть A и A' — матрицы оператора $\mathbf{A}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, а $T = T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ в базису $\mathfrak{B}'$. Тогда формула преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса имеет вид

$$A' = T^{-1}AT. \tag{1}$$

Пример 1. В базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ написать матрицу оператора проектирования $\mathbf{P}_\alpha$ на плоскость α: $x + y + z = 0$.

◁ Оператор проектирования на плоскость α определяется равенством $\mathbf{P}_\alpha\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$, где $\mathbf{x}_\alpha$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на плоскость α. Имеем

$$\mathbf{P}_\alpha\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_n = \mathbf{x} - \text{пр}_n\mathbf{x}\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости α. В рассматриваемом случае $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}_\alpha\mathbf{i} = \mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{P}_\alpha\mathbf{j} = \mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{n} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{P}_\alpha\mathbf{k} = \mathbf{k} - \frac{1}{3}\mathbf{n} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k},$$

откуда

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

Над линейными операторами, действующими в фиксированном пространстве $\mathcal{L}$, вводятся следующие операции:

а) сложение операторов: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$; при этом $[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = A + B$;

б) умножение операторов на числа: $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x})$; при этом $[\lambda\mathbf{A}] = \lambda A$;

в) умножение операторов: $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x})$; при этом $[\mathbf{AB}] = AB$.

Обратным к оператору $\mathbf{A}$ называется оператор $\mathbf{A}^{-1}$ такой, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — *единичный* оператор, реализующий тождественное отображение. Оператор $\mathbf{A}$ имеет обратный (и в этом случае называется *невырожденным*) в том и только том случае, когда его матрица A невырождена (в любом базисе); при этом $[\mathbf{A}^{-1}] = A^{-1}$.

В задачах 3.83–3.89 установить, какие из заданных отображений пространства $\mathcal{V}_3$ в себя являются линейными операторами; выписать их матрицы в прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

3.83. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, λ — фиксированное число.

3.84. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{a}$, λ и $\mathbf{a}$ фиксированы.

3.85. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — заданный единичный вектор. Выяснить геометрический смысл этого отображения.

3.86. $\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор.

3.87. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор.

3.88.** $\mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ — отображение, состоящее в повороте на угол φ вокруг оси, задаваемой единичным вектором $\mathbf{e}$.

3.89. Если $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = (y + z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (3x - y + z)\mathbf{k}.$$

В задачах 3.90–3.95 установить, какие из заданных отображений пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^3$ в себя являются линейными операторами; выписать их матрицы в каноническом базисе:

3.90. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$.

3.91. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$.

3.92. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (0,\ x_2 - x_3,\ 0)$.

3.93. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ -3x_2 + x_3,\ 2x_1 + 3x_3)$.

3.94. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (3x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2 - x_3,\ 3x_2 + 2x_3)$.

3.95. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (3x_1 + 5x_3,\ x_1 + x_3 + 1,\ 3x_2 - 6x_3)$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Найти матрицу $[\mathbf{C}]$ линейного оператора $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ и его явный вид в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$:

3.96. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (2x_2,\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ 4x_1 - x_2 + 5x_3)$,
$\mathbf{B}\mathbf{x} = (-3x_1 + x_3,\ 2x_2 + x_3,\ -x_2 + 3x_3)$.

◁ Так как $\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = (0, -2, 4)$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = (0, 2, 5)$ и $\mathbf{B}\mathbf{e}_1 = (-3, 0, 0)$, $\mathbf{B}\mathbf{e}_2 = (0, 2, -1)$, $\mathbf{B}\mathbf{e}_3 = (1, 1, 3)$, то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -12 & -7 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$[\mathbf{C}] = AB - BA = \begin{pmatrix} -4 & 11 & -3 \\ 6 & -1 & -2 \\ -26 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

По определению матрицы линейного оператора в каноническом базисе $\mathbb{R}^n$ ее столбцы являются наборами компонент образов базисных векторов, т. е.

$$\mathbf{C}\mathbf{e}_1 = (-4, 6, -26), \quad \mathbf{C}\mathbf{e}_2 = (11, -1, -1), \quad \mathbf{C}\mathbf{e}_3 = (-3, -2, 5).$$

Отсюда находим:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1\mathbf{C}\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{C}\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{C}\mathbf{e}_3 = \\ = (-4x_1 + 11x_2 - 3x_3,\ 6x_1 - x_2 - 2x_3,\ -26x_1 - x_2 + 5x_3). \ ▷$$

3.97. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (7x_1 + 4x_3,\ 4x_2 - 9x_3,\ 3x_1 + x_2)$,
$\mathbf{B}\mathbf{x} = (x_2 - 6x_3,\ 3x_1 + 7x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$.

3.98. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (2x_1 - x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$,
$\mathbf{B}\mathbf{x} = (x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_2 - x_3)$.

3.99. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3,\ -3x_1 + 5x_2 - x_3)$,
$\mathbf{B}\mathbf{x} = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3)$.

3.100. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (3x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathbf{B}\mathbf{x} = (x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2)$.

В задачах 3.101–3.105 найти матрицы указанных линейных операторов $\mathbf{A}$, действующих в пространстве $\mathcal{V}_3$, в базисе $\mathfrak{B}'$ из задачи 3.18.

3.101. $\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор.

◁ Пусть $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Тогда матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ имеет вид (см. задачу 3.86):

$$[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}$ в базис $\mathfrak{B}'$ была найдена в задаче 3.18:

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Так как

$$T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

то, используя формулу (1), находим

$$[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot [\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}} \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_3\cos\varphi + a_2\sin\varphi & a_3\sin\varphi + a_2\cos\varphi \\ a_3\cos\varphi - a_2\sin\varphi & 0 & -a_1 \\ -a_3\sin\varphi - a_2\cos\varphi & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

3.102. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, λ — фиксированное число.

3.103. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — заданный единичный вектор.

3.104. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор.

3.105. $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi_0)$ из задачи 3.88, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$; $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.106. В $\mathcal{L}_4$ задан линейный оператор $\mathbf{A}$, матрица которого в некотором базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ равна

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисах:

а) $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$;

б) $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$.

3.107. В $\mathcal{L}_3$ заданы два базиса:
$\mathfrak{B}'$: $\mathbf{e}'_1 = 8\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = -16\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 - 13\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = 9\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$.
$\mathfrak{B}''$: $\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}''_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}''_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.
Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}''$, если его матрица в базисе $\mathfrak{B}'$ имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}.$$

3.108. В пространстве $\mathcal{L}_2$ оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}'$: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор $\mathbf{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$: $\mathbf{e}''_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}''_2 = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$.

3.109. Пусть $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ — некоторый многочлен и $\mathbf{A}$ — линейный оператор. Рассмотрим оператор $p(\mathbf{A})$, определяемый равенством

$$p(\mathbf{A}) = a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{E}.$$

Найти матрицу оператора $p(\mathbf{A})$, если $p(t) = 3t^2 - 2t + 5$, а оператор $\mathbf{A}$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3.110. В пространстве $\mathcal{P}_n$ задан линейный оператор дифференцирования $\mathbf{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$;

б) $1, (t - t_0), \dfrac{(t-t_0)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t_0 \in \mathbb{R}$.

Доказать операторное равенство $\mathbf{D}_n = \mathbf{O}$ ($\mathbf{O}$ — *нулевой* оператор: $\mathbf{Ox} = \mathbf{0}$).

3.111. В пространстве $\mathcal{P}_4$ задано отображение

$$\mathbf{A}p(t) = \int_0^1 K(t, \tau)p(\tau)\,d\tau,$$

где $K(t, \tau)$ — многочлен от двух переменных, степень которого по t не превосходит 3. Доказать, что $\mathbf{A}$ — линейный оператор в $\mathcal{P}_4$; найти его матрицу в базисе $1,\ t,\ t^2,\ t^3$ для случая, когда $K(t, \tau) = t + \tau$.

3.112. В пространстве $\mathcal{P}_4$ задано отображение

$$\mathbf{A}_h p(t) = p(t + h),$$

где h — некоторое фиксированное число. Доказать, что $\mathbf{A}_h$ — линейный оператор, и найти его матрицу в базисе $1,\ t,\ t^2,\ t^3$.

3.113. В пространстве функций, дифференцируемых на всей оси, заданы оператор дифференцирования $\mathbf{D} = \dfrac{d}{dt}$ и оператор $\mathbf{A} = e^{\lambda t}$ умножения на функцию $e^{\lambda t}$. Проверить равенство $\mathbf{DA} - \mathbf{AD} = \lambda\mathbf{A}$.

В задачах 3.114–3.119 требуется установить, какие из заданных линейных операторов в $\mathcal{V}_3$ являются невырожденными, и найти для них явный вид обратных операторов ($\mathbf{e}$ — фиксированный вектор единичной длины, а $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$).

3.114. $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, λ — фиксированное число.

3.115. а) $\mathbf{Ax} = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$; б) $\mathbf{Ax} = [\mathbf{e}, \mathbf{x}]$.

3.116. а) $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$; б)* $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$.

3.117. $\mathbf{Ax} = (y + z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (3x - y + z)\mathbf{k}$.

3.118. $\mathbf{Ax} = 2z\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (2x + 3z)\mathbf{k}$.

3.119. $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ — оператор поворота на угол φ вокруг оси, заданной вектором $\mathbf{e}$.

Установить, какие из заданных линейных операторов в $\mathbb{R}^3$ являются невырожденными, и найти явный вид обратных операторов:

3.120. $\mathbf{Ax} = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$.

3.121. $\mathbf{Ax} = (x_2 + 2x_3,\ -x_2,\ 2x_2 - x_3)$.

3.122. $\mathbf{Ax} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

Множество $T_{\mathbf{A}}$ всех векторов $\mathbf{Ax}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, называется *образом* оператора $\mathbf{A}$. Множество $N_{\mathbf{A}}$ всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, называется *ядром* оператора $\mathbf{A}$. Образ и ядро линейного оператора являются подпространствами в $\mathcal{L}$. При этом размерность образа $r_{\mathbf{A}} = \dim T_{\mathbf{A}}$

называется *рангом*, а размерность ядра $n_{\mathbf{A}} = \dim N_{\mathbf{A}}$ — *дефектом* оператора $\mathbf{A}$. Справедливо равенство $r_{\mathbf{A}} + n_{\mathbf{A}} = n$, где n — размерность пространства $\mathcal{L}$.

3.123. Описать образ и ядро следующих линейных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{V}_3$:

а) $\mathbf{Ax} = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$; б) $\mathbf{Ax} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

3.124. Описать образ и ядро оператора дифференцирования $\mathbf{D}$, действующего в пространстве $\mathcal{P}_n$.

В задачах 3.125–3.127 для указанных линейных операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}^3$, определить ранг и дефект, а также найти базисы образа и ядра.

3.125. $\mathbf{Ax} = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 + x_2)$.

◁ Для представления арифметических векторов и заданного линейного оператора воспользуемся каноническим базисом в $\mathbb{R}^3$. В этом базисе матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению $\mathbf{y} \in T_{\mathbf{A}}$ в том и только том случае, когда найдется вектор $x \in \mathbb{R}^3$ такой, что $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ или, в координатной записи,

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что образ $T_{\mathbf{A}}$ совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы A. Следовательно, ранг оператора $\mathbf{A}$ совпадает с рангом его матрицы, т. е. равен двум, а в качестве базиса $T_{\mathbf{A}}$ может быть выбран любой из базисов системы столбцов матрицы A, например,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $\mathbf{x} \in N_{\mathbf{A}}$ в том и только том случае, когда $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, или, в координатной записи,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что ядро $N_{\mathbf{A}}$ совпадает с подпространством решений однородной системы (3), т. е. дефект оператора $\mathbf{A}$ равен $n_{\mathbf{A}} = n - r_{\mathbf{A}} = 3 - 2 = 1$, а в качестве базиса в $N_{\mathbf{A}}$ может быть выбрана фундаментальная система решений системы (3), например, $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ▷

3.126. $\mathbf{Ax} = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$.

3.127. $\mathbf{Ax} = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$.

3.128. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ невырожденный тогда и только тогда, когда его дефект равен нулю, а следовательно, ранг совпадает с размерностью пространства.

2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Пусть число λ и вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, таковы, что

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}. \tag{4}$$

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора $\mathbf{A}$, а вектор $\mathbf{x}$ — собственным вектором этого оператора, соответствующим собственному числу λ.

В конечномерном пространстве $\mathcal{L}_n$ векторное равенство (4) эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E)X = O, \quad X \neq O. \tag{5}$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора $\mathbf{A}$ в том и только том случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е. λ есть корень многочлена $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, называемого *характеристическим многочленом* оператора $\mathbf{A}$. Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (5).

Пример 2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$ проектирования на плоскость Oxy в пространстве $\mathcal{V}$.

◁ 1. Геометрическое решение. Равенство $\mathbf{P}_{Oxy}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, означает, что ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на плоскость Oxy коллинеарна самому вектору $\mathbf{x}$. Но это возможно лишь в двух случаях.

а) Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ компланарен плоскости Oxy. Для всех таких векторов $\mathbf{P}_{Oxy}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, т. е. все они являются собственными векторами оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 1$.

б) Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ортогонален плоскости Oxy. Для всех таких векторов $\mathbf{P}_{Oxy}\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$, т. е. все они являются собственными векторами оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = 0$.

В результате получаем, что оператор $\mathbf{P}_{Oxy}$ имеет два собственных числа: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Соответствующие им собственные векторы:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1&: \quad \mathbf{x}^{(\lambda_1)} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}^{(\lambda_1)} \neq 0, \\ \lambda_2 = 0&: \quad \mathbf{x}^{(\lambda_2)} = z\mathbf{k}, \qquad\quad \mathbf{x}^{(\lambda_2)} \neq 0. \end{aligned}$$

2. Аналитическое решение. Матрица оператора $\mathbf{P}_{Oxy}$ в прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(P - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ — собственные числа оператора.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$. При $\lambda = 1$ система (5) принимает вид

$$(P - E)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а общее решение:

$$xE_1 + yE_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$, имеют вид

$$\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

где x и y — произвольные числа, не равные одновременно нулю.

Аналогично рассматривается случай $\lambda_2 = 0$. При этом получим

$$\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = z\mathbf{k},$$

где z — произвольное число, отличное от нуля. $\triangleright$

В задачах 3.129–3.133 найти собственные числа и собственные векторы операторов в $\mathcal{V}_3$. Решить эти задачи геометрически, т. е. в инвариантной форме, не связанной с выбором какого-либо базиса в $\mathcal{V}_3$ (см. пример 2, геометрическое решение). После этого в задачах 3.129–3.131 провести аналитическое решение.

3.129. $\mathbf{A}\mathbf{x} = a\mathbf{x}$, a — фиксированное число.

3.130. $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{i})\mathbf{i}$ — оператор проектирования на ось Ox.

3.131. $\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{i}, \mathbf{x}]$.

3.132. $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ — оператор поворота на угол φ вокруг оси, заданной вектором $\mathbf{e}$.

3.133. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$ — оператор зеркального отражения в плоскости с нормальным вектором $\mathbf{e}$.

В задачах 3.134–3.143 найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных своими матрицами.

3.134. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **3.135.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.136. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **3.137.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

3.138. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **3.139.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

3.140. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.141.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

3.142. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. **3.143.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.144. В пространстве $\mathcal{V}_2$ геометрических векторов на плоскости задан оператор поворота $\mathbf{U}(\varphi)$ на угол $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ вокруг начала координат. Проверить (геометрически и аналитически), что при $\varphi \neq 0, \pi$ этот оператор не имеет собственных чисел. Этот пример показывает, что линейный оператор в действительном пространстве может не иметь собственных чисел (и собственных векторов).

3.145. В комплексном пространстве $\mathcal{L}_2$ оператор $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\varphi)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Найти его собственные числа и собственные векторы. Сравнить полученные результаты с результатами задачи 3.144.

3.146*. Пусть оператор $\mathbf{A}$, действующий в комплексном пространстве $\mathcal{L}_n$, задан в некотором базисе матрицей с действительными элементами. Доказать, что:

а) если λ — собственное число, то $\overline{\lambda}$ — также собственное число;

б) если X — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, то $\overline{X}$ — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу $\overline{\lambda}$.

3.147*. В комплексном пространстве $\mathcal{L}_3$ найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного вещественной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.148. Показать, что если $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному числу λ, то он является собственным вектором оператора $p(\mathbf{A}) = a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{E}$, соответствующим собственному числу $p(\lambda)$.

3.149. Доказать, что:

а) оператор $\mathbf{A}$ имеет обратный в том и только в том случае, когда он не имеет нулевых собственных чисел;

б) если оператор $\mathbf{A}$ имеет обратный, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы. Как связаны между собой собственные числа этих операторов?

3. Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением. Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор, действующий в пространстве со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Линейный оператор $\mathbf{A}^*$ называется *сопряженным к оператору* $\mathbf{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Для всякого оператора $\mathbf{A}$ сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ существует и единствен.

Если оператор $\mathbf{A}$ в ортонормированном базисе имеет матрицу $A = (a_{ij})$, то сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ в том же базисе имеет матрицу $A^* = (a^*_{ij})$, где $a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (матрица A^* называется сопряженной к матрице A). В частном случае евклидова пространства $A^* = A^\top$.

Пример 3. Линейный оператор $\mathbf{A}\colon \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ в базисе $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ имеет матрицу

$$[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ и базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ортонормирован. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

◁ Так как базис $\mathfrak{B}'$ не ортонормирован (проверьте!), то, чтобы воспользоваться утверждением о связи матриц операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$, необходимо найти матрицу $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}}$. Имеем

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} \cdot [\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}, [\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$[\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot [\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}} \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

3.150. Доказать, что операция * перехода от оператора $\mathbf{A}$ к сопряженному $\mathbf{A}^*$ обладает следующими свойствами:

а) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

◁ Запишем цепочку равенств, верных для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$,

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{A}^*\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y}, (\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x})} = \\ = \overline{\overline{((\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}, \mathbf{y})}} = ((\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

т.е. $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = \big((\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}, \mathbf{y}\big)$. Отсюда, в силу произвольности векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, получаем $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$ (показать подробнее!). ▷

б) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$; в) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$; г) $(\alpha\mathbf{A})^* = \overline{\alpha}\mathbf{A}^*$; д) $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$, если $\mathbf{A}$ невырожден.

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ имеет матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе $\mathfrak{B}'$, если векторы $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ заданы столбцами своих координат в некотором ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$:

3.151. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.152. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.153. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В пространстве многочленов $\mathcal{P}_3$ задано скалярное произведение

$$(f,\, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2, \tag{6}$$

где $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$. Найти матрицы оператора дифференцирования $\mathbf{D} = \dfrac{d}{dt}$ и сопряженного оператора $\mathbf{D}^*$ в базисе $\mathfrak{B}$:

3.154. $\mathfrak{B} = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t,\; t^2 - 1,\; \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right)$.

3.155. $\mathfrak{B} = \left(1,\; t,\; \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$.

3.156. Найти сопряженный оператор для поворота евклидовой плоскости на угол α вокруг начала координат против часовой стрелки.

3.157. Пусть Oxy — декартова прямоугольная система координат на плоскости и $\mathbf{A}$ — оператор проектирования на ось Ox параллельно прямой l: $ax + by = 0$ $(a \neq 0)$. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$.

3.158. Пусть Oxy — декартова прямоугольная система координат на плоскости и $\mathbf{A}$ — оператор отражения точек плоскости относительно прямой l: $ax+by = 0$. Найти матрицу оператора $\mathbf{A}^*$.

Понятие сопряженного оператора может быть использовано при исследовании совместности неоднородной системы линейных уравнений. Пусть $AX = B$ — матричная запись такой системы, причем $m = n$. Тогда X и B — столбцы координат соответствующих арифметических векторов в каноническом базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а квадратной матрице A в этом же базисе соответствует некоторый линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Система $A^*X = O$, где A^* — матрица сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в каноническом базисе, называется *сопряженной* однородной системой. Верна следующая теорема Фредгольма: *для того чтобы система $AX = B$ была совместна, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбец B был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы.*

3.159.** Доказать теорему Фредгольма.

Используя теорему Фредгольма, исследовать совместность следующих систем линейных уравнений:

3.160. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1,\\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 5,\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

3.161. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

3.162. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1,\\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

3.163. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

3.164*. Доказать альтернативу Фредгольма: либо система $AX = B$ совместна при любой правой части B, либо сопряженная однородная система $A^*X = 0$ имеет ненулевые решения.

3.165. Какие из систем линейных уравнений, указанных в задачах 3.160–3.163, совместны при любой правой части?

Линейный оператор $\mathbf{H}$ в пространстве со скалярным произведением называется *самосопряженным*, если $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$. Самосопряженный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве называется также *эрмитовым* (*симметричным*). Для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был эрмитовым (симметричным), необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяла соотношению $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ $(a_{ij} = a_{ji})$. Такие матрицы называются *эрмитовыми* (*симметричными*).

Линейный оператор $\mathbf{U}$ в унитарном (евклидовом) пространстве называется *унитарным* (*ортогональным*), если

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}.$$

Для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был унитарным (ортогональным) необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяла соотношению $A^{-1} = A^*$ $(A^{-1} = A^\top)$. Такие матрицы называются *унитарными* (*ортогональными*).

3.166. Доказать следующие свойства самосопряженного оператора:

а) собственные числа действительны;

б) собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

3.167. Доказать следующие свойства унитарного оператора:

а) собственные числа по модулю равны единице;

б) для того чтобы линейный оператор был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил ортонормированный базис снова в ортонормированный базис;

в) унитарный оператор сохраняет скалярное произведение;

г) унитарный оператор сохраняет длины векторов.

3.168. Показать, что в пространстве $\mathcal{V}_3$ следующие операторы являются симметричными:

а) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, λ — фиксированное число;

б) $\mathbf{Ax} = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$;

в) $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$.

3.169. Показать, что в пространстве многочленов $\mathcal{P}_3$ со скалярным произведением (6) следующие операторы являются симметричными:

$$\text{а) } f(t) \to f(-t); \quad \text{б) } f(t) = t^n f\left(\frac{1}{t}\right).$$

3.170. Показать, что в пространстве $\mathcal{V}_2$ оператор $\mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ поворота на угол φ вокруг оси, заданной единичным вектором $\mathbf{e}$ (см. задачу 3.88), является ортогональным.

3.171. Показать, что операторы задачи 3.168 являются ортогональными.

4. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Если оператор $\mathbf{A}$, действующий в пространстве $\mathcal{L}_n$, имеет n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то в базисе из этих векторов матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Пример 4. Привести матрицу A линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

◁ Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Следовательно, матрица может быть приведена к диагональному виду. Находим соответствующие собственные векторы. При $\lambda = 2$ система (5) принимает вид

$$(A - 2E)X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$-x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 0,$$
$$-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0.$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $E_1 = (2,\ 1,\ -2)^\top$. Аналогично, при $\lambda = 1$ система (5) принимает вид

$$(A-E)X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{aligned} x_2 \qquad\qquad &= 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы находим второй собственный вектор $E_2 = (1,\ 0,\ -1)^\top$.

Наконец, при $\lambda = -1$ из системы

$$(A+E)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{aligned} x_1 + \ x_2 &= 0, \\ 3x_2 &= 0, \end{aligned}$$

находим третий собственный вектор $E_3 = (0,\ 0,\ 1)^\top$.

Найденные векторы E_1, E_2, E_3 образуют искомый базис, в котором матрица A линейного преобразования имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

В задачах 3.172–3.179 выяснить, какие из заданных матриц линейных операторов можно диагонализировать переходом к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему диагональную форму матрицы.

3.172. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **3.173.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

3.174. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.175.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3.176. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. **3.177.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.178. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.179.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.180*. Вычислить A^m, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

3.181. $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$. **3.182.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$.

Матрица A самосопряженного оператора всегда приводится к диагональному виду. При этом, используя понятие унитарного оператора, ее можно представить в виде

$$A = UDU^{-1},$$

где U — матрица унитарного оператора, осуществляющего переход от исходного базиса к базису из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, а D — диагональная матрица вида (7).

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен неоднозначно):

3.183. $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. **3.184.** $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

3.185. $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **3.186.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Для данной матрицы A найти диагональную матрицу D и унитарную (ортогональную) матрицу U такие, что $A = UDU^{-1}$:

3.187. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. **3.188.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

3.189. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4i & 0 \\ -4i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.190.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3.191. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 3. Билинейные и квадратичные формы

1. Линейные формы. Говорят, что в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана *линейная форма*, если каждому вектору $x \in \mathcal{L}$ поставлено в соответствие число $f(\mathbf{x})$, причем выполнены условия

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L},$$
$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}$ функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, является линейной формой:

3.192. $f(\mathbf{x}) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$, $\mathcal{L} = C_{[a,b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$.

3.193. $f(\mathbf{x}) = x(t_0)$, $\mathcal{L} = C_{[a,b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$, $t_0 \in [a, b]$.

3.194. $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_3$ — фиксированный вектор.

3.195. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{abx}$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}_3$ — фиксированные векторы.

3.196. $f(\mathbf{x}) = x'(t_0)$, $\mathcal{L} \in C^{(1)}_{[a,b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$, $t_0 \in [a, b]$.

3.197. Пусть в пространстве $\mathcal{L}$ фиксирован базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Пусть, далее, $f(\mathbf{e}_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $f(\mathbf{x})$ — линейная форма в $\mathcal{L}$.

а) Доказать, что $f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

б) Обозначим $\mathcal{L}^*$ множество линейных форм $f(\mathbf{x})$, в котором введены операции сложения и умножения на число следующим образом:

$$g = f_1 + f_2, \quad \text{если} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\big(g(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})\big);$$
$$h = \lambda f, \quad \text{если} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\big(h(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})\big).$$

Доказать, что $\mathcal{L}^*$ — линейное пространство.

в) Доказать, что $\dim \mathcal{L}^* = n$ (пространство $\mathcal{L}^*$ называется *сопряженным* к пространству $\mathcal{L}$).

3.198. Доказать, что:

а) если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то формула $f(\mathbf{x}) = x_1$ определяет линейную форму;

б) всякую не равную тождественно нулю линейную форму $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, надлежащим выбором базиса можно привести к виду $f(\mathbf{x}) = x_1$, где x_1 — первая координата вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

2. Билинейные формы. Числовая функция $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})\colon \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, заданная на действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$, называется *билинейной формой*, если при фиксированном $\mathbf{y}$ она является линейной формой по $\mathbf{x}$, а при фиксированном $\mathbf{x}$ — линейной формой по $\mathbf{y}$. Билинейная форма называется *симметрической*, если $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$. Если в пространстве $\mathcal{L}_n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то матрица $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, называется *матрицей билинейной формы* $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$.

Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}$ функция $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является билинейной формой:

3.199. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{y})$, где f_1, f_2 — линейные формы в $\mathcal{L}$.

3.200. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(s, t) x(s) y(t)\, ds\, dt$, где $\mathcal{L} = C_{[a, b]}$, $\mathbf{x} = x(t) \in C_{[a, b]}$, $\mathbf{y} = y(t) \in C_{[a, b]}$, $K(s, t)$ — некоторая непрерывная функция двух переменных.

3.201. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, где $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})$ — некоторая матрица.

3.202. Пусть в пространстве $\mathcal{L}_n$ задан базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — билинейная форма в $\mathcal{L}_n$ и $A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$. Доказать, что:

а) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, где x_i, y_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\mathfrak{B}$;

б) если $A' = (a'_{ij})$ — матрица билинейной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, то $A' = T^\top A T$, где $T = T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если:

3.203. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, -1, -1)$.

3.204. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ задана билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B}'$, если:

3.205. $n = 4$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4$,

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.206. $n = 2$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$,

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.207. Доказать, что скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ является билинейной формой.

3. Квадратичные формы. Пусть $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симметрическая билинейная форма. Форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, которая получается из $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, называется *квадратичной.* При этом $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется билинейной формой, *полярной* к квадратичной форме $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Если в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в этом базисе имеет вид

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица квадратичной формы и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

Пусть в некотором базисе выражение (1) квадратичной формы не содержит произведений x_ix_j $(i \neq j)$, т. е.

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2. \tag{2}$$

Тогда выражение (2) называется *каноническим видом* квадратичной формы. В частности, если $\lambda_i = \pm 1, 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то получаем *нормальный вид* квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Для всякой квадратичной формы существует такой базис $\mathfrak{B}'$, в котором она имеет канонический (и даже нормальный) вид.

Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Метод Лагранжа выделения полных квадратов. Пусть квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в базисе $\mathfrak{B}$ имеет вид (1). Если все коэффициенты a_{ii} (при квадратах x_i^2), $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю и в то же время форма не равна тождественно нулю, то отлично от нуля хотя бы одно произведение, например $2a_{12}x_1x_2$. Выполним преобразование базиса, при котором координаты векторов в старом и новом базисах связаны формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + x'_2, \\ x_2 &= x'_1 - x'_2, \\ x_i &= x'_i, \quad i = 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$, и так как, по предположению, $a_{11} = a_{22} = 0$, то коэффициент при $x_1'^2$ отличен от нуля.

Таким образом, всегда найдется такой базис $\mathfrak{B}$, в котором в записи (1) хотя бы один коэффициент при квадрате отличен от нуля.

В дальнейшем считаем, что $a_{11} \neq 0$. (Если $a_{11} = 0$, то отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-нибудь другой координаты, и к рассматриваемому случаю можно прийти, иначе занумеровав векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, что также является некоторым преобразованием базиса.)

Рассмотрим часть квадратичной формы, содержащую x_1, т. е.

$$\sigma_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Дополним эту сумму до полного квадрата:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \gamma,$$

где γ есть алгебраическая сумма членов, не зависящих от x_1. Если теперь сделать замену

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x'_i &= x_i, \quad i = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

то квадратичная форма в новом базисе примет вид

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + \sum_{i,\, j=2}^{n} a'_{ij}x'_ix'_j = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + A_1.$$

В полученной форме выделено слагаемое $\dfrac{1}{a_{11}}x_1'^2$, а оставшаяся часть A_1 является квадратичной формой в $\mathcal{L}_{n-1}$. Далее рассуждения повторяются для квадратичной формы $A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, и т. д.

Пример 1. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2.$$

◁ 1-е преобразование: $x_1 = x'_2$, $x_2 = x'_1$, $x_3 = x'_3$. Тогда получим

$$A = -x_1'^2 + 2x'_1x'_2 + 4x'_2x'_3 - 8x_3'^2.$$

2-е преобразование: $x_1'' = -x_1' + x_2'$, $x_2'' = x_2'$, $x_3'' = x_3'$. Получим новое выражение для квадратичной формы:

$$A = -x_1''^2 + x_2''^2 + 4x_2''x_3'' - 8x_3''^2.$$

3-е преобразование: $x_1''' = x_1''$, $x_2''' = x_2'' + 2x_3''$, $x_3''' = x_3''$, и форма принимает канонический вид:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -x_1'''^2 + x_2'''^2 - 12x_3'''^2.$$

При этом

$$\begin{aligned} x_1''' &= x_1 - x_2, \\ x_2''' &= x_1 \qquad\quad + 2x_3, \\ x_3''' &= \qquad\qquad\quad x_3. \ \triangleright \end{aligned}$$

М е т о д с о б с т в е н н ы х в е к т о р о в. Будем рассматривать квадратичную форму (1) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как ее матрица $A = (a_{ij})$ симметрична, то она может быть представлена в виде $A = UDU^\top$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A, а U — ортогональная матрица (см. пп. 3 и 4 § 2). Столбцы матрицы U являются координатами некоторого ортонормированного базиса $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, в котором матрица A имеет диагональный вид D, и, следовательно, квадратичная форма — искомый канонический вид. Соответствующее преобразование координат определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$, заданную в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, к каноническому виду. Написать этот канонический вид.

$\triangleleft$ Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(Обратить внимание, как получаются элементы a_{ij} $(i \neq j)$ из явного вида квадратичной формы!) Собственные числа этой матрицы суть $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Соответствующие ортонормированные собственные векторы:

$$\mathbf{e}_1' = \left(\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}\right),$$
$$\mathbf{e}_2' = \left(-\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}\right),$$
$$\mathbf{e}_3' = \left(\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right),$$

и, следовательно,

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad U^\top = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ заданная квадратичная форма имеет вид $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2$, а соответствующее преобразование координат:

$$x_1 = \frac{2x_1' - x_2' + 2x_3'}{3},$$
$$x_2 = \frac{2x_1' + 2x_2' - x_3'}{3},$$
$$x_3 = \frac{-x_1' + 2x_2' + 2x_3'}{3}. \ \triangleright$$

3.208. Доказать, что всякая квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ может быть записана в виде $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение в $\mathcal{E}_n$ и $\mathbf{A}$ — некоторый оператор.

3.209. Доказать, что полярная билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ однозначно определяется своей квадратичной формой $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

3.210. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

3.211. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

3.212. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

3.213. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

3.214. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

3.215. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

3.216. $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, определенная в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для всякого $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad (< 0).$$

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и

$$D_1 = a_{11}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— последовательность главных миноров матрицы A.

Критерием положительной определенности квадратичной формы является следующее утверждение (критерий Сильвестра): *для того чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы A были положительны, т. е. $D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

3.217*. Доказать: для того чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В задачах 3.218–3.224 определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определенными, а какие нет:

3.218. $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$.

3.219. $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$.

3.220. $x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

3.221. $12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$.

3.222. $9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

3.223. $2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

3.224. $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

3.225. Доказать, что квадрат длины вектора $|\mathbf{x}|^2$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ является положительно определенной квадратичной формой.

4. Кривые и поверхности второго порядка. *Гиперповерхностью второго порядка* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{x}) + c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0, \qquad (3)$$

где в левой части стоит многочлен второй степени от n переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Задача классификации гиперповерхностей второго порядка состоит в нахождении такого базиса в $\mathbb{R}^n$, в котором левая часть уравнения в новых переменных x'_1, x'_2, ..., x'_n имеет наиболее простой вид. Для этого сначала ищется такое ортогональное преобразование, что в новых переменных квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ имеет канонический вид. В новом базисе уравнение (3) записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k {x'_k}^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k + c = 0,$$

причем не все λ_k, $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю. Если $\lambda_k \neq 0$, то переносом начала координат можно уничтожить линейный член:

$$\lambda_k {x'_k}^2 + 2b_k x'_k = \lambda_k \left(x'_k + \frac{b_k}{\lambda_k}\right)^2 - \frac{b_k^2}{\lambda_k} = \lambda_k x''_k - \frac{b_k^2}{\lambda_k}.$$

После этих преобразований получаем (изменяя нумерацию переменных, если это необходимо)

$$\lambda_1 {x''_1}^2 + \ldots + \lambda_s {x''_s}^2 + b''_{s+1}x''_{s+1} + b''_n x''_n + c'' = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется ***каноническим уравнением*** гиперповерхности второго порядка.

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению (3), называется *кривой второго порядка*. В этом случае каноническое уравнение (4) может принимать один из следующих видов (в переменных x, y):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
2) $\lambda_1 x^2 + by = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$;
3) $\lambda_1 x^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$.

Пример 3. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

◁ Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа: $\lambda_1 = 8$ и $\lambda_2 = -2$; собственные векторы: $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Выполняя преобразование

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

получаем

$$8x'^2 - 2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Так как λ_1 и λ_2 отличны от нуля, то по каждой из новых переменных x' и y' можно выделить полный квадрат:

$$8x'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' = 8\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4,$$
$$-2y'^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}y' = -2\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9.$$

Заменой переменных

$$x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

соответствующей сдвигу по каждой из координатных осей, получим

$$8x''^2 - 2y''^2 - 8 = 0, \quad \text{или} \quad x''^2 - \frac{1}{4}y''^2 = 1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы. Результирующее преобразование координат имеет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') + 2,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') - 1,$$

а каноническая система координат — $(O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, где

$$O'(2, -1), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}. \ \triangleright$$

В задачах 3.226–3.231 написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

3.226. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$

3.227. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$

3.228. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$

3.229. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$

3.230. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$

3.231. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

3.232. Кривая второго порядка определяется уравнением:

а) $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$; б) $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 1 = 0$.

Определить ее тип при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$.

Множество точек евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению (3), называется *поверхностью второго порядка.* Каноническое уравнение (4) в этом случае принимает один из следующих видов (в переменных x, y, z):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$,

2) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$,

3) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$,

4) $\lambda_1 x^2 + by = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$,

5) $\lambda_1 x^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$.

Поверхности типов 3)–5) являются цилиндрами (эллиптическим, гиперболическим и т. д. в зависимости от типа кривой в сечении плоскостью $z = 0$).

Пример 4. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

◁ Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$, а собственные векторы:

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \ \mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right), \ \mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Выполнив преобразование

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(\ \ 3x' + \ y' + 2\sqrt{2}z'), \\ y &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x' + \ y' + 2\sqrt{2}z'), \\ z &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(\qquad - 4y' + \ \sqrt{2}z'), \end{aligned}$$

получаем

$$9{x'}^2 - 9{y'}^2 - 72z' + 72 = 0.$$

Преобразование сдвига необходимо выполнить лишь по переменной z':

$$-72z' + 72 = -72(z' - 1) = -72z''.$$

Второе преобразование координат имеет вид

$$x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = z' - 1,$$

откуда окончательно получаем каноническое уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x''^2}{8} - \frac{y''^2}{8} = z''.$$

Результирующее преобразование координат таково:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(\ \ 3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z'') + \frac{2}{3}, \\ y &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z'') + \frac{2}{3}, \\ z &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(\qquad -4y'' + \sqrt{2}z'') + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

а каноническая система координат — $(O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, где

$$O'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \ \triangleright$$

В задачах 3.233–3.240 написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

3.233. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$

3.234. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0.$

3.235. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$

3.236. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$

3.237. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0.$

3.238. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$

3.239. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0.$

3.240. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

§ 4. Элементы тензорной алгебры

1. Понятие тензора. Будем рассматривать выражения вида a_i, b^i_j, c^{ij}_k и т. д., где индексы i, j, k принимают значения 1, 2, ..., n. Всюду в этом параграфе, если в выражении какой-либо индекс стоит вверху и внизу, то будем предполагать, что производится суммирование по этому индексу. Например,

$$a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + \ldots + a^n_n,$$

$$b^i_{jik} = \sum_{\alpha=1}^{n} b^{\alpha}_{j\alpha k},\; a^p_{ij} b^k_p = \sum_{\alpha} a^{\alpha}_{ij} b^k_{\alpha},\; c^{ij}_{ijk} = \sum_{\alpha,\,\beta} c^{\alpha\beta}_{\alpha\beta k}$$

и т. д. (*сокращенные обозначения суммирования*).

Через $\mathcal{L}_n$ (или просто $\mathcal{L}$) будем обозначать линейное пространство размерности n над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Изложение в этом параграфе проводится для поля $\mathbb{R}$. Все рассуждения для поля $\mathbb{C}$ также справедливы и устанавливаются аналогично. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

будем обозначать (a_{ij}) или $\|a_{ij}\|$.

Пусть $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — два различных базиса в $\mathcal{L}_n$. Через $S \equiv S_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ обозначим *матрицу перехода* от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$, т. е. матрицу

$$S_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} s^1_1 & \ldots & s^1_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ s^n_1 & \ldots & s^n_n \end{pmatrix} = \|s^i_j\|,$$

где $\mathbf{e}'_i = s^1_i \mathbf{e}_1 + \ldots + s^n_i \mathbf{e}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} s^j_i \mathbf{e}_j,\; i = 1, 2, \ldots, n.$

Элементы обратной к S матрицы S^{-1} обозначим $\widetilde{s}^i_j$, т. е. $S^{-1} = \|\widetilde{s}^i_j\|$.

В е к т о р. Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ обозначим x^1, x^2, ..., x^n (здесь мы пишем индексы вверху, а не внизу для удобства, чтобы можно было применять сокращенные обозначения суммирования). Разложение вектора по базису $\mathfrak{B}$ записывается в виде $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ (суммирование по i). В другом базисе $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ имеем: $\mathbf{x} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}$ (здесь на самом деле следовало бы писать $\mathbf{e}'_{i'}$, но второй штрих не пишут для упрощения записи). Формулы преобразования координат при переходе от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ в сокращенных обозначениях имеют следующий вид:

$$x^{i'} = \widetilde{s}^{i'}_i x^i \tag{1}$$

(здесь предполагается суммирование по i, а $x^{i'}$ обозначает i'-ю координату вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$).

Приведенные выше рассуждения показывают, что вектор *можно рассматривать как совокупность наборов чисел* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, *заданных в каждом базисе и изменяющихся при переходе от базиса к базису по закону* (1).

Линейная форма. Напомним, что линейной формой называется отображение $\alpha\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, линейное в обычном смысле, т. е. удовлетворяющее равенствам $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x})+\alpha(\mathbf{y})$ и $\alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\alpha(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис пространства $\mathcal{L}$, то положим $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$. Ввиду линейности α имеем:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n) = x^1\alpha(\mathbf{e}_1)+\ldots+x^n\alpha(\mathbf{e}_n) = \alpha_1x^1+\ldots+\alpha_nx^n.$$

В сокращенных обозначениях суммирования получаем: $\alpha(x) = \alpha_ix^i$. Итак, линейная форма в каждом базисе задается строчкой $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Пусть $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — другой базис пространства $\mathcal{L}$. Тогда, по определению матрицы перехода,

$$\mathbf{e}_{i'} = s^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{2}$$

Отсюда $\alpha_{i'} = \alpha(\mathbf{e}_{i'}) = \alpha(s^i_{i'}\mathbf{e}_i) = s^i_{i'}\alpha(\mathbf{e}_i) = s^i_{i'}\alpha_i$, т. е.

$$\alpha_{i'} = s^i_{i'}\alpha_i. \tag{3}$$

Таким образом, линейную форму *можно рассматривать как совокупность строчек* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *заданных в каждом базисе и изменяющихся при изменении базиса по закону* (3).

Определение. Пусть в каждом базисе $\mathfrak{B}$ линейного пространства $\mathcal{L}_n$ для некоторых неотрицательных чисел p, q задан упорядоченный набор T из n^{p+q} элементов $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), где индексы изменяются от 1 до n. Тогда $T = (T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p})$ называется *p раз ковариантным* и *q раз контравариантным тензором* (или *тензором типа* (p, q)), если при переходе от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ числа $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ изменяются по закону

$$T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p} = s^{i_1}_{i'_1}\ldots s^{i_p}_{i'_p}\,\widetilde{s}^{j'_1}_{j_1}\ldots\widetilde{s}^{j'_q}_{j_q}\,T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}. \tag{4}$$

(Напомним, что правая часть этого равенства представляет собой сумму по индексам $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$.) Числа $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ называются *компонентами* (или *координатами*) тензора T.

Замечание 1. Формулы (4) можно интерпретировать как *независимость тензора от выбора базиса в линейном пространстве.*

Замечание 2. Формула (1) получается из общей формулы (4) при $p = 0$, $q = 1$, поэтому *вектор можно рассматривать как тензор типа* (0, 1).

Замечание 3. Формула (3) получается из общей формулы (4) при $p = 1$, $q = 0$, поэтому *линейную форму можно рассматривать как тензор типа* (1, 0). Такие тензоры называют *ковекторами.*

Пример 1. Выписать все слагаемые, описывающие изменение координат тензора A_k^{ij} в двумерном пространстве $\mathcal{L}_2$.

◁ Из формул (4) получаем: $A_{k'}^{i'j'} = \widetilde{s}_i^{i'}\widetilde{s}_j^{j'}s_{k'}^kA_k^{ij}$. Так как $n = 2$, то

$$A_{k'}^{i'j'} = \widetilde{s}_1^{i'}\widetilde{s}_1^{j'}s_{k'}^1A_1^{11} + \widetilde{s}_1^{i'}\widetilde{s}_1^{j'}s_{k'}^2A_2^{11} + \widetilde{s}_1^{i'}\widetilde{s}_2^{j'}s_{k'}^1A_1^{12} + \widetilde{s}_1^{i'}\widetilde{s}_2^{j'}s_{k'}^2A_2^{12} + \\ + \widetilde{s}_2^{i'}\widetilde{s}_1^{j'}s_{k'}^1A_1^{21} + \widetilde{s}_2^{i'}\widetilde{s}_1^{j'}s_{k'}^2A_2^{21} + \widetilde{s}_2^{i'}\widetilde{s}_2^{j'}s_{k'}^1A_1^{22} + \widetilde{s}_2^{i'}\widetilde{s}_2^{j'}s_{k'}^2A_2^{22}. \ \triangleright$$

Пример 2. Доказать, что линейный оператор можно рассматривать как тензор типа (1, 1).

◁ Пусть A: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор и $\|a_j^i\|$ — его матрица в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Требуется доказать, что таблица $\|a_j^i\|$ при переходе к другому базису меняется по закону (1). Воспользуемся тем, что $A' = S^{-1}AS$, где S — матрица перехода, а A и A' — матрицы оператора в старом и новом базисах. Тогда

$$a_{j'}^{i'} = \sum_{i,\,j}(S^{-1})_{i'i}(A)_{ij}(S)_{jj'} = \widetilde{s}_i^{i'}a_j^is_{j'}^j = \widetilde{s}_i^{i'}s_{j'}^ja_j^i,$$

что и требовалось доказать. ▷

Пример 3. Пусть A: $\mathcal{L}\times\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейное по каждому аргументу отображение, т. е. отображение, удовлетворяющее условиям

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y},\,\mathbf{z}) = A(\mathbf{x},\,\mathbf{z}) + A(\mathbf{y},\,\mathbf{z}), \quad A(\mathbf{x},\,\mathbf{y}+\mathbf{z}) = A(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) + A(\mathbf{x},\,\mathbf{z}),$$
$$A(\lambda\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x},\,\mathbf{y}), \quad A(\mathbf{x},\,\lambda\mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x},\,\mathbf{y})$$

при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Доказать, что A — тензор. Какого типа этот тензор?

◁ Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис пространства $\mathcal{L}$. Разложим вектор $A(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j)$ по этому базису: $A(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j) = a_{ij}^k\mathbf{e}_k$. Докажем, что (a_{ij}^k) — тензор типа (2, 1). Действительно, в новом базисе $A(\mathbf{e}_{i'},\,\mathbf{e}_{j'}) = a_{i'j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'}$, а значит,

$$a_{i'j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'} = A(\mathbf{e}_{i'},\,\mathbf{e}_{j'}) = A(s_{i'}^i\mathbf{e}_i,\,s_{j'}^j\mathbf{e}_j) = s_{i'}^is_{j'}^jA(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j) = s_{i'}^is_{j'}^ja_{ij}^k\mathbf{e}_k.$$

Так как $\mathbf{e}_k = \widetilde{s}_k^{k'}\mathbf{e}_{k'}$, то $a_{i'j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'} = s_{i'}^is_{j'}^ja_{ij}^k\widetilde{s}_k^{k'}\mathbf{e}_{k'}$. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ получаем: $a_{i'j'}^{k'} = s_{i'}^is_{j'}^j\widetilde{s}_k^{k'}a_{ij}^k$, что и требовалось доказать. ▷

3.241. Доказать, что квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = a_{ij}x^i x^j$ является тензором типа (2, 0).

3.242. Доказать, что билинейная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_{ij}x^i y^j$ является тензором типа (2, 0).

3.243. Пусть T: $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ — *трилинейная форма*, т. е. функция $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ трех векторов, линейная по каждому аргументу (например, линейность по первому аргументу означает, что $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = T(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{z})+T(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $T(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$). Доказать, что T — тензор. Какого типа этот тензор?

3.244. В таблице приведены координаты тензора H^i_{jk} в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (индекс k обозначает номер 2×2-матрицы, i — номер строки, j — номер столбца). Найти координаты этого тензора в базисе $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$.

	$j=1$	$j=2$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	0	1	1	0
$i=2$	−1	2	2	1
	$k=1$		$k=2$	

3.245. Пусть A^{ij} — тензор типа (0, 2). Используя матрицу перехода S от базиса к базису, выразить матрицу A' этого тензора в новом базисе через матрицу A в старом базисе.

3.246. Сколько координат имеет тензор типа (p, q)?

2. Операции над тензорами. Для фиксированного линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности n рассматриваются всевозможные тензоры.

Сложение тензоров и умножение на скаляр. Если A и B — тензоры одного типа, то их сумма $C = A + B$ определяется формулой

$$C^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + B^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p},$$

т. е. в каждом базисе складываются соответствующие координаты этих тензоров. Тензор C имеет тот же тип, что A и B. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ — скаляр, то можно построить тензор $D = \lambda A$ того же типа, что A, по формуле

$$D^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \lambda A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}.$$

Тензоры одного типа (p, q) образуют линейное пространство размерности n^{p+q}.

Тензорное произведение. Пусть A и B — тензоры типов (p, q) и (s, t) соответственно. Тензорным произведением $C = A \otimes B$ называется тензор типа $(p + s, q + t)$, координаты которого в каждом базисе определяются формулами

$$C^{j_1\ldots j_q j_{q+1}\ldots j_{q+t}}_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_{p+s}} = A^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \cdot B^{j_{q+1}\ldots j_{q+t}}_{i_{p+1}\ldots i_{p+s}}.$$

Пример 4. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор (т. е. тензор типа (0, 1)), а $\boldsymbol{\alpha}$ — ковектор (линейная форма). Тогда $A = \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x}$ — тензор типа (1, 1), т. е. линейный оператор. Выяснить, как действует оператор A на произвольный вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$.

$\triangleleft$ Пусть $\|a^i_j\|$ — матрица оператора A. Тогда $a^i_j = \alpha_j x^i$, а значит,

$$A\mathbf{y} = a^i_j y^j e_i = \alpha_j x^i y^j e_i = \alpha_j y^j \cdot x^i e_i = \alpha(y)x.$$

Таким образом, $(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{y})\mathbf{x}$. $\triangleright$

Свертка тензора. Пусть $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ — тензор типа $(p,\ q)$. Выделим какой-либо верхний и какой-либо нижний индексы, например, j_1 и i_1. Тогда можно построить тензор типа $(p-1,\ q-1)$, полагая в каждом базисе

$$U^{j_2 \ldots j_q}_{i_2 \ldots i_p} = T^{k j_2 \ldots j_q}_{k i_2 \ldots i_p}$$

(в правой части — суммирование по k). Этот тензор называется *сверткой тензора T по индексам i_1, j_1*.

Если $T = T^{ijk}_{lm}$, то сверткой тензора T по индексам j и m является тензор $U^{ik}_l = T^{ijk}_{lj}$ (суммирование по индексу j).

Тензор типа $(0, 0)$ — это *инвариант*, т. е. число, принимающее одно и то же значение в каждом базисе пространства $\mathcal{L}$.

Пусть a^i_j — линейный оператор. Произведем сворачивание этого тензора по индексам i и j, т. е. положим

$$b = a^i_i (= a^1_1 + a^2_2 + \ldots + a^n_n).$$

Тогда b будет являться тензором типа (0, 0), т. е. инвариантом.

Число b — это сумма диагональных элементов, т. е. *след* матрицы $\|a^i_j\|$. Отсюда вывод: след $\operatorname{tr} A$ матрицы $A = \|a^i_j\|$ линейного оператора не зависит от базиса пространства $\mathcal{L}$.

Пусть

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

(Этот объект называется *символом дельта Кронекера*). Докажем, что δ^i_j — тензор типа (1, 1). Для этого надо доказать равенство $\delta^{i'}_{j'} = \widetilde{s}^{i'}_i s^j_{j'} \delta^i_j$. Преобразуем правую часть этого равенства. Так как $\delta^i_j = 0$ при $i \neq j$, то мы можем считать, что $i = j$. Тогда

$$\widetilde{s}^{i'}_i s^j_{j'} \delta^i_j = \widetilde{s}^{i'}_i s^i_{j'} \delta^i_i = \widetilde{s}^{i'}_i s^i_{j'} = (S^{-1}S)^{i'}_{j'} = E^{i'}_{j'} = \delta^{i'}_{j'}$$

(здесь E обозначает единичную матрицу). Нетрудно видеть, что матрица тензора δ^i_j в любом базисе является единичной матрицей E. Если дельту Кронекера интерпретировать как линейный оператор Δ, то это будет тождественный оператор, т. е. $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех векторов $\mathbf{x}$.

3.247. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор, а $\boldsymbol{\alpha}$ — ковектор (линейная форма). Что собой представляет свертка тензора $\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{x}$?

3.248. По каким парам индексов можно осуществить свертку тензора A^i_{jkl}?

3.249. Доказать, что если матрица тензора T_{ij} в каком-либо базисе невырождена, то матрица этого тензора невырождена в любом базисе. Верно ли данное утверждение для тензоров T^i_j, T^{ij}?

3.250. Пусть A^{ij} — тензор типа (0, 2) такой, что в каком-либо базисе (а значит, и во всех базисах) матрица $\|A^{ij}\|$ невырождена, и пусть B_{ij} — элементы обратной матрицы. Доказать, что B_{ij} — тензор типа (2, 0).

3.251. Пусть $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — ковекторы. Тогда $B = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}$ — билинейная форма. Выразить $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ с помощью $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.

3.252. Назовем *бивектором* B^{ij} тензорное произведение двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Выразить координаты тензора B^{ij} через координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

3.253. Пусть A^{ij} — тензор типа (0, 2), и его матрица $\|A^{ij}\|$ в каком-либо базисе является симметрической. Останется ли матрица этого тензора симметрической при изменении базиса? Ответить на этот вопрос для тензоров B^i_j, C_{ij} типов (1, 1), (2, 0) соответственно.

3.254. Тензор A^{ij}_k задан своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (см. таблицу). Найти координаты тензоров $B^i = A^{ij}_j$ и $C^j = A^{ij}_i$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	2	1	-3	3	1	-1	1	-1	3
$i=2$	0	0	1	-2	0	1	-2	2	0
$i=3$	1	-2	2	0	3	4	1	0	-5
		$k=1$			$k=2$			$k=3$	

3.255. Координаты тензоров A^{ij} и B_{ij} в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ определены матрицами A и B соответственно, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты тензоров $C^i_j = A^{ik}B_{kj}$, $D^i_j = A^{ik}B_{jk}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вычислить свертки $S = A^{ij}B_{ij}$, $T = A^{ij}B_{ji}$.

3.256. Ранг матрицы тензора называется *рангом тензора*. Пусть A — тензор типа (2, 0), (1, 1) или (0, 2). Доказать, что матрица тензора A в каждом базисе имеет один и тот же ранг.

3.257. Найти ранг тензора:

а) $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$;

б) $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$.

3.258. Пусть A — тензор типа (p, q), где $p+q=2$. Найти условие, которому должна удовлетворять матрица тензора A, чтобы тензор A можно было представить в виде произведения $P \otimes Q$ тензоров P, Q другого типа.

3. Симметрирование и альтернирование. Выделим у тензора $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ какие-либо k нижних индексов, например, $i_1, i_2, \ldots, i_k$. *Симметрирование* по индексам $i_1, \ldots, i_k$ — это построение нового тензора

$$T^{j_1 \ldots j_q}_{(i_1 \ldots i_k) i_{k+1} \ldots i_p} = \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} T^{j_1 \ldots j_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k i_{k+1} \ldots i_p}, \tag{5}$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ индексов $i_1, \ldots, i_k$. Координаты тензора $T^{j_1 \ldots j_q}_{(i_1 \ldots i_k) i_{k+1} \ldots i_p}$ в любом базисе симметричны по индексам $i_1, \ldots, i_k$, т. е. не зависят от перестановки этих индексов. *Альтернирование* по индексам $i_1, \ldots, i_k$ состоит в построении тензора

$$T^{j_1 \ldots j_q}_{[i_1 \ldots i_k] i_{k+1} \ldots i_p} = \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} (-1)^{|\sigma|} T^{j_1 \ldots j_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k i_{k+1} \ldots i_p}, \tag{6}$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix}$ индексов $i_1, \ldots, i_k$. Очевидно, слагаемое в (6) будет взято со знаком «плюс», если подстановка σ четная, и «минус», если она нечетная. Аналогично определяются тензоры $T^{(j_1 \ldots j_m) j_{m+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ и $T^{[j_1 \ldots j_m] j_{m+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$.

Выразим координаты тензоров $A^{(ij)}_{kl}$, $B^{ij}_{[klm]}$ через A^{ij}_{kl}, B^{ij}_{klm} соответственно. По определению имеем:

$$A^{(ij)}_{kl} = \frac{1}{2}(A^{ij}_{kl} + A^{ji}_{kl}),$$

$$B^{ij}_{[klm]} = \frac{1}{6}(B^{ij}_{klm} - B^{ij}_{kml} + B^{ij}_{lmk} - B^{ij}_{lkm} + B^{ij}_{mkl} - B^{ij}_{mlk}).$$

Если T — тензор типа $(p, 0)$ или $(0, q)$, то $\operatorname{Sym} T$ или $\operatorname{Alt} T$ — это тензор, полученный из T симметрированием или альтернированием по всем индексам.

3.259. Выразить координаты тензоров $A^{ij}_{(kl)}$, $B^{[ijk]}_{l}$, $C_{(ijk)}$ через координаты A^{ij}_{kl}, B^{ijk}_{l}, C_{ijk} соответственно.

3.260. Найти матрицы тензоров $\operatorname{Sym} A^{ij}$, $\operatorname{Alt} B_{ij}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, если заданы координаты тензоров A^{ij}, B_{ij} в этом базисе:

$$\|A^{ij}\| = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \|B_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.261. Тензор A_{ijk} задан координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (см. таблицу). Найти координаты тензоров $B_{ijk} = A_{i(jk)}$, $C_{ijk} = A_{[ijk]}$, $D_{ijk} = A_{(ijk)}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	2	1	3	2	3	1	1	−3	2
$i=2$	−1	4	2	5	0	0	−1	4	5
$i=3$	6	−4	1	−5	4	1	4	−1	3
		$k=1$			$k=2$			$k=3$	

4. Сопряженное пространство. Тензор как полилинейная функция. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем действительных чисел. *Сопряженным пространством* $\mathcal{L}^*$ называется пространство всех линейных форм α: $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$. Если $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис пространства $\mathcal{L}$, то в пространстве $\mathcal{L}^*$ можно построить *сопряженный базис* $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$, в котором ковекторы $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ определяются равенствами $\boldsymbol{\varepsilon}^i(e_j) = \delta^i_j$ при всех i, j. Тензор T типа (p, q) можно рассматривать как *полилинейную функцию* T: $\underbrace{\mathcal{L} \times \ldots \times \mathcal{L}}_{p} \times \underbrace{\mathcal{L}^* \times \ldots \times \mathcal{L}^*}_{q} \to \mathbb{R}$ от p векторов и q ковекторов (полилинейность означает линейность по каждому из $p+q$ аргументов). Координаты $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ тензора в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства $\mathcal{L}$ определяется формулами $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}, \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{j_q})$.

Пример 5. Представить линейный оператор в виде билинейной функции от вектора и ковектора.

◁ Пусть A: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор, $\|a^i_j\|$ — его матрица в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Возьмем произвольные вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ и ковектор $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{L}^*$. Разложим $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, а $\boldsymbol{\xi}$ — по сопряженному базису $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$: $\mathbf{x} = x^j\mathbf{e}_j$, $\boldsymbol{\xi} = \xi_i\boldsymbol{\varepsilon}^i$. Положим $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Линейный оператор, как тензор типа $(1, 1)$, является функцией $T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ от одного вектора и одного ковектора. Поэтому $a^i_j = T(\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\varepsilon}^i)$. Имеем:

$$T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = T(x^j\mathbf{e}_j, \xi_i\boldsymbol{\varepsilon}^i) = x^j\xi_i T(\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\varepsilon}^i) = x^j\xi_i a^i_j =$$
$$= \xi_i(a^i_j x^j) = \xi_i y^j = \boldsymbol{\xi}(A\mathbf{x}). \quad \triangleright$$

3.262. Представить вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ в виде функции $T(\boldsymbol{\xi})$ ковектора $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{L}^*$.

3.263. Пусть $A\colon \mathcal{L}\times\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — билинейное отображение, рассматриваемое как тензор типа (2, 1). Представить A в виде функции от векторов и ковекторов.

3.264. Написать матрицу линейного оператора $\mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^1 - 2\mathbf{e}_2 \otimes \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^3 + 3\mathbf{e}_3 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^1$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Пример 6. Вывести формулу, выражающую закон изменения векторов сопряженного базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ при изменении базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства $\mathcal{L}$.

◁ Для всякого ковектора $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{L}^*$ имеет место равенство $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i\boldsymbol{\varepsilon}^i$, где $\alpha_i = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_i)$. Полагая $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i'}$ (здесь $\boldsymbol{\varepsilon}^{i'}$ — вектор нового сопряженного базиса), получим:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i'} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i'}(\mathbf{e}_i)\boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{\varepsilon}^{i'}(\widetilde{s}_i^{j'}\mathbf{e}_{j'})\boldsymbol{\varepsilon}^i = \widetilde{s}_i^{j'}\boldsymbol{\varepsilon}^{i'}(\mathbf{e}_{j'})\boldsymbol{\varepsilon}^i = \widetilde{s}_i^{j'}\delta_{j'}^{i'}\boldsymbol{\varepsilon}^i = \widetilde{s}_i^{i'}\boldsymbol{\varepsilon}^i.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i'} = \widetilde{s}_i^{i'}\boldsymbol{\varepsilon}^i. \ \triangleright \tag{7}$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис пространства $\mathcal{L}$, а $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3$ — сопряженный базис. Выясним, как изменится сопряженный базис, если в пространстве $\mathcal{L}$ перейти к базису $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Пусть $\boldsymbol{\eta}^1$, $\boldsymbol{\eta}^2$, $\boldsymbol{\eta}^3$ — базис, сопряженный с базисом $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$. Так как

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ равна

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (7) получаем:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}^1 \\ \boldsymbol{\eta}^2 \\ \boldsymbol{\eta}^3 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\eta}^1 = \frac{1}{7}(-\varepsilon^1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3),$$

$$\boldsymbol{\eta}^2 = \frac{1}{7}(2\varepsilon^1 + 5\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3),$$

$$\boldsymbol{\eta}^3 = \frac{1}{7}(3\varepsilon^1 - 3\varepsilon^2 - \varepsilon^3).$$

3.265. Написать выражения векторов нового базиса $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ пространства $\mathcal{L}$ через векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ старого базиса, если сопряженный базис изменился следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\varepsilon}')^1 &= 2\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 3\boldsymbol{\varepsilon}^3,\\
(\boldsymbol{\varepsilon}')^2 &= \boldsymbol{\varepsilon}^1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}^3,\\
(\boldsymbol{\varepsilon}')^3 &= -\boldsymbol{\varepsilon}^1 + 4\boldsymbol{\varepsilon}^2.
\end{aligned}$$

3.266. Найти значение $T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ тензора $T = \boldsymbol{\varepsilon}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \otimes (\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3) + \boldsymbol{\varepsilon}^3 \otimes (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$, где $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 - 2\boldsymbol{\varepsilon}^2 + 3\boldsymbol{\varepsilon}^3$.

3.267. Найти значение тензора $A \otimes B - B \otimes A$ от набора $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, где $A = \boldsymbol{\varepsilon}^1 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}^2 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^3$, $B = 3\boldsymbol{\varepsilon}^2 - 4\boldsymbol{\varepsilon}^3$, $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

3.268. Найти значение тензора $A \otimes B + B \otimes A$ от набора $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta})$, где $A = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$, $B = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^1$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^3$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^3$.

3.269. Найти координаты $\widetilde{T}^{12}_{123}$, $\widetilde{T}^{33}_{211}$ тензора T^{ij}_{klm} в базисе

$$(\widetilde{\mathbf{e}}_1\ \widetilde{\mathbf{e}}_2\ \widetilde{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ все его координаты равны 2.

Глава 4
ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Бинарные отношения и алгебраические операции

1. Бинарные отношения и их свойства. *Декартовым* (или *прямым*) *произведением* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n)\}.$$

Бинарным отношением σ на множестве A называется подмножество множества $A \times A$ $(\sigma \subseteq A \times A)$. Если элементы $x, y \in A$ связаны отношением σ, то пишут $(x, y) \in \sigma$ или $x\sigma y$; если не связаны, пишут $(x, y) \notin \sigma$ или $x \not\sigma y$.

Бинарное отношение σ *рефлексивно*, если для любого $a \in A$ имеет место $(a, a) \in \sigma$; *симметрично*, если для любых $a, b \in A$ из $(a, b) \in \sigma$ следует $(b, a) \in \sigma$; *антисимметрично*, если ни для каких $a, b \in A$, где $a \neq b$, невозможно одновременное выполнение условий $(a, b) \in \sigma$ и $(b, a) \in \sigma$; *транзитивно*, если для любых $a, b, c \in A$ из условий $(a, b) \in \sigma$ и $(b, c) \in \sigma$ следует $(a, c) \in \sigma$.

Пример 1. Выяснить, какими из основных свойств (рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность) обладает отношение перпендикулярности ($\perp$), заданное на множестве всех прямых на плоскости.

$\triangleleft$ Отношение $\perp$, заданное на множестве всех прямых на плоскости, нерефлексивно (говорят также: иррефлексивно), так как $a \not\perp a$ для любой прямой a; симметрично, так как для любых прямых a и b из $a \perp b$ следует $b \perp a$; нетранзитивно (говорят также: интранзитивно), так как для любых прямых a, b и c на плоскости из условий $a \perp b$ и $b \perp c$ не следует $a \perp c$; неантисимметрично, так как из $a \perp b$ и $b \perp a$ не следует $b = a$. $\triangleright$

Пример 2. Доказать, что из условий рефлексивности и симметричности бинарного отношения не следует его транзитивность.

$\triangleleft$ Для доказательства достаточно привести пример рефлексивного и симметричного бинарного отношения, не являющегося транзитивным. В качестве примера рассмотрим бинарное отношение σ, заданное на множестве $\mathbb{R}$ следующим образом: $a\sigma b \Leftrightarrow |a - b| \leqslant 1$. Отношение σ рефлексивно, так как $a\sigma a$ для любого $a \in \mathbb{R}$ (ввиду того, что $|a - a| = 0 \leqslant 1$), и симметрично, так как $|a - b| = |b - a|$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$. Однако σ не является транзитивным, так как $1\sigma 2$, $2\sigma 3$, но $1 \not\sigma 3$. $\triangleright$

В задачах 4.1 и 4.2 выписать все элементы декартова произведения указанных множеств.

4.1. $M_1 = \{-1, 2\}$, $M_2 = \{a, b, c\}$.

4.2. $M_1 = \{1, 3\}$, $M_2 = \{5, 6, 7\}$, $M_3 = \{a\}$.

В задачах 4.3–4.9 определить, какими из основных свойств (рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность) обладают отношения σ_i, заданные на множестве натуральных чисел:

4.3. $m\sigma_1 n$, если m и n не имеют общих простых делителей.

4.4. $m\sigma_2 n$, если m делится на n^2.

4.5. $m\sigma_3 n$, если $m^2 = n$.

4.6. $m\sigma_4 n$, если $m < n$.

4.7. $m\sigma_5 n$, если $m \leqslant n$.

4.8. $m\sigma_6 n$, если $m-n = k$, где k — фиксированное целое число.

4.9. $m\sigma_7 n$, если $m-n$ делится на k (k — фиксированное целое число).

Если множество A конечно, т.е. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то каждому бинарному отношению $\sigma \subseteq A \times A$ можно сопоставить матрицу размера $n \times n$, называемую *матрицей отношения*, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если $(a_i, a_j) \in \sigma$, и 0 в противном случае.

4.10. Пусть A — конечное множество, $\sigma \subseteq A \times A$ — бинарное отношение на A. Что собой представляет матрица отношения σ в случае, если оно:

а) рефлексивно; б) симметрично; в) антисимметрично?

4.11*. Доказать независимость друг от друга свойств бинарного отношения: «быть рефлексивным», «быть симметричным», «быть транзитивным».

2. Виды бинарных отношений. Бинарное отношение называется отношением *эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пусть σ — отношение эквивалентности на множестве A. Для каждого $a \in A$ определим *класс эквивалентности* $K(a)$ *элемента* a, полагая $K(a) = \{x \in A \,|\, (x, a) \in \sigma\}$. *Фактор-множеством множества* A *по отношению эквивалентности* σ (обозначается: A/σ) называется множество всех классов эквивалентности A_α: $A/\sigma = \{A_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ (I — некоторое множество индексов). Выберем в каждом классе эквивалентности A_α по одному элементу a_α. Множество $\{a_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ называется *множеством представителей* классов эквивалентности, а сами элементы a_α — представителями классов. В качестве представителя класса может быть выбран любой его элемент.

Пример 3. Пусть A — множество всех прямых на плоскости. На A введено отношение σ такое, что $a\sigma b$, если $a \| b$ (считается, что $a \| a$ для любой $a \in A$). Доказать, что σ — отношение эквивалентности. Найти фактор-множество A/σ и какое-либо множество представителей классов эквивалентности.

$\triangleleft$ Отношение σ является рефлексивным, симметричным и транзитивным (проверяется непосредственно). Следовательно, σ является отношением эквивалентности. Зафиксируем на плоскости какую-либо точку O. Каждая прямая a, проходящая через точку O, задает класс эквивалентности, в который входят все прямые, параллельные a. Эти классы образуют A/σ. Множество прямых, проходящих через точку O, является множеством представителей классов эквивалентности. $\triangleright$

Бинарное отношение называется *отношением порядка* (или *отношением частичного порядка*), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Бинарное отношение σ *дихотомично*, если для любых $a, b \in A$ $(a, b) \in \sigma$ или $(b, a) \in \sigma$. Дихотомичное отношение частичного порядка называется *отношением линейного порядка*.

Множество, на котором задано отношение частичного (или линейного) порядка, называется *частично* (или *линейно*) *упорядоченным*. Если множество A частично упорядочено отношением $\leqslant$, то полагаем $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Кроме того, $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$, $a > b \Leftrightarrow b < a$.

Максимальный элемент частично упорядоченного множества P — такой элемент z, что для любого $x \in P$ из $x \geqslant z$ следует $x = z$; *минимальный элемент* — такой элемент u, что для любого $x \in P$ из $x \leqslant u$ следует $x = u$; *наибольший элемент* — такой элемент p, что $x \leqslant p$ для любого $x \in P$; *наименьший элемент* — такой элемент q, что $x \geqslant q$ для любого $x \in P$.

4.12. Какие из отношений σ_i задач 4.3–4.9 являются отношениями эквивалентности, а какие отношениями порядка?

В задачах 4.13–4.16 бинарные отношения заданы на множестве всех бесконечных последовательностей натуральных чисел. Какие из них являются отношениями порядка? Какие являются отношениями эквивалентности?

4.13. $(a_1, a_2, \ldots)\sigma_1(b_1, b_2, \ldots)$, если $\forall\, i \in \mathbb{N}\ \ a_i \leqslant b_i$;

4.14. $(a_1, a_2, \ldots)\sigma_2(b_1, b_2, \ldots)$, если $\exists\, n\colon \forall\, k > n\ \ a_k = b_k$;

4.15. $(a_1, a_2, \ldots)\sigma_3(b_1, b_2, \ldots)$, если $\exists\, n\colon \forall\, k > n\ \ a_k \leqslant b_k$;

4.16. $(a_1, a_2, \ldots)\sigma_4(b_1, b_2, \ldots)$, если либо $\forall\, k\ \ a_k = b_k$, либо $\exists\, n\colon \forall\, k \neq n\ \ a_k \leqslant b_k$.

4.17. Пусть n — натуральное число. Введем на множестве $\mathbb{Z}$ отношение σ, считая, что $a\sigma b$, если $a - b$ делится на $n \in \mathbb{N}$ без остатка. Найти фактор-множество $\mathbb{Z}/\sigma$ и какое-либо множество представителей классов эквивалентности.

4.18.** Доказать, что всякое отношение эквивалентности σ на множестве A определяет разбиение множества A на непересекающиеся подмножества. Наоборот, всякое разбиение множества A есть разбиение на классы некоторого отношения эквивалентности σ.

Пусть $\sigma, \tau \subseteq A \times A$ — бинарные отношения. Включение $\tau \subseteq \sigma$ означает, что все пары, принадлежащие τ, принадлежат и σ.

4.19. Рассмотрим множество всевозможных бинарных отношений на множестве $A \times A$, частично упорядоченное по включению $\subseteq$. Ответьте на поставленные вопросы. В пунктах д) и е) ограничьтесь случаем конечного множества.

а) Какое бинарное отношение является наибольшим?

б) Какое бинарное отношение является наименьшим?

в) Какое отношение эквивалентности является наибольшим (наименьшим)? Каковы разбиения на классы наибольшего (наименьшего) отношений эквивалентности?

г) Существует ли наименьшее отношение порядка?

д) Существует ли наибольшее отношение порядка?

е) Существует ли максимальное отношение порядка?

4.20. Отношение σ на множестве действительных чисел определяется правилом: $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Доказать, что σ — отношение эквивалентности. Что представляют собой классы эквивалентности этого отношения?

4.21. Пусть M — множество всех функций, определенных на отрезке $[a; b]$. Отношения σ и τ определяются следующим образом: $f\sigma g$, если $f(a) = g(a)$; $f\tau g$, если для всех $x \in [a;, b]$ $f(x) \leqslant \leqslant g(x)$. Доказать, что σ — отношение эквивалентности, а τ — отношение порядка.

4.22. Доказать, что в частично упорядоченном множестве наибольший элемент является максимальным. Привести пример частично упорядоченного множества, в котором максимальный элемент не является наибольшим.

4.23. На множестве $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ введем отношение R: aRb, если b делится на a без остатка. Доказать, что R — частичный порядок. Есть ли в данном множестве наибольший, наименьший элемент? Есть ли в нем максимальные и минимальные элементы (относительно R)?

Графической интерпретацией на плоскости отношения σ, заданного на конечном множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (иначе *графом* отношения) называется диаграмма, в которой элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ изображаются точками, обозначаемых теми же буквами, что и элементы множества A, при этом направленная стрелка из a_i в a_j изображается, если $(a_i, a_j) \in \sigma$. Например, отношение $\sigma = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 3)\}$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ изображается следующим графом (см. рис. 35).

Если отношение σ симметрично, то вместо двух направленных ребер $\overrightarrow{(a, b)}$ и $\overrightarrow{(b, a)}$ обычно рисуют одно (a, b) без направления.

При изображении графа отношения порядка, заданного на множестве X, при $x < y$ точку x располагают ниже точки y. Если имеются линии от

x к y и от y к z, то линию, соединяющую x и z, не рисуют. Аналогично поступают и для более длинных цепочек элементов.

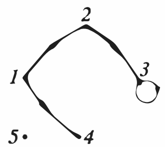


Рис. 35

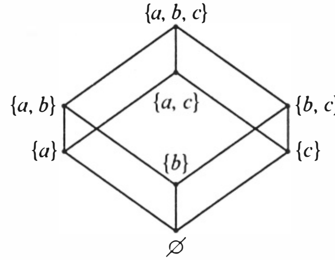


Рис. 36

Пример 4. Построить граф отношения включения $\subseteq$ на множестве всех подмножеств множества $\{a, b, c\}$.

$\lhd$ Множество всех подмножеств множества $\{a, b, c\}$ содержит восемь элементов: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. В соответствии с замечанием 2 в цепочках включений не изображаем лишние ребра. Так, $\varnothing \subset \{b\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\}$, но линии от $\varnothing$ к $\{a, b\}$ и $\{a, b, c\}$ опускаем. Полученный граф отношения изображен на рис. 36. $\rhd$

4.24. Пусть $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, R — отношение делимости на множестве A, введенное в задаче 4.23. Построить граф этого отношения. Найти максимальные и минимальные элементы A (относительно R).

4.25. Пусть $A = \{3, 4, \ldots, 10\}$. Введем отношение σ, считая, что для $a, b \in A$ $a\sigma b$, если существует некоторое $c \in A$ такое, что a и b делятся на c без остатка. Построить граф этого отношения.

4.26*. Доказать, что всякий частичный порядок τ на конечном множестве может быть продолжен до линейного (т. е. существует такой линейный порядок τ', что $\tau \subseteq \tau'$).

Пусть множество $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, причем на каждом из множеств $A_1, \ldots, A_n$ заданы отношения частичного порядка. На множестве A можно определить отношения порядка $\leqslant$ и $\preceq$:

а) $(a_1, \ldots, a_n) \leqslant (a'_1, \ldots, a'_n)$, если $\forall i \ \ a_i \leqslant a'_i$;

б) $(a_1, \ldots, a_n) \preceq (a'_1, \ldots, a'_n)$, если либо $a_1 = a'_1, \ldots, a_{i-1} = a'_{i-1}$, $a_i < a'_i$ для некоторого i, либо $a_i = a'_i$ для всех i.

Порядок $\preceq$ на множестве A называется *лексикографическим* (по такому принципу упорядочены слова в словаре).

4.27. Доказать, что отношение $\leqslant$ на множестве $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ является отношением частичного порядка.

4.28. Доказать, что отношение $\preceq$ на множестве $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ является отношением частичного порядка.

4.29. Доказать, что если все A_i линейно упорядочены, то A относительно отношения $\preceq$ также линейно упорядочено.

4.30. Построить графы отношений из задач 4.27 и 4.28 для множества $A_1 \times A_2$, где $A_1 = \{a, b, c \,|\, a < b < c\}$, $A_2 = \{u, v \,|\, u < v\}$.

3. Операции над бинарными отношениями. Пусть $\sigma, \tau \subseteq A \times A$ — бинарные отношения. Так как бинарные отношения являются подмножествами множества $A \times A$, то можно брать их пересечение $\sigma \cap \tau$, объединение $\sigma \cup \tau$ и разность $\sigma \backslash \tau$.

Обратным отношением к бинарному отношению σ на множестве A называется отношение $\sigma^{-1} = \{(y, x) \,|\, (x, y) \in \sigma\}$.

Противоположным отношением к бинарному отношению σ на множестве A называется отношение $\overline{\sigma} = (A \times A) \backslash \sigma$. Очевидно, $(a, b) \in \overline{\sigma} \Leftrightarrow (a, b) \notin \sigma$.

Произведением бинарных отношений σ и τ называется отношение $\sigma\tau = \{(x, y) \,|\, \exists z\colon (x, z) \in \sigma,\ (z, y) \in \tau\}$.

Обозначим через Δ отношение равенства на A, т. е. $\Delta = \{(a, a) \,|\, a \in A\}$.

4.31. Доказать следующие свойства операций над бинарными отношениями:

а) $\left(\bigcup\limits_{\alpha} \rho_\alpha\right)\sigma = \bigcup\limits_{\alpha}(\rho_\alpha \sigma)$; б) $\left(\bigcap\limits_{\alpha} \rho_\alpha\right)\sigma \subseteq \bigcap\limits_{\alpha}(\rho_\alpha \sigma)$.

4.32. Выразить с помощью операций $\sigma\tau$, σ^{-1} и отношения $\subseteq$ следующие свойства бинарных отношений: а) рефлексивность; б) симметричность; в) транзитивность; г) антисимметричность.

Пример 5. Выяснить, является ли транзитивным отношение, которое одновременно симметрично и антисимметрично.

$\lhd$ Пусть σ — симметричное и антисимметричное отношение. Симметричность отношения σ равносильна условию $\sigma^{-1} = \sigma$, а антисимметричность — условию $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$. Из этих двух условий следует, что $\sigma \subseteq \Delta$. Наконец, $\sigma^2 = \sigma\sigma \subseteq \Delta\sigma = \sigma$, поэтому σ транзитивно. $\rhd$

Пример 6. Найти какое-нибудь транзитивное отношение σ такое, что $\sigma^2 \subset \sigma$ (т.е. $\sigma^2 \subseteq \sigma$ и $\sigma^2 \neq \sigma$).

$\lhd$ Надо найти элементы a, b такие, что $(a, b) \in \sigma$, но не существует такого x, для которого (a, x), $(x, b) \in \sigma$. Примером может служить отношение $<$ на множестве целых чисел. Оно транзитивно и для него $(3, 4) \in \sigma$, но $(3, 4) \notin \sigma^2$. $\rhd$

Обозначим через Ω *универсальное отношение* на множестве A: $\Omega = A \times A$.

Пример 7. Пусть Δ — отношение равенства на множестве A, а σ — произвольное отношение. Чему равны произведения $\Delta\sigma$, $\sigma\Delta$, $\Omega\sigma\Omega$?

$\lhd$ Заметим, что $(a, b) \in \Delta\sigma \Leftrightarrow \exists x\ (a, x) \in \Delta,\ (x, b) \in \sigma \Leftrightarrow a = x,\ (x, b) \in \sigma \Leftrightarrow (a, b) \in \sigma$. Значит, $\Delta\sigma = \sigma$. Аналогично доказывается, что $\sigma\Delta = \sigma$. Нетрудно видеть, что если в σ есть хотя бы один элемент (a, b), то отношение $\Omega\sigma\Omega$ содержит все пары (x, y), где $x, y \in A$. Таким образом,

$$\Omega\sigma\Omega = \begin{cases} \Omega, & \text{если} \quad \sigma \neq \varnothing, \\ \varnothing, & \text{если} \quad \sigma = \varnothing. \end{cases} \quad \triangleright$$

Пример 8. Доказать, что если $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$, то $\sigma^{-1} = \sigma$.
$\triangleleft$ Так как $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$, то $(\sigma^{-1})^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$, т. е. $\sigma \subseteq \sigma^{-1}$. Следовательно, $\sigma^{-1} = \sigma$. $\triangleright$

4.33. а) Будет ли пересечение отношений эквивалентности также являться отношением эквивалентности?

б) Будет ли объединение отношений эквивалентности также являться отношением эквивалентности?

в) Будет ли пересечение отношений порядка также являться отношением порядка?

г) Будет ли объединение отношений порядка также являться отношением порядка?

д) Будет ли произведение двух отношений эквивалентности также являться отношением эквивалентности?

е) Будет ли произведение двух отношений порядка также являться отношением порядка?

Транзитивным замыканием σ^t бинарного отношения σ на множестве A называется наименьшее транзитивное отношение, содержащее σ.

4.34. Доказать следующие свойства транзитивного замыкания:

а) σ^t — пересечение всех транзитивных отношений, содержащих σ;

б) $\sigma^t = \sigma \cup \sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \ldots$;

в) $(a, b) \in \sigma \Leftrightarrow \exists\, c_1, \ldots, c_n \in A$, что $(a, c_1) \in \sigma$, $(c_n, b) \in \sigma$ и $(c_i, c_{i+1}) \in \sigma$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

В задачах 4.35–4.37 доказать, что для любых отношений ρ, σ, τ на одном и том же множестве справедливы указанные равенства либо включения.

4.35.** $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$. **4.36.** $(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1}$.

4.37*. $\rho(\sigma \cup \tau) = \rho\sigma \cup \rho\tau$, $\rho(\sigma \cap \tau) \subseteq \rho\sigma \cap \rho\tau$. Привести пример отношений, для которых $\rho(\sigma \cap \tau) \neq \rho\sigma \cap \rho\tau$.

Пример 9. Пусть σ — отношение на множестве $\mathbb{R}$, определенное условием $a\sigma b \Leftrightarrow |a - b| = 1$. Что из себя представляет транзитивное замыкание отношения σ?
$\triangleleft$ Условие $(a, b) \in \sigma^t$ равносильно существованию элементов $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ таких, что $|a - x_1| = |x_1 - x_2| = \ldots = |x_n - b| = 1$. Таким образом, $(a, b) \in \sigma^t$ в том и только том случае, когда $a - b \in \mathbb{Z}$. $\triangleright$

4.38. Доказать, что транзитивное замыкание отношения σ — это наименьшее транзитивное отношение, содержащее σ в качестве подмножества (или, что то же самое, пересечение всех транзитивных отношений, содержащих σ).

В задачах 4.39 и 4.40 найти транзитивное замыкание заданных отношений:

4.39. $x\sigma y$, если $x = y - 1$ (на множестве $\mathbb{Z}$);

4.40. $x\sigma y$, если $y = kx$, где k — простое число или 1 (на множестве $\mathbb{N}$).

4.41. Доказать следующие равенства для отношений параллельности и перпендикулярности, заданных на множестве всех прямых на плоскости (при этом считается, что любая прямая параллельна самой себе):

$$\|^{-1} = \|, \quad \perp^{-1} = \perp, \quad \| \cdot \| = \perp \cdot \perp = \|, \quad \| \cdot \perp = \perp, \quad \perp \cdot \| = \perp .$$

Какие из этих равенств остаются справедливыми для прямых в пространстве?

4.42. На рис. 37 изображен граф отношения σ. Построить графы отношений σ^{-1}, σ^2, $\sigma\sigma^{-1}$, $\sigma^{-1}\sigma$, σ^t.

4.43. Какие линии нужно добавить к графу отношения σ, изображенному на рис. 37, чтобы получился: а) граф рефлексивного отношения; б) граф симметричного отношения; в) граф транзитивного отношения?

4.44. Доказать, что для любого отношения σ отношения $\sigma^{-1}\sigma$ и $\sigma\sigma^{-1}$ — симметричные.

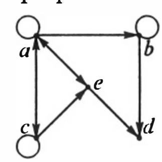


Рис. 37

В задачах 4.45–4.47 σ, τ, ρ — отношения эквивалентности на одном и том же множестве, $\sigma \vee \tau$ обозначает наименьшее отношение эквивалентности, содержащее σ и τ. Доказать приведенные равенства.

4.45. $\sigma \vee \tau = (\sigma \cup \tau)^t$. **4.46.** $\rho \cap (\sigma \vee \tau) = (\rho \cap \tau) \vee (\rho \cap \tau)$.

4.47. $\rho \vee (\sigma \cap \tau) = (\rho \vee \tau) \cap (\rho \vee \tau)$.

4.48. Для двух данных отношений эквивалентности σ и τ определить, что собой представляют классы отношений эквивалентности $\sigma \cap \tau$, $\sigma \vee \tau$ из задачи 4.45.

Два частично упорядоченных множества *изоморфны*, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношения порядка.

4.49. Перечислить все неизоморфные частично упорядоченные множества, состоящие из 2 или 3 элементов.

4.50. Рассмотрим конечное множество из n элементов. Сколько на этом множестве можно ввести:

а) различных бинарных отношений;

б) рефлексивных бинарных отношений;

в) симметричных бинарных отношений;
г) антисимметричных бинарных отношений;
д) отношений линейного порядка;
е) отношений частичного порядка ($n = 3$);
ж) отношений эквивалентности ($n = 3$)?

4. Алгебраические операции и их свойства. *Алгебраической операцией* на множестве A называется отображение $A \times A \to A$. Если при отображении элементам a, $b \in A$ ставится в соответствие элемент $c \in A$, то c называется *произведением* элементов a и b. Используется запись $c = ab$. Термин «произведение» носит условный характер: он может означать «сумму», «разность», «результат последовательного выполнения» (преобразований) и т. д. Произведение элементов a и b обозначают также $a \cdot b$, $a * b$, $a + b$, $a \circ b$, $a \cap b$ и т. д. Множество A, на котором задана операция $*$, принято обозначать $(A, *)$.

Операцию на *конечном* множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно задать *таблицей Кэли*, в которой на пересечении строки элемента a_i и столбца элемента a_j стоит элемент $a_k = a_i * a_j$:

	a_1	$\ldots$	a_j	$\ldots$	a_n
a_1					
a_i	$\ldots$	$\ldots$	a_k	$\ldots$	$\ldots$
a_n					

Операция *коммутативна*, если $a * b = b * a$ для всех a, b. Операция *ассоциативна*, если $(a * b) * c = a * (b * c)$ для всех a, b, c.

Элемент u называется *левой единицей*, если $u * a = a$ для всех a; *правой единицей*, если $a * u = a$ для всех a; *левым нулем*, если $u * a = u$ для всех a; *правым нулем*, если $a * u = u$ для всех a. *Единица* (или *двусторонняя единица*) — элемент, являющийся одновременно правой и левой единицей. *Нуль* (или *двусторонний нуль*) — элемент, являющийся одновременно правым и левым нулем.

Пример 10. На множестве $A = \{1, 3, 5, 15\}$ задана операция $a * b = \text{НОД}(a, b)$ (наибольший общий делитель чисел a и b). Проверить коммутативность и ассоциативность этой операции. Составить таблицу Кэли этой операции. Найти единицы и нули.

◁ Таблица Кэли имеет вид:

	1	3	5	15
1	1	1	1	1
3	1	3	1	3
5	1	1	5	5
15	1	3	5	15

Так как НОД(a, b) = НОД(b, a), то операция $*$ коммутативна. Операция $*$ ассоциативна, поскольку НОД(НОД(a, b), c) = НОД(a, НОД(b, c)) = = НОД(a, b, c). Так как НОД$(15, a) = a$ и НОД$(1, a) = 1$ для всех $a \in A$, то 15 — единица в A, а 1 — нуль в A. Других единиц и нулей нет. $\triangleright$

4.51. а) Сколько различных алгебраических операций можно ввести на множестве из n элементов? б) Сколько из них будут коммутативны?

4.52. а) Доказать, что если в множестве есть правая и левая единицы, то они совпадают, и этот элемент является двусторонней единицей.

б) Доказать аналогичное утверждение для нулей.

В задачах 4.53 и 4.54 построить таблицы Кэли указанных множеств с заданными операциями. Найти все левые (правые) единицы, левые (правые) нули.

4.53. $M = \{a, b, c, d\}$, $x * y = x$ для всех $x, y \in M$.

4.54. $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $x * y = \begin{cases} x + y + 1, & \text{если} \quad x + y \leqslant 4; \\ x + y - 3, & \text{если} \quad x + y > 4. \end{cases}$

4.55. Как по таблице Кэли конечного множества определить, является ли операция на этом множестве коммутативной?

4.56. Проверить ассоциативность операции, заданной следующей таблицей Кэли:

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	a	c	a	a

Операция на множестве A *обратима слева*, если уравнение $xa = b$ разрешимо для всех $a, b \in A$; *обратима справа*, если уравнение $ay = b$ разрешимо для всех $a, b \in A$. Операция *сократима слева*, если $ax = ay \Rightarrow x = y$ для всех $a, x, y \in A$; *сократима справа*, если $xa = ya \Rightarrow x = y$ для всех $a, x, y \in A$.

4.57. Как по таблице Кэли конечного множества определить, является ли операция на этом множестве:

а) обратимой (слева или справа); б) сократимой (слева или справа)?

4.58. Привести пример алгебраической операции:

а) коммутативной, но неассоциативной;

б) ассоциативной, но некоммутативной;

в) ассоциативной, обратимой слева, но необратимой справа;

г) ассоциативной, сократимой слева, но несократимой справа.

В задачах 4.59–4.66 для заданных операций выяснить, будут ли они ассоциативны, коммутативны; найти все левые (правые) единицы, нули.

4.59. $a * b = a - b \quad (a,\, b \in \mathbb{R})$.

4.60. $a * b = a^b \quad (a,\, b \in \mathbb{R};\quad a,\, b > 0)$.

4.61. $a * b = \text{НОД}(a,\, b) \quad (a,\, b \in \mathbb{N})$.

4.62. $a * b = \text{НОК}(a,\, b)$ (НОК — наименьшее общее кратное чисел a и b $(a,\, b \in \mathbb{N})$).

4.63. $a * b = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a,\, b \in \mathbb{R};\quad a,\, b \geqslant 0)$.

4.64. $(a,\, b) * (a_1,\, b_1) = (aa_1,\, ab_1 + b)$ (на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

4.65. $(f * g)(x) = f\big(g(x)\big)$ (на множестве отображений $X \to X$).

4.66. $a * b = a + b - ab \quad (a,\, b \in \mathbb{R})$.

Введем на множестве $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ остатков от деления целых чисел на $n \in \mathbb{N}$ операции *сложения и умножения по модулю* n. Для $a,\, b \in \mathbb{Z}_n$ выражения $a+b \pmod n$ и $a \cdot b \pmod n$ обозначают остатки от деления на n чисел $a + b$ и $a \cdot b$ соответственно.

Пример 11. Доказать коммутативность и ассоциативность операции $a + b \pmod n$ на множестве $\mathbb{Z}_n$.

◁ Чтобы различить операции обычного сложения и сложения по модулю n, будем их в этом примере обозначать $+$ и $\oplus$. Очевидно, $a \oplus b \equiv a + b \pmod n$ для всех $a,\, b \in \mathbb{Z}_n$. Коммутативность операции очевидна. Проверим ее ассоциативность. Пусть $a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}_n$. Тогда $(a \oplus b) \oplus c \equiv (a+b) \oplus c \equiv (a+b)+c = a+(b+c) \equiv a+(b \oplus c) \equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod n$. Так как $(a \oplus b) \oplus c \equiv a \oplus (b \oplus c) \pmod n$ и оба числа $(a \oplus b) \oplus c$, $a \oplus (b \oplus c)$ принадлежат $\mathbb{Z}_n$, то $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$. ▷

В задачах 4.67 и 4.68 построить таблицы Кэли множества $\mathbb{Z}_4$ с указанными операциями. Найти все левые (правые) единицы, левые (правые) нули.

4.67. Операция сложения по модулю 4.

4.68. Операция умножения по модулю 4.

4.69. Доказать коммутативность и ассоциативность операции $a \cdot b \pmod n$ на множестве $\mathbb{Z}_n$.

Пусть a — элемент множества A с операцией $*$. Тогда по определению $a^n = a^{n-1} * a$, где $n \in \mathbb{N}$. Элемент a — *идемпотент*, если $a^2 = a$. Пусть множество $(A,\, *)$ имеет нуль θ. Тогда a — *нильпотентный* элемент, если $a^n = \theta$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

4.70. Найти все идемпотенты и нильпотентные элементы множества: а) $(\mathbb{Z}_8,\, +)$; б) $(\mathbb{Z}_8,\, \cdot)$.

Гомоморфизмом множества $(A,\, *)$ на множество $(B,\, \circ)$ называется отображение $\varphi\colon A \to B$, удовлетворяющее условию $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ $\forall\, x,\, y \in A$.

Взаимно однозначное отображение φ, являющееся гомоморфизмом, называется *изоморфизмом*. Множества $(A, *)$ и $(B, \circ)$ *изоморфны*, если существует изоморфизм между ними. В этом случае пишут $(A, *) \cong$ $\cong (B, \circ)$ или $A \cong B$.

Пример 12. Пусть $P(X)$ — множество всех подмножеств множества X. Доказать, что множества с операциями $(P(X), \cup)$ и $(P(X), \cap)$ изоморфны.

$\lhd$ Проверим, что отображением, осуществляющим изоморфизм, является взятие дополнения. А именно, пусть $\varphi(A) = \overline{A}$ для $A \in P(X)$. Ясно, что отображение φ: $P(X) \to P(X)$ взаимно однозначно. Наконец, $\varphi(A \cup B) = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \varphi(A) \cap \varphi(B)$, поэтому φ — изоморфизм. $\rhd$

Пример 13. Изоморфны ли множества $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Z}, *)$, если операция $*$ определяется формулой $a * b = a + b - 2$?

$\lhd$ Пусть e — единица в $(\mathbb{Z}, *)$. Тогда для всех элементов x этого множества выполняется равенство $e * x = x$, или $e + x - 2 = x$. Таким образом, $e = 2$. Это обстоятельство наводит на мысль, что изоморфизм множеств $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Z}, *)$ получится, если к каждому элементу прибавлять 2. Проверим это. Пусть φ: $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, *)$ таково, что $\varphi(x) = x + 2$ для всех x. Ясно, что φ взаимно однозначно. Кроме того,

$$\varphi(x + y) = x + y + 2 = (x + 2) + (y + 2) - 2 = (x + 2) * (y + 2) = \varphi(x) * \varphi(y).$$

Следовательно, φ — изоморфизм. $\rhd$

4.71. Какие множества с заданными операциями из задач 4.53, 4.54, 4.67, 4.68 изоморфны?

4.72. Пусть $M = [a, b]$. Положим $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y =$ $= \max(x, y)$. Изоморфны ли $(M, \wedge)$ и $(M, \vee)$?

4.73. На множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел введена операция $a * b =$ $= a + b + 3$. Доказать, что $(\mathbb{Z}, *) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

4.74. На множестве $\mathbb{R}$ введем операцию $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Проверить, что $(\mathbb{R}, *) \cong (\mathbb{R}, +)$.

4.75. Изоморфны ли множества $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

Прямым произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *с операциями* называется множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, в котором операция определяется *покомпонентно*:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (a_1', a_2', \ldots, a_n') = (a_1 \cdot a_1', a_2 \cdot a_2', \ldots, a_n \cdot a_n').$$

4.76. Выяснить, при каких условиях на множества $(A_i, \cdot)$ только что введенная операция в $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ будет: а) коммутативной; б) ассоциативной.

4.77. Какие элементы множества $A_1 \times \ldots \times A_n$ относительно введенной выше операции являются: а) (левыми, правыми) единицами; б) (левыми, правыми) нулями?

В задачах 4.78 и 4.79 выяснить, изоморфны ли указанные множества.

4.78. $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ и $(\mathbb{Z}_4, +)$. **4.79.** $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \cdot)$ и $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$.

4.80. Пусть $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 10\}$. На множествах A, B операции обычного сложения и умножения являются *частичными операциями* (т. е. определенными не для любых пар элементов). Построить таблицы Кэли сложения и умножения на множествах A и B. Показать, что $(A, +) \cong (B, \cdot)$.

§ 2. Группы

1. Полугруппы. Непустое множество S с заданной на нем ассоциативной операцией называется *полугруппой*. Непустое подмножество $H \subseteq S$ называется *подполугруппой*, если для любых элементов $a, b \in H$ их произведение $ab \in H$.

Пример 1. Выяснить, являются ли полугруппами указанные множества S с заданными на них операциями: а) $S = \mathbb{Z}$, операция — вычитание; б) S — множество матриц $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, где a_{ij} — неотрицательные целые числа, с операцией матричного умножения; в) $S = [a, b]$ — отрезок числовой прямой, операция: $x * y = \dfrac{x+y}{2}$.

◁ а) В общем случае $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ (приведите пример), так что операция вычитания неассоциативна, значит, $(\mathbb{Z}, -)$ — не полугруппа.

б) Непосредственно проверяется, что произведение матриц с неотрицательными элементами также является матрицей с неотрицательными элементами. Кроме того, известно, что произведение матриц ассоциативно. Поэтому данное множество является полугруппой.

в) Имеем:

$$(x * y) * z = \left(\frac{1}{2}(x+y)\right) * z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z\right) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$$

и

$$x * (y * z) = \frac{1}{2}\big(x + (y * z)\big) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}(y+z)\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z.$$

Таким образом, $(x * y) * z \neq x * (y * z)$. Поэтому $(S, *)$ — не полугруппа. ▷

Пример 2. Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Выяснить, являются ли указанные множества подполугруппами полугруппы $(\mathbb{N}_0, +)$: а) $A = \{0, 1\}$; б) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$; в) $C = \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, 2, 5\}$.

◁ а) Так как $1 \in A$, но $1 + 1 \notin A$, то A не является подполугруппой.

б) Элементы из B имеют вид $2n$, где $n \in \mathbb{N}_0$. Так как $2m + 2n = 2(m+n) \in B$ при $m, n \in \mathbb{N}_0$, то B — подполугруппа.

в) Очевидно, $C = \{3, 4\} \cup \{n \mid n \geqslant 6\}$. Докажем, что $a + b \in C$ при $a, b \in C$. Имеем: $3 + 3 = 6 \in C$, $3 + 4 = 7 \in C$, $4 + 4 = 8 \in C$, а если хотя бы одно из чисел a, b больше или равно 6, то также $a + b \in C$. Следовательно, C — подполугруппа. ▷

Пример 3. Доказать, что множество $S = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ с операцией $x \wedge y = \min(x, y)$ является полугруппой, и найти все ее подполугруппы.

◁ Проверим ассоциативность операции. Пусть $x, y, z \in S$. Тогда

$$(x \wedge y) \wedge z = \min\big((x \wedge y), z\big) = \min(\min(x, y), z) = \min(x, y, z)$$

и

$$x \wedge (y \wedge z) = \min\big(x, (y \wedge z)\big) = \min\big(x, \min(y, z)\big) = \min(x, y, z).$$

Таким образом, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$. Следовательно, $(S, \wedge)$ — полугруппа.

Докажем теперь, что любое непустое подмножество $T \subseteq S$ является подполугруппой. Действительно, пусть $x, y \in T$. Если $x \leqslant y$, то $x \wedge y = x \in T$, а если $x \geqslant y$, то $x \wedge y = y \in T$. Поэтому $x \wedge y \in T$ для любых $x, y \in T$. Значит, T — подполугруппа. ▷

В задачах 4.81–4.83 выяснить, является ли полугруппой указанное множество.

4.81. Множество $\mathbb{N}$ с операцией $a * b = \text{НОД}(a, b)$.

4.82. Множество $S = [a, b]$ с операцией $x \vee y = \max(x, y)$.

4.83. Множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $a, d > 0$.

В задачах 4.84 и 4.85 выяснить, являются ли подполугруппами полугруппы $(\mathbb{Z}, +)$ указанные множества.

4.84. Множество $\{5, 8, 10\} \cup \{n \mid n \geqslant 12\}$.

4.85. Множество $\{11, 14\} \cup \{22, 24, 26, \ldots\}$.

4.86. В полугруппе $S = \{1, 2, 3, 6\}$ с операцией $a * b = \text{НОК}(a, b)$ найти все подполугруппы, содержащие более двух элементов.

4.87. Пусть X — произвольное множество, B_X — множество всех бинарных отношений на X с операцией умножения отношений. Доказать, что B_X — полугруппа. Найти (левые и правые) единицы и нули полугруппы B_X.

4.88. Пусть T_X — множество всех отображений $X \to X$ с операцией последовательного выполнения. Доказать, что T_X — полугруппа, найти ее единицы и нули. Является ли T_X подполугруппой полугруппы B_X?

4.89. Сколько всего существует неизоморфных полугрупп из двух элементов (определение изоморфизма множеств с операциями см. в § 1)?

4.90. Доказать, что пересечение любого множества подполугрупп, если оно непусто, является подполугруппой.

4.91*. Доказать, что во всякой конечной полугруппе найдется *идемпотент* (т. е. такой элемент e, что $e^2 = e$).

2. Группы. Множество G с операцией называется *группой*, если выполняются условия:

(Г1) $(ab)c = a(bc)$ для всех a, b, $c \in G$;

(Г2) существует нейтральный (единичный) элемент $e \in G$ такой, что $ae = ea = a$ для всех $a \in G$;

(Г3) для любого $a \in G$ существует $b \in G$ такое, что $ab = ba = e$. Элемент b называется *обратным* к a и обозначается a^{-1}.

Пусть a — элемент группы G. Полагаем $a^0 = e$ и $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Число элементов группы называется ее *порядком* и обозначается $|G|$. Если G — бесконечная группа, то пишем $|G| = \infty$.

Если операция группы является коммутативной, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

В задачах 4.92–4.95 проверить, что следующие множества с заданной на них операцией, являются группами.

4.92. Множество $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$) с операцией сложения. Оно называется *аддитивной группой* действительных (целых, рациональных, комплексных) чисел.

4.93. Множество $\mathbb{Z}_n$ с операцией сложения по модулю n (*группа вычетов*).

4.94. Множество комплексных чисел U_n, являющихся корнями n-й степени из единицы, с обычной операцией умножения комплексных чисел (*группа всех корней n-й степени из единицы*).

4.95. Множество всех движений плоскости, переводящих правильный n-угольник в себя, относительно операции композиции. Эту группу обозначают D_n (*группа диэдра*).

4.96. Доказать, что в любой группе G:

а) единичный элемент единственный;

б) для любого $a \in G$ обратный элемент a^{-1} единственный;

в) для любых элементов $a, b \in G$ справедливо равенство $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

г) для любого $a \in G$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$.

4.97*. Доказать, что если G — группа и $a^2 = e$ для любого $a \in G$, то G коммутативна.

4.98. Доказать, что во всякой группе каждое из уравнений $ax = b$, $ya = b$ имеет единственное решение. Написать выражения x и y через a и b.

В задачах 4.99–4.101 a, b, c — известные элементы группы, x — неизвестный элемент. Решить уравнения:

4.99. $axb = c$. **4.100.** $x^{-1}a^{-1} = b$. **4.101.** $ax^{-1}b = c$.

В задачах 4.102 и 4.103 доказать, что полугруппа S является группой в каждом из следующих случаев.

4.102*. Уравнения $ax = b$, $ya = b$ имеют решения для любых $a, b \in S$.

4.103. Уравнение $axb = c$ имеет решение для любых $a,\ b,\ c \in S$.

4.104. Пусть G — группа. Введем на G новую операцию, полагая $a * b = ba$. Доказать, что $(G,\ *)$ — группа.

4.105. Проверить, что множество пар $(a,\ b)$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $a \neq \neq 0$, является группой, если операция задана следующим образом:

а) $(a,\ b) * (a',\ b') = (aa',\ ab' + b)$;

б) $(a,\ b) * (a',\ b') = (aa',\ ab' + ba)$;

в) $(a,\ b) * (a',\ b') = (aa',\ b + b')$.

4.106. Пусть G — множество всех троек $(a,\ b,\ c)$, где $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ \ c \neq 0$. Доказать, что операция $(a,\ b,\ c) * (a',\ b',\ c') = = (aa',\ ab' + bc,\ cc')$ превращает G в группу.

4.107. Пусть X — произвольное множество, $P(X)$ — множество всех его подмножеств. Доказать, что $(P(X),\ \triangle)$ — группа, где $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

4.108*. Пусть $G = (-c,\ c)$ — интервал числовой прямой. Доказать, что $(G,\ *)$ — группа, если $a * b = \dfrac{a+b}{a + ab/c^2}$ [1]).

4.109. Показать, что множество всех дробно-линейных функций $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc \neq 0$, образует группу относительно операции суперпозиции. Является ли эта группа коммутативной?

4.110. На множестве $H = \{1,\ -1,\ i,\ -i,\ j,\ -j,\ k,\ -k\}$ (элементы которого следует рассматривать как формальные символы) вводится операция, при которой элементы 1 и -1 действуют на остальные обычным образом и, кроме того, $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ ji = -k,\ ki = j,\ ik = -j,\ jk = i,\ kj = -i$. Доказать, что H — группа (она называется *группой кватернионов*). Построить таблицу Кэли умножения этой группы.

Прямым (или *декартовым*) *произведением групп* $A_1, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ с операцией $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$. Если операция в каждой из групп A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — сложение, то говорят о *прямой сумме* групп и пишут $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$.

4.111. Доказать, что если $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ — группы, то $A_1 \times \times A_2 \times \ldots \times A_n$ — также группа.

4.112. Пусть A и B — множества с операциями, φ: $A \to B$ — гомоморфизм (определение гомоморфизма множеств с операцией

---

[1]) Эта операция представляет собой *правило сложения скоростей в специальной теории относительности.*

см. § 1) A на B. Доказать, что если A — группа, то B — также группа.

4.113*. Доказать, что если φ: $G \to G'$ — гомоморфизм групп, то $\varphi(e) = e'$ и $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$, где e, e' — единицы групп G, G' соответственно.

4.114. Найти все гомоморфизмы группы $\mathbb{Z}$ в себя.

4.115. Пусть G — группа, a — фиксированный элемент G. Определим другое умножение в G, полагая $x * y = xay$. Доказать, что $(G, *) \cong (G, \cdot)$.

4.116*. Доказать, что если X — конечное множество из n элементов, то группа из задачи 4.107 изоморфна $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n \text{ раз}}$.

4.117. Доказать, что:

а)* $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$, где $\mathbb{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел;

б)* $(\mathbb{Q}, +) \not\cong (\mathbb{Q}_+, \cdot)$, где $\mathbb{Q}_+$ — множество всех положительных рациональных чисел;

в) $G_1 \cong G_2$, где G_1 — группа матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0)$ с операцией умножения матриц, G_2 — группа из задачи 4.105 а);

г) $G_1 \cong G_2$, где G_1 — группа матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0)$ с операцией умножения матриц, G_2 — группа из задачи 4.106.

Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой* (обозначается $H \leqslant G$), если оно само является группой относительно той же операции. В группе G наименьшая подгруппа — $\{e\}$, наибольшая — G. Эти подгруппы называются *тривиальными*. Остальные подгруппы (если они существуют) называются *нетривиальными*.

4.118. Доказать, что непустое подмножество $H \subseteq G$ является подгруппой группы G в том и только том случае, если выполнены условия: $ab \in H$ и $a^{-1} \in H$ при всех $a, b \in H$.

4.119*. Доказать, что подмножества вида $n\mathbb{Z}$, где $n \in \mathbb{Z}$, и только они, являются подгруппами группы $\mathbb{Z}$ (здесь $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \in \mathbb{Z}\}$).

4.120. Доказать, что пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} H_\alpha$ подгрупп H_α является подгруппой.

4.121. Может ли группа быть объединением двух своих нетривиальных подгрупп?

4.122. Пусть G — множество всех ненулевых комплексных чисел, A — множество положительных действительных чисел, B —

множество комплексных чисел, по модулю равных 1. Доказать, что относительно обычного умножения G — группа, A и B — ее подгруппы, причем $G \cong A \times B$.

Пусть M — подмножество группы G, тогда символом $\langle M\rangle$ будем обозначать пересечение всех подгрупп, содержащих множество M. Это множество называют *подгруппой, порожденной множеством* M: $\langle M\rangle = \bigcap\limits_{M\subseteq P\leqslant G} P$. Множество $\langle M\rangle$ состоит в точности из тех элементов, которые можно записать через элементы из M, используя операции умножения и взятия обратного элемента a^{-1}. Говорят, что M *порождает* подгруппу H, если $\langle M\rangle = H$.

4.123. В группе $\mathbb{Z}_{12}$ с операцией сложения по модулю 12 найти указанную подгруппу: а) $\langle 3\rangle$; б) $\langle 4, 9\rangle$.

Группа G называется *циклической*, если существует элемент $a \in G$ такой, что $\langle a\rangle = G$. При этом a называется *образующим элементом* группы G.

Пример 4. Выяснить, какие элементы являются образующими элементами группы $\mathbb{Z}_n$.

$\triangleleft$ Пусть $a \in \mathbb{Z}_n$. Докажем, что элемент a является образующим элементом группы $\mathbb{Z}_n$ в том и только том случае, если a взаимно просто с n. Предположим вначале, что a и n взаимно просты. Тогда $ax + ny = 1$ при некоторых $x, y \in \mathbb{Z}$ [2]. Можно считать, что $x > 0$. Так как $n = 0$ в группе $\mathbb{Z}_n$, то в этой группе $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{x \text{ раз}} = 1$. Таким образом, складывая элемент a с самим собой несколько раз, можно получить элемент 1. Отсюда следует, что из a можно получить любой элемент группы $\mathbb{Z}_n$. Следовательно, a — образующий элемент. Теперь предположим, что a и n не являются взаимно простыми. Пусть $d > 1$ — их наибольший общий делитель. Построим последовательность элементов группы $\mathbb{Z}_n$, складывая элемент a с самим собой по модулю n: a, $a+a$, $a+a+a$, … Если a — образующий элемент, то построенная последовательность содержит все элементы группы $\mathbb{Z}_n$. Поэтому $ka \equiv 1 \pmod n$ при некотором k. Отсюда следует, что $ka + tn = 1$ при некотором $t \in \mathbb{Z}$. Однако это невозможно, так как $ka + tn$ делится на d. $\triangleright$

В задачах 4.124–4.127 определить, какие элементы являются образующими в указанной группе.

4.124. $\mathbb{Z}_{10}$. **4.125.** $\mathbb{Z}_{12}$. **4.126.** $\mathbb{Z}_{14}$. **4.127.** $\mathbb{Z}_{18}$.

4.128. Доказать, что U_n — циклическая группа, и найти ее какой-нибудь образующий элемент (см. задачу 4.94).

4.129. Доказать, что всякая циклическая группа изоморфна либо группе $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

4.130. Доказать изоморфизм групп $\mathbb{Z}_n$ и U_n.

---

[2]) Теорема в теории чисел. Если $d = \text{НОД}(a, b)$, то существуют такие $x, y \in \mathbb{Z}$, что $ax + by = d$.

Пусть $\zeta_k = \exp\left(\dfrac{2\pi k i}{n}\right)$ — элемент группы U_n $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (проверьте!). Назовем ζ_k *примитивным* (или *первообразным*) *корнем n-й степени из единицы*, если $\zeta_k^m \neq 1$ при $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 5. Доказать, что произведение примитивных корней 3-й и 4-й степени из 1 является примитивным корнем 12-й степени из 1.

◁ Пусть α — примитивный корень 3-й, а β — примитивный корень 4-й степени из 1. Если $(\alpha\beta)^k = 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $(\alpha\beta)^{3k} = 1$, и ввиду того, что $\alpha^3 = 1$, получаем $\beta^{3k} = 1$. Следовательно, $4 \mid 3k$, а значит, $4 \mid k$. Аналогично доказывается, что $3 \mid k$. Следовательно, k делится на 12. Эти рассуждения показывают, что $(\alpha\beta)^t \neq 1$ при $0 < t < 12$, т. е. $\alpha\beta$ — примитивный корень 12-й степени из 1. ▷

4.131. Найти все образующие элементы группы U_{12}.

4.132. В каком случае произведение примитивных корней m-й и n-й степени из 1 является примитивным корнем mn-й степени из 1?

4.133. Доказать, что всякая подгруппа циклической группы является циклической.

Пусть G — группа с единицей e и $a \in G$. *Порядок* $o(a)$ элемента a — это наименьшее натуральное n (если оно существует), для которого $a^n = e$. Если $a^n \neq e$ при всех n, то говорят, что a — *элемент бесконечного порядка*, и пишут $o(a) = \infty$.

Порядок элемента обладает следующими свойствами:

а) $o(a)$ — делитель $|G|$, если $|G| < \infty$;

б) $o(g^{-1}ag) = o(a)$;

в) $o(a^{-1}) = o(a)$;

г) $o(a) = |\langle a \rangle|$;

д) $o(ba) = o(ab)$;

е) если $o(a) = m$ и $d \mid m$, то $o(a^d) = \dfrac{m}{d}$;

ж) если $\text{НОД}\big(k, o(a)\big) = 1$, то $\langle a^k \rangle = \langle a \rangle$ и $o(a^k) = o(a)$;

з) если $o(a) = m$ и $a^k = e$, то $m \mid k$;

и) порядок элемента $a = (a_1, \ldots, a_n)$ группы $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ равен наименьшему общему кратному чисел $o(a_i)$, т. е.

$$o(a) = \text{НОК}\big(o(a_1), \ldots, o(a_n)\big).$$

Пример 6. Найти порядки каждого из элементов группы $\mathbb{Z}_6$.

◁ $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Порядком элемента a этой группы будет являться наименьшее натуральное число m такое, что $ma = 0$. Очевидно, элемент 0 имеет порядок 1, т. е. $o(0) = 1$. Далее, наименьшее число m, для которого $m \cdot 1 = 0$, равно 6, поэтому $o(1) = 6$. Рассуждая аналогично, получим: $o(2) = 3$, $o(3) = 2$, $o(4) = 3$, $o(5) = 6$. ▷

4.134. Доказать свойства а)–и) порядка элемента.

4.135. Доказать, что группа G порядка n является циклической в том и только в том случае, если в ней есть элемент порядка n.

4.136*. Чему равны порядки элементов в группе $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ с операцией обычного умножения?

4.137*. Пусть a и b — два элемента конечного порядка группы G, причем $ab = ba$ и НОД$\big(o(a),\, o(b)\big) = 1$. Найти $o(ab)$.

4.138. Пусть a и b — элементы группы G, причем $ab = ba$, $o(a) = 4$ и $o(b) = 10$. Найти $o(ab)$.

В задачах 4.139–4.141 найти все элементы указанного порядка:

4.139. Порядка 8 в группе $\mathbb{Z}_{48}$.

4.140. Порядка 8 в группе $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ с операцией умножения.

4.141. Порядка 10 в группе $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ с операцией умножения.

4.142. Доказать, что в группе $\mathbb{Z}_n$ количество элементов порядка n равно $\varphi(n)$ [3]).

В задачах 4.143–4.145 в группе $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ с операцией умножения найти количество элементов указанного порядка.

4.143*. Порядка 28. **4.144.** Порядка 60. **4.145.** Порядка 100.

В задачах 4.146–4.148 найти порядки каждого из элементов указанных групп.

4.146. $\mathbb{Z}_{10}$. **4.147.** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4.148. Группа кватернионов (см. задачу 4.110).

4.149. Чему равен порядок элемента a в группе $\mathbb{Z}_n$? (Ответ дать в виде формулы, содержащей a и n.)

В задачах 4.150–4.153 найти количество элементов порядка m в группе G.

4.150. $m = 6$, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$.

4.151. $m = 10$, $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$.

4.152. $m = p^\alpha$, $G = \mathbb{Z}_{p^\beta}$ (p — простое число, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{N}$).

4.153. $G = \mathbb{Z}_n$.

4.154*. Доказать, что если НОД$(m,\, n) = 1$, то $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

4.155. Доказать, что если G — группа, $a,\, b \in G$, $ab = ba$ и $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$, то $o(ab) =$ НОК$\big(o(a),\, o(b)\big)$.

4.156*. Доказать, что в группе порядка n уравнение $x^m = a$ разрешимо для любого a и любого целого m, взаимно простого с n.

3. Группы подстановок. Пусть π — *подстановка*, т. е. взаимно однозначное отображение множества $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ на себя (определение см. гл. 2, § 1, п. 2). *Произведением* (*композицией*) $\pi\sigma$ подстановок π и σ называется результат последовательного выполнения сначала отображения π, а потом σ [4]). *Обратная подстановка* π^{-1} получается из π переменой строк. Совокупность всех подстановок множества $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ с операцией композиции отображений образует *симметрическую группу n-й*

[3]) Здесь $\varphi(n)$ — *функция Эйлера* (количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n).

[4]) Иногда произведением $\pi\sigma$ называют результат последовательного выполнения сначала σ, потом π.

степени S_n. Нетрудно видеть, что тождественное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя является *единицей* в группе S_n. Всякая подстановка группы S_n может быть записана в *каноническом* виде $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, т. е. с натуральным расположением чисел в верхней строке.

Подстановка, в которой некоторые символы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \{1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$ последовательно отображаются друг в друга, т. е. $\alpha_1 \to \alpha_2 \to$ $\to \ldots \to \alpha_k \to \alpha_1$, а остальные символы при этом остаются на своих местах, называется *циклом* (длины k) и коротко записывается следующим образом: $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ (запись цикла можно начинать с любого α_i $(i =$ $= 1, 2, \ldots, k)$). Всякая подстановка σ может быть записана в виде произведения непересекающихся циклов, т. е. $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)(\beta_1, \ldots, \beta_l)\ldots$ $\ldots(\omega_1, \ldots, \omega_q)$, где множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}, \ldots, \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ попарно не пересекаются.

Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Всякую подстановку можно представить в виде произведения транспозиций. Если подстановка записана в виде произведения непересекающихся циклов, то для представления ее в виде произведения транспозиций каждый из циклов нужно разложить в произведение транспозиций (например, $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) =$ $= (\alpha_1\alpha_k)(\alpha_k\alpha_{k-1})(\alpha_{k-1}\alpha_{k-2})\ldots(\alpha_3\alpha_2)(\alpha_2\alpha_1)$). Такое разложение не единственно.

Пример 7. Представить подстановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения непересекающихся циклов и в виде произведения транспозиций.

◁ Подстановка σ действует на элементы множества $\{1, 2, \ldots, 8\}$ следующим образом: $1 \to 6 \to 4 \to 1$, $2 \to 5 \to 2$, $3 \to 8 \to 3$, $7 \to 7$, поэтому в виде произведения циклов подстановка представляется следующим образом: $\pi = (164)(25)(38)$, а в виде произведения транспозиций: $\pi = (14)(46)(25)(38)$. ▷

Пример 8. Пусть $\alpha = (163)(25)(48)$, $\beta = (142)(85)$. Вычислить $\alpha\beta$.

◁ Рассмотрим, как действует подстановка $\alpha\beta = (163)(25)(48) \cdot (142)(85)$ на элементы $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Для этого, взяв элемент $a \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, найдем его образ a_α под действием α, а далее для a_α найдем его образ $a_{\alpha\beta}$ под действием β $(a \xrightarrow{\alpha} a_\alpha \xrightarrow{\beta} a_{\alpha\beta})$, т. е. $a \xrightarrow{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$. Начнем с 1: $1 \xrightarrow{\alpha} 6 \xrightarrow{\beta} 6$, $6 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 3$, $3 \xrightarrow{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} 4$, $4 \xrightarrow{\alpha} 8 \xrightarrow{\beta} 5$, $5 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$. Получили, что подстановка $\alpha\beta$ содержит цикл $(1\,6\,3\,4\,5)$. Далее получаем, что подстановка $\alpha\beta$ содержит цикл $(2\,8)$, так как $2 \xrightarrow{\alpha}$ $\xrightarrow{\alpha} 5 \xrightarrow{\beta} 8$, $8 \xrightarrow{\alpha} 4 \xrightarrow{\beta} 2$. И, наконец, $7 \xrightarrow{\alpha} 7 \xrightarrow{\beta} 7$. Следовательно, $\alpha\beta = (163)(25)(48) \cdot (142)(85) = (16345)(28)$. ▷

Пример 9. Решить уравнение: $(135)(26) \cdot x \cdot (23675) = (12)$.
◁ Подстановки $\alpha = (135)(26)$, x, $\beta = (23675)$ и $\gamma = (12)$ являются элементами группы S_n $(n \geqslant 7)$. Решение уравнения $\alpha x \beta = \gamma$ в группе (см. задачу 4.99) находится по формуле $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$. Следовательно, $x = \big((135)(26)\big)^{-1} \cdot (12) \cdot (23675)^{-1} = (153) \cdot (26) \cdot (12) \cdot (57632) = (176)(235)$. ▷

Пример 10. Найти порядок каждого из элементов группы S_5.
◁ Все 120 элементов группы S_5 имеют один из следующих видов: e (тождественная подстановка), (ab) (цикл длины 2), (abc) (цикл длины 3), $(abcd)$ (цикл длины 4), $(abcdf)$ (цикл длины 5), а также $(ab)(cd)$ и $(abc)(df)$, где $a, b, c, d, f \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Порядок элемента группы подстановок, представленного в виде произведения непересекающихся циклов, равен наименьшему общему кратному длин этих циклов (докажите самостоятельно!). Следовательно, порядки элементов группы S_5 равны: 1, 2, 3, 4, 5, 2, 6. ▷

4.157. Найти обратные подстановки к заданным:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

4.158. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) $\alpha\beta$; б) $\beta\alpha$; в) $\alpha\beta\alpha$; г) $\alpha^{-1}\beta$; д) α^3; е) $\alpha^{-2}\beta^3$; ж) β^{-125}.

4.159. Представить следующие подстановки в виде произведения непересекающихся циклов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

4.160. Записать в каноническом виде следующие подстановки, заданные как произведение циклов: а) $(135)(2467)$; б) $(147)(2356)$; в) $(123)(46)$.

4.161. Найти произведение подстановок, записанных в виде произведения циклов:

а) $(135)(2467) \cdot (147)(2356)$; б) $(13)(57)(246) \cdot (135)(24)(67)$.

4.162. Найти порядок каждой из следующих подстановок, представив ее в виде произведения непересекающихся циклов:

а)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

4.163. Представить следующие подстановки в виде произведения транспозиций:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&6&1&4&3&7&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&5&4&3&1&2&7\end{pmatrix}$.

4.164. Выписать все элементы группы S_3, выразив их через элементы

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Найти порядок каждого из элементов S_3. Составить таблицу Кэли умножения элементов этой группы.

4.165. Выяснить, какие порядки могут быть у элементов группы S_4, и сколько в S_4 имеется элементов заданного порядка.

4.166. Найти порядок указанного элемента в группе S_n:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$, $n=5$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}$, $n=5$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&1&6\end{pmatrix}$, $n=6$.

4.167. Как меняется четность (определение см. гл. 2, § 1, п. 2) подстановки при умножении ее на транспозицию?

4.168. Доказать, что четные подстановки образуют подгруппу A_n группы S_n. Чему равен порядок этой группы? Выписать все элементы группы A_4.

Гомоморфизм, отображающий группу на ее образ взаимно однозначно, называется *изоморфным вложением*.

4.169*. Доказать, что каждая конечная группа изоморфно вкладывается в группу подстановок.

В задачах 4.171–4.173 изоморфно вложить данную группу в указанную группу подстановок.

4.170. $(\mathbb{Z}_3, +)$ в S_3. **4.171.** $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2, +)$ в S_4.

4.172. Группу кватернионов в S_8.

4.173*. Доказать, что группа подстановок S_n изоморфно вкладывается в группу невырожденных $n\times n$-матриц. Вывести отсюда, что всякая группа порядка n вкладывается в группу невырожденных $n\times n$-матриц.

Движением плоскости называется отображение $\varphi\colon \mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками, т. е. $M'N'=MN$ для любых $M, N\in\mathrm{R}^2$, где $M'=\varphi(M)$, $N'=\varphi(N)$. Если $\varphi\colon (x, y)\to$ $\to (x', y')$, то движение может быть записано в виде

$$\begin{cases} x'=ax+by+p,\\ y'=cx+dy+q \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Матрица A ортогональная (т. е. $A^\top = A^{-1}$). Движение φ называется *движением 1-го рода*, если $\det A = 1$, и *движением 2-го рода*, если $\det A = -1$ (других значений $\det A$ принимать не может). Примерами движений 1-го рода служат *параллельный перенос*:

$$\begin{cases} x' = x + p, \\ y' = y + q \end{cases}$$

и *поворот* вокруг начала координат на угол α:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Поворот на угол α вокруг точки (x_0, y_0) задается формулами

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0, \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

К движениям 1-го рода относится, в частности, симметрия относительно прямой.

Для движений плоскости имеют место утверждения:

1) всякое движение 1-го рода является произведением параллельного переноса и поворота вокруг наперед заданной точки;

2) всякое движение 1-го рода является либо параллельным переносом, либо поворотом вокруг некоторой точки (*теорема Шаля*);

3) всякое движение 1-го рода является произведением двух симметрий (относительно прямых), а движение 2-го рода — произведением трех симметрий;

4) всякое движение 2-го рода может быть представлено в виде произведения симметрии относительно некоторой прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой;

5) для любых точек A, B, A', $B' \in \mathrm{R}^2$ таких, что $AB = A'B'$, существуют ровно два движения плоскости, переводящие A в A', а B в B'; одно из них 1-го, а другое 2-го рода.

Аналогичным образом определяются движения трехмерного (φ: $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$) и n-мерного (φ: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$) пространства.

Пусть Φ — фигура на плоскости или в пространстве. *Группой движений* (или *группой самосовмещений*) $G(\Phi)$ *фигуры* Φ называется множество всех движений φ, под действием которых фигура Φ взаимно однозначно отображается на себя, т. е. $\varphi(\Phi) = \Phi$.

В задачах 4.175–4.178 описать группу движений $G(\Phi)$ фигуры Φ, представить группу $G(\Phi)$ подстановками.

4.174.** Φ — правильный треугольник.

4.175. Φ — квадрат.

4.176. Φ — ромб, не являющийся квадратом.

4.177. Φ — правильный n-угольник (группа $G(\Phi)$ в этом случае называется *группой диэдра* и обозначается D_n).

В задачах 4.179 и 4.180 найти порядок группы движений фигуры.

4.178. Фигура — куб.

4.179. Фигура — правильный тетраэдр.

4.180. Доказать, что множество всех самосовмещений куба, оставляющих неподвижной некоторую фиксированную вершину куба, есть группа. Описать эту группу.

4.181.** Пусть G — группа движений плоскости. Какие элементы группы G имеют конечный порядок?

4. Фактор-группа. Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Для $a \in G$ определяются $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ — *правый смежный класс* и $aH = \{ah \mid h \in H\}$ — *левый смежный класс* группы G по подгруппе H. Если G представлена в виде объединения попарно непересекающихся своих правых классов по H:

$$G = \bigcup_{\alpha \in I} g_\alpha H,$$

то такое разбиение называется *правым разложением группы* G *по подгруппе* H. Множество $\{g_\alpha \mid \alpha \in I\}$ называется *множеством представителей* смежных классов по H. Аналогично определяется левое *разложение группы* G *по подгруппе* H. Число смежных классов в каждом из разложений G по H называется *индексом* подгруппы H в группе G.

Пример 11. Построить разложение группы S_3 по подгруппе $H = \{e, (12)\}$.

$\triangleleft$ $S_3 = \{e, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$, где $\alpha = (123)$, $\beta = (12)$. Нетрудно проверить, что $\beta\alpha = \alpha^2\beta$. Построим правое и левое разложения группы S_3 по подгруппе H.

Правые смежные классы группы G: $He = H$, $H\alpha = \{e, \beta\} \cdot \alpha = \{\alpha, \beta\alpha\} = \{\alpha, \alpha^2\beta\}$, $H\alpha^2 = \{e, \beta\} \cdot \alpha^2 = \{\alpha^2, \alpha\beta\}$; правое разложение: $G = He \cup H\alpha \cup H\alpha^2$.

Левые смежные классы: $eH = H$, $\alpha H = \alpha \cdot \{e, \beta\} = \{\alpha, \alpha\beta\}$, $\alpha^2 H = \alpha^2 \cdot \{e, \beta\} = \{\alpha^2, \alpha^2\beta\}$. Левое разложение: $G = eH \cup \alpha H \cup \alpha^2 H$.

Нетрудно заметить, что $H\alpha \neq \alpha H$, поэтому правое и левое разложения не совпадают. $\triangleright$

4.182.** Доказать, что любые два смежных класса (правых или левых) группы G по подгруппе H либо не пересекаются, либо совпадают.

4.183* (Теорема *Лагранжа*). Доказать, что порядок и индекс подгруппы конечной группы являются делителями порядка самой группы.

4.184. Доказать, что если G — конечная группа, то $|G|$ делится на $o(a)$ для каждого $a \in G$.

В задачах 4.185–4.187 найти все подгруппы указанных групп.

4.185. $\mathbb{Z}_{10}$. **4.186.** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. **4.187.** $\mathbb{Z}_n$.

В задачах 4.188–4.190 определить число подгрупп указанной группы.

4.188. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. **4.189.** $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (p — простое).

4.190. $\mathbb{Z}_{p^n}$ (p — простое).

4.191. Сколько подгрупп из четырех элементов имеет группа $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n \text{ раз}}$?

4.192. Доказать, что всякая группа порядка 6 изоморфна либо $\mathbb{Z}_6$, либо S_3.

4.193.** Доказать, что если G — группа и $|G| = p$ — простое число, то G — циклическая группа (т. е. $G \cong \mathbb{Z}_p$).

4.194*. Доказать, что если G — группа и $|G| = p^2$ (p — простое), то $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ или $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

4.195. Доказать, что подмножество K группы G является смежным классом (правым или левым) по некоторой подгруппе в том и только том случае, если для любых a, b, $c \in K$ $ab^{-1}c \in K$.

4.196. Доказать, что пересечение двух левых смежных классов по подгруппам H_1 и H_2, если оно непусто, является смежным классом по подгруппе $H_1 \cap H_2$.

4.197.** Разложить группу $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$.

4.198. Найти пересечение смежных классов в группе $\mathbb{Z}$:

а) $(2 + 5\mathbb{Z}) \cap (3 + 8\mathbb{Z})$; б) $(5 + 6\mathbb{Z}) \cap (7 + 9\mathbb{Z})$.

4.199. Пусть $G = S_3$, $H = \{e, (12)\}$, $H' = \{e, (123), (132)\}$. Построить разложения группы G (правое и левое) по подгруппам H и H'.

4.200*. Пусть A, B — конечные подгруппы группы G, $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$ (AB — не обязательно подгруппа). Доказать, что $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

4.201. Доказать, что если H — подгруппа группы G и $g \in G$, то $g^{-1}Hg$ — тоже подгруппа.

4.202. Построить разложения группы $\mathbb{Z}_{10}$ в смежные классы по каждой из ее подгрупп.

4.203. Построить левое разложение группы A_4 по подгруппе $\{e, (123), (132)\}$.

Пусть H и K — подгруппы группы G и $g \in G$. *Двойным смежным классом* HgK называется множество $\{hgk \mid h \in H,\ k \in K\}$.

4.204*. Доказать, что группа G является непересекающимся объединением двойных смежных классов по подгруппам H и K [5]).

4.205. В условиях предыдущей задачи доказать, что количество элементов двойного смежного класса может быть вычислено по формуле $|HgK| = \dfrac{|H|\cdot|K|}{|g^{-1}Hg\cap K|}$.

4.206*. В группе S_5 выяснить, какие из следующих множеств являются смежными классами и по каким подгруппам:

а) $\{(234),\ (1234)\}$; б) $\{(12),\ (123),\ (1234)\}$;

в) $\{(12),\ (152),\ (34)\}$; г) $\{e,\ (1234),\ (13)(24),\ (1432)\}$;

д) $\{(12),\ (13),\ (14),\ (15)\}$.

Подгруппа H группы G называется *нормальной* (обозначается: $H \lhd G$), если $aH = Ha$ для любого $a \in G$. Если H — нормальная подгруппа группы G, то множество всех смежных классов aH с операцией $aH\cdot bH = abH$ является группой. Она называется *фактор-группой* группы G по подгруппе H и обозначается G/H. Пусть φ: $G \to G'$ — гомоморфизм групп. Тогда $\ker\varphi = \{g \in G\,|\,\varphi(g) = e\}$ — *ядро* гомоморфизма φ, а $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(G)$ — *образ* этого гомоморфизма.

Теорема об изоморфизме. *Если φ: $G \to G'$ — гомоморфизм групп, то $\ker\varphi$ — нормальная подгруппа группы G и имеет место изоморфизм*

$$G/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

Пример 12. Доказать, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

$\lhd$ Покажем, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$, двумя способами.

1-*й способ* (непосредственная проверка). Элементы фактор-группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — смежные классы вида $a + n\mathbb{Z}$. Следовательно, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 + n\mathbb{Z},\ 1 + n\mathbb{Z},\ \ldots,\ (n-1) + n\mathbb{Z}\}$. Если $a + n\mathbb{Z}$ и $b + n\mathbb{Z}$ — два смежных класса, то $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$, причем при $a + b \geqslant n$ выражение $a + b$ можно заменить на $a + b - n$. Таким образом, при сложении смежных классов $a + n\mathbb{Z}$ и $b + n\mathbb{Z}$ их представители a и b складываются по модулю n. Следовательно, отображение $k \to k + n\mathbb{Z}$ является изоморфизмом групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2-*й способ* (применение теоремы об изоморфизме). Рассмотрим отображение φ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, которое каждому $k \in \mathbb{Z}$ ставит в соответствие его остаток от деления на n ($\varphi(k) = k \bmod n$). Нетрудно проверить, что это отображение является гомоморфизмом. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа $n\mathbb{Z}$. Из теоремы об изоморфизме следует, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. $\rhd$

Пример 13. Пусть G — группа невырожденных $n \times n$-матриц с действительными элементами, а H — множество всех матриц с опре-

[5]) В отличие от обычных смежных классов (правых и левых) двойные смежные классы по одной паре подгрупп могут содержать различное количество элементов.

делителем, равным 1. Доказать, что H — нормальная подгруппа, и выяснить, что из себя представляет фактор-группа G/H.

$\triangleleft$ Рассмотрим отображение φ: $G \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ такое, что $\varphi(A) = \det A$ (определитель матрицы A). Так как $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, то φ — гомоморфизм. Ядром этого гомоморфизма как раз служит подгруппа H. Значит, по теореме об изоморфизме $H \triangleleft G$ и $G/H \cong \mathbb{R}^*$. $\triangleright$

4.207. Доказать, что произведение H_1H_2 двух нормальных подгрупп — нормальная подгруппа.

4.208. Доказать, что подгруппа H группы G является нормальной тогда и только тогда, когда $\forall x \in G\;\; x^{-1}Hx \subseteq H$.

В задачах 4.209–4.212 выяснить, какие подгруппы являются нормальными в указанных группах.

4.209. S_3. **4.210.** S_4. **4.211.** Группа кватернионов.

4.212. Группа движений квадрата.

4.213*. Доказать, что пересечение любой совокупности нормальных подгрупп является нормальной подгруппой.

4.214*. Доказать, что в группе движений плоскости параллельные переносы, а также вращения вокруг фиксированной точки составляют подгруппы, первая из которых нормальна, а вторая нет.

4.215*. На примере группы движений квадрата (см. задачу 4.212), показать, что из соотношений $A \triangleleft B$, $B \triangleleft C$ не следует $A \triangleleft C$.

4.216*. Доказать, что если A и B — подгруппы группы G и $A \triangleleft C$, то произведение AB является подгруппой, причем в случае A, $B \triangleleft G$ имеет место также $AB \triangleleft G$.

4.217. В группе кватернионов найти:

а) все нормальные подгруппы;

б) фактор-группы по всем ее нормальным подгруппам.

4.218. Пусть G — группа движений плоскости, G_1 — подгруппа параллельных переносов. Описать фактор-группу G/G_1.

4.219. Пусть n — натуральное число, d — его делитель. Описать фактор-группу $\mathbb{Z}_n/d\mathbb{Z}_n$.

4.220*. Пусть $\mathbf{T}$ обозначает группу комплексных чисел, по модулю равных 1. Доказать, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{T}$ ($\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ рассматриваются как группы по сложению).

4.221*. Пусть A, B — подгруппы группы G и $A \triangleleft G$. Доказать, что $A \cap B \triangleleft B$ и $AB/A \cong B/(A \cap B)$.

4.222*. Пусть $A_i \triangleleft G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать, что $A_1 \times \ldots \times A_n \triangleleft G_1 \times \ldots \times G_n$ и $(G_1 \times \ldots \times G_n)/(A_1 \times \ldots \times A_n) \cong (G_1/A_1) \times \ldots \times (G_n/A_n)$.

Пусть G — группа, a и b — ее элементы. Назовем a и b *сопряженными*, если $b = g^{-1}ag$ для некоторого $g \in G$. Подгруппы H и H' назовем *сопряженными*, если $H = g^{-1}Hg$ для некоторого $g \in G$.

4.223. Доказать, что отношение сопряженности для элементов группы является отношением эквивалентности.

4.224. Доказать, что отношение сопряженности подгрупп данной группы является также отношением эквивалентности (на множестве всех подгрупп этой группы).

4.225*. Какие элементы в группе S_n сопряжены друг с другом?

5. Абелевы группы. Группа A называется *абелевой* (или *коммутативной*), если $ab = ba$ для всех $a, b \in A$. Для абелевых групп чаще используется *аддитивная запись*, т. е. операция обозначается символом «+». Элемент a абелевой группы A называется *периодическим*, если $na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} = \theta$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Множество $A \oplus B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}$ с операцией $(a, b) + (a', b') = (a+a', b+b')$ называется (*внешней*) прямой суммой абелевых групп A и B.

Аналогично $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1; \ldots; a_n \in A_n\}$ [6].

Говорят, что подгруппы $B_1, \ldots, B_n$ абелевой группы A образуют *прямую сумму*, если каждый элемент $x \in B_1 + \ldots + B_n$ *однозначно* представляется в виде $x = b_1 + \ldots + b_n$, где $b_1 \in B_1; \ldots; b_n \in B_n$. Это внутренняя прямая сумма. Так же, как и внешняя, внутренняя прямая сумма обозначается $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$.

Если p — простое число, то *примарной компонентой* $A(p)$ *абелевой группы* A называется множество всех элементов, порядок которых является степенью числа p: $A(p) = \{x \in A \mid p^m x = 0 \text{ при некотором } m\}$.

Теорема 1. *Всякая конечная абелева группа является прямой суммой своих примарных компонент, т.е.* $A = A(p_1) \oplus \ldots \oplus A(p_n)$, *где* $|A| = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$.

Примарная циклическая подгруппа — это циклическая группа порядка p^n, где p — простое число, т. е. $o(a) = p^n$.

Теорема 2. *Пусть A — конечная абелева группа, число p — простое, являющееся делителем $|A|$. Тогда $A(p) = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$, где A_j — примарные циклические, т. е. $A_j \cong \mathbb{Z}_{p^{\beta_j}}$.*

Теорема 3. *Всякая конечная абелева группа A ($|A| = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$) является прямой суммой своих примарных циклических подгрупп:*

$$A = \underbrace{A_{11} \oplus \ldots \oplus A_{1k_1}}_{A(p_1)} \oplus \underbrace{A_{21} \oplus \ldots \oplus A_{2k_2}}_{A(p_2)} \oplus \ldots \oplus \underbrace{A_{n1} \oplus \ldots \oplus A_{nk_n}}_{A(p_n)},$$

где $A_{ij} \cong \mathbb{Z}_{p_i^{\beta_{ij}}}$, причем это разложение единственно с точностью до изоморфизма и перестановки слагаемых.

Пример 14. Описать все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 20.

◁ Так как $20 = 2^2 \cdot 5$, то в соответствии с теоремами 1–3 всякая абелева группа порядка 20 изоморфна либо $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$, либо $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$. Эти

---

[6]) Прямое произведение абелевых групп изоморфно их прямой сумме.

группы между собой неизоморфны, так как во второй из них для любого a выполняется условие $10a = 0$, а в первой это не так. Заметим, что $\mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$. $\triangleright$

Пример 15. Найти все гомоморфизмы группы $\mathbb{Z}_{12}$ в $\mathbb{Z}_{25}$.
$\triangleleft$ Пусть φ: $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{25}$. Если $a \in \mathbb{Z}_{12}$, то $b = \varphi(a) \in \mathbb{Z}_{25}$. Так как $12a = 0$, то $12b = 0$. Кроме того, поскольку $b \in \mathbb{Z}_{25}$, то $25b = 0$. Имеем

$$\begin{cases} 12b = 0, \\ 25b = 0. \end{cases}$$

Но НОД$(12, 25) = 1$, поэтому $12x + 25y = 1$ для некоторых $x, y \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем

$$b = (12x + 25y)b = 12bx + 25by = 0 + 0 = 0.$$

Итак, есть только один гомоморфизм — нулевой. $\triangleright$

4.226. Пусть A — абелева группа, B_1, B_2 — ее подгруппы. Доказать, что сумма $B_1 + B_2$ прямая тогда и только тогда, когда $B_1 \cap B_2 = 0$.

4.227. Пусть A — абелева группа, $B_1, \ldots, B_n$ — ее подгруппы. Доказать, что для того, чтобы сумма $B_1 + \ldots + B_n$ была прямая, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось условие $B_i \cap (B_1 + \ldots + B_{i-1} + B_{i+1} + \ldots + B_n) = 0$.

4.228. Доказать, что $A(p) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $|A|$ делится на p (p — простое).

4.229. Найти все примарные компоненты группы A:
а)** $A = \mathbb{Z}_{24}$; б) $A = \mathbb{Z}_{30}$; в) $A = \mathbb{Z}_{101}$.

4.230. Определить количество элементов:
а)** порядка 10 в группе $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$;
б) порядка 18 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$.

4.231. Выписать все элементы порядка 6 группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$.

4.232. Найти все гомоморфизмы:
а) группы $\mathbb{Q}$ в группу $\mathbb{Z}$; б) группы $\mathbb{Z}_m$ в группу $\mathbb{Z}_n$.

4.233. Описать все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы указанных порядков: а)* 36; б) 200; в) 96.

4.234. Доказать, что $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$, если НОД$(m, n) = 1$.

4.235*. Доказать, что множество всех гомоморфизмов φ: $A \to B$ (A, B — абелевы группы) является абелевой группой относительно операции $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$.

Группу всех гомоморфизмов $A \to B$ с указанной операцией (см. задачу 4.235) обозначают $\mathrm{Hom}\,(A, B)$.

4.236. Что собой представляют группы:
а) $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_{20})$; б) $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$;
в) $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, A)$, где A — абелева группа; г) $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$?

4.237. Доказать, что группа $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ изоморфна группе матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}$.

4.238. Пусть $\mathbb{Z}_n^*$ — множество всех чисел из $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, взаимно простых с n, относительно операции умножения по модулю n.

а) Доказать, что $\mathbb{Z}_n^*$ — группа.

б) Построить таблицы Кэли групп $\mathbb{Z}_{10}^*$, $\mathbb{Z}_8^*$.

в) Чему изоморфны группы $\mathbb{Z}_{10}^*$ и $\mathbb{Z}_8^*$?

4.239. Определить количество элементов указанного порядка в заданной группе:

а) порядка p^k в группе $\mathbb{Z}_{p^n}$;

б) порядка p в группе $\mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_p$;

в) порядка p^2 в группе $\mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_p$.

§ 3. Кольца и поля

1. Кольца. Пусть R — множество, на котором заданы две бинарные операции $+$ и $\cdot$, условно называемые *сложением* и *умножением*. Множество R называется *кольцом*, если выполнены следующие условия (*аксиомы кольца*):

(К1) $\forall\, a, b, c \in R\ \ (a+b)+c = a+(b+c)$ — ассоциативность сложения;

(К2) $\exists\, 0 \in R\ \ \forall\, a \in R\ \ a+0=a$ — существование нулевого элемента;

(К3) $\forall\, a \in R\ \exists\, b \in R\ \ a+b=0$ — существование противоположного элемента; элемент b называется *противоположным* к a и обозначается $-a$;

(К4) $\forall\, a, b \in R\ \ a+b=b+a$ — коммутативность сложения;

(К5) $\forall\, a, b, c \in R\ \ (a+b)c = ac+bc,\ \ c(a+b)=ca+cb$ — дистрибутивность (*левая* и *правая*).

Группа $(R, +)$ называется *аддитивной группой* кольца R.

Кольцо R называется:

— *коммутативным*, если $ab=ba$ для всех $a, b \in R$;

— *ассоциативным*, если $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in R$;

— *кольцом с единицей*, если в R есть *единичный элемент*, т. е. такой элемент 1, что для всех $a \in R\ \ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$.

Прямым (или *декартовым*) *произведением* $R_1\times R_2\times\ldots\times R_n$ колец $R_1, R_2, \ldots, R_n$ называется множество строчек $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с *покомпонентным* сложением и умножением:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (a_1', a_2', \ldots, a_n') = (a_1+a_1', a_2+a_2', \ldots, a_n+a_n'),$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot(a_1', a_2', \ldots, a_n') = (a_1a_1', a_2a_2', \ldots, a_na_n').$$

Иногда кольцо $R_1\times R_2\times\ldots\times R_n$ называют *прямой суммой* колец $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и обозначают $R_1\oplus R_2\oplus\ldots\oplus R_n$.

В задачах 4.240–4.242 проверить, что указанные множества являются кольцами.

4.240. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения. Это кольцо называется *кольцом целых чисел*.

4.241. Произвольная абелева группа A с умножением $a \cdot b = 0$ для всех $a, b \in A$. Это кольцо называется *кольцом с нулевым умножением.*

4.242. Доказать, что множество $\mathbb{Z}_n$ с операциями сложения и умножения по модулю n является кольцом. Это кольцо называется *кольцом вычетов.*

В задачах 4.243–4.252 выяснить, являются ли кольцами следующие множества.

4.243. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения.

4.244. Множество чисел вида $\dfrac{m}{2^n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, с обычными операциями сложения и умножения.

4.245. Множество T_n верхних треугольных матриц, т. е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, с операциями матричного сложения и умножения.

4.246*. Множество всех тригонометрических многочленов вида

$$a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ с операциями сложения и умножения функций.

4.247. Множество всех тригонометрических многочленов вида

$$b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos nx,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, с операциями сложения и умножения функций.

4.248*. Множество $P(X)$ всех подмножеств множества X, если сложением считать объединение $\cup$, а умножением — пересечение $\cap$.

4.249. Множество всех симметрических $n \times n$-матриц с действительными или комплексными коэффициентами (т. е. таких матриц A, что $A^\top = A$) относительно обычных матричных операций.

4.250. Множество $P(X)$ всех подмножеств множества X, если умножением считать пересечение $\cap$, а сложением — симметрическую разность $\triangle$ (напомним, что $a \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

4.251. Множество $C[a, b]$ всех действительных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ (с обычными операциями сложения и умножения функций).

4.252*. Множество $C[a, b]$ непрерывных функций с обычной операцией сложения, если в качестве умножения взять суперпозицию функций: $(f * g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

4.253. Введем на группе $(\mathbb{Z}_5, +)$ умножение по формуле $a * b = 2ab$ (произведение берется по модулю 5).

а) Является ли $(\mathbb{Z}_5, +, *)$ кольцом?

б) Какой элемент является в этом множестве единицей по умножению?

Пример 1. Вычислить значение выражения $(3+5+9)^{1999}$ в кольце $\mathbb{Z}_{10}$.
$\lhd$ Так как $3 + 5 + 9 \equiv 7 \pmod{10}$, то $3 + 5 + 9 = 7$ в $\mathbb{Z}_{10}$, поэтому $(3 + 5 + 9)^{1999} = 7^{1999}$. Рассмотрим степени числа 7 в кольце $\mathbb{Z}_{10}$ (т. е. по модулю 10): $7^1 = 7$, $7^2 = 9$, $7^3 = 3$, $7^4 = 1$, $7^5 = 7$. Так как $7^4 = 1$, то $7^{1999} = 7^{4\cdot 499+3} = 7^3 = 3$. $\rhd$

В задачах 4.254–4.259 вычислить значение данного выражения в указанном кольце.

4.254. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 17$ в кольце $\mathbb{Z}_{18}$.

4.255. $1 + 2 + 3 + \ldots + 9$ в кольце $\mathbb{Z}_{27}$.

4.256. 3^{2001} в кольце $\mathbb{Z}_{28}$. **4.257.** 3^{-1} в кольце $\mathbb{Z}_{20}$.

4.258. 2^{-2001} в кольце $\mathbb{Z}_{15}$.

4.259. $(1 + p)^{-1}$ в кольце $\mathbb{Z}_{p^3}$ (p — простое).

В задачах 4.260–4.269 проверить, что при $p \geqslant 5$, где p — простое число, в указанном кольце справедливы приведенные равенства.

4.260. $1^2 + 2^2 + \ldots + (p - 1)^2 = 0$ в $\mathbb{Z}_p$.

4.261. $1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2 = 0$ в $\mathbb{Z}_p$.

4.262*. $1^{-2} + 2^{-2} + \ldots + \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{-2} = 0$ в $\mathbb{Z}_p$.

4.263*. $1^{-1} + 2^{-1} + \ldots + (p - 1)^{-1} = 0$ в $\mathbb{Z}_{p^2}$.

4.264*. $\displaystyle\sum_{0<i<j<p} \frac{1}{ij} = 0$ в $\mathbb{Z}_p$.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Элемент $a \in R$, для которого существует *обратный элемент* a^{-1}, называется *обратимым элементом*.

Пример 2. Найти обратимые (по умножению) элементы в кольце $\mathbb{Z}_6$.
$\lhd$ Если a — обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}_6$, то уравнение $ax = 1$ разрешимо в $\mathbb{Z}_6$, а значит, уравнение $ax = 1 + 6y$ разрешимо в $\mathbb{Z}$. Имеем:

$$ax - 6y = 1.$$

Если a делится на 2 или на 3, то левая часть этого уравнения делится на 2 или на 3, а так как правая часть не делится, то уравнение не имеет решений. Если a не делится ни на 2, ни на 3, то a взаимно просто с 6, поэтому уравнение $ax-6y=1$ разрешимо. Итак, обратимыми являются элементы из $\mathbb{Z}_6$, взаимно простые с 6, т. е. 1 и 5. $\triangleright$

В задачах 4.265–4.267 найти обратимые по умножению элементы в указанном кольце.

4.265. В кольце $\mathbb{Z}_{14}$. **4.266.** В кольце $\mathbb{Z}_{20}$.

4.267. В кольце $C[a, b]$.

4.268. Сколько обратимых элементов в кольце $\mathbb{Z}_{p^3}$ (p — простое)?

Пример 3. Решить уравнения в указанном кольце:

а) $2x+4=0$ в $\mathbb{Z}_6$; б) $6x+5=0$ в $\mathbb{Z}_8$; в) $x^2+x+6=0$ в $\mathbb{Z}_{12}$.

$\triangleleft$ а) Составим таблицу:

x	0	1	2	3	4	5
$2x+4$	4	0	2	4	0	2

Отсюда $x=1$ или $x=4$. Этот пример показывает, что в кольце *линейное уравнение* $ax+b=0$ *может иметь более одного решения.*

б) Если $6x+5=0$ в кольце $\mathbb{Z}_8$, то $6x+5=8k$ в кольце $\mathbb{Z}$. Отсюда $6x-8k=5$. Но это равенство невозможно, так как в левой его части стоит четное число, а в правой нечетное. Таким образом, уравнение $6x+5=0$ не имеет решений в кольце $\mathbb{Z}_8$, хотя $6 \neq 0$. Значит, в кольце *уравнение* $ax+b=0$ *при* $a \neq 0$ *может не иметь ни одного решения.*

в) Составим таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x^2+x+6	6	8	0	6	2	0	0	2	6	0	8	6

Отсюда получаем: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=6$, $x_4=9$. Таким образом, в кольце *квадратное уравнение может иметь более двух решений.*

В задачах 4.269–4.274 решить следующие уравнения в указанном кольце.

4.269. $3x+7=0$ в кольце $\mathbb{Z}_{18}$.

4.270. $3x+7=0$ в кольце $\mathbb{Z}_{20}$.

4.271. $6x+4=0$ в кольце $\mathbb{Z}_8$.

4.272. $x^2+x+4=0$ в кольце $\mathbb{Z}_8$.

4.273. $3x^2+6x+9=0$ в кольце $\mathbb{Z}_{36}$.

4.274. $x^4=-1$ в кольце $\mathbb{Z}_{34}$.

4.275. Привести пример кольца без единицы.

4.276.** Привести пример неассоциативного кольца.

4.277*. Доказать, что если R — кольцо с единицей и уравнение $x + x = 1$ имеет решение, то это решение единственно.

4.278. Для каких колец с единицей совпадают нулевой и единичный элементы?

Пусть R и R' — кольца. Отображение φ: $R \to R'$ называется *гомоморфизмом*, если выполнены условия:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

для всех x, $y \in R$. Если φ: $R \to R'$ взаимно однозначное отображение R на R', то φ называется *изоморфизмом*. Если существует изоморфизм φ: $R \to R'$, то говорят, что кольца R и R' *изоморфны*, и обозначают этот факт следующим образом: $R \cong R'$. Из определения гомоморфизма следуют равенства: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

Пример 4. Показать, что отображение φ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi(a) = a \pmod n$ (остаток от деления a на n) — гомоморфизм колец.
◁ Так как

$$\varphi(a + b) = (a + b) \pmod n = a \pmod n + b \pmod n$$

(сложение по модулю n) и

$$\varphi(ab) = (ab) \pmod n = a \pmod n + b \pmod n$$

(умножение по модулю n), то φ — гомоморфизм. ▷

4.279. Доказать, что образ коммутативного кольца при гомоморфизме является коммутативным кольцом.

В задачах 4.426–4.429 проверить, что следующие отображения являются гомоморфными отображениями колец.

4.280. $f : \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \to \mathbb{R}, \ f \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a - b.$

4.281. $f : \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Q} \right\} \to \mathbb{Q}, \ f \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a + b.$

4.282. Является ли отображение $C[a, b] \to \mathbb{R}$, $f \to f(a)$ гомоморфизмом колец?

В задачах 4.283 и 4.284 найти все гомоморфизмы колец.

4.283. $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$. **4.284.** $2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$.

4.285. Введем на группе $(\mathbb{Z}, +)$ умножение по формуле $a * b = - ab$. Доказать, что $(\mathbb{Z}, +, *)$ — кольцо, изоморфное кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$.

4.286*. Доказать, что $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ при НОД$(m, n) = 1$ (в правой части — прямая сумма колец).

4.287*. Пусть X — множество из n элементов и $P(X)$ — множество всех его подмножеств. В качестве сложения на $P(X)$ возьмем симметрическую разность $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, а в качестве умножения — пересечение $A\cap B$. Доказать, что $(P(X),\ \triangle,\ \cap)$ — кольцо, изоморфное кольцу $\underbrace{\mathbb{Z}_2\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_2}_{n \text{ раз}}$.

4.288. Доказать, что всякое кольцо изоморфно подкольцу некоторого кольца с единицей.

2. Поля. Пусть F — множество с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, которые мы будем условно называть *сложением* и *умножением*. Множество F называется *полем*, если выполнены следующие условия (*аксиомы поля*):

(П1) $\forall a,\ b,\ c\in F\ \ (a+b)+c = a+(b+c)$ — ассоциативность сложения;

(П2) $\exists 0\in F\ \forall a\in F\ \ a+0=a$ — существование нуля; элемент 0 называется *нулем*;

(П3) $\forall a\in F\ \exists b\in F\ \ a+b=0$ — существование противоположного элемента; элемент b называется *противоположным* к a и обозначается $-a$;

(П4) $\forall a,\ b\in F\ \ a+b=b+a$ — коммутативность сложения;

(П5) $\forall a,\ b,\ c\in F\ \ (a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ — дистрибутивность;

(П6) $\forall a,\ b,\ c\in F\ \ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ — ассоциативность умножения;

(П7) $\forall a,\ b\in F\ \ a\cdot b=b\cdot a$ — коммутативность умножения;

(П8) $\exists 1\in F\ \ \forall a\in F\ \ (1\neq 0$ и $a\cdot 1=a)$ — существование единицы; элемент 1 называется *единицей*;

(П9) $\forall a\in F\ \ (a\neq 0\Rightarrow \exists b\in F\ \ a\cdot b=e)$ — существование обратного элемента; элемент b называется *обратным* к a и обозначается a^{-1}.

Из определения видно, что по сложению всякое поле является абелевой группой. Группа $(F,\ +)$ называется *аддитивной группой* поля F. Множество $F^* = F\setminus\{0\}$ ненулевых элементов поля F является группой по умножению. Группа $(F^*,\ \cdot)$ называется *мультипликативной группой* поля F.

Пример 5. Доказать, что числа вида $a+b\sqrt{2}$, где $a,\ b\in\mathbb{Q}$, относительно обычных операций сложения и умножения образуют поле.

$\lhd$ Перед проверкой аксиом следует убедиться в том, что применение операций сложения и умножения не выводят за пределы данного множества. Пусть $F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,\ b\in\mathbb{Q}\}$. Если $x=a+b\sqrt{2}$ и $y=c+d\sqrt{2}$ — произвольные элементы из F (здесь $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Q}$), то их сумма

$$x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

также принадлежит F. Произведение

$$xy=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

также принадлежит F, так как $ac+2bd\in\mathbb{Q}$ и $ad+bc\in\mathbb{Q}$. Выполнение аксиом (П1)–(П8) очевидно; ясно, что $0+0\sqrt{2}$ является нулем, а $1+0\sqrt{2}$ —

единицей в F. Осталось проверить аксиому (П9). Для этого нам следует убедиться в том, что при $a + b\sqrt{2} \in F \setminus \{0\}$ всегда можно найти такие $x, y \in \mathbb{Q}$, что $(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2}$, т. е. надо показать, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2by = 1, \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

разрешима в $\mathbb{Q}$. Определитель

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2$$

не может равняться 0, так как $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Следовательно, система разрешима и аксиома (П9) выполняется. Значит, F — поле. $\triangleright$

4.289. Доказать, что в произвольном поле F выполняются следующие утверждения:

а) нуль в поле F единственный;

б) противоположный элемент $-a$ для данного $a \in F$ определяется однозначно;

в) единица в поле F определяется единственным образом;

г) обратный элемент a^{-1} к элементу $a \neq 0$ определяется единственным образом;

д) для любого $a \in F$ $\;a \cdot 0 = 0$;

е) в поле нет ненулевых делителей нуля, т. е. для любых $a, b \in F$ из равенства $ab = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$.

В задачах 4.280–4.283 проверить, что указанные множества являются полями.

4.290. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с операциями сложения и умножения (*поле рациональных чисел*).

4.291. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения (*поле действительных чисел*).

4.292. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с операциями сложения и умножения (*поле комплексных чисел*).

4.293. Множество $\mathbb{Z}_p$, где p — простое число, с операциями сложения и умножения по модулю p (*поле вычетов*).

Многочленом над полем F называется выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, \ldots, a_n \in F$ — коэффициенты многочлена. При $a_n \neq 0$ число n называется *степенью* многочлена $f(x)$ и обозначается $\deg f$. Степень многочлена, все коэффициенты которого равны 0, удобно считать равной $-\infty$. Вышеприведенная форма записи многочлена называется *канонической записью многочлена n-й степени*, коэффициент a_n — *старшим* *коэффициентом*, a_0 — *свободным членом*. Многочлен называется *унитарным*, если $a_n = 1$.

4.294. Пусть F — поле. Обозначим $F[x]$ множество всех многочленов $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$, $a_n \neq 0$. Сложение многочленов $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ определим правилом

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m) = \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_k + b_k)x^k.$$

(здесь $k = \max(m, n)$, $a_i = 0$ при $i > n$, $b_j = 0$ при $j > m$). Умножение определим правилом

$$\sum_i a_ix^i \cdot \sum_j b_jx^j = \sum_k c_kx^k,$$

где $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$. Доказать, что $F[x]$ — кольцо. Это кольцо называется *кольцом многочленов над полем* F.

4.295. Доказать, что множество $F(x)$ всевозможных дробей вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$, $g(x) \in F[x]$ и $g(x) \neq 0$, относительно обычных операций сложения и умножения является полем. Оно называется *полем рациональных функций*. Две дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ считаются равными, если $f(x)g_1(x) = g(x)f_1(x)$.

4.296. Доказать, что любое поле является кольцом.

4.297. Пусть F — поле. Обозначим через F_n (другое обозначение: $M_n(F)$) множество всех квадратных $n \times n$-матриц с элементами из поля F с обычными операциями матричного сложения и умножения. Доказать, что F_n — кольцо. Это кольцо называется *кольцом матриц* (над полем F).

В задачах 4.298–4.301 определить, образуют ли поле указанные элементы.

4.298. Числа вида $a + b\sqrt[3]{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, относительно обычных операций сложения и умножения.

4.299. Числа вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$, относительно обычных операций сложения и умножения.

4.300. Числа 0, 1, 2, 3, 4, 5 с операциями сложения и умножения по модулю 6.

4.301. Матрицы вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$, относительно операций матричного сложения и умножения.

4.302. Выяснить, при каких $n \in \mathbb{Z}_p$ матрицы вида $\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}$, где $x,\ y \in \mathbb{Z}_p$, являются полем относительно операций матричного сложения и умножения.

Пример 6. Вычислить значение выражения $(2\cdot 3+3\cdot 4)^{10}$ в поле $\mathbb{Z}_5$.
◁ Так как $2\cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod 5$, то $2\cdot 3 = 1$ в $\mathbb{Z}_5$. Аналогично получаем: $3\cdot 4 = 2$ в $\mathbb{Z}_5$. Следовательно, $(2\cdot 3+3\cdot 4)^{10} = (1+2)^{10} = 3^{10} = (3^2)^5 = 9^5 = (-1)^5 = -1 = 4$. Здесь использовано то, что $-1 \equiv 4 \pmod 5$, а значит, $-1 = 4$ в $\mathbb{Z}_5$. ▷

В задачах 4.303–4.306 вычислить значение выражения в указанном поле.

4.303. $(2\cdot 6+3\cdot 5)^{10}$ в поле $\mathbb{Z}_7$.
4.304. $(1+2\cdot 3\cdot 4)^{-2}$ в поле $\mathbb{Z}_{11}$.
4.305. $(7+3^{-1}\cdot 4)^{-1}$ в поле $\mathbb{Z}_{13}$.
4.306. $1^{-1}+2^{-1}+\ldots+(p-1)^{-1}$ в поле $\mathbb{Z}_p$.

Пример 7. Решить уравнение в указанном поле:
а) $3x+4=0$ в поле $\mathbb{Z}_{17}$; б) $2x^2+5x+4=0$ в поле $\mathbb{Z}_{11}$.
◁ а) *В поле уравнение* $ax+b=0$ *при* $a \neq 0$ *имеет единственное решение*: $x=(-b)a^{-1}$. В $\mathbb{Z}_{17}$ $-4=13$, $3^{-1}=6$. Следовательно, $x = 13\cdot 6 = 10$.

б) Воспользуемся обычной формулой корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, а именно, $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$[7]. В поле $\mathbb{Z}_{11}$ дискриминант $D = 5^2-4\cdot 2\cdot 4 = 25-32 = -7 = 4 = 2^2$, поэтому

$$x_{1,2} = \frac{-5\pm 2}{2\cdot 2} = \frac{-5\pm 2}{4}.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{-5-2}{4} = \frac{-7}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-5+2}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{8}{4} = 2. \ ▷$$

В задачах 4.307–4.313 решить следующие уравнения в указанном поле.

4.307. $3x+7=0$ в поле $\mathbb{Z}_{17}$. **4.308.** $5x+11=0$ в поле $\mathbb{Z}_{19}$.
4.309. $4x^2+x+2=0$ в поле $\mathbb{Z}_7$.
4.310. $2x^2+4x+1=0$ в поле $\mathbb{Z}_5$.
4.311. $x^3+x+2=0$ в поле $\mathbb{Z}_5$.
4.312. $x^4+3x^3+4x+5=0$ в поле $\mathbb{Z}_7$.
4.313. $x^4=-1$ в поле $\mathbb{Z}_{17}$.

---

[7]) Формула корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a,\ b,\ c \in F$ и $a \neq 0$, справедлива в любом поле F, в котором $1+1 \neq 0$.

В задачах 4.314 и 4.315 решить систему уравнений в указанном поле.

4.314. $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 5x+3y=7 \end{cases}$ в $\mathbb{Z}_{13}$. **4.315.** $\begin{cases} 4x+5y=6, \\ 7x+3y=1 \end{cases}$ в $\mathbb{Z}_{11}$.

4.316. Найти обратную матрицу для матрицы A, заданной в указанном поле:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (над $\mathbb{Z}_7$); б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (над $\mathbb{Z}_2$).

4.317. Найти ранг заданной матрицы в указанном поле:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (над $\mathbb{Z}_7$); б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (над $\mathbb{Z}_3$).

4.318.** Доказать *малую теорему Ферма*: $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p$.

4.319*. Найти количество элементов a поля $\mathbb{Z}_p$ $(p > 2)$, для которых уравнение $x^2 = a$ разрешимо.

4.320*. Пусть p — простое число, a, b, $c \in \mathbb{Z}_p$ и $a \neq 0$. Сколько различных значений принимает квадратный трехчлен ax^2+bx+c?

4.321*. Доказать, что если p — простое число и $p-1$ не делится на 3, то уравнение $x^3 = a$ имеет единственное решение для каждого $a \in \mathbb{Z}_p$.

4.322. Пусть F — поле чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a, $b \in \mathbb{Q}$. Разрешимо ли в F уравнение $x^3 = 2$?

4.323.** Выяснить, является ли полем прямая сумма двух полей.

Пусть F — поле и 1 — единица поля F. Если существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $n \cdot 1 = 0$, то наименьшее из таких n называется *характеристикой* поля F и обозначается $\operatorname{char} F$. Если $n \cdot 1 \neq 0$ при всех n, то по определению считается $\operatorname{char} F = 0$. Например, $\operatorname{char} \mathbb{Z}_p = p$, $\operatorname{char} \mathbb{R} = 0$, $\operatorname{char} \mathbb{C} = 0$. *Подполем* P поля F называется подкольцо в F, само являющееся полем. Наименьшее подполе данного поля называется его *простым подполем*.

Пример 8. Существует ли какое-либо поле характеристики 2, отличное от поля $\mathbb{Z}_2$?

$\triangleleft$ Пусть F — искомое поле. Так как по условию $\operatorname{char} F = 2$, то $u + u = 0$ для любого $u \in F$ и, в частности, $1 + 1 = 0$. Выберем некоторый элемент $a \in F$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ и рассмотрим элементы 0, 1, a, $a+1$ поля F. Сложение этих элементов друг с другом не выводит за пределы множества $\{0, 1, a, a+1\}$ (проверьте!). Введем умножение. Для этого достаточно определить произведение $a \cdot a$. Если $a^2 = 0$, $a^2 = 1$ или $a^2 = a$, то получаем противоречие с аксиомами поля (какими?). Значит, возможен только один вариант, когда $a^2 = a + 1$. Остается проверить, что $\{0, 1, a, a^2\}$, где $a^2 = a + 1$, является полем. Проверка осуществляется непосредственно. $\triangleright$

Пример 9. Пусть F — поле чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Что из себя представляет простое подполе F_0 этого поля?

$\triangleleft$ Единицей поля F является $1 + 0\sqrt{2}$. Наименьшее поле, содержащее $1 + 0\sqrt{2}$, состоит из элементов $a + 0\sqrt{2}$. Таким образом, $F_0 = \{a + 0\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q}\}$. Оно совпадает с полем $\mathbb{Q}$. $\triangleright$

4.324*. Доказать, что характеристика поля, если она не равна нулю, является простым числом.

4.325.** Доказать, что, если $p > 0$ — характеристика поля F, то для каждого $a \in F$ имеет место равенство $pa = 0$.

4.326. Доказать, что в каждом поле содержится простое подполе.

4.327.** Доказать, что если F_1, F_2 — два поля и $F_1 \subset F_2$, то $\operatorname{char} F_1 = \operatorname{char} F_2$.

4.328. Пусть F — поле и F_0 — его простое подполе. Доказать, что:

а) если $\operatorname{char} F = p > 0$, то $F_0 \cong \mathbb{Z}_p$;

б) если $\operatorname{char} F = 0$, то $F_0 \cong \mathbb{Q}$.

4.329.** Доказать, что если F — поле характеристики p, то для любых $a, b \in F$ имеет место равенство $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

4.330. Раскрыть скобки и упростить выражение $(a+b)^{20}$, если a, b — элементы поля характеристики 2.

Пример 10. Доказать, что множество F матриц $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Z}_7$, с обычными операциями матричного сложения и умножения является полем. Сколько элементов содержит поле F? Чему равна $\operatorname{char} F$? Что из себя представляет простое подполе F_0?

$\triangleleft$ Все аксиомы поля, за исключением (П9), для F проверяются просто. Проверим аксиому (П9). Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. Тогда a и b не равны 0 одновременно. Простым перебором убеждаемся, что $\det \alpha = a^2 + b^2 \neq 0$ в $\mathbb{Z}_7$. Отсюда следует, что существует обратная матрица α^{-1}. Имеем:

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\det \alpha} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in F.$$

Таким образом, F — поле. Очевидно, $|F| = 7^2 = 49$. Так как $7\alpha = 0$ для всех $\alpha \in F$, то $\operatorname{char} F = 7$. Наконец, простое подполе F_0 здесь состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. $\triangleright$

4.331. Является ли полем множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Z}_5$, с обычными операциями матричного сложения и умножения?

4.332. Доказать, что множество F всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Z}_5$, с обычными операциями матричного сложения и умножения является полем. Найти $|F|$, $\operatorname{char} F$, F_0.

3. Многочлены над полями. Деление многочленов. Элемент $\alpha \in F$ называется *корнем* многочлена $f(x) \in F[x]$, если $f(\alpha) = 0$. Корень α имеет *кратность* m, если $f(x)$ представим в виде $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ и $g(\alpha) \neq 0$. Корень α *простой*, если $m = 1$, и *кратный*, если $m \geqslant 2$.

Пусть $f(x)$ и $g(x) \in F[x]$, где F — поле. Говорят, что многочлен $g(x)$ *делит* $f(x)$ (обозначают $g(x) \mid f(x)$), если существует $h(x) \in F[x]$ такой, что $f(x) = h(x)g(x)$. В этом случае говорят также, что $f(x)$ делится на $g(x)$, и записывают это в виде $f(x) \,\vdots\, g(x)$.

Теорема. *Пусть $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, где F — поле и $g(x) \neq 0$. Тогда $f(x)$ может быть единственным образом представлен в виде $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где $q(x)$, $r(x) \in F[x]$, и $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Многочлен $u(x)$ называют *частным*, а $r(x)$ — *остатком.*

Пример 11. Разделить многочлен $f(x) = 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 10x - 8$ на многочлен $g(x) = 3x^2 + 4x - 5$ с остатком.

◁ Воспользуемся методом деления многочленов «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 10x - 8 & \;3x^2 + 4x - 5 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^4 + 8x^3 - 10x^2 \phantom{{}+ 10x - 8}} & \;2x^2 - x + 1 \\
-3x^3 - x^2 + 10x - 8 & \\
\underline{-3x^3 - 4x^2 + 5x \phantom{{}- 8}} & \\
3x^2 + 5x - 8 & \\
\underline{3x^2 + 4x - 5} & \\
x - 3 &
\end{array}
$$

Таким образом,

$$6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 10x - 8 = (3x^2 + 4x - 5)\underbrace{(2x^2 - x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(x - 3)}_{r(x)}. \ \triangleright$$

Теорема Безу. *При делении многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - x_0)$ остаток равен значению многочлена при $x = x_0$, т. е. $r = f(x_0)$.*

Схема Горнера. С помощью этой схемы можно осуществить деление многочлена на двучлен. Пусть даны многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots$

$\ldots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0,\ n \geqslant 1)$ и двучлен $(x - \alpha)$. Тогда $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, где остаток r — многочлен степени < 1 (т. е. $r = f(\alpha) \in F$ по теореме Безу), а неполное частное — многочлен степени $n - 1$ $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$. Быстрое нахождение коэффициентов многочлена $q(x)$ и остатка r осуществляется по следующей схеме:

Коэффициенты $f(x)$	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1}\alpha + a_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = b_1\alpha + a_1$	$r = b_0\alpha + a_0$

Заполнение таблицы производится слева направо.

Пример 12. Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ на многочлен $g(x) = x - 4$.

$\lhd$ Воспользуемся схемой Горнера:

	2	0	-3	5
4	2	8	29	121

Следовательно,

$$f(x) = (x - 4)(2x^2 + 8x + 29) + 121. \rhd$$

Пример 13. Найти значение многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1$ при $x = -3$.

$\lhd$ По теореме Безу значение многочлена $f(-3)$ равно остатку от деления $f(x)$ на $x + 3$. Составим таблицу:

	1	-2	1	1	1
-3	1	-5	16	-47	142

Отсюда

$$f(-3) = 142. \rhd$$

В задачах 4.333–4.336 для многочленов $f(x)$, $g(x)$ над полем F разделить с остатком $f(x)$ на $g(x)$.

4.333. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 7$, $g(x) = x^2 - x + 3$ $(F = \mathbb{R})$.

4.334. $f(x) = x^5 - 1$, $g(x) = x^3 - 1$ $(F = \mathbb{R})$.

4.335. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x + 1$, $g(x) = 3x^3 + x + 2$ $(F = \mathbb{Z}_5)$.

4.336. $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $g(x) = x^3 + x + 1$ $(F = \mathbb{Z}_2)$.

4.337*. Некоторый многочлен над полем $\mathbb{R}$ при делении на $(x-1)$ дает в остатке 3, а при делении на $(x+2)$ дает в остатке -7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-1)(x+2)$.

В задачах 4.338–4.340 для многочлена $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$ найти частное и остаток от деления этого многочлена на двучлен $x - x_0$.

4.338. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8,\ \ x_0 = 1.$

4.339. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x,\ \ x_0 = -3.$

4.340. $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10,\ \ x_0 = 2.$

Наибольшим общим делителем $\big(f(x),\, g(x)\big)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ над полем F называется многочлен наибольшей степени среди многочленов, делящих $f(x)$ и $g(x)$. Для любых двух многочленов, не равных одновременно нулю, наибольший общий делитель существует и определен однозначно с точностью до постоянного отличного от 0 множителя. Из всех наибольших делителей многочленов $f(x)$ и $g(x)$ обычно выбирается тот, у которого старший коэффициент равен 1. Два многочлена называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих делителей, кроме констант (многочленов нулевой степени).

Наибольший общий делитель двух многочленов находят тем же способом, который используется для двух целых чисел, — *алгоритмом Евклида*:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \quad \deg r_1(x) < \deg g(x);\\
&g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < \deg r_1(x);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), \quad \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x);\\
&r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

На каждом шаге степень многочлена, являющегося остатком, меньше степени делителя. Последний отличный от нуля остаток $r_k(x)$ и является искомым наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$, т. е. $r_k(x) = \big(f(x),\, g(x)\big)$.

Наибольший общий делитель $\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$ многочленов $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — это многочлен наибольшей степени, на который делятся многочлены $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Его можно определить индуктивно: $\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) = \big((f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)),\, f_n(x)\big)$.

Наименьшее общее кратное многочленов $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — это многочлен $M(x)$ наименьшей степени, который делится на многочлены $f_1(x), \ldots, f_n(x)$.

4.341.** Доказать, что $r_k(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

4.342.** Доказать утверждения:

а) если $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — ненулевые многочлены над полем F и $d(x)$, $d_1(x)$ — их наибольшие общие делители, то $d(x) = \lambda d_1(x)$ при некотором $\lambda \in F,\ \lambda \neq 0$;

б) наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_n(x)$ можно представить в виде $d(x) = f_1(x)q_1(x) + \ldots$ $\ldots + f_n(x)q_n(x)$, где $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ — некоторые многочлены.

Пример 14. Доказать, что если для многочленов $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ выполнены условия $h(x) \mid f(x)g(x)$ и $\big(f(x), h(x)\big) = 1$, то $h(x) \mid g(x)$.

$\triangleleft$ Так как $\big(f(x), h(x)\big) = 1$, то $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$ для некоторых $u(x)$, $v(x)$. Умножив на $g(x)$, получим:

$$g(x) = \big(f(x)g(x)\big)u(x) + g(x)h(x)v(x).$$

Следовательно, $h(x) \mid g(x)$. $\triangleright$

4.343.** Доказать утверждения:

а) наименьшее общее кратное $M(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ является делителем любого общего кратного;

б) если $M(x)$ и $d(x)$ — соответственно наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля F, то $f(x)g(x) = \lambda M(x)d(x)$ при некотором $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$.

В задачах 4.344–4.348 найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ над заданным полем.

4.344.** $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$, $g(x) = x^3 + x - 2$ (над $\mathbb{R}$).

4.345. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{R}$).

4.346. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x + 1$, $g(x) = x^4 + 4x^3 + 2x + 4$ (над $\mathbb{Z}_5$).

4.347. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$, $g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_3$).

4.348. $f(x) = x^m - 1$, $g(x) = x^n - 1$ (над $\mathbb{R}$).

В задачах 4.349–4.351 найти наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ над заданным полем, а также такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$.

4.349*. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ (над $\mathbb{R}$).

4.350. $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$ (над $\mathbb{R}$).

4.351. Многочлены из задачи 4.346.

4.352. Найти многочлен наименьшей степени над полем $\mathbb{R}$, дающий в остатке многочлен $2x$ при делении на многочлен $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$.

4.353. Найти все $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень:

а) $f(x) = x^3 - \lambda x + 2$, $g(x) = x^2 + \lambda x + 2$;

б) $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 9$, $g(x) = x^3 + \lambda x - 3$.

4.354. Определить, делится ли многочлен $(x+1)^{2^n} - x^{2^n} - 2x - 1$ на $2x^3 + 3x^2 + x$ (над полем $\mathbb{R}$).

4.355. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$ делится на многочлен $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ (над полем $\mathbb{R}$)?

В задачах 4.356 и 4.357 выяснить, при каких a, b многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$ над заданным полем.

4.356. $f(x) = x^6 + ax^3 + 2x^2 + bx + 3$, $g(x) = 2x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_5$).

4.357. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + ax^2 + 4x + b$, $g(x) = 3x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_7$).

В задачах 4.358 и 4.359 найти наименьшее общее кратное многочленов $f(x)$ и $g(x)$ над заданным полем.

4.358. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ и $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ (над полем $\mathbb{R}$).

4.359. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ и $g(x) = x^5 + x^2 + x + 1$ (над полем $\mathbb{Z}_2$).

Многочлен, представимый в виде произведения многочленов меньших степеней (с коэффициентами из поля F), называется *приводимым* над полем F. В противном случае многочлен $f(x)$ над полем F называется *неприводимым*. Приводимость многочлена зависит от рассматриваемого поля. Так, многочлен $x^2 - 3$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, но является приводимым над полем $\mathbb{R}$, так как $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

4.360. Доказать следующие свойства неприводимых многочленов над произвольным полем F:

а) всякий многочлен первой степени неприводим;

б) если многочлен $f(x)$ неприводим, то неприводимым будет и всякий многочлен $cf(x)$, где c — отличный от нуля элемент из F;

в) если $f(x)$ — произвольный многочлен, а $p(x)$ — неприводим, то либо $f(x)$ делится на $p(x)$, либо $f(x)$ и $p(x)$ взаимно просты;

г) если произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делится на неприводимый многочлен $p(x)$, то либо $f(x)$, либо $g(x)$ делится на $p(x)$;

д) всякий многочлен $f(x)$ степени n, где $n \geqslant 1$, раскладывается в произведение неприводимых многочленов[8]).

4.361. Пусть $f(x) = p_1(x)p_2(x)\ldots p_k(x)$ — разложение многочлена $f(x) \in F[x]$ в произведение неприводимых множителей и

[8]) Неприводимый многочлен при этом считается произведением k неприводимых многочленов при $k = 1$.

числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ из поля F таковы, что их произведение равно 1. Тогда $f(x) = [c_1p_1(x)][c_2p_2(x)]\ldots[c_kp_k(x)]$ также будет разложением многочлена в произведение неприводимых множителей. Доказать, что этим исчерпываются все разложения многочлена $f(x)$.

4.362. Доказать, что над полем $\mathbb{C}$ неприводимыми являются многочлены первой степени и только они.

4.363. Доказать, что над полем $\mathbb{R}$ неприводимы многочлены первой степени $Ax + B$ и квадратные трехчлены $Ax^2 + Bx + C$ с дискриминантом $D < 0$, других неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов нет.

4.364. Пусть даны разложения многочленов $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители $f(x) = bp_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\ldots p_s^{\alpha_s}(x)$ и $g(x) = cp_1^{\beta_1}(x)p_2^{\beta_2}(x)\ldots p_m^{\beta_m}(x)$. Доказать, что:

а) наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ может быть вычислен по формуле $d(x) = p_1^{\gamma_1}(x)p_2^{\gamma_2}(x)\ldots p_t^{\gamma_t}(x)$, где $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$;

б) наименьшее общее кратное двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ может быть вычислено по формуле $M(x) = p_1^{\delta_1}(x)p_2^{\delta_2}(x)\ldots p_t^{\delta_t}(x)$, где $\delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$.

Пример 15. Разложить многочлен $x^4 + 1$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{Z}_3$.

◁ Убедимся в том, что многочлен $x^4 + 1$ не имеет корней в поле $\mathbb{Z}_3$.

x	0	1	2
$x^4 + 1$	1	2	2

Значит, многочлен $x^4 + 1$ не делится на многочлены первой степени и если разлагается в произведение неприводимых множителей, то это могут быть только множители вида $x^2 + \alpha x + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$. Для их нахождения воспользуемся *методом неопределенных коэффициентов*. Запишем

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$$

и, перемножив многочлены в правой части равенства, получим

$$x^4 + 1 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Равенство многочленов в левой и правой частях равенства означает совпадение коэффициентов при одинаковых степенях x. Следовательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = 0 & (\text{коэффициент при } x^3), \\ b + d + ac = 0 & (\text{коэффициент при } x^2), \\ ad + bc = 0 & (\text{коэффициент при } x), \\ bd = 1 & (\text{коэффициент при } 1). \end{cases}$$

Из равенства $bd = 1$ следует, что либо $b = 1$, $d = 1$, либо $b = 2$, $d = 2$. Если $b = 1$, $d = 1$, то значения a и c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ ac = 1. \end{cases}$$

Система не имеет решений. При $b = 2$, $d = 2$ получим

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ ac = 2. \end{cases}$$

Отсюда $a = 1$, $c = 2$ или $a = 2$, $c = 1$. Следовательно, разложение исходного многочлена на неприводимые множители над полем $\mathbb{Z}_3$ имеет вид

$$x^4 + 1 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + x + 2). \ \triangleright$$

В задачах 4.365–4.376 разложить следующие многочлены на неприводимые множители над заданным полем.

4.365. $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ (над $\mathbb{R}$).

4.366. $x^4 - 6x^2 + 7x - 6$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

4.367. $x^n - 1$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

4.368. $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

4.369. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_5$).

4.370. $x^3 + 2x^2 + 4$ (над $\mathbb{Z}_5$). **4.371.** $x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_3$).

4.372. $x^4 + 2x^3 + 2x + 6$ (над $\mathbb{Z}_7$).

4.373. $x^4 + 4$ (над $\mathbb{R}$). **4.374.** $x^5 + 1$ (над $\mathbb{Z}_5$).

4.375. $x^6 + 27$ (над $\mathbb{R}$).

4.376. $x^{p-1} - 1$ (над $\mathbb{Z}_p$, p — простое).

В задачах 4.377 и 4.378 найти многочлен $f(x)$ наименьшей степени из $\mathbb{Z}_5[x]$, удовлетворяющий заданным условиям.

4.377. $f(0) = f(1) = f(4) = 1$, $f(2) = f(3) = 3$.

4.378. $f(0) = f(2) = f(3) = 2$, $f(1) = 1$, $f(4) = 3$.

В задачах 4.379–4.384 определить, являются ли неприводимыми многочлены над указанными полями.

4.379. $x^5 + 2x^2 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_3$).

4.380. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ (над $\mathbb{Z}_3$).

4.381. $x^5 + 2x^4 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_5$). **4.382.** $x^4 + x + 1$ (над $\mathbb{Z}_2$).

4.383. $x^3 - 2$ (над $\mathbb{Q}$). **4.384.** $x^4 - 2$ (над $\mathbb{Q}$).

4.385. Доказать, что многочлен 2-й или 3-й степени над полем F неприводим тогда и только тогда, когда он не имеет корней в F. Показать на примере, что это неверно для многочленов более высоких степеней.

4.386.** Доказать, что над любым полем существует бесконечно много неприводимых многочленов.

Назовем многочлен с целыми коэффициентами *примитивным*, если наибольший общий делитель его коэффициентов равен 1.

4.387*. Доказать *лемму Гаусса*: произведение примитивных многочленов является примитивным многочленом.

4.388*. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами неприводим над полем $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда он неприводим над кольцом $\mathbb{Z}$ (т. е. не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами).

4.389*. Доказать *критерий Эйзенштейна*: многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, если для некоторого простого p выполняются условия: а) a_n не делится на p; б) $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ делятся на p; в) a_0 не делится на p^2.

В задачах 4.390–4.399 доказать неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ следующих многочленов.

4.390*. $x^3 - 2$. **4.391.** $x^4 - 3$.

4.392. $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

4.393. $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$.

4.394. $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$ (p — простое).

В задачах 4.395 и 4.396 найти все многочлены 3-й степени, неприводимые над указанным полем.

4.395. Над полем $\mathbb{Z}_2$. **4.396.** Над полем $\mathbb{Z}_3$.

4.397. Найти все многочлены 4-й степени, неприводимые над полем $\mathbb{Z}_2$.

В задачах 4.398–4.401 определить, при каких a многочлен $f(x)$ неприводим над полем F.

4.398. $f(x) = x^4 + x + a$, $F = \mathbb{Z}_3$.

4.399. $f(x) = x^4 + a$, $F = \mathbb{Z}_3$.

4.400. $f(x) = x^4 + a$, $F = \mathbb{Z}_5$.

4.401. $f(x) = ax^4 + x + a$, $F = \mathbb{Z}_5$.

4.402. Найти какой-либо многочлен 6-й степени, неприводимый над полем $\mathbb{Z}_2$.

4.403. Доказать, что если многочлен $f(x)$ над полем $\mathbb{Z}_p$ удовлетворяет равенству $f(x+1) = f(x)$, то его степень делится на p.

4.404*. Доказать, что многочлен $x^p - x + a$ при $a \neq 0$ неприводим над полем $\mathbb{Z}_p$.

Теорема. *Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо. Если R не имеет ненулевых делителей нуля, то R может быть вложено в поле, т. е. существует поле F такое, что каждый элемент*

$x \in R$ *представляется в виде* $x = ab^{-1}$ *при подходящих* a, $b \in R$ (т. е. в виде *дроби* с числителем и знаменателем из R).

Поле F называется *полем частных кольца* R.

Пример 16. Выяснить, что из себя представляет поле частных кольца $\mathbb{Z}[x]$.

◁ Всякий многочлен $\varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ после приведения его коэффициентов к общему знаменателю может быть представлен в виде $\dfrac{1}{m}u(x)$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $u \in \mathbb{Z}[x]$. Следовательно, множество дробей вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где f, $g \in \mathbb{Q}[x]$, совпадает с множеством дробей $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, где u, $v \in \mathbb{Z}[x]$. Следовательно, поле частных кольца $\mathbb{Z}[x]$ совпадает с полем рациональных функций $\mathbb{Q}(x)$. ▷

В задачах 4.405–4.407 определить, что представляет собой поле частных кольца R.

4.405. $R = F$ — поле.

4.406. $R = 2\mathbb{Z}$ — кольцо четных чисел.

4.407. $R = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ — *кольцо целых гауссовых чисел.*

В задачах 4.408–4.410 определить, имеют ли поле частных указанные кольца.

4.408. Кольцо $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$.

4.409. Кольцо $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

4.410. Кольцо $F[x, y]$ всех многочленов от двух переменных над полем F.

Дробь вида $\dfrac{u(x)}{p^n(x)}$, где $p(x)$ — неприводимый над полем F многочлен и $\deg u(x) < \deg p(x)$, называется *простейшей.* Дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ — *правильная*, если $\deg f(x) < \deg g(x)$, и *неправильная* в противном случае.

Теорема. *Всякую правильную дробь* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *можно разложить на простейшие, т. е. представить ее в виде* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sum\limits_{i,j} \dfrac{u_{ij}(x)}{p_i^j(x)}$, *где* $p_i(x)$ — *неприводимые многочлены над полем* F *и* $\deg u_{ij}(x) < \deg p_i(x)$.

Пример 17. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{R}$ следующую дробь:

$$\frac{2x+3}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}.$$

◁ Разложим знаменатель на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители. Заметим, что $x = 2$ — его корень. Следовательно, по теореме Безу данный многочлен делится на $x - 2$. Разделив, получим:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = (x-2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8).$$

Многочлен во второй скобке также имеет корень $x = 2$. Разделив еще раз, получим:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = (x-2)(x-2)(x^2+4) = (x-2)^2(x^2+4).$$

Следовательно, разложение дроби на простейшие (пока с неопределенными коэффициентами) имеет вид

$$\frac{2x+3}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

После приведения к общему знаменателю суммы дробей и отбрасывания знаменателя получим тождество:

$$2x + 3 = A(x-2)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)^2.$$

Равенство многочленов означает совпадение коэффициентов при каждой степени x. Следовательно, мы имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = A + C & \text{(коэффициент при } x^3\text{)}, \\ 0 = -2A + B - 4C + D & \text{(коэффициент при } x^2\text{)}, \\ 2 = 4A + 4C - 4D & \text{(коэффициент при } x^1\text{)}, \\ 3 = -8A + 4B + 4D & \text{(коэффициент при } x^0\text{)}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $A = -\dfrac{3}{16}$, $B = \dfrac{7}{8}$, $C = \dfrac{3}{16}$, $D = -\dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{2x+3}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16} = -\frac{3/16}{x-2} + \frac{7/8}{(x-2)^2} + \frac{(3/16)x - 1/2}{x^2+4}. \ \triangleright$$

В задачах 4.411 и 4.412 выделить целую часть дроби над заданным полем, т. е. представить дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби.

4.411. $\dfrac{x^4 + x + 3}{x^2 + 2x - 1}$ (над $\mathbb{R}$). **4.412.** $\dfrac{2x^4}{3x^3 + x + 4}$ (над $\mathbb{Z}_5$).

В задачах 4.413–4.416 представить рациональную дробь в виде суммы простейших над полем $\mathbb{C}$.

4.413. $\dfrac{1}{x^4 - 1}$. **4.414.** $\dfrac{x}{x^4 + 1}$.

4.415. $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. **4.416.** $\dfrac{x}{(x^4-1)^2}$.

В задачах 4.417–4.420 представить рациональную дробь в виде суммы простейших над полем $\mathbb{R}$.

4.417. $\dfrac{1}{x^3-1}$. **4.418.** $\dfrac{x}{x^4-1}$.

4.419. $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$. **4.420.** $\dfrac{x}{(x^2+1)^2(x+1)}$.

В задачах 4.421–4.424 представить рациональную дробь в виде суммы простейших над указанным полем.

4.421. $\dfrac{1}{x(x^3+x^2+x+1)}$ (над $\mathbb{Z}_2$).

4.422. $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2(x^2+x+1)(x+1)}$ (над $\mathbb{Z}_2$).

4.423. $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5+x^4+1}$ (над $\mathbb{Z}_2$).

4.424. $\dfrac{x^2+2x+2}{x(x^2+2)(x^2+1)}$ (над $\mathbb{Z}_3$).

В задачах 4.425–4.428 разложить на простейшие дроби над указанным полем.

4.425. $\dfrac{1}{x^p-x}$ (над $\mathbb{Z}_p$). **4.426.** $\dfrac{x}{x^{p-1}-1}$ (над $\mathbb{Z}_p$).

4.427. $\dfrac{1}{x^n-1}$ (а) над $\mathbb{C}$; б) над $\mathbb{R}$). **4.428.** $\dfrac{x}{x^n+1}$ (над $\mathbb{C}$).

В задачах 4.429–4.431 выразить через $\varphi(x)$ указанные суммы, где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

4.429. $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}$. **4.430.** $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{x-x_i}$. **4.431.** $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(x-x_i)^2}$.

4.432. Указать какое-либо бесконечное поле характеристики 2.

Производная многочлена $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ над полем F определяется следующим образом: $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+2a_2x+a_1$.

Пример 18. Найти производную многочлена $f(x)=x^4+x^3+x^2+$ $+x+1$ над полем $\mathbb{Z}_2[x]$.

$\lhd$ $f'(x)=4x^3+3x^2+2x+1=x^2+1.$ $\rhd$

Теорема. *Пусть F — поле и $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из F. Многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней ни в каком расширении поля F в том и только том случае, если $f(x)$ и $f'(x)$ взаимно просты.*

Пример 19. Найти какой-нибудь многочлен $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$, не имеющий кратных корней в $\mathbb{R}$, для которого $\big(f(x),\, f'(x)\big) \neq 1$.
◁ Таковым является, например, многочлен $f(x) = (x^2+1)^2$. Так как $f'(x) = 2(x^2+1)\cdot 2x$, то $\big(f(x),\, f'(x)\big) = x^2+1 \neq 1$. Противоречия с предыдущей теоремой здесь нет, так как многочлен $f(x)$, хотя и не имеет корней в $\mathbb{R}$, но имеет кратные корни в поле $\mathbb{C}$, являющемся расширением поля $\mathbb{R}$: $(x^2+1)^2 = (x+i)^2(x-i)^2$. ▷

Дифференцирование можно перенести с кольца многочленов $F[x]$ на поле рациональных функций $F(x)$, положив

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Пример 20. Найти производную функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^3+2x}$ из $\mathbb{Z}_3(x)$.

$$◁\ \ \varphi'(x) = \frac{1'\cdot(x^3+2x) - 1\cdot(x^3+2x)'}{(x^3+2x)^2} = \frac{-3x^2-2}{x^6+4x^4+4x^2} = \\ = \frac{1}{x^6+x^4+x^2}.\ ▷$$

Пример 21. Найти кратные корни многочлена $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$ из $\mathbb{R}[x]$.
◁ Найдем производную:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 10x - 6 = 2(2x^3 + 3x^2 - 5x - 3).$$

Затем найдем $d(x) = \big(f(x),\, f'(x)\big)$. Для этого применим алгоритм Евклида к многочленам $f(x)$ и $f'(x)$. В результате получим: $d(x) = x^2 + x - 3$, а $f(x) = (x^2+x-3)^2$. Значит, $f(x)$ имеет двукратные корни $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. ▷

4.433. Доказать свойства производной многочлена над произвольным полем F:

1) $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$;

2) $\big(\lambda f(x)\big)' = \lambda f'(x)\ \ (\lambda \in F)$;

3) $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4) $\big(f(g(x))\big)' = f'(g)g'(x)$.

4.434. Доказать, что для любого поля F и рациональной функции $\varphi(x) \in F(x)$ верно равенство $\left(\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)' = -\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$.

В задачах 4.435 и 4.436 определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$ из $\mathbb{R}[x]$.

4.435. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ \ x_0 = 2.$

4.436. $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x - 8,\ \ x_0 = -1.$

В задачах 4.437 и 4.438 найти кратные действительные корни многочленов из $\mathbb{R}[x]$.

4.437. $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4.$

4.438. $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4.$

4.439*. Доказать, что в поле $\mathbb{R}$ многочлен $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

4.440. Найти кратность корня a многочлена $f(x) - f'(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$, где $f(x)$ — многочлен из $\mathbb{R}[x]$ степени 3.

4.441. При каких соотношениях между a и b многочлен $x^5 + ax^3 + b$ имеет в поле $\mathbb{R}$ двукратный корень, отличный от 0?

4.442. Найти все a, при которых многочлен $f(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ имеет кратный корень:

а) $f(x) = x^3 - 3x + a$; б) $f(x) = x^4 - 4x + a$.

4.443. При каком a многочлен $x^5 - ax^2 - ax + 1$ из $\mathbb{R}[x]$ имеет число -1 корнем кратности, не меньшей 2?

4. Фактор-кольцо. Непустое подмножество A кольца R называется *подкольцом* этого кольца, если выполнены условия:

(Пк1) $\forall\, a, b \in A\ \ a + b \in A$;

(Пк2) $\forall\, a \in A\ \ -a \in A$;

(Пк3) $\forall\, a, b \in A\ \ ab \in A$.

Первые два из этих условий означают, что подкольцо является подгруппой аддитивной группы $(R, +)$ (но не наоборот).

Непустое подмножество I кольца R называется *идеалом* кольца R (обозначается: $I \lhd R$), если выполнены условия:

(И1) $\forall\, a, b \in I\ \ a + b \in I$;

(И2) $\forall\, a \in I\ \ -a \in I$;

(И3) $\forall\, a \in I\ \forall\, r \in R\ \ ra \in I,\ ar \in I$.

Левый идеал — непустое подмножество I, для которого $I + I$, $-I$, $RI \subseteq R$; *правый идеал*: $I + I$, $-I$, $IR \subseteq R$.

Во всяком кольце R есть *тривиальные идеалы*: это 0 — наименьший идеал и R — наибольший идеал. Кольцо R называется *простым*, если оно не имеет нетривиальных идеалов.

Суммой двух подмножеств A и B кольца R называется множество $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, *произведением* подмножеств — множество $A \cdot B = \left\{\sum\limits_i a_i b_i \mid a_i \in A,\ b_i \in B\right\}$.

Пример 22. Найти общий вид идеалов кольца $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, где R_i — кольца с единицей.

$\lhd$ Докажем, что идеалы кольца R — это в точности множества вида $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$, где $I_i \lhd R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ясно, что $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n \lhd R$, если $I_i \lhd R_i$ для всех i (докажите!). Осталось показать, что всякий идеал имеет такой вид. Пусть $I \lhd R$. Обозначим через π_i гомоморфизм $R \to R_i$, определенный правилом $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ (*проекция* R на R_i). Положим $I_i = \pi_i(I)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Проверим, что $I_i \lhd R_i$. Пусть $x, y \in I_i$ и $r \in R_i$. Положим $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ («1» на i-м месте, «0» — на остальных). Очевидно, $e_i^2 = e_i$ и $e_1 + \ldots + e_n = 1$ — единица кольца R. Так как $x, y \in I_i$, то $x = e_i x$, $y = e_i y$, следовательно, $-x = e_i(-x) \in I_i$, $x + y = e_i(x + y) \in I_i$, $rx = r \cdot e_i x = e_i(rx) \in I_i$ и аналогично $xr \in I_i$. Значит, $I_i \lhd R_i$. Если теперь a — произвольный элемент из I, то $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in R_i$, следовательно, $a = e_1 a_1 + \ldots \ldots + e_n a_n \in I_1 + \ldots + I_n$ (так как $a_i = e_i a \in I_i$). Утверждение доказано. $\rhd$

Пример 23. Доказать, что кольцо F_n всех $n \times n$-матриц над полем F не имеет нетривиальных идеалов.
$\lhd$ Пусть $I \lhd F_n$ и $I \neq 0$. Тогда существует матрица $A = \|a_{ij}\| \in I$ такая, что $a_{ij} \neq 0$ при некоторых i, j. Пусть E_{kl} обозначает матрицу, у которой на (k, l)-м месте стоит 1, а на остальных местах 0. Так как I — идеал, то $E_{si}A(\lambda a_{ij}^{-1} E_{jt}) \in I$ при всех $\lambda \in F$ и любых s, t. Но $E_{si}A(\lambda a_{ij}^{-1} E_{jt}) = \lambda E_{st}$. Итак, все матрицы λE_{st} принадлежат I. Но тогда любая матрица принадлежит I, так как если $B \in F_n$, то $B = \sum\limits_{s,t} b_{st} E_{st} \in I$. Следовательно, $I = F_n$. $\rhd$

Пример 24. Существуют ли в кольцах $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, F_n подкольца, не являющиеся идеалами?
$\lhd$ Если A — подгруппа группы $(\mathbb{Z}, +)$, то $A = n\mathbb{Z}$ при некотором n. Ясно, что $n\mathbb{Z}$ — идеал кольца $\mathbb{Z}$. Следовательно, в кольце $\mathbb{Z}$ нет не только подколец, но и аддитивных подгрупп, не являющихся идеалами. В кольце $\mathbb{R}$ есть подкольцо $\mathbb{Q}$, не являющееся идеалом. В кольце матриц F_n при $n > 2$ есть подкольца, не являющиеся идеалами. Приведем несколько примеров: а) подкольцо T_n верхних треугольных матриц; б) подкольцо диагональных матриц; в) подкольцо *скалярных* матриц, т. е. матриц вида λE, где $\lambda \in F$, а E — единичная матрица. $\rhd$

4.444.** Доказать, что в поле нет нетривиальных идеалов.

4.445. Доказать, что сумма двух идеалов является идеалом.

4.446. Доказать, что произведение двух идеалов ассоциативного кольца является идеалом.

4.447. Привести пример подколец A и B кольца $F[x]$ (F — поле), для которых сумма $A + B$ не является подкольцом.

4.448. Будет ли произведение AB двух подколец A и B ассоциативно-коммутативного кольца также являться подкольцом?

4.449. Перечислить все идеалы кольца $\mathbb{Z}_{20}$.

4.450. Доказать, что если в кольце R $a^2 = a$ для всех $a \in R$, то R коммутативно и $a + a = 0$ для всех a.

4.451. Для идеалов кольца $\mathbb{Z}$ вычислить:
а)** $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$; б) $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$; в) $m\mathbb{Z} \cdot n\mathbb{Z}$.

В задачах 4.452 и 4.453 найти сумму указанных идеалов.

4.452. $4\mathbb{Z} + 10\mathbb{Z}$. **4.453.** $8\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z}$.

В задачах 4.454 и 4.455 найти пересечение указанных идеалов.

4.454. $4\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z}$. **4.455.** $8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}$.

4.456. Найти все идеалы кольца $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

4.457.** Доказать, что если F — поле, $F[x]$ — кольцо многочленов над F, то всякий идеал I кольца $F[x]$ имеет вид $I = f(x)F[x]$, где $f(x)$ — некоторый элемент $F[x]$.

4.458. Доказать, что если F — поле и $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, то $f(x)F[x] + g(x)F[x] = d(x)F[x]$, где $d(x) = \big(f(x), g(x)\big)$.

4.459. Доказать, что множество всех $n \times n$-матриц над полем F, у которых первый столбец состоит из нулей, образует левый идеал кольца F_n. Является ли он правым идеалом?

Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Для каждого $a \in R$ множество aR является идеалом. Это наименьший идеал, содержащий элемент a. Он называется *главным идеалом.*

4.460.** Доказать, что в кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел все идеалы главные.

4.461.** Найти все идеалы кольца $\mathbb{Z}_n$. Какие из них являются главными?

4.462. Доказать, что в кольце $\mathbb{Z}[x]$ не все идеалы главные.

Элемент e кольца R называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$.

В задачах 4.463–4.466 доказать утверждения, если R — ассоциативное кольцо с единицей.

4.463. Если e — идемпотент, то $1 - e$ — тоже идемпотент.

4.464. Если e, f — идемпотенты и $ef = fe$, то ef — идемпотент.

4.465. Если e, f — идемпотенты и $ef = fe$, то $e + f - ef$ — идемпотент.

4.466. Если $e_1, \ldots, e_n$ — *ортогональные идемпотенты* (т. е. $e_ie_j = 0$ при $i \neq j$), то $e_1 + \ldots + e_n$ — идемпотент.

4.467. Пусть R — ассоциативное кольцо и E — множество его идемпотентов. Доказать, что E будет частично упорядоченным множеством, если положить $e \leqslant f \Leftrightarrow ef = fe = e$.

4.468. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и $e \in R$ — *центральный идемпотент* (т. е. $e^2 = e$ и $er = re$ для всех $r \in R$). Доказать, что R разлагается в прямую сумму колец: $R = eR \oplus (1 - e)R$.

В задачах 4.469 и 4.470 в кольце R найти ненулевые ортогональные идемпотенты e и f такие, что $e+f = 1$ и $R = eR\oplus(1-e)R$.

4.469. $R = \mathbb{Z}_{24}$. **4.470.** $R = \mathbb{Z}_{45}$.

Пусть R — кольцо, I — его идеал. Образуем фактор-группу R/I, рассматривая лишь операцию сложения. Элементы фактор-группы имеют вид $a+I$ и складываются по правилу $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$. Введем умножение на группе R/I, полагая

$$(a+I)(b+I)=ab+I.$$

Множество R/I с введенными операциями является кольцом. Оно называется *фактор-кольцом кольца R по идеалу I.*

Пример 24. Пусть F — поле, $F[x]$ — кольцо многочленов над F и $f(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$. Тогда элементы фактор-кольца $F[x]/f(x)F[x]$ могут быть представлены в виде $\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+ +I$, где $I=f(x)F[x]$, а $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$.
◁ Действительно, пусть $g(x)+I$ — элемент фактор-кольца. Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком: $g(x)=f(x)q(x)+r(x)$, где $\deg r(x)<n$. Отсюда получаем:

$$g(x)+I=f(x)q(x)+r(x)+I=r(x)+I,$$

так как $f(x)q(x)\in I$. ▷

4.471. Найти общий вид элементов фактор-кольца $A = =\mathbb{R}[x]/(x^3-2x^2+4)\mathbb{R}[x]$.

4.472. Доказать следующую теорему. Пусть F — поле, $F[x]$ — кольцо многочленов над F и $f(x)$ — ненулевой многочлен. Тогда фактор-кольцо $A=F[x]/f(x)F[x]$ является полем в том и только том случае, если многочлен $f(x)$ неприводим над полем F.

Пусть φ: $R\to R'$ — гомоморфизм колец. Определим *ядро* $\ker\varphi$ и *образ* $\operatorname{Im}\varphi$ гомоморфизма φ следующим образом:

$$\ker\varphi=\{x\in R\,|\,\varphi(x)=0\},\quad \operatorname{Im}\varphi=\varphi(R)=\{\varphi(x)\,|\,x\in R\}.$$

Теорема об изоморфизме для колец. *Пусть $\varphi: R\to R'$ — гомоморфизм колец. Тогда $\ker\varphi$ является идеалом кольца R и имеет место изоморфизм*

$$R/\ker\varphi\cong\operatorname{Im}\varphi.$$

Пусть R — кольцо и I — его идеал. Гомоморфизм $R\to R/I$, ставящий в соответствие каждому элементу $a\in R$ смежный класс $a+I$, называется *естественным гомоморфизмом.*

Пример 25. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $d\,|\,n$. Доказать, что $d\mathbb{Z}_n \lhd \mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_n/d\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_d$.
◁ Определим отображение φ: $\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_d$ правилом: $\varphi(x)=x \bmod d$. Это отображение определено корректно, так как если $x\equiv y\pmod n$ и $d\,|\,n$, то $x\equiv y\pmod d$. Проверка того, что φ является гомоморфизмом, осуществляется непосредственно. Ядро отображения φ состоит из элементов, которые $\equiv 0\pmod d$, т.е. $\ker\varphi=d\mathbb{Z}_n$. Следовательно, по теореме об изоморфизме $d\mathbb{Z}_n\lhd\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_n/d\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_d$. ▷

Пример 26. Доказать, что изоморфны друг другу и являются полями кольца R_1, R_2 и R_3, где $R_1 = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)\mathbb{R}[x]$, $R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ с обычными операциями сложения и умножения матриц и $R_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ с операциями $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$, $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

◁ Элементы из R_1 имеют вид $ax + b + I$, где $I = (x^2+1)\mathbb{R}[x]$. Полагая $x + I = \theta$, получим:

$$R_1 = \{a\theta + b \mid a, b \in \mathbb{R},\ \theta^2 + 1 = 0\} = \mathbb{R}[\theta].$$

Соответствия

$$(a, b) \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \to a\theta + b$$

между этими кольцами ($R_3 \to R_2 \to R_1$), очевидно, взаимно однозначны. Сохранение операций при этих соответствиях проверяется непосредственно. Следовательно, кольца изоморфны. Так как $R_1 = R[\theta]$ — поле, то R_2 и R_3 — также поля. Эти поля изоморфны полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел. ▷

Пример 27. Доказать, что если F — поле и $f(x)$ — многочлен первой степени над F, то имеет место изоморфизм $F[x]/f(x)F[x] \cong F$.

◁ Положим $I = f(x)F[x]$. Элементы фактор-кольца $F[x]/I$ имеют вид $g(x) + I$, где $g(x) \in F[x]$. Представители смежных классов могут быть выбраны таким образом, что $\deg g(x) < \deg f(x)$. Значит, $F[x]/I = \{\lambda + I \mid \lambda \in F\}$. Нетрудно показать, что соответствие $\lambda \mapsto \lambda + F$ взаимно однозначно и сохраняет операции, а значит, является изоморфизмом колец F и $F[x]/I$. ▷

4.473.** Доказать, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

4.474. Выписать все элементы фактор-кольца $\mathbb{Z}_8/4\mathbb{Z}_8$.

4.475. Определить изоморфные образы заданных фактор-колец: а) $\mathbb{Z}_{12}/2\mathbb{Z}_{12}$; б) $\mathbb{Z}_{48}/6\mathbb{Z}_{48}$.

4.476. Найти все идеалы кольца $\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)\mathbb{Q}[x]$.

4.477. Пусть $R = F[x]$ — кольцо многочленов над полем F, $p = p(x)$ — неприводимый над F многочлен. Найти все идеалы кольца R/p^nR.

4.478. Доказать, что если R — ассоциативное кольцо и I — его идеал, то кольцо R/I также ассоциативно.

4.479. Пусть R — кольцо и I — его идеал. Будет ли R коммутативным, если I и R/I коммутативны?

4.480.** Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — кольца и $I_1, \ldots, I_n$ — идеалы этих колец. Доказать, что

$$R_1 \oplus \ldots \oplus R_n/I_1 \oplus \ldots \oplus I_n \cong (R_1/I_1) \oplus \ldots \oplus (R_n/I_n).$$

4.481.** Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, a и b — его элементы и $R = aR + bR$. Доказать, что $R/abR \cong R/aR \oplus R/bR$.

В задачах 4.482–4.450 определить, чему изоморфны указанные фактор-кольца.

4.482.** $\mathbb{R}[x]/(x^3 - 1)\mathbb{R}[x]$. **4.483.** $\mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 2)\mathbb{R}[x]$.

4.484. $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 1)\mathbb{Q}[x]$. **4.485.** $\mathbb{R}[x]/(x^4 - 1)\mathbb{R}[x]$.

4.486. $\mathbb{R}[x]/(x^4 + 1)\mathbb{R}[x]$. **4.487.** $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 4)\mathbb{Z}_5[x]$.

Если R — кольцо и I — его идеал, то будем писать $a \equiv b \pmod I$ в случае, если $a - b \in I$ (здесь a, $b \in R$).

Китайская теорема об остатках. *Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, $A_1, \ldots, A_n$ — его идеалы такие, что $A_i + A_j = R$ при $i \neq j$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n \in R$ существует такое $x \in R$, что $x \equiv x_1 \pmod{A_1}, \ldots, x \equiv x_n \pmod{A_n}$.*

Идеалы A, B с условием $A + B = R$ называют *взаимно простыми.* Из теоремы непосредственно следует, что система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv x_1 \pmod{n_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv x_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

имеет решение в кольце целых чисел, если числа $n_1, \ldots, n_k$ попарно взаимно просты.

Пример 28. Решить систему сравнений $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv 1 \pmod 8. \end{cases}$

◁ Имеем:

$$x = 3 + 5m = 1 + 8n,$$

где m, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$5m - 8n = -2.$$

Частное решение этого уравнения: $m_0 = -2$, $n_0 = -1$. Общее решение: $m = -2 + 8t$, $n = -1 + 5t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$x = 3 + 5m = 3 + 5(-2 + 8t) = -7 + 40t.$$

Окончательно получаем: $x \equiv 33 \pmod{40}$. ▷

Пример 29. Существует ли многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $f(x) - x$ делится на $(x-1)^2$, а $f(x) + 3$ делится на x^2?

◁ Многочлены $(x-1)^2$ и x^2 взаимно просты, поэтому существование многочлена $f(x)$ следует из Китайской теоремы об остатках. Найдем все такие многочлены. Имеем:

$$f(x) - x = u(x)(x-1)^2, \quad f(x) + 3 = v(x)x^2.$$

Отсюда

$$x+3=v(x)x^2-u(x)(x-1)^2. \tag{$*$}$$

Применим алгоритм Евклида к многочленам $(x-1)^2$ и x^2. Находим:

$$(x-1)^2=x^2\cdot 1+(-2x+1) \quad \text{или} \quad x^2=(-2x+1)\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$1=x^2\cdot 4+(2x+1)(-2x-1)=x^2\cdot 4+(2x+1)\big((x-1)^2-x^2\big)=$$
$$=(2x+1)(x-1)^2+(-2x+3)x^2.$$

Отсюда

$$x+3=(x+3)(-2x+3)x^2-(x+3)(-2x-1)(x-1)^2.$$

Значит,

$$v_0(x)=(x+3)(-2x+3), \quad u_0(x)=(x+3)(-2x-1).$$

Общее решение уравнения $(*)$ имеет вид

$$u(x)=(x+3)(-2x-1)+t(x)x^2,$$

где $t(x)$ — произвольный многочлен. Таким образом,

$$f(x)=x+\big((x+3)(-2x-1)+t(x)x^2\big)(x-1)^2=$$
$$=-2x^4-3x^3+9x^2-3+t(x)x^2(x-1)^2=$$
$$=-7x^3+11x^2-3+t_1(x)x^2(x-1)^2.$$

Это общий вид всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям задачи. ▷

4.488. Доказать, что в кольце $\mathbb{Z}$ равенство $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ имеет место тогда и только тогда, когда числа m и n взаимно просты.

4.489. Решить системы сравнений:

а) $\begin{cases} x\equiv 3 \pmod{12}, \\ x\equiv 4 \pmod{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{5}, \\ x\equiv 1 \pmod{6}, \\ x\equiv 5 \pmod{7}. \end{cases}$

4.490. Найти многочлен наименьшей степени, который при делении на $2x+1$ дает в остатке 3, а при делении на x^2 дает в остатке $x-3$.

5. Расширения полей. Пусть F — поле, $p(x)$ — неприводимый над полем F многочлен. Кольцо $A=F[x]/p(x)F[x]$ является полем. Элементы этого кольца имеют вид

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+I,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$ и $p(x)F[x] = I$. Положим $\theta = x + I$. Тогда $a = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \ldots + \alpha_{n-1}\theta^{n-1}$. Будем отождествлять элемент $\alpha + I$ поля A с элементом α поля F. Теперь мы вправе считать, что A — расширение поля F, т. е. $F \subseteq A$. Элементы $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$ образуют базис поля A, рассматриваемого как линейное пространство над полем F. Так как $\theta^2 = (x+I)^2 = x^2 + I$, $\theta^3 = x^3 + I$ и вообще, $g(\theta) = g(x) + I$ для любого многочлена $g(x)$ с коэффициентами из F, то $p(\theta) = p(x) + I = 0 + I = 0$ в кольце A. Итак, θ является корнем многочлена $p(x)$.

Каковы бы ни были поле F и многочлен $f(x)$ с коэффициентами из F, существует поле $F_1 \supseteq F$ такое, что $f(x)$ имеет корень в поле F_1.

Для неприводимого многочлена $f(x)$ построенное выше поле F_1 — наименьшее поле, содержащее поле F и корень многочлена $f(x)$. Поэтому говорят, что *поле F_1 получено присоединением к полю F корня многочлена f*, и пишут $F_1 = F[\theta]$ (или $F_1 = F(\theta)$)[9]).

Если F — некоторое поле и $f(x)$ — многочлен над F (необязательно неприводимый), то существует расширение F' поля F, в котором многочлен $f(x)$ разлагается на линейные множители: $f(x) = A(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$, $\alpha_i \in F'$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наименьшее поле, в котором $f(x)$ разлагается на линейные множители, называется *полем разложения многочлена* $f(x)$. Это поле можно получить, взяв в F' пересечение всех подполей, содержащих поле F и элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поле, полученное присоединением к полю F элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, обозначим $F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ (или $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$).

Пусть F — поле и K — его подполе. Нетрудно проверить, что F является линейным пространством над K. Размерность этого пространства $\dim_K F$ называется *степенью расширения* $K \subseteq F$.

Пример 30. Доказать, что $\mathbb{R}[i] \cong \mathbb{C}$.

$\triangleleft$ Если $F = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел и $f(x) = x^2 + 1$. Ввиду неприводимости этого многочлена, кольцо $F_1 = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)\mathbb{R}[x]$ является полем. Его элементы имеют вид $c = ax + b + I$, где $I = (x^2+1)\mathbb{R}[x]$. Полагая $x + I = \theta$, получим $c = a\theta + b$, где θ — корень многочлена $x^2 + 1$ (в F_1). Итак, $c = a\theta + b$, причем $\theta^2 = -1$. Отсюда следует, что *поле F_1 изоморфно полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.* Таким образом, $\mathbb{R}[i] \cong \mathbb{C}$. $\triangleright$

Пример 31. Доказать, что

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)\mathbb{Q}[x] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\theta + c\theta^2 \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{Q},\ \theta^3 = 2\}.$$

$\triangleleft$ Пусть $F = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и $f(x) = x^3 - 2$. Так как f — многочлен 3-й степени, не имеющий корней в $\mathbb{Q}$, то $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Поле $F_1 = \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)\mathbb{Q}[x]$ является расширением поля $\mathbb{Q}$, в нем многочлен $x^3 - 2$ имеет корень θ. Таким образом,

$$F_1 = \mathbb{Q}[\theta] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\theta + c\theta^2 \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}\}.$$

---

[9]) Обычно через $R[\alpha]$ обозначают кольцо, порожденное кольцом R и элементом α, а через $F(\alpha)$ — поле, порожденное полем F и элементом α. Однако если α — корень многочлена с коэффициентами из F, то $F[\alpha] = F(\alpha)$.

Можно считать, что поле F_1 состоит из всех действительных чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где a, b, $c \in \mathbb{Q}$. $\triangleright$

4.491. Доказать, что если K, L, M — поля, причем $K \subseteq L \subseteq \subseteq M$, то $\dim_K M = \lim_L M \cdot \dim_K L$.

В задачах 4.492–4.496 найти степень расширения.

4.492. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ над $\mathbb{Q}$. **4.493.** $\mathbb{R}(\sqrt[3]{5})$ над $\mathbb{R}$.

4.494. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$ над $\mathbb{Q}$ 10)). **4.495.** $\mathbb{Z}_5(\sqrt{2})$ над $\mathbb{Z}_5$.

4.496. $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{1})$ над $\mathbb{Q}$.

В задачах 4.497–4.499 выяснить, справедливы ли указанные равенства.

4.497. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. **4.498.** $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$.

4.499. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{1})$.

Пример 32. Построить поле из 4 элементов.

$\triangleleft$ Возьмем поле $\mathbb{Z}_2$ и неприводимый над ним многочлен 2-й степени. Он один: $x^2 + x + 1$. Тогда $A = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)\mathbb{Z}_2[x]$ — поле из четырех элементов. Оно состоит из элементов вида $a\theta + b$, где a, $b \in \mathbb{Z}_2$ и $\theta^2 + \theta + 1 = 0$, т. е. $\theta^2 = \theta + 1$. Имеем:

$$A = \{0,\, 1,\, \theta,\, \theta + 1\} = \{0,\, 1,\, \theta,\, \theta^2\}.$$

Равенства $\theta^2 = \theta + 1$ и $1 + 1 = 0$ позволяют составить таблицы сложения и умножения этого поля.

Таблица сложения

$+$	0	1	θ	$\theta+1$
0	0	1	θ	$\theta+1$
1	1	0	$\theta+1$	θ
θ	θ	$\theta+1$	0	1
$\theta+1$	$\theta+1$	θ	1	0

Таблица умножения

$\bullet$	0	1	θ	$\theta+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	θ	$\theta+1$
θ	0	θ	$\theta+1$	1
$\theta+1$	0	$\theta+1$	1	θ

$\triangleright$

10) Здесь $\sqrt[3]{1}$ означает такое θ, что $\theta \neq 1$ и $\theta^3 = 1$.

Пример 33. Построить поле из 9 элементов, присоединив к полю $\mathbb{Z}_3$ корень θ неприводимого многочлена x^2+x+2. Вычислить $(\theta+1)(2\theta+1)$, $(\theta+2)^{-1}$, $(\theta+1)^{1999}$.

◁ Искомое поле состоит из элементов вида $a+b\theta$, где a, $b\in\mathbb{Z}_3$ и $\theta^2+\theta+2=0$. Отсюда $\theta^2=-\theta-2=2\theta+1$. Используя это соотношение, получим:

$$(\theta+1)(2\theta+1)=2\theta^2+2\theta+\theta+1=2(2\theta+1)+0+1=\theta.$$

Далее, $(\theta+2)^{-1}=x+y\theta$, где x, $y\in\mathbb{Z}_3$. По определению обратного элемента $(\theta+2)(x+y\theta)=1$, т. е. $y\theta^2+2y\theta+x\theta+2x=1$, или $y(2\theta+1)+(2y+x)\theta+2x=1$, или $(y+x)\theta+(y+2x+2)=0$. Так как $\theta\notin\mathbb{Z}_3$, то элементы 1 и θ линейно независимы над полем $\mathbb{Z}_3$, следовательно, мы имеем систему уравнений $y+x=0$, $y+2x+2=0$. Решив эту систему, получим: $x=1$, $y=2$. Таким образом, $(\theta+2)^{-1}=1+2\theta$.

Пусть $F=\mathbb{Z}_3[\theta]$ — данное поле. Тогда $F^*=F\setminus\{0\}$ — группа из 8 элементов. Следовательно, $a^8=1$ для всех $a\in F^*$. Поэтому $(\theta+1)^8=1$. Разделим 1999 на 8 с остатком: $1999=8\cdot 249+7$. Следовательно,

$$(\theta+1)^{1999}=(\theta+1)^{8\cdot 249}\cdot(\theta+1)^7=(\theta+1)^7.$$

Далее имеем:

$$(\theta+1)^2=\theta^2+2\theta+1=(2\theta+1)+2\theta+1=\theta+2,$$
$$(\theta+1)^4=(\theta+2)^2=\theta^2+4\theta+4=\theta^2+\theta+1=(2\theta+1)+\theta+1=2,$$
$$(\theta+1)^7=(\theta+1)^4(\theta+1)^2(\theta+1)=2(\theta+2)(\theta+1)=$$
$$=2(\theta^2+2)=2\theta^2+1=2(2\theta+1)+1=\theta.\ ▷$$

В задачах 4.500–4.503 построить поле из p^n элементов и найти образующий элемент мультипликативной группы этого поля.

4.500. $p=2,\ n=4.$ **4.501.** $p=3,\ n=2.$

4.502. $p=5,\ n=2.$ **4.503.** $p=3,\ n=3.$

4.504. Построить поле F из 49 элементов, присоединив к полю $\mathbb{Z}_7$ корень θ многочлена x^3+x+3.

В задачах 4.505–4.507 произвести указанные вычисления в поле $F=\mathbb{Z}_5(\theta)$, где $\theta^3+2\theta+1=0$.

4.505. $(3\theta^2+1)(\theta^2+4\theta+2)$. **4.506.** $(\theta^2+3\theta+1)^{-1}$.

4.507. $(\theta^2+1)^{2001}$.

В задачах 4.498–4.500 решить уравнения в указанных полях.

4.508. $x^2=2$ в поле $\mathbb{Z}_3(\theta)$, где $\theta^2+\theta+2=0$.

4.509. $x^2=3$ в поле $\mathbb{Z}_5(\theta)$, где $\theta^2=2$.

4.510. $x^4+x+1=0$ в поле $\mathbb{Z}_2(\theta)$, где $\theta^4+\theta^3+1=0$.

В задачах 4.511–4.513 найти размерность поля разложения многочлена.

4.511. $x^4 + 1$ над $\mathbb{Z}_3$. **4.512.** $x^3 - x^2 - 3x + 2$ над $\mathbb{R}$.

4.513. $x^3 + x + 1$ над $\mathbb{Q}$.

4.514. Выяснить, какие подполя имеет поле из n элементов, если: а) $n = 8$; б) $n = 16$.

Пример 34. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}$.

$\triangleleft$ 1-*й способ.* Рассмотрим поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}[\theta]$, где $\theta^3 = 2$. Задача состоит в нахождении $(\theta^2 + \theta + 2)^{-1}$. Запишем:

$$(\theta^2 + \theta + 2)^{-1} = x\theta^2 + y\theta + z,$$

где x, y, $z \in \mathbb{Q}$. Отсюда

$$(\theta^2 + \theta + 2)(x\theta^2 + y\theta + z) = 1,$$

т. е.

$$x\theta^4 + (x + y)\theta^3 + (2x + y + z)\theta^2 + (2y + z)\theta + 2z = 1,$$

или

$$2x\theta + 2(x + y) + (2x + y + z)\theta^2 + (2y + z)\theta + 2z = 1.$$

Используя линейную независимость элементов 1, θ, θ^2 над $\mathbb{Q}$, получим систему:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 2x + 2y + z = 0, \\ 2x + 2y + 2z = 1. \end{cases}$$

Решив ее, получим: $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 0$, $z = 1$. Следовательно, $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2)^{-1} = -\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4} + 1$.

2-*й способ.* Рассмотрим многочлены $x^2 + x + 2$ и $x^3 - 2$. Применим к ним алгоритм Евклида:

$$x^3 - 2 = (x^2 + x + 2)(x - 1) - x, \quad x^2 + x + 2 = x(x + 1) + 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}(x^2 + x + 2) - \frac{1}{2}x(x + 1) = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + x + 2) - \frac{1}{2}\big((x^2 + x + 2)(x - 1) - (x^3 - 2)\big)(x + 1) = \\ &= \frac{1}{2}(x^3 - 2)(x + 1) + (x^2 + x + 2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив $x = \theta$, получим: $1 = 0 + (\theta^2 + \theta + 2)\left(1 - \dfrac{1}{2}\theta^2\right)$. Значит, $(\theta^2 + \theta + 2)^{-1} = 1 - \dfrac{1}{2}\theta^2 = 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$. $\triangleright$

В задачах 4.515–4.517 избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

4.515. $\dfrac{1-\sqrt[4]{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$. **4.516.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{-3}-\sqrt{-3}+1}$.

4.517. $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}$.

Пусть F — конечное поле. Тогда $\operatorname{char} F = p$, где p — простое число. Отождествим простое подполе F_0 поля F с полем $\mathbb{Z}_p$. Тогда F будет *расширением поля* $\mathbb{Z}_p$.

Теорема 1. (а) *Если F — конечное поле, то $|F| = p^n$, где p — простое число*;

(б) *аддитивная группа $(F, +)$ конечного поля изоморфна группе* $\underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \ldots + \mathbb{Z}_p}_{n \text{ раз}}$;

(в) *мультипликативная группа $(F^*, \cdot)$ конечного поля является циклической.*

Теорема 2. *Пусть n — натуральное число, а p — простое. Тогда*:

(а) *существует поле из p^n элементов*;

(б) *любые два поля из p^n элементов изоморфны друг другу*;

(в) *если F — поле из p^n элементов, то существует неприводимый над полем $\mathbb{Z}_p$ многочлен $f(x)$ степени n такой, что $F \cong \cong \mathbb{Z}_p[x]/f(x)\mathbb{Z}_p[x]$.*

Поле из p^n элементов называется *полем Галуа* и обозначается $GF(p^n)$.

Теорема 3. *Пусть p — простое число, n — натуральное. Тогда количество $\psi(n)$ унитарных многочленов, неприводимых над полем $\mathbb{Z}_p$, вычисляется по формуле*

$$\psi(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)p^{n/d}\ ^{11)}.$$

Примечание. Если в этой формуле заменить p на $q = p^\alpha$, получится формула количества неприводимых многочленов степени n над полем $GF(q)$.

Пример 35. Найти количество $\psi(n)$ унитарных многочленов, степени n, неприводимых над полем $\mathbb{Z}_p$, при заданных значениях p и n.

а) $p = 2,\ n = 2$; б) $p = 2,\ n = 4$; в) $p = 3,\ n = 6$.

---

[11]) $\mu(n)$ — *функция Мебиуса*

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } n = p_1p_2\ldots p_k, \text{ где } p_i \text{ — различные простые,} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на } p^2,\ p \text{ — простое.} \end{cases}$$

◁ а) $\psi(2) = \frac{1}{2}\left(\mu(1)\cdot 2^2 + \mu(2)\cdot 2^1\right) = \frac{1}{2}(4-2) = 1.$

Значит, над полем $\mathbb{Z}_2$ есть только один неприводимый многочлен второй степени. Это многочлен x^2+x+1.

б) $\psi(4) = \frac{1}{4}\left(\mu(1)\cdot 2^4 + \mu(2)\cdot 2^2 + \mu(4)\cdot 2^1\right) = \frac{1}{4}(16-4+0) = 3.$

Таким образом, имеется ровно 3 неприводимых многочлена 4-й степени над полем $\mathbb{Z}_2$. Это x^4+x+1, x^4+x^3+1 и $x^4+x^3+x^2+x+1$.

в) $\psi(6) = \frac{1}{6}\left(\mu(1)\cdot 3^6 + \mu(2)\cdot 3^3 + \mu(3)\cdot 3^2 + \mu(6)\cdot 3^1\right) = \frac{1}{6}(729-27) - \frac{1}{6}(9+3) = 116.$

Следовательно, имеется ровно 116 унитарных многочленов шестой степени, неприводимых над полем $\mathbb{Z}_3$. ▷

Если к полю $GF(q)$ присоединить корень неприводимого многочлена k-й степени, то полученное расширение будет содержать корни всех неприводимых многочленов k-й степени (или, по-другому: всякое неприводимое уравнение k-й степени будет решаться в этом расширении).

Пример 36. Построить поле $GF(81)$. Найти образующий элемент мультипликативной группы этого поля.

◁ Так как $81 = 3^4$, то для построения поля надо найти многочлен 4-й степени, неприводимый над полем $\mathbb{Z}_3$. На первый взгляд кажется, что в качестве такого многочлена можно взять x^4+1. Однако этот многочлен приводим над $\mathbb{Z}_3$, так как $x^4+1 = (x^2+x+2)(x^2+2x+2)$. Рассмотрим тогда многочлен $f(x) = x^4+x+2$. Этот многочлен не имеет корней в $\mathbb{Z}_3$. Если предположить, что этот многочлен приводим, то его разложение запишется в виде $x^4+x+2 = (x^2+Ax+1)(x^2+Bx+2)$; составив систему уравнений для коэффициентов A и B, убедимся, что она не имеет решений, следовательно, многочлен x^4+x+2 неприводим над $\mathbb{Z}_3$. Из неприводимости следует, что

$$GF(81) = \mathbb{Z}_3[x]/(x^4+x+2)\mathbb{Z}_3[x].$$

Положим $I = (x^4+x+2)\mathbb{Z}_3[x]$ и $\theta = x + I$. Тогда $\theta^4+\theta+2 = 0$, откуда $\theta^4 = 2\theta+1$.

Надо найти в группе $GF(81)^*$ элемент порядка 80. Определим порядок элемента θ. Имеем:

$$\theta^5 = \theta\cdot\theta^4 = 2\theta^2+\theta, \quad \theta^8 = (\theta^4)^2 = (2\theta+1)^2 = \theta^2+\theta+1,$$
$$\theta^{16} = (\theta^2+\theta+1)^2 = \ldots = 2\theta^3+\theta+2, \quad \theta^{40} = (\theta^{16})^2\cdot\theta^8 = \ldots = 2.$$

Простые делители числа 80 — это 2 и 5. Значит, максимальные делители числа 80 — это $\frac{80}{2} = 40$ и $\frac{80}{5} = 16$. Так как $\theta^{40} \neq 1$ и $\theta^{16} \neq 1$, то θ — элемент порядка 80, а значит, образующий элемент мультипликативной группы. ▷

Пример 37. Найти какой-нибудь многочлен 3-й степени, неприводимый над полем $GF(4)$.

◁ Поле $GF(4)$ представим в виде $GF(4) = \{0,\ 1,\ a,\ a+1\}$, где $a^2 = a+1$. Докажем неприводимость многочлена $f(x) = x^3+x^2+1$ над полем $GF(4)$. Так как $\deg f = 3$, то для этого достаточно доказать, что $f(x)$ не имеет корней в $GF(4)$. Имеем: $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$,

$$f(a) = a^3 + a^2 + 1 = a^2 \cdot a + (a+1) + 1 = (a+1)a + a = a^2 = a + 1 \neq 0$$

и $f(a+1) = (a+1)^3 + (a+1)^2 + 1 = a \neq 0$.

Заметим также, что неприводимость многочлена $f(x)$ можно вывести из более общих соображений: если многочлен $\varphi(x)$ степени n неприводим над полем $\mathbb{Z}_p$ и НОД$(n,\ k) = 1$, то φ неприводим над $GF(p^k)$. ▷

Пример 38. Разрешимо ли в поле $GF(625)$ уравнение $x^3+3x+3 = 0$?
◁ Многочлен x^3+3x+3 не имеет корней в $\mathbb{Z}_5$ (это проверяется непосредственно). Если бы этот многочлен имел корень θ в поле $F = GF(5^4)$, то поле $F' = \mathbb{Z}_5(\theta)$ было бы подполем поля F. Но это невозможно, так как $F' \cong GF(5^3)$, а число 3 не является делителем числа 4. Таким образом, данное уравнение неразрешимо в поле F. ▷

4.518. Доказать, что для любого простого числа p и любого натурального n существует неприводимый над полем $\mathbb{Z}_p$ многочлен степени n.

4.519. Выяснить, существует ли поле, количество элементов в котором равно указанному числу: а) 32; б) 36; в) 125; г) 243.

В задачах 4.520 и 4.521 найти какой-нибудь образующий элемент мультипликативной группы указанного поля.

4.520. $GF(25) = \mathbb{Z}_5[\theta]$, где $\theta^2 = 4\theta + 3$.

4.521. $GF(27) = \mathbb{Z}_3[\theta]$, где $\theta^3 = \theta + 1$.

Пример 39. Построить изоморфизм полей

$$F_1 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)\mathbb{Z}_3[x] \quad \text{и} \quad F_2 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2)\mathbb{Z}_3[x].$$

◁ Очевидно, $F_1 = \mathbb{Z}_3[\theta]$, где $\theta^2 = 2$, а $F_2 = \mathbb{Z}_3[\omega]$, где $\omega^2 = 2\omega + 1$. Для построения изоморфизма надо найти в поле F_1 элемент, удовлетворяющий уравнению $x^2 = 2x + 1$, т.е. найти такие $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_3$, что $(\alpha + \beta\theta)^2 = 2(\alpha + \beta\theta) + 1$. Решением является, в частности, $\alpha = \beta = 1$, т.е. $\theta + 1$. Значит, отображение $\omega \mapsto \theta + 1$, $\alpha\omega + \beta \mapsto \alpha(\theta+1) + \beta$ является изоморфизмом $F_2 \to F_1$. ▷

В задачах 4.522 и 4.523 выяснить, изоморфны ли указанные пары колец.

4.522. $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2-2)\mathbb{Z}_5[x]$ и $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2-3)\mathbb{Z}_5[x]$.

4.523. $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4+1)\mathbb{Z}_3[x]$ и $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4+x+2)\mathbb{Z}_3[x]$.

4.524. Доказать, что $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4+1)\mathbb{Z}_3[x] \cong GF(9) \oplus GF(9)$.

В задачах 4.525–4.531 найти количество многочленов заданной степени, неприводимых над указанным полем.

4.525. 5-й степени над $\mathbb{Z}_2$.

4.526. 6-й степени над $\mathbb{Z}_2$.

4.527. Унитарных многочленов 4-й степени над $\mathbb{Z}_3$.

4.528. Унитарных многочленов 5-й степени над $\mathbb{Z}_3$.

4.529. Унитарных многочленов 2-й степени над $\mathbb{Z}_p$ (p — любое).

4.530. Унитарных многочленов 3-й степени, неприводимых над $GF(9)$.

4.531. Унитарных многочленов 4-й степени, неприводимых над $GF(4)$.

В задачах 4.532 и 4.533 найти какой-нибудь многочлен заданной степени, неприводимый над указанным полем.

4.532. 2-й степени над $GF(9) = \mathbb{Z}_3[\theta]$, $\theta^2 = \theta + 1$.

4.533. 4-й степени над $GF(4)$.

6. Алгебры над полем. Множество A называется *алгеброй над полем* F, если оно является линейным пространством над F и в нем задана операция умножения, причем выполнены аксиомы:

(Ал1) $(a + b)c = ac + bc$, $c(a + b) = ca + cb$;

(Ал2) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ для всех a, b, $c \in A$, $\lambda \in F$.

4.534. Доказать, что поле F является алгеброй над F. Определить размерность этой алгебры.

4.535. Доказать, что поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Найти размерность и указать какой-либо базис этой алгебры.

4.536. Доказать, что кольцо многочленов $F[x]$ является бесконечномерной алгеброй над полем F с базисом $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

4.537. Доказать, что кольцо F_n всех $n \times n$-матриц над полем F — ассоциативная алгебра с единицей, причем в качестве базиса этой алгебры можно взять матричные единицы E_{ij} (элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца равен единице, а остальные равны нулю). Определить $\dim_F F_n$.

Пусть $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ — конечная группа, F — поле. Рассмотрим множество FG всех выражений вида $\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, в котором сложение определяется обычным образом, а умножение по правилу

$$\sum_i \lambda_i g_i \cdot \sum_j \mu_j g_j = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_i g_j$$

(здесь $g_i g_j$ — произведение элементов g_i и g_j в группе G).

4.538. Доказать, что FG — алгебра над полем F с базисом $g_1, \ldots, g_n$.

Алгебра из задачи 4.538 называется *групповой алгеброй* и обозначается FG. Элементы $g_1, \ldots, g_n$ образуют базис алгебры FG, поэтому $\dim FG = n$.

Пусть S — полугруппа, F — поле, FS — множество всех формальных конечных сумм $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, $s_1, \ldots, s_n \in S$.

4.539. Доказать, что FS будет алгеброй над полем F, если положить

$$\sum_i \lambda_i s_i + \sum_i \mu_i s_i = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) s_i, \quad \sum_i \lambda_i s_i \cdot \sum_j \mu_j s_j = \sum_{i,j} \lambda_j \mu_j s_i s_j.$$

Алгебра FS из задачи 4.539 называется *полугрупповой алгеброй*.

Если A — n-мерная алгебра над полем F, имеющая базис $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$, то произведения $u_i u_j$ можно разложить по этому базису:

$$u_i u_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{(k)} u_k \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Совокупность n^3 элементов $\gamma_{ij}^{(k)} \in F$, называемых *структурными константами*, однозначно определяет умножение в алгебре A, так как если a и b — произвольные элементы из A, то при некоторых $\alpha_i, \beta_j \in F$ мы имеем $a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $b = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$, а значит, $ab = \sum\limits_{i,j,k} \alpha_i \beta_j \gamma_{ij}^{(k)} u_k$.

Пример 39. Получить *условия коммутативности* алгебры, заданной своими структурными константами.

◁ Докажем вначале, что коммутативность алгебры A равносильна перестановочности друг с другом базисных элементов, т. е. выполнению равенств $u_i u_j = u_j u_i$ при всех i, j. Действительно, если базисные элементы перестановочны и $a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $b = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$ — произвольные элементы из A, то

$$ab = \sum_i \alpha_i u_i \cdot \sum_j \beta_j u_j = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j u_i u_j = \\ = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j u_j u_i = \sum_j \beta_j u_j \cdot \sum_i \alpha_i u_i = ba.$$

В терминах структурных констант это означает, что $\gamma_{ij}^{(k)} = \gamma_{ji}^{(k)}$ при всех i, j, k. ▷

4.540. Доказать, что ассоциативность алгебры A равносильна выполнению соотношений ассоциативности для базисных элементов, т. е. $(u_i u_j) u_k = u_i (u_j u_k)$ при всех i, j, k.

Пример 40. Пусть F — поле, $f(x)$ — многочлен над F (не обязательно неприводимый) и $A = F[x]/f(x)F[x]$. Тогда A — конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра над F. Найти какой-нибудь базис этой алгебры и получить правила умножения базисных элементов.

$\triangleleft$ Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (коэффициент при x^n можно считать равным 1) и $I = f(x)F[x]$. Тогда $e_0 = 1+I$, $e_1 = x+I$, … …, $e_{n-1} = x^{n-1} + I$ — базис алгебры A. Правила умножения базисных элементов имеют вид: $e_ie_j = e_{i+j}$ при $i + j < n$, $e_1e_{n-1} = e_2e_{n-2} = -a_ne_0 - a_{n-1}e_1 - \ldots - a_1e_{n-1}$ и т. д. Например, если $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, то $A = F[x]/f(x)F[x] = \mathcal{L}(e_0, e_1, e_2)$, где $e_0 = 1 + I$, $e_1 = x + I$, $e_2 = x^2 + I$ (символ $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку, см. с. 121). Вычислим произведения базисных элементов:

$$e_1e_2 = x^3 + I = -2x^2 - 3x - 5 + I = -5e_0 - 3e_1 - 2e_2;$$

$$\underbrace{e_2e_2}_{x^4+I} = \underbrace{(-5e_0 - 3e_1 - 2e_2)}_{x^3+I} \cdot \underbrace{e_1}_{x+I} =$$

$$= -5e_1 - 3e_2 - 2(-5e_0 - 3e_1 - 2e_2) = 10e_0 + e_1 + e_2.$$

Таблица умножения базисных элементов имеет вид

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2	$-5e_0 - 3e_1 - 2e_2$
e_2	e_2	$-5e_0 - 3e_1 - 2e_2$	$10e_0 + e_1 + e_2$

$\triangleright$

Алгебра A называется *алгеброй с делением* (или *телом*), если она ассоциативна, имеет единицу и каждый ее ненулевой элемент имеет обратный, т. е. $\forall a \neq 0\ \exists b\ \ ab = ba = 1$.

4.541.** Доказать, что конечномерная ассоциативная алгебра A без ненулевых делителей нуля является телом.

4.542. Выяснить, является ли ассоциативной алгебра $A = \mathbb{R}a + \mathbb{R}b$ со следующей таблицей умножения базисных элементов:

	a	b
a	$a + b$	0
b	a	b

4.543.** Пусть $G = \{1, a, a^2\}$ $(a^3 = 1)$ — циклическая группа. Найти все идеалы групповой алгебры $\mathbb{R}G$.

4.544*. Выяснить, ассоциативна ли алгебра $A = F + Fa + Fb$ (F — произвольное поле) со следующей таблицей умножения базисных элементов:

	1	a	b
1	1	a	b
a	a	a	b
b	b	0	0

4.545. Выяснить, имеет ли единицу алгебра $A = Fa + Fb + Fc$ (F — поле) со следующей таблицей умножения базисных элементов:

	a	b	c
a	$a+b$	b	$a+c$
b	b	0	a
c	$2c$	c	$2a-b+c$

4.546. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей и $a,\ b \in A$. Доказать, что если $ab = 1$, то $ba = 1$.

4.547. Построить таблицу умножения базисных элементов алгебры $A = F[x]/x^3F[x]$ (за базис взять $1 = 1 + I$, $a = x + I$, $a^2 = x^2 + I$).

4.548. Выяснить, ассоциативна ли алгебра A, заданная базисом и таблицей умножения базисных элементов:

а)

	a	b	c
a	0	a	b
b	a	$a+b$	c
c	a	$a+c$	0

б)

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	$-1-a$	c	$-b-c$
b	b	$-b-c$	1	$-b-c$
c	c	b	a	1

4.549. Найти единицу алгебры $A = \mathbb{R}p + \mathbb{R}q + \mathbb{R}r$, заданной таблицей умножения:

	p	q	r
p	$p+3q+3r$	$2q+r$	$q+2r$
q	$3q$	q	q
r	$3r$	r	r

4.550. Найти все идеалы групповой алгебры FG, если F — поле характеристики $\neq 2$, а $G = \{1, g\}$ — циклическая группа порядка 2.

4.551. Доказать, что для любого поля F алгебра $F[x]/(x^n - 1)F[x]$ изоморфна групповой алгебре FG, где G — циклическая группа порядка n.

4.552. Доказать, что центр тела является полем [12]).

4.553. Полугруппа $S = \{a, b, c\}$ задана таблицей умножения

	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

Пусть F — поле, FS — полугрупповая алгебра. Какой элемент является единицей алгебры FS?

4.554. Доказать, что над любым полем F двумерные алгебры $Fa + Fb$ и $Fc + Fd$ со следующими таблицами умножения

	a	b
a	a	b
b	a	b

	c	d
c	0	0
d	c	d

изоморфны друг другу.

[12]) Центр $Z(R)$ кольца R определяется следующим образом:

$$Z(R) = \{a \in R \,|\, \forall r \in R \;\; ra = ar\}.$$

4.555. Пусть F — произвольное поле, A — алгебра над F с базисом a, b и умножением, определяемым таблицей

	a	b
a	$a+b$	a
b	$\alpha a+\beta b$	$\gamma a+\delta b$

При каких α, β, γ, δ алгебра A ассоциативна?

Алгеброй кватернионов $\mathbf{H}$ называется четырехмерная алгебра над полем действительных чисел, имеющая базис 1, i, j, k, причем $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Элементы $q = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ этой алгебры называются *кватернионами*. Алгебра $\mathbf{H}$ ассоциативна, но некоммутативна.

Модуль (или *норма*) кватерниона $q = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ определяется по формуле $|q| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$. *Сопряженный кватернион*: $\overline{q} = \alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$. Легко проверяются равенства $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$, откуда следует, что всякий ненулевой кватернион имеет обратный (по умножению): $q^{-1} = \dfrac{1}{|q|^2}\overline{q}$. Например, если $q = 2-i-j+3k$, то $q^{-1} = \dfrac{1}{15}(2+i+j-3k)$.

Алгебра кватернионов является четырехмерной *алгеброй с делением* над полем действительных чисел, или *телом* (*тело кватернионов*).

Теорема Фробениуса. *Существуют ровно три ассоциативные конечномерные алгебры с делением над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Это $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbf{H}$. Алгебра $\mathbb{R}$ одномерна, $\mathbb{C}$ — двумерна, $\mathbf{H}$ — четырехмерна. Алгебры $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ коммутативны, алгебра $\mathbf{H}$ некоммутативна.*

4.556. Произвести вычисления в алгебре кватернионов:

а) $(2-i+j)(j+2k)$; б) $(1-2i+j)^2$;

в) $(1+i+j+k)^{10}$; г) $(3+2i-j)^{-1}$.

4.557. Доказать, что для любых q, q_1, $q_2 \in \mathbf{H}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеют место равенства:

а) $\overline{\lambda q} = \lambda\overline{q}$; б) $\overline{q_1+q_2} = \overline{q}_1+\overline{q}_2$; в) $\overline{q_1\cdot q_2} = \overline{q}_2\cdot\overline{q}_1$.

4.558. Решить уравнения в алгебре кватернионов:

а) $xi+kx = 1+2j$; б) $(1-j)x(1+i) = k$; в) $x^2 = -1$.

4.559. Решить систему: $\begin{cases} xi+yj = 1, \\ xk-y(i+j) = i. \end{cases}$

4.560. Можно ли алгебру кватернионов $\mathbf{H} = \mathbb{R}+\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ считать алгеброй над полем $\mathbb{C} = \mathbb{R}+\mathbb{R}i$ с базисом 1, j?

4.561. Что собой представляет центр алгебры кватернионов?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1

1.8. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\mathbf{p} - \frac{2}{3}\mathbf{q}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\mathbf{p} + \frac{4}{3}\mathbf{q}$, $\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\mathbf{p} - \frac{2}{3}\mathbf{q}$. **1.9.** $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB}$. **1.10.** $\overrightarrow{AN} = \alpha\beta\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BN} = (\alpha\beta - 1)\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}$. **1.11.** $\overrightarrow{CD} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, $\overrightarrow{DE} = -\mathbf{p}$, $\overrightarrow{EF} = -\mathbf{q}$, $\overrightarrow{FA} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{q}$, $\overrightarrow{AE} = 2\mathbf{q} - \mathbf{p}$. **1.13.** $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$. **1.15.** $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\lambda\mathbf{b} - \mathbf{a}}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{\lambda}{1+\lambda}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. **1.16.** а) $\alpha = \beta$; б) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\alpha - \beta}(\beta\mathbf{p} - \mathbf{q})$, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha\mathbf{p} - \mathbf{q})$. **1.18.** $\lambda = 5$. **1.19.** $\mathbf{s} = \frac{2}{5}\mathbf{p} + \frac{3}{5}\mathbf{q} + \frac{3}{5}\mathbf{r}$. **1.20.** $3\mathbf{p} - 4\mathbf{q} - 3\mathbf{r} - 2\mathbf{s} = 0$. **1.21.** 0. **1.24.** 0, 1, 2. **1.25.** $\lambda = \mu = 1$. **1.26.** а) $\{-1/2, 1/2, 1/2\}$); б) $\{1/3, 1/3, 1/3\}$. **1.27.** $\{7/10, 3/20, 3/20\}$. **1.28.** а) $\{1/2, 0, 1/2\}$; б) $\{1, -1/2, 1/2\}$. **1.29.** $\{1, -1/\lambda, -1\}$. **1.30.** а) $\left\{\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\beta - 1}\right\}$. $\triangleleft$ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \alpha\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OM} = \alpha(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}) - \overrightarrow{OM} = \alpha(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON}) + \alpha\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{AO} + \alpha\overrightarrow{ON} + \alpha\lambda\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. Отсюда находим $\overrightarrow{AO} = \frac{\alpha(1+\lambda)}{1-\alpha}\overrightarrow{ON} - \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{OM}$. Аналогично рассуждая, получаем $\overrightarrow{AO} = \frac{\beta(1+\mu)}{1-\beta}\overrightarrow{OM} - \frac{1}{1-\beta}\overrightarrow{ON}$. Здесь $\overrightarrow{NB} = \lambda\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MC} = \mu\overrightarrow{OM}$. В силу единственности разложения по базису тогда имеем $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{\alpha - 1}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{\beta - 1}\overrightarrow{ON}$. $\triangleright$

б) $\overrightarrow{AB} = \left\{\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\alpha(\beta - 1)}\right\}$, $\overrightarrow{BC} = \left\{\frac{1-\beta}{\beta(1-\alpha)}, \frac{\alpha - 1}{\alpha(1-\beta)}\right\}$, $\overrightarrow{CA} = \left\{\frac{1}{\beta(1-\alpha)}, \frac{1}{1-\beta}\right\}$. *Указание*. Воспользоваться результатом задачи 1.30а).

1.31. $\overrightarrow{AP} = \left\{\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha\gamma}, \dfrac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma}\right\}$, $\overrightarrow{BQ} = \left\{\dfrac{2\alpha\beta-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}, \dfrac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}\right\}$, $\overrightarrow{CQ} = \left\{\dfrac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma}, \dfrac{2\beta\gamma-\beta-\gamma}{1-\beta\gamma}\right\}$. **1.32.** а) $\overrightarrow{AC} = \{(\sqrt{5}+1)/2, 1\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1, (\sqrt{5}+1)/2\}$; б) $\overrightarrow{BC} = \{(\sqrt{5}-1)/2, 1\}$, $\overrightarrow{CD} = \{(\sqrt{5}+3)/2, (\sqrt{5}+3)/2\}$, $\overrightarrow{DE} = \{-1, (1-\sqrt{5})/2\}$. **1.33.** а) $\{2/5, 3/5\}$; б) $-9/5$. **1.34.** $\overrightarrow{DM} = \{1/2, 1/2, -1\}$, $\overrightarrow{AQ} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$. **1.35.** а) $|\mathbf{a}_1| = \sqrt{5}$, $\mathbf{a}_{1,0} = \{-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0\}$; б) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{j}}) = 2/\sqrt{5}$; в) $X(\mathbf{a}) = -19/3$; г) $\text{пр}_{\mathbf{j}}\mathbf{a} = Y(\mathbf{a}) = 0$. **1.36.** $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}$. **1.37.** $\mathbf{a} = -\dfrac{4}{5}\mathbf{e}_1 - \dfrac{2}{5}\mathbf{e}_2$. **1.38.** $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. **1.39.** а) $\mathbf{a}_0 = \{2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0\}$; б) $\mathbf{a} - \dfrac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d} = \{3, 11/2, 0\}$; в) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = -2\mathbf{j}$; г) $\text{пр}_{\mathbf{j}}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 6$. **1.40.** $\{6/11, 7/11, -6/11\}$. **1.41.** $\pm 3\sqrt{6}$. **1.42.** $|\mathbf{p}| = \sqrt{154}$, $\cos\alpha = 9/\sqrt{154}$, $\cos\beta = 8/\sqrt{154}$, $\cos\gamma = 3/\sqrt{154}$. **1.43.** $\mathbf{x} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. **1.44.** $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. **1.45.** $\mathbf{x} = \pm 5\mathbf{i} + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \dfrac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$. **1.46.** $\alpha = -1$, $\beta = 4$. **1.47.** $\mathbf{x} = \dfrac{5}{3}(\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. *Указание.* $\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0)$, где $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ — орты заданных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. **1.48.** $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$. **1.49.** $\left\{\dfrac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \dfrac{ba^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \dfrac{ca^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right\}$. **1.50.** а) $(3, -6, 6)$; б) $(5, 5, 1)$; в) $(-5/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, 5)$. **1.51.** $D(9, -5, 6)$. **1.52.** $C(6, -2)$, $D(2, -4)$. **1.53.** $A(-6, -2)$, $B(2, 8)$, $C(10, -6)$. **1.54.** $M_1(7, 0)$ и $M_2(-1, 0)$. **1.55.** $M(0, 1, 0)$. **1.56.** 7. **1.57.** $(4, 0)$ и $(5, 2)$. **1.58.** $(-1, 2, 4)$ и $(8, -4, -2)$. **1.59.** $(-19, 10, -17)$. *Указание.* Разложить вектор $\overrightarrow{OD}$ по базису из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. **1.60.** $(10, -5, 0)$. *Указание.* Разложить вектор $\overrightarrow{OB}$ по базису из векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OA}$. **1.62.** $\sqrt{182}/3$. **1.63.** $(11/7, 10/7, 18/7)$. **1.65.** а) 9; б) -61; в) 13. **1.66.** $\alpha = \pm 3/5$. **1.67.** 15, $\sqrt{593}$. **1.68.** $2\pi/3$. **1.69.** $19/5$. **1.70.** $1/2$. **1.71.** $\angle A = \pi/2$, $\angle B = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\angle C = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **1.72.** $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \pi/3$. **1.73.** $\arccos\dfrac{4}{5}$. **1.74.** 5. **1.76.** $\overrightarrow{DC} = \dfrac{|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \dfrac{|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. *Указание.* Сначала найти вектор $\overrightarrow{AK}$, где K — такая точка основания, что $|\overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{AB}|$. **1.77.** -13. **1.78.** а) 22; б) -200; в) 41; г) $\sqrt{105}$; д) $11/3$; е) $22/7$; ж) $\cos\alpha = 2/3$,

$\cos\beta = -1/3$, $\cos\gamma = -2/3$; з) $-84/\sqrt{129}$; и) $11/21$. **1.79.** $M_1(1, 0)$ и $M_2(6, 0)$. **1.80.** $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = 5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$; $\angle A = \pi/2$, $\angle B = \angle C = \pi/4$. **1.81.** а) $-41/5$; б) $73/7$. **1.83.** $\dfrac{15}{7\sqrt{85}}$. **1.84.** 4. **1.85.** $-4/5$. **1.87.** $\arccos 5/6$. **1.88.** $\{1, 1/2, -1/2\}$. **1.89.** $\{-3, 3, 3\}$. **1.90.** $\mathbf{a_j} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a_{i,k}} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$. **1.91.** а) $\{2/3, 2/3, 2/3\}$; б) $\{-5/3, 4/3, 1/3\}$. **1.92.** $(-2, 0, 2)$. **1.93.** $-\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j} - \dfrac{1}{2}\mathbf{k}$. Указание. Вектор $\mathbf{a}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ имеет вид $\mathbf{a}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$, где коэффициенты λ_1 и λ_2 могут быть найдены из условия перпендикулярности вектора $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ плоскости векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. **1.94.** $x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi$, $y' = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi$. **1.95.** $X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$, $Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$, $Z' = -Z$. **1.96.** $\{-2, \sqrt{2}, 0\}$. **1.97.** $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \sum\limits_{i,k=1}^{3} X_i^{(1)}X_k^{(2)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = 5X_1^{(1)}X_1^{(2)} + 2X_2^{(1)}X_2^{(2)} + 9X_3^{(1)}X_3^{(2)} - 2(X_1^{(1)}X_2^{(2)} + X_2^{(1)}X_1^{(2)}) - 3(X_1^{(1)}X_3^{(2)} + X_3^{(1)}X_1^{(2)}) + 4(X_2^{(1)}X_3^{(2)} + X_3^{(1)}X_2^{(2)})$. **1.98.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$. **1.99.** $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = 0$, т.е. $\mathbf{a}_1 \| \mathbf{a}_2$. **1.100.** а) $2(\mathbf{k} - \mathbf{i})$; б) $2[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$; в) $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$; г) 3. **1.102.** $50\sqrt{2}$. **1.105.** а) $\dfrac{1}{5}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; б) $-\dfrac{1}{5}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. **1.106.** а) $\{-3, 5, 7\}$; б) $\{-6, 10, 14\}$; в) $\{-12, 20, 28\}$. **1.107.** $2\sqrt{6}$. **1.108.** 5. **1.109.** $\alpha = -6$, $\beta = 21$. **1.110.** $-103/\sqrt{26}$. **1.111.** $\sqrt{6}$. **1.112.** $\{-20, 7, -11\}$. **1.113.** $\{5, 16, 7\}$. **1.114.** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$; векторы попарно перпендикулярны. **1.115.** $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. **1.116.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha = 1/\sqrt{66}$, $\cos\beta = -4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma = -7/\sqrt{66}$. **1.117.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$. **1.118.** $\{-6, -24, 8\}$. **1.119.** $\{7, 5, 1\}$. **1.120.** $\mathbf{a}_2 \perp \mathbf{a}_1$; бесконечное множество решений. **1.121.** $\{-1/2, 0, 1/2\}$. **1.122.** Появится знак минус перед определителем; в случае косоугольного базиса формула неверна. **1.123.** Указание. Вычислить координаты векторов в обеих частях и убедиться, что они равны. Вычисление координат удобно производить в следующем специальном базисе: орт $\mathbf{i}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{b}$, орт $\mathbf{j}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. **1.124.** 24. **1.125.** $-3/2$. **1.126.** -7. а) Левая; б) правая; в) правая. **1.127.** а) Нет; б) да. **1.132.** $17/2$. **1.133.** 6. **1.134.** $3\sqrt{2}$. **1.135.** а) Да; б) нет. **1.136.** а) -3; б) при любом λ. **1.138.** а) $(0, 0, 0)$; б) $(0, 1, 0)$. **1.141.** а) $2(x + 1) + 2(y - 2) = 0$. Общее уравнение: $x + y - 1 = 0$. Нормальное уравнение: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x +$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. б) $2(x-2)=0$. Общее уравнение: $x-2=0$, прямая параллельна оси Oy. Нормальное уравнение: $x-2=0$; $p=2$. в) $2(x-1)-(y-1)=0$. Общее уравнение: $2x-y-1=0$. Нормальное уравнение: $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **1.142.** а) $\frac{x+1}{3}=$ $=\frac{y-2}{-1}$. Общее уравнение: $x+3y-5=0$. Нормальное уравнение: $\frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$; $p=\frac{5}{\sqrt{10}}$. б) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}$. Общее уравнение: $-x+1=0$, прямая параллельна оси Oy. Нормальное уравнение: $x-1=0$; $p=1$. в) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}$. Общее уравнение: $y-1=$ $=0$, прямая параллельна оси Ox. Нормальное уравнение: $y-1=0$; $p=1$. **1.143.** а) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$. Общее уравнение: $x-y+1=0$. Нормальное уравнение: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. б) $\frac{x-1}{0}=$ $=\frac{y-1}{-3}$. Общее уравнение: $x-1=0$, прямая параллельна оси Oy. Нормальное уравнение: $x-1=0$; $p=1$. в) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$. Общее уравнение: $y-2=0$, прямая параллельна оси Ox. Нормальное уравнение: $y-2=0$; $p=2$. **1.144.** а) $\rho(M,L)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, L': $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$, L'': $-2(x+1)+(y-2)=0$; б) $\rho(M,L)=1/2$, L': $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}$, L'': $2y=0$; в) $\rho(M,L)=0$, L': $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$, L'': $x+y+1=$ $=0$. **1.145.** Пересекаются в точке $M_0(-3/4,\,-1/2)$; $\cos(\widehat{L_1,L_2})=1/\sqrt{5}$. **1.146.** Пересекаются в точке $M_0(1,0)$; $\cos(\widehat{L_1,L_2})=2/\sqrt{5}$. **1.147.** Параллельны; $\rho(L_1,L_2)=\sqrt{2}/4$. **1.148.** Параллельны; $\rho(L_1,L_2)=\sqrt{2}$. **1.149.** Совпадают. **1.150.** а) AB: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}$, CD: $\frac{x-6}{-4}=\frac{y-1}{-1}$, $h=\frac{19}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi=\frac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}$, L_1: $\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}=\frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$, L_2: $(\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1)+(-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2)=0$; б) AB: $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}$, CD: $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-4}$, $h=4$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$, L_1: $\frac{x-2}{4-2\sqrt{5}}=\frac{y+2}{3+\sqrt{5}}$, L_2: $(4-2\sqrt{5})(x-2)+(3+\sqrt{5})(y+2)=0$. **1.151.** $t=-1/2$. **1.152.** $4/\sqrt{5}$. **1.153.** $x+1=0$, $y-2=0$. **1.154.** $13x+y-11=0$, $15x-y-13=$

$= 0$. **1.155.** $3x - y - 1 = 0$, $3x - y - 21 = 0$. **1.157.** $y - 2x + 6 = 0$, $y + 2x - 6 = 0$. **1.158.** $3x + y \pm 6 = 0$, $x - 3y \pm 2 = 0$. **1.159.** 20, $-4/5$. **1.160.** $7x - y - 25 = 0$. **1.161.** $3x - 5y + 47 = 0$, $3x - 5y - 11 = 0$, $3x + 5y + 17 = 0$, $3x + 5y - 41 = 0$. **1.162.** $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$. **1.163.** а) $3x - 2y - 7 = 0$; б) $x - 5y - 7/6 = 0$. **1.164.** $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$. **1.165.** $B(1, 1)$, $D(-1, 3)$, AB: $x - 1 = 0$, BC: $y - 1 = 0$, CD: $x + 1 = 0$, AD: $y - 3 = 0$. **1.166.** $3x - y + 1 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$, $3x - y + 11 = 0$. **1.167.** AB: $3x + 4y + 1 = 0$, BC: $4x - 3y - 7 = 0$, CD: $3x + 4y - 24 = 0$, AD: $4x - 3y - 32 = 0$, AC: $7x + y - 31 = 0$. **1.168.** $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **1.169.** Указание. Отклонения $\delta(M_1, L)$ и $\delta(M_2, L)$ имеют разные знаки. **1.170.** $4x + y + 5 = 0$ или $y - 3 = 0$. **1.171.** а) В одном углу; б) в вертикальных углах. **1.172.** Тупой. **1.173.** $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$. **1.174.** $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. **1.175.** $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. **1.176.** $x - 6y + 17 = 0$, $8x + 3y - 17 = 0$, $7x + 9y + 17 = 0$. **1.177.** $4x - 3y = 0$, $12x + 5y + 16 = 0$. **1.178.** б) $\lambda = -2/3$. **1.180.** а) $2x - y + z - 2 = 0$; $1/\sqrt{6}$; б) $x - y = 0$, плоскость параллельна оси Oz и проходит через начало координат; $1/\sqrt{2}$. **1.181.** а) $x + y - 3 = 0$; б) $x + 2y - 2 = 0$. **1.182.** а) $x - 2y - z = 0$; б) $-x + y + 2z - 5 = 0$. **1.183.** а) $-x + 2y - 3z - 3 = 0$; б) $2x - 2y - z + 1 = 0$. **1.184.** а) $x + y - 3 = 0$; б) $2x - y - 1 = 0$. **1.185.** Пересекаются, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \dfrac{1}{2/\sqrt{15}}$. **1.186.** Параллельны, $\rho(P_1, P_2) = \dfrac{3}{2/\sqrt{6}}$. **1.187.** Пересекаются, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = 1/2$. **1.188.** Совпадают. **1.189.** 8. **1.190.** $x + y + z - 3 = 0$. **1.191.** $3\sqrt{5}x - 6y - 4\sqrt{5}z + 12\sqrt{5} = 0$, $4\sqrt{5}/\sqrt{161}$. **1.192.** а) $4x - 5y + z - 2 = 0$ и $2x + y - 3z + 8 = 0$; б) $3x - 6y + 7z - 4 = 0$ и $x + 4y + 3z - 2 = 0$. **1.193.** а) $4x - y - 2z - 4 = 0$; б) $20x - 12y + 4z + 13 = 0$. **1.194.** а) В смежных углах; б) в одном углу. **1.195.** $x - y + 3z - 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$, $5x - 2y + 12z - 10 = 0$, $5x - 2y + 21z - 19 = 0$. **1.196.** $2x - y - z - 2 = 0$. **1.197.** а) $\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, уравнения в проекциях: $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0, \\ 5x + 3z - 7 = 0, \\ 5y - 4z + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\mathbf{q} =$

$= [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = -\mathbf{i}-7\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, уравнения в проекциях: $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ 5x - z - 1 = 0, \\ 5y - 7z - 12 = 0. \end{cases}$

1.198. а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$; в) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{0}$; г) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{1}$; д) $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+3}{10}$; е) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1/2}$. **1.199.** а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$; б) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-3}$.

1.200. а) $x - 2y + z = 0$; б) $2x + y - 1 = 0$; в) $\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - 1 = 0, \end{cases}$ или $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{5}$; г) $18/\sqrt{30}$; д) $M'(3/5, -1/5, -1)$. **1.201.** а) $1/\sqrt{15}$, $M(1, -6, -4)$; б) $3x - y + 2z - 1 = 0$; в) $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$
1.203. а) $2x - 16y - 13z + 31 = 0$; б) $6x - 20y - 11z + 1 = 0$. **1.204.** 3.
1.205. а) $6/\sqrt{5}$; б) 21. **1.206.** 25. **1.207.** $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{-5}$.
1.208. -11. **1.209.** $\dfrac{x-15}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-23}{7}$. **1.210.** $\arcsin\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$.
1.211. $\dfrac{x-7}{67} = \dfrac{y-1}{-28} = \dfrac{z}{70}$. **1.212.** $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+4}{9}$. **1.214.** б) $4x + 3y + 12z - 93 = 0$; в) 13; г) $\begin{cases} 54x - 44y - 7z + 181 = 0, \\ -45x - 76y + 34z + 497 = 0. \end{cases}$ **1.215.** б) $4x + 12y + 3z + 76 = 0$; в) $127/13$; г) $\begin{cases} 53x - 7y - 48z - 429 = 0, \\ 105x - 23y - 44z + 136 = 0. \end{cases}$
1.216. б) $6x - 3y - 2z + 2 = 0$; в) 7; г) $\begin{cases} 17x + 16y + 27z - 90 = 0, \\ 31x + 58y + 6z - 20 = 0. \end{cases}$
1.217. б) $2x - 3y - 4z - 74 = 0$; в) $4\sqrt{26}$; г) $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{-4}$.
1.218. а) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$, $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; в) $\begin{cases} y + z - 1 = 0, \\ x + y - 2z - 1 = 0; \end{cases}$ г) $x + y + 3z - 2 = 0$; д) $\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{33}}$. **1.219.** См. рис. 38. **1.220.** См. рис. 39. **1.221.** Прямые $x = 0$ и $x - y = 0$. **1.222.** Прямые $y = 0$ и $x + y = 0$. **1.223.** Прямые $x - y = 0$ и $x + y = 0$. **1.224.** Прямые

$x = 0$ и $y = 0$. **1.225.** Прямые $y = \pm 3$. **1.226.** Прямые $x = -2$ и $x = 3$. **1.227.** Прямые $y = 0$, $x = 2$ и $x = 5$. **1.228.** Окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат. **1.229.** Окружность радиуса $R = 1$

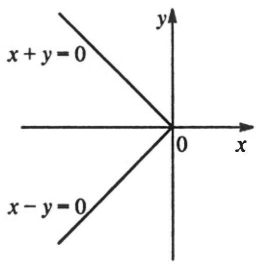


Рис. 38

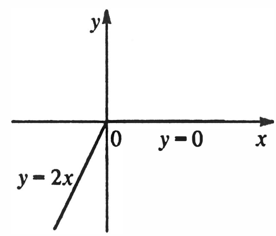


Рис. 39

с центром в точке $C(0, -3)$. **1.230.** Начало координат. **1.231.** Пустое множество. **1.232.** Точки $(0, \pm 1)$. **1.233.** $x - y = 0$. **1.234.** $4ax \pm c = 0$. **1.235.** $y = \pm 2x$. **1.236.** $x^2 + y^2 = 16$. **1.237.** $x^2 + y^2 = 8$. **1.238.** $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. **1.239.** $xy = 2$. **1.240.** $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. **1.241.** а) $C(2, -3)$, $R = 4$; б) $C(4, 0)$, $R = 4$; в) $C(0, -2)$, $R = 2$. **1.242.** а) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$; б) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; в) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; г) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$; д) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ или $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$; е) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$; ж) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$. Указание. Написать уравнение искомой окружности в виде $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, подставить в него координаты каждой точки и затем найти D, E и F. **1.243.** $2x - 5y + 19 = 0$. **1.244.** а) 7; б) 2. **1.245.** а) Пересекает; б) касается; в) проходит вне окружности. **1.246.** а) $a = 5$, $b = 3$; б) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; в) $e = \frac{4}{5}$; г) D_1: $x = -\frac{25}{4}$, D_2: $x = \frac{25}{4}$. **1.247.** а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; г) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; д) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$; е) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **1.248.** $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$. **1.249.** а) $C(3, -1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $e = 2/3$, D_1: $2x + 3 = 0$; D_2: $2x - 15 = 0$; б) $C(-1, 2)$, $a = 5$, $b = 4$, $e = 3/5$, D_1: $3x + 28 = 0$; D_2: $2x - 22 = 0$; в) $C(1, -2)$, $a = 4$,

$b = 2\sqrt{3}$, $e = 1/2$, D_1: $y + 10 = 0$; D_2: $y - 6 = 0$. **1.252.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $r_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3}$, $\rho_{1,2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(4 \pm \sqrt{3})$. **1.253.** $(-15/4, \pm\sqrt{63}/4)$. **1.254.** $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$. **1.255.** $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$. **1.256.** а) Прямая пересекает эллипс; б) проходит вне эллипса; в) касается эллипса. **1.258.** $3x + 2y - 10 = 0$ и $3x + 2y + 10 = 0$. **1.259.** $x + y - 5 = 0$ и $x + y + 5 = 0$. **1.261.** $x + y - 5 = 0$ и $x + 4y - 10 = 0$. **1.262.** $M_0(-3, 2)$, $\sqrt{13}$. **1.264.** $2x + 11y - 10 = 0$. Указание. Воспользоваться результатом задачи 1.263. **1.265.** а) $a = 3$, $b = 4$; б) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; в) $e = \dfrac{5}{3}$; г) $y = \pm\dfrac{4}{3}x$; д) $x = \pm\dfrac{9}{5}$. **1.266.** а) $a = 4$, $b = 3$; б) $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; в) $e = \dfrac{5}{4}$; г) $y = \pm\dfrac{4}{3}x$; д) $y = \pm\dfrac{16}{5}$. **1.267.** а) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$; д) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$; е) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$. **1.268.** $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$. **1.269.** а) $C(2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = 5/3$, уравнения асимптот: $4x - 3y - 17 = 0$ и $4x + 3y + 1 = 0$, уравнения директрис: $5x - 1 = 0$ и $5x - 19 = 0$; б) $C(-5, 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $e = 5/4$, уравнения асимптот: $3x + 4y + 11 = 0$ и $3x - 4y + 19 = 0$, уравнения директрис: $x = -11{,}4$ и $x = 1{,}4$; в) $C(2, -1)$, $a = 4$, $b = 3$, $e = 5/4$, уравнения асимптот: $4x + 3y - 5 = 0$ и $4x - 3y - 11 = 0$, уравнения директрис: $y = -4{,}2$ и $y = 2{,}2$. **1.272.** $r_1 = 9/4$, $r_2 = 41/4$, $\rho(M, D_1) = 9/5$, $\rho(M, D_2) = 41/5$. **1.273.** $(-6, \pm 4\sqrt{3})$. **1.274.** $7y^2 + 24xy - 144 = 0$. **1.275.** $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. **1.276.** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D_{1,2}$: $x + y \pm \sqrt{2} = 0$. **1.277.** $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$. Указание. См. задачу 1.257. **1.278.** $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$. **1.279.** $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **1.281.** $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. **1.282.** $M_0(-6, 3)$, $\rho = 11/\sqrt{13}$. **1.284.** $2x + 11y + 6 = 0$. Указание. Воспользоваться результатом задачи 1.283. **1.285.** а) $p = 3$; б) $p = 5/2$; в) $p = 2$; г) $p = 1/2$. **1.286.** а) $y^2 = -x$; б) $x^2 = -2y$; в) $x^2 = -12y$. **1.287.** а) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$; б) $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$. **1.288.** а) $A(2, 0)$, $p = 2$; б) $A(0, 2)$, $p = 1/2$; в) $A(1, 3)$, $p = 1/8$; г) $A(6, -1)$, $p = 3$; д) $A(1, 2)$, $p = 2$;

е) $A(-4,\ 3)$, $p = 1/4$; **1.290.** 6. **1.291.** а) $y = \dfrac{1}{8}x^2 - x + 3$; б) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **1.292.** $y_0 y = p(x + x_0)$. **1.293.** $x + y + 2 = 0$. **1.294.** $2x - y - 16 = 0$. **1.295.** $3x - y + 3 = 0$ и $3x - 2y + 12 = 0$. **1.296.** $M_0(9,\ -24)$, $\rho(M_0, L) = 10$. **1.298.** $y - 18 = 0$. **1.299.** $\operatorname{tg}\varphi = 1$. **1.300.** $r\sin\varphi = 1$. **1.301.** $r\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **1.302.** $r = a$. **1.303.** $r^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$. **1.304.** $r = a\cos\varphi$. **1.305.** Окружность $x^2 + y^2 = 25$. **1.306.** Прямая $y = -x$. **1.307.** Прямая $x = 2$. **1.308.** Прямая $y = 1$. **1.309.** Прямая $x - y - 1 = 0$. **1.310.** Прямая $x + y - 2 = 0$. **1.311.** Окружность $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. **1.312.** Окружность $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. **1.313.** Пара лучей $x = \pm 2y$, $y \geqslant 0$. **1.314.** Семейство концентрических окружностей радиусов $r_n = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **1.315.** Гипербола $xy = a^2$. **1.316.** Лемниската Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. **1.317.** а) $r\cos\varphi = 3$; б) $\varphi = \pi/3$; в) $\operatorname{tg}\varphi = 1$. **1.318.** а) $r = 10\cos\varphi$; б) $r = \pm 6\sin\varphi$. **1.319.** а) $C(2,\ 0)$, $R = 2$; б) $C(3/2,\ \pi/2)$, $R = 3/2$; в) $C(5/2,\ -\pi/2)$, $R = 5/2$; г) $C(3,\ \pi/3)$, $R = 3$; д) $C(4,\ 5\pi/6)$, $R = 4$; е) $C(4,\ -\pi/6)$, $R = 4$. **1.320.** $r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0) = R^2 - r_0^2$. **1.321.** а) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{16}{5 + 3\cos\varphi}$. **1.322.** а) $r = -\dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. **1.323.** $r = \dfrac{3}{1 - \cos\varphi}$. **1.324.** а) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; в) $y^2 = 6x$. **1.325.** $r^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. **1.326.** $r^2 = \dfrac{b^2}{e^2\cos^2\varphi - 1}$. **1.327.** $r = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **1.328.** а) $x = t$, $y = t + 1$, $t \in [-1,\ +\infty)$; б) $x = t - 1$, $y = t$, $t \in [0,\ +\infty)$; в) $x = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t$, $t \in [0,\ +\infty)$; г) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\cos t}{\cos(t - 3\pi/4)}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sin t}{\cos(t - 3\pi/4)}$, $t \in \left[-\pi,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1.329.** а) $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}t$, $y = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}t$, $t \in [0,\ \sqrt{5}]$; б) $x = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}t$, $y = 3 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}t$, $t \in [0,\ \sqrt{5}]$. **1.330.** $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$, $t \in [0,\ 2\pi)$. **1.331.** а) $x = R(1 + \cos 2t)$, $y = R\sin 2t$, $t \in [-\pi/2,\ \pi/2)$; б) $x = R(1 + \cos t)$, $y = R\sin t$, $t \in [0,\ 2\pi)$. **1.332.** Прямая $x + 2y - 3 = 0$. **1.333.** Парабола $y^2 = x$. **1.334.** Окружность $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$. **1.335.** Эллипс

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **1.336.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$. **1.337.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **1.338.** Окружность $(x-R)^2+y^2=R^2$. **1.339.** Окружность $x^2+(y-R)^2=R^2$. **1.340.** Верхняя ветвь параболы $y^2=2px$. **1.341.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $y=\dfrac{ab\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $t\in[0,2\pi)$. **1.342.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$, $y=\dfrac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$, где $t\in\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a},\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ для правой ветви и $t\in\left(\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a},\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ для левой ветви. **1.343.** а) $x=\dfrac{t^2}{2p}$, $y=t$, $t\in(-\infty,+\infty)$; б) $x=2p\operatorname{ctg}^2 t$, $y=2p\operatorname{ctg} t$, где $t\in(0,\pi/2)$ для верхней ветви и $t\in(3\pi/2,2\pi)$ для нижней ветви; в) $x=\dfrac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{t}{2}$, $y=p\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$, $t\in(0,2\pi)$. **1.344.** Плоскость $z=-5$, параллельная плоскости Oxy. **1.345.** Плоскость с нормальным вектором $\mathbf{n}(1,-2,1)$. **1.346.** Сфера радиуса $R=2$ с центром в начале координат. **1.347.** Сфера радиуса $R=4$ с центром в точке $C(2,0,-1)$. **1.348.** Начало координат. **1.349.** Ось Oy. **1.350.** Пустое множество. **1.351.** Пара пересекающихся плоскостей $x-2z=0$ и $x+2z=0$, параллельных оси Oy. **1.352.** Пара координатных плоскостей Oyz и Oxy. **1.353.** Тройка координатных плоскостей. **1.354.** Пара плоскостей $x=0$ и $x=4$. **1.355.** Пара плоскостей $y=0$ и $y=x$. **1.356.** $20y+53=0$. **1.357.** $x^2+y^2+z^2=a^2$. **1.358.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1$. **1.359.** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$. **1.360.** а) $C(0,0,3)$, $R=3$; б) $C(2,1,-1)$, $R=5$. **1.361.** а) $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; в) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; г) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$; д) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$. **1.362.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. **1.363.** $\left(x-\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(z-\dfrac{4}{9}\right)^2=\dfrac{64}{9}$. **1.364.** $x=-1+5t$, $y=3-t$, $z=-\dfrac{1}{2}+2t$. **1.365.** $M_0(-2,-2{,}7)$, $\rho=3$. **1.366.** а) Пересекает; б) касается; в) проходит вне сферы. **1.367.** а) Прямая, проходящая через точку $(5,0,-2)$ параллельно оси Oy; б) окружность в плоскости Oxz, имеющая центр в начале координат и радиус

$R = 7$; в) окружность, лежащая в плоскости $z = 2$ с центром в точке $C(0, 0, 2)$ и радиусом $R = 4$; г) окружность в плоскости $z = 6$ с центром в точке $C(0, 0, 6)$ и радиусом $R = \sqrt{13}$. **1.368.** а) $C(1, 7, 2)$, $R = 4$; б) $C(-1, 2, 3)$, $R = 8$. **1.369.** Эллипс $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{18} = 1$.

1.370. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36, \\ 2x - z - 1 = 0. \end{cases}$

1.371. $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$

1.372. Эллипсоид. **1.373.** Однополостный гиперболоид. **1.374.** Двуполостный гиперболоид вращения. **1.375.** Конус. **1.376.** Параболоид вращения. **1.377.** Гиперболический параболоид. **1.378.** Эллиптический параболоид. **1.379.** Параболический цилиндр. **1.380.** Параболоид вращения с вершиной $(0, 0, 2)$. **1.381.** Гиперболический параболоид. **1.382.** Однополостный гиперболоид вращения. **1.383.** Двуполостный гиперболоид вращения. **1.384.** Указание. Воспользоваться однородностью уравнения. **1.385.** Указание. Перейти к новой системе координат поворотом осей Ox и Oy вокруг оси Oz на угол $\pi/4$. **1.386.** а) Конус второго порядка с вершиной в начале координат (см. задачу 1.384); б) гиперболический параболоид (см. задачу 1.385). **1.387.** На плоскость Oxy: $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$; на плоскость Oxz: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$; на плоскость Oyz: $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$. **1.388.** а) Эллипс; б) парабола. **1.389.** а) $M_1(3, 4, -2)$ и $M_2(6, -2, 2)$; б) $M(4, -3, 2)$ — прямая касается поверхности; в) прямая и поверхность не имеют общих точек. **1.390.** а) $M(9, 5, -2)$; б) $M(3, 0, -10)$; в) $M(6, -2, 2)$.

1.391. $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$

1.392. $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ x - 5 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 5z = 0, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

1.403. а) $y^2 + z^2 = a^2$; б) $x^2 + z^2 = 2ax$; в) $x^2 + y^2 = 2ax$. **1.404.** а) $x^2 + 5y^2 - 8y - 12 = 0$; б) $4x^2 + 5z^2 + 4z - 60 = 0$; в) $2y - z - 2 = 0$. **1.405.** а) $8x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 3 = 0$, $z = 0$; б) $2x - 2z - 7 = 0$, $y = 0$; в) $4y^2 + 8z^2 + 16y + 36z - 31 = 0$, $x = 0$. **1.406.** $y^2 = 2ax - x^2$. **1.407.** а) $(3y - 2z)^2 = 12(3x - z)$; б) $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 4(x - z)$.

1.408. Уравнение проектирующего цилиндра: $2x^2 + (y - z + 2)^2 = 8$; контур тени — эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1$. **1.409.** $x = 4$, $z \pm y = 2$. **1.411.** а) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{h^2}$; б) $9(x^2 + z^2) = 16y^2$; в) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$; г) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **1.412.** а) $h^2x^2 = 2pz(h(y + a) - az)$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z-c)^2}{c^2} = 0$; в) $x^2 + z^2 = z(y + a)$; г) $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$. **1.413.** а) вершина $(0, h, 0)$, направляющая — окружность $x^2 + (y - h)^2 = h^2$, $z = h$; б) вершина $(0, 0, 0)$, направляющая — парабола $x^2 = 2hy$, $z = h$. **1.414.** $xy + xz + yz = 0$, ось конуса проходит в 1-м и 7-м октантах; $xy + xz - yz = 0$, ось конуса проходит во 2-м и 8-м октантах; $xy - xz - yz = 0$, ось конуса проходит в 3-м и 5-м октантах; $xy - xz + yz = 0$, ось конуса проходит в 4-м и 6-м октантах. **1.415.** а) Окружность $x^2 + y^2 = (a/\sqrt{2})^2$; б) отрезки $z = \pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2} \leqslant x \leqslant a/\sqrt{2}$; в) отрезки $z = \pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2} \leqslant y \leqslant a/\sqrt{2}$. **1.416.** Уравнение проектирующего конуса: $9x^2 - 16y^2 - 16z^2 - 90x + 225 = 0$, контур тени — окружность $y^2 + z^2 = (15/4)^2$. **1.417.** а) $z = x^2 + y^2$; б) $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$. **1.418.** а) $x^2 + z^2 = y^2$; б) $z^2 = x^2 + y^2$. **1.419.** а) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$; б) $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$. **1.420.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1.421.** Поверхность образована вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz.

Глава 2

2.1. 18. **2.2.** $4ab$. **2.3.** 1. **2.4.** $(a-b)^2$. **2.5.** 0. **2.6.** 1. **2.7.** 1. **2.8.** $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. **2.9.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.10.** Указание. Показать, что дискриминант соответствующего квадратного трехчлена неотрицателен. **2.12.** 0. **2.13.** 0. **2.14.** $abc + x(ab + bc + ca)$. **2.15.** $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1$. **2.16.** $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$. **2.17.** -3. **2.18.** $3\sqrt{3}i$. **2.19.** $-4 \pm \sqrt{22}$. **2.20.** $(-\infty, +\infty)$. **2.21.** $(4, +\infty)$. **2.22.** $(-6, -4)$.

2.26. Указание. Показать, что последний столбец исходного определителя можно представить в виде $\begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} - (ab+ac+bc)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + abc\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, и воспользоваться этим представлением. **2.27.** 0. **2.28.** 0. **2.29.** 0. **2.30.** 0. **2.33.** Парабола $y = (x-a)(y-b)$. **2.34.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, нечетная. **2.35.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, четная. **2.36.** Нечетная. **2.37.** Нечетная. **2.38.** Четность подстановки совпадает с четностью n. **2.39.** Если n нечетно, то подстановка четная при любом k; если n четно, то четность подстановки совпадает с четностью k. **2.40.** Входит со знаком минус. **2.41.** Входит со знаком плюс. **2.42.** Не входит. **2.43.** Входит со знаком плюс. **2.44.** $i = 5$, $k = 1$. **2.45.** $i = 6$, $k = 2$. **2.46.** $10x^4 - 5x^3$. **2.47.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$. **2.48.** 0. **2.49.** а) Не изменится; б) не изменится; в) обратится в нуль; г) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; д) умножится на $(-1)^{n-1}$. **2.50.** -2. **2.51.** -14. **2.52.** 4. **2.53.** 0. **2.54.** а) $8a + 15b + 12c - 19d$; б) $2a - 8b + c + 5d$; в) $2a - b - c - d$. **2.55.** 0. **2.56.** 48. **2.57.** 223. **2.58.** $9\sqrt{10}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. **2.59.** $(be-cd)^2$. **2.60.** $(b-c-d)(b+c+d)(b-c+d)(b+c-d)$. **2.61.** 394. **2.62.** 665. **2.63.** $x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$. **2.64.** $2x^4y(y-x)^6$. **2.65.** α^n. Указание. Доказать, что исходный определитель $\Delta_n(\alpha)$ можно представить в виде $\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha)$. **2.66.** $\alpha^n + \beta^n$. **2.67.** $n!$. **2.68.** $2n + 1$. **2.69.** 1. **2.70.** $(-1)^{n-1}\cdot n$. **2.71.** $-a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$. **2.72.** $n+1$. **2.73.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}(a_i - a_k)$. **2.76.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$. **2.77.** $\begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ 0 & 2-2i \end{pmatrix}$. **2.78.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. **2.79.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.80.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.81. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. **2.82.** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. **2.83.** $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$. **2.84.** а) (31);

б) $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. **2.85.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$. **2.86.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$.

2.87. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.88.** $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. **2.89.** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

2.90. $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$. **2.91.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.92.** $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$.

2.93. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$. **2.94.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$. **2.95.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.96. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, где a и b — любые числа. **2.97.** $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, где a и b — любые числа. **2.98.** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где a, b и c — любые числа. **2.99.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где a, b, c — произвольные числа, удовлетворяющие соотношению $a^2 + bc = 0$. **2.100.** $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 1$.

2.101. а) i-я и j-я строки произведения поменяются местами; б) к i-й строке произведения прибавится j-я строка, умноженная на α; в) i-й и j-й столбцы поменяются местами; г) к i-му столбцу произведения прибавится j-й столбец, умноженный на α.

2.103. $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. **2.104.** $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.106. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **2.107.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.108. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **2.109.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

2.110. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **2.111.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

2.112. $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2.113. $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 1/4 & 1/20 & -1/4 & -3/20 \\ 1/4 & -1/20 & -1/4 & 3/20 \\ 1/4 & -3/20 & 1/4 & -1/20 \end{pmatrix}$.

2.114. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.115.** $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

2.116. $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.117.** $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

2.118. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-3} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

2.119. $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3 \\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.120. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1/n \\ 0 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/n \end{pmatrix}$.

2.121. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.122.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. **2.123.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.124.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.125. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **2.127.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.128.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.129. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$. **2.131.** $(1,\ 4,\ -7,\ 7)$. **2.132.** $(4,\ 6,\ -35,\ -1)$.

2.133. $(70, 40, -20, -16)$. **2.134.** $\left(51,\ 26,\ \dfrac{37}{2},\ -\dfrac{23}{2}\right)$. **2.135.** $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1,\ 3,\ 3\right)$.

2.136. $(-17, -13, 41, 5)$. **2.137.** $(-8/3, -7/3, -16/3, -11/3)$. **2.138.** $(-23/4, -29/8, 27/8, 9/8)$. **2.140.** Линейно независима. **2.141.** Линейно зависима. **2.142.** Линейно независима. **2.143.** Линейно зависима. **2.144.** Указание. Расписав векторное равенство $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \alpha_4\mathbf{e}_4 = 0$ покомпонентно, показать, что получающаяся система четырех уравнений (относительно α_1, α_2, α_3, α_4) имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. **2.145.** $\triangleleft$ Положим $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4 + x_5\mathbf{e}_5 = \mathbf{x}$ и распишем это равенство покомпонентно: $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Решая эту систему, находим $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$, Итак, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5$. $\triangleright$ **2.146.** $5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5$. **2.150.** 2. **2.151.** 3. **2.152.** 3. **2.153.** 2. **2.154.** 2. **2.155.** 2. **2.156.** 2, если $\lambda = 0$, и 3, если $\lambda \neq 0$. **2.157.** 3 при любом λ. **2.159.** 3. **2.160.** 2. **2.161.** 3. **2.162.** 2. **2.163.** 2. **2.164.** 2. **2.165.** 2. **2.166.** 3. **2.167.** 5. **2.168.** 4. **2.169.** 3. **2.170.** 6. **2.174.** Линейно независима. **2.175.** Линейно зависима. **2.176.** 3. **2.177.** 3. **2.178.** $\lambda = 15$. **2.179.** $\lambda \neq 12$. **2.180.** Ни при каких λ. **2.181.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. **2.182.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5)$. **2.183.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$. **2.184.** $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $\mathfrak{B}_2 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. **2.185.** $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $\mathfrak{B}_2 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$, $\mathfrak{B}_3 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$. **2.186.** $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$, $\mathfrak{B}_2 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$, $\mathfrak{B}_3 = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. **2.187.** $x = 16$, $y = 7$. **2.188.** $x = 2$, $y = 3$. **2.189.** $x = -b$, $y = -(2/3)a$. **2.190.** $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$. **2.191.** $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. **2.192.** $x = 3$, $y = 1$, $z = -1$. **2.193.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. **2.194.** $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **2.195.** Степень многочлена меньше двух, если выполняется соотношение $k = (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)$; если $k \neq 0$, то степень равна единице; если же $k = 0$, то степень равна нулю. Указание. Доказать, что определитель системы уравнений $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, $i = 1, 2, 3$ (с неизвестными a, b, c) отличен от нуля. **2.196.** $f(x) = x^2 - 5x + 3$. **2.197.** $f_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$, $f_2(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$, $f_3(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$. **2.198.** $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **2.199.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. **2.200.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$. **2.201.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **2.202.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$x_3 = 2,\ x_4 = 0$. **2.203.** $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$. **2.204.** $(1 + \sqrt{3}c_1,\ c_1)^\top$. **2.205.** Система несовместна. **2.206.** Система несовместна. **2.207.** $(-1 + 2c_1,\ 1 + c_1,\ c_1)^\top$. **2.208.** $(-1,\ 3,\ -2,\ 2)^\top$. **2.209.** $(0, 2, 1/3, -3/2)^\top$. **2.210.** $\left(-\frac{2}{11} + \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2, \frac{10}{11} - \frac{5}{11}c_1 + \frac{1}{11}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^\top$. **2.211.** Система несовместна. **2.212.** $(c_1,\ -13 + 3c_1,\ -7,\ 0)^\top$. **2.213.** $\left(-\frac{6}{7} + \frac{8}{7}c_1, \frac{1}{7} - \frac{13}{7}c_1, \frac{15}{7} - \frac{6}{7}c_1,\ c_1\right)^\top$. **2.214.** Система несовместна. **2.215.** $(c_1,\ c_2,\ 5 - 8c_1 + 4c_2,\ -3,\ 1 + 2c_1 - c_2)^\top$.

2.216. $\left(\frac{20}{9} + c_1 - \frac{53}{9}c_2, -\frac{5}{3} - \frac{5}{2}c_1 + \frac{5}{6}c_2, -\frac{1}{9} + \frac{2}{9}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^\top$.

2.217. $\left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{12}c_1 - \frac{5}{4}c_2 - \frac{7}{8}c_3,\ c_1,\ c_2,\ 1 - \frac{1}{2}c_3,\ c_3\right)^\top$.

2.218. Если $\lambda \neq 0$, то система несовместна; если $\lambda = 0$, то $X = \left(-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}c_1 - \frac{13}{2}c_2, -\frac{7}{2} - \frac{7}{2}c_1 - \frac{19}{2}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^\top$. **2.219.** Если $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$, то $X = \frac{1}{\lambda + 3}(1,\ 1,\ 1,\ 1)^\top$; если $\lambda = -3$, то система несовместна; если $\lambda = 1$, то $X = (1 - c_1 - c_2 - c_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3)^\top$. **2.220.** Если $\lambda = 8$, то $X = (c_1,\ 4 + 2c_1 - 2c_2,\ 3 - 2c_2,\ c_3)^\top$; если $\lambda \neq 8$, то $X = (0,\ 4 - 2c_1,\ 3 - 2c_1,\ c_1)^\top$. **2.221.** Если $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$, то $X = \frac{1}{\lambda + 3}(1,\ 1,\ 1)^\top$; если $\lambda = -3$, то система несовместна; если $\lambda = 0$, то $X = (1 - c_1 - c_2,\ c_1,\ c_2)^\top$. **2.223.** $c_1E_1,\ E_1 = (3,\ 1,\ 5)^\top$. **2.224.** $c_1E_1 + c_2E_2,\ E_1 = (2,\ 1,\ 0)^\top,\ E_2 = (3,\ 0,\ 1)^\top$. **2.225.** Система имеет только тривиальное решение. **2.226.** $c_1E_1,\ E_1 = (4,\ 1,\ -5)^\top$. **2.227.** $c_1E_1 + c_2E_2,\ E_1 = (8,\ -6,\ 1,\ 0)^\top,\ E_2 = (-7,\ 5,\ 0,\ 1)^\top$. **2.228.** $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (1,\ 0,\ -5/2,\ 7/2)^\top,\ E_2 = (0,\ 1,\ 5,\ -7)^\top$. **2.229.** $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3,\ E_1 = (1,\ 0,\ 0,\ -9/4,\ 3/4)^\top,\ E_2 = (0,\ 1,\ 0,\ -3/2,\ 1/2)^\top,\ E_3 = (0,\ 0,\ 1,\ -2,\ 1)^\top$. **2.230.** $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3,\ E_1 = (1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)^\top$, $E_2 = (-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^\top,\ E_3 = (0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^\top$. **2.231.** $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (0,\ 1/3,\ 1,\ 0,\ 0)^\top,\ E_2 = (0,\ -2/3,\ 0,\ 0,\ 1)^\top$. **2.232.** $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (-3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0)^\top,\ E_2 = (-5,\ 3,\ 0,\ 0,\ 1)^\top$. **2.233.** Строки матрицы A не образуют, а строки матрицы B образуют. Указание. Если ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен r, то необходимо проверить, что а) ранг A (соответственно B) равен $5 - r$; б) строки матрицы A (соответственно B) являются решениями исходной системы. **2.234.** $a_1 = 2$, $X = c_1E_1$, $E_1 = (1, 0, -2)^{\top}$; $a_2 = -4$, $X = c_1E_1$, $E_1 = (1, -24/5, -4/5)^{\top}$. **2.235.** $a_1 = -1$, $X = c_1E_1$, $E_1 = (-5/3, 1/3, 1)^{\top}$. **2.236.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1/3, 1/3, 0, 0, 0)^{\top}$, $E_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^{\top}$, $E_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^{\top}$, $E_3 = (1/3, -5/3, 0, 0, 1)^{\top}$. **2.237.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (2/3, 1/6, 0, 0, 0)^{\top}$, $E_1 = (0, 1/2, 1, 0, 0)^{\top}$, $E_2 = (0, -1/2, 0, 1, 0)^{\top}$, $E_3 = (1/3, 5/6, 0, 0, 1)^{\top}$. **2.238.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4$, $X_0 = (1/3, -1/3, 0, 0, 0, 0)^{\top}$, $E_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)^{\top}$, $E_2 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)^{\top}$, $E_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)^{\top}$, $E_4 = (0, 0, 0, -1, 0, 1)^{\top}$. **2.239.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1, -1/2, 0, 0, 0)^{\top}$, $E_1 = (0, -3/2, 1, 0, 0)^{\top}$, $E_2 = (0, -2, 0, 1, 0)^{\top}$, $E_3 = (0, -5/2, 0, 0, 1)^{\top}$. **2.240.** $(1, -1, -1, 1)^{\top}$. **2.241.** $(6 - c, 5 + c, 3, -1 - c, c)^{\top}$. **2.242.** Система несовместна. **2.243.** $\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}c_1, c_1, 0, 0, \frac{11}{5} - \frac{6}{5}c_2, c_2\right)^{\top}$. **2.244.** $(-1 + c_1 + 2c_2, -3 + c_1 + 2c_2, c_1, c_2)^{\top}$.

Глава 3

3.6. Да. **3.7.** Да, если прямая проходит через начало координат. **3.8.** Нет. **3.9.** Да. **3.10.** Нет. **3.11.** Да. **3.12.** Нет. **3.15.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$. **3.16.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. **3.17.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.18. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\cos\varphi + \sin\varphi \\ 2\sin\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix}$.

3.19. $r = 2$; базисом является, например, система $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. **3.20.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ **3.21.** $3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$, $r = 2$, любая пара векторов образует базис этой системы. **3.22.** Координаты матрицы в этом базисе совпадают с ее элементами.

3.23. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **3.25.** $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.27. $$\begin{pmatrix} 1 & -t_0 & t_0^2 & -t_0^3 & \dots & (-1)^{n-1}t_0^{n-1} \\ 0 & 1 & -2t_0 & 3t_0^2 & \dots & (-1)^{n-2}(n-1)t_0^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.28. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **3.30.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. **3.31.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **3.32.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. **3.33.** $\dfrac{1}{2(1+i)} \begin{pmatrix} 1+3i \\ -i-2i \end{pmatrix}$.

3.34. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **3.37.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

3.38. $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **3.39.** Является. **3.40.** Не является, так как нарушено условие линейности отображения. **3.41.** Не является, так как нарушено условие взаимной однозначности отображения. **3.43.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $-2+3i = -2(1+i) - 5(-i)$. **3.45.** а), б) Подпространство размерности 2, базисом является любая пара неколлинеарных векторов из заданного множества; в) не является подпространством. **3.46.** а) Подпространство размерности $n-2$; б) не является подпространством. **3.47.** Множества, указанные в п. а), б), г), — подпространства, а множество из п. в) подпространством не является. Указание. Условие, которому удовлетворяют координаты в любой из задач этой серии, можно записать в виде $AX = O$, где A — некоторая матрица, имеющая n столбцов, а X — столбец координат в фиксированном базисе. Поэтому размерность соответствующего подпространства равна $n - \operatorname{rang} A$, а в качестве базиса можно взять любую фундаментальную систему решений системы уравнений $Ax = O$. **3.48.** а) Подпространство размерности $n^2 - C_n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$; б) не является подпространством. **3.49.** а) Бесконечномерное подпространство; б) не является подпространством; в) подпространство размерности n. **3.51.** 2. **3.52.** 3; один из базисов есть, например, $\mathfrak{B} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4)$. **3.53.** 3; один из базисов есть, например, $\mathfrak{B} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5)$. **3.54.** Указание. Заданная система многочленов линейно независима. **3.55.** $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ — прямая $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$, $\mathcal{L}(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$ — прямая $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. **3.56.** $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — плоскость $-3x-y-2z = 0$, $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \mathbf{b}$ — плоскость $-3x - y - 2z + 5 = 0$. **3.57.** Множество решений неоднородной системы есть линейное многообразие, полученное из подпространства размерности $n - \operatorname{rang} A = 3$ решений соответствующей однородной системы сдвигом на произвольное частное решение неоднородной системы. **3.62.** в) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$;

г) $\left|\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} - \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

3.63. а) 0; б) -6. **3.64.** а) -1; б) 24.

3.65. б) $\left(\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int\limits_a^b g^2(t)\,dt\right)$;

в) $$\left|\left(\int\limits_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2} - \left(\int\limits_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_a^b (f(t)+g(t))\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

3.67. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_2 = (2,\ 2,\ -2,\ -2)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,\ 1,\ -1,\ 1)$. **3.68.** $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{e}_2 = (10/3,\ -1/3,\ 1/3,\ -1)$, $\mathbf{e}_3 = (-19/185,\ 87/185,\ 61/185,\ -72/185)$. **3.69.** $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 3, -3, 2)$, $\mathbf{e}_3 = (2,\ -1,\ -1,\ -2)$. **3.70.** $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{e}_2 = (3, 2, -3, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,\ 5,\ 1,\ 10)$. Указание. Система $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ не является линейно независимой (вектор $\mathbf{f}_3$ может быть получен как линейная комбинация векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$). Поэтому получение вектора $\mathbf{e}_3$ с использованием $\mathbf{f}_3$ дает в результате $\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Показав это, следует искать вектор $\mathbf{e}_3$ в виде $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_4 - c_1^{(3)}\mathbf{e}_1 - c_2^{(3)}\mathbf{e}_2$. **3.71.** $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_1 = (1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{e}_2 = (2,\ 3,\ -3,\ 2)$, $\mathbf{e}_3 = (2,\ -1,\ -1,\ -2)$. **3.72.** $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_1 = (2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{e}_2 = (3,\ 2,\ -3,\ -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,\ 5,\ 1,\ 10)$. **3.73.** $\mathbf{e}_3 = (-4,\ 2,\ -1,\ 3)$, $\mathbf{e}_4 = (2,\ 4,\ 3,\ 1)$. Указание. Для определения вектора $\mathbf{e}_3 = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ достаточно найти какое-нибудь решение системы относительно неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 двух линейных уравнений $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = 0$. Для определения $\mathbf{e}_4$ аналогичная система состоит из трех уравнений. **3.74.** $\mathbf{e}_4 = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{e}_5 = (0,\ 5,\ 1,\ -4,\ -2)$. **3.75.** $\mathbf{e}_3 = (2/3, -2/3, -1/3)$. **3.76.** $\mathbf{e}_3 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (25,\ 4,\ -17,\ -6)$. **3.78.** $\mathbf{y} = (1, 7, 3, 3)$, $\mathbf{z} = (-4, -2, 6, 0)$. **3.79.** $\mathbf{y} = (1,\ -1,\ -1,\ 5)$, $\mathbf{z} = (3,\ 0,\ -2,\ -1)$. **3.80.** $\mathbf{y} = (3,\ 1,\ -1,\ -2)$, $\mathbf{z} = (2,\ 1,\ -1,\ 4)$. **3.82.** Указание. Из равенства $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ следует, что $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + (\mathbf{y},\ \mathbf{x}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + \overline{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})} = 0$, т. е. $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ — мнимое число, не обязательно равное нулю. **3.83.** Является; $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3.84. Не является. **3.85.** Является оператором проектирования на ось, заданную вектором $\mathbf{e}$. Если $\mathbf{e} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$, то

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}.$$

3.86. Является; если $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.87. Не является. **3.88.** Является. ◁ Ясно, что

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}(\mathbf{e},\ \varphi)\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}_\alpha, \tag{1}$$

где $\mathbf{y}$ — составляющая вектора $\mathbf{y}$ вдоль оси $\mathbf{e}$, $\mathbf{y}_\alpha$ — составляющая вектора $\mathbf{y}$, компланарная плоскости α. Составляющая $\mathbf{y}$ равна

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} = (\mathbf{x},\ \mathbf{e})\mathbf{e}. \tag{2}$$

Составляющая $\mathbf{y}_\alpha$ получается из вектора $\mathbf{x}_\alpha$ поворотом последнего в плоскости α на угол φ. Для нахождения $\mathbf{y}_\alpha$ введем вспомогательный вектор $[\mathbf{e},\ \mathbf{x}_\alpha]$, лежащий в плоскости α перпендикулярно вектору $\mathbf{x}_\alpha$, причем тройка $\mathbf{x}_\alpha$, $[\mathbf{e},\ \mathbf{x}_\alpha]$, $\mathbf{e}$ — правая. Разложим вектор $\mathbf{y}_\alpha$ на составляющие вдоль $\mathbf{x}_\alpha$ и $[\mathbf{e},\ \mathbf{x}_\alpha]$:

$$\mathbf{y}_\alpha = |\mathbf{x}_\alpha|\cos\varphi\frac{\mathbf{x}_\alpha}{|\mathbf{x}_\alpha|} + |\mathbf{x}_\alpha|\sin\varphi\frac{[\mathbf{e},\ \mathbf{x}_\alpha]}{|[\mathbf{e},\ \mathbf{x}_\alpha]|} = \cos\varphi\cdot\mathbf{x}_\alpha + \sin\varphi\cdot[\mathbf{e},\ \mathbf{x}_\alpha]. \tag{3}$$

Наконец,

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{x},\ \mathbf{e})\mathbf{e}. \tag{4}$$

Подставляя (2), (3) и (4) в (1), получим

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x},\ \mathbf{e})\mathbf{e} + \cos\varphi(\mathbf{x} - (\mathbf{x},\ \mathbf{e})\mathbf{e}) + \sin\varphi[\mathbf{e},\ \mathbf{x} - (\mathbf{x},\ \mathbf{e})\mathbf{e}] =$$
$$= \cos\varphi\cdot\mathbf{x} + (1 - \cos\varphi)(\mathbf{x},\ \mathbf{e})\mathbf{e} + \sin\varphi[\mathbf{e},\ \mathbf{x}]. \tag{5}$$

Из (5) следует, что оператор $\mathbf{U}(\mathbf{e},\ \varphi)$ представляет собой сумму операторов задач 3.83, 3.85 и 3.86, матрицы которых известны. ▷

3.89. Является; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.90.** Является; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.91. Не является. **3.92.** Является; $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.93.** Является;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **3.94.** Является; $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.95. Не является. **3.97.** $C = \begin{pmatrix} 22 & 13 & -37 \\ -39 & -16 & 25 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{Cx} = (22x_1 + 13x_2 - 37x_3, -39x_1 - 16x_2 + 25x_3, -x_1 - 6x_3)$. **3.98.** $C = \begin{pmatrix} -15 & 23 & -7 \\ 2 & 8 & -4 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Cx} = (-15x_1 + 23x_2 - 7x_3, 2x_1 + 8x_2 - 4x_3, -7x_1 + x_2 + 7x_3)$. **3.99.** $C = 0$, $\mathbf{Cx} = 0$. **3.100.** $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Cx} = (2x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 - 4x_3, 5x_1 - 2x_3)$. **3.102.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3.103. (E_1, E_2, E_3), где $E_1 = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha \\ \cos\alpha(\cos\beta\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi) \\ \cos\alpha(\cos\beta\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi) \end{pmatrix}$,

$$E_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha(\cos\beta\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi) \\ \cos^2\beta\cos^2\varphi + \cos^2\gamma\sin^2\varphi \\ \dfrac{\cos^2\beta - \cos^2\gamma}{2}\sin 2\varphi + \cos\beta\cos\gamma\cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \cos\alpha(\cos\beta\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi) \\ \dfrac{\cos^2\beta - \cos^2\gamma}{2}\sin 2\varphi + \cos\beta\cos\gamma\cos 2\varphi \\ (\cos\beta\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi)^2 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$.

3.104. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2\cos^2\varphi + a_3\sin^2\varphi & \dfrac{1}{2}(a_2 - a_3)\sin 2\varphi \\ 0 & \dfrac{1}{2}(a_2 - a_3)\sin 2\varphi & a_2\sin^2\varphi + a_3\cos^2\varphi \end{pmatrix}$.

3.105. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -(2\sin\varphi + \cos\varphi) & 2\cos\varphi - \sin\varphi \\ 2\cos\varphi + \sin\varphi & 2 - \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi & -(1 + \sin^2\varphi) \\ 2\sin\varphi - \cos\varphi & 1 + \cos^2\varphi & 2 + \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi \end{pmatrix}$.

3.106. а) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

3.107. $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **3.108.** $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{\mathfrak{B}''} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{pmatrix}$.

3.109. $\big[p(\mathbf{A})\big] = 3A^2 - 2A + 5E = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ -22 & 49 \end{pmatrix}$.

3.110. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & 3 & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & n-1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.111. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.112.** $\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.114. Оператор обратим в том и только в том случае, когда $\lambda \neq 0$; $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{x}$. **3.115.** а) Оператор проектирования на ось, заданную вектором $\mathbf{e}$, не имеет обратного; б) оператор не имеет обратного. **3.116.** а) Оператор проектирования на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{e}$, не имеет обратного; б) оператор зеркального отражения в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$, обратим, причем $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$. У к а з а н и е. Последнее следует из равенства $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, которое геометрически очевидно, но может быть и проверено следующим образом:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{A}\mathbf{e} =$$
$$= \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})(\mathbf{e} - 2\mathbf{e}) = \mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}_3.$$

3.117. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = (-x + 2y - z)\mathbf{i} + (-x - 3y - 2z)\mathbf{j} + (2x - 3y + 2z)\mathbf{k}$. **3.118.** Оператор не имеет обратного. **3.119.** $\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{e}, \varphi) = \mathbf{U}(\mathbf{e}, -\varphi) = \mathbf{U}(-\mathbf{e}, \varphi)$. **3.120.** $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$. **3.121.** Оператор не имеет обратного. **3.122.** $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$. **3.123.** а) N_A — двумерное подпространство всех векторов, ортогональных вектору $\mathbf{e}$, T_A — одномерное подпространство всех векторов, коллинеарных вектору $\mathbf{e}$; б) N_A — одномерное подпространство всех векторов, коллинеарных $\mathbf{a}$, T_A — двумерное подпространство всех векторов, ортогональных $\mathbf{a}$. **3.124.** $N_D = \mathcal{P}_0 = \mathbb{R}$, $T_D = \mathcal{P}_{n-1}$. **3.126.** $r_A = 2$, базис T_A: $\mathbf{e}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (-1, -2, 1)$; $n_A = 1$, базис N_A: $\mathbf{e} = (1, 1, 1)$. **3.127.** $r_A = 1$, базис T_A: $\mathbf{e} = (1, 1, 1)$; $n_A = 2$, базис N_A: $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 0, -1)$. **3.129.** $\lambda = a$, $\mathbf{x}^{(\lambda)}$ — любой ненулевой вектор. **3.130.** $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = x\mathbf{i}$, $x \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} \neq 0$. **3.131.** $\lambda = 0$, $\mathbf{x}^{(\lambda)} = x\mathbf{i}$, $x \neq 0$. **3.132.** При $\varphi = 2\pi l$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, оператор $\mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ совпадает с единичным. Поэтому в этом случае $\lambda = 1$, а $\mathbf{x}^{(\lambda)}$ — любой ненулевой вектор. При $\varphi = (2l + 1)\pi$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha\mathbf{e}$, $\alpha \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}$ — любой ненулевой вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{e}$. При $\varphi \neq \pi l$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, оператор имеет единственное собственное число $\lambda = 1$, а $\mathbf{x}^{(\lambda)} = \alpha\mathbf{e}$, $\alpha \neq 0$. **3.133.** $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}$ — любой ненулевой вектор, компланарный плоскости отражения, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha\mathbf{e}$, $\alpha \neq 0$. **3.134.** $\lambda = -1$, $X^{(\lambda)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. **3.135.** $\lambda = 2$, $X^{(\lambda)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, α_1 и α_2 не равны одновременно нулю. **3.136.** $\lambda_1 = 1$, $X^{(\lambda_1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 0$, $X^{(\lambda_2)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. **3.137.** $\lambda = 1$, $X^{(\lambda)} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. **3.138.** $\lambda_1 = 3$, $X^{(\lambda_1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $X^{(\lambda_2)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

3.139. $\lambda_1 = 1$, $X^{(\lambda_1)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, α_1, α_2 не равны одновременно нулю; $\lambda_2 = -1$, $X^{(\lambda_2)} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. **3.140.** $\lambda_1 = 2$, $X^{(\lambda_1)} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$, $X^{(\lambda_2)} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\alpha \neq 0$. **3.141.** $\lambda = -1$, $X^{(\lambda)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. **3.142.** $\lambda_1 = -1$, $X^{(\lambda_1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $X^{(\lambda_2)} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -2$, $X^{(\lambda_3)} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\alpha \neq 0$.

3.143. $\lambda = 2$, $X^{(\lambda)} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. **3.145.** При любых $\varphi \neq 0, \pi$ оператор $\mathbf{A}$ имеет два собственных числа $\lambda_1(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, $\lambda_2(\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$. Соответствующие им собственные векторы: $X^{(\lambda_1)}(\varphi) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ и $X^{(\lambda_2)}(\varphi) = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, где α и β — произвольные отличные от нуля комплексные числа. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ оператор $\mathbf{A}$ имеет по одному собственному числу: $\lambda(\varphi = 0) = 1$, $\lambda(\varphi = \pi) = -1$. В обоих случаях собственным вектором является любой ненулевой вектор из комплексного пространства $\mathcal{L}_2$. **3.146.** Указание. К равенству $(A - \lambda E)X^{(\lambda)} = O$ применить операцию комплексного сопряжения. **3.147.** $\lambda_1 = 1$, $X^{(\lambda_1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2 + 3i$, $X^{(\lambda_2)} = \alpha \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = 2 - 3i$, $X^{(\lambda_3)} = \alpha \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Указание. Воспользоваться результатом задачи 3.146. **3.149.** б) $\lambda_{A^{-1}} = 1/\lambda_A$.

3.151. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **3.152.** $\begin{pmatrix} -83 & -59 & -45 \\ 107 & 83 & 67 \\ 14 & 10 & 3 \end{pmatrix}$.

3.153. $\begin{pmatrix} 17 & 13 & 13 \\ -11 & \varepsilon^2 - 8 & \varepsilon - 8 \\ -11 & \varepsilon - 8 & \varepsilon^2 - 8 \end{pmatrix}$. **3.154.** $D = \begin{pmatrix} -3/2 & -2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}$, $D^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.155.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D^* = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}$.

3.156. Поворот на угол α вокруг начала координат по часовой стрелке.

3.157. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 0 \end{pmatrix}$. **3.158.** $\dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$, если $ab \neq 0$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ при $a = 0$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $b = 0$. **3.159.** $\triangleleft$ Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ соответствуют вектор-столбцам матрицы A. По теореме Кронекера–Капелли система совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$, т. е. вектор $\mathbf{b}$, соответствующий вектор-столбцу B, принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, которые соответствуют также вектор-строкам сопряженной матрицы A^* (рассматривается действительный случай). Арифметический вектор $\mathbf{x}$ является решением сопряженной системы по определению тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а значит, и $(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$. Теорема доказана. В комплексном случае строками матрицы A^* являются не векторы $a_1, \ldots, a_n$, а их комплексно-сопряженные, но доказательство проводится аналогично. $\triangleright$

3.160. Совместна; общее решение сопряженной системы $c\mathbf{e}$, $\mathbf{e} = (-1, -1, 2)$. **3.161.** Несовместна; общее решение сопряженной системы $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-1, 0, 1)$. **3.162.** Совместна; сопряженная система имеет только тривиальное решение. **3.163.** Совместна; общее решение сопряженной системы как в задаче 3.161. **3.164.** Указание. Воспользоваться теоремой Фредгольма. **3.165.** Только система из задачи 3.162.

3.172. $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **3.173.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \\ -27 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **3.174.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.175.** Диагонализировать нельзя. **3.176.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.177. $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.178. $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ **3.179.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **3.180.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 2^m - 1 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при m четном, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при m нечетном. Указание. Использовать формулу $A^m = T^{-1}D^mT$. **3.181.** $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}$.
3.182. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$. **3.183.** $E_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$. **3.184.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$. **3.185.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **3.186.** $E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **3.187.** $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **3.188.** $U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. **3.189.** $U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.190. $U = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

3.191. $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

3.203. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **3.204.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.205. $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **3.206.** $A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

3.210. ${x'}_1^2 + {x'}_2^2 - {x'}_3^2$,
$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - \frac{1}{2}x'_2 + \frac{5}{6}x'_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}x'_2 - \frac{1}{6}x'_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}x'_3. \end{cases}$$

3.211. ${x'}_1^2 - {x'}_2^2 - {x'}_3^2$,
$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - x'_2 - x'_3, \\ x_2 = x'_1 + x'_2 - x'_3, \\ x_3 = x'_3. \end{cases}$$

3.212. ${x'}_1^2 + {x'}_2^2 - {x'}_3^2$,
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x'_1 + x'_2, \\ x_2 = x'_2 + x'_3, \\ x_3 = -x'_2 + x'_3. \end{cases}$$

3.213. $9{x'}_1^2 + 18{x'}_2^2 - 9{x'}_3^2$,
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x'_1 + \frac{2}{3}x'_2 - \frac{1}{3}x'_3, \\ x_2 = -\frac{1}{3}x'_1 + \frac{2}{3}x'_2 + \frac{2}{3}x'_3, \\ x_3 = \frac{2}{3}x'_1 - \frac{1}{3}x'_2 + \frac{2}{3}x'_3. \end{cases}$$

3.214. $3x_1'^2 + 6x_2'^2 - 2x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2'. \end{cases}$$

3.215. $5x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2'. \end{cases}$$

3.216. $9x_1'^2 + 18x_2'^2 + 18x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1' - \frac{2}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3', \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1' - \frac{1}{3}x_2' - \frac{2}{3}x_3', \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{2}{3}x_2' + \frac{1}{3}x_3'. \end{cases}$$

3.218. Положительно определенная. **3.219.** Отрицательно определенная. **3.220.** Общего вида. **3.221.** Отрицательно определенная. **3.222.** Положительно определенная. **3.223.** Общего вида. **3.224.** Положительно определенная. **3.226.** Эллипс $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$, $O'(-4/5, 2/5)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. **3.227.** Парабола $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$, $O'(2, 1)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. **3.228.** Гипербола $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O'(1, 1)$, $\mathbf{e}_1 = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$, $\mathbf{e}_2 = (-2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$. **3.229.** Параллельные прямые $x' = \pm\sqrt{5}/2$, $O'(-3/5, -3/10)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, или, в старых переменных, $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 4 = 0$. **3.230.** Эллипс $\frac{x'^2}{35/6} + \frac{y'^2}{35/36} = 1$, $O'(7/6, 1/3)$, $\mathbf{e}_1 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. **3.231.** Парабола $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3, 2)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

3.232. а) При $\lambda \in (-\infty, -1)$ — гипербола $(x - \lambda)^2 + \lambda\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda}$, при $\lambda = -1$ — две пересекающиеся прямые $x - y = 0$, $x + y + 2 = 0$, при $\lambda \in (-1, 0)$ — гипербола $(x - \lambda)^2 + \lambda\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda}$, при $\lambda = 0$ — парабола $x^2 = 2y$, при $\lambda \in (0, +\infty)$ — эллипс

$(x-\lambda)^2 + \lambda\left(y-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{\lambda^3+1}{\lambda}$; б) при $\lambda \in (-\infty, -1)$ — гипербола $(1-\lambda)x'^2 + (1+\lambda)y'^2 = 1$, $O'(0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, при $\lambda = -1$ — две параллельные прямые $x-y\pm 1 = 0$, при $\lambda \in (-1, 0)$ — эллипс $(1-\lambda)x'^2 + (1+\lambda)y'^2 = 1$, $O'(0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, при $\lambda = 0$ — окружность $x^2 + y^2 = 1$, при $\lambda \in (0, 1)$ — эллипс $(1-\lambda)x'^2 + (1+\lambda)y'^2 = 1$, $O'(0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, при $\lambda = 1$ — две параллельные прямые $x + y \pm 1 = 0$, при $\lambda \in (1, +\infty)$ — гипербола $(1-\lambda)x'^2 + (1+\lambda)y'^2 = 1$, $O'(0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **3.233.** Эллипсоид $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{1} + \dfrac{z'^2}{2/3} = 1$, $O'(1, 2, -1)$, $\mathbf{e}_1 = (1/3, 2/3, 2/3)$, $\mathbf{e}_2 = (2/3, 1/3, -2/3)$, $\mathbf{e}_3 = (2/3, -2/3, 1/3)$. **3.234.** Гиперболический параболоид $\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{1} = -2z'$, $O'(1, 2, 3)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/3, 1/3, 2/3)$, $\mathbf{e}_2 = (1/3, -2/3, 2/3)$, $\mathbf{e}_3 = (2/3, 2/3, 1/3)$. **3.235.** Двуполостный гиперболоид $\dfrac{x'^2}{4/5} + \dfrac{y'^2}{4/15} - \dfrac{z'^2}{4/25} = -1$, $O'(0, 1, -2/5)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. **3.236.** Эллиптический параболоид $\dfrac{x'^2}{5\sqrt{2}/4} + \dfrac{y'^2}{\sqrt{2}/2} = 2z'$, $O'(-1/40, -19/40, 1/2)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. **3.237.** Параболический цилиндр $y'^2 = \dfrac{4}{3}x'$, $O'(2, 1, -1)$, $\mathbf{e}_1 = (2/3, 2/3, 1/3)$, $\mathbf{e}_2 = (2/3, -1/3, -2/3)$, $\mathbf{e}_3 = (1/3, -2/3, 2/3)$. **3.238.** Эллиптический цилиндр $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$, $O'(0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. **3.239.** Однополостный гиперболоид $\dfrac{x'^2}{1/3} + \dfrac{y'^2}{1/6} - \dfrac{z'^2}{1/2} = 1$, $O'\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. **3.240.** Гиперболический цилиндр $\dfrac{x'^2}{1/3} - \dfrac{y'^2}{1/3} = 1$, $O'(1/6, 1/3, -5/6)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

3.243 Тензор типа (3, 0). **3.244.** $\frac{1}{8}\left\langle \begin{array}{cc|cc} 41 & 11 & 11 & -111 \\ -3 & 7 & 7 & 5 \end{array} \right\rangle$. **3.245.** $A' = S^{-1}A(S^{-1})^{\top}$. **3.246.** n^{p+q}, где $n = \dim L$. **3.247.** $\alpha(x)$. **3.248.** $(i,\, j)$, $(i,\, k)$, $(i,\, l)$. **3.249.** Да. **3.251.** $B(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x})\beta(\mathbf{y})$. **3.252.** $B^{ij} = x^i y^j$. **3.253.** Матрицы тензоров A^{ij}, C_{ij} остаются симметрическими, а тензора B^i_j — необязательно. **3.254.** $B = (6\ 0\ -1)$, $C = (1\ 1\ -7)$. **3.255.** $\|C^i_j\| = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 18 \\ 0 & 8 & 22 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\|D^i_j\| = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 16 \\ 6 & 14 & 19 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. **3.256.** Указание. Использовать формулы $A' = S^{\top}AS$, $A' = S^{-1}AS$, $A' = S^{-1}A(S^{\top})^{-1}$. **3.257.** а) 1; б) 2. **3.258.** $\operatorname{rang} A \leqslant 1$. **3.259.** $A^{ij}_{(kl)} = \frac{1}{2}(A^{ij}_{kl} + A^{ij}_{lk})$, $B^{[ijk]}_l = \frac{1}{6}B^{ijk}_l - \frac{1}{6}(B^{ikj}_l - B^{jik}_l + B^{jki}_l + B^{kij}_l - B^{kji}_l)$, $C_{(ijk)} = \frac{1}{6}(C_{ijk} + C_{ikj} + C_{jik}) + \frac{1}{6}(C_{jki} + C_{kij} + C_{kji})$. **3.260.** $\|\operatorname{Sym} A^{ij}\| = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & -3 \end{pmatrix}$,

$$\|\operatorname{Alt} B_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1/2 \\ -2 & 0 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.261.

B_{ijk}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	2	3/2	2	3/2	3	−1	2	−1	2
$i=2$	−1	9/2	1/2	9/2	0	2	1/2	2	5
$i=3$	6	−9/2	5/2	−9/2	4	0	5/2	0	3
	$k=1$			$k=2$			$k=3$		

C_{ijk}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	0	0	0	0	−1	0	0	1	0
$i=2$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$i=3$	0	−1	0	1	0	0	0	0	0
	$k=1$			$k=2$			$k=3$		

D_{ijk}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	2	2/3	10/3	2	4	−5/3	10/3	−5/3	7/3
$i=2$	2/3	4	−5/3	6	0	8/3	−5/3	8/3	5/3
$i=3$	10/3	−5/3	7/3	−5/3	8/3	5/3	7/3	5/3	3
		$k=1$			$k=2$			$k=3$	

3.262. $T(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$. **3.263.** $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}\big(A(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$. **3.264.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.265. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -6\mathbf{e}_1 - \dfrac{3}{2}\mathbf{e}_2 + \dfrac{7}{2}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \dfrac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \dfrac{1}{2}\mathbf{e}_3. \end{cases}$ **3.266.** -94. **3.267.** -1. **3.268.** -12.

3.269. $\widetilde{T}^{12}_{123} = -168$, $\widetilde{T}^{33}_{211} = 6$.

Глава 4

4.1. $M_1 \times M_2 = \big\{(-1, a), (-1, b), (-1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\big\}$. **4.2.** $M_1 \times M_2 \times M_3 = \big\{(1, 5, a), (1, 6, a), (1, 7, a), (3, 5, a), (3, 6, a), (3, 7, a)\big\}$. **4.3.** Симметрично. **4.4.** Транзитивно, антисимметрично. **4.5.** Антисимметрично. **4.6.** Транзитивно, антисимметрично. **4.7.** Рефлексивно, транзитивно, антисимметрично. **4.8.** При $k = 0$ рефлексивно, транзитивно, симметрично, антисимметрично; при $k \neq 0$ антисимметрично. **4.9.** Рефлексивно, транзитивно, симметрично. **4.10.** а) На главной диагонали матрицы отношения стоят 1; б) матрица отношения симметрическая; в) из двух элементов матрицы отношения, симметричных относительно главной диагонали, не более чем один равен 1. **4.11.** Указание. Для доказательства достаточно привести примеры, показывающие независимость друг от друга свойств бинарного отношения. Например, на множестве $A = \{a, b, c\}$ отношение $\sigma_1 = \big\{(a, a), (b, b)\big\}$ — симметрично, транзитивно, иррефлексивно; $\sigma_2 = \big\{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b)\big\}$ — рефлексивно, транзитивно, асимметрично, $\sigma_3 = \big\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\big\}$ — рефлексивно, симметрично, интранзитивно. **4.12.** σ_6 (при $k = 0$), σ_7 — отношения эквивалентности; σ_5, σ_6 (при $k = 0$) — отношения порядка. **4.13.** σ_1 — отношение порядка. **4.14.** σ_2 — отношение эквивалентности. **4.15.** σ_3 не является ни эквивалентностью, ни порядком. **4.16.** σ_4 не является ни эквивалентностью, ни порядком. **4.17.** $\mathbb{Z}/\sigma = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$, где $A_k = k + n\mathbb{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; в качестве множества представителей можно взять $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. **4.18.** Пусть σ — отношение эквивалентности на A. Для каждого $a \in A$ пусть $K(a) = \{x \mid x\sigma a\}$. Так как σ рефлексивно, то $a \in K(a)$ для каждого $a \in A$. Докажем, что классы $K(a)$ либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если $c \in K(a) \cap K(b)$ и $x \in K(a)$, то $x\sigma a$; кроме того, $c\sigma a$ и $c\sigma b$; из симметричности и транзитивности отношения σ следует, что $x\sigma b$, т. е. $x \in K(b)$. Следовательно, $K(a) \subseteq K(b)$. Аналогично показывается, что $K(b) \subseteq K(a)$. Эти рассуждения показывают, что A является объединением непересекающихся классов: $A = \{K(a_\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Наоборот, если $A = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — разбиение множества A на непересекающиеся подмножества, то отношение $\sigma = \cup\{A_\alpha \times A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ есть отношение эквивалентности. **4.19.** а) $A \times A$; б) $\varnothing$; в) наибольшее отношение эквивалентности — $A \times A$, наименьшее — $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (отношение равенства); отношение $A \times A$ имеет один класс A, у отношения Δ все классы одноэлементны; г) да; Δ; д) наибольшего (при $|A| > 1$) нет; е) да, линейные порядки. **4.20.** Классы эквивалентности имеют вид $a + \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **4.22.** На множестве $A = \{a, b, c\}$ отношение $\sigma = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$ определяет порядок, относительно которого b и c — максимальные элементы, ни один из которых не является наибольшим. **4.23.** Есть только минимальные элементы — простые числа. **4.24.** Граф отношения изображен на рис. 40. Максимальные элементы — 6, 7, 8, 9, 10; минимальный (он же наи-

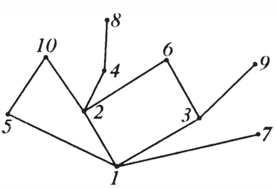


Рис. 40

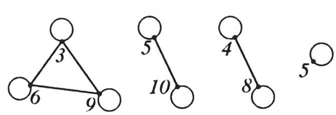


Рис. 41

меньший) — 1; наибольшего нет. **4.25.** Граф отношения изображен на рис. 41. **4.26.** У к а з а н и е. Пусть σ — отношение порядка на A и элементы a, b несравнимы, т. е. $(a, b) \notin \sigma$ и $(b, a) \notin \sigma$. Тогда $\tau = \sigma \cup \{(a, x) \mid (b, x) \in \sigma\} \cup \{(x, b) \mid (x, a) \in \sigma\}$ — отношение порядка и $\tau \supseteq \sigma$. Утверждение справедливо и для бесконечного множества. **4.30.** Граф отношения из задачи 4.27 см. на рис. 42*а*; из задачи 4.28 — на рис. 42*б*. **4.32.** а) $\sigma \supseteq \Delta$; б) $\sigma^{-1} = \sigma$; в) $\sigma^2 \subseteq \sigma$; г) $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$. **4.33.** а) Да; б) не обязательно; в) да; г) не обязательно; д) в общем случае ответ «нет»; ответ «да» тогда и только тогда, когда $\sigma\tau = \tau\sigma$; е) да.

4.35. $\triangleleft$ Пусть $(a,\, b) \in (\rho\sigma)\tau$. Тогда $(a,\, x) \in \rho\sigma$, $(x,\, b) \in \tau$ для некоторого $x \in A$. Отсюда следует, что $(a,\, y) \in \rho$, $(y,\, x) \in \sigma$ для некоторого $y \in A$. Следовательно, $(y,\, b) \in \sigma\tau$. Так как $(a,\, y) \in \rho$ и $(y,\, b) \in \sigma\tau$, то $(a,\, b) \in \rho(\sigma\tau)$. Значит, $(\rho\sigma)\tau \subseteq \rho(\sigma\tau)$. Аналогично доказывается,

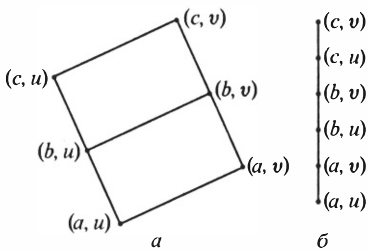


Рис. 42

что $(\rho\sigma)\tau \supseteq \rho(\sigma\tau)$. $\triangleright$ **4.37.** Указание. Если $\rho = A \times A$, $\sigma = \{a\} \times A$, $\tau = \{b\} \times A$ и $a \neq b$, то $\rho(\sigma \cap \tau) \neq \rho\sigma \cap \rho\tau$. **4.39.** $x\sigma^t y$, если $x < y$. **4.40.** $x\sigma^t y$, если y делится на x. **4.41.** Все, кроме $\perp \cdot \perp\ = \|$. **4.42.** Графы изображены на рис. 43. **4.43.** а) Петли $(d,\, d)$, $(e,\, e)$; б) дуги $(e,\, c)$, $(b,\, a)$,

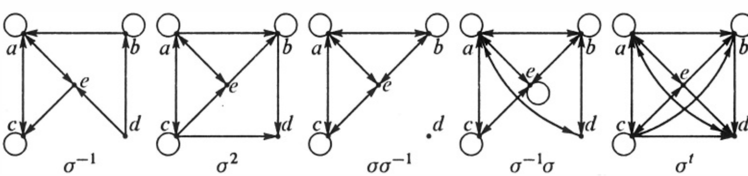


Рис. 43

$(d,\, e)$, $(d,\, b)$; в) дуги $(c,\, d)$, $(e,\, e)$, $(a,\, d)$, $(c,\, b)$, $(e,\, b)$. **4.48.** Классы отношения $\sigma \cap \tau$ — попарные пересечения классов σ и τ; классы отношения $(\sigma \cup \tau)^t$ получаются следующим образом: надо взять класс A_1 отношения σ, затем объединение A_2 всех классов τ, пересекающихся с A_1, затем объединение A_3 всех классов σ, пересекающихся с A_2 и т. д.; классом отношения $\sigma \neq \tau$ будет являться $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i$. **4.49.** См. рис. 44. **4.50.** а) 2^{n^2};

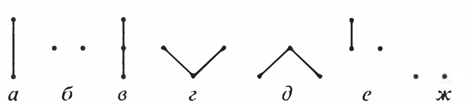


Рис. 44

б) $2^{n^2 - n}$; в) $2^{n(n+1)/2}$; г) $2^n \cdot 3^{n(n-1)/2}$; д) $n!$; е) 19; ж) 5. **4.51.** а) n^{n^2}; б) $n^{n(n+1)/2}$. **4.53.** a, b, c, d — левые нули; a, b, c, d — правые единицы.

Таблицу Кэли см. на рис. 45*а*. **4.54.** 3 — двусторонняя единица; нулей нет. Таблицу Кэли см. на рис. 45*б*. **4.55.** Операция коммутативна, если

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

а

	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

б

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

в

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

г

Рис. 45

таблица симметрична относительно главной диагонали. **4.57.** а) Операция обратима слева, если в каждом столбце содержатся все элементы множества; б) сократима слева, если в каждой строке все элементы различны. **4.58.** а) $x * y = \dfrac{x+y}{2}$; б) умножение матриц; в) $x * y = x$; г) $x * y = y$. **4.59.** Операция неассоциативна, некоммутативна; 0 — правая единица. **4.60.** Операция неассоциативна, некоммутативна; 1 — левый нуль. **4.61.** Операция ассоциативна, коммутативна; 1 — двусторонний нуль. **4.62.** Операция ассоциативна, коммутативна; 1 — двусторонняя единица. **4.63.** Операция ассоциативна, коммутативна; 0 — двусторонняя единица. **4.64.** Операция ассоциативна, некоммутативна; (1, 0) — двусторонняя единица. **4.65.** Операция ассоциативна, некоммутативна; тождественное отображение $\varepsilon(x) = x$ является единицей; отображения $\varphi_a(x) = a$ — левые нули, правых нулей при $|X| > 1$ нет. **4.66.** Операция ассоциативна, коммутативна; 0 — двусторонняя единица. **4.67.** 0 — двусторонняя единица; нулей нет. Таблицу Кэли см. на рис. 45*в*. **4.68.** 0 — двусторонний нуль; 1 — двусторонняя единица; нулей нет. Таблицу Кэли см. на рис. 45*г*. **4.70.** а) идемпотент 0; нильпотентных элементов нет; б) идемпотенты: 0, 1; нильпотентные элементы: 0, 2, 4, 6. **4.71.** Изоморфны множества из задач 4.54 и 4.67. **4.72.** Да, отображение $\varphi(x) = a + b - x$ — изоморфизм. **4.75.** Нет. **4.76.** а) Если каждое $(A_i, \bullet)$ коммутативно; б) если каждое $(A_i, \bullet)$ ассоциативно. **4.77.** а) Левые (правые) единицы — элементы вида $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, где e_i — левая (правая) единица в A_i при $i = 1, 2, \ldots, n$; б) левые (правые) нули —

$A, +$

	2	3	4	5
2	4	5	–	–
3	5	–	–	–
4	–	–	–	–
5	–	–	–	–

$A, \bullet$

	2	3	4	5
2	4	–	–	–
3	–	–	–	–
4	–	–	–	–
5	–	–	–	–

$B, +$

	2	4	5	10
2	4	–	–	–
4	–	–	–	–
5	–	–	–	–
10	–	–	–	–

$B, \bullet$

	2	4	5	10
2	4	–	10	–
4	–	–	–	–
5	10	–	–	–
10	–	–	–	–

Рис. 46

элементы вида $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, где θ_i — левый (правый) нуль в A_i при $i = 1, 2, \ldots, n$. **4.78.** Нет. **4.79.** Нет. **4.80.** См. рис. 46. **4.81.** Да.

4.82. Да. **4.83.** Нет. **4.84.** Да. **4.85.** Нет. **4.86.** $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$. **4.87.** Единица — $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ (двусторонняя); нуль — $\varnothing$ (двусторонний). **4.88.** Единица — тождественное отображение: $\varepsilon(x) = x$ для любого x; левые нули — такие отображения f, что $f(x) = a \in X$ для любого x, правых нулей нет. T_X можно считать подподгруппой B_X, если в T_X или в B_X произведения элементов брать в обратном порядке. **4.89.** 5. **4.91.** Указание. Пусть S — конечная полугруппа и $a \in S$. Тогда $a^{i+m} = a^i$ при некоторых m, $i > 0$, а значит, $a^{i+j} = a^i$ при $j \geqslant i$. Докажите, что $(a^{Nm})^2 = a^{Nm}$ при достаточно большом N. **4.97.** Указание. Обе части равенства $abab = e$ умножить слева на a и справа на b. **4.98.** $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$. **4.99.** $x = a^{-1}cb^{-1}$. **4.100.** $x = a^{-1}b^{-1}$. **4.101.** $x = bc^{-1}a$. **4.102.** Указание. Пусть $a \in S$.

	1	−1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	−1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
−1	−1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	−1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	−1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	−1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	−1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	−1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	−1

Рис. 47

Тогда существует $u \in S$ такое, что $au = a$. Так как уравнение $ya = b$ имеет решение, то $bu = b$ при всех $b \in S$. Следовательно, u — правая единица. Покажите, что u является также левой единицей. Наличие обратного элемента следует из разрешимости уравнений $xa = u$, $ay = u$ и совпадения их решений. **4.108.** Указание. Отображение $x \to \rho \ln \dfrac{c + x}{c - x}$ $(\rho \neq 0)$ осуществляет изоморфизм этой группы и группы $\mathbb{R}$. **4.109.** Нет. **4.110.** См. рис. 47. **4.113.** Указание. $\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e)$, откуда $\varphi(e) = e'$. **4.114.** Общий вид гомоморфизма: $\varphi(x) = kx$, $k \in \mathbb{Z}$. **4.115.** Отображение φ: $x \mapsto xa$ является изоморфизмом. **4.116.** Указание. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $A \subseteq X$, то отображение $\varphi(A) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ $\varepsilon_i = 1 \Leftrightarrow x_i \in A$ является изоморфизмом $(P(x), \Delta)$ с $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n \text{ раз}}$. **4.117.** а) Указание. Отображение $x \to e^x$ есть изоморфизм $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_+, \cdot)$; б) Указание. Если бы $(\mathbb{Q}, +)$ была изоморфна $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$, то в $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ было бы разрешимо любое уравнение вида $x^n = a$, что неверно. **4.119.** Указание. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$ и n — наименьшее положительное число, принадлежащее H. Докажите включения $H \subseteq n\mathbb{Z}$ и $n\mathbb{Z} \subseteq H$. **4.121.** Нет. **4.122.** Указание. Отображение $z \to (|z|, e^{i \arg z})$ — изоморфизм G на $A \times B$. **4.123.** а) $H = \langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$; б) $H = \langle 4, 9 \rangle = \mathbb{Z}_{12}$. **4.124.** 1, 3, 7, 9. **4.125.** 1, 5, 7, 11. **4.126.** 1, 3, 5, 9, 11, 13. **4.127.** 1, 5, 7, 11, 13, 17. **4.128.** $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right)$. **4.131.** ω_1, ω_5, ω_7, ω_{11}. **4.132.** При $\text{НОД}(m, n) = 1$. **4.136.** Указание. Уравнения $x^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ в этой группе могут иметь только два решения: 1 и -1. Поэтому $o(a) = \infty$ для всех a, кроме $a = 1$ и $a = -1$. Очевидно, $o(1) = 1$ и $o(-1) =$

$= 2$. **4.137.** Указание. Если $ab = ba$, то $o(ab) = \text{НОК}\big(o(a), o(b)\big)$; в нашем случае $o(ab) = o(a)o(b)$. **4.138.** Так как $ab = ba$, то $o(ab) = \text{НОК}(4, 10) = 20$. **4.139.** 6, 18, 30, 42. **4.140.** $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ и $z_4 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. **4.141.** $z_1 = \exp\left(\dfrac{\pi i}{5}\right)$, $z_2 = \exp\left(\dfrac{3\pi i}{5}\right)$, $z_3 = \exp\left(\dfrac{7\pi i}{5}\right)$ и $z_4 = \exp\left(\dfrac{9\pi i}{5}\right)$. **4.142.** Указание. Ясно, что в группе $\mathbb{Z}_n$ порядок элемента a равен n в том и только том случае, если a — образующий элемент, а образующими являются такие a, для которых $\text{НОД}(a, n) = 1$. **4.143.** 12. Указание. Используйте мультипликативность функции Эйлера, т. е. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, если $\text{НОД}(m, n) = 1$. **4.144.** 16. **4.145.** 40. **4.146.** 1, 10, 5, 10, 5, 2, 5, 10, 5, 10. **4.147.** 1, 2, 2, 2. **4.148.** $o(1) = 1$, $o(-1) = 2$, $o(a) = 4$ для остальных элементов. **4.149.** $\dfrac{n}{\text{НОД}(n, a)}$. **4.150.** 6. **4.151.** 12. **4.152.** 1 при $\alpha = 0$, $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ при $0 < \alpha \leqslant \beta$ и 0 при $\alpha > \beta$. **4.153.** $\varphi(m)$, если $m \mid n$, 0 в остальных случаях. **4.154.** Указание. Рассмотреть отображение: $\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, т. е. $x \to (x \bmod m,\ x \bmod n)$. Второй способ: доказать, что элемент $(1, 1)$ группы $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ имеет порядок mn. **4.156.** Указание. Воспользоваться тем, что $mu + nv = 1$ при некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. **4.157.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **4.158.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **4.159.** а) $(153)(247)$; б) $(1362)(47)$; в) (1472365). **4.160.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **4.161.** а) (1542736); б) (15647). **4.162.** а) 2. Указание. Является произведением независимых циклов длины 2; б) 12; в) 2. **4.163.** а) $(13)(35)(27)(67)$; б) $(16)(62)(27)(78)(35)$. **4.164.** $S_3 = \{e = a^3 = b^2, a, a^2, b, ab, a^2b\}$; $o(a) = o(a^2) = 3$, $o(e) = 1$, $o(b) = o(ab) = o(a^2b) = 2$. Таблицу Кэли группы S_3 см. на рис. 48. **4.165.** Один элемент порядка 1, девять порядка 2, восемь порядка 3 и шесть порядка 4. **4.166.** а) 6; б) 4; в) 5. **4.167.** Меняется на противоположную. **4.168.** $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$ $(n \geqslant 2)$. $A_4 = \{e, (123), (132), (134), (143), (124), (142),$ $(234),\ (243),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.

	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

Рис. 48

4.169. У к а з а н и е. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Каждому $g \in G$ поставим в соответствие подстановку $\sigma(g) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1g & g_2g & \ldots & g_ng \end{pmatrix}$. Отображение $g \to \sigma(g)$ является вложением G в S_n. **4.170.** $0 \to e$, $1 \to (123)$, $2 \to$ $\to (132)$. **4.171.** $(0, 0) \to e$, $(0, 1) \to (12)$, $(1, 0) \to (34)$, $(1, 1) \to (12)(34)$. **4.172.** $i \to$ $\to (1324)(5768)$, $j \to (1526)(3847)$. **4.173.** У к а з а н и е. Каждой подстановке $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ поставим в соответствие матрицу $n \times n$, у которой (k, i_k)-е элементы равны 1, а остальные элементы равны 0. **4.174.** Очевидно, существуют ровно три движения 1-го рода, переводящие правильный треугольник ABC в себя: это e — тождественное отображение, a — поворот на угол в 120° вокруг центра треугольника, a^2 — поворот на угол в 240°. Кроме того, имеются три движения 2-го рода — это симметрии относительно высот треугольника. Если одну из этих симметрий обозначить через b, то другие будут равняться ab и a^2b. Таким образом, $G(\Phi) = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Ясно, что $G(\Phi) \cong S_3$, и изоморфизм определяется соответствиями $a \mapsto (123)$, $b \mapsto (12)$. **4.175.** $G(\Phi) =$ $= \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$, где a — поворот квадрата на 90° вокруг его центра, b — симметрия относительно одной из диагоналей. Представление подстановками: $a \mapsto (1234)$, $b \mapsto (24)$. **4.176.** $G(\Phi) =$ $= \{e, a, b, ab\}$, где $a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$. $G(\Phi) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Представление подстановками: $a \mapsto (12)$, $b \mapsto (34)$. **4.177.** $G(\Phi) = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b,$ $ab, \ldots, a^{n-1}b\}$, $a^n = b^2 = e$, $ba = a^{-1}b$. Представление подстановками: $a \mapsto (123\ldots n)$, $b \mapsto (2n-1)(3n-2)\ldots(kn-k)$, где $k = \left[\dfrac{n}{2}\right]$. **4.178.** $|G| =$ $= 48$, $G = \langle a, b, \sigma\rangle$, причем $a^4 = b^4 = \sigma^2 = e$, $ba^2 = a^2b^3$, $b^2a =$ $= a^3b^2$, $aba = bab$, $\sigma a = a^3\sigma$, $\sigma b = b\sigma$. **4.179.** $G \cong S_4$. **4.180.** $G \cong S_3$. **4.181.** $\triangleleft$ Пусть a — движение плоскости и $o(a) = n$. Если a — движение 2-го рода, то $a = bc$, где b — симметрия относительно некоторой прямой l, а c — параллельный перенос вдоль этой прямой. Так как $a^n = e$, то $c =$ $= e$, а значит, a — симметрия относительно прямой. Если a — движение 1-го рода, то либо a — параллельный перенос, либо a — поворот вокруг некоторой точки. Параллельный перенос a при $a \neq e$ не может быть элементом конечного порядка. Следовательно, a — поворот. Пусть угол поворота равен φ. Так как $o(a) = n$, то $\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$, где $m,\, n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, элементами конечного порядка в группе движений плоскости являются: а) симметрии относительно прямых (в этом случае $o(a) = 2$); б) повороты вокруг точек на углы $\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$, где $m,\, n \in \mathbb{Z}$ (здесь $o(a) = n$, если $(m,\, n) = 1$).$\rhd$ **4.182.** $\lhd$ Очевидно, доказательство достаточно провести лишь для левых смежных классов. Пусть $aH \cap bH \neq \varnothing$. Тогда существует элемент $c \in aH \cap bH$. Имеем: $c = ah_1 = bh_2$ при некоторых $h_1,\, h_2 \in H$. Если x — любой элемент из aH, то $x = ah_3$, где $h_3 \in H$. Поэтому $x = ah_3 = ch_1^{-1}h_3 = bh_2h_1^{-1}h_3 \in bH$. Ввиду произвольности элемента $x \in aH$ мы получаем: $aH \subseteq bH$. Аналогично доказывается, что $bH \subseteq aH$. Следовательно, $aH = bH$.$\rhd$ **4.183.** Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **4.185.** 0, $2\mathbb{Z}_{10}$, $4\mathbb{Z}_{10}$, $5\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{10}$. **4.186.** $\{e\}$, $\{e,\, a\}$, $\{e,\, b\}$, $\{e,\, c\}$, $\{e,\, a,\, b,\, c\}$, если $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e,\, a,\, b,\, c\}$. **4.187.** $d\mathbb{Z}_n$, где $d\,|\,n$. **4.188.** 8. **4.189.** Одна — порядка 1, одна — порядка p^2; $p+1$ — порядка p. **4.190.** По одной подгруппе порядка p^m $(m \leqslant n)$. **4.191.** $\frac{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}{3}$. **4.193.** $\lhd$ Пусть a — любой элемент из G, отличный от e. Порядок элемента a является делителем простого числа p, поэтому $o(a) = p$ (равенство $o(a) = 1$ невозможно, так как $a \neq 1$). Отсюда следует, что элементы $e,\, a,\, a^2,\, \ldots,\, a^{p-1}$ различны. Поэтому $G = \{e,\, a,\, a^2,\, \ldots,\, a^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}_p$.$\rhd$ **4.197.** $\lhd$ Так как группа $\mathbb{Z}$ коммутативна, то правое и левое разложения совпадают. В группе $\mathbb{Z}$ операцией является сложение, поэтому смежные классы имеют вид $a + H$. Смежные классы $0 + n\mathbb{Z}$, $1 + n\mathbb{Z}$, $\ldots$, $(n-1) + n\mathbb{Z}$ различны, так как числа $0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$ попарно не сравнимы по модулю n. Оказывается, что других смежных классов нет. Действительно, пусть $a + n\mathbb{Z}$ — смежный класс. Разделим a на n с остатком: $a = nu + r$, где $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Отсюда получаем: $a + n\mathbb{Z} = nu + r + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$. Тогда разложение группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$ имеет вид $\mathbb{Z} = (0 + n\mathbb{Z}) \cup (1 + n\mathbb{Z}) \cup \ldots \cup \big((n-1) + n\mathbb{Z}\big)$.$\rhd$ **4.198.** а) $27 + 40\mathbb{Z}$; б) $\varnothing$. **4.199.** Разложения по подгруппе H: левое: $S_3 = \big\{e,\, (12)\big\} \cup \big\{(123),\, (23)\big\} \cup \big\{(132),\, (13)\big\}$; правое: $S_3 = \big\{e,\, (12)\big\} \cup \big\{(123),\, (13)\big\} \cup \big\{(132),\, (23)\big\}$. Разложение по подгруппе H' (левое, правое) $S_3 = \big\{e,\, (123),\, (132)\big\} \cup \big\{(12),\, (23),\, (13)\big\}$. **4.200.** Указание. Рассмотреть отображение $A \times B \to AB$, $(a,\, b) \mapsto ab$. **4.202.** По подгруппе 0: $\mathbb{Z}_{10} = \{0\} \cup \{1\} \cup \ldots \cup \{9\}$; по подгруппе $2\mathbb{Z}_{10}$: $\mathbb{Z}_{10} = 2\mathbb{Z}_{10} \cup \{1 + 2\mathbb{Z}_{10}\}$; по подгруппе $5\mathbb{Z}_{10}$: $\mathbb{Z}_{10} = \{0,\, 5\} \cup \{1,\, 6\} \cup \{2,\, 7\} \cup \{3,\, 8\} \cup \{4,\, 9\}$; разложение по подгруппе $\mathbb{Z}_{10}$ содержит один класс $\mathbb{Z}_{10}$. **4.203.** $A_4 = \big\{e,\, (123),\, (132)\big\} \cup \big\{(134),\, (234),\, (12)(34)\big\} \cup \big\{(124),\, (13)(24),\, (243)\big\} \cup \big\{(142),\, (143),\, (14)(23)\big\}$. **4.204.** Указание. Рассуждать так же, как в задаче 4.182. **4.206.** а) $(234) \cdot H$, где $H = \big\{e,\, (14)\big\}$; б) не является; в) не является; г) является подгруппой $H = eH = He$; д) не является. Указание. Использовать результат задачи 4.195. **4.209.** $\{e\}$, $\{e, (123), (132)\}$, S_3. **4.210.** $\{e\}$, $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, A_3, S_4. **4.211.** Все подгруппы. **4.212.** $\{e\}$, $\{e, a, a^2, a^3\}$, $\{e, a^2, b, a^2b\}$, $\{e, a^2ab, a^3b\}$, G, если $G = \langle a, b\rangle$, где $a^4 = e = b^2$, $ba = a^3b$. **4.213.** Указание. Воспользоваться результатами задачи 4.208. **4.214.** Неочевидным является лишь утверждение о том, что параллельные переносы образуют нормальную подгруппу. Докажем это для n-мерного пространства. Пусть $\alpha : x \mapsto x + a$ — параллельный перенос, а $\beta : x \mapsto Ax + b$ — произвольное движение (здесь A — невырожденная $n \times n$ матрица). Тогда $\beta^{-1}\alpha\beta : x \mapsto A^{-1}(A(x - b + a) + b)$, т.е. $\beta^{-1}\alpha\beta : x \mapsto x - b + a + A^{-1}b$ — параллельный перенос. **4.215.** Указание. $C = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ — группа движений квадрата, $A = \{e, a^2\}$, $B = \{e, a^2, b, a^2b\}$. **4.216.** $\lhd$ Пусть $x, y \in AB$. Тогда $x = ab$, $y = a'b'$, где $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Отсюда $xy = aba'b' = a \cdot ba'b^{-1} \cdot bb' \in AB$, так как $ba'b^{-1} \in A$. Кроме того, $x^{-1} = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = b^{-1}a^{-1}b \cdot b' \in AB$. Значит, AB — подгруппа. Пусть теперь $A, B < G$ и $g \in G$. Тогда $gAB = AgB = ABg$, поэтому $AB < G$.$\rhd$ **4.217.** а) Если H — группа кватернионов, $H_1 = \{1, -1, i, -i\}$, $H_2 = \{1, -1, j, -j\}$, $H_3 = \{1, -1, k, -k\}$, $H_4 = \{1\}$, $H_5 = H$, $H_G = \{1, -1\}$ (все подгруппы нормальны); б) $H/\{1\} \cong H$, $H/H_i \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $(i = 1, 2, 3)$; $H/H \cong \{1\}$, $H/\{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_4$. **4.218.** Указание. G/G_1 изоморфна группе движений, оставляющих фиксированную точку неподвижной. **4.219.** $\mathbb{Z}_n/d\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$. **4.220.** Изоморфизм φ: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbf{T}$ определяется формулой $\varphi(x + \mathbb{Z}) = e^{2\pi ix}$. **4.221.** Указание. Рассмотреть отображение $abA \to b(A \cap B)$. **4.222.** Указание. Изоморфизмом групп $G_1 \times \ldots \times G_n/A_1 \times \ldots \times A_n$ и $(G_1/A_1) \times \ldots \times (G_n/A_n)$ является отображение $g(A_1 \times \ldots \times A_n) \mapsto (gA_1, \ldots, gA_n)$, где $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \ldots \times G_n$. Взаимная однозначность и сохранение операции здесь проверяются непосредственно. **4.225.** $\lhd$ Пусть $\sigma \in S_n$ и $k_j(\sigma)$ — количество циклов длины j в разложении σ в произведение независимых циклов. Подстановки σ и τ сопряжены тогда и только тогда, когда $k_j(\sigma) = k_j(\tau)$ для всех j.$\rhd$ **4.229.** а) $\lhd$ $24 = 2^3 \cdot 3$, поэтому в группе $\mathbb{Z}_{24}$ будут две примарные компоненты: одна для $p = 2$, другая для $p = 3$. $A(2)$ — множество элементов порядка 2^k, т.е. $A(2) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$. $A(3)$ — множество элементов порядка 3^k, т.е. $A(3) = \{0, 8, 16\}$. $\mathbb{Z}_{24} = A(2) \oplus A(3)$; б) $A(2) = \{0, 15\}$; $A(3) = \{0, 10, 20\}$; $A(5) = \{0, 6, 12, 18, 24\}$; в) $A(101) = \mathbb{Z}_{101}$.$\rhd$ **4.230.** а) $\lhd$ $g = (a, b, c)$ — общий вид элемента этой группы. Тогда b, c — любые, не равные нулю одновременно, порядка 5 в $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$; $a = 4$ — единственный элемент порядка 2 в $\mathbb{Z}_8$. Поэтому число элементов порядка 10 в $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ равно $2 \cdot (25 - 1) = 48$; б) $(2^3 - 1)(3^2 - 3^1) = 42$.$\rhd$ **4.231.** $(0, 2, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$. **4.232.** а) $\varphi(x) = 0$ для всех x; б) гомоморфизм φ: $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ имеет вид $\varphi(x) = kx$, где $km \equiv 0 \pmod{n}$. **4.233.** а) Указание. Так как $36 = 2^2 \cdot 3^2$, то имеется ровно 4 неизоморфные абелевы группы порядка 36. Это $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$; б) $A_1 = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{25}$, $A_2 = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$, $A_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25}$, $A_4 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$, $A_5 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$, $A_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$; в) $A_1 = \mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_3$, $A_2 = \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $A_3 = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$, $A_4 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$, $A_5 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$, $A_5 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$, $A_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. **4.236.** а) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_{20}) \cong \mathbb{Z}_2$. Все гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_{18}$ в $\mathbb{Z}_{20}$ имеют вид $x \to kx$, где $k = 0$ или 9; б) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Здесь $\varphi(x) = kx$, k — любое целое; в) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$, где $d = \text{НОД}(m, n)$; г) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A$; $\varphi(n) = na$. **4.238.** б) Таблицы Кэли групп $\mathbb{Z}_8^*$ и $\mathbb{Z}_{10}^*$ см. на рис. 49; в) $\mathbb{Z}_{10}^* \cong \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. **4.239.** а) $p^i - p^{i-1}$;

$\mathbb{Z}_8^*$	1	3	5	7
1	1	2	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_{10}^*$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Рис. 49

б) $p^2 - p$; в) $p^3 - p^2$. **4.243.** Не является. **4.244.** Является. **4.245.** Является. **4.246.** Не является. Указание. Произведение $\sin kx \cdot \sin lx = \frac{1}{2}(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x)$ не является суммой синусов. **4.247.** Является. **4.248.** Не является. Указание. Проверить выполнение аксиомы (К3). **4.249.** При $n > 1$ не является. **4.250.** Является. **4.251.** Является. **4.252.** Не является. Указание. Проверить выполнение аксиомы дистрибутивности. **4.253.** а) Является; в) $e = 3$. **4.254.** 0. **4.255.** 18. **4.256.** 27. **4.257.** 7. **4.258.** 8. **4.259.** $p^2 - p + 1$. **4.262.** Указание. В кольце $\mathbb{Z}_p$ элементы $1^{-2}, 2^{-2}, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^{-2}$ совпадают (с точностью до перестановки) с элементами $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. **4.263.** Указание. Воспользоваться равенством $k^{-1} + (p-k)^{-1} = \frac{p}{k(p-k)}$ в кольце $\mathbb{Z}_{p^2}$. Далее, используя результат задачи 4.262, доказать, что $\sum_k \frac{1}{k(k-p)} = 0$ в кольце $\mathbb{Z}_p$. **4.264.** Указание. Воспользоваться равенством $\left(\sum \frac{1}{i}\right)^2 = \sum \frac{1}{i^2} + 2\sum_{i<j} \frac{1}{ij}$ в кольце $\mathbb{Z}_p$ и результатами задач 4.260 и 4.263. **4.265.** 1, 3, 5, 9, 11, 13. **4.266.** 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17. **4.267.** Функции, не обращающиеся в 0 на $[a, b]$. **4.268.** $p^3 - p^2$.

4.269. Решений нет. **4.270.** 11. **4.271.** 2, 6. **4.272.** 3, 4. **4.273.** Решений нет. **4.274.** 9, 15, 19, 25. **4.275.** Например, кольцо $2\mathbb{Z}$ всех четных чисел. **4.276.** $\triangleleft$ Этот пример можно строить многими способами. Например, так. Рассмотрим двумерное линейное пространство L над $\mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — базис L над $\mathbb{R}$. Элементы из L имеют вид $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. На множестве L уже есть операция сложения, введем операцию умножения. Положим для базисных элементов, например, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}$, $\mathbf{ab} = \mathbf{ba} = 0$, $\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}$. Зная произведение базисных элементов, из аксиомы дистрибутивности получим произведение любых элементов из L: $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})(\gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}) = \alpha\gamma\mathbf{a}^2 + \beta\gamma\mathbf{ba} + \alpha\delta\mathbf{ab} + \beta\delta\mathbf{b}^2 = \alpha\gamma\mathbf{b} + \beta\delta\mathbf{a}$. Это кольцо неассоциативно, так как $(\mathbf{aa})\mathbf{b} = \mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \cdot 0 = 0$.$\triangleright$ **4.277.** Указание. Пусть $x + x = 1$ и $y + y = 1$. Умножьте первое равенство справа на y, а второе слева на x. **4.278.** Для кольца, состоящего из одного элемента 0. **4.282.** Да. **4.283.** $\varphi(n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. **4.284.** $\varphi_1(n) = n$, $\varphi_2(n) = 0$ для всех $n \in 2\mathbb{Z}$. **4.286.** Указание. Проверить, что отображение $k \mapsto (k \bmod m,\, k \bmod n)$ является изоморфизмом колец $\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$. **4.287.** $\triangleleft$ Если мы докажем изоморфизм $(P(X), \Delta, \cap)$ и $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n \text{ раз}}$, то проверка аксиом кольца для $P(X)$ не потребуется. Построим отображение следующим образом. Будем считать, что $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ (это предположение не ограничивает общности). Для $A \subseteq X$ положим $\varphi(A) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = 1$ при $i \in A$ и $\varepsilon_i = 0$ при $i \notin A$. То есть каждому подмножеству мы ставим в соответствие строчку из 0 и 1; в частности, $\varphi(\varnothing) = (0, 0, \ldots, 0)$, $\varphi(X) = (1, 1, \ldots, 1)$, $\varphi(\{1, 3\}) = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Ясно, что φ — взаимно однозначное отображение. Проверим, что φ — изоморфизм. Пусть $A, B \in P(X)$ и $\varphi(A) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varphi(B) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $\varphi(A\Delta B) = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$. Если $i \in A$ и $i \in B$, то $i \notin A\Delta B$, и мы имеем: $\varepsilon_i = \eta_i = 1$, $\zeta_i = 0$. В этом случае $\zeta_i = \varepsilon_i + \eta_i$, так как $1 + 1 = 0$ в $\mathbb{Z}_2$. Аналогично рассматриваются другие случаи: $i \in A$ и $i \in B$ и т. д., и в этих случаях мы также получаем $\zeta_i = \varepsilon_i + \eta_i$. Следовательно, $\varphi(A\Delta B) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + (\eta_1, \ldots, \eta_n) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Аналогично доказывается, что $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$. **4.298.** Нет. **4.299.** Да. **4.300.** Нет. **4.301.** Да. **4.302.** Поле получится, если n не является квадратом в $\mathbb{Z}_p$. **4.303.** 1. **4.304.** 5. **4.305.** 10. **4.306.** 0. **4.307.** 9. **4.308.** 13. **4.309.** 1; 4. **4.310.** Решений нет. **4.311.** 4. **4.312.** 4. **4.313.** 2, 8, 9, 15. **4.314.** $x = 7$, $y = 8$. **4.315.** $x = 9$, $y = 5$. **4.316.** а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.317. а) 3; б) 2. **4.318.** $\lhd$ Так как $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ — группа по умножению и $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$, то $a^{p-1} = 1$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p^*$. Значит, $a^p = a$ при $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$. Кроме того, $0^p = 0$. Поэтому $a^p = a$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p$.$\rhd$ **4.319.** $\dfrac{p+1}{2}$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $x^2 = (-x)^2$. **4.320.** $\dfrac{p+1}{2}$. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. **4.321.** Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 4.133 а). **4.322.** Нет. **4.323.** $\lhd$ Пусть F и F_1 — поля и $R = F \oplus F'$. Положим $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$. Нетрудно видеть, что $a \neq 0$, $b \neq 0$. Вместе с тем, $ab = 0$. Следовательно, R — не поле.$\rhd$ **4.325.** $\lhd$ $pa = \underbrace{a + \ldots + a}_{p \text{ раз}} = a \cdot \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{p \text{ раз}} = a \cdot 0 = 0$.$\rhd$ **4.327.** $\lhd$ Пусть 1 — единица поля F_1. Тогда элемент 1 является также единицей поля F_2. Если $n \cdot 1 = 0$ в F_1, то $n \cdot 1 = 0$ в F_2 и наоборот. Поэтому характеристики полей F_1 и F_2 равны.$\rhd$ **4.329.** $\lhd$ По формуле бинома Ньютона $(a+b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-2} b^2 + \ldots + b^p$. Рассмотрим коэффициент C_p^i, где $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Так как p — простое, то $C_p^i = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!}$ — целое. Так как НОД$(i!, p) = 1$, то $(p-1)\ldots(p-i+1)$ делится на $i!$, следовательно, C_p^i делится на p. Так как $\operatorname{char} F = p$, то $C_p^i = 0$ в поле F, а значит, $(a+b)^p = a^p + b^p$. Далее применим индукцию по n: $(a+b)^{p^n} = \left((a+b)^{p^{n-1}}\right)^p = \left(a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}}\right)^p = a^{p^n} + b^{p^n}$.$\rhd$ **4.330.** $a^{20} + a^{16}b^4 + a^4b^{16} + b^{20}$. **4.331.** Нет. **4.332.** $|F| = 25$, $\operatorname{char} F = 5$, $F_0 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}_5\right\}$. **4.333.** $q(x) = x^2 + 4x - 4$; $r(x) = -10x + 19$. **4.334.** $q(x) = x^2$; $r(x) = x^2 - 1$. **4.335.** $q(x) = 4x + 1$; $r(x) = x^2 + 4$. **4.336.** $q(x) = x^2$; $r(x) = x^2 + x + 1$. **4.337.** $r(x) = \dfrac{10}{3}x - \dfrac{1}{3}$. Указание. $f(x) = q(x)(x-1)(x+2) + r(x)$, где $r(x) = ax + b$. **4.338.** $q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$; $r(x) = 5$. **4.339.** $q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$; $r(x) = -327$. **4.340.** $q(x) = 3x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 9x + 5$; $r(x) = 0$. **4.341.** $\lhd$ Из последней строки алгоритма Евклида следует, что $r_k(x) \mid r_{k-1}(x)$. Поднимаясь на одну строку вверх, получим: $r_k(x) \mid r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x)$. Рассуждая аналогично и поднимаясь вверх, будем получать: $r_k(x) \mid r_{k-3}(x), r_{k-4}(x), \ldots, r_1(x), g(x), f(x)$. Таким образом, $r_k(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $d_1(x)$ — какой-либо общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Так как $d_1(x) \mid f(x), g(x)$, то $d_1(x) \mid r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$. Двигаясь вниз по строкам алгоритма Евклида, будем получать: $d_1(x) \mid r_2(x)$, $d_1(x) \mid r_3(x)$, $\ldots$, $d_1(x) \mid r_k(x)$.

Итак, $r_k(x)$ делится на любой общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, значит, $r_k(x) = \big(f(x), g(x)\big)$. $\triangleright$ **4.342.** а) $\triangleleft$ Докажем вначале данное утверждение для двух многочленов. Пусть $d(x)$, $d_1(x)$ — многочлены, каждый из которых удовлетворяет определению наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а $r_k(x)$ — наибольший общий делитель этих многочленов, полученный с помощью алгоритма Евклида. Тогда $d_1(x)\,|\,r_k(x)$ (см. задачу 4.341). Так как r_k и d_1 одной степени, то $d_1(x) = \mu r_k(x)$ при некотором $\mu \in F$, $\mu \neq 0$. Аналогично $d(x) = v r_k(x)$, где $v \in F$, $v \neq 0$. Отсюда следует, что $d(x) = (v\mu^{-1})d_1(x)$. Для n многочленов доказательство проводится индукцией по n. Пусть даны n многочленов $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ и d, d_1 — их наибольшие общие делители. Тогда $d(x) = \big(u(x), f_n(x)\big)$, $d_1(x) = \big(u_1(x), f_n(x)\big)$, где $u(x)$, $u_1(x)$ — наибольшие общие делители многочленов $f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$. По предположению индукции $u = \beta u_1$, где $\beta \in F$, $\beta \neq 0$. Значит, $d(x)$ и $d_1(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $u(x)$ и $f_n(x)$. Отсюда $d(x) = \lambda d_1(x)$ при некотором $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. б) Указание. Доказать сначала, что $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, где $d(x) = \big(f(x), g(x)\big)$, двигаясь по строчкам алгоритма Евклида снизу вверх; затем рассуждать по индукции. $\triangleright$ **4.343.** а) $\triangleleft$ Пусть $\big(f(x), g(x)\big) = d(x)$. Тогда $f(x) = f_1(x)d(x)$, $g(x) = g_1(x)d(x)$, где $\big(f_1(x), g_1(x)\big) = 1$. Положим $M(x) = f_1(x)g_1(x)d(x)$. Ясно, что $M(x)$ — общее кратное многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Докажем, что $u(x)\,|\,M(x)$ для любого $u(x)$ общего кратного многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Так как $u(x)\,|\,f(x)$, то $u(x)\,|\,d(x)$, следовательно, $u(x) = u_1(x)d(x)$. Так как $u(x)\,|\,f(x)$, то $u_1(x)\,|\,f_1(x)$, поэтому $u_1(x) = f_1(x)v(x)$. Так как $u_1(x)\,|\,f_2(x)$, то $f_1(x)v(x)\,|\,f_2(x)$; учитывая, что $\big(f_1(x), f_2(x)\big)$, получаем: $v(x)\,|\,f_2(x)$. Значит, $v(x) = w(x)f_2(x)$. Таким образом, $M(x)\,|\,u(x) = u_1(x)d(x) = f_1(x)v(x)d(x) = f_1(x)w(x)f_2(x)d(x)$, т.е. $M(x)$ — наименьшее общее кратное многочленов $f(x)$ и $g(x)$. б) Указание. Сохраняя обозначения пункта а), получим: $M(x)d(x) = f_1(x)g_1(x)d(x)d(x) = f_1(x)d(x)g_1(x)d(x) = f(x)g(x)$. Для другого наименьшего общего кратного $m(x)$ имеем: $m(x) = \lambda M(x)$ $(\lambda \in F,\ \lambda \neq 0)$, а значит, $f(x)g(x) = \lambda M(x)d(x)$. $\triangleright$ **4.344.** $\triangleleft$ $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 1\cdot(x^3 + x - 2) + (-2x^2 - 2x - 4)$, $x^3 + x - 2 = (-0{,}5x + 0{,}5)(-2x^2 - 2x - 4)$. Так как $-2x^2 - 2x - 4 = -2(x^2 + x + 2)$, то $x^2 + x + 2$ — наибольший общий делитель многочленов. $\triangleright$ **4.345.** $x^2 + x + 1$. **4.346.** $x^2 + 2x + 3$. **4.347.** $x + 2$. **4.348.** $x^d - 1$, где $d = \text{НОД}(m, n)$. **4.349.** $d(x) = x^2 - 2$, $u(x) = -x - 1$; $v(x) = x + 2$. Указание. Для нахождения многочленов $u(x)$ и $v(x)$ двигаться по строкам алгоритма Евклида снизу вверх. **4.350.** $d(x) = x^3 + 1$, $u(x) = -1$, $v(x) = x + 1$. **4.351.** $d(x) = x^2 + 2x + 3$, $u(x) = 3x + 2$, $v(x) = 2x + 4$. **4.352.** $4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24$. **4.353.** а) 3; -1; б) $\pm i\sqrt{2}$, $\pm 2i\sqrt{3}$. **4.354.** Да. **4.355.** При нечетных n. **4.356.** $a = 0$, $b = 1$. **4.357.** $a = 1$, $b = 4$. **4.358.** $(x^2 + x + 1)\times$

$\times(x-2)(x+3)$. **4.359.** x^5+x^2+x+1. **4.365.** $(x+1)(x+2)\times$ $\times(x-5)$. **4.366.** $(x-2)(x+3)(x^2-x+1)$ над $\mathbb{R}$, $(x-2)(x+3)\times$ $\times\left(x-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ над $\mathbb{C}$. **4.367.** $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2\pi ki}{n}}\right)$ над $\mathbb{C}$; над $\mathbb{R}$ при нечетных n $(x-1)\prod\limits_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi k}{n}+1\right)$, где $m=$ $=\dfrac{n-1}{2}$, и при четных n $(x-1)(x+1)\prod\limits_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi k}{n}+1\right)$, где $m=\dfrac{n}{2}$. **4.368.** $(x^2+1)(x+3)(x-2)$ над $\mathbb{R}$, $(x+i)(x-i)(x+3)(x-2)$ над $\mathbb{C}$. **4.369.** $(x+3)(x+2)(x^2+x+1)$. **4.370.** $(x+1)(x+3)^2$. **4.371.** $(x+2)^2$. **4.372.** $(x+4)(x+5)(x^2+1)$. **4.373.** $(x^2-2x+2)\times$ $\times(x^2+2x+2)$. **4.374.** $(x+1)^5$. **4.375.** $(x^2+3)(x^2-3x+3)\times$ $\times(x^2+3x+3)$. **4.376.** $\prod\limits_{j=1}^{p-1}(x-j)$. **4.377.** x^4+4x^2+1. **4.378.** $2x^3+$ $+2x+2$. **4.379.** Да. **4.380.** Да. **4.381.** Нет, $x=1$ — корень. **4.382.** Да. **4.383.** Да. **4.384.** Да. **4.386.** ◁ Рассуждаем аналогично тому, как Евклид доказывал бесконечность множества простых чисел. Если $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ — все неприводимые многочлены, то многочлен $p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots$ $\ldots\cdot p_n(x)+1$ имеет неприводимый множитель, отличный от $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, — противоречие. ▷ **4.387.** У к а з а н и е. Рассуждать «методом от противного». **4.388.** У к а з а н и е. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **4.389.** У к а з а н и е. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **4.390.** У к а з а н и е. Воспользоваться критерием Эйзенштейна. **4.395.** x^3+x+1, x^3+x^2+1. **4.396.** $f_1=x^3+2x+1$, $f_2=x^3+2x+2$, $f_3=x^3+x^2+2$, $f_4=x^3+x^2+x+2$, $2f_1$, $2f_2$, $2f_3$, $2f_4$. **4.397.** x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+ $+x^2+x+1$. **4.398.** 2. **4.399.** Таких a нет. **4.400.** 2, 3. **4.401.** 0. **4.402.** Например, x^6+x^5+1 (всего таких многочленов 9). **4.404.** У к а з а н и е. Пусть $f(x)=x^p-x+a=f_1(x)\ldots f_m(x)$, где $f_i(x)$ — неприводимы. Убедиться в том, что $f_i(x+\alpha)=f_i(x)$ при некоторых i и α, и воспользоваться результатом предыдущей задачи. **4.405.** F. **4.406.** $\mathbb{Q}$. **4.407.** $\{a+bi\,|\,a, b\in\mathbb{Q}, i^2=-1\}$. **4.408.** Нет. **4.409.** Нет. **4.410.** Да. **4.411.** $x^2-2x+5+\dfrac{-11x+8}{x^2+2x-1}$. **4.412.** $4x+\dfrac{x^2+4x}{3x^3+x+4}$. **4.413.** $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{i}{x-i}-\dfrac{i}{x+i}\right)$. **4.414.** $\dfrac{i}{4}\left(-\dfrac{1}{x-(1+i)/\sqrt{2}}+\right.$ $\left.+\dfrac{1}{x-(-1+i)/\sqrt{2}}-\dfrac{1}{x-(-1-i)/\sqrt{2}}+\dfrac{1}{x-(1-i)/\sqrt{2}}\right)$. **4.415.** $\dfrac{1}{12}\times$ $\times\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{16}{x+2}+\dfrac{27}{x+3}\right)$. **4.416.** $\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{x}{(x-1)^2}+\dfrac{x}{(x+1)^2}-\right.$

$-\frac{x}{(x-i)^2}-\frac{x}{(x+i)^2}-\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x-i}+\frac{3}{x+i}\Big)$. **4.417.** $\frac{1}{3}\times$ $\times\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$. **4.418.** $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$. **4.419.** $\frac{1}{16}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x^2+1}+\frac{4}{(x^2+1)^2}\right)$. **4.420.** $\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2}\right)$. **4.421.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+$ $+\frac{1}{(x+1)^3}$. **4.422.** $\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{1}{x+1}$. **4.423.** $\frac{x+1}{x^3+x+1}+$ $+\frac{x}{x^2+x+1}$. **4.424.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{2x+2}{x^2+1}$. **4.425.** $-\sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{1}{x-k}$. **4.426.** $-\sum\limits_{k=1}^{p-1}\frac{k^2}{x-k}$. **4.427.** а) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{x-\omega_k}$, где $\omega_k=\exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$ над $\mathbb{C}$; б) при нечетном n: $\frac{1}{n}\frac{1}{x-1}+\frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{x\cos(2\pi k/n)-1}{x^2-2x\cos(2\pi k/n)+1}$ над $\mathbb{R}$; при четном n: $\frac{1}{n}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{n}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n/2-1}\frac{x\cos(2\pi k/n)-1}{x^2-2x\cos(2\pi k/n)+1}$. **4.428.** $-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k^2}{x-\omega_k}$, где $\omega_k=\exp\left(\frac{(\pi+2\pi k)i}{n}\right)$. **4.429.** $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. **4.430.** $x\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-n$. **4.431.** $\frac{\varphi'^2(x)-\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi^2(x)}$. **4.432.** Например, поле $\mathbb{Z}_2(x)$ рациональных функций над полем $\mathbb{Z}_2$ бесконечно и имеет характеристику 2. **4.435.** 3. **4.436.** 0. **4.437.** $x=-1$ — корень кратности 4. **4.438.** $x=2$ — двукратный корень. **4.439.** Указание. Доказать, что f и f' взаимно просты. **4.440.** $\geqslant 3$. **4.441.** $3125b^2+108a^5=0$, $a\neq 0$. **4.442.** а) ± 2; б) 3. **4.443.** -5. **4.444.** $\lhd$ Пусть F — поле, $I<F$ и $I\neq 0$. Возьмем элемент $a\in I$, $a\neq 0$. По аксиоме (П9) существует элемент a^{-1}. Так как $a\in I$ и $1=a^{-1}\cdot a$, то $1\in I$. Если r — произвольный элемент из R, то $r=r\cdot 1\in rI\subseteq I$. Следовательно, $R=I$. $\rhd$ **4.447.** Например, $A=\{f(x^2)\,|\,f(x)\in F[x]\}$, $B=\{f(x^3)\,|\,f(x)\in F[x]\}$; так как $x^2x^3\neq f(x^2)+g(x^3)$, то $A+B$ не является подкольцом. **4.448.** Да. **4.449.** 0, $2\mathbb{Z}_{20}$, $4\mathbb{Z}_{20}$, $5\mathbb{Z}_{20}$, $10\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{20}$. **4.451.** а) $\lhd$ Докажем, что $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$, где $d=\text{НОД}(m,n)$. Действительно, так как $d\,|\,m$, то $m\mathbb{Z}\subseteq d\mathbb{Z}$. Аналогично $n\mathbb{Z}\subseteq d\mathbb{Z}$. Так как d — наибольший общий делитель, то при некоторых $x,y\in\mathbb{Z}$ имеет место равенство $d=mx+ny$. Следовательно, $d\in m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}$, а значит, $d\mathbb{Z}\subseteq m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}$. Таким образом, $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$; б) $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}=t\mathbb{Z}$, где $t=\text{НОК}(m,n)$; в) $m\mathbb{Z}\cdot n\mathbb{Z}=$ $=mn\mathbb{Z}$. $\rhd$ **4.452.** $2\mathbb{Z}$. **4.453.** $\mathbb{Z}$. **4.454.** $20\mathbb{Z}$. **4.455.** $24\mathbb{Z}$. **4.456.** $0\oplus 0$, $\mathbb{Z}_2\oplus 0$, $0\oplus\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. **4.457.** $\lhd$ Если $I=0$, то $I=f(x)F[x]$ для

$f(x) = 0$. Пусть теперь $I \neq 0$. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ наименьшей степени. Так как $f(x) \in I$ и I — идеал, то все многочлены $f(x)g(x)$ при $g(x) \in F[x]$ лежат в I, т. е. $f(x)F[x] \subseteq I$. Осталось показать, что $I \subseteq f(x)F[x]$. Возьмем любой элемент $h(x) \in I$. Разделим $h(x)$ на $f(x)$ с остатком: $h(x) = f(x)u(x) + r(x)$, где $\deg r(x) < \deg f(x)$. Так как $r(x) = h(x) - f(x)u(x)$ и $h(x)$, $f(x) \in I$, то $r(x) \in I$. Так как $f(x)$ — многочлен наименьшей степени из $I \setminus \{0\}$, то $r(x) = 0$. Значит, $h(x) = f(x)u(x) \in f(x)F[x]$. Ввиду произвольности элемента $h(x) \in I$ получаем: $I \subseteq f(x)F[x]$. Таким образом, $I = f(x)F[x]$. $\triangleright$ **4.459.** При $n > 1$ A не является правым идеалом. **4.460.** $\triangleleft$ Пусть I — идеал кольца $\mathbb{Z}$. Тогда I является подгруппой группы $(\mathbb{Z}, +)$. Ранее было доказано, что всякая подгруппа группы $\mathbb{Z}$ имеет вид $n\mathbb{Z}$ (см. задачу 4.119), где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $I = n\mathbb{Z}$. $\triangleright$ **4.461.** $\triangleleft$ Если I — идеал кольца $\mathbb{Z}_n$, то по сложению I является подгруппой группы $\mathbb{Z}_n$. Подгруппы группы $\mathbb{Z}_n$ имеют вид $a\mathbb{Z}_n$, где $a \mid n$ (см. задачу 4.187). Значит, в кольце $\mathbb{Z}_n$ все идеалы главные. $\triangleright$ **4.469.** $\mathbb{Z}_{24} = 9\mathbb{Z}_{24} \oplus 16\mathbb{Z}_{24}$, здесь $9^2 = 9$, $16^2 = 16$, $9 \cdot 16 = 0$; $9\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_8$, $16\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_3$. **4.470.** $\mathbb{Z}_{45} = 10\mathbb{Z}_{45} \oplus 36\mathbb{Z}_{45}$; $10\mathbb{Z}_{45} \cong \mathbb{Z}_9$, $36\mathbb{Z}_{45} \cong \mathbb{Z}_5$. **4.471.** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma + I$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $I = (x^3 - 2x^2 + 4)\mathbb{R}[x]$. **4.473.** $\triangleleft$ Всякий идеал кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид $n\mathbb{Z}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Элементы фактор-кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ имеют вид $a + n\mathbb{Z}$, где $a \in \mathbb{Z}$. Проверим, что имеется ровно n смежных классов: $0 + n\mathbb{Z}$, $1 + n\mathbb{Z}$, ..., $(n-1) + n\mathbb{Z}$. Действительно, пусть $a + n\mathbb{Z}$ — смежный класс; разделим a на n с остатком: $a = nu + r$, $0 \leqslant r < n$; теперь $a + n\mathbb{Z} = (nu + r) + n\mathbb{Z} = r + (nu + n\mathbb{Z}) = r + n\mathbb{Z}$. Сложение смежных классов осуществляется по правилу $(r_1 + n\mathbb{Z}) + (r_2 + n\mathbb{Z}) = r + n\mathbb{Z}$, где $r = (r_1 + r_2) \bmod n$. Аналогично для умножения: $(r_1 + n\mathbb{Z})(r_2 + n\mathbb{Z}) = r' + n\mathbb{Z}$, где $r' = (r_1 r_2) \bmod n$. Очевидно, смежные классы можно поставить во взаимно однозначное соответствие элементам кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$: $k \in \mathbb{Z}_n \to k + n\mathbb{Z}$. При этом сложению смежных классов будет соответствовать сложение по модулю n в кольце вычетов, а умножению — умножение по модулю n. Следовательно, имеет место изоморфизм $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. $\triangleright$ **4.474.** $0 + 4\mathbb{Z}_8$, $1 + 4\mathbb{Z}_8$, $2 + 4\mathbb{Z}_8$, $3 + 4\mathbb{Z}_8$. **4.475.** а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_6$. **4.476.** 0, $\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)\mathbb{Q}[x]$, $(x-1)\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)\mathbb{Q}[x]$, $(x^2+x+1)\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)\mathbb{Q}[x]$. **4.477.** p^iR/p^nR $(i = 0, 1, \ldots, n)$. **4.479.** Необязательно. **4.480.** $\triangleleft$ Определим отображение φ: $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n \to (R_1/I_1) \oplus \ldots \oplus (R_n/I_n)$ по формуле $\varphi(r_1, \ldots, r_n) = (r_1 + I_1, \ldots, r_n + I_n)$. Непосредственно проверяется, что φ — гомоморфизм и $\ker \varphi = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$. Так как $\operatorname{Im} \varphi = (R_1/I_1) \oplus \ldots \oplus (R_n/I_n)$, то по теореме об изоморфизме мы получаем требуемое. $\triangleright$ **4.481.** $\triangleleft$ Построим отображение φ: $R \to R/aR \oplus R/bR$, полагая $\varphi(r) = (r + aR, r + bR)$. Ясно, что φ — гомоморфизм. Найдем его ядро. Если $\varphi(r) = 0$, то $r \in aR$ и $r \in bR$, т. е. $r = ax = by$ при некоторых $x, y \in R$. Так как $R = aR + bR$, то $1 = au + bv$ при некоторых $u, v \in R$.

Отсюда получаем: $x = axu + bxv = ru + bxv = byu + bxv \in bR$, а значит, $r = ax \in abR$. Мы доказали, что $\ker\varphi \subseteq abR$. Ясно, что $abR \subseteq \ker\varphi$. Следовательно, $abR = \ker\varphi$. По теореме об изоморфизме получаем искомый изоморфизм. $\triangleright$ **4.482.** $\triangleleft$ Разложим многочлен $x^3 - 1$ на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ множители: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Многочлены $x - 1$ и $x^2 + x + 1$ взаимно просты, поэтому запишем $\mathbb{R}[x]/(x^3-1)\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R}[x]/(x-1)\mathbb{R}[x] \oplus \mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)\mathbb{R}[x]$. Из примера 27 этого параграфа следует, что $\mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R}[\theta]$, где θ — корень многочлена $x^2 + x + 1$ $\left(\text{любой из двух, например, } \theta = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$. Так как $\theta \in \mathbb{R}[i]$ и $i \in \mathbb{R}[\theta]$, то $\mathbb{R}[\theta] = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$. Следовательно, $\mathbb{R}[x]/(x^3-1)\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$. $\triangleright$ **4.483.** $\mathbb{C}$. **4.484.** $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[\zeta]$, где $\zeta = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **4.485.** $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$. **4.486.** $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. **4.487.** $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$. **4.489.** а) $x \equiv 39 \pmod{60}$; б) $x \equiv 187 \pmod{210}$. **4.490.** $26x^2 + x - 3$. **4.492.** 3. **4.493.** 1. **4.494.** 2. **4.495.** 2. **4.496.** 2. **4.497.** Нет. **4.498.** Да. **4.499.** Да. **4.505.** $\theta^2 + 2\theta$. **4.506.** $\theta + 2$. **4.507.** $4\theta^2 + 2\theta$. **4.508.** $\pm(\theta + 2)$. **4.509.** $\pm 2\theta$. **4.510.** $\theta^3 + \theta^2$, $\theta^2 + \theta$, $\theta^3 + \theta^2 + 1$, $\theta^2 + \theta + 1$. **4.511.** 2. **4.512.** 1. **4.513.** 3. **4.514.** а) $F_0 \cong \mathbb{Z}_2$ (простое подполе) и само поле F; б) $F_0 \cong \mathbb{Z}_2$ (простое подполе), F_1 (поле из 4 элементов) и само поле F. **4.515.** $\dfrac{1}{6}(\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{2})$. **4.516.** $\dfrac{1}{31}(-3\theta^3 + 5\theta^2 + 2\theta + 7)$, где $\theta = \sqrt[4]{-3}$. **4.517.** $\dfrac{1}{176}(-5 - 9\sqrt[3]{5} + 19\sqrt[3]{25})$. **4.519.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **4.520.** Например, θ. **4.521.** Например, $\theta^2 + 1$. **4.522.** Да. **4.523.** Нет. **4.525.** 6. **4.526.** 9. **4.527.** 18. **4.528.** 48. **4.529.** $\dfrac{1}{2}(p^2 - p)$. **4.530.** 240. **4.531.** 60. **4.532.** Например, $x^2 + \theta$. **4.533**. Например, $x^4 + \theta x + 1$, где $\theta^2 = \theta + 1$. **4.534.** $\dim_F F = 1$. **4.535.** $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$; базис: $1, i$. **4.537.** $\dim_F F_n = n^2$. **4.541.** $\triangleleft$ Если $a \in A$, $a \neq 0$, то a не является делителем нуля, поэтому отображение $A \to A$, $x \mapsto xa$, является вложением. Ввиду того, что $\dim A < \infty$, мы получаем, что $Aa = A$. Аналогично доказывается, что $aA = A$. Значит, $ua = a$ при некотором $u \in A$. Отсюда следует, что $xua = xa$, а потому $xu = x$ при всех $x \in A$. Таким образом, u — правая единица. Далее, $xuy = xy$ при всех y, следовательно, $uy = y$, т. е. u — левая единица. Равенство $Aa = aA = A$ показывает, что всякий элемент $a \neq 0$ имеет обратный. Это означает, что A — тело. $\triangleright$ **4.542.** Так как $(aa)a = (a+b)a = a^2 + ba = 2a + b$ и $a(aa) = a(a+b) = a^2 + ab = a + b$, то алгебра A неассоциативна. $\triangleright$ **4.543.** $\triangleleft$ Положим $u = \dfrac{1+a+a^2}{3}$. Нетрудно проверить, что $ug = gu = u$

для всех $g \in G$, а значит, $ux = xu$ для всех $x \in \mathbb{R}G$. Кроме того, $u^2 = u$. Значит, $\mathbb{R}G = \mathbb{R}Gu \oplus \mathbb{R}G(1-u)$. Идеал $\mathbb{R}Gu$ — одномерная алгебра, изоморфная полю $\mathbb{R}$. Идеал $\mathbb{R}G(1-u)$ двумерный, его базис — v, w, где $v = 1 - u$, $w = a(1-u)$. При этом $v^2 = v$, $vw = wv = w$ (т. е. v — единица алгебры $\mathbb{R}G(1-u)$), $w^2 = a^2(1-u) = (3u - 1 - a)(1-u) = 0 - (1-u) - a(1-u) = -v - w$. Таблица умножения этой алгебры выглядит так:

	v	w
v	v	w
w	w	$-v-w$

Элемент w удовлетворяет уравнению $w^2 = -v - w$, т. е. w — корень многочлена $x^2 + x + 1$. Значит, $\mathbb{R}G(1-u) \cong \mathbb{R}[w] \cong \mathbb{C}$. Итак, $\mathbb{R}G = \mathbb{R}Gu \oplus \mathbb{R}G(1-u) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$. Отсюда следует, что групповая алгебра $\mathbb{R}G$ имеет ровно 4 идеала: 0, $\mathbb{R}G$, $\mathbb{R}Gu$, $\mathbb{R}G(1-u)$. $\triangleright$ **4.544.** Да. Указание. Достаточно проверить ассоциативность $(xy)z = x(yz)$ для $x, y, z \in \{a, b\}$. **4.545.** $u = a - b$ — единица алгебры A. **4.547.** См. таблицу:

	1	a	a^2
1	1	a	a^2
a	a	a^2	0
a^2	a^2	0	0

4.548. а) Нет; б) да. **4.549.** $p - q - r$. **4.550.** 0, FG, FGu и $FG(1-u)$, где $u = \dfrac{1+g}{2}$. **4.553.** $a + b - c$. **4.552.** $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$.

4.556. а) $-1 + 2i + 4j + 3k$; б) $-4 - 4i + 2j$; в) $-512(1 + i + j + k)$; г) $\dfrac{1}{14}(3 - 2i + j)$. **4.558.** а) Нет решений; б) $x = \dfrac{1}{2}(1 + j)k\dfrac{1}{2}(1 - i) = \dfrac{1}{4}(1 + i - j + k)$; в) $x = \beta i + \gamma j + \delta k$, где $\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$. **4.559.** $x = \dfrac{1}{3}(2 - 2i + j)$, $y = \dfrac{1}{3}(i - j + 2k)$. **4.560.** Нельзя, так как $ij \neq ji$. **4.561.** $\mathbb{R}$.

9 785940 520344