П-09

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ІСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
ия основана в 1996 г.
сийская экономическая академия им. Г.В. Плеханова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Аналитическая геометрия • Линейная алгебра
Математический анализ • Теория вероятностей
Математическая статистика
Линейное программирование

Учебное пособие

Под редакцией профессора В.И. Ермакова

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим и управленческим специальностям

Москва
ИНФРА-М
2006

УДК 330.115(075.8)
ББК 22.11я73
С23

Коллектив авторов:

В.И. Ермаков, Г.И. Бобрик, Р.К. Гринцевичюс, В.И. Матвеев,
В.А. Петров, Б.М. Рудык, Р.В. Сагитов, О.К. Смагина, В.Г. Шершнев

С23 **Сборник задач по высшей математике для экономистов:** Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. — М.: ИНФРА-М, 2006. — 575 с. — (Высшее образование).

ISBN 5-16-002395-X

В соответствии с учебной программой подготовки экономистов в сборник включены задачи по основным разделам общего курса высшей математики: аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей, математическая статистика, линейное программирование. Специально выделен раздел, посвященный применению аналитической геометрии и математического анализа в экономике.

Во всех разделах приведены краткие теоретические сведения, ряд задач снабжен решениями. Задачник содержит типовые практикумы с контрольными тестами.

Предназначен для студентов экономических специальностей.

ББК 22.11я73

ISBN 5-16-002395-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

В начале обучения студенты экономических вузов изучают курс высшей математики, который служит фундаментальной базой экономического образования. Для подготовки экономистов требуются не только учебники и справочники по соответствующим разделам высшей математики, но и задачники, необходимые для закрепления теоретического материала на практических занятиях и при самостоятельной работе студентов.

При подготовке задачника авторы стремились, с одной стороны, тесно увязать предлагаемые для рассмотрения примеры с соответствующими программами курса и, с другой стороны, составить упражнения, наполненные экономическим содержанием, чтобы показать возможность и целесообразность использования математического аппарата в экономических исследованиях.

Данный сборник задач непосредственно связан с учебником по общему курсу высшей математики, выпущенным издательством «ИНФРА-М» в 1998 г., и охватывает материал по аналитической геометрии, линейной алгебре, математическому анализу, теории вероятностей, математической статистике и линейному программированию.

Материал по *аналитической геометрии* дан в сжатом виде, он обеспечивает усвоение тех основных понятий и сведений, которые наиболее часто востребуются как студентами во время дальнейшей учебы, так и экономистами-практиками.

Более полно представлен материал по *линейной алгебре*, поскольку этот раздел широко используется в таких математических курсах, как теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций и др.

Задачи по *математическому анализу* как наиболее крупному и достаточно сложному разделу высшей математики занимают значительную часть сборника и представлены в полном, необходимом для усвоения курса, объеме.

В разделе, посвященном *применению аналитической геометрии и математического анализа в экономике*, показывается, как соответствующие формулы и методы, изучаемые в курсе, используются в экономических исследованиях. Материал этого раздела может быть полезен при проведении экономического анализа.

Разделы с задачами по *теории вероятностей* и *математической статистике*, в первую очередь, обеспечивают программу подготовки студентов общеэкономических специальностей, но могут быть использованы и при изучении курса высшей математики на других специальностях. Большинство задач этих разделов имеет экономическое содержание.

Задачи раздела *линейного программирования* составлены на основе экономико-математических моделей, описывающих поведение различных экономических процессов в линейной или линеаризованной форме, что также говорит о возможности их непосредственного применения в экономических исследованиях.

Особенностью данного задачника является введение в каждый раздел практикумов, которые могут служить основой при контрольной проверке знаний этих разделов студентами.

Задачник может быть использован студентами экономических вузов и колледжей, а также студентами экономических специальностей других вузов.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

1.1. Линейные операции над векторами

Геометрическим вектором или просто *вектором* называется направленный отрезок.

Вектор обозначается двумя буквами $\overline{AB}$ с чертой или стрелкой над ними, причем первая буква указывает начало вектора, а вторая — его конец. Вектор может быть обозначен также одной буквой латинского алфавита $\bar{a}$, $\bar{A}$. Длину или модуль вектора обозначают в виде $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$.

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{a} + \bar{b}$, который идет из начала первого вектора $\bar{a}$ в конец второго $\bar{b}$, если второй вектор выходит из конца первого (рис. 1.1).

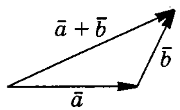


Рис. 1.1

Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{a} - \bar{b}$, который представляет собой сумму вектора $\bar{a}$ и вектора, противоположного вектору $\bar{b}$, т.е. $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ (рис. 1.2).

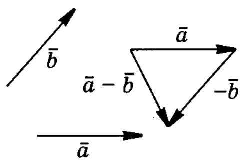


Рис. 1.2

Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\bar{a}$, такой, что:

1) $|\lambda\bar{a}| = |\lambda|\,|\bar{a}|$;

2) векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ имеют одно направление, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$.

Если вектор $\bar{a}$ составляет угол φ с осью Ox, то проекцией вектора на эту ось называется произведение модуля вектора на косинус угла φ:

$$\text{пр}_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi.$$

Проекция суммы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на ось Ox равна сумме проекций этих векторов на эту ось:

$$\text{пр}_x(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_x\bar{a} + \text{пр}_x\bar{b}.$$

В трехмерном пространстве $Oxyz$ вектор $\bar{a}$ может быть представлен разложением по координатному базису в виде

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные базисные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси;

x, y, z — проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат.

Длина (*модуль*) вектора определяется через проекции по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Косинусы углов α, β, γ, образованных вектором $\bar{a}$ с осями координат, находятся в виде отношений

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}.$$

Они называются *направляющими косинусами*.

Равенство $\bar{a} = (x, y, z)$ используется для выражения вектора $\bar{a}$ через его проекции на заданные координатные оси.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Условие коллинеарности двух векторов $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ записывается в виде

$$\bar{a} = \lambda\bar{b},$$

где λ — числовой множитель.

Через координаты это условие записывается в виде

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

1.1. Найти длину вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$ и его направляющие косинусы.

1.2. Даны точки $M_1(4; -2; 6)$, $M_2(1; 4; 0)$. Найти длину и направление вектора $\overline{M_1M_2}$.

1.3. Найти вектор $\bar{a}$, образующий с тремя базисными векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ равные острые углы, при условии, что $|\bar{a}| = 2\sqrt{3}$.

1.4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$, $C(1; 2; -3)$. Найти его четвертую вершину D.

1.5. Даны вершины треугольника $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$, $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

1.6. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$ и определить длины его диагоналей.

1.7. Определить длины сторон параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ и $\bar{d} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$.

1.8. Определить модули векторов, на которых построен параллелограмм с диагоналями $\bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{d} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

1.9. Даны модули векторов $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Вычислить $|\bar{a} - \bar{b}|$.

1.10. Даны модули векторов $|\bar{a}| = 11$, $|\bar{b}| = 23$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 30$. Определить $|\bar{a} + \bar{b}|$.

1.11. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$, причем $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 8$. Определить $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$.

1.12. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны.

1.13. На плоскости даны три вектора $\bar{a} = 2\bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. Представим разложение вектора $\bar{c}$ в виде $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$, где m и n — неизвестные коэффициенты.

Выразим каждый из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ через единичные векторы:

$$2\bar{i} + 6\bar{j} = m \cdot 2\bar{i} + n(3\bar{i} + 3\bar{j}) = (2m + 3n)\bar{i} + 3n\bar{j}.$$

Откуда $2 = 2m + 3n$, $6 = 3n \Rightarrow n = 2$, $m = -2$.

Значит, $\bar{c} = -2\bar{a} + 2\bar{b} = 2(\bar{b} - \bar{a})$.

1.14. На плоскости даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1.15. Даны четыре вектора $\bar{a} = (2; 1; 0)$, $\bar{b} = (1; -1; 2)$, $\bar{c} = (2; 2; -1)$, $\bar{d} = (3; 7; -7)$. Разложить вектор $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

1.16. При условиях задачи 1.15 разложить вектор $\bar{a}$ по векторам $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$.

1.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение их модулей на косинус угла между векторами:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \varphi.$$

Из данного выражения можно найти $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Если векторы выражены через координаты в декартовой системе координат $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярное произведение определяется как сумма попарных произведений соответствующих координат:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Условием перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0, \text{ или } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Скалярное произведение может быть также представлено в виде

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a},$$

где $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ — проекции одного из векторов на направление второго вектора.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Модуль вектора $\bar{a}$ может быть представлен в виде

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2},$$

где $\bar{a}^2$ — скалярный квадрат вектора $\bar{a}$, равный $\bar{a} \cdot \bar{a}$.

1.17. Определить скалярное произведение векторов $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 7\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

1.18. Определить угол между векторами $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$.

1.19. Даны точки $M_1(2;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ 0;\ 4)$, $M_3(2;\ 0;\ 2)$, $O(0;\ 0;\ 0)$. Построить векторы $\overline{OM_3}$, $\overline{M_1M_2}$ и найти угол между ними.

1.20. Найти длины сторон и углы треугольника с вершинами $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$.

1.21. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = -2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

1.22. Найти угол между диагоналями параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(5;\ 2;\ -1)$, $C(-3;\ 3;\ -3)$.

1.23. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (6;\ -1;\ 1)$, $\bar{b} = (2;\ 3;\ 1)$.

1.24. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ и $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные векторы, образующие угол в 120°. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1.25. Найти проекцию вектора $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ на вектор $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$.

1.26. В плоскости находятся три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Даны модули этих векторов $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 5$ и углы между векторами $(\bar{a} \widehat{,} \bar{b}) = 60°$, $(\bar{b} \widehat{,} \bar{c}) = 60°$. Найти модуль вектора $\bar{u} = -\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

1.27. В плоскости находятся два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Даны модули этих векторов $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ и угол между ними $\varphi = 60°$. Найти модуль вектора $\bar{u} = 2\bar{a} - \bar{b}$.

1.28. Угол между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\pi/6$. Известны длины векторов $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$. Определить угол между векторами $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$.

1.29. Определить, при каком значении m векторы $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ взаимно перпендикулярны.

1.30. Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ -1;\ 7)$, $C(7;\ 4;\ -2)$. Показать, что этот треугольник равнобедренный.

1.31. Найти проекцию вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

1.32. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

2. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

2.1. Прямая на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной вектору $\bar{n} = (a, b)$, получают на основе использования скалярного произведения двух векторов.

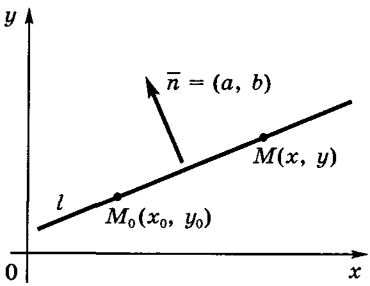


Рис. 2.1

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямой l (рис. 2.1). Тогда $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$ и по условию перпендикулярности векторов

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (2.1)$$

Если в уравнении (2.1) раскрыть скобки, то получится *общее уравнение прямой*

$$ax + by + c = 0, \qquad (2.2)$$

где $c = -ax_0 - by_0$.

Вектор $\bar{n} = (a, b)$ называется *нормальным вектором* прямой (2.1) или (2.2).

Если $b \neq 0$, то из общего уравнения прямой

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

или

$$y = kx + \beta, \qquad (2.3)$$

где $k = -a/b$ и $\beta = -c/b$.

Уравнение (2.3) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Параметр k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$) и называется *угловым коэффициентом*. Параметр β — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Если $b \neq 0$, то из уравнения (2.1) получается уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (2.4)$$

где $k = -a/b$.

Если даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие на прямой l, то

$$k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \tag{2.5}$$

и уравнение прямой принимает вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{2.6}$$

Если прямая проходит через две точки $M(a, 0)$ и $N(0, b)$, лежащие на осях координат, то ее уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2.7}$$

называется *уравнением прямой в отрезках на осях.*

Угол φ, отсчитываемый против часовой стрелки от прямой l_1 (рис. 2.2), заданной уравнением $y = k_1x + \beta_1$, до прямой l_2, заданной уравнением $y = k_2x + \beta_2$, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.8}$$

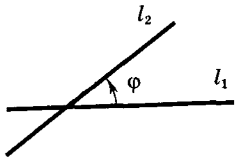


Рис. 2.2

Кроме того, для вычисления углов между прямыми (рис. 2.3), заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, справедлива формула

$$\cos\varphi_{1,\,2} = \pm\frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}, \tag{2.9}$$

где $\bar{n}_1 = (a_1, b_1)$ и $\bar{n}_2 = (a_2, b_2)$.

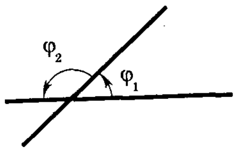


Рис. 2.3

Условие параллельности прямых имеет вид

$$k_1 = k_2, \quad \text{или} \quad a_1/a_2 = b_1/b_2. \tag{2.10}$$

Условие перпендикулярности прямых выражается в виде

$$k_2 = -1/k_1, \quad \text{или} \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \tag{2.11}$$

Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2.12}$$

2.1. Построить прямые: а) $x - 2y + 5 = 0$; б) $2x + 3y = 0$; в) $5x - 2 = 0$; г) $2y + 7 = 0$.

Решение. а) Полагая в уравнении $x = 0$, получаем $y = {}^5/_2$. Следовательно, прямая пересекается с осью ординат в точке $B(0;\ {}^5/_2)$. Полагая $y = 0$, получаем $x = -5$, т.е. прямая пересекается с осью абсцисс в точке $A(-5;\ 0)$. Проводим прямую через точки A и B (рис. 2.4).

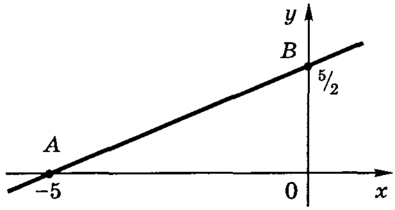


Рис. 2.4

б) Прямая $2x + 3y = 0$ проходит через точку $O(0;\ 0)$. Полагая $x = 3$, имеем $6 + 3y = 0$, т.е. $y = -2$; получаем точку $M(3;\ -2)$, лежащую на прямой. Проводим прямую через точки O и M.

в) Разрешив уравнение прямой относительно x, получим $x = {}^2/_5$. Эта прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный ${}^2/_5$.

г) Выразим уравнение прямой в виде $y = -{}^7/_2$. Эта прямая параллельна оси абсцисс.

2.2. Построить прямые: а) $3x - y + 6 = 0$; б) $5x + 7y = 0$; в) $3x - 4 = 0$; г) $5y + 4 = 0$.

2.3. Определить параметры k и β в уравнении (2.3) для каждой из прямых: а) $2x - 5y - 10 = 0$; б) $2x + 5y = 0$; в) $y = 7$; г) $\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$.

2.4. Уравнения прямых: а) $3x - 5y = 15$; б) $5x - 3y + 10 = 0$ привести к виду уравнения в отрезках на осях.

Решение. а) Данное уравнение нужно привести к виду (2.7):

$$3x - 5y = 15 \Rightarrow \frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1.$$

2.5. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках на осях.

2.6. Можно ли уравнение прямой $19x + 98y = 0$ записать в виде уравнения в отрезках на осях?

2.7. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $5x + 5y - 7 = 0$?

2.8. Определить площадь треугольника, образованного прямой $2x + 5y - 20 = 0$ с осями координат.

2.9. Издержки производства 100 шт. некоторого товара составляют 300 руб., а 500 шт. — 600 руб. Определить издержки производства 400 шт. товара при условии, что функция издержек линейна.

Решение. Используем уравнение (2.6). Даны две точки прямой: $M_1(100; 300)$ и $M_2(500; 600)$. Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в уравнение (2.6), последовательно получаем

$$y - 300 = \frac{600 - 300}{500 - 100}(x - 100), \qquad y - 300 = \frac{300}{400}(x - 100),$$

$$y - 300 = {}^3/_4 x - 75, \qquad y = {}^3/_4 x + 225.$$

Если $x = 400$, то $y = {}^3/_4 \cdot 400 + 225 = 525$, т.е. искомая величина составляет 525 руб.

2.10. Прибыль от продажи 50 шт. некоторого товара составляет 50 руб., 100 шт. — 200 руб. Определить прибыль от продажи 500 шт. товара при условии, что функция прибыли линейна.

2.11. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 и 6 см, приняв бо́льшую диагональ за ось Ox и меньшую за ось Oy.

2.12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3.

Указание. Использовать уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и формулу $S_\Delta = |a \cdot b|/2$.

2.13. Даны точки $O(0; 0)$ и $A(-3; 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0; 2)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

2.14. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 6.

2.15. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(4; -5)$ и параллельных осям координат.

2.16. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол $60°$.

Решение. Будем искать уравнение прямой с угловым коэффициентом, т.е. уравнение вида (2.3). Подставляя координаты точки $O(0; 0)$ в уравнение, получим $0 = k \cdot 0 + \beta$, т.е. $\beta = 0$. Но $k = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Уравнение данной прямой имеет вид $y = \sqrt{3}\,x$.

2.17. Определить параметры k и β прямой, проходящей через точку $M(7; 5)$ и составляющей с осью Ox угол $45°$. Написать уравнение этой прямой.

2.18. Определить острый угол между прямыми $y = -5x + 3$ и $y = -{}^2/_3x + 7$.

Решение. Используя формулу (2.8) и условие, где $k_1 = -5$, $k_2 = -{}^2/_3$, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-{}^2/_3 - (-5)}{1 + (-{}^2/_3)\cdot(-5)}\right| = \frac{5 - {}^2/_3}{1 + {}^{10}/_3} = 1, \text{ т.е. } \varphi = \pi/4.$$

2.19. Показать, что прямые $2x - 3y + 5 = 0$ и $14x - 21y - 13 = 0$ параллельны.

Решение. Приведя уравнение каждой прямой к виду с угловым коэффициентом, получим

$$y = {}^2/_3x + {}^5/_3 \qquad \text{и} \qquad y = {}^2/_3x - {}^{13}/_{21}.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1 = k_2 = {}^2/_3$, т.е. прямые параллельны.

2.20. Показать, что прямые $2x - 7y + 5 = 0$ и $21x + 6y - 2 = 0$ перпендикулярны.

Решение. Приведем уравнения к виду (2.3):

$$y = {}^2/_7x + {}^5/_7 \qquad \text{и} \qquad y = -{}^7/_2x + {}^1/_3,$$

т.е. $k_1 = {}^2/_7$, $k_2 = -{}^7/_2$. Так как $k_1 = -1/k_2$, то прямые перпендикулярны.

2.21. Определить острый угол между прямыми:

а) $y = 2x - 3$, $y = {}^1/_2x + 1$; б) $5x - y + 7 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$;

в) $2x + y = 0$, $y = 3x - 4$; г) $3x + 2y = 0$, $6x + 4y + 9 = 0$.

2.22. Среди прямых $3x - 2y + 17 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 16 = 0$ указать параллельные и перпендикулярные.

2.23. В точках пересечения прямой $2x + 5y - 10 = 0$ с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.

2.24. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(2; 3)$ под углом $45°$ к прямой $5x + 2y = 4$.

Решение. Искомых прямых будет две. На рис. 2.5 показана данная прямая l и искомые прямые l_1 и l_2. Будем искать уравнения вида (2.4), т.е. $y - y_0 = k(x - x_0)$. Используя условие задачи, получаем $y - 3 = k(x - 2)$. Остается найти k. Для данной прямой $k_0 = -a/b = -{}^5/_2$. Используем формулу (2.8). Получим

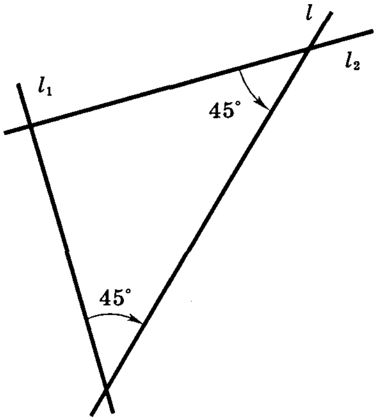


Рис. 2.5

$$\operatorname{tg} 45° = |(k + {}^5/_2) \;/\; (1 - {}^5/_2 k)|.$$

Далее нужно рассмотреть два случая:

1) $1 = (k + {}^5/_2) \;/\; (1 - {}^5/_2 k)$,

$1 - {}^5/_2 k = k + {}^5/_2$,

$-{}^3/_2 = {}^7/_2 k, \quad k = -{}^3/_7$,

$y - 3 = -3(x - 2)/7$,

$7y - 21 = -3x + 6, \quad 3x + 7y - 27 = 0$;

2) $1 = -(k + {}^5/_2) \;/\; (1 - {}^5/_2 k)$,

$1 - {}^5/_2 k = -k - {}^5/_2$,

${}^7/_2 = {}^3/_2 k, \quad k = {}^7/_3$,

$y - 3 = 7(x - 2)/3, \quad 3y - 9 = 7x - 14, \quad 7x - 3y - 5 = 0.$

Искомые уравнения: $3x + 7y - 27 = 0$ и $7x - 3y - 5 = 0$.

2.25. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом $45°$ к прямой $y = 14 - 2x$.

2.26. Показать, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

Решение. Так как ${}^3/_2 \neq -{}^2/_5$ (т.е. $k_1 \neq k_2$), то прямые пересекаются. Решив систему

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + 5y - 12 = 0, \end{cases}$$

находим, что $x = 1$, $y = 2$, т.е. прямые пересекаются в точке $M(1; 2)$.

2.27. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются функциями $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где

x — расстояние перевозки в сотнях километров, а y — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится второе средство.

Решение. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 150 + 50x, \\ y = 250 + 25x, \end{cases}$$

найдем точку пересечения прямых. Получаем $M(4;\ 350)$. Сделаем чертеж (рис. 2.6). Из рисунка видно, что при расстояниях, превышающих 400 км, более экономичны перевозки вторым средством транспорта.

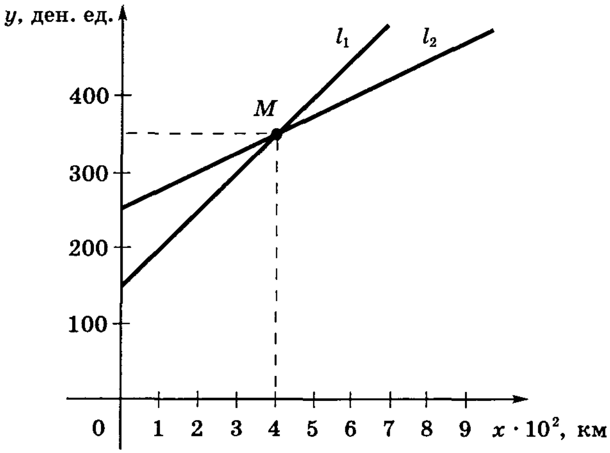


Рис. 2.6

2.28. Прибыль от продажи некоторого товара в двух магазинах выражается функциями $y = -2 + 3x$ и $y = -3 + 16x/5$, где x — количество товара в сотнях штук, а y — прибыль в тысячах рублей. Определить, начиная с какого количества товара более выгодной становится продажа во втором магазине.

2.29. Определить расстояние от точки $M(2;\ 1)$ до прямой $3x + 4y - 98 = 0$.

Решение. По формуле (2.12) имеем

$$d = |3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 98|\ /\ \sqrt{9+16} = |-88|/5 = 17{,}6.$$

2.30. Стороны треугольника описываются уравнениями: $x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC). Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

Решение. Определим координаты точки B. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0, \\ 4x - y - 2 = 0, \end{cases}$$

получаем: $x = 1$, $y = 2$, т.е. $B(1; 2)$.

Находим длину высоты BD как расстояние от точки B до прямой AC:

$$|BD| = |6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 35| \;/\; \sqrt{6^2 + 8^2} = 1{,}3.$$

2.31. Определить расстояние между параллельными прямыми $3x - 4y - 6 = 0$ и $6x - 8y + 28 = 0$.

Решение. Задача сводится к определению расстояния от произвольной точки одной прямой до другой прямой. Полагая, например, в уравнении первой прямой $y = 0$, получаем $x = 2$. Откуда $M(2; 0)$ — точка на первой прямой. Расстояние до второй прямой будет равно

$$d = |6 \cdot 2 - 8 \cdot 0 + 28| \;/\; \sqrt{36 + 64} = 40/10 = 4.$$

2.32. Показать, что прямые $15x + 36y - 105 = 0$ и $5x + 12y + 30 = 0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

2.33. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами $A(5; 2)$, $B(2; 3)$ и $C(0; -3)$.

2.2. Плоскость

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{N} = (a, b, c)$, получается на основе использования скалярного произведения двух векторов. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости α (рис. 2.7).

Тогда $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$ и по условию перпендикулярности векторов

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (2.13)$$

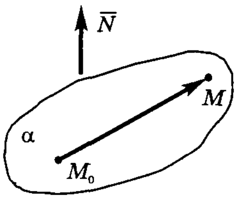


Рис. 2.7

Уравнение (2.13) называется *уравнением плоскости, проходящей через заданную точку.* После раскрытия скобок в уравнении (2.13) получается уравнение

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (2.14)$$

где $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Уравнение (2.14) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве.

Вектор $\overline{N} = (a, b, c)$ называется *нормальным вектором* плоскости (2.13) или (2.14).

Если плоскость проходит через три точки $M(a,\ 0,\ 0)$, $N(0,\ b,\ 0)$ и $P(0,\ 0,\ c)$, лежащие на осях координат, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15) называется *уравнением плоскости в отрезках на осях*.

Угол, образованный двумя плоскостями, находится по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|}=\pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|}, \tag{2.16}$$

где $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ — нормальные векторы плоскостей $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

Условие параллельности плоскостей имеет вид

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}. \tag{2.17}$$

Условием перпендикулярности плоскостей является равенство

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0. \tag{2.18}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости $ax+by+cz+d=0$ определяется по формуле

$$d_{M_0}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{|\overline{N}|}. \tag{2.19}$$

2.34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;\ 5;\ 0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{N}=(4;\ 3;\ 2)$.

Решение. Используя уравнение (2.13), получаем

$$4(x-5)+3(y-5)+2(z-0)=0,$$

т.е.

$$4x+3y+2z-35=0.$$

2.35. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\ 2;\ 3)$ и перпендикулярной вектору $\overline{OM}$.

2.36. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0;\ 1;\ 3)$ и $M_2(2;\ 4;\ 5)$.

Решение. Используя уравнение (2.13) и координаты точки M_1, получаем $a(x-0)+b(y-1)+c(z-3)=0$. Так как плоскость параллельна оси Ox, то

$a = 0$. Искомое уравнение приобретает вид $b(y - 1) + c(z - 3) = 0$. Подставляя в последнее уравнение координаты точки M_2, получаем

$$b(4 - 1) + c(5 - 3) = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad 3b + 2c = 0, \quad b = -2c/3.$$

Искомое уравнение принимает вид $-2c(y - 1)/3 + c(z - 3) = 0$. Поделив обе части уравнения на c ($c \neq 0$, так как если $c = 0$, то и $b = 0$. Но $\overline{N} = (a, b, c)$ не может быть нулевым вектором), получим $-2(y - 1)/3 + (z - 3) = 0$, $-2y + 2 + 3z - 9 = 0$, $2y - 3z + 7 = 0$, что и является искомым уравнением.

2.37. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;\ 1;\ 0)$ и $M_2(1;\ 3;\ 0)$.

2.38. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $M_1(3;\ 0;\ 3)$ и $M_2(5;\ 0;\ 0)$.

2.39. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2;\ -4;\ 3)$.

Решение. Используем уравнение плоскости для данного случая: $ax + by = 0$. Подставим в него координаты точки M. Получим $2a - 4b = 0$, $a = 2b$. Уравнение принимает вид $2bx + by = 0$. Поделив на b ($b \neq 0$), получим $2x + y = 0$.

2.40. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0;\ 5;\ 6)$.

2.41. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(6;\ 0;\ 4)$.

2.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;\ 4;\ 3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение. Используем уравнение (2.15), в котором $a = b = c$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1, \qquad \text{или} \qquad x + y + z = a.$$

Координаты точки M удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство $5 + 4 + 3 = a$, откуда $a = 12$. Получаем уравнение $x + y + z - 12 = 0$.

2.43. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ -3;\ 3)$ и отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Ox.

2.44. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -1)$ параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

Решение. Используя уравнение (2.13) и условие, получаем

$$a(x - 2) + b(y - 3) + c(z + 1) = 0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\overline{N} = (5; -3; 2)$ данной плоскости; следовательно, $a = 5$, $b = -3$, $c = 2$ и уравнение искомой плоскости примет вид

$$5(x-2) - 3(y-3) + 2(z+1) = 0,$$

или

$$5x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

2.45. Найти плоскость, проходящую через точку $M(14; 2; 2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

2.46. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0; 2; 0)$ и $M_2(2; 0; 0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x = 0$.

Решение. Плоскость $x = 0$ имеет нормальный вектор $\overline{N}_1 = (1; 0; 0)$. Используя точку M_1 и уравнение (2.13), запишем уравнение искомой плоскости $ax + b(y-2) + cz = 0$ с нормальным вектором $\overline{N}_2 = (a, b, c)$. В это уравнение подставим координаты точки M_2: $2a - 2b + 0 \cdot c = 0$, т.е. $a = b$. Возьмем $a = 1$, $b = 1$, тогда $\overline{N}_2 = (1; 1; c)$. Используя формулу (2.16), получаем

$$\cos 60° = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\,|\overline{N}_2|}, \qquad {}^1/_2 = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot c}{1\cdot\sqrt{1+1+c^2}}, \qquad 1 + 1 + c^2 = 4,$$

$$c^2 = 2, \qquad c = \pm\sqrt{2}.$$

В итоге получаем искомую плоскость

$$x + y + \sqrt{2}\,z - 2 = 0 \qquad \text{или} \qquad x + y - \sqrt{2}\,z - 2 = 0.$$

2.47. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

а) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

б) $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0$;

в) $6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0$;

г) $x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

2.48. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M(1; -1; -1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая — ось Oz.

2.49. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Решение. Используя уравнение (2.13), получаем $a(x+1) + b(y+1) + c(z-2) = 0$, где $\overline{N} = (a, b, c)$. Остается найти a, b, c. Нормальные векторы двух данных плоскостей $\overline{N}_1 = (1; -2; 1)$ и $\overline{N}_2 = (1; 2; -2)$. Из условия задачи имеем $\overline{N} \cdot \overline{N}_1 = 0$ и $\overline{N} \cdot \overline{N}_2 = 0$, остается решить систему уравнений

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a - c = 0.$$

Возьмем $a = 2$, тогда $c = 4$, а из первого уравнения системы получаем $b = 3$. Итак, a, b и c найдены. Искомое уравнение имеет вид $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

2.50. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; -1; -5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ и $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

2.51. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; -2; 0)$ и M_2 $(1; 1; 2)$ и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 2z - 8 = 0$.

2.52. Найти плоскость, проходящую через ось Oz и составляющую с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}\,z + 3 = 0$ угол $60°$.

2.53. Найти расстояние от точки $M(5; 1; -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

Решение. Используем формулу (2.19):

$$d_M = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

2.54. Найти расстояние от точки $M(1; 3; -2)$ до плоскости $2x - 3y - 4z + 28 = 0$.

2.55. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

2.3. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана двумя пересекающимися плоскостями (рис. 2.8), уравнения которых $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Тогда уравнения прямой будут

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

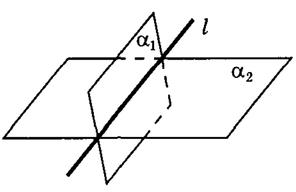


Рис. 2.8

Уравнения (2.20) называются *общими уравнениями прямой*.

Уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной вектору $\overline{R} = (m, n, p)$, получаются на основе

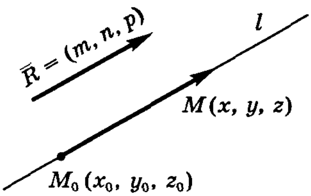


Рис. 2.9

условия коллинеарности двух векторов $\overline{M_0M}$ и $\bar{R}$ (рис. 2.9):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (2.21)$$

Уравнения (2.21) называются *каноническими уравнениями прямой.*

Вектор $\bar{R}=(m,\ n,\ p)$ называется *направляющим вектором* прямой.

Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, записываются в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (2.22)$$

Параметрические уравнения прямой получаются, если каждое из отношений (2.21) приравнять к параметру t:

$$\begin{cases} x=mt+x_0,\\ y=nt+y_0,\\ z=pt+z_0. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Угол между двумя прямыми с направляющими векторами $\bar{R}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\bar{R}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{\bar{R}_1\cdot\bar{R}_2}{|\bar{R}_1|\ |\bar{R}_2|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (2.24)$$

Условие параллельности двух прямых имеет вид

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.25)$$

Условие перпендикулярности двух прямых записывается в виде

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (2.26)$$

2.56. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;\ 3;\ 2)$ и параллельной вектору $\bar{R}=(-1;\ 1;\ 1)$.

Указание. Использовать уравнения (2.21) или (2.23).

2.57. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(-1;\ 2;\ 3)$ и $M_2(2;\ 6;\ -2)$, и найти ее направляющие косинусы.

Решение. Используем уравнения (2.22):

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3}, \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}.$$

При этом направляющий вектор будет $\bar{R}=(3;\ 4;\ -5)$.

Направляющие косинусы находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{m}{|\bar{R}|}, \qquad \cos\beta=\frac{n}{|\bar{R}|}, \qquad \cos\gamma=\frac{p}{|\bar{R}|}.$$

Откуда

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{50}}=0{,}3\sqrt{2}, \qquad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{50}}=0{,}4\sqrt{2}, \qquad \cos\gamma=\frac{-5}{\sqrt{50}}=-0{,}5\sqrt{2}.$$

2.58. Написать параметрические уравнения прямой: а) проходящей через точку $M(2;\ 1;\ -1)$ и параллельной вектору $\bar{R}=(1;\ -2;\ 3)$; б) проходящей через точки $M_1(3;\ -1;\ 4)$ и $M_2(1;\ 3;\ 2)$.

2.59. Уравнения прямой $x=2z-1$, $y=-2z+1$ привести к параметрическому виду.

Решение. Введем параметр $t=z$. Тогда получим параметрические уравнения прямой $x=2t-1$, $y=-2t+1$, $z=t$.

2.60. Вычислить углы, образованные с осями координат прямой

$$\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-3z+8=0. \end{cases}$$

Указание. Использовать решение задач 2.59 и 2.57.

2.61. Найти угол между прямой $x=2z-1$, $y=-2z+1$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1;\ -1;\ -1)$.

Указание. Использовать формулу (2.24) и решение задачи 2.59.

2.62. Доказать, что прямая $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ перпендикулярна прямой $y=x+1$, $z=1-x$.

2.63. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ 4;\ -1)$ и параллельной прямой $x - y = 2,\ y = 2z + 1$.

2.64. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;\ -8;\ 4)$ на ось Oz.

Указание. Искомая прямая проходит еще через точку $A(0;\ 0;\ 4)$.

2.65. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $B(2;\ -3;\ 5)$ на ось Oy.

2.4. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$ определяется выражением

$$\sin\theta = \frac{|\overline{N}\cdot\overline{R}|}{|\overline{N}|\ |\overline{R}|} = \frac{|am + bn + cp|}{|\overline{N}|\ |\overline{R}|}. \qquad (2.27)$$

Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид

$$am + bn + cp = 0. \qquad (2.28)$$

Условием перпендикулярности прямой и плоскости являются равенства

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}. \qquad (2.29)$$

2.66. Найти угол между прямой $y = 3x - 1,\ z = -{}^3/_2x + 1$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

Указание. Использовать формулу (2.27) и решение задачи 2.59.

2.67. Показать, что прямая $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{5}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{5}$ лежит в этой плоскости.

Указание. Если прямая параллельна плоскости, то ни одна точка прямой не принадлежит плоскости, а если прямая лежит в плоскости, то каждая точка прямой принадлежит плоскости. Этим можно воспользоваться при решении задачи.

2.68. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -4)$ и перпендикулярной прямой $x = 2$, $y - z = 1$.

Указание. В качестве нормального вектора $\overline{N}$ искомой плоскости нужно взять направляющий вектор $\overline{R}$ данной прямой.

2.69. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и точку $M(3;\ 4;\ 5)$.

Решение. Точка M лежит на искомой плоскости. Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид $a(x - 3) + b(y - 4) + c(z - 5) = 0$. Остается найти нормальный вектор $\overline{N} = (a,\ b,\ c)$. Точка $A(2;\ 3;\ 4)$ лежит на прямой, а значит, и на плоскости. Подставим координаты точки A в уравнение плоскости: $-a - b - c = 0$. С другой стороны, направляющий вектор прямой $\overline{R} = (1;\ 2;\ 3)$ перпендикулярен вектору $\overline{N}$, так как прямая лежит в плоскости. Следовательно, $\overline{R} \cdot \overline{N} = 0$, а значит, $1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 0$. Остается решить систему уравнений

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0, \\ -a - b - c = 0. \end{cases}$$

Получаем $b + 2c = 0$. Возьмем $c = 1$, тогда $b = -2$, а из второго уравнения системы имеем $a = 1$. Подставляя найденные значения a, b, c в уравнение плоскости, получаем $x - 2y + z = 0$.

2.70. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z + 7 = 0$.

2.71. Найти точку пересечения прямой $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ с плоскостью $3x - 2y + z = 0$.

Указание. Систему уравнений решаем подстановкой.

2.72. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 19 = 0$.

2.73. Найти проекцию точки $M(3;\ 1;\ -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$ (рис. 2.10).

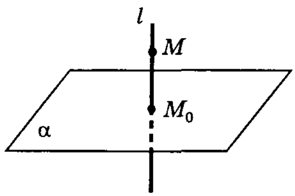


Рис. 2.10

Решение. Нужно найти координаты точки M_0, т.е. основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α. Составим параметрические уравнения прямой l (по условию $l \perp \alpha$). Для этого возьмем $\overline{R} = \overline{N} = (1; 2; 3)$ и используем координаты точки M. Получаем $x = t + 3$, $y = 2t + 1$, $z = 3t - 1$. Решая систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 30 = 0, \\ x = t + 3, \\ y = 2t + 1, \\ z = 3t - 1, \end{cases}$$

получаем $t + 3 + 4t + 2 + 9t - 3 - 30 = 0$, $14t = 28$, $t = 2$. Тогда $x = 2 + 3 = 5$, $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $z = 3 \cdot 2 - 1 = 5$, т.е. $M_0(5; 5; 5)$.

2.74. Найти проекцию точки $M(1;\ 1;\ -1)$ на плоскость $3x + y + z + 8 = 0$.

2.75. Найти проекцию точки $M(2;\ 3;\ 4)$ на прямую $x = y = z$ (рис. 2.11).

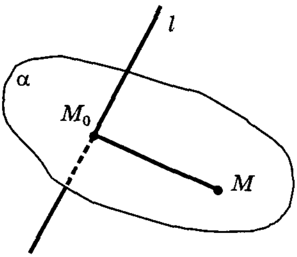


Рис. 2.11

Решение. Чтобы свести решение задачи к уже рассмотренным, нужно построить плоскость, проходящую через данную точку M и перпендикулярную данной прямой. Составим параметрические уравнения данной прямой: $x = t$, $y = t$, $z = t$. Направляющий вектор прямой $\overline{R} = (1; 1; 1)$. Возьмем нормальный вектор плоскости α: $\overline{N} = \overline{R} = (1; 1; 1)$. Тогда уравнение плоскости α имеет вид $1(x - 2) + 1(y - 3) + 1(z - 4) = 0$ или $x + y + z - 9 = 0$. Получим систему уравнений для определения координат точки M_0: $x + y + z - 9 = 0$, $x = t$, $y = t$, $z = t$. Решив ее, найдем $3t - 9 = 0$, $t = 3$, т.е. $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$, и искомая точка будет $M_0(3; 3; 3)$.

2.76. Найти проекцию точки $M(1;\ 2;\ 8)$ на прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

2.77. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;\ 1;\ 0)$ на прямую $x = 3z - 1$, $y = 2z$.

Указание. Предварительно нужно найти проекцию точки M на прямую, как в задаче 2.75.

2.78. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(1;\ 0;\ -1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.

2.79. Показать, что прямые $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{1}$ лежат в одной плоскости.

3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение второй степени относительно двух переменных

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

при разных значениях постоянных коэффициентов A, B, C описывает четыре вида линий на плоскости: окружность, эллипс, гиперболу и параболу. Это уравнение называется *общим уравнением кривых второго порядка.*

3.1. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (центра).

Нормальное уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где x_0, y_0 — координаты центра окружности;
R — радиус окружности.

После раскрытия скобок в этом уравнении получается *общее уравнение окружности*

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $\quad D = -2x_0, \qquad E = -2y_0, \qquad F = -x_0{}^2 - y_0{}^2 - R^2.$

3.1. Написать уравнение окружности с центром $C(-2;\ 3)$ и радиусом, равным 5. Построить окружность. Определить принадлежность точек $M_1(2;\ 6)$, $M_2(1;\ 7)$, $M_3(0;\ 4)$ окружности.

3.2. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$. Построить окружность.

Решение. Сгруппируем члены, содержащие переменные x и y, и дополним каждую группу до полного квадрата суммы или разности:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 11 = 0,$$

или

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Откуда получаем координаты центра $C(4;\ -3)$ и радиус $R = 6$. После этого может быть построена окружность.

3.3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$.

3.4. Построить окружности:

а) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$.

3.5. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $M_1(2;\ 1)$.

3.6. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $M_1(1;\ 2)$, $M_2(0;\ -1)$, $M_3(-3;\ 0)$.

3.7. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $M_1(7;\ 7)$, $M_2(-2;\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $2x - y - 2 = 0$.

3.8. Составить уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $y = -x$ и точку $M_1(4;\ 4)$.

3.9. Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке $M_1(6;\ 0)$.

3.10. Определить траекторию точки $M(x,\ y)$, движущейся так, что сумма квадратов ее расстояний от точек $M_1(-3;\ 0)$, $M_2(0;\ 3)$, $M_3(3;\ 0)$ остается равной 27.

3.11. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и точки пересечения прямой $x + y + 2 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

3.12. Написать уравнение линии, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1(-3;\ 0)$ и $M_2(3;\ 0)$ равна 50.

3.2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть постоянная величина $2a$, бóльшая, чем расстояние между фокусами $2c$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, если $a > b$ и фокусы находятся на оси Ox. Параметры a и b называются *полуосями* эллипса.

Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Расстояния точки $M(x, y)$ эллипса до его фокусов (*фокальные радиусы*) находятся по формулам

$$r_1 = a - \varepsilon x, \qquad r_2 = a + \varepsilon x.$$

3.13. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(^5/_2;\ \sqrt{6}/4)$, $M_2(-2;\ \sqrt{15}/5)$.

3.14. Написать каноническое уравнение симметричного относительно осей координат эллипса, который проходит через точку $M_1(^5/_4;\ 1)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = {}^3/_5$.

3.15. Написать каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен $^1/_2$, а большая полуось равна 6.

3.16. Определить эксцентриситет эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.17. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой.

3.18. На эллипсе, симметричном относительно осей координат, даны точки $M_1(2;\ \sqrt{3})$, $M_2(0;\ 2)$. Написать уравнение эллипса и найти расстояние точки M_1 до фокусов.

3.19. Написать уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой осей. Определить эксцентриситет.

3.20. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается втрое ближе к точке $M_1(1;\ 0)$, чем к прямой $x = 9$.

3.21. Определить траекторию точек M, расстояния которых до точки $A(0;\ 1)$ в 2 раза меньше расстояний до прямой $y - 4 = 0$.

3.22. Написать уравнение эллипса, если сумма фокальных радиусов равна $2\sqrt{5}$, а фокусы расположены в точках $F_1(-2;\ 0)$, $F_2(2;\ 0)$.

3.23. Построить кривые:

а) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$;

б) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$.

3.24. Написать каноническое уравнение эллипса, если малая полуось его равна 5, а эксцентриситет равен $^{12}/_{13}$.

3.3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек (*фокусов*) есть постоянная величина $2a$, причем $2a < 2c$, где $2c$ — расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Параметр a называется *вещественной полуосью* гиперболы и представляет собой расстояние от начала координат до вершины гиперболы, параметр b называется *мнимой полуосью*.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина $\varepsilon = c/a > 1$.

Расстояния текущей точки $M(x, y)$ гиперболы до фокусов (*фокальные радиусы*) определяются по формулам

$$r_1 = |\varepsilon x - a|, \qquad r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

Прямые, заданные уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$, являются *асимптотами* гиперболы.

3.25. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.26. Написать каноническое уравнение гиперболы, если $c = 5$, $a = 4$. Определить эксцентриситет гиперболы.

3.27. Написать каноническое уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если она проходит через точку $M_1(\sqrt{3}\,;\ \sqrt{2})$, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

3.28. Построить гиперболы:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0$.

3.29. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах данного эллипса.

3.30. Определить геометрическое место точек $M(x, y)$, расстояния от которых до прямой $x = 1$ вдвое меньше, чем до точки $F(4; 0)$.

3.31. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если она проходит через точки $M_1(2\sqrt{7}; -3)$, $M_2(-7; -6\sqrt{2})$.

3.32. Составить уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{3}{5}x$ и гипербола проходит через точку $M(10; -3\sqrt{3})$.

3.4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы, проходящей через начало координат и симметричной относительно оси Ox, имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Уравнение вида

$$x^2 = 2py$$

описывает параболу, симметричную относительно оси Oy.

Фокальный радиус точки $M(x, y)$, т.е. ее расстояние до фокуса на оси Ox, находится по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Парабола, ось которой параллельна оси Oy, описывается уравнением $y = ax^2 + bx + c$.

3.33. Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой лежит в начале координат и которая проходит через точку $F(2; -4)$; Ox — ось симметрии.

3.34. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(2; 0)$ и от прямой $y = 2$.

3.35. Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью Ox.

3.36. На параболе $y^2 = 4x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 4.

3.37. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и точки пересечения параболы $y = x^2/3 - 2x + 3$ с осями координат.

3.38. Построить параболы:

а) $y^2 - 8y = 4x$;

б) $x^2 + 6x + 5 = 2y$;

в) $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.

3.39. Выкопан котлован параболической формы с диаметром 80 м и глубиной 10 м. На каком расстоянии от нижней точки котлована по центру находится фокус параболы?

3.40. Написать уравнение параболы, если она проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси Oy.

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задания

1. Дан параллелограмм $ABCD$, три вершины которого заданы (табл. 1). Найти четвертую вершину и острый угол параллелограмма.

2. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами A, B, C (табл. 2) и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.

3. Найти угол между плоскостью α и прямой, проходящей через начало координат и точку M (табл. 3). Вычислить расстояние от точки M до плоскости α.

4. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l (табл. 4).

5. Построить кривые по заданным уравнениям (табл. 5).

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	A	B	C	Вариант	A	B	C
1	(−1; −2; 3)	(−4; 1; 2)	(5; 2; 7)	16	(−3; 5; −4)	(−5; 6; 2)	(3; −5; −2)
2	(1; 2; 3)	(3; −4; −2)	(−4; −3; 2)	17	(2; −3; 4)	(6; −4; −5)	(−3; 4; −2)
3	(2; −3; −1)	(−3; 5; 3)	(4; 3; −4)	18	(5; −2; −4)	(−5; −8; −1)	(−2; 4; 3)
4	(3; −4; 2)	(−5; 2; −3)	(−1; 7; −2)	19	(−3; −2; −5)	(−4; −5; 3)	(2; 3; 4)
5	(−5; 2; 4)	(−3; −4; 2)	(6; −3; −3)	20	(2; 6; −3)	(−5; −2; −4)	(−3; −5; 1)
6	(−4; −3; 5)	(2; −5; 6)	(−2; 3; −5)	21	(3; −1; −2)	(2; −4; 1)	(7; 5; 2)
7	(4; 2; −3)	(−5; 6; −4)	(−2; −3; 4)	22	(3; 1; 2)	(−2; 3; −4)	(2; −4; −3)
8	(−4; 5; −2)	(−1; −5; −8)	(3; −2; 4)	23	(−1; 2; −3)	(3; −3; 5)	(−4; 4; 3)
9	(−5; −3; −2)	(3; −4; −5)	(4; 2; 3)	24	(2; 3; −4)	(−3; −5; 2)	(−2; −1; 7)
10	(−3; 2; 6)	(−4; −5; −2)	(1; −3; −5)	25	(4; −5; 2)	(2; −3; −4)	(−3; 6; −3)
11	(−2; 3; −1)	(1; 2; −4)	(2; 7; 5)	26	(5; −4; −3)	(6; 2; −5)	(−5; −2; 3)
12	(2; 3; 1)	(−4; −2; 3)	(−3; 2; −4)	27	(−3; 4; 2)	(−4; −5; 6)	(4; −2; −3)
13	(−3; −1; 2)	(5; 3; −3)	(3; −4; 4)	28	(−2; −4; 5)	(−8; −1; −5)	(4; 3; −2)
14	(−4; 2; 3)	(2; −3; −5)	(7; −2; −1)	29	(−2; −5; −3)	(−5; 3; −4)	(3; 4; 2)
15	(2; 4; −5)	(−4; 2; −3)	(−3; −3; 6)	30	(6; −3; 2)	(−2; −4; −5)	(−5; 1; −3)

Таблица 2. **Варианты задания 2**

Вариант	A	B	C	Вариант	A	B	C
1	(3; 4)	(2; −1)	(1; −7)	16	(3; 2)	(2; −5)	(−6; −1)
2	(−4; −5)	(3; 3)	(5; −2)	17	(6; −4)	(−3; −7)	(−1; 2)
3	(−3; 5)	(4; −3)	(−2; −4)	18	(−2; −1)	(7; 3)	(4; −3)
4	(3; −2)	(−5; −4)	(−1; 6)	19	(3; 4)	(6; 7)	(1; 1)
5	(2; 5)	(−3; 4)	(−4; −2)	20	(−4; −5)	(−2; 2)	(−7; 4)
6	(−3; 2)	(−2; −5)	(6; −1)	21	(3; −4)	(2; 1)	(1; 7)
7	(−6; −4)	(3; −7)	(1; 2)	22	(−4; 5)	(3; −3)	(5; 2)

Вариант	A	B	C	Вариант	A	B	C
8	(2; 1)	(−7; 3)	(−4; −3)	23	(−3; −5)	(4; 3)	(−2; 4)
9	(−3; −4)	(−6; 7)	(−1; 1)	24	(3; 2)	(−5; 4)	(−1; −6)
10	(4; −5)	(2; 2)	(7; 4)	25	(2; −5)	(−3; −4)	(−4; 2)
11	(−3; 4)	(−2; −1)	(−1; −7)	26	(−3; −2)	(−2; 5)	(6; 1)
12	(4; −5)	(−3; 3)	(−5; −2)	27	(−6; 4)	(3; 7)	(1; −2)
13	(3; 5)	(−4; −3)	(2; −4)	28	(2; 1)	(−7; −3)	(−4; 3)
14	(−3; −2)	(5; −4)	(1; 6)	29	(−3; 4)	(−6; −7)	(−1; −1)
15	(−2; 5)	(3; 4)	(4; −2)	30	(4; 5)	(2; −2)	(7; −4)

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	M	α	Вариант	M	α
1	(2; −1; 3)	$3x - y + 2z - 4 = 0$	16	(−2; 4; −3)	$x + 5y + 7z - 2 = 0$
2	(2; −2; 4)	$x - 3y + 5z - 10 = 0$	17	(5; −3; 2)	$-x + 3y + 2z + 14 = 0$
3	(−4; 5; −1)	$4x + y - 2z + 5 = 0$	18	(−3; −5; −4)	$-3x + 2y + z - 4 = 0$
4	(−3; 2; 1)	$2x - y + z + 5 = 0$	19	(−3; −2; 4)	$x - 5y + 3z + 1 = 0$
5	(2; 3; 1)	$5x + 2y - z - 3 = 0$	20	(1; 3; 4)	$2x + 3y + z - 6 = 0$
6	(−3; −2; 4)	$7x + y + 5z - 2 = 0$	21	(3; 2; −1)	$2x + 3y - z - 4 = 0$
7	(2; 5; −3)	$2x - y + 3z + 14 = 0$	22	(1; −3; 2)	$x + 2y - z + 5 = 0$
8	(−4; −3; −5)	$x - 3y + 2z - 4 = 0$	23	(4; 2; −2)	$5x + y - 3z - 10 = 0$
9	(4; −3; −2)	$3x + y - 5z + 1 = 0$	24	(−1; −4; 5)	$-2x + 4y + z + 5 = 0$
10	(4; 1; 3)	$x + 2y + 3z - 6 = 0$	25	(1; 2; 3)	$-x + 5y + 2z - 3 = 0$
11	(−1; 3; 2)	$-x + 2y + 3z - 4 = 0$	26	(4; −3; −2)	$5x + 7y + z - 2 = 0$
12	(2; 1; −3)	$-x + y + 2z + 5 = 0$	27	(−3; 2; 5)	$3x + 2y - z + 14 = 0$
13	(−2; 4; 2)	$-3x + 5y + z - 10 = 0$	28	(−5; −4; −3)	$2x + y - 3z - 4 = 0$
14	(5; −1; −4)	$x - 2y + 4z + 5 = 0$	29	(−2; 4; −3)	$-5x + 3y + z + 1 = 0$
15	(3; 1; 2)	$2x - y + 5z - 3 = 0$	30	(3; 4; 1)	$3x + y + 2z - 6 = 0$

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	M	l	Вариант	M	l
1	(3; 2; 1)	$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-2}$	16	(−4; 5; −2)	$\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{2}$
2	(2; −1; 3)	$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}$	17	(5; −2; 3)	$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{3}$
3	(1; −3; −2)	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{3}$	18	(−1; −3; −2)	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{1}$
4	(−4; 2; −3)	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-1}$	19	(2; −5; −4)	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{3}$
5	(−4; 5; 2)	$\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$	20	(4; 3; −5)	$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-2}{3}$
6	(−2; −4; 5)	$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{2}$	21	(1; 3; 2)	$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{3}$
7	(3; 5; −2)	$\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{2}$	22	(3; 2; −1)	$\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$
8	(−2; −1; −3)	$\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$	23	(−2; 1; −3)	$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{2}$
9	(−4; 2; −5)	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$	24	(−3; −4; 2)	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{2}$
10	(−5; 4; 3)	$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-3}$	25	(2; −4; 5)	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{2}$
11	(2; 1; 3)	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$	26	(5; −2; −4)	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$
12	(−1; 3; 2)	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$	27	(−2; 3; 5)	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{2}$
13	(−3; −2; 1)	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$	28	(−3; −2; −1)	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{2}$
14	(2; −3; −4)	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$	29	(−5; −4; 2)	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$
15	(5; 2; −4)	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$	30	(3; −5; 4)	$\frac{x-4}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$

Таблица 5. **Варианты задания 5**

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
1	$(x-2)^2+(y-3)^2=9$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$ $y^2=9x$	16	$(x-3)^2+(y-2)^2=9$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{49}=1$ $y^2=-4x$
2	$(x+3)^2+(y-5)^2=4$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ $y^2=7x$	17	$(x-5)^2+(y+3)^2=4$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$ $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1$ $y^2=-2x$
3	$(x+1)^2+(y-2)^2=16$ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ $y^2=5x$	18	$(x+1)^2+(y+1)^2=16$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ $y^2=-6x$
4	$(x-3)^2+(y+4)^2=25$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$ $y^2=16x$	19	$(x+4)^2+(y-3)^2=25$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{64}=1$ $y^2=-x$
5	$(x+3)^2+(y+3)^2=4$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ $y^2=3x$	20	$(x-3)^2+(y-3)^2=4$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1$ $y^2=-8x$
6	$(x-1)^2+(y+1)^2=1$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ $y^2=4x$	21	$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ $x^2=9y$

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
7	$(x+2)^2+(y-1)^2=36$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ $y^2=2x$	22	$(x-1)^2+(y+2)^2=36$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$ $x^2=7y$
8	$(x-4)^2+(y+2)^2=49$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ $y^2=6x$	23	$(x+2)^2+(y-4)^2=49$ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$ $x^2=5y$
9	$(x+4)^2+(y-4)^2=9$ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$ $y^2=x$	24	$(x-4)^2+(y+4)^2=9$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$ $x^2=16y$
10	$(x-5)^2+(y+1)^2=4$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$ $y^2=8x$	25	$(x+1)^2+(y-5)^2=4$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{49}=1$ $x^2=3y$
11	$(x+5)^2+(y-6)^2=16$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ $y^2=-9x$	26	$(x-6)^2+(y+5)^2=16$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{36}=1$ $x^2=4y$
12	$(x-1)^2+(y+5)^2=1$ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ $y^2=-7x$	27	$(x+5)^2+(y-1)^2=1$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{25}=1$ $x^2=2y$

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
13	$(x+1)^2+(y-3)^2=25$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ $y^2=-5x$	28	$(x-3)^2+(y+1)^2=25$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$ $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{49}=1$ $x^2=6y$
14	$(x-3)^2+(y-2)^2=36$ $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$ $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ $y^2=-16x$	29	$(x-2)^2+(y-3)^2=36$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$ $x^2=y$
15	$(x+2)^2+(y+4)^2=49$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ $y^2=-3x$	30	$(x+4)^2+(y+2)^2=49$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$ $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$ $x^2=8y$

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

4.1. Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — символ, который называют *мнимой единицей*. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Действия над комплексными числами. Правила сложения, умножения и деления комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

2) $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$;

3) если $z = a + bi$, то $\bar{z} = a - bi$ (комплексное число $\bar{z}$ называется *сопряженным* для z);

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$

Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой $M(a, b)$ плоскости или ее радиусом-вектором $\overline{OM}$. Длина этого вектора $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* комплексного числа z и обозначается через $|z|$, т.е. $|z| = r$, а угол φ между вектором $\overline{OM}$ и осью Ox называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается через $\arg z$, т.е. $\varphi = \arg z$.

Тогда

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а φ — решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi. \end{cases}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$;

3) формула Муавра:
$z_1{}^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n — целое число;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$,

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Корни квадратных и биквадратных уравнений. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами, у которого $D = b^2 - 4ac < 0$, находятся по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Корни биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ с действительными коэффициентами, у которого $D = p^2 - 4q < 0$, находятся по формулам

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{q} - p} \pm i\sqrt{2\sqrt{q} + p}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2\sqrt{q} - p} \pm i\sqrt{2\sqrt{q} + p}}{2}.$$

4.1. Выполнить указанные действия:

а) $(2 + 3i) + (4 - 7i)$; б) $(1 - i)(3 + 2i)$; в) $\dfrac{1 + 3i}{1 + i}$.

Решение.

а) $(2 + 3i) + (4 - 7i) = (2 + 4) + (3 - 7)i = 6 - 4i$;

б) $(1 - i)(3 + 2i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2 = 3 - i + 2 = 5 - i$;

в) $\dfrac{1 + 3i}{1 + i} = \dfrac{(1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$.

4.2. Выполнить действия:

а) $(3 - 4i)i$; б) $(7 - 2i)(1 - i)$; в) i^3; г) $(5 - 3i)^2$; д) i^4;
е) $(1 + 2i)^3$; ж) i^n, где n — целое число.

4.3. Вычислить:

а) $\dfrac{i - 1}{i}$; б) $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^2}{\sqrt{3} - i}$; в) $\dfrac{3 - 7i}{2 + 4i}$; г) $\dfrac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$; д) $\dfrac{2 + 3i}{1 - i}$.

4.4. Заданы ли следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$; г) $5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

д) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; е) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

ж) $\sin\frac{3}{4}\pi + i\cos\frac{3}{4}\pi$.

4.5. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $-1 + i\sqrt{3}$; б) $-3 - 4i$.

Решение.

а) $-1 + i\sqrt{3} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

б) $-3 - 4i = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ — угол третьей четверти, косинус которого равен $-\frac{3}{5}$.

4.6. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) 2; б) -5; в) $3i$; г) $-2i$; д) $\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$;

е) $-\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$; ж) $\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$; з) $-\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$;

и) $\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi$; к) $2\left(\sin\frac{3}{4}\pi + i\cos\frac{3}{4}\pi\right)$;

л) $1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; м) $\sin\alpha + (1 - \cos\alpha)i$.

4.7. Вычислить, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

а) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{10}$; б) $(1 + i\sqrt{3})^{-5}$.

Решение.

а) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{5} + i\sin\frac{10\pi}{5}\right) = 2^{10}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^{10}$;

б) $(1 + i\sqrt{3})^{-5} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-5} = 2^{-6}(1 - i\sqrt{3})$.

4.8. Вычислить, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

а) $\dfrac{\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi}{\cos\frac{5}{12}\pi - i\sin\frac{5}{12}\pi}$; б) $\dfrac{(1+i)^5}{1-i}$;

в) $(1 + i\sqrt{3})(1 + i)\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^9}{(\sqrt{3}-i)^6}$; д) $(2 + i\sqrt{12})(1 - i)\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$;

е) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}(2 + \sqrt{3})^{12}$; ж) $\left(1 - \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$;

з) $\left(1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$.

4.9. Найти все значения корней:

а) $z = \sqrt{-1}$; б) $z = \sqrt[3]{i}$.

Решение.

а) $z = \sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\dfrac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{2}$;

$k = 0$: $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$;

$k = 1$: $z_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$;

б) $z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$;

$k = 0$: $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$k = 1$: $z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$k = 2$: $z_2 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$.

4.10. Найти все значения корней:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{-8}$; в) $\sqrt[3]{2+2i}$; г) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt[4]{-4}$; е) $\sqrt[6]{1}$.

4.11. Доказать, что:

а) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, если разность аргументов этих чисел равна $2\pi k$, k — целое число;

б) $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$, если разность аргументов этих чисел равна $\pi + 2\pi k$, k — целое число;

в) расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$.

4.12. Построить на плоскости множество всех точек z, для которых:

а) $|z| = 2$; б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; в) $|z| \le 3$; г) $|z - z_0| < 5$.

4.13. Решить уравнения:

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + 4 = 0$; в) $x^2 - 2x + 10 = 0$;
г) $x^2 - 6x + 18 = 0$; д) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$;
е) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

4.2. Определители матриц второго и третьего порядка

Определителем матрицы второго порядка называется число

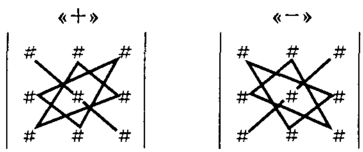
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (4.1)$$

Правая часть формулы (4.1) представляет собой алгебраическую сумму шести слагаемых, каждое из которых является произведением трех элементов, расположенных в разных строках и разных столбцах матрицы. Соединив линией элементы каждого произведения, получим две легко запоминающиеся схемы, которые позволяют определить знаки слагаемых и элементы, входящие в них сомножителями:



4.14. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Р е ш е н и е. Используя приведенные выше схемы, получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 1 = 0.$$

Вычислить определители матриц:

4.15. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$. **4.16.** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$. **4.17.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.

4.18. $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}$. **4.19.** $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$. **4.20.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$.

4.21. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **4.22.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$. **4.23.** $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4.24. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. **4.25.** $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$. **4.26.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{vmatrix}$.

4.3. Разложение определителя матрицы по элементам строки и столбца

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается в результате вычеркивания в определителе n-го порядка строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Каждый определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n; \quad (4.2)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \text{ где } j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

Равенства (4.2) и (4.3) называются соответственно разложениями определителя матрицы по элементам i-й строки и j-го столбца. Формулы (4.2) и (4.3) можно использовать для вычисления определителей матриц.

4.27. Найти минор элемента a_{32} в определителе четвертого порядка.

Решение.

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & a_{24}\\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} & \cancel{a_{34}}\\ a_{41} & \cancel{a_{42}} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}.$$

4.28. Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}=$$

$$=(-1)^{1+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot 9-1\cdot(-3)=-24.$$

4.29. Разлагая по третьему столбцу, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8\\ -4 & -1 & y & -5\\ 8 & -1 & z & 12\\ 4 & -1 & t & 7\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1\\ -1 & -2 & b & -1\\ -2 & 0 & c & 1\\ 0 & 1 & d & 0\end{vmatrix}$.

4.30. Вычислить определитель матрицы путем разложения его по элементам второй строки:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1\\ a & b & c & d\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -3 & -2 & -4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2\\ x & y & z & t\\ 2 & 3 & 3 & 2\\ -2 & -2 & 0 & -1\end{vmatrix}$.

4.31. Вычислить определители матриц, разлагая их по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{2\,n-1} & b_{2n} \\ 0 & \dots & b_{3\,n-2} & b_{3\,n-1} & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{n\,n-2} & b_{n\,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}$.

4.4. Свойства определителей n-го порядка

Вычисление определителя матрицы с помощью формул разложения по строке или столбцу — достаточно трудоемкое дело. Используя свойства определителя матрицы, можно значительно упростить его вычисление.

Свойства определителя матрицы:

1. При замене каждой строки определителя столбцом с тем же самым номером значение определителя не изменяется, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \bar{a}_{1k}+\bar{\bar{a}}_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \bar{a}_{2k}+\bar{\bar{a}}_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \bar{a}_{nk}+\bar{\bar{a}}_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \bar{a}_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \bar{a}_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \bar{a}_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \bar{\bar{a}}_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \bar{\bar{a}}_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \bar{\bar{a}}_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т.е. если каждый элемент k-го столбца определителя представлен в виде суммы двух слагаемых $a_{ik} = \bar{a}_{ik} + \bar{\bar{a}}_{ik}$, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы, кроме k-го, те же самые, что и в исходном определителе, k-й столбец в первом слагаемом состоит из элементов $\bar{a}_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а во втором слагаемом — из элементов $\bar{\bar{a}}_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогичное утверждение справедливо и для строк.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

5. Определитель не изменяется, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{in}+ka_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4.32. Доказать следующие свойства определителей:

а) определитель, у которого какая-либо строка (столбец) состоит из нулей, равен нулю;

б) определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю;

в) при перестановке двух строк (столбцов) определитель умножается на -1.

4.33. Используя только свойства определителей, показать, что следующие определители равны нулю:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2x+3y+4 \\ 5 & 6 & 7 & 5x+6y+7 \\ 8 & 9 & 10 & 8x+9y+10 \\ 11 & 12 & 13 & 11x+12y+13 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix}$.

в) определитель, у которого сумма столбцов с четными номерами равна сумме столбцов с нечетными номерами.

4.34. Как изменится определитель n-го порядка, если его подвергнуть одному из следующих преобразований:

а) у каждого элемента изменить знак на противоположный;

б) первый столбец переставить на последнее место;

в) строки определителя записать в обратном порядке;

г) к каждой строке, кроме последней, прибавить последующую строку.

4.5. Вычисление определителей

Если в определителе порядка n имеется столбец (строка), все элементы которого равны нулю, кроме одного, то, разложив определитель по этому столбцу (строке), сведем вычисление определителя n-го порядка к вычислению единственного определителя порядка $(n-1)$.

Если же в определителе n-го порядка нет столбца (строки), все элементы которого равны нулю, кроме одного, то, используя свойство 5 определителей (см. с. 47), можно, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранном столбце (строке) все элементы, кроме одного, обратились в нуль.

4.35. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е. а) К третьей строке прибавим первую:

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Прибавляя к первой строке удвоенную третью, ко второй — третью, умноженную на -2, а к четвертой строке — третью, умноженную на -2, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & -17 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ -78 & 36 & 0 \\ 44 & -19 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -78 & 36 \\ 44 & -19 \end{vmatrix} = -3 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 6 \\ 44 & -19 \end{vmatrix} = -18 \cdot (247 - 264) = 306;$$

б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Вычислить следующие определители:

4.36. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **4.37.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. **4.38.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4.39. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. **4.40.** $\begin{vmatrix} 13 & 14 & 15 & 13 \\ 18 & 18 & 23 & 22 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 25 & 29 & 30 & 26 \end{vmatrix}$. **4.41.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

4.42. $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 13 & -17 \\ 10 & 15 & 22 & 3 \\ 5 & 9 & 13 & 6 \\ 9 & 15 & 21 & 17 \end{vmatrix}$. **4.43.** $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$.

4.44. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. **4.45.** $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

4.46. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

5. МАТРИЦЫ

5.1. Действия с матрицами

Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы снабжается двумя индексами: первый указывает номер строки, а второй — номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Две матрицы называются *равными*, если числа их строк и столбцов равны и если равны элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц.

Если число столбцов матрицы n равно числу ее строк, то матрицу называют *квадратной матрицей порядка n*. Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют ее *главную диагональ*.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица называется *единичной*, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Сложение матриц и умножение матрицы на число. Чтобы *умножить матрицу на число*, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Суммой матриц **A** и **B** одинаковых размеров называется матрица, элементы которой равны суммам элементов матриц **A** и **B**, расположенных на соответствующих местах:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу **A** можно *умножить на матрицу* **B** только в том случае, когда число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**. В результате умножения получится матрица **C**, у которой столько же строк, сколько их в матрице **A**, и столько же столбцов, сколько их в матрице **B**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

а элементы c_{ij} матрицы **C** вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

т.е. для получения элемента c_{ij}, расположенного в i-строке и j-м столбце матрицы **C**, надо элементы i-й строки матрицы **A** умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы **B** и полученные произведения сложить.

5.1. Выполнить следующие действия:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

5.2. Найти элемент c_{32} матрицы $\mathbf{AB} = (c_{ij})$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элемент c_{32} равен сумме произведений элементов третьей строки матрицы **A** на соответствующие элементы второго столбца матрицы **B**, т.е.

$$c_{32} = (-1)\cdot 2 + (-5)\cdot(-1) + 3\cdot(-3) + 11\cdot 5 = 49.$$

5.3. Вычислить произведение матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как сомножители имеют размеры 3×4 и 4×3, то их произведение определено и имеет размеры 3×3. Следовательно,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1-5\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 3-5\cdot 0 & 2\cdot 1-3\cdot 1+4\cdot 2-5\cdot 1 \\ 1\cdot 3+2\cdot 4-3\cdot 1+4\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1-3\cdot 3+4\cdot 0 & 1\cdot 1-2\cdot 1-3\cdot 2+4\cdot 1 \\ -1\cdot 3-2\cdot 4+3\cdot 1+1\cdot 2 & -1\cdot 2-2\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 0 & -1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 19 & 2 \\ 16 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

5.4. Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7&2&1&5\\3&-2&4&-3\\2&1&1&2\end{pmatrix};\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&4&3&0\\2&3&-2&1\\1&0&2&4\end{pmatrix}.$$

Решить уравнение $5\mathbf{A}+2\mathbf{X}-\mathbf{B}=\mathbf{0}$.

Найти произведение матриц:

5.5. $\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}$.

5.6. $\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$.

5.7. $\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&6\\-3&2\end{pmatrix}$.

5.8. $\begin{pmatrix}5&4\\2&5\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\3&4\end{pmatrix}$.

5.9. $\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

5.10. $(1\ \ 2\ \ -3)\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&-1&3\\2&6&0\end{pmatrix}$.

5.11. $(1\ \ -1\ \ 3)\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$.

5.12. $\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&-1&3\\1&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

5.13. $\begin{pmatrix}5&2&4\\1&1&-3\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&4&4\\-3&-5&-4\\1&3&4\end{pmatrix}$.

5.14. $\begin{pmatrix}a&-a&a\\1&1&1\\-a&a&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a&1&a\\a&1&-a\\-a&1&a\end{pmatrix}$.

5.15. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{10}$; в) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^3$.

5.16. Дана матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$. Найти все матрицы $\mathbf{B}$, перестановочные с матрицей $\mathbf{A}$, т.е. такие, для которых $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

5.17. Доказать, что если для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ оба произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ определены, причем $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — квадратные и имеют одинаковый порядок.

5.18. Как изменится произведение **AB** матриц **A** и **B**, если:

а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы **A**;

б) к i-й строке матрицы **A** прибавить j-ю строку, умноженную на число k;

в) переставить i-й и j-й столбцы матрицы **B**;

г) к i-му столбцу матрицы **B** прибавить j-й столбец, умноженный на число k?

5.19. Показать, что если **A** и **B** — квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, то:

а) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$;

б) $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 \neq (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.

5.20. Доказать, что диагональные матрицы перестановочны.

5.21. Доказать, что если **A** — диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица, перестановочная с **A**, тоже диагональна.

5.2. Обратная матрица

Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется *обратной* для квадратной матрицы **A**, если

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Квадратная матрица **A** имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Квадратная матрица **A**, определитель которой не равен нулю, имеет единственную обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ — определитель матрицы **A**;

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы **A**.

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы называются следующие преобразования:

а) умножение i-й строки (столбца) матрицы на число $k \neq 0$;

б) прибавление к i-й строке (столбцу) j-й строки (столбца), умноженной на число k;

в) перестановка i-й и j-й строк (столбцов) матрицы.

Алгоритм построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк матрицы:

1. К данной матрице **A** приписать справа единичную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

2. С помощью элементарных преобразований объединенной матрицы привести матрицу **A** к единичной матрице

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

3. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица позволяет найти решения следующих матричных уравнений:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{XB} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{AXB} = \mathbf{C}.$$

Решением этих уравнений являются соответственно матрицы

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{CB}^{-1}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1},$$

если **A** и **B** имеют обратные матрицы.

5.22. Найти матрицу, обратную к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель Δ матрицы **A** равен 2, т.е. $\Delta = 2$. Алгебраические дополнения ее элементов: $A_{11} = 2$; $A_{12} = -4$; $A_{21} = -3$; $A_{22} = 7$. Следовательно,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{3}/_{2} \\ -2 & {}^{7}/_{2} \end{pmatrix}.$$

5.23. С помощью элементарных преобразований строк найти матрицу, обратную к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Припишем к матрице А справа единичную матрицу и будем выполнять элементарные преобразования строк объединенной матрицы до тех пор, пока матрица А не превратится в единичную:

$$
-3\ \ -2\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to -1\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to
$$

$$
\to -2\ \ 3\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to 1\ \ -2\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \to
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right).
$$

Таким образом,

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Найти обратную матрицу для следующих матриц:

5.24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **5.25.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. **5.26.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. **5.27.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.28. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **5.29.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **5.30.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

5.31. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. **5.32.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **5.33.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.34. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **5.35.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. **5.36.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

5.37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$. **5.38.** $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения:

5.39. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **5.40.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5.41. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.42. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -15 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -10 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5.43. $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **5.44.** $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5.45. $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 10 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **5.46.** $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5.47. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5.48. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5.49. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.50. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.51. Матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — невырожденная матрица, то:

а) из $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ следует $\mathbf{A} = \mathbf{E}$;

б) из $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$ следует $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$.

5.52. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — квадратная матрица и $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{0}$, то матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную. Найти обратную для $\mathbf{A}$ матрицу.

5.53. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — невырожденные матрицы одного и того же порядка. Показать, что четыре равенства

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}, \quad \mathbf{AB}^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{BA}^{-1}, \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

равносильны между собой.

5.54. Как изменится обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, если в матрице $\mathbf{A}$:

а) переставить i-ю и j-ю строки (столбцы);

б) i-ю строку (столбец) умножить на число $k \neq 0$;

в) к i-й строке (столбцу) прибавить j-ю строку (столбец), умноженный на число k?

5.55. Найти все матрицы второго порядка, для которых $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

5.3. Ранг матрицы

Выберем в матрице $\mathbf{A}$ размера $m \times n$ произвольные k строк и k столбцов, $k \leqslant \min(m, n)$. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы $\mathbf{A}$. Элементы матрицы являются минорами первого порядка.

Если в матрице $\mathbf{A}$ имеется минор k-го порядка, не равный нулю, а все ее миноры $(k + 1)$-го порядка, окаймляющие этот минор (т.е. содержащие минор k-го порядка целиком внутри себя), равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров:

1. Найти ненулевой элемент матрицы (если такого нет, то ранг матрицы равен нулю).

2. Вычислить миноры второго порядка, которые окаймляют выбранный элемент.

3. Если среди вычисленных миноров второго порядка имеется отличный от нуля, рассмотреть все миноры третьего порядка, окаймляющие какой-нибудь минор второго порядка, не равный нулю. Продолжать так до тех пор, пока все миноры, окаймляющие ненулевой минор l-го порядка, не будут равны нулю. В этом случае ранг матрицы равен l.

Матрица размера $m \times n$ называется *трапецеидальной*, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} отличны от нуля.

Каждую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно превратить в трапецеидальную.

Так как элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы и ранг трапецеидальной матрицы равен числу ненулевых строк, то для отыскания ранга матрицы надо:

1) элементарными преобразованиями превратить матрицу в трапецеидальную;

2) подсчитать число ненулевых строк в трапецеидальной матрице.

5.56. Вычислить методом окаймления миноров ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как матрица содержит ненулевые элементы, то ее ранг не меньше 1. Минор второго порядка $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}$ отличен от нуля и, значит, ранг матрицы не меньше 2. Вычислим окаймляющие d миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} \; -2 \; = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} \; -2 \;\; -1 \; = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 16 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 15 & 1 \\ 2 & 17 & -9 \end{vmatrix} \; -2 \;\; -1 \; = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -13 \\ 0 & 16 & -16 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все миноры, окаймляющие минор d, равны нулю. Следовательно, ранг данной матрицы равен 2.

5.57. Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Превратим данную матрицу в трапецеидальную с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; -1 \;\; -4 \;\; -1 \; \to \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; -2 \;\; -1 \; \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы равен 3.

Найти ранг матрицы:

5.58. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 14 & 28 & -42 & 70 \end{pmatrix}$.

5.59. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & -2 & -1 & 15 \\ 2 & -1 & 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5.60. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.61. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5.62. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & -10 & -4 & 1 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

5.63. $\begin{pmatrix} 10 & 24 & 20 & -44 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & 12 & 17 \\ 5 & 10 & -10 & 10 & 25 \end{pmatrix}$.

5.64. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 \end{pmatrix}$$

в зависимости от чисел $a_1, \ldots, a_7$.

5.65. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

в зависимости от числа a.

5.66. Доказать, что если к матрице приписать одну строку (или один столбец), то ее ранг либо не изменится, либо изменится на единицу.

5.67. Доказать, что если ранг матрицы **A** не изменяется от приписывания к ней каждого столбца матрицы **B** с тем же числом строк, то он не меняется от приписывания к матрице **A** всех столбцов матрицы **B**.

5.68. Доказать, что если ранг матрицы **A** не изменяется от приписывания к ней всех столбцов матрицы **B** с тем же числом строк, то ранг **A** больше или равен рангу **B**.

6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты при неизвестных;

b_i — свободные члены ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы*.

Расширенной называется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которая получается приписыванием к матрице системы столбца свободных членов.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен рангу ее расширенной матрицы (теорема Кронекера—Капелли). Совместная система уравнений имеет либо одно, либо бесконечно много решений. В первом случае она называется *определенной*, а во втором — *неопределенной*.

Система уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*. Если система уравнений содержит уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b, \qquad b \neq 0,$$

называемое *противоречивым*, то она несовместна.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если они имеют одни и те же решения. Если в системе вычеркнуть одно или несколько уравнений

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0,$$

называемых *тривиальными*, то получим систему уравнений, равносильную исходной.

Следующие преобразования системы линейных уравнений, называемые *элементарными*, не изменяют множества решений системы:

1) умножение какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число;

2) прибавление к обеим частям i-го уравнения соответствующих частей j-го уравнения, умноженных на число k.

6.1. Формулы Крамера

Система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы не равен 0, имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ — определитель матрицы системы;

Δ_k — определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

6.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Вычислим определитель матрицы системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно найти с помощью формул Крамера.

Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Решить системы уравнений:

6.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -19, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -12. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

6.2. Общее решение системы линейных уравнений

Неизвестное x_k называется *разрешенным*, если какое-нибудь уравнение системы содержит x_k с коэффициентом единица, а во всех остальных уравнениях системы неизвестное x_k не содержится, т.е. содержится с коэффициентом нуль.

Система уравнений называется *разрешенной*, если каждое ее уравнение содержит разрешенное неизвестное. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - \ x_4 \qquad = 2, \\ \qquad 3x_2 + x_3 + 5x_4 \qquad = 1, \\ \qquad -x_2 \qquad + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

является разрешенной, так как неизвестные x_1, x_3 и x_5 — разрешенные.

Если из каждого уравнения разрешенной системы уравнений выбрать по одному разрешенному неизвестному, то получим *набор разрешенных неизвестных*. Все неизвестные, не входящие в набор разрешенных неизвестных, называются *свободными*. В приведенной выше разрешенной системе x_2 и x_4 — свободные неизвестные.

Общим решением совместной системы уравнений называется равносильная ей разрешенная система, в которой разрешенные неизвестные выражены через свободные. Если в общем решении свободным неизвестным придать какие-нибудь числовые значения, то получим решение данной системы, называемое *частным*. Придавая свободным неизвестным всевозможные числовые значения, можно получить все решения данной системы линейных уравнений.

Общее решение системы уравнений можно получить с помощью формул Крамера или методом Гаусса.

Построение общего решения с помощью формул Крамера:

1. Выяснить совместность данной системы уравнений, т.е. выяснить, совпадают ли ранги матрицы и расширенной матрицы системы уравнений.

2. Найти один из миноров матрицы **A** системы уравнений, порядок которого равен рангу **A**.

3. Выписать все уравнения данной системы, которые содержат строки минора M. В этих уравнениях оставить в левых частях только те неизвестные, коэффициенты при которых являются столбцами минора M, а остальные неизвестные перенести в правую часть.

4. Решить систему уравнений, полученную в пункте 3, по формулам Крамера.

Метод Гаусса состоит из ряда шагов. При выполнении о ч е р е д н о г о шага используют следующий алгоритм.

Построение общего решения методом Гаусса:

1. Проверить, имеется ли в системе противоречивое уравнение. Если такое уравнение в системе есть, то она несовместна и не имеет общего решения.

2. Вычеркнуть все тривиальные уравнения в системе, если они есть.

3. Выяснить, является ли система уравнений разрешенной. Если она разрешенная, то построить общее решение, выражая разрешенные неизвестные через свободные.

4. Найти уравнение в системе, не содержащее разрешенного неизвестного. С помощью элементарных преобразований получить в этом уравнении неизвестное с коэффициентом единица, а затем исключить это неизвестное из остальных уравнений системы.

5. Выполнить следующий шаг, т.е. перейти к выполнению пункта 1. Через конечное число шагов процесс остановится и будет установлена несовместность системы или получено общее решение системы линейных уравнений.

6.10. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1. Выпишем расширенную матрицу, найдем ее ранг и одновременно ранг матрицы системы уравнений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&3&5&5&5 \\ 2&5&8&9&9 \\ 1&2&3&4&4 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&3&5&5&5 \\ 0&1&2&1&1 \\ 0&1&2&1&1 \end{array}\right) -1 \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&3&5&5&5 \\ 0&1&2&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

Итак, ранги матрицы и расширенной матрицы совпадают и равны 2. Следовательно, система совместна.

2. Выберем минор $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 первого и третьего уравнений. Этот минор отличен от нуля и его порядок равен рангу матрицы системы.

3. Выпишем первое и третье уравнения данной системы, которые содержат строки минора M:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

В этих уравнениях оставим в левой части неизвестные x_1 и x_2, коэффициенты при которых являются столбцами минора M, а остальные неизвестные перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 - 5x_3 - 5x_4, \\ x_1 + 2x_2 = 4 - 3x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

4. Решим полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 - 5x_3 - 5x_4 & 3 \\ 4 - 3x_3 - 4x_4 & 2 \end{vmatrix} = -2 - x_3 + 2x_4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 - 5x_3 - 5x_4 \\ 1 & 4 - 3x_3 - 4x_4 \end{vmatrix} = -1 + 2x_3 + x_4.$$

Теперь имеем

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \end{cases} \text{ — общее решение данной системы.}$$

Неизвестные x_3 и x_4 — свободные неизвестные. Если положить $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, то из общего решения находим $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Следовательно, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ — частное решение исходной системы уравнений.

6.11. Найти общее решение и одно частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем систему уравнений в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
1	2	1	4	1	−4	−3 −5
3	2	1	1	−3	1	
0	1	2	2	6	−1	
5	6	3	9	−1	−7	

и найдем общее решение системы методом Гаусса.

Шаг 1. Данная система уравнений не содержит противоречивых и тривиальных уравнений. Первое уравнение не содержит разрешенного неизвестного.

Неизвестное x_1 входит в это уравнение с коэффициентом единица. Исключив x_1 из других уравнений с помощью элементарных преобразований, получим систему уравнений

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	2	1	4	1	–4
0	–4	–2	–11	–6	13
0	1	2	2	6	–1
0	–4	–2	–11	–6	13

4 –2 4

Шаг 2. Полученная после первого шага система не содержит противоречивых и тривиальных уравнений. Ни одно из уравнений, кроме первого, не содержит разрешенных неизвестных, но третье уравнение содержит неизвестное x_2 с коэффициентом единица. Исключим неизвестное x_2 из остальных уравнений с помощью элементарных преобразований:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	–3	0	–11	–2
0	0	6	–3	18	9
0	1	2	2	6	–1
0	0	6	–3	18	9

Шаг 3. Система уравнений, полученная после второго шага, не содержит противоречивых и тривиальных уравнений. Она не является разрешенной, так как второе уравнение не содержит разрешенного неизвестного. Разделим это уравнение на –3:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	–3	0	–11	–2
0	0	–2	1	–6	–3
0	1	2	2	6	–1
0	0	6	–3	18	9

–2 3

Теперь с помощью элементарных преобразований исключим неизвестное x_4 из третьего и четвертого уравнений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	–3	0	–11	–2
0	0	–2	1	–6	–3
0	1	6	0	18	5
0	0	0	0	0	0

Итак, получена разрешенная система

$$\begin{cases} x_1 \quad - 3x_3 \qquad - 11x_5 = -2, \\ \qquad - 2x_3 + x_4 - \ \ 6x_5 = -3, \\ \quad x_2 + 6x_3 \qquad + 18x_5 = 5, \end{cases}$$

у которой x_1, x_2, x_4 — разрешенные неизвестные, а x_3, x_5 — свободные неизвестные. Общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 3x_3 + 11x_5, \\ x_4 = -3 + 2x_3 + 6x_5, \\ x_2 = 5 - 6x_3 - 18x_5. \end{cases}$$

Если положить $x_3 = x_5 = 0$, то $x_1 = -2$, $x_4 = -3$, $x_2 = 5$, т.е. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = -3$, $x_5 = 0$ — частное решение исходной системы.

Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение следующих систем уравнений:

6.12. $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

6.13. $2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2.$

6.14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 13x_2 - 18x_4 = -1. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5, \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 - 12x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 21x_5 = 0. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 15x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 5. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 = 3. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = -10. \end{cases}$

6.31. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 7x_5 = 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 - 6x_3 - x_4 - 4x_5 = 4. \end{cases}$

6.32. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

6.33. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 12x_5 = 0. \end{cases}$

Найти решение системы уравнений в зависимости от параметра a:

6.34. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$

6.35. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1. \end{cases}$

6.36. $\begin{cases} (1 + a)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + a)x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + (1 + a)x_3 = a^2. \end{cases}$

7. СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ И УРАВНЕНИЙ

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

в векторной форме имеет вид

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B,$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ..., $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбцы коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, ..., x_n и столбец свободных членов.

Последовательность чисел k_1, k_2, ..., k_n является решением системы уравнений тогда и только тогда, когда справедливо векторное равенство

$$A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n = B.$$

7.1. Разложение вектора по системе векторов

Вектор $k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n$ называется *линейной комбинацией* векторов A_1, A_2, ..., A_n с коэффициентами k_1, k_2, ..., k_n.

Вектор B *линейно выражается* через векторы A_1, A_2, ..., A_n, если

$$B = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n.$$

В этом случае говорят также, что B *разлагается по векторам* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Каждый n-мерный вектор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *разлагается по диагональной системе*

$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$E_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

с коэффициентами, которые равны координатам вектора B:

$$B = b_1E_1 + b_2E_2 + \ldots + b_nE_n.$$

Разложения вектора B по системе $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$B = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n,$$
$$B = l_1A_1 + l_2A_2 + \ldots + l_nA_n$$

называются *различными*, если $k_i = l_i$, хотя бы при одном значении i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Чтобы найти разложение вектора B по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, достаточно найти какое-нибудь решение системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B.$$

7.1. Выяснить, разлагается ли вектор B по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$B = (2, 7, 17, 0)$, $A_1 = (2, 4, 3, 0)$, $A_2 = (-3, 0, 1, 3)$, $A_3 = (1, -1, 10, -3)$.

Решение. Найдем общее решение системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B$$

методом Гаусса:

x_1	x_2	x_3	b
2	−3	1	2
4	0	−1	7
3	1	10	17
0	3	−3	0

→

x_1	x_2	x_3	b
2	−3	1	2
6	−3	0	9
−17	31	0	−3
6	6	0	6

→

x_1	x_2	x_3	b
−4	0	1	−7
−2	1	0	−3
45	0	0	90
−6	0	0	−12

→

x_1	x_2	x_3	b
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	2
0	0	0	0

Исходная система равносильна системе $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$, которая имеет единственное решение 2, 1, 1. Следовательно, $B = 2A_1 + A_2 + A_3$.

Выяснить, разлагается ли вектор B по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

7.2. $B = (2, 2, 3, 3)$, $A_1 = (1, 2, 3, 1)$, $A_2 = (2, 1, 2, 3)$, $A_3 = (3, 2, 4, 4)$.

7.3. $B = (4, 1, 3, 1)$, $A_1 = (2, 0, 1, 1)$, $A_2 = (1, 1, 2, -2)$, $A_3 = (2, 1, 3, -3)$.

7.4. $B = (-1, 1, 3, 1)$, $A_1 = (1, 2, 1, 1)$, $A_2 = (1, 1, 1, 2)$, $A_3 = (-3, -2, 1, -3)$.

7.5. $B = (1, 0, 0, 1)$, $A_1 = (2, 1, 1, 3)$, $A_2 = (3, 0, -1, 2)$, $A_3 = (1, -1, 0, 1)$, $A_4 = (1, 0, -2, -1)$.

Найти все значения a, при которых вектор B разлагается по системе $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

7.6. $B = (2, a, 3)$, $A_1 = (1, 2, 1)$, $A_2 = (3, 4, 5)$, $A_3 = (4, 5, 7)$.

7.7. $B = (15, 6, a)$, $A_1 = (5, 2, 1)$, $A_2 = (10, 4, 2)$.

7.8. $B = (3, 5, a)$, $A_1 = (2, 4, 3)$, $A_2 = (1, 6, 5)$, $A_3 = (1, 5, 4)$.

7.9. Доказать, что каждый n-мерный вектор разлагается по системе векторов, содержащей в качестве части диагональную систему векторов.

7.10. Доказать, что вектор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1})$ разлагается по системе векторов

$A_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$,

$A_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0)$,

....

$A_k = (0, 0, \ldots, 1, 0)$

тогда и только тогда, когда $b_{k+1} = 0$.

7.11. Разложить каждый вектор системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ по ее векторам.

7.12. Дано, что вектор B разлагается по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Верно ли, что он разлагается по каждой части этой системы?

7.13. Доказать, что если векторы B_1 и B_2 разлагаются по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то векторы $B_1 + B_2$, kB_1, $l_1B_1 + l_2B_2$ также разлагаются по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

7.14. Показать, что ни один из векторов диагональной системы не разлагается по остальным ее векторам.

7.15. Вектор B разлагается по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Доказать, что каждый вектор системы $B + A_1, B + A_2, \ldots, B + A_m$ разлагается по системе $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

7.16. Дано, что $B = 2A_1 - 5A_2 + 3A_3$ и ни один из векторов A_1, A_2, A_3 не разлагается по остальным векторам этой системы. Доказать, что вектор B не разлагается ни по каким двум векторам системы A_1, A_2, A_3.

7.17. Вектор B разлагается по системе A_1, A_2, A_3, но не разлагается ни по каким двум векторам этой системы. Доказать, что ни один вектор системы A_1, A_2, A_3 не разлагается по остальным ее векторам.

7.18. Вектор B не разлагается по системе векторов A_1, A_2, ..., A_m, и ни один из векторов системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ не разлагается по остальным векторам этой системы. Доказать, что вектор B не разлагается по системе $A_1 + B$, $A_2 + B$, ..., $A_m + B$.

7.2. Линейная зависимость

Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *линейно зависимой*, если можно подобрать такие числа k_1, k_2, ..., k_n, не все равные нулю, что

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n = \theta, \quad \text{где } \theta = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *линейно независимой*, если из каждого соотношения вида $k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n = \theta$ следует

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда система уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta$ имеет ненулевое решение. Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда система уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta$ имеет только нулевое решение.

Вектор B разлагается по линейно независимой системе A_1, A_2, ..., A_n тогда и только тогда, когда A_1, A_2, ..., A_n, B — линейно зависимая система векторов.

Система векторов линейно зависима, если количество координат у векторов системы меньше, чем векторов в системе.

Если каждый вектор системы B_1, B_2, ..., B_n разлагается по векторам A_1, A_2, ..., A_m и $n > m$, то B_1, B_2, ..., B_n — линейно зависимая система векторов.

7.19. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

$A_1 = (3, 5, 1, 4)$, $A_2 = (-2, 1, -5, -7)$, $A_3 = (-1, -2, 0, -1)$.

Решение. Преобразуем систему линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \theta$ методом Гаусса. Столбец свободных членов системы состоит только из нулей и не изменяется в процессе преобразований, поэтому его можно не записывать. Итак,

x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
3	−2	−1		−3	2	1		0	−13	1
5	1	−2	$\to$	−1	5	0	$\to$	1	−5	0
1	−5	0		1	−5	0		0	0	0
4	−7	−1		1	−5	0		0	0	0

Общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_3 = 13x_2, \\ x_1 = 5x_2. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение (5, 1, 13). Следовательно, векторы A_1, A_2, A_3 линейно зависимы.

7.20. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

$A_1 = (-20, -15, -4)$, $A_2 = (-7, -2, -4)$, $A_3 = (3, -1, -2)$.

Решение. Преобразуем систему уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \theta$ методом Гаусса:

x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
−20	−7	3	$\to$	−26	−13	0	$\to$	2	1	0	$\to$	0	1	0
−15	−2	−1		−13	0	0		−13	0	0		1	0	0
−4	−4	−2		2	2	1		−2	0	1		0	0	1

Общее решение исходной системы имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Эта система, а следовательно, и исходная система уравнений имеет только нулевое решение. Таким образом, векторы A_1, A_2, A_3 линейно независимы.

Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

7.21. $A_1 = (-4, 2, 8)$, $A_2 = (14, -7, -28)$.

7.22. $A_1 = (2, -1, 3, 5)$, $A_2 = (6, -3, 3, 15)$.

7.23. $A_1 = (-7, 5, 19)$, $A_2 = (-5, 7, -7)$, $A_3 = (-8, 7, 14)$.

7.24. $A_1 = (1, 2, -2)$, $A_2 = (0, -1, 4)$, $A_3 = (2, -3, 3)$.

7.25. $A_1 = (1, 8, -1)$, $A_2 = (-2, 3, 3)$, $A_3 = (4, -11, 9)$.

7.26. $A_1 = (1, 2, 3)$, $A_2 = (2, -1, 1)$, $A_3 = (1, 3, 4)$.

7.27. $A_1 = (0, 1, 1, 0)$, $A_2 = (1, 1, 3, 1)$, $A_3 = (1, 3, 5, 1)$, $A_4 = (0, 1, 1, -2)$.

7.28. $A_1 = (-1, 7, 1, -2)$, $A_2 = (2, 3, 2, 1)$, $A_3 = (4, 4, 4, -3)$, $A_4 = (1, 6, -1, 1)$.

7.29. Установить, что система векторов будет линейно зависимой, если она содержит:

а) два равных вектора;

б) два пропорциональных вектора.

7.30. Ненулевой вектор B разлагается по системе A_1, A_2, A_3 и по системе A_4, A_5, A_6. Доказать, что $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — линейно зависимая система векторов.

7.31. Вектор B разлагается по системе $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Доказать, что вектор B можно двумя различными способами разложить по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тогда и только тогда, когда векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно зависимы.

7.32. Доказать, что векторы $A_2 - A_1$, $A_3 - A_1$ не пропорциональны, если A_1, A_2, A_3 — линейно независимые векторы.

7.33. Векторы A_1 и A_2 не разлагаются по остальным векторам системы A_1, A_2, A_3, а вектор A_3 ненулевой. Доказать линейную независимость системы A_1, A_2, A_3.

7.34. Известно, что вектор B единственным образом разлагается по системе A_1, A_2, A_3, A_4. Доказать, что система $A_1 + A_2$, $A_2 + A_3$, $A_3 + A_4$, A_4 линейно независима.

7.35. Три вектора A_1, A_2, A_3 линейно зависимы и вектор A_3 не разлагается по векторам A_1, A_2. Доказать, что A_1 и A_2 — пропорциональные векторы.

7.36. Каждый вектор системы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ разлагается по векторам линейно зависимой системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Доказать, что система $B_1, B_2, \ldots, B_n$ линейно зависима.

7.37. Доказать, что система векторов A_1, A_2, A_3, A_4 линейно независима, если каждый вектор этой системы не разлагается по предшествующим векторам и $A_1 \neq \theta$.

7.38. Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независима и вектор B не разлагается по этой системе. Доказать, что система векторов $A_1 + B,\ \ A_2 + B,\ \ \ldots,\ \ A_n + B$ линейно независима.

7.39. Вектор B единственным образом разлагается по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, но B не разлагается по ее части $A_1, A_2, \ldots, A_k,\ \ k < n$. Доказать, что $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$ — линейно независимые векторы.

7.40. Известно, что A, B, C — линейно независимые векторы. Выяснить, линейно зависимы или линейно независимы следующие системы векторов:

а) $A,\ A + B,\ A + C$; б) $A + B,\ C - B,\ A + C$;

в) $A + B,\ A - B,\ A + C,\ A - C$; г) $A + B,\ B + C,\ A + B + C$.

7.41. Дана система n-мерных векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Вычеркивая у каждого вектора этой системы одни и те же k координат, получим систему $(n - k)$-мерных векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Доказать, что:

а) если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — линейно зависимая система векторов, то и система $B_1, B_2, \ldots, B_n$ линейно зависима;

б) если $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — линейно независимая система векторов, то и система $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независима.

7.42. Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *ступенчатой*, если из условия: первая отличная от нуля координата вектора A_k имеет номер l, — следует, что у всех векторов A_i, $i > k$, первые l координат равны нулю, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Доказать, что ступенчатая система векторов линейно независима.

7.3. Базис и ранг системы векторов

Часть системы векторов называется *базисом* этой системы, если:

1) часть является линейно независимой системой векторов;

2) каждый вектор системы разлагается по векторам части.

Диагональная система векторов является базисом каждой системы, которая содержит ее в качестве части.

Если система уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta$$

является разрешенной, то векторы-коэффициенты при неизвестных, составляющих набор разрешенных неизвестных, образуют диагональную часть системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Векторы системы разлагаются по базису этой системы единственным образом.

Каждую линейно независимую часть системы векторов можно дополнить до базиса этой системы.

Все базисы данной системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом ее базисе. Если ранг системы векторов равен r, то каждая линейно независимая часть этой системы, состоящая из r векторов, является ее базисом. Системы векторов называются *эквивалентными*, если векторы одной системы разлагаются по векторам другой системы и наоборот. Ранги эквивалентных систем равны.

Вектор B тогда и только тогда разлагается по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, когда ранги систем $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $A_1, A_2, \ldots, A_m, B$ равны.

Построение базиса системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и разложений векторов по базису:

1. Рассмотреть систему уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta$ и найти равносильную ей разрешенную систему уравнений

$$A_1' x_1 + A_2' x_2 + \ldots + A_n' x_n = \theta.$$

2. Найти диагональную часть системы векторов $A_1', A_2', \ldots, A_n'$.

3. Отметить векторы системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, соответствующие диагональной части системы $A_1', A_2', \ldots, A_n'$; они образуют базис системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

4. Разложить вектор A_j' по диагональной части системы $A_1', A_2', \ldots, A_n'$; вектор A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, разлагается по базису, найденному в пункте 3, с коэффициентами, которые совпадают с коэффициентами разложения A_j' по диагональной части системы $A_1', A_2', \ldots, A_n'$.

7.43. Найти базис системы векторов и векторы, не входящие в базис, разложить по базису:

$A_1 = (5, 2, -3, 1)$, $A_2 = (4, 1, -2, 3)$, $A_3 = (1, 1, -1, -2)$, $A_4 = (3, 4, -1, 2)$, $A_5 = (13, 8, -7, 4)$.

Решение. Рассмотрим систему линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = \theta$ и методом Гаусса найдем разрешенную систему уравнений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	4	1	3	13
2	1	1	4	8
–3	–2	–1	–1	–7
1	3	–2	2	4

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	4	1	3	13
–3	–3	0	1	–5
2	2	0	2	6
11	11	0	8	30

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	–1	1	–2	–2
0	0	0	4	4
1	1	0	1	3
0	0	0	–3	–3

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	–1	1	0	0
0	0	0	1	1
1	1	0	0	2
0	0	0	0	0

Разрешенная система уравнений, равносильная исходной, имеет вид

$$A_1' x_1 + A_2' x_2 + A_3' x_3 + A_4' x_4 + A_5' x_5 = \theta,$$

где

$$A_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_1', A_3', A_4' образуют диагональную систему. Следовательно, векторы A_1, A_3, A_4 — базис системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Разложим теперь векторы A_2 и A_5 по базису A_1, A_3, A_4. Для этого сначала разложим соответствующие векторы A_2' и A_5' по диагональной системе A_1', A_3', A_4', имея в виду, что коэффициентами разложения вектора по диагональной системе являются его координаты:

$$A_2' = A_1' - A_3' + 0A_4',$$
$$A_5' = 2A_1' + 0A_3' + A_4'.$$

Векторы A_2 и A_5 разлагаются по базису A_1, A_3, A_4 с теми же коэффициентами, что и векторы A_2' и A_5' по диагональной системе A_1', A_3', A_4':

$$A_2 = A_1 - A_3 + 0A_4,$$
$$A_5 = 2A_1 + 0A_3 + A_4.$$

Найти базис системы векторов и векторы, не входящие в базис, разложить по базису:

7.44. $A_1 = (1, 2, 1)$, $A_2 = (2, 1, 3)$, $A_3 = (1, 5, 0)$, $A_4 = (2, -2, 4)$.

7.45. $A_1 = (1, 1, 2)$, $A_2 = (0, 1, 2)$, $A_3 = (2, 1, -4)$, $A_4 = (1, 1, 0)$.

7.46. $A_1 = (1, -2, 3)$, $A_2 = (0, 1, -1)$, $A_3 = (1, 3, 0)$, $A_4 = (0, -7, 3)$, $A_5 = (1, 1, 1)$.

7.47. Найти базис системы векторов

$A_1 = (1, 1, 4, 2)$, $A_2 = (1, -1, -2, 4)$, $A_3 = (0, 2, 6, -2)$, $A_4 = (-3, 3, 3, -12)$, $A_5 = (-1, 0, -4, -3)$,

содержащий вектор A_5, и все векторы, не входящие в этот базис, разложить по базису.

7.48. Найти базис системы векторов

$A_1 = (1, 3, 0, 5)$, $A_2 = (1, 2, 0, 4)$, $A_3 = (1, 1, 1, 3)$, $A_4 = (1, 0, -1, 2)$, $A_5 = (1, -3, 3, -1)$,

содержащий векторы A_2 и A_3, и векторы, не входящие в этот базис, разложить по базису.

7.49. Найти два базиса системы векторов

$A_1 = (1, 1, 0, 0)$, $A_2\ (1, 0, 1, 0)$, $A_3 = (1, 0, 0, 1)$, $A_4 = (0, 1, 1, 0)$, $A_5 = (0, 1, 0, 1)$, $A_6 = (0, 0, 1, 1)$,

единственными общими векторами которых служат A_2 и A_4.

Найти все базисы системы векторов:

7.50. $A_1 = (1, 1, 2)$, $A_2 = (3, 1, 2)$, $A_3 = (1, 2, 1)$, $A_4 = (2, 1, 2)$.

7.51. $A_1 = (1, 1, 1)$, $A_2 = (-3, -5, 5)$, $A_3 = (3, 4, -1)$, $A_4 = (1, -1, 4)$.

7.52. $A_1 = (1, 1, 0, -1)$, $A_2 = (1, 2, 1, 0)$, $A_3 = (1, 3, 2, 1)$, $A_4 = (1, 4, 3, 2)$.

7.53. $A_1 = (1, 0, 1, 0)$, $A_2 = (-2, 1, 3, -7)$, $A_3 = (3, -1, 0, 3)$, $A_4 = (-4, 1, -3, 1)$.

7.54. Доказать, что линейно зависимая система ненулевых векторов содержит два различных базиса.

7.55. Доказать, что система векторов, имеющая только один базис, линейно независима.

7.56. Вектор A_1 разлагается по остальным векторам системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которая не содержит нулевых векторов. Доказать, что система $A_1, A_2, \ldots, A_m$ обладает базисом, который не содержит вектора A_1.

7.57. Вектор A_1 не разлагается по остальным векторам системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которая не содержит нулевых векторов. Доказать, что каждый базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ содержит вектор A_1.

7.58. Каждый вектор системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ разлагается по своей части $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Доказать, что каждый базис системы векторов $B_1, B_2, \ldots, B_k$ является базисом системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

7.59. Найти какой-нибудь базис системы ненулевых векторов A_1, A_2, A_3, A_4, если каждый вектор этой системы разлагается по предыдущим векторам.

7.60. Доказать, что если в системе $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_1 \neq 0$, вычеркнуть все векторы, которые разлагаются по предыдущим векторам, то получится базис системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

7.61. Каждая линейная комбинация векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$, отличная от нулевого вектора, не разлагается по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Доказать, что объединение базисов систем векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_m$ будет базисом объединенной системы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$.

7.62. Найти все различные базисы системы ненулевых векторов A_1, A_2, A_3, A_4, если каждый вектор этой системы разлагается по предыдущим векторам.

7.63. В системе векторов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ранга 3 векторы A_1 и A_3, а также A_2 и A_4 пропорциональны. Найти все базисы этой системы.

7.64. В системе A_1, A_2, A_3, A_4 ранга 3 вектор $A_4 = 2A_1 - A_3$. Найти все базисы этой системы векторов.

7.65. Система ненулевых векторов $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$, содержащая два пропорциональных вектора, имеет ранг k. Сколько различных базисов содержит эта система?

7.66. Система векторов $A_1 - A_2, A_2 - A_3, A_3 - A_4, A_4 + A_1$ линейно независима и вектор B не разлагается по этой системе. Найти ранг системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4, B.

7.67. Доказать, что ранг системы $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$, ..., $A_n + B_n$ не превосходит ранга системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

7.68. Ранг системы векторов A_1, A_2, ..., A_n равен r. Найти ранг системы векторов $A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_n - A_{n-1}$.

7.69. Пусть ранг системы векторов A_1, A_2, ..., A_m равен k. Доказать, что каждая часть системы векторов A_1, A_2, ..., A_m, содержащая более k векторов, линейно зависима.

7.70. Ранг некоторой части системы векторов равен рангу всей системы векторов. Доказать, что каждый базис этой части является базисом всей системы векторов.

7.71. Доказать, что ранг системы векторов A_1, A_2, ..., A_k, $A_{k+1}, \ldots, A_m$ не превосходит суммы рангов ее частей $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $A_{k+1}, \ldots, A_m$.

7.72. Пусть ранг системы векторов A_1, A_2, ..., A_m равен r и вектор B не разлагается по системе A_1, A_2, ..., A_m. Доказать, что ранг системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, B равен $r + 1$.

7.73. Каждый вектор системы A_1, A_2, ..., A_m ранга r разлагается по векторам системы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ранга $r + 1$. Доказать, что в системе B_1, B_2, ..., B_n найдется такой вектор, который не разлагается по системе A_1, A_2, ..., A_m.

7.74. Векторы B_1, B_2, ..., B_r образуют базис системы A_1, A_2, ..., A_m и A_j — ненулевой вектор, не входящий в этот базис. Доказать, что в системе $B_1, B_2, \ldots, B_r$ найдется такой вектор B_l,

$1 \leqslant l \leqslant r$, что B_1, B_2, ..., B_{l-1}, A_j, B_{l+1}, ..., B_r — новый базис системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Сколько таких векторов B_l в базисе B_1, B_2, ..., B_r?

7.75. Доказать, что если система ненулевых векторов ранга r имеет ровно два базиса, то она содержит $r + 1$ вектор, из которых два пропорциональны.

7.76. Доказать, что если система содержит m векторов и имеет ранг r, то ранг любой ее части из s векторов не меньше $r + s - m$.

7.4. Векторы и матрицы

Произведением $m \times n$-матрицы **A** *на n-мерный вектор $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$* называется m-мерный вектор $\mathbf{A}K$, равный линейной комбинации столбцов A_1, A_2, ..., A_n матрицы **A** с коэффициентами k_1, k_2, ..., k_n, т.е.

$$\mathbf{A}K = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}(3, -4, 1) = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы **A** на вектор K производится точно так же, как умножение матрицы **A** на матрицу, состоящую из одного столбца с элементами k_1, k_2, ..., k_n.

Произведением m-мерного вектора $L = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ на $m \times n$-матрицу **A** называется n-мерный вектор $L\mathbf{A}$, равный линейной комбинации строк A^1, A^2, ..., A^m матрицы с коэффициентами l_1, l_2, ..., l_m, т.е.

$$L\mathbf{A} = l_1A^1 + l_2A^2 + \ldots + l_mA^m.$$

Например,

$$(1, -1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1(2, 1, 5) - 1(3, 1, 4) = (-1, 0, 1).$$

Умножение вектора L на матрицу **A** производится точно так же, как умножение матрицы, состоящей из одной строки с элементами l_1, l_2, ..., l_m, на матрицу **A**.

Справедливы следующие равенства (k, l — числа):

1) $\mathbf{A}(K + L) = \mathbf{A}K + \mathbf{A}L$; 2) $\mathbf{A}(lK) = l(\mathbf{A}K)$;

3) $(K + L)\mathbf{A} = K\mathbf{A} + L\mathbf{A}$; 4) $(kL)\mathbf{A} = k(L\mathbf{A})$;

5) $(L\mathbf{A})K = L(\mathbf{A}K)$.

Столбцы $(\mathbf{AB})_i$ и строки $(\mathbf{AB})^j$ матрицы $\mathbf{AB}$ вычисляются по формулам

$$(\mathbf{AB})_i = \mathbf{A}B_i, \quad (\mathbf{AB})^j = A^j\mathbf{B},$$

где B_i — i-й столбец матрицы $\mathbf{B}$;

A^j — j-я строка матрицы $\mathbf{A}$.

Ранг матрицы равен рангу системы ее строк, а также рангу системы ее столбцов. Ранг $m\times n$-матрицы $\mathbf{A}$ равен рангу системы векторов $\mathbf{A}K_1$, $\mathbf{A}K_2$, ..., $\mathbf{A}K_n$, где $K_1, K_2, ..., K_n$ — линейно независимая система n-мерных векторов.

7.77. Даны матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

и векторы $K_1 = (2, -1, 3, 2)$, $K_2 = (3, -4, 1, 2)$, $L_1 = (3, -2, -5)$, $L_2 = (-2, 1, 3)$. Найти координаты векторов $\mathbf{A}K_1$, $\mathbf{A}K_2$, $L_1\mathbf{A}$, $L_2\mathbf{A}$.

7.78. Доказать, что если можно матрицу $\mathbf{A}$ умножить на вектор K и вектор K умножить на матрицу $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}$ — квадратная матрица.

7.79. Даны $m\times n$-матрица $\mathbf{A}$ и система n-мерных векторов $K_1, K_2, ..., K_m$. Доказать, что:

а) из линейной зависимости системы векторов $K_1, K_2, ..., K_m$ следует линейная зависимость системы векторов $\mathbf{A}K_1$, $\mathbf{A}K_2$, ..., $\mathbf{A}K_m$;

б) из линейной независимости системы векторов $\mathbf{A}K_1$, $\mathbf{A}K_2$, ..., $\mathbf{A}K_m$ вытекает линейная независимость векторов $K_1, K_2, ..., K_m$.

7.80. Подобрать такие матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и вектор K, чтобы $\mathbf{A}(K\mathbf{B}) \neq (\mathbf{A}K)\mathbf{B}$.

7.81. Даны $m\times n$-матрица $\mathbf{A}$, столбцы которой линейно независимы, и n-мерный вектор K. Доказать, что:

а) если $\mathbf{A}K = \theta$, то и $K = \theta$;

б) если $K \neq \theta$, то и $\mathbf{A}K \neq \theta$.

7.82. Дана $m{\times}n$-матрица **A**. Доказать, что:

а) $m \geqslant n$, если ранг матрицы **A** равен n;

б) $n \geqslant m$, если ранг **A** равен m.

7.83. Ранг $m{\times}n$-матрицы **A** равен m и $n > m$. Построить два таких вектора K и L, что $K \neq L$, а $\mathbf{A}K = \mathbf{A}L$.

7.84. Даны квадратная матрица **A** порядка n и линейно независимая система векторов $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Доказать, что **A** — невырожденная матрица, если векторы $\mathbf{A}K_1, \mathbf{A}K_2, \ldots, \mathbf{A}K_n$ линейно независимы.

7.85. Дано, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Доказать, что:

а) ранг матрицы **A** меньше n, если **B** — ненулевая $n{\times}k$-матрица;

б) ранг матрицы **B** меньше n, если **A** — ненулевая $m{\times}n$-матрица.

7.86. Столбцы матрицы **B** линейно зависимы. Доказать, что столбцы матрицы **C** линейно зависимы, если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

7.87. Строки матрицы **C** линейно независимы. Доказать, что строки матрицы **A** линейно независимы, если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

7.88. Даны $m{\times}n$-матрица **A**, $n{\times}l$-матрица **B**, причем $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Доказать, что:

а) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, если ранг **B** равен n;

б) $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, если ранг **A** равен n;

в) сумма рангов матриц **A** и **B** не превосходит n.

7.89. Пусть **A** — $m{\times}n$-матрица, $K_1, K_2, \ldots, K_p$ — линейно независимая система n-мерных векторов и $\mathbf{A}K_1 = \theta$, $\mathbf{A}K_2 = \theta$, ..., $\mathbf{A}K_p = \theta$. Доказать, что ранг матрицы **A** не превосходит разности $n - p$.

7.90. Даны $m{\times}n$-матрица **A** и линейно независимая система n-мерных векторов $K_1, K_2, \ldots, K_l$. Доказать, что ранг **A** меньше n, если векторы $\mathbf{A}K_1, \mathbf{A}K_2, \ldots, \mathbf{A}K_l$ линейно зависимы.

7.5. Ортогональные системы векторов

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Система векторов называется *ортогональной*, если векторы этой системы попарно ортогональны. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Процессом ортогонализации системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ называется построение системы векторов $B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}$ по следующим формулам:

$$B_1 = A_1,$$

$$B_2 = A_2 - \frac{B_1A_2}{B_1B_1}B_1,$$

$$B_3 = A_3 - \frac{B_1A_3}{B_1B_1}B_1 - \frac{B_2A_3}{B_2B_2}B_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{m+1} = A_{m+1} - \frac{B_1A_{m+1}}{B_1B_1}B_1 - \frac{B_2A_{m+1}}{B_2B_2}B_2 - \ldots - \frac{B_mA_{m+1}}{B_mB_m}B_m.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. Система векторов $B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}$ является ортогональной.

2. Если векторы $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ линейно независимы, то $B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}$ — ортогональная система ненулевых векторов.

Система векторов называется *ортонормированной*, если она ортогональна и векторы системы имеют длину, равную единице.

7.91. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональную систему векторов:

$$A_1 = (2, 0, 1, 1), \quad A_2 = (1, 2, 0, 1), \quad A_3 = (0, 1, -2, 0).$$

Решение. Полагаем $B_1 = A_1$. Затем строим векторы B_2 и B_3:

$$B_2 = A_2 - \frac{B_1A_2}{B_1B_1}B_1 = A_2 - \frac{1}{2}B_1 = (1, 2, 0, 1) - (1, 0, {}^1/_2, {}^1/_2) = (0, 2, -{}^1/_2, {}^1/_2);$$

$$B_3 = A_3 - \frac{B_1A_3}{B_1B_1}B_1 - \frac{B_2A_3}{B_2B_2}B_2 = A_3 + \frac{1}{3}B_1 - \frac{2}{3}B_2 =$$

$$= (0, 1, -2, 0) + ({}^2/_3, 0, {}^1/_3, {}^1/_3) - (0, {}^4/_3, -{}^1/_3, {}^1/_3) = ({}^2/_3, -{}^1/_3, -{}^4/_3, 0).$$

Таким образом, векторы $B_1 = (2, 0, 1, 1)$, $B_2 = (0, 2, -{}^1/_2, {}^1/_2)$, $B_3 = ({}^2/_3, -{}^1/_3, -{}^4/_3, 0)$ являются результатом ортогонализации данной системы векторов.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональную систему векторов:

7.92. $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(-3, 3, 1)$.

7.93. $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(3, 1, 1)$.

7.94. $(1, -2, 1)$, $(0, 1, -4)$, $(2, -3, -2)$, $(7, 4, 1)$.

7.95. (1, 2, 1, 3), (12, 3, 3, 3), (7, –1, 40, 0).

7.96. (–1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 3).

7.97. (–1, 0, 3, 2), (1, 2, 3, 3), (–3, –2, 3, 1).

7.98. Доказать ортогональность системы векторов k_1A_1, k_2A_2, ..., k_nA_n, если A_1, A_2, ..., A_n — ортогональная система векторов, а k_1, k_2, ..., k_n — произвольные числа.

7.99. Преобразовать систему векторов (1, –1, 1, 1), (–1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, –1) в ортонормированную.

7.100. Вектор B разлагается по ортогональной системе A_1, A_2, ..., A_m ненулевых векторов: $B = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m$. Доказать, что $k_i = BA_i/A_iA_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

7.101. Дана ортогональная система векторов $A_1 = (1, 1, 1, 1)$, $A_2 = (1, -1, -1, 1)$, $A_3 = (1, -1, 1, -1)$. Выяснить, разлагается ли вектор B по системе A_1, A_2, A_3:

а) $B = (2, 0, 4, -2)$; б) $B = (1, 2, -1, 2)$.

7.102. Система n-мерных векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независима, и n-мерный вектор B ортогонален каждому вектору этой системы. Доказать, что B — нулевой вектор.

7.103. Доказать, что если вектор B разлагается по системе векторов A_1, A_2, ..., A_n и ортогонален каждому вектору этой системы, то B — нулевой вектор.

7.104. Дана система ненулевых векторов A_1, A_2, ..., A_m, и из каждого равенства $B = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m$ следует, что $k_i = BA_i/A_iA_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Доказать ортогональность системы A_1, A_2, ..., A_m.

7.105. Доказать, что ортогональная система n-мерных векторов A_1, A_2, ..., A_k будет содержать нулевой вектор, если $k > n$.

7.106. Известно, что нулевой вектор — единственный k-мерный вектор, который ортогонален каждому вектору системы k-мерных векторов A_1, A_2, ..., A_k. Доказать линейную независимость этой системы.

7.107. Даны две линейно независимые системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $B_1, B_2, \ldots, B_l$, причем $A_iB_j = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$. Доказать, что система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $B_1, B_2, \ldots, B_l$ линейно независима.

7.108. Система векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$ получена в результате ортогонализации системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Доказать, что:

а) системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_m$ эквивалентны;

б) если система $B_1, B_2, \ldots, B_m$ содержит нулевой вектор, то векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно зависимы;

в) если система $B_1, B_2, \ldots, B_m$ не содержит нулевых векторов, то $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — линейно независимая система векторов.

7.6. Системы линейных уравнений

Система линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$$

совместна тогда и только тогда, когда ранги систем векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ совпадают.

Совместная система линейных уравнений имеет единственное решение, если ранг системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равен числу неизвестных в системе. Если же ранг этой системы векторов меньше числа неизвестных, то совместная система уравнений имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены системы равны нулю.

Каждая однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и, значит, совместна. Всякая однородная система линейных уравнений, у которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет ненулевое решение.

Любое решение $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ..., $x_n = k_n$ системы уравнений с n неизвестными можно рассматривать как n-мерный вектор с координатами $k_1, k_2, \ldots, k_n$, а поэтому имеют смысл такие понятия, как линейная комбинация, линейная зависимость решений. Произвольная линейная комбинация решений однородной системы уравнений является решением этой системы.

Линейно независимые решения F_1, F_2, ..., F_k однородной системы уравнений называются *фундаментальной системой решений*, если каждое решение системы является линейной комбинацией решений $F_1, F_2, ..., F_k$.

Если ранг r системы векторов A_1, A_2, ..., A_n меньше числа неизвестных n в однородной системе уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \theta,$$

то эта система уравнений имеет фундаментальную систему решений. Линейно независимая система решений F_1, F_2, ..., F_k однородной системы уравнений будет ее фундаментальной системой решений тогда и только тогда, когда $k = n - r$.

Если в системе уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B \qquad (7.1)$$

заменить все свободные члены нулями, то получим однородную систему

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \theta, \qquad (7.2)$$

которую называют *приведенной* для системы уравнений (7.1).

Произвольное решение X совместной системы уравнений (7.1) определяется формулой

$$X = F_0 + t_1F_1 + t_2F_2 + ... + t_mF_m, \qquad (7.3)$$

где F_0 — какое-нибудь решение системы уравнений (7.1);
$F_1, F_2, ..., F_m$ — фундаментальная система решений системы уравнений (7.2);
$t_1, t_2, ..., t_m$ — произвольные действительные числа.

Формула (7.3) называется *общим решением в векторной форме* системы уравнений (7.1).

Построение фундаментальной системы решений:

1. Найти общее решение однородной системы уравнений.

2. Взять систему $n - r$ линейно независимых $(n - r)$-мерных векторов. Например, $E_1 = (1, 0, ..., 0)$, $E_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $E_{n-r} = (0, 0, ..., 1)$.

3. Подставить в общее решение вместо свободных неизвестных координаты вектора E_1, а затем найти значения разрешенных неизвестных. Полученная совокупность значений неизвестных является решением F_1.

Аналогично с помощью векторов E_2, ..., E_{n-r} найти решения F_2, ..., F_{n-r}.

Полученные решения $F_1, F_2, ..., F_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений.

7.109. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} -13x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Выбирая для свободных неизвестных x_2, x_3, x_5 значения, равные координатам векторов $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$, находим фундаментальную систему решений: $F_1 = (5, 1, 0, 13, 0)$, $F_2 = (0, 0, 1, 2, 0)$, $F_3 = (-1, 0, 0, 1, 1)$.

7.110. Найти общее решение в векторной форме системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - {}^5/_2x_2 + {}^7/_2x_4 = 6, \\ {}^3/_2x_2 + x_3 - {}^3/_2x_4 = -2. \end{cases}$$

Вектор $(6, 0, -2, 0)$ является решением этой системы.

Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - {}^5/_2x_2 + {}^7/_2x_4 = 0, \\ {}^3/_2x_2 + x_3 - {}^3/_2x_4 = 0 \end{cases}$$

является общим решением приведенной системы. Выбирая для свободных неизвестных x_2 и x_4 значения, равные координатам векторов $E_1 = (1, 0)$, $E_2 = (0, 1)$, находим фундаментальную систему решений приведенной системы уравнений: $F_1 = ({}^5/_2, 1, -{}^3/_2, 0)$, $F_2 = (-{}^7/_2, 0, {}^3/_2, 1)$. Следовательно, общее решение в векторной форме данной системы уравнений имеет вид

$$X = (6, 0, -2, 0) + t_1({}^5/_2, 1, -{}^3/_2, 0) + t_2(-{}^7/_2, 0, {}^3/_2, 1),$$

где t_1, t_2 — произвольные действительные числа.

Найти фундаментальную систему решений для систем уравнений:

7.111. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

7.112. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

7.113. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

7.114. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

7.115. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

7.116. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

7.117. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

7.118. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

7.119. $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Найти общее решение в векторной форме для следующих систем уравнений:

7.120. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 11x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 3. \end{cases}$

7.121. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

7.122. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 1. \end{cases}$

7.123. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 7. \end{cases}$

7.124. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

7.125. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

7.126. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7.127. Образует ли система векторов $(1,\ 2,\ -2,\ -1)$, $(3, 1, -1,\ -3)$ фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

7.128. Если система векторов (3, 1, 1, 5), (1, 2, 3, 4) образует фундаментальную систему решений системы уравнений, то:

а) будет ли вектор (3, −4, −7, −2) решением этой системы уравнений?

б) образуют ли векторы (9, −2, −5, 8), (2, −1, −2, 1) фундаментальную систему решений этой системы?

7.129. Доказать, что система уравнений однородна, если два ее различных решения линейно зависимы.

7.130. Доказать, что любые два решения однородной системы пропорциональны тогда и только тогда, когда $n = r + 1$, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы системы уравнений.

7.131. Строки матрицы **Q** образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений. Доказать, что строки матрицы **PQ** образуют фундаментальную систему решений этой системы уравнений тогда и только тогда, когда **P** — квадратная невырожденная матрица.

7.132. Столбцы матрицы **Q** образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений. Доказать, что столбцы матрицы **QR** образуют фундаментальную систему решений этой системы уравнений тогда и только тогда, когда **R** — квадратная невырожденная матрица.

7.133. Столбцы (строки) матриц **A** и **B** образуют фундаментальные системы решений однородной системы уравнений. Доказать, что найдется такая квадратная невырожденная матрица **C**, что **A** = **BC** (**A** = **CB**).

7.134. Доказать, что неоднородная система уравнений будет совместной, если ее $m \times n$-матрица имеет ранг m.

7.135. Доказать, что система уравнений с квадратной матрицей будет совместной, если ее приведенная однородная система уравнений имеет единственное решение.

7.136. Доказать, что определитель расширенной матрицы совместной системы линейных уравнений равен нулю, если число неизвестных в системе на единицу меньше числа уравнений.

7.137. Доказать, что система уравнений, у которой число неизвестных на единицу меньше числа уравнений, будет совместной, если ранг ее матрицы равен числу неизвестных, а определитель расширенной матрицы равен нулю.

7.138. Доказать, что для любых решений K_1, K_2, K_3 совместной системы уравнений векторы $K_1 - K_2$ и $K_1 - K_3$ пропорциональны тогда и только тогда, когда $n = r + 1$, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы системы уравнений.

8. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Числовым полем P называется подмножество всех комплексных чисел, которое обладает следующими свойствами:

1) если $\alpha, \beta \in P$, то $\alpha + \beta \in P$ и $\alpha\beta \in P$;

2) если $\alpha \in P$, то $-\alpha \in P$;

3) если $\alpha \in P$ и $\alpha \neq 0$, то $1/\alpha \in P$.

Множества всех рациональных чисел, всех действительных чисел и всех комплексных чисел являются числовыми полями.

Множество V элементов $x, y, z, \ldots$ называется *векторным пространством* над числовым полем P, если для каждых двух элементов x, y из V определена сумма $x + y \in V$ и для каждого $x \in V$ и каждого числа α из P определено произведение $\alpha x \in V$, причем справедливы следующие равенства:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) существует такой элемент $0 \in V$, называемый *нулевым*, что $x + 0 = x$ для каждого x из V;

4) для каждого x из V существует такой элемент $-x$, называемый *противоположным* к x, что $x + (-x) = 0$;

5) $1 \cdot x = x$, 1 из P, для всех x из V;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для всех α, β из P и x из V;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для всех α, β из P и x из V;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для всех α из P и x, y из V.

Элементы векторного пространства называются *векторами*.

Векторное пространство V над полем P называется *действительным* или *комплексным*, если P — соответственно поле действительных или комплексных чисел.

Множество всех n-мерных векторов с действительными (комплексными) координатами обозначается через $\boldsymbol{R}^n$ $(\boldsymbol{C}^n)$.

Операции сложения n-мерных векторов и умножения n-мерного вектора на число:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

превращают эти множества в векторные пространства.

8.1. Выяснить, какие из нижеприведенных множеств являются числовыми полями:

а) множество всех целых чисел;

б) множество всех чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа;

в) множество всех чисел вида $m + n\sqrt{7}$, где m и n — целые числа;

г) комплексные числа вида $a + bi$ с рациональными a и b.

8.2. Выяснить, являются ли векторным пространством следующие множества с обычными операциями сложения элементов этих множеств и умножения элементов на числа:

а) все квадратные матрицы порядка n с действительными или комплексными элементами;

б) все многочлены, имеющие степень n;

в) множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(2) = 0$;

г) множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(2) = 1$;

д) все многочлены, степень которых меньше или равна n;

е) все непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции;

ж) все действительные числа;

з) все комплексные числа.

8.1. Подпространства

Подмножество L векторного пространства V называется *подпространством*, если выполняются следующие два условия:

1) для каждой пары векторов x и y из L их сумма $x + y$ принадлежит L;

2) для каждого вектора x из L и любого числа α вектор αx принадлежит L.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из пространства V образует его подпространство, которое называется *линейной оболочкой* системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

8.3. Выяснить, являются ли следующие множества векторов подпространством соответствующего векторного пространства:

а) все векторы пространства $\boldsymbol{R}^n$ с рациональными координатами;

б) все матрицы n-го порядка, у которых сумма элементов равна нулю;

в) все решения однородной системы уравнений;

г) все решения неоднородной системы уравнений;

д) все радиусы-векторы плоскости, концы которых лежат в первой четверти системы координат;

е) все радиусы-векторы плоскости, концы которых лежат на одной из осей координат;

ж) множество всех многочленов, рассматриваемое как подмножество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

8.4. Доказать, что сумма двух векторов не принадлежит подпространству, если один из них принадлежит этому подпространству, а другой не принадлежит.

8.5. Доказать, что множество решений системы однородных линейных уравнений является линейной оболочкой фундаментальной системы решений этой системы уравнений.

8.6. Выяснить, принадлежат ли векторы $y_1 = (-1, -5, 8, 4)$, $y_2 = (-3, -5, 3, 1)$ линейной оболочке системы векторов $x_1 = (3, 0, 5, 2)$, $x_2 = (3, 6, 4, 3)$, $x_3 = (-4, 1, 2, 3)$.

8.7. Доказать, что линейная оболочка первой системы векторов содержится в линейной оболочке второй системы векторов тогда и только тогда, когда каждый вектор первой системы разлагается по векторам второй системы.

8.2. Размерность и базис

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ пространства V называются *линейно зависимыми*, если можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = \theta,$$

и *линейно независимыми* — в противном случае.

Линейно независимая система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, по которой разлагается каждый вектор пространства V, называется *базисом* этого пространства. Векторное пространство называется *конечномерным*, если оно имеет базис, и *бесконечномерным* — в противном случае.

Все базисы конечномерного пространства V содержат одно и то же число векторов. Число векторов в базисе пространства называется его *размерностью* и обозначается $\dim V$.

Каждую линейно независимую систему векторов конечномерного пространства V можно дополнить до базиса V.

8.8. Найти базис и определить размерность пространства $\boldsymbol{R}^n$ всех n-мерных векторов.

Решение. Векторы диагональной системы $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ линейно независимы, и каждый n-мерный вектор разлагается по системе $e_1, e_2, ..., e_n$. Следовательно, $e_1, e_2, ..., e_n$ — базис $\boldsymbol{R}^n$ и $\dim \boldsymbol{R}^n = n$.

8.9. Найти базис и определить размерность пространства $P_n(t)$ всех многочленов, степень которых не превосходит n.

Решение. Многочлены $1, t, t^2, ..., t^n$ образуют линейно независимую систему, и каждый многочлен степени не выше n разлагается по этой системе очевидным образом. Следовательно, $1, t, t^2, ..., t^n$ — базис пространства $P_n(t)$ и $\dim P_n(t) = n + 1$.

8.10. Доказать, что пространство $P(t)$ всех многочленов бесконечномерно.

Решение. В пространстве $P(t)$ система многочленов $1, t, t^2, ..., t^n$ линейно независима при любом, сколь угодно большом n. Следовательно, пространство $P(t)$ не может иметь базиса.

8.11. Доказать, что векторное пространство совпадает с линейной оболочкой своего базиса.

8.12. Доказать, что базисом линейной оболочки системы векторов $x_1, x_2, ..., x_m$ является базис этой системы.

8.13. Доказать, что базисом пространства, заданного системой однородных уравнений, является ее фундаментальная система решений.

8.14. Выяснить, являются ли базисом соответствующего пространства $\boldsymbol{R}^n$ следующие системы векторов:

а) $(1, 1)$, $(-1, 1)$;

б) $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$;

в) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$.

8.15. Выяснить, является ли пространство $\boldsymbol{R}^4$ линейной оболочкой следующих систем векторов:

а) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$;

б) $(1, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$.

8.16. Найти базис подпространства, заданного системой однородных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

8.17. Найти базис линейной оболочки систем векторов:

а) $(1, -2, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, -4, 1)$;

б) $x_1 = (1, -1, 1, -1)$, $x_2 = (1, 1, -1, 1)$, $x_3 = (1, -3, 3, -3)$, $x_4 = (1, 1, 1, -1)$;

в) $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (3, 0, -1)$, $x_3 = (1, 2, 1)$, $x_4 = (1, 3, -1)$, $x_5 = (2, -1, -2)$;

г) $x_1 = (1, 4, 2, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1, 1)$, $x_3 = (1, 2, 2, -1)$, $x_4 = (0, -2, -1, 1)$, $x_5 = (1, -1, 1, -1)$.

8.18. Доказать, что следующие множества векторов образуют подпространства пространства $\boldsymbol{R}^n$, найти их базис и размерность:

а) все n-мерные векторы, у которых координаты равны между собой;

б) все n-мерные векторы вида $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$;

в) все n-мерные векторы, у которых координаты, кратные трем, равны нулю.

8.19. Найти размерность и базис пространства $\boldsymbol{C}^n$:

а) как действительного пространства;

б) как комплексного пространства.

8.20. Дополнить вектор $y = (1, 0, 1, 0)$ до базиса линейной оболочки системы векторов $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$, $x_3 = (0, 1, 0, 1)$.

8.21. Систему многочленов $t^3 + t^2$, $t^2 + t$, $t + 1$ дополнить до базиса пространства многочленов степени не выше третьей.

8.22. Доказать, что в n-мерном пространстве V для каждого k, $0 \leqslant k \leqslant n$, можно найти подпространство размерности k.

8.23. Дано, что L_1 и L_2 — подпространства пространства V, причем $L_1 \leqslant L_2$, и $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — векторы из L_1, причем $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — базис L_2. Доказать, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — базис L_1.

8.24. Даны подпространства L_1 и L_2 пространства V, причем $L_1 \leqslant L_2$ и $L_1 \neq L_2$. Построить такой базис подпространства L_2:

а) чтобы все векторы этого базиса, лежащие в L_1, образовывали базис L_1;

б) каждый вектор которого не лежит в L_1.

8.25. Пространство V имеет размерность m. Доказать, что ранг системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из V не больше m.

8.26. Доказать, что пространство V является линейной оболочкой системы векторов из V тогда и только тогда, когда размерность V равна рангу системы векторов.

8.27. Подпространство L_1 содержится в подпространстве L_2, и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы из L_1. Доказать, что $L_1 = L_2$, если размерность L_2 равна k.

8.28. Выяснить, совпадают ли подпространства L_1 и L_2 пространства $\boldsymbol{R}^4$, где L_1 задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

а L_2 — линейная оболочка системы векторов $x_1 = (1, -6, -3, 1)$, $x_2 = (1, 10, 3, -1)$.

8.3. Координаты вектора

Фиксируем в пространстве V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Каждый вектор x из V единственным образом разлагается по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами вектора x в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Координаты вектора x записывают в виде n-мерного вектора $x_e = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

8.29. Доказать, что каждая система матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ является базисом в пространстве матриц второго порядка, и найти в этом базисе координаты матрицы $\mathbf{X}$:

а) $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$;

б) $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&2\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}-2&3\\4&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-3&-6\\0&2\end{pmatrix}$;

в) $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}4&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1&3\\8&4\end{pmatrix}$;

г) $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&4\\2&2\end{pmatrix}$.

Решение. а) Рассмотрим произвольное равенство

$$\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\alpha_3\mathbf{A}_3+\alpha_4\mathbf{A}_4=\mathbf{0}$$

или

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2+\alpha_4\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2-\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Приравняв соответствующие элементы матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0,\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_4=0,\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,\\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_4=0,\end{cases}$$

которая имеет единственное решение $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Следовательно, матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ линейно независимы. Так как размерность пространства матриц второго порядка равна четырем, то система матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ является базисом этого пространства.

Теперь определим координаты матрицы $\mathbf{X}$ в этом базисе, для чего найдем коэффициенты разложения $\mathbf{X}$ по системе $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$:

$$\mathbf{X}=\beta_1\mathbf{A}_1+\beta_2\mathbf{A}_2+\beta_3\mathbf{A}_3+\beta_4\mathbf{A}_4$$

или

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+\beta_2-\beta_3 & \beta_1-\beta_2+\beta_4\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 & \beta_1-\beta_2-\beta_4\end{pmatrix}.$$

Следовательно, для определения координат матрицы **X** получим систему уравнений

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 1, \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_4 = 2, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3, \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_4 = 4, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $\beta_1 = {}^5/_2$, $\beta_2 = -{}^1/_2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = -1$. Итак, матрица **X** в базисе $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ имеет координаты ${}^5/_2$, $-{}^1/_2$, 1, -1.

8.30. Установить, что многочлены e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 образуют базис пространства многочленов степени не больше четырех, и найти координаты многочлена $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ в этом базисе:

а) $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$, $e_5 = t^4$;

б) $e_1 = 1$, $e_2 = 1 + t$, $e_3 = t + t^2$, $e_4 = t^2 + t^3$, $e_5 = t^3 + t^4$;

в) $e_1 = 1$, $e_2 = 1 + t$, $e_3 = 1 + t + t^2$, $e_4 = 1 + t + t^2 + t^3$, $e_5 = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$.

8.4. Пересечение и сумма подпространств

Пересечением $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2 пространства V называется множество всех векторов из V, принадлежащих и L_1, и L_2.

Суммой $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 пространства V называется множество всех векторов вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Сумма подпространств называется *прямой*, если их пересечение равно θ.

Пересечение и сумма подпространств являются подпространствами векторного пространства.

Если $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_l$ — базисы соответственно подпространств L_1 и L_2, то базисом суммы $L_1 + L_2$ является базис системы векторов $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$.

Построение базиса пересечения подпространств L_1 и L_2:

1. Найти базисы $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_l$ соответственно подпространств L_1 и L_2 и дополнить систему $x_1, \ldots, x_k$ до базиса системы векторов $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$. Пусть для определенности $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s$ — базис системы $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$.

2. Разложить векторы $y_{s+1}, \ldots, y_l$, не вошедшие в базис $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s$, по этому базису:

$$y_i = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{ik}x_k + \beta_{i1}y_1 + \ldots + \beta_{is}y_s, \quad i = s + 1, \ldots, l.$$

3. Выписать векторы $z_1, \ldots, z_{l-s}$:

$$z_{i-s} = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{ik}x_k, \quad i = s+1, \ldots, l,$$

которые и образуют базис пересечения $L_1 \cap L_2$.

8.31. Найти базис суммы и размерность пересечения подпространств L_1 и L_2:

а) L_1 — подпространство решений системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 - 4t_2 - 3t_3 = 0, \\ 2t_1 - 5t_2 - 3t_3 = 0, \\ t_1 - 2t_2 - t_3 = 0; \end{cases}$$

L_2 — линейная оболочка векторов $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (2, 3, -1)$;

б) L_1 и L_2 — линейные оболочки соответственно систем векторов $x_1 = (1, 1, 0, 2)$, $x_2 = (1, 0, 1, 1)$ и $y_1 = (1, -1, 0, 1)$, $y_2 = (1, 2, 1, 2)$, $y_3 = (1, 0, 1, 2)$;

в) L_1 и L_2 — подпространства решений соответственно систем уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

8.32. Найти базис пересечения линейных оболочек систем векторов $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_l$:

а) $x_1 = (1, -1, 3)$, $\quad x_2 = (1, 1, 2)$, $\quad x_3 = (1, -3, -8)$;
$y_1 = (0, 2, 1)$, $\quad y_2 = (-1, 5, 1)$, $\quad y_3 = (1, 3, 3)$;

б) $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\quad x_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\quad x_3 = (1, 0, 1, 0)$;
$y_1 = (2, -1, 1, 1)$, $\quad y_2 = (1, 1, -1, 2)$, $\quad y_3 = (1, -1, -1, -3)$.

8.33. Выяснить, является ли прямой сумма линейных оболочек систем векторов $x_1 = (0, -1, 2, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1, 1)$, $x_3 = (2, 1, 0, 3)$; $y_1 = (1, 1, 2, -1)$, $y_2 = (-1, 1, 4, 1)$, $y_3 = (-1, 0, 1, 1)$.

8.34. Доказать, что $L + L = L$ для каждого подпространства L.

8.35. Ни одно из подпространств L_1, L_2 не содержит другого подпространства. Доказать, что в $L_1 + L_2$ имеется вектор, не принадлежащий ни L_1, ни L_2.

8.36. Доказать, что следующие условия равносильны:

а) $L_1 \leqslant L_2$; б) $L_1 + L_2 = L_2$; в) $L_1 \cap L_2 = L_1$, где L_1 и L_2 — подпространства.

8.37. Векторное пространство является суммой подпространств L_1 и L_2. Подпространство L содержит L_1. Доказать, что $L = L_1 + L \cap L_2$.

8.38. Доказать, что пересечение линейных оболочек соответственно систем векторов $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_l$ равно нулю тогда и только тогда, когда ранг системы векторов $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_l$ равен сумме рангов систем $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_l$.

8.39. Размерность векторного пространства равна четырем. Доказать, что два его подпространства имеют общий вектор, если их размерности равны двум и трем.

8.40. Система векторов $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ линейно независима. Доказать, что сумма линейных оболочек соответственно систем $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_l$ является прямой.

8.41. Доказать, что для каждого подпространства L_1 пространства V найдется такое подпространство L_2, что V есть прямая сумма этих подпространств.

8.42. Доказать, что сумма подпространств L_1 и L_2 будет прямой тогда и только тогда, когда объединение базисов этих подпространств будет линейно независимой системой.

8.5. Евклидовы и унитарные подпространства

Евклидовым E (соответственно, *унитарным* U) пространством называется векторное пространство над полем действительных (соответственно, комплексных) чисел, в котором каждой паре векторов x, y поставлено в соответствие действительное (соответственно, комплексное) число, которое обозначается через xy и называется *скалярным произведением векторов* x и y, причем выполняются следующие условия:

1) $xy = yx$ (соответственно, $xy = \overline{xy}$);

2) $(x + y)z = xz + yz$;

3) $(\alpha x)y = \alpha(xy)$;

4) $xx > 0$, если $x \neq 0$.

Векторное пространство $\boldsymbol{R}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ определяется по формуле

$$xy = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

является евклидовым пространством.

Векторное пространство C^n будет унитарным, если

$$xy = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n.$$

Векторы x и y называются *ортогональными*, если $xy = 0$. Система векторов называется *ортогональной*, если каждая пара векторов этой системы ортогональна.

Процессом ортогонализации линейно независимой системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется построение системы векторов $y_1, y_2, \ldots, y_m$ по следующим формулам:

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_2 - \frac{y_1x_2}{y_1y_1}y_1,$$

$$y_3 = x_3 - \frac{y_1x_3}{y_1y_1}y_1 - \frac{y_2x_3}{y_2y_2}y_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m = x_m - \frac{y_1x_m}{y_1y_1}y_1 - \frac{y_2x_m}{y_2y_2}y_2 - \ldots - \frac{y_{m-1}x_m}{y_{m-1}y_{m-1}}y_{m-1}.$$

Система векторов $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ортогональна и не содержит нулевых векторов.

Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *ортогональным*, если $e_ie_j = 0$ при $i \neq j$. *Длиной* вектора x называется число $|x| = \sqrt{xx}$. Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Для векторов x и y евклидова пространства выполняется неравенство Коши—Буняковского: $|xy| \leqslant |x||y|$.

Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если векторы базиса нормированы.

Вектор x ортогонален к подпространству L, если он ортогонален к каждому вектору из L.

Множество всех векторов пространства, ортогональных к подпространству L, обозначается через $L^{\perp}$ и называется *ортогональным дополнением* подпространства L. Ортогональное дополнение является подпространством. Пространство есть прямая сумма подпространств L и $L^{\perp}$.

Для каждого подпространства L справедливо равенство: $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

8.43. Доказать, что вектор из подпространства L ортогонален к L тогда и только тогда, когда он нулевой.

8.44. Доказать, что вектор ортогонален к подпространству тогда и только тогда, когда он ортогонален к каждому вектору базиса этого подпространства.

8.45. Доказать, что в результате ортогонализации базиса подпространства L получится ортогональный базис L.

8.46. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки данной системы векторов:

а) (1, 1, 1), (2, 1, 0);

б) (1, –1, 1, –1), (3, 0, –1, 1), (1, 0, 1, 1).

8.47. Установить, что следующие системы векторов ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

а) (2, –1, 1, 0), (1, 1, –1, 1);

б) (–1, 0, 2, 1), (1, 1, 1, –1).

8.48. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированного базиса:

а) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right), \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

8.49. Выяснить, ортогонален ли вектор x линейной оболочке системы векторов (2, 1, 1, –1), (1, 0, 2, 1), (2, 1, 3, –1):

а) $x = (1, 1, 1, 4)$; б) $x = (1, -3, 0, 1)$.

8.50. Выяснить, ортогонален ли вектор x:

а) $x = (1, -4, -1, -2)$; б) $x = (3, 2, 1, -1)$

подпространству решений системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 - 3t_3 + 4t_4 = 0, \\ 2t_1 + t_2 - 5t_3 + 5t_4 = 0. \end{cases}$$

8.51. Пусть $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ — ортогональный базис пространства. Доказать, что ортогональным дополнением линейной оболочки системы векторов $x_1, \ldots, x_k$ является линейная оболочка системы $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

8.52. Доказать, что $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l$ — ортогональный базис пространства, если $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_l$ — ортогональные базисы соответственно подпространств L и $L^{\perp}$.

8.53. Доказать, что ортогональное дополнение линейной оболочки системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, …, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ совпадает с подпространством решений системы уравнений

$$\begin{cases} a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_mt_m = 0, \\ b_1t_1 + b_2t_2 + \ldots + b_mt_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1t_1 + c_2t_2 + \ldots + c_mt_m = 0. \end{cases}$$

8.54. Доказать, что ортогональное дополнение подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1n}t_n = 0, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2n}t_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \ldots + a_{mn}t_n = 0 \end{cases}$$

совпадает с линейной оболочкой системы векторов $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, …, $(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$.

8.55. Подпространство L задано системой уравнений

$$\begin{cases} t_1 + t_2 - 2t_3 + 2t_4 = 0, \\ 2t_1 - t_2 + t_3 - 5t_4 = 0. \end{cases}$$

Задать $L^{\perp}$:

а) линейной оболочкой системы векторов;

б) системой однородных уравнений.

8.56. Выяснить, принадлежит ли вектор x:

а) $x = (1, 1, -1, 1)$;   б) $x = (2, 3, 2, 3)$

ортогональному дополнению подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0, \\ t_1 - t_2 + t_3 - t_4 = 0. \end{cases}$$

8.57. Показать, что в пространстве всех многочленов степени не больше n с действительными коэффициентами от одного неизвестного t скалярное произведение многочленов $x(t)$ и $y(t)$ может быть задано формулой

$$xy = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

(Проверить выполнение всех свойств евклидова пространства.)

9. МАТРИЦЫ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

9.1. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы $\mathbf{A}$ порядка n, если можно подобрать такой ненулевой n-мерный вектор x, что $\mathbf{A}x = \lambda x$. Множество всех собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ совпадает с множеством всех решений уравнения $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$, которое называется *характеристическим уравнением* матрицы $\mathbf{A}$.

Ненулевой вектор x называется *собственным вектором* квадратной матрицы $\mathbf{A}$, принадлежащим ее собственному значению λ, если $\mathbf{A}x = \lambda x$. Множество всех собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, принадлежащих ее собственному значению λ, совпадает с множеством всех ненулевых решений системы однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})x = \theta$. Множество решений этой системы обозначим через $\mathbf{A}(\lambda)$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ и пусть в каждом из множеств $\mathbf{A}(\lambda_1)$, $\mathbf{A}(\lambda_2)$, ..., $\mathbf{A}(\lambda_m)$ выбраны линейно независимые системы векторов. Тогда объединение этих систем будет линейно независимой системой.

9.1. Найти собственные значения матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$. Так как

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2,$$

то

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

— характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$. Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$-(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Следовательно, матрица $\mathbf{A}$ имеет два собственных значения:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -1.$$

9.2. Найти собственные векторы матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В задаче 9.1 были найдены собственные значения матрицы **A**: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Теперь найдем множества **A**(2) и **A**(−1). Система линейных уравнений $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})x = \theta$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ее фундаментальная система решений состоит из одного вектора (1, 1, 1). Следовательно, вектор $\alpha(1, 1, 1)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, — произвольный собственный вектор из **A**(2).

Теперь найдем множество **A**(−1). Векторы (−1, 1, 0) и (−1, 0, 1) образуют фундаментальную систему решений системы уравнений $(\mathbf{A} + \mathbf{E})x = \theta$, и, значит, $\alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, — произвольный вектор из множества **A**(−1).

Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

9.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. **9.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.5.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **9.6.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **9.8.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **9.9.** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **9.10.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.11. $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. **9.12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.13.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.14.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.15. Доказать, что собственные значения диагональной матрицы равны ее диагональным элементам.

9.16. Найти собственные значения треугольной матрицы.

9.17. Доказать, что нуль является собственным значением матрицы **A** тогда и только тогда, когда **A** — вырожденная матрица.

9.18. Доказать, что собственные значения матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ обратны собственным значениям матрицы **A**.

9.19. Доказать, что в пересечении множеств $\mathbf{A}(\lambda_1)$ и $\mathbf{A}(\lambda_2)$ содержится только нулевой вектор, если собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы **A** различны.

9.20. Все собственные значения матрицы **A** равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Найти все собственные значения матриц:

а) $3\mathbf{A}$; б) $\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$.

9.21. Доказать, что матрица **A** порядка n имеет единственное собственное значение, если каждый n-мерный вектор является собственным вектором матрицы **A**.

9.22. Доказать, что все n-мерные векторы тогда и только тогда являются собственными векторами матрицы **A**, когда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

9.23. Доказать, что собственные значения матриц **A** и $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ совпадают. Найти связь между собственными векторами этих матриц.

9.2. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду

Матрица **A** приводится к диагональному виду, если можно подобрать такую невырожденную матрицу **T**, что $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ — диагональная матрица. Матрица **A** порядка n приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда в пространстве R^n имеется базис, состоящий из собственных векторов матрицы **A**. Столбцами матрицы **T** являются координаты векторов этого базиса.

В пространстве R^n имеется базис, состоящий из собственных векторов матрицы **A**, тогда и только тогда, когда объединение базисов

подпространств $\mathbf{A}(\lambda_1)$, $\mathbf{A}(\lambda_2)$, ..., $\mathbf{A}(\lambda_m)$ является базисом пространства R^n, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — все различные собственные значения матрицы **A**.

Правило построения матрицы T, приводящей матрицу A порядка n к диагональному виду:

1. Найти все собственные значения матрицы **A**.
2. Для каждого собственного значения λ_i найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})x = \theta$.
3. Построить матрицу **T**, столбцами которой являются координаты решений всех найденных фундаментальных систем.
4. Если полученная матрица **T** является квадратной, то она приводит матрицу **A** к диагональному виду. Если же матрица **T** не будет квадратной, то матрица **A** не может быть приведена к диагональному виду.

9.24. Найти матрицу **T**, которая приводит матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду. Найти матрицу $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)^2.$$

Собственные значения матрицы **A** равны 2 и 3.

Теперь надо найти фундаментальные системы решений систем уравнений $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})x = \theta$ и $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})x = \theta$. Фундаментальная система решений первой системы состоит из одного решения $(0, -1, 1)$, а второй — из одного решения $(1, -3, 2)$. Следовательно, матрица **T** имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица не является квадратной, поэтому матрица **A** не приводится к диагональному виду.

Найти матрицу $\mathbf{T}$, которая приводит данную матрицу $\mathbf{A}$ к диагональному виду, и матрицу $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$:

9.25. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. **9.26.** $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. **9.27.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9.28. $\begin{pmatrix} 9 & -8 & 0 \\ 10 & -9 & 0 \\ -12 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. **9.29.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **9.30.** $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -12 & -7 \end{pmatrix}$.

9.31. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **9.32.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9.3. Ортогональные и симметрические матрицы

Матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, столбцами которой являются строки матрицы $\mathbf{A}$, называется *транспонированной* к $\mathbf{A}$.

Свойства операции транспонирования матрицы:

1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$;

2) $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

3) $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

4) $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$,

где k — число, а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы.

Матрица $\mathbf{A}$ называется *симметрической*, если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Ортогональной называется матрица $\mathbf{A}$, для которой

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Следующие три условия равносильны:

1) матрица $\mathbf{A}$ ортогональна;

2) матрица $\mathbf{A}^{-1}$ ортогональна;

3) столбцы матрицы $\mathbf{A}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Ортогональная матрица может не иметь действительных собственных значений.

Симметрическая матрица всегда имеет действительное собственное значение, и все ее собственные значения — действительные числа.

Собственные векторы симметрической матрицы, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Для каждой симметрической матрицы **A** существует такая ортогональная матрица **Q**, что $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ — диагональная матрица. Построение этой ортогональной матрицы осуществляется следующим образом:

1) строят невырожденную матрицу **T**, которая приводит матрицу **A** к диагональному виду;

2) подвергают столбцы найденной матрицы **T** процессу ортогонализации, а затем нормируют полученные векторы;

3) строят ортогональную матрицу **Q**, столбцами которой являются координаты полученной в пункте 2 ортонормированной системы векторов.

9.33. Привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы симметрическую матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы **A** имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1+\lambda \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что матрица **A** имеет два собственных значения: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 5$.

Фундаментальная система решений системы уравнений $(\mathbf{A} + \mathbf{E})x = \theta$ состоит из двух векторов: $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, а системы уравнений $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})x = \theta$ — из одного вектора $(1, 1, 1)$.

Матрица **T**, приводящая матрицу **A** к диагональному виду, имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

После ортогонализации и нормирования столбцов этой матрицы получим ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная к $\mathbf{Q}$, совпадает с $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, т.е.

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы $\mathbf{Q}$ следующие симметрические матрицы:

9.34. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **9.35.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **9.36.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.37. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **9.38.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **9.39.** $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

9.40. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **9.41.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9.42. Доказать, что матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ порядка n будет симметрической тогда и только тогда, когда $a_{ij} = a_{ji}$ при любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

9.43. Доказать, что матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ будут симметрическими, если $\mathbf{A}$ — симметрическая матрица.

9.44. Доказать симметричность матриц $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\mathbf{ABA}$, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — симметрические матрицы одинакового порядка.

9.45. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *перестановочными*, если $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Доказать, что симметрические матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ перестановочны тогда и только тогда, когда $\mathbf{AB}$ — симметрическая матрица.

9.46. Доказать, что произведение ортогональных матриц будет ортогональной матрицей.

9.47. Доказать, что произведение ортогональной матрицы на число k будет ортогональной матрицей тогда и только тогда, когда $|k| = 1$.

9.48. Построить две ортогональные матрицы порядка n, сумма которых не является ортогональной матрицей.

9.49. Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

9.50. Доказать, что собственные значения ортогональной матрицы равны ± 1.

9.51. Найти необходимое и достаточное условие, чтобы симметрическая матрица $\mathbf{A}$ была ортогональной.

9.52. Доказать, что $\mathbf{A}$ — ортогональная матрица, если $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{B}$ — ортогональные матрицы.

9.53. Доказать, что если $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{A}$ — ортогональные матрицы, то и $\mathbf{B}$ — ортогональная матрица.

9.54. Доказать, что матрица $\mathbf{A}$ тогда и только тогда будет ортогональной, если ее строки образуют ортонормированную систему векторов.

9.55. Доказать, что матрица $\mathbf{A}$ порядка n будет ортогональной тогда и только тогда, когда $|\mathbf{A}x| = |x|$ для всех x из $\boldsymbol{R}^n$.

9.56. Дана матрица $\mathbf{A}$ порядка n. Доказать равносильность следующих условий:

а) $\mathbf{A}$ — ортогональная матрица;

б) если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — ортонормированный базис $\boldsymbol{R}^n$, то $\mathbf{A}x_1, \mathbf{A}x_2, \ldots, \mathbf{A}x_n$ — ортонормированный базис $\boldsymbol{R}^n$;

в) $\mathbf{A}x\mathbf{A}y = xy$ для любой пары n-мерных векторов x и y.

9.57. Даны два n-мерных вектора x и y одинаковой длины. Доказать, что существует ортогональная матрица $\mathbf{A}$ порядка n, для которой $\mathbf{A}x = y$.

9.4. Квадратичные формы

Переход от системы n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к системе n неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формуле $x = \mathrm{S}y$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, S — квадратная матрица порядка n, называется *линейным преобразованием неизвестных*. Если S — невырожденная матрица, то линейное преобразование неизвестных также называется *невырожденным*.

Квадратичной формой $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных. Квадратичную форму можно записать в виде $F(x) = x\mathbf{A}x$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{A}$ — симметрическая матрица порядка n, которая называется *матрицей квадратичной формы* $F(x)$.

Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования.

Если в квадратичной форме $F(x) = x\mathbf{A}x$ неизвестные подвергнуть линейному преобразованию $x = \mathrm{S}y$, то получится квадратичная форма $F(y) = y(\mathrm{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathrm{S})y$ с матрицей $\mathrm{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathrm{S}$.

Каноническим видом данной квадратичной формы называется эквивалентная ей форма, не содержащая произведений неизвестных. Каждую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью линейного преобразования неизвестных $x = \mathrm{S}y$ с ортогональной матрицей S.

Если $F(x) > 0$ (<0) для всех $x \neq 0$, то квадратичная форма $F(x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной.* Квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, если в каком-нибудь ее каноническом виде нет отрицательных (положительных) коэффициентов при квадратах неизвестных.

Следующие условия равносильны:

1) квадратичная форма $F(x) = x\mathbf{A}x$ положительно определена;

2) собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ положительны;

3) угловые миноры матрицы $\mathbf{A}$ положительны.

Следующие условия равносильны:

1) квадратичная форма $F(x) = x\mathbf{A}x$ отрицательно определена;

2) собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ отрицательны;

3) все угловые миноры матрицы **A** нечетного порядка отрицательны, а все угловые миноры четного порядка положительны.

9.58. Написать матрицу квадратичной формы

$$F = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. Обозначим коэффициент при произведении $x_ix_k = x_kx_i$ $(i \neq k)$ через $a_{ik} + a_{ki}$, причем $a_{ik} = a_{ki}$. Член $(a_{ik} + a_{ki})x_ix_k$ запишем в виде $a_{ik}x_ix_k + a_{ki}x_kx_i$. Тогда квадратичную форму F можно записать в виде

$$\begin{aligned} F = {} & 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + \\ & + 2x_2x_1 - 5x_2^2 + 3x_2x_3 - \\ & - x_3x_1 + 3x_3x_2 + 8x_3^2. \end{aligned}$$

Теперь матрица **A** квадратичной формы F имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Написать матрицу следующих квадратичных форм:

9.59. $F = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

9.60. $F = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3.$

9.61. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. Сгруппируем все члены, содержащие неизвестное x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$F = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2) -$$
$$- (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3.$$

В дальнейшем полный квадрат, содержащий неизвестное x_1, не изменяется. Среди оставшихся членов сгруппируем все, содержащие x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$F = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 + 6x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2.$$

Теперь перейдем от неизвестных x_1, x_2, x_3 к неизвестным y_1, y_2, y_3 по формулам

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3. \end{cases}$$

В результате этого перехода получим канонический вид данной квадратичной формы:

$$F = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2.$$

Привести к каноническому виду квадратичные формы:

9.62. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$

9.63. $F = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

9.64. $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

9.65. $F = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2.$

Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

9.66. $2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

9.67. $\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

9.68. $2\lambda x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

9.69. $2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

Найти все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы:

9.70. $-x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

9.71. $-2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

9.72. $2\lambda x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

9.73. $-x_1{}^2 - 2x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

Найти ортогональное преобразование неизвестных, приводящее следующие квадратичные формы к каноническому виду, и записать полученный канонический вид:

9.74. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$.

9.75. $3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

9.76. $-6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

9.77. $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

9.78. $17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

ПРАКТИКУМ 1 ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Задания

1. Вычислить определитель матрицы **A** (табл. 1).

2. Найти произведение матриц **A** и **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k_1 & 2 & -1 \\ -1 & k_2 & 3 \\ -2 & 4 & k_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(табл. 2).

3. Дана матрица **A** (табл. 3). Найти матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ и установить, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

4. Дана система векторов α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, в которой $\alpha_3 = (0, 1, 1, 2)$, $\alpha_4 = (1, 1, 1, 3)$, $\alpha_5 = (1, 0, -2, -1)$, $\alpha_6 = (1, 0, 1, 2)$. Дополнить линейно независимую часть α_1, α_2 (табл. 4) до базиса системы векторов α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису.

5. Найти общее решение системы линейных уравнений (табл. 5) методом Гаусса.

6. Найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений (табл. 6).

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	Матрица A	Вариант	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Вариант	Матрица A
7	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 27 & -6 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 37 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 1

Вариант	Матрица A	Вариант	Матрица A
13	$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ 3 & -13 & -2 & 8 & -7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Таблица 2. **Варианты задания 2**

Вариант	k_1	k_2	k_3	Вариант	k_1	k_2	k_3
1	−5	7	−3	16	−2	7	3
2	2	5	−3	17	1	5	3
3	−2	3	1	18	2	3	4
4	4	3	−3	19	3	1	2
5	2	3	−2	20	2	5	3
6	4	−4	−3	21	1	2	7
7	−1	−2	3	22	−3	−4	4
8	2	−4	1	23	3	3	−4
9	3	−5	2	24	5	4	2
10	5	2	−3	25	3	−4	2
11	1	3	−1	26	3	2	5
12	2	2	−1	27	−1	0	4
13	3	−4	5	28	0	−1	2
14	2	−3	1	29	2	1	0
15	3	4	3	30	−3	2	−1

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	Матрица A	Вариант	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант	Матрица A	Вариант	Матрица A
11	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	α_1	α_2	Вариант	α_1	α_2
1	(2, −4, 5, 3)	(12, 2, −5, 9)	16	(2, −3, 2, 1)	(3, 2, 0, 5)
2	(7, 0, 9, 16)	(3, 1, 4, 8)	17	(3, 3, 2, 8)	(0, 4, −3, 1)
3	(4, 1, 3, 8)	(7, −1, 0, 6)	18	(5, 4, −2, 7)	(1, 0, 2, 3)
4	(5, 2, 7, 14)	(2, 11, −10, 3)	19	(2, 7, −3, 6)	(5, 8, −5, 8)
5	(6, 12, −7, 11)	(2, 3, 3, 8)	20	(4, 5, −3, 6)	(1, −4, 5, 2)
6	(9, 11, −1, 19)	(5, 3, −5, 3)	21	(3, 5, −5, 3)	(4, 8, −6, 6)
7	(2, 4, 1, 7)	(3, −7, 8, 4)	22	(1, 3, −3, 1)	(2, −1, 3, 4)
8	(1, 6, −7, 0)	(5, −3, 9, 11)	23	(4, 5, −2, 7)	(1, −5, 4, 0)
9	(1, 3, 0, 4)	(2, −1, −2, −1)	24	(2, 8, −1, 9)	(3, 10, −6, 7)
10	(1, 2, −5, −2)	(2, 9, −7, 4)	25	(−4, 2, 1, 3)	(−1, 4, 2, 5)
11	(1, 7, −2, 6)	(4, −1, 1, 4)	26	(1, 7, −2, 6)	(2, 3, −4, 1)
12	(5, 1, −4, 2)	(1, −4, −2, −5)	27	(3, 2, −1, 1)	(0, 1, −3, −1)
13	(2, 3, 0, 5)	(4, 1, 0, 5)	28	(2, 1, 3, −1)	(1, 2, −1, 3)
14	(0, −1, 2, 1)	(3, 2, 1, 6)	29	(−1, 1, −2, 1)	(3, 1, 1, 1)
15	(3, 1, 3, 7)	(5, 0, 1, 6)	30	(2, −1, 3, 5)	(−2, 1, −1, 3)

Таблица 5. **Варианты задания 5**

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2, \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
8	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -6 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5, \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$

Окончание табл. 5

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
15	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2,\\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 5x_2-x_3+5x_4+3x_5=-4,\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=4,\\ x_1+x_2+3x_4+2x_5=1,\\ -3x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \end{cases}$

Таблица 6. **Варианты задания 6**

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=0,\\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0,\\ x_1-3x_2-5x_3-7x_5=0,\\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=0,\\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0,\\ 6x_1+2x_2+2x_3+x_4=0,\\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=0,\\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=0,\\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=0,\\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-5x_5=0,\\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0,\\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=0,\\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=0,\\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0,\\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=0,\\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+5x_5=0,\\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0,\\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=0,\\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0,\\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=0,\\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=0,\\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0,\\ x_1+2x_2-x_3-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=0,\\ x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
6	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 0, \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 8x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
13	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_1 - 12x_2 + x_3 - 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 10x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

ПРАКТИКУМ 2 ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Задания

1. Дана линейная оболочка $L_1 = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)$, $\alpha_2 = (1, 2, 2, 5)$, $\alpha_3 = (2, 1, -1, 2)$, $\alpha_4 = (2, 1, 2, 5)$. Выяснить, содержится ли линейная оболочка $L_2 = R(\beta_1, \beta_2)$ (табл. 1) в линейной оболочке L_1.

2. Найти систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов α_1, α_2, α_3 (табл. 2).

3. Найти ортогональный базис подпространства L, заданного системой уравнений (табл. 3), и базис подпространства $L^{\perp}$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы матриц (табл. 4).

5. Найти линейное преобразование неизвестных, приводящее квадратичные формы, заданные своими матрицами (табл. 5), к каноническому виду. Выяснить, является ли квадратичная форма знакоопределенной.

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	β_1	β_2	Вариант	β_1	β_2
1	(2, 3, 0, 5)	(0, −1, 2, 1)	16	(5, 1, −4, 2)	(4, −1, 1, 4)
2	(3, 2, 1, 6)	(4, 1, 0, 5)	17	(1, 2, −5, −2)	(6, −3, −6, −3)
3	(3, 1, 3, 7)	(2, −3, 2, 1)	18	(1, 3, 0, 4)	(2, 9, −7, 4)
4	(6, 4, 0, 10)	(5, 0, 1, 6)	19	(1, 6, −7, 0)	(3, −7, 8, 4)
5	(3, 3, 2, 8)	(1, 0, 2, 3)	20	(2, 4, 1, 7)	(5, −3, 9, 11)
6	(5, 4, −2, 7)	(0, 4, −3, 1)	21	(2, −4, 5, 3)	(2, 11, −10, 3)
7	(2, 7, −3, 6)	(−1, 4, −5, −2)	22	(7, 0, 9, 16)	(2, 3, 3, 8)
8	(4, 5, −3, 6)	(5, 8, −5, 8)	23	(4, 1, 3, 9)	(5, 3, −5, 3)
9	(1, 2, −5, −2)	(1, 6, −8, −1)	24	(9, 11, −1, 19)	(7, −1, 0, 6)
10	(3, 5, −5, 3)	(2, −1, 3, 4)	25	(6, 12, −7, 11)	(3, 1, 4, 8)
11	(1, 3, −3, 1)	(4, 8, −6, 7)	26	(5, 2, 7, 14)	(12, 2, −5, 9)
12	(4, 5, −2, 7)	(3, 10, −6, 7)	27	(1, 3, 6, 10)	(2, 0, 5, 7)
13	(2, 8, −1, 9)	(1, −5, 4, 0)	28	(1, −2, −1, −2)	(3, 5, −1, 6)
14	(3, 3, 3, 9)	(2, 3, −4, 1)	29	(−2, 3, 4, 1)	(0, 3, −4, −3)
15	(1, 7, −2, 6)	(1, −4, −2, −5)	30	(1, −1, −4, −4)	(−4, 3, 11, 10)

Таблица 2. **Варианты задания 2**

Вариант	α_1	α_2	α_3
1	(1, 0, 2, 1)	(2, 1, 2, 3)	(0, 1, −2, 1)
2	(1, 1, 1, 1)	(1, −1, −1, 1)	(2, 1, 1, 3)
3	(1, −2, 2, 3)	(2, −3, 2, 4)	(2, 2, 1, 0)
4	(5, −2, −6, −1)	(2, 2, 1, 0)	(9, −2, −4, −1)
5	(1, −2, 2, −3)	(3, −5, 4, 1)	(1, −1, 0, 7)
6	(2, −3, 2, 4)	(4, −1, 3, 4)	(0, 5, −1, −4)
7	(6, −4, −4, −4)	(4, 0, −8, 2)	(1, −2, 2, −3)
8	(1, 1, 1, 2)	(1, 2, 3, −2)	(1, −2, 1, 0)
9	(2, 0, 4, −3)	(0, 4, 2, −3)	(23, 0, −21, −9)
10	(−1, 6, 1, −3)	(1, 2, 5, −6)	(2, 0, 4, −3)

Окончание табл. 2

Вариант	α_1	α_2	α_3
11	(21, 0, −21, −10)	(1, 1, 1, 2)	(26, 5, −16, −4)
12	(2, −1, 2, 2)	(0, 3, 0, 2)	(−1, 8, −1, 4)
13	(2, 3, 5, −4)	(1, −1, 2, 3)	(3, 7, 8, −11)
14	(2, −1, 3, 4)	(1, 2, −3, 1)	(5, −5, 12, 11)
15	(2, 2, 7, −1)	(3, −1, 2, 4)	(5, 1, 9, 3)
16	(2, 1, −1, 1)	(1, 2, 1, −1)	(1, −4, −5, 5)
17	(1, 2, 3, −4)	(2, −1, 2, 5)	(8, 1, 12, 2)
18	(2, −1, 5, −4)	(2, 3, −4, 1)	(6, 1, 6, −7)
19	(8, −5, −6, 3)	(4, −1, −3, 2)	(4, −4, −3, 1)
20	(5, −3, 2, 4)	(2, −1, 3, 5)	(4, −3, −5, −7)
21	(8, 7, 4, 5)	(3, 2, 1, 4)	(2, 3, 2, −3)
22	(2, −3, 4, −5)	(1, −2, 7, −8)	(3, −4, 1, −2)
23	(2, 3, 1, 2)	(2, 5, 1, 1)	(2, 1, 1, 3)
24	(2, 3, 5, 6)	(3, 1, 1, 4)	(−1, 2, 4, 2)
25	(1, 2, 4, −3)	(2, 1, −1, 5)	(1, −1, −5, 8)
26	(3, −5, 2, 4)	(7, −4, 1, 3)	(−4, −1, 1, 1)
27	(1, 1, −1, 1)	(2, 3, −2, −3)	(2, 1, −2, −1)
28	(−7, −2, 5, −1)	(−9, 4, 5, 1)	(−3, −2, 5, −5)
29	(5, −3, −2, 3)	(1, 1, −6, 7)	(1, −1, 1, −1)
30	(6, −6, −5, 1)	(12, 12, −1, −1)	(6, 10, 1, −1)

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 11x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + 9x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
4	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 12x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 26x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 12x_2 + 22x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 9x_5 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 21x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 9x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 15x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$	23	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 - 9x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 16x_4 - 28x_5 = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 6x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 9x_5 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 15x_5 = 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 12x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 + 12x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 - 9x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 4

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
9	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Таблица 5. Варианты задания 5

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 5

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

10. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

10.1. Функциональная зависимость и способы ее представления

Если некоторому числу x из множества X поставлено в соответствие согласно некоторому правилу f единственное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X задана функциональная зависимость или функция. При этом величину y называют *зависимой переменной*, а величину x — *независимой переменной* или *аргументом*. Множество X называют *областью определения* функции и обозначают $D(f) = X$, а множество чисел $y = f(x)$ объединяют в множество Y и называют *множеством значений* функции. Это множество обозначают также $E(f) = Y$.

Наиболее распространены следующие способы задания функции: формульный, или аналитический, логический, или словесный, табличный, а также графический.

Область определения и множество значений аналитически заданных функций являются подмножествами множества действительных чисел.

Если функция задана таблично, то область определения и множество значений функции представляют собой конечное множество значений аргумента и соответствующих им значений функции.

Логические функциональные зависимости в различных частях области определения задаются различными формульными соотношениями.

Функция называется *четной*, если она задана на симметричном относительно начала координат промежутке и если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Для того чтобы установить четность или нечетность функции, требуется определить, является ли область определения функции интервалом, симметричным относительно начала координат, и выполняется ли одно из условий: $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$.

Функция называется *периодической* с периодом T, если $f(x) = f(x + Tn)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Найти область определения и множество значений функции:

10.1. $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Решение. Учитывая, что подкоренное выражение должно быть не отрицательным, получаем

$$D(f) = \{x \mid 16 - x^2 \geqslant 0\} = \{x \mid x \in [-4; 4]\}.$$

Для нахождения множества значений заметим, что арифметический корень всегда не отрицателен, т.е. $y \geqslant 0$; с другой стороны, y достигает своего наибольшего значения, когда $x = 0$, $y = \sqrt{16} = 4$, следовательно,

$$E(f) = \{y \mid y \in [0; 4]\}.$$

10.2. Фирма «Алые паруса», выпускающая компьютерную технику, провела опрос дилеров и получила следующие сведения о спросе Q на свою продукцию в зависимости от цены P:

P, тыс. руб.	1,7	1,9	2,0	2,1
Q, тыс. шт.	27	25	19	9

Решение. Область определения данной функции — значения P, множество значений — величины Q.

10.3. Величина подоходного налога h с физического лица в зависимости от его годового дохода q представлена функцией $h(q)$:

Годовой доход q, тыс. руб.	Величина налога $h(q)$, тыс. руб.
$0 \leqslant q \leqslant 12{,}0$	$h(q) = 0{,}12q$
$12{,}001 \leqslant q \leqslant 24{,}0$	$h(q) = 1{,}44 + 0{,}2q$
$24{,}001 \leqslant q \leqslant 36{,}0$	$h(q) = 3{,}04 + 0{,}25q$
$36{,}001 \leqslant q \leqslant 48{,}0$	$h(q) = 6{,}04 + 0{,}3q$
$48{,}001 \leqslant q \leqslant 60{,}0$	$h(q) = 10{,}24 + 0{,}35q$
$60{,}001 \leqslant q$	$h(q) = 14{,}44 + 0{,}4q$

Решение. Область определения и множество значений этой функции — все положительные действительные числа.

Определить множества значений x, удовлетворяющих неравенствам:

10.4. $|x| < 9$. **10.5.** $x^2 \leqslant 9$. **10.6.** $x^2 > 4$.

10.7. $(|x - 2| + 3)(|x| - 2) \leqslant 0$. **10.8.** $x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$.

10.9. $x^2 - 10x + 16 \leqslant 0$. **10.10.** $x - 3x^2 > 0$.

10.11. $(x + 3)^2 \leqslant 4$. **10.12.** $-3x^2 \leqslant 48$.

10.13. $(2x + 7)(x - 2) > 0$.

Найти области определения функций, заданных формулами:

10.14. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. **10.15.** $f(x) = \sqrt{x - 5} + \sqrt{2 - x}$.

10.16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x}}$. **10.17.** $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - \sqrt{2x^2 - 9}}$.

10.18. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 16}$. **10.19.** $f(x) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{5 - x}$.

10.20. $f(x) = \sqrt{4 - 5x} + 3 \arccos \dfrac{2x + 3}{6x}$. **10.21.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{5x + 3}$.

10.22. $f(x) = 3^{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}$. **10.23.** $f(x) = 5^{\frac{1}{x + 2}}$.

10.24. $f(x) = \log_2(2 - x) + 2\log_x 5$. **10.25.** $f(x) = \dfrac{\log_5(x^2 + 4x)}{\sqrt{25 - x^2}}$.

10.26. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{3x^2 - 2x - 1}$, если $x \in [-\pi; \pi]$.

10.27. $f(x) = \log_{0,5}\log_3 x$. **10.28.** $f(x) = \log_3(x^2 + 2x - 8)$.

10.29. $f(x) = \log_{\frac{x+1}{2x}}(3 + 5x - 2x^2)$.

Найти множество значений функций:

10.30. $f(x) = |x + 1| - 3$. **10.31.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

10.32. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$. **10.33.** $f(x) = 5 + 4x - x^2$.

10.34. $f(x) = 3^{x^2 + 4x - 12}$. **10.35.** $f(x) = \log_{0,5}(x - 2)$.

10.36. $f(x) = 5^{-\sqrt{x^2 + x}}$.

10.37. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } 0 \leqslant x < 3, \\ x^2+10x-16, & \text{если } 3 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$

10.38. $f(x) = 2 - \cos x$.

10.39. Показать, что $f(x) = \sqrt{16 - x^4}$ — четная функция.

Решение. Действительно, область определения функции $16 - x^4 \geqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (4 + x^2)(2 - x)(2 + x) \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-2; 2]$ — отрезок, симметрично расположенный относительно начала координат, и условие $f(-x) = \sqrt{16-(-x)^4} = \sqrt{16-x^4} = f(x)$ выполняется. Следовательно, $f(x) = \sqrt{16-x^4}$ — четная функция.

10.40. Определить, четная или нечетная функция $f(x) = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$:

а) в области определения; б) на полуотрезке $[-2; \infty)$.

Решение. а) Найдем область определения функции $f(x) = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$: $D(f) = \{x \mid x^4 - 13x^2 + 36 \geqslant 0\} \Rightarrow (x^2-4)(x^2-9) \geqslant 0 \Rightarrow (x+3)(x+2)(x-2)(x-3) \geqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow D(f) = \{x \in (-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; \infty)\}$ — интервал симметричен; условие $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - 13(-x)^2 + 36} = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36} = f(x)$ выполняется. Следовательно, в области определения функция четная.

б) Если $x \in [-2; \infty)$, функция $f(x) = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$ не является ни четной, ни нечетной, так как полуотрезок $[-2; \infty)$ не симметричен относительно начала координат и условие $f(-x) = f(x)$ выполняется не для всех x, для которых существует данная функция.

Установить четность или нечетность функций:

10.41. $f(x) = \cos 2x + x \sin x$. **10.42.** $f(x) = x^2 \sin 3x$.

10.43. $f(x) = |x+1| + 2$. **10.44.** $f(x) = |x| - 3$.

10.45. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$. **10.46.** $f(x) = 3|x| - 5\sqrt[3]{x^4}$.

10.47. $f(x) = \log_2 (x^2 - 4)$. **10.48.** $f(x) = 5^{-\frac{1}{x}}$.

10.49. $y = x^2 - x$. **10.50.** $y = 5^x x$.

Найти основные периоды функций:

10.51. $f(x) = \sin 4x$. **10.52.** $f(x) = \cos^2 3x$.

10.53. $f(x) = \lg \cos 2x$. **10.54.** $f(x) = |\cos 2x|$.

10.55. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$.

Указание. Основной период функции, приведенной в задаче 10.55, есть наименьшее общее кратное чисел $\pi/2$ и $\pi/3$.

10.2. Элементарные функции. Преобразование графиков функций

Основные элементарные функции:

а) степенная: $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{R}$;

б) логарифмическая: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$D(f) = \{x \mid x > 0\}$, $E(f) = \{y \mid y \in \boldsymbol{R}\}$;

в) показательная: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$D(f) = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$, $E(f) = \{y \mid y > 0\}$;

г) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

д) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Показательные и логарифмические функции находят применение в финансовых вычислениях. Большинство банковских операций состоит в выдаче денег «в рост» или «под процент». Наращенный (конечный) капитал $S_{\text{к}}$ вычисляется по формулам

$$S_{\text{к}} = S_{\text{н}}\,(1 + ni) \tag{10.1}$$

или

$$S_{\text{к}} = S_{\text{н}}\,(1 + i)^n, \tag{10.2}$$

где $S_{\text{н}}$ — начальный капитал;

n — период начисления процентов;

i — процентная ставка.

По формуле (10.1) начисляют п р о с т ы е проценты, по формуле (10.2) — с л о ж н ы е. В формуле (10.1) используется линейная зависимость, в формуле (10.2) — показательная.

Множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$ называется *графиком* функции $y = f(x)$. Для построения графиков функций используют следующие приемы: построение по точкам; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение на число); преобразование графика (сдвиг, растяжение и сжатие по осям). Так, например, если известен график функции $y = f(x)$, можно построить графики функций:

1) $y = f(x - a)$ — сдвиг графика функции $y = f(x)$ по оси Ox;

2) $y = f(x) + b$ — сдвиг графика функции $y = f(x)$ по оси Oy;

3) $y = f(ax)$ — растяжение или сжатие графика $y = f(x)$ по оси Ox;

4) $y = cf(x)$ — растяжение или сжатие по оси Oy;

5) $y = f(|x|)$ — график совпадает с графиком $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$ и является его симметричным отображением относительно оси Oy для $x < 0$;

6) $y = |f(x)|$ — график совпадает с графиком $y = f(x)$, если $y = f(x) \geqslant 0$, и является его симметричным отображением относительно оси Ox, если $f(x) < 0$.

10.56. Пусть вклад $S_н$ помещен в банк под годовую процентную ставку i. Требуется выяснить, сколько лет должен пролежать вклад в банке, чтобы наращенная по сложным процентам сумма составила величину $S_к$.

Р е ш е н и е. Логарифмируя обе части формулы (10.2), получаем

$$\lg S_к = \lg S_н + n \lg (1 + i),$$

откуда

$$n = \frac{\lg S_к - \lg S_н}{\lg(1+i)}.$$

10.57. Сбербанк начисляет ежемесячно по сложной процентной ставке (с капитализацией накоплений) 24% годовых. Определить сумму вклада после 8 месяцев хранения, если первоначальный вклад составил 360 руб.

Р е ш е н и е. $S_к = S_н\left(1 + \frac{i}{12}\right)^8 = 360\left(1 + \frac{0{,}24}{12}\right)^8 = 360 \cdot 1{,}02^8 \cong 421{,}8.$

10.58. Построить график функции

$$y = \left|2(x-1)^2 - 4|x-1| - 16\right| + 3.$$

Р е ш е н и е. Вначале построим график функции $y = x^2 - 2x - 8$. Известно, что это парабола с вершиной в точке $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$; $y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$. Точки пересечения параболы с осями координат находим из условий: 1) $y = 0$; $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$; $x_2 = 4$; 2) $x = 0$; $y = -8$. График этой параболы приведен на рис. 10.1, *а*.

График параболы $y = (x-1)^2 - 2(x-1) - 8$ получим, сместив на единицу вправо по оси Ox график функции $y = x^2 - 2x - 8$ (рис. 10.1, *б*). График параболы $y = 2(x-1)^2 - 4(x-1) - 16$ получим путем «растяжения» параболы $y = (x-1)^2 - 2(x-1) - 8$ по оси Oy (рис. 10.1, *в*).

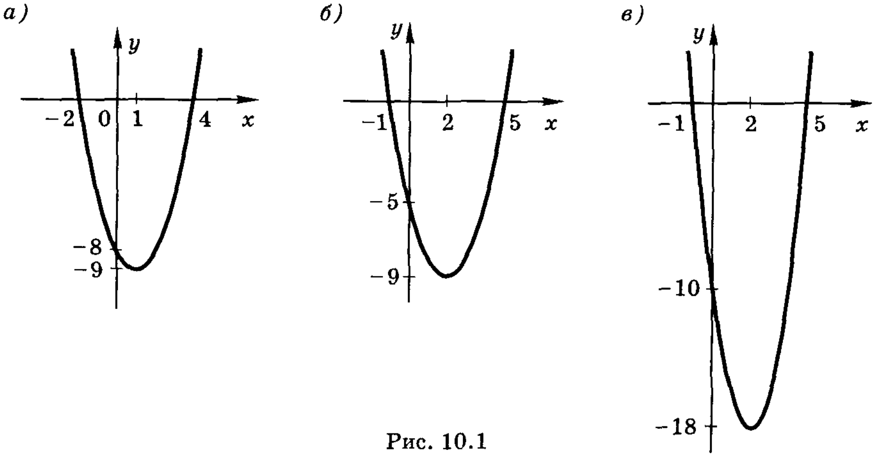


Рис. 10.1

График функции $y = 2(x-1)^2 - 4|x-1| - 16$ совпадает с графиком $y = 2(x-1)^2 - 4(x-1) - 16$ для всех $x \geqslant 0$, а в случае $x < 0$ график симметричен относительно оси Oy (рис. 10.2, *а*). На рис. 10.2, *б* приведен график функции $y = |2(x-1)^2 - 4|x-1| - 16|$, а на рис. 10.2, *в* — график функции $y = |2(x-1)^2 - 4|x-1| - 16| + 3$.

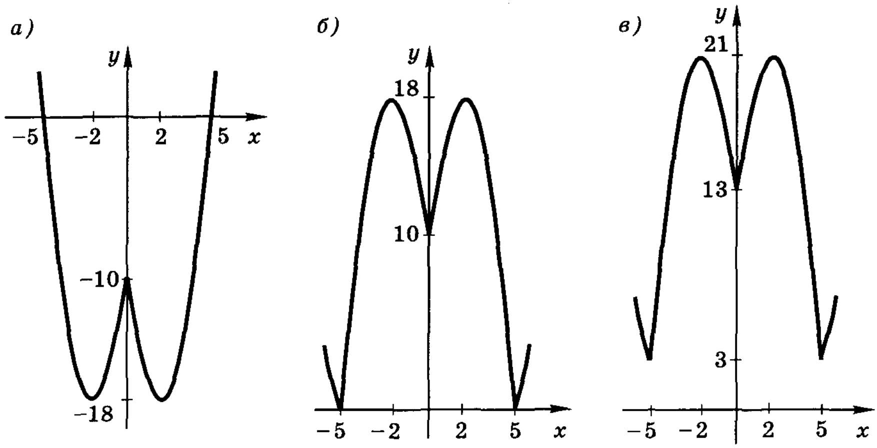


Рис. 10.2

Построить графики функций:

10.59. $y = 2x + 8$. **10.60.** $y = \frac{4}{3}x - 2$. **10.61.** $y = |2x - 1|$.

10.62. $y = -3|x - 2|$. **10.63.** $y = 2|x| - 3$. **10.64.** $y = 2|x| - 2x$.

10.65. $y = x^2 - 5x + 6$. **10.66.** $y = (x-5)^2 - 5(x-5) + 6$.

10.67. $y = -2(x-5)^2 + 10(x-5) - 12$.

10.68. $y = x^2 - 5|x| + 6$. **10.69.** $y = |x^2 - 5|x| + 6| - 2$.

10.70. $y = \sqrt{x-2}$. **10.71.** $y = \sqrt{2-3x}$. **10.72.** $y = \frac{1}{x} + 1$.

10.73. $y = \frac{2}{x} - 2$. **10.74.** $y = \frac{2}{|x|} + 2$. **10.75.** $y = \frac{x+5}{x+1}$.

10.76. $y = 3^{x+2}$. **10.77.** $y = 3^{-x} + 1$. **10.78.** $y = 3^{|x|+2}$.

10.79. $y = \log_2(x - 1)$. **10.80.** $y = 2\log_2(x + 1)$.

10.81. $y = 2|\log_2|x - 1||$. **10.82.** $y = \log_{0,5}|2 - 3x|$.

10.83. $y = \sin 3x$. **10.84.** $y = 2\sin(3x - 1) + 1$.

10.85. Построить график таблично заданной функции:

Цена пачки сигарет, руб.	2	3	3,5	4	5	6	7
Количество проданных за день пачек сигарет, шт.	70	65	63	60	60	50	25

11. ПРЕДЕЛЫ

11.1. Числовые последовательности и пределы

Функция натурального аргумента n, заданная на множестве N, называется *числовой последовательностью* $x_n = f(n)$ и обозначается $\{x_n\}$.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N_1$, такое, что при $n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Это обозначается следующим образом: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если $\exists\ K \in \boldsymbol{R}$ ($\exists\ K_1 \in \boldsymbol{R}$), такое, что $\forall\ n$: $x_n \leqslant K$ ($x_n \geqslant K_1$).

Если последовательность ограничена сверху и снизу, она называется *ограниченной*: $\{x_n\} \subset [K_1, K]$.

Свойства бесконечно малых:

1. Сумма бесконечно малых является бесконечно малой.
2. Произведение бесконечно малой на величину ограниченную является бесконечно малой.

Величина, обратная бесконечно малой, называется *бесконечно большой*, т.е. $x_n = 1/\alpha_n$ — бесконечно большая величина.

Предел бесконечно большой величины обозначается $+\infty(\infty)$ или $-\infty$.

Бесконечно большие величины могут и не иметь определенного предела.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*.

Алгебраическими композициями последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ называются последовательности $\{z_n\}$ вида $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n \cdot y_n$, x_n/y_n, $n = 1, 2, \ldots$

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы a и b, то последовательность $\{z_n\}$ имеет пределы $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b ($b \neq 0$) соответственно.

В случае когда последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ являются бесконечно большими или бесконечно малыми, могут возникать неопределенности вида $\infty - \infty$ (разность бесконечно больших), $0 \cdot \infty$ (произведение бесконечно малой и бесконечно большой), $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (отношения бесконечно малых и бесконечно больших).

Найти пределы последовательностей при $n \to \infty$:

11.1. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}$.

Решение. Преобразуем выражение путем умножения на сопряженное и перейдем к пределу:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+3-n+3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3}} = 0.$$

11.2. $\dfrac{(3n+2)^{100}}{(3n-1)^{98}(n+2)^2}$.

Решение. Вынесем за скобки в числителе и знаменателе члены, содержащие переменную, и перейдем к пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{100}n^{100}\left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^{100}}{3^{98}n^{100}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2}}=\lim_{n\to\infty}9\frac{\left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^{100}}{\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2}}=9.$$

11.3. а) $\dfrac{n}{n+1}$; б) $-\dfrac{n}{n+1}$; в) $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$.

11.4. $1+(-\frac{1}{2})^n$.

11.5. $\sqrt{n^2+3n}-n$.

11.6. $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}$.

11.7. $\dfrac{1+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}$.

11.8. $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}$.

11.9. $\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n$.

11.10. $\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$.

11.11. $\dfrac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48}(n+2)^2}$.

11.12. $\dfrac{(1+3n)^{100}}{(3n-2)^{97}(n+2)^3}$.

11.13. $\dfrac{(2n+3)^{98}(2n-1)^2}{(2n+4)^{100}}$.

11.14. Дана последовательность $x_n=\dfrac{1}{2^n}$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Определить номер члена последовательности n, начиная с которого величина x_n станет и будет оставаться: а) меньше данного положительного числа ε; б) меньше 0,001.

Решение. Составим неравенства:

а) $\dfrac{1}{2^n}\leqslant\varepsilon$; б) $\dfrac{1}{2^n}\leqslant 10^{-3}$.

Прологарифмируем эти выражения:

$-n\lg 2\leqslant\lg\varepsilon$, $-n\lg 2\leqslant -3\lg 10=-3$.

Умножим на -1:

$n\lg 2\geqslant -\lg\varepsilon=\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n\lg 2\geqslant 3$.

Откуда

$n\geqslant\dfrac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$, $n\geqslant\dfrac{3}{\lg 2}\geqslant\dfrac{3}{0{,}3}$, т.е. $n=10$.

11.15. Дана последовательность $x_n=-3^{-n}$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Начиная с какого n модуль переменной x_n станет и будет оставаться меньше 0,0001?

11.16. Определить номер члена последовательности n, начиная с которого модуль разности $x_n - 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, станет и будет оставаться: а) меньше данного положительного числа ε, б) меньше 0,001, если

$$x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

11.17. Определить предел a последовательности $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ и номер члена последовательности, начиная с которого

$$|x_n - a| < 0{,}05.$$

11.18. Определить предел a последовательности

$$x_n = \frac{5n^2+1}{7n^2-3}$$

и номер члена последовательности, начиная с которого

$$|x_n - a| < 0{,}005.$$

11.2. Первый и второй замечательные пределы

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, называется *первым замечательным пределом*. Этот предел равен единице:

$$\lim_{\substack{\alpha_n \to 0 \\ n \to \infty}} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1.$$

Предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ называется *вторым замечательным пределом*. Этот предел равен числу e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2{,}7182\ldots$$

Положив $\alpha_n = 1/n$, получим

$$\lim_{\alpha_n \to 0} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \mathrm{e}.$$

Найти пределы:

11.19. а) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{\sin 3\alpha_n}{\alpha_n}$; б) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{\sin \frac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n}$.

11.20. а) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{\alpha_n}{3}}{\alpha_n^2}$; б) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{1}{\alpha_n \operatorname{ctg} \alpha_n}$.

11.21. а) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{1 - \cos \alpha_n}{\alpha_n^2}$; б) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{1 - \cos 2\alpha_n}{\alpha_n \sin \alpha_n}$.

11.22. а) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{\sin 3\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n + 3} - \sqrt{3}}$; б) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_n - \sin \alpha_n}{\alpha_n^3}$.

11.23. а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{4}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n$.

11.24. а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{3}{4n}\right)^{n+2}$.

11.25. а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$.

11.26. а) $\lim\limits_{n \to \infty} n(\ln (n + 3) - \ln n)$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

11.27. а) $\lim\limits_{n \to \infty} n[\ln n - \ln (n + 2)]$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}$.

11.28. а) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} (1 - 4\alpha_n)^{\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}$.

11.29. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

11.30. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n-3}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{4+5n^3}\right)$.

11.31. а) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$; б) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \dfrac{1 - \cos \alpha_n}{\alpha_n \sqrt{1 + \alpha_n} - 1}$.

11.3. Предел функции

Предельной точкой сгущения множества A называется точка x_0, если в любой окрестности этой точки найдутся точки множества, отличные от x_0.

Определение предела по Коши. Функция $y = f(x)$, определенная в A, имеет предел C в точке сгущения x_0, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что

$$\forall\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (C - \varepsilon,\ C + \varepsilon).$$

Существование предела записывают в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C$$

или

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon.$$

Определение предела по Гейне. Если для различных последовательностей $\{x_n\}$, стремящихся к x_0, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу C, то это число называется *пределом функции* $f(x)$.

Переменная x может стремиться к x_0, оставаясь меньше x_0, что записывается в виде $x \to x_0 - 0$, или оставаясь больше x_0, что записывается в виде $x \to x_0 + 0$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = C'$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* x_0 *слева*, а предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = C''$ — *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* x_0 *справа.*

При вычислении пределов функций, так же как и при вычислении пределов последовательностей, часто приходится рассматривать различного вида неопределенности.

Найти пределы:

11.32. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$.

11.33. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$; б) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$.

11.34. а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$.

11.35. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - 4x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3 - 5x}{1 - 3x^3}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 1}{7x + \sqrt[3]{x}}$.

11.36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x}$. **11.37.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1 + x} - 1)}$.

11.38. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}$.

11.39. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{(5x - 1)^5}$.

11.40. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x^2}{1 - x^2} + 4^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x})$.

11.41. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x^4}{1 - 2x^4} - 3^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$.

11.42. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

11.43. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$.

11.44. $\lim\limits_{x \to \infty} x(\ln(2+x)-\ln x)$. **11.45.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

11.4. Сравнение бесконечно малых функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \to x_0$, если ее предел равен нулю.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, то функция $\beta(x)$ называется *бесконечно малой функцией высшего порядка малости относительно* $\alpha(x)$, что записывается в виде $\beta = o(\alpha)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = A$ (отличное от нуля конечное число), то $\beta(x)$ называется *бесконечно малой функцией k-го порядка малости относительно* $\alpha(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, то $\beta(x)$ и $\alpha(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми функциями*: $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

Определить порядок малости функции $\beta(x)$ относительно $\alpha(x) = x$ при $x \to 0$:

11.46. $\beta(x) = 1 - \cos x$.

Решение. Обе функции являются бесконечно малыми при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{x}{2} = 0.$$

Таким образом, функция $\beta(x)$ есть функция высшего порядка малости относительно $\alpha(x) = x$.

Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha^2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

то функция $\beta(x) = 1 - \cos x$ есть бесконечно малая функция второго порядка малости относительно $\alpha(x) = x$ при $x \to 0$.

11.47. $\beta(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$.

11.48. $\beta(x) = \sin 2x - 2\sin x$.

11.49. $\beta(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$.

11.50. $\beta(x) = 3\sin^3 x - x^4$.

Сравнить бесконечно малые функции при $x \to 0$:

11.51. $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$, $\beta(x) = x \operatorname{tg} x$.

11.52. $\alpha(x) = 2^x - 1$, $\beta(x) = x \ln 2$.

11.53. $\alpha(x) = x \sin^2 x$, $\beta(x) = 2x \sin x$.

11.5. Непрерывность функций. Разрывные функции

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, равный $f(x_0)$.

Если при каком-либо значении x_0 не выполняются указанные условия, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она непрерывна на этом промежутке.

Различают точки разрыва I и II рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если для нее существуют конечные пределы

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

и они не равны между собой. Все остальные точки разрыва носят название *точек разрыва II рода*.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точка разрыва x_0 называется *устранимой*.

Если выполняется равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна слева* в точке x_0. Аналогично, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функция *непрерывна справа* в точке x_0.

Исследовать на непрерывность и изобразить графически функции:

11.54. $y = \dfrac{3}{x-4}$. **11.55.** $y = |x|$.

11.56. а) $y = -\dfrac{5}{x}$; б) $y = \operatorname{tg} x$. **11.57.** $y = x - |x|$.

11.58. а) $y = 3^{\frac{1}{x-3}}$; б) $y = 1 - 3^{\frac{1}{x}}$; в) $y = 3 - \dfrac{|x|}{x}$.

12. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

12.1. Правила дифференцирования. Вычисление производных

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$) называется предел отношения приращения функции в этой точке $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Таблица основных производных:

1) $y = C, \quad y' = 0;$

2) $y = x^n, \quad y' = nx^{n-1};$

3) $y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$

$y = e^x, \quad y' = e^x;$

4) $y = \log_a x, \quad y' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \ln a};$

$y = \ln x, \quad y' = \dfrac{1}{x};$

5) $y = \sin x, \quad y' = \cos x;$

6) $y = \cos x, \quad y' = -\sin x;$

7) $y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

8) $y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

9) $y = \arcsin x, \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

10) $y = \arccos x, \quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

11) $y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \dfrac{1}{1+x^2};$

12) $y = \operatorname{arcctg} x, \quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Правила дифференцирования:

1) $(u + v - w)' = u' + v' - w';$

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv';$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$

4) Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0, при этом $y'(x_0) = y'_u(u_0)\, u'_x(x_0)$.

12.1. Найти производную функции $y = \sqrt{x+2}$ в точке x и в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдем приращение функции Δy, обусловленное приращением аргумента Δx:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{(x+\Delta x)+2} - \sqrt{x+2}.$$

Затем составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x} = \frac{(0)}{(0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x+2-x-2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Таким образом, производная функции $y = \sqrt{x+2}$ в произвольной точке x равна

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Производная в заданной точке x_0 равна

$$y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0+2}}.$$

При $x_0 = 2$

$$y'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4}.$$

Используя определение производной, найти производные функций в точке x:

12.2. $y = 2x$. **12.3.** $y = 5x^3$. **12.4.** $y = \sqrt[3]{x}$.

12.5. $y = \sin x$. **12.6.** $y = \cos 2x$. **12.7.** $y = \sin \frac{x}{2}$.

12.8. $y = \log_a x$. **12.9.** $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. **12.10.** $y = \sqrt{2-x^2}$.

12.11. $y = \frac{1}{2-3x}$. **12.12.** $y = 3^x$.

12.13. Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найти производные функций в точке x:

а) $y = 5 + 7x^2 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2-x} + 3^x - \log_2 x + \cos x + \operatorname{ctg} x$;

б) $y = x^2 \ln x$;

в) $y = \log_2^3(5x - 3)$.

Решение.

а) $y' = \left(5 + 7x^2 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2-x} + 3^x - \log_2 x + \cos x + \operatorname{ctg} x\right)' = (5)' + (7x^2)' -$

$-\left(5x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \frac{(x^2)'(2-x) - (2-x)'x^2}{(2-x)^2} + (3^x)' - (\log_2 x)' + (\cos x)' + (\operatorname{ctg} x)' =$

$= 0 + 7\cdot 2x - 5\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{2x(2-x)-(-1)x^2}{(2-x)^2} + 3^x \ln 3 - \frac{\log_2 e}{x} - \sin x - \frac{1}{\sin^2 x} =$

$= 14x + \frac{5}{2x\sqrt{x}} + \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} + 3^x \ln 3 - \frac{1}{x \ln 2} - \sin x - \frac{1}{\sin^2 x}.$

б) $y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)'\ln x + x^2(\ln x)' = 2x \ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x \ln x + x =$

$= x(\ln x^2 + 1) = x \ln(ex^2).$

в) Данная функция является сложной функцией $y = u^3(v)$, где $u = \log_2(5x-3)$ и $v = 5x - 3$. Таким образом, $y = u^3(v)$, где $u = \log_2 v$ и $v = 5x - 3$.

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$y' = 3u^2\frac{1}{v \ln 2} \cdot 5 = 3\log_2^2(5x-3)\frac{1}{(5x-3)\ln 2} \cdot 5 = \frac{15 \log_2^2(5x-3)}{(5x-3)\ln 2}.$$

Найти производные функций:

12.14. $y = 2x^7 - 5x^2 + 2\sqrt{x} + 1.$ **12.15.** $y = \frac{7}{x^2}.$

12.16. $y = (x^2 - 3x + 1) \cdot 2^x.$ **12.17.** $y = \sqrt[7]{x} \ln x.$

12.18. $y = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + \frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}.$ **12.19.** $y = 3x^2 \ln x - x^2.$

12.20. $y = 3^{2x} \cdot 2^{-3x}.$ **12.21.** $y = x^2 \sin x.$ **12.22.** $y = 4^x \operatorname{tg} x.$

12.23. $y = \sqrt[3]{x} \cdot 3^x.$ **12.24.** $y = x^3 \arcsin x.$

12.25. $y = \sqrt[5]{x} \log_2 x.$ **12.26.** $y = \arcsin x + \arccos x.$

12.27. $y = \frac{x}{x^2-1}.$ **12.28.** $y = \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} - \frac{x}{\cos x}.$ **12.29.** $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$

12.30. $y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}.$ **12.31.** $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}.$ **12.32.** $y = \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}.$

12.33. $y = \frac{2\sin x}{1 - \cos x}.$ **12.34.** $y = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$

12.35. $y = \sqrt{1-x^2}.$ **12.36.** $y = \sin\frac{x}{4}.$

12.37. $y = 3x \operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{1}{9+x^2}.$

12.38. $y = \sqrt{x} \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$

12.39. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$. **12.40.** $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

12.41. $y = \sin 2x - \cos^2 x$.

12.42. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 2x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$.

12.43. $y = \sqrt{3x + \cos 3x}$. **12.44.** $y = \sin^8 \frac{x}{8}$.

12.45. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$. **12.46.** $y = \ln \frac{x+2}{x-2}$.

12.47. $y = 3^{\cos^2 x}$. **12.48.** $y = \ln 2^{\sin^2 x}$.

12.49. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$. **12.50.** $y = \frac{1}{6\sqrt{2}} \arcsin \frac{x^3}{\sqrt{8}}$.

12.51. $y = \ln \ln x$. **12.52.** $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

12.53. $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$. **12.54.** $y = x \ln x + \arcsin \sqrt{x}$.

12.55. $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$. **12.56.** $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{2x}$.

12.57. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)$.

12.58. $y = \frac{1}{2} e^{x^2}(\sin 2x + \cos 2x)$. **12.59.** $y = \frac{2^x}{\ln 2}(\ln x - \frac{1}{x})$.

12.60. $y = \frac{1}{6} \sin^3 x^2$. **12.61.** $y = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}$.

12.62. $y = \frac{3}{\left(1 + \cos \frac{x}{3}\right)^2}$. **12.63.** $y = 2^{3x^2} + \ln \sin x$.

12.64. $y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$. **12.65.** $y = \ln \sin(3x + 2)$.

12.66. $y = \frac{e^{-x^2}}{x - 3}$. **12.67.** $y = \arcsin \sqrt{2x + 1}$.

12.68. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2}$. **12.69.** $y = \sqrt[3]{\ln^5 \sin \frac{3}{5} x}$.

При нахождении производных степенно-показательных и некоторых алгебраических функций полезно бывает предварительно прологарифмировать функцию.

12.70. Найти производные функций:

а) $y = (\arcsin x)^{x^2}$; б) $y = \dfrac{(3x+2)^3\sqrt{2x-3}}{(4-x)^2\sqrt[3]{x^3-2x}}$.

Р е ш е н и е. Прологарифмируем заданные функции, а затем найдем их производные:

а) $\ln y = x^2 \ln \arcsin x$; $(\ln y)' = (x^2 \ln \arcsin x)'$,

откуда

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \arcsin x + x^2 \frac{1}{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y' = (\arcsin x)^{x^2}\left(2x \ln \arcsin x + \frac{x^2}{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right);$$

б) $\ln y = 3 \ln (3x + 2) + \frac{1}{2} \ln (2x - 3) - 2 \ln (4 - x) - \frac{1}{3} \ln (x^3 - 2x)$;

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{3x+2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\frac{2}{2x-3} - 2\frac{-1}{4-x} - \frac{1}{3}\frac{3x^2-2}{x^3-2x};$$

$$y' = \frac{(3x+2)^3\sqrt{2x-3}}{(4-x)^2\sqrt[3]{x^3-2x}}\left(\frac{9}{3x+2}+\frac{1}{2x-3}+\frac{2}{4-x}-\frac{3x^2-2}{3(x^3-2x)}\right).$$

Найти производные функций:

12.71. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$. **12.72.** $y = (3x^2 + 3x - 1)^x$.

12.73. $y = (x + 1)^{\ln x}$. **12.74.** $y = \dfrac{2^x\sqrt[4]{4x+1}}{(2x-1)^3\sqrt[3]{x^3+2}}$.

12.75. $y = \dfrac{(x^2-1)^3 \arcsin\sqrt{x}}{x^4(3x+2)}$.

12.2. Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} = f''(x).$$

Такой предел, если он существует, называют *второй производной.*

Аналогично производную от второй производной называют *производной третьего порядка* или *третьей производной.*

В общем случае *производной n-го порядка* называется производная от производной $(n - 1)$-го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Производные второго, третьего и более высоких порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

12.76. Найти производную y''', если $y = 5x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2^x$.

Решение. $y' = 20x^3 + \frac{1}{2x^{3/2}} + 2^x \ln 2$, $\quad y'' = 60x^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{x^{5/2}} + 2^x (\ln 2)^2$,

$y''' = 120x + \frac{15}{8}\frac{1}{x^{7/2}} + 2^x (\ln 2)^3$.

Найти производные второго порядка:

12.77. $y = \sin^2 x$. **12.78.** $y = -\frac{3}{x^2 - 5}$. **12.79.** $y = \operatorname{tg} x$.

12.80. $y = \frac{1}{5}x^5 (5 \ln x - 1)$. **12.81.** $y = \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x$.

Найти производные третьего порядка:

12.82. $y = x \ln x$. **12.83.** $y = \arcsin x$. **12.84.** $y = xe^{-x}$.

12.85. $y = \frac{x}{6(x+1)}$. **12.86.** $y = (8x + 3)^2 \sqrt[8]{8x + 3}$.

Найти производные n-го порядка:

12.87. $y = \sin x$. **12.88.** $y = e^{-\frac{x}{a}}$. **12.89.** $y = \ln x$.

12.90. $y = 2^x + 2^{-x}$. **12.91.** $y = \cos x$. **12.92.** $y = a^x$.

12.93. $y = \sin^2 x$. **12.94.** $y = xe^{\frac{x}{a}}$. **12.95.** $y = \frac{1}{2x+1}$.

12.96. Показать, что функция $y = e^x + 2e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

12.3. Касательная и нормаль к плоской кривой

Из определения производной следует, что в геометрическом смысле производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке x_0

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0),$$

где α — угол наклона касательной.

Тогда уравнение касательной в точке $A_0(x_0, y_0)$ на кривой $y = f(x)$ (рис. 12.1) примет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение нормали —

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отрезок $Bx_0 = y_0 \operatorname{tg} \alpha$ называется *подкасательной*, а отрезок $x_0C = y_0 \operatorname{ctg} \alpha$ — *поднормалью*.

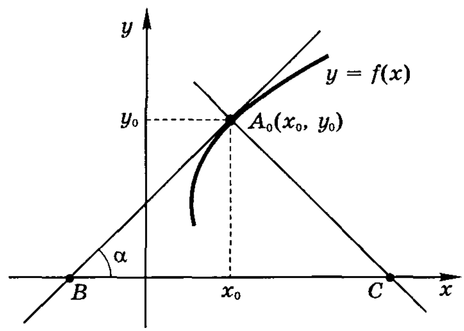


Рис. 12.1

12.97. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^2 + 2$ в точке $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е. Если $x_0 = 1$, то $y_0 = f(x_0) = 1^2 + 2 = 3$, а $f'(x) = 2x$ и $f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$. Уравнение касательной примет вид $y - 3 = 2(x - 1)$, а уравнение нормали — соответственно $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$.

12.98. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y = 9 - x^2$ в точке пересечения ее с осью Ox $(x < 0)$; построить параболу, касательную и нормаль.

Написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные:

12.99. $y = x^3/3$ в точке $x = -1$.

12.100. $y^2 = x^3$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

12.101. $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$.

12.102. $y = 4/x$ в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

12.103. $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox.

12.104. $y^2 = 4 - x$ в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

12.105. Найти угол между линиями $2y = x^2$ и $2y = 8 - x^2$.

Р е ш е н и е. Вначале находим точки пересечения линий: $x^2 = 8 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 2$, $y = 2$. Затем находим угловые коэффициенты касательных к этим линиям в каждой точке пересечения:

$$y_1' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x; \quad y_2' = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x;$$

при $x = 2$

$$k_1 = y_1'(2) = 2; \quad k_2 = y_2'(2) = -2;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-2-2}{1+2(-2)} = \frac{4}{3}; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3};$$

при $x = -2$

$$k_1 = y_1'(-2) = -2; \quad k_2 = y_2'(-2) = 2; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{4}{3}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right).$$

Найти угол между линиями:

12.106. $y = x - x^2$ и $y = 5x$. **12.107.** $y = x^3$ и $y = -4x + 5$.

12.108. $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$. **12.109.** $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

12.4. Приближенное вычисление действительных корней уравнения

При анализе поведения различных функций часто приходится находить такие значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, т.е. требуется найти корни уравнения $f(x) = 0$.

Если это алгебраическое уравнение первой, второй или третьей степени, то существуют формулы и некоторые простейшие алгоритмы для нахождения этих корней. Для нахождения корней уравнения выше четвертой степени таких формул в общем случае не существует. Если коэффициенты уравнения $f(x) = 0$ представлены числами, то корни уравнения могут быть вычислены приближенно с любой степенью точности. Наиболее распространенным методом вычисления является метод хорд и касательных.

12.110. Вычислить с точностью до 0,001 корни уравнения $-x^3 - 15x^2 + 33x - 3 = 0$.

Решение. Вначале найдем интервалы знакопостоянства для первой и второй производных функции $f(x) = -x^3 - 15x^2 + 33x - 3$. Первая производная

$$f'(x) = -3x^2 - 30x + 33 = -3(x^2 + 10x - 11) = -3(x + 11)(x - 1).$$

Очевидно, что на интервале $x \in (-\infty, -11) \cup (1, \infty)$ производная $f'(x) < 0$, а на интервале $(-11, 1)$ соответственно $f'(x) > 0$.

Вторая производная

$$f''(x) = -6x - 30 = -6(x + 5).$$

Отсюда видно, что для интервала $x \in (-\infty, -5)$ вторая производная $f''(x) > 0$, а для $x \in (-5, \infty)$ соответственно $f''(x) < 0$.

Затем внутри этих интервалов найдем отрезки, на концах которых функция имеет разные знаки. Так, в точке $x = 0$ функция $f(0) = -3 < 0$, а в точке $x = 0{,}5$, соответственно, $f(0{,}5) = -0{,}125 - 15 \cdot 0{,}25 + 33 \cdot 0{,}5 - 3 = 9{,}625 > 0$. Следовательно, на отрезке $[0; 0{,}5]$ имеется корень уравнения, и, так как на этом отрезке первая и вторая производные имеют постоянные знаки, этот корень единственный (рис. 12.2). Точки A и B лежат на графике функции $y = -x^3 - 15x^2 + 33x - 3$ и имеют координаты: $A(0; -3)$, $B(0{,}5; 9{,}625)$.

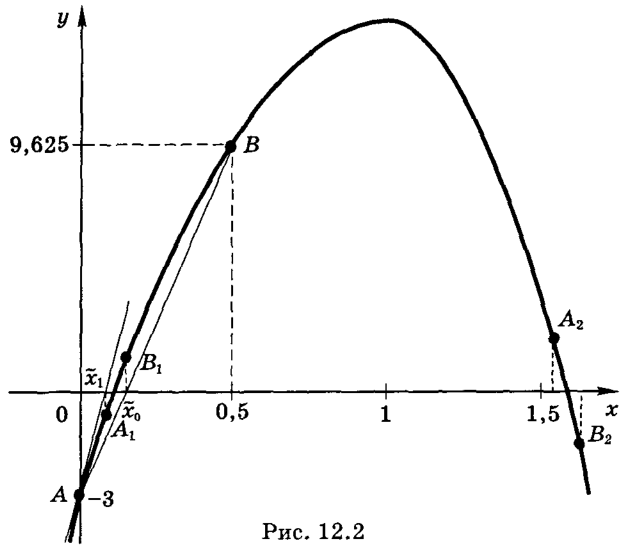


Рис. 12.2

Далее строим хорду AB как уравнение прямой, проходящей через точки A и B, и находим точку пересечения хорды и оси Ox. Это будет некоторое приближенное значение первого корня $\tilde{x}_0 = a_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{x-0}{0{,}5-0} = \dfrac{y+3}{9{,}625+3}, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_0 = a_1 = \frac{3 \cdot 0{,}5}{12{,}625} \approx 0{,}119.$$

После этого строим касательную в точке A (выбор точки обусловлен совпадением знаков функции и ее второй производной: $f(A) < 0$ и $f'(A) < 0$) и находим точку пересечения этой касательной и оси Ox. Это тоже приближенное значение первого корня $\tilde{x}_1 = a_2$:

$$\begin{cases} y = -3 + f'(0)(x-0), \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_1 = a_2 = \frac{3}{33} \approx 0{,}091.$$

Выберем точки A_1 и B_1, лежащие на графике заданного уравнения, с координатами $A_1(0{,}091; -0{,}122)$, $B_1(0{,}119; 0{,}713)$, где $f(0{,}091) \approx -0{,}122$, $f(0{,}119) \approx 0{,}713$. Снова строим хорду A_1B_1 и касательную в точке A_1, находим точки пересечения их с осью Ox; получаем приближенные значения a_3 и a_4 первого корня:

$$\begin{cases} \dfrac{x-0{,}091}{0{,}119-0{,}091} = \dfrac{y+0{,}122}{0{,}713+0{,}122}, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_2 = a_3 = \frac{0{,}122 \cdot 0{,}028 + 0{,}091 \cdot 0{,}835}{0{,}835} \approx 0{,}0951;$$

$$\begin{cases} y = -0{,}122 + f'(0{,}091)(x-0{,}091) = -0{,}122 + 33{,}182(x-0{,}091), \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_3 = a_4 = \frac{0{,}122 + 0{,}091 \cdot 33{,}182}{33{,}182} \approx 0{,}0946.$$

Разность между значениями корней $a_3 - a_4 \approx 0{,}0005$ меньше заданной точности. Поэтому можно в качестве корня (первого) уравнения принять число $x_1 = \frac{a_3 + a_4}{2} \approx 0{,}095$, при этом $f(0{,}095) \approx -0{,}001 \approx 0$.

Для нахождения двух других корней уравнения разделим многочлен $-x^3 - 15x^2 + 33x - 3$ на $(x - 0{,}095)$:

$$\frac{-x^3 - 15x^2 + 33x - 3}{x - 0{,}095} = -x^2 - 15{,}095x + 31{,}565 - \frac{0{,}001}{x - 0{,}095}.$$

По теореме Безу остаток должен быть равен нулю, но из-за приближенности корня он равен $-0{,}001$, т.е. находится в пределах заданной точности.

Найдем корни квадратного уравнения $x^2 + 15{,}095x - 31{,}565 = 0$:

$$x_2 = \frac{-15{,}09500 - 18{,}81805}{2} \approx -16{,}9565; \; x_3 = \frac{-15{,}09500 + 18{,}81805}{2} \approx 1{,}8615.$$

Это приближенные значения двух других искомых корней. Допустим, что нас больше интересует второй положительный корень. Уточним его. Снова находим интервал, на концах которого значения функции имеют разные знаки. Для этого вычисляем $f(1{,}862) \approx -0{,}0153$ и $f(1{,}860) \approx 0{,}0511$. Следовательно, корень находится между значениями $x_1 = 1{,}86$ и $x_2 = 1{,}862$.

Рассмотрим точки $A_2(1{,}86;\ 0{,}051)$ и $B_2(1{,}862;\ -0{,}015)$. Строим хорду A_2B_2 и находим координату точки пересечения ее с осью Ox:

$$\begin{cases} \dfrac{x - 1{,}86}{1{,}862 - 1{,}86} = \dfrac{y - 0{,}051}{-0{,}015 - 0{,}051}, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_4 = a_5 = \frac{-0{,}051 \cdot 0{,}002 - 1{,}86 \cdot 0{,}066}{-0{,}066} \approx 1{,}8615.$$

Далее строим касательную в точке B_2, так как значение $f(B_2) < 0$ и $f''(B_2) < 0$:

$$\begin{cases} y = -0{,}015 + f'(1{,}862)(x - 1{,}862) = -0{,}015 - 33{,}261(x - 1{,}862), \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_5 = a_6 = \frac{-61{,}917}{-33{,}261} \approx 1{,}8615.$$

Вычисляем значения $f(1{,}861)$ и $f(1{,}8615)$. Получаем $f(1{,}861) \approx 0{,}018$ и $f(1{,}8615) \approx 0{,}0014$. Последнее значение отличается от нуля в пределах заданной точности. Поэтому второй положительный корень принимаем равным 1,8615. Аналогичным образом вычисляем третий корень.

12.111. Вычислить с точностью до 0,01 корни уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$.

12.112. Найти приближенное значение корня уравнения $x^5 + 4x^3 - 6 = 0$, заключенного в интервале $(1;\ 1{,}1)$, с точностью 0,001.

12.113. Найти приближенное значение положительного корня уравнения $2^x - 3x - 2 = 0$.

12.114. Вычислить с точностью до 0,001 больший корень уравнения $\log_3 x - 3x + 12 = 0$.

12.5. Дифференциалы первого и высшего порядков и их применение

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в точке x, то полное приращение функции Δy можно записать в виде

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx, часть полного приращения функции называется *дифференциалом* функции и обозначается $\mathrm{d}y$. Следовательно, по определению $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$. Если $f(x) = x$, то $\mathrm{d}x = \Delta x$, поэтому дифференциал обычно записывают в виде

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

12.115. Найти полное приращение функции $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x$ и ее дифференциал, сравнить их значения при $x = 1$.

Решение. Полное приращение запишем в виде

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x) - 2x^3 - 3x^2 - 6x.$$

Преобразовав его, получим

$$\Delta y = 6(x^2 + x + 1)\Delta x + (6x + 3)\Delta x^2 + 2\Delta x^3.$$

Полный дифференциал по определению равен $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = 6(x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x$. В точке $x = 1$ имеем $\Delta y = 18\Delta x + 9\Delta x^2 + 2\Delta x^3$ и $\mathrm{d}y = 18\Delta x$.

При достаточно малых Δx полное приращение функции и дифференциал отличаются незначительно, т.е. $\Delta y \approx \mathrm{d}y$. Это обстоятельство используется для приближенных вычислений, а именно:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx \mathrm{d}y \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + \mathrm{d}y,$$

или

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (12.1)$$

12.116. Найти приближенное значение $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

Решение. Представим $\operatorname{arctg} 0{,}97 = \operatorname{arctg}(1 - 0{,}03)$. Тогда в соответствии с формулой (12.1) $x = 1$, а $\Delta x = -0{,}03$:

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1 + 1^2}(-0{,}03) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{0{,}03}{2} \approx 0{,}7704 \approx 44°08'.$$

По тригонометрическим таблицам $\operatorname{arctg} 0{,}97 = 0{,}7702 \approx 44°07'$, т.е. вычисленное приближенно и взятое по таблицам значения $\operatorname{arctg} 0{,}97$ отличаются на 0,0002.

Найти дифференциалы функций:

12.117. $y = \cos^3 2x$.

12.118. $y = x\sqrt{7-2x}$. **12.119.** $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$.

12.120. $y = -\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2} + \frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3}$. **12.121.** $y = 3^{-x^3}$.

12.122. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$. **12.123.** $y = x\ln(x+1)$. **12.124.** $y = \frac{e^{5x}}{x^2}$.

12.125. $y = \frac{x^3+2}{e^{3x}}$. **12.126.** $y = \frac{e^{3x-5}}{\sqrt{x^2+4}}$.

12.127. Вычислить и сравнить Δy и dy для функции $y = x^3 - 5x^2 + 3$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Вычислить приближенное значение:

12.128. $\arcsin 0{,}95$. **12.129.** $\operatorname{tg} 46°$. **12.130.** $\sqrt[4]{80{,}5}$.

12.131. $(1{,}015)^5$.

12.132. Как изменится величина конечного вклада $S_к$, положенного на 3 года, если простая процентная годовая ставка увеличится на 0,1%, а начальный вклад $S_н$ равен 980 руб.?

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал $d(dy)$, обозначается d^2y. Тогда по определению $d^2y = d(dy) = y''(dx)^2$.

Дифференциалом n-го порядка d^ny называется дифференциал $d(d^{n-1}y)$. Следовательно, $d^ny = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}(dx)^n$. Отсюда, в частности, следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{(dx)^n}.$$

12.133. Найти дифференциал третьего порядка от функции $y = e^{x^2}$.

Решение.

$dy = e^{x^2} \cdot 2x\,dx;$

$d^2y = d(e^{x^2} \cdot 2x\,dx) = (e^{x^2} \cdot 4x^2 + 2e^{x^2})\,dx^2 = e^{x^2}(4x^2+2)\,dx^2;$

$d^3y = \left[e^{x^2}(8x^3+4x) + e^{x^2}(8x)\right]dx^3 = e^{x^2}(8x^3+12x)\,dx^3.$

12.134. Найти d^2y, если $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x$.

12.135. Найти d^3y, если $y = \cos(4x + 1)$.

12.136. Найти d^4y, если $y = \sqrt[3]{x+2}$.

12.137. Найти d^5y, если $y = x \ln x$.

12.6. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

Если из уравнения $\varphi(x, y) = 0$ выразить явно переменную y как функцию аргумента x затруднительно, тогда говорят о неявно заданной функции y от аргумента x. Например: $yx + \log_2(x^2 + y^2) - \sin(xy) = 0$. В дальнейшем неявно заданные функции будем считать дифференцируемыми.

Продифференцировав по x обе части уравнения $\varphi(x, y) = 0$, получим уравнение, содержащее y'. Из этого уравнения находим y', которую и называют *производной неявной функции* при всех значениях x и y, при которых она определена и существует.

12.138. Найти производную y'_x, если $yx + \log_2(x^2 + y^2) - \sin(xy) = 0$.

Решение. Продифференцируем обе части уравнения по x, приняв y как сложную функцию от x:

$$(y'x + y) + \frac{1}{(x^2+y^2)\ln 2}(2x + 2yy') - \cos(xy)\cdot(y + xy') = 0.$$

Выразим y' из этого уравнения:

$$y'\left[x + \frac{2y}{(x^2+y^2)\ln 2} - x\cos(xy)\right] + y + \frac{2x}{(x^2+y^2)\ln 2} - y\cos(xy) = 0.$$

Окончательно получим

$$y' = \frac{y\cos(xy) - y - \dfrac{2x}{(x^2+y^2)\ln 2}}{x - x\cos(xy) + \dfrac{2y}{(x^2+y^2)\ln 2}}.$$

Найти производные неявно заданных функций:

12.139. $x^2y^4 + 10 = 3x^4y^3 + x^5 - 5$.

12.140. $x^3 + x^2y - 4 = 2x^2y^2 - 6x + 1$.

12.141. $e^{yx} = \ln(x^2 + y^2)$.

12.142. $\arcsin y = x^2y^3 - 7yx^2$.

Если функция $y = f(x)$ представлена параметрически, а именно: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то производные первого и второго порядков y'_x и y''_{xx} можно найти по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{и} \quad y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

12.143. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} x'_t = -6\sin 2t, \\ y'_t = \cos t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x''_{tt} = -12\cos 2t, \\ y''_{tt} = -\sin t. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в формулу для второй производной:

$$y''_{xx} = \frac{\sin t \cdot 6\sin 2t + 12\cos 2t\cos t}{-216\sin^3 2t} = \frac{6\cos t + 6\cos 2t\cos t}{-216\sin^3 2t} =$$

$$= \frac{6\cos t(1 + \cos 2t)}{-216\sin^3 2t} = \frac{12\cos^3 t}{-216 \cdot 2\sin^3 t\cos^3 t} = \frac{-1}{36\sin^3 t}.$$

12.144. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

12.145. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t. \end{cases}$

12.146. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$

12.147. Найти y'_x, если $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = t^3 + 2t. \end{cases}$

12.148. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

12.149. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = a\sin^2 t, \\ y = b\cos t. \end{cases}$

12.7. Исследование функций и построение графиков

12.7.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. *Если функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b) и достигает в точке $x_0 \in (a, b)$ своего наибольшего или наименьшего значения, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

12.150. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = 3x^2 + 2x$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Найдем производную функции $y' = 6x + 2$. В точках $x = 0$ $y'(0) = 2 \neq 0$ и $x = 1$ $y'(1) = 8 \neq 0$; в нуль производная обращается в точке $x = -^1/_3$, но это значение не принадлежит интервалу $(0; 1)$. Таким образом, условиям теоремы Ферма данная функция на заданном отрезке не удовлетворяет. Наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах интервала, а не во внутренней точке.

Проверить, удовлетворяют ли приведенные функции условиям теоремы Ферма на заданных интервалах:

12.151. $y = -7x^2 + 28$ на отрезке $[-4; -2]$.

12.152. $y = x \ln x$ на интервале $(0; 1)$.

12.153. $y = 8 + 2x^2 - x^4$ на интервале $(-1{,}5; 0{,}5)$.

Теорема Ролля. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема $\forall x \in (a, b)$ и $f(a) = f(b)$, тогда существует точка $x = c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

12.154. Выполняется ли теорема Ролля для функции $y = -x^2 + 5x - 1$ на отрезке $[1; 4]$; при каком значении c выполняется условие $f'(c) = 0$?

Решение. Функция определена и непрерывна в каждой точке заданного отрезка. На концах отрезка $[1; 4]$ значения функции равны: $f(1) = f(4) = 3$, следовательно, теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значение c определяем из условия $f'(x) = -2x + 5 = 0$, т.е. $c = 2{,}5$.

Проверить, выполняется ли теорема Ролля для функций на заданных интервалах и, если выполняется, для каких значений c:

12.155. $y = x^2 + 7x + 3$ на отрезке $[-2; -5]$.

12.156. $y = 4 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-8; 8]$.

12.157. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$ на отрезке [0; 3].

12.158. Показать, что уравнение $x^3 + 2x - 1 = 0$ имеет только один вещественный корень.

Теорема Лагранжа. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема $\forall x \in (a, b)$, тогда существует точка $x = c \in (a, b)$, такая, что выполняется условие*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

12.159. Выполняется ли теорема Лагранжа для функции $y = 2x - x^2$ на отрезке [1; 3]?

Решение. Функция определена и непрерывна на отрезке [1; 3] и дифференцируема на интервале (1; 3). Вычислим $f(a) = 1$, $f(b) = -3$ и $b - a = 2$, тогда

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2.$$

Точка $c \in (a, b)$ вычисляется по формуле $f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow f'(c) = 2 - 2c = -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow c = 2 \in (1; 3)$. Следовательно, теорема Лагранжа выполняется.

12.160. На дуге AB кривой $y = \sqrt{8 - x}$ найти точку $M(c, y(c))$, в которой касательная параллельна хорде AB, где $A(-8; 4)$ и $B(-1; 3)$.

Решение. Функция $y = \sqrt{8 - x}$ непрерывна и дифференцируема в области определения функции $x \in (-\infty; 8]$. По теореме Лагранжа между двумя значениями $a = -8$ и $b = -1$ существует такое значение c, что

$$y(-1) - y(-8) = f'(c)[-1 - (-8)] \Rightarrow 3 - 4 = \frac{-1}{2\sqrt{8 - c}} \cdot 7 \Rightarrow c = -4{,}25 \Rightarrow M(-4{,}25; 4{,}5).$$

Проверить, выполняется ли теорема Лагранжа для функций и заданных отрезков, и, если выполняется, найти точку $x = c$:

12.161. $y = x^2$ на отрезке [3; 4].

12.162. $y = \ln x$ на отрезке [1; 3].

12.163. $y = \sqrt[3]{9x - x^2}$ на отрезке [0; 9].

Теорема Коши. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны, определены на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы $\forall\ x \in (a, b)$. Пусть также $g'(x) \neq 0$, тогда существует точка $x = c \in (a, b)$, такая, что для нее выполняется условие*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

12.164. Проверить, выполняется ли теорема Коши для функций:

а) $f(x) = -x^2 + 10x - 9$ и $g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ на отрезке $[0; 4]$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ и $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ на отрезке $[-1; 1]$;

если выполняется, то найти точку $x = c$.

Выписать условия теоремы Коши и найти точку c для функций:

12.165. $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^2 + 5$ на отрезке $[0; 3]$.

12.166. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

12.167. $f(x) = 2x^2 + 4x$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ на отрезке $[0; 3]$.

Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей:

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что предел в правой части выражения существует; аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ при условии, что предел в правой части существует, и т.д.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что предел в правой части выражения существует; аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ при условии, что предел в правой части существует, и т.д.

12.168. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - x - 1) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \sin^2 3x = 0$, можно применить первое правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2 \sin 3x \cos 3x \cdot 3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3 \sin 6x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{18 \cos 6x} = \frac{1}{18}.$$

12.169. Найти предел $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x}$.

Р е ш е н и е. Так как $\lim\limits_{x \to \pi/2} \ln(x - \pi/2) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$, имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Следовательно, можно применить второе правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos^2 x}{x - \pi/2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-2\cos x \sin x}{1} = 0.$$

В случае неопределенностей вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ следует путем алгебраических преобразований привести их к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

12.170. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)$.

Р е ш е н и е. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, следовательно, имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x \cos x}{1} = 0.$$

В случае неопределенностей вида 0^0, ∞^0 или 1^∞ следует предварительно прологарифмировать заданную функцию, а затем найти предел ее логарифма.

12.171. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Р е ш е н и е. В данном случае имеем неопределенность вида ∞^0. Прологарифмируем заданную функцию: $\ln y = \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$. Далее рассмотрим предел

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} (\sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x} \dfrac{-1}{\sin^2 x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

Если $\lim\limits_{x \to 0} \ln y = 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} y = 1$, следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = 1$.

Найти пределы:

12.172. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$.

12.173. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+3x^2-2}{x^3-4x^2+5}$.

12.174. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

12.175. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi - 2\,\mathrm{arctg}\, x}{e^{3/x}-1}$.

12.176. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

12.177. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

12.178. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{1/x}$.

12.179. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x}{x}$.

12.180. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{ctg}\,(x-1)}{\ln(1-x)}$.

12.181. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}$.

12.182. $\lim\limits_{x \to \infty} (xe^{-x})$.

12.183. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

12.184. $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x \cdot \mathrm{ctg}\, x)$.

12.185. $\lim\limits_{x \to 1} \left((1-x)\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

12.186. $\lim\limits_{x \to 0} ((1-\cos x)\mathrm{ctg}\, x)$.

12.187. $\lim\limits_{x \to 0} (x\,\mathrm{ctg}\,\pi x)$.

12.188. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

12.189. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

12.190. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

12.191. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2\, x\right)$.

12.192. $\lim\limits_{x \to 1} ((x-1)\ln(x-1))$.

12.193. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

12.194. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\sin 2x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$.

12.195. $\lim\limits_{x \to \infty} (x+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

12.196. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

12.197. $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x \cdot \ln(x-1))$.

12.7.2. Формула Тейлора

Теорема Тейлора. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке $x = a$ и в некоторой окрестности этой точки функция имеет производные до $(n+1)$-го порядка, тогда существует точка $x = \xi$, такая, что выполняется формула Тейлора*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

причем точка ξ лежит между x и a, т.е. $\xi = a + \theta(x-a)$ и $0 < \theta < 1$.

Последнее слагаемое в формуле Тейлора называется *остаточным членом в форме Лагранжа* и обозначается $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

При $a = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

12.198. Представить функцию $f(x) = \frac{1}{x-2}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $x - 1$.

Решение. Функция определена в точке $a = 1$ и имеет все свои производные в окрестности этой точки. Вычислим значение функции и ее производных до пятого порядка включительно в точке $a = 1$:

$$f(1) = -1; \quad f'(1) = \left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)_{x=1} = -1; \quad f''(1) = \left(\frac{1\cdot 2}{(x-2)^3}\right)_{x=1} = -2;$$

$$f'''(1) = \left(\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x-2)^4}\right)_{x=1} = -6; \quad f^{\text{IV}}(1) = \left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x-2)^5}\right)_{x=1} = -24;$$

$$f^{\text{V}}(1) = \left(\frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(x-2)^6}\right)_{x=1} = -120.$$

Тогда по формуле Тейлора получим многочлен относительно $x - 1$:

$$\frac{1}{x-2} = -1 - (x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 - \frac{24}{4!}(x-1)^4 - \frac{120}{5!}(x-1)^5 + R_6 =$$

$$= -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 - (x-1)^4 - (x-1)^5 + R_6,$$

где $R_6 = \left(\frac{6!}{6!(x-2)^6}\right)_{x=\xi}(x-1)^6 = \frac{(x-1)^6}{(\xi-2)^6}$ и $1 < \xi < x$.

12.199. Представить функцию $f(x) = 3^x$ в виде многочлена третьей степени относительно x.

Решение. В данном случае $x = a = 0$, поэтому

$$\begin{aligned}
&f(x) = 3^x, && f(0) = 1;\\
&f'(x) = 3^x\ln 3, && f'(0) = \ln 3;\\
&f''(x) = 3^x\ln^2 3, && f''(0) = \ln^2 3;\\
&f'''(x) = 3^x\ln^3 3, && f'''(0) = \ln^3 3;\\
&f^{\text{IV}}(x) = 3^x\ln^4 3, && f^{\text{IV}}(\theta x) = \ln^4 3\cdot 3^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.
\end{aligned}$$

Тогда по формуле Маклорена получим

$$3^x = 1 + \ln 3\cdot x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!}x^3 + R_4,$$

где $R_4 = \frac{\ln^4 3}{4!}3^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$

12.200. Представить функцию $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ в виде многочлена третьей степени относительно двучлена $x + 1$.

12.201. Представить функцию $f(x) = e^{x^2+2x}$ в виде многочлена пятой степени по x.

12.202. Представить функцию $f(x) = \ln(x + 1)$ в виде многочлена третьей степени относительно двучлена $x - 3$.

12.203. Представить функцию $f(x) = a^x$ в виде многочлена четвертой степени относительно $x - 1$.

12.204. Представить функцию $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ в виде многочлена третьей степени по x.

12.7.3. Интервалы монотонности

Функция $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) на интервале (a, b), если для $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Функция $y = f(x)$ *не возрастает* (*не убывает*) на интервале (a, b), если для $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \leqslant f(x_2))$.

Теорема. *Если $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ $\forall\, x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на данном интервале.*

12.205. Определить интервалы монотонности функции $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.

Решение. Область определения функции — вся числовая ось. Находим первую производную: $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$. Далее находим корни производной: $3(x^2 - 4x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = 5$. Методом интервалов исследуем знаки первой производной для возможных изменений аргумента (рис. 12.3).

Рис. 12.3

Следовательно, для $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$ производная $y'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает, а для $x \in (-1; 5)$ соответственно $y'(x) < 0 \Rightarrow$ функция убывает.

Определить интервалы монотонности функций:

12.206. $y = \ln(x + 1)$. **12.207.** $y = e^{2x}$. **12.208.** $y = xe^{3x}$.

12.209. $y = xe^{-x}$. **12.210.** $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 72$.

12.211. $y = x + x\sqrt{x}$. **12.212.** $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

12.213. $y = \sqrt{4 - x^2}$.   **12.214.** $y = 2\sin\frac{x}{2}$, если $x \in [-\pi; 2\pi]$.

12.215. $y = x - 2\sin x$, если $x \in [0; 2\pi]$.

12.216. Функция спроса на товар имеет вид $P = 7 - \sqrt{Q+5}$, а функция издержек $TC = 4{,}25Q + 0{,}0125$.

Найти:

а) объем производства Q, максимизирующий выручку TR, а также соответствующие цену товара P и величину выручки;

б) цену и количество товара, максимизирующие прибыль π;

в) эластичность спроса $E_\pi(Q)$ по цене в точках максимальной прибыли и выручки $E_{TR}(Q)$.

12.7.4. Экстремум функции

Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом* (*локальным минимумом*) функции $y = f(x)$, если при любом достаточно малом δ выполняется условие $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$ $\forall\, x \in (x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta)$. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции. Локальные максимумы и минимумы функции называются *экстремумами* функции, а точки максимума или минимума — *точками экстремума*.

Теорема (необходимое условие локального экстремума). *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.*

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими*. Экстремум в таких точках может быть, а может и не быть.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть x_0 — критическая точка функции $y = f(x)$; если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум (локальный минимум); если же производная $f'(x)$ не меняет знака в δ-окрестности точки x_0, то данная функция не имеет в точке x_0 локального экстремума.*

Теорема (второе достаточное условие экстремума). *Пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, причем x_0 — точка локального максимума (минимума), если $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$.*

Для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее или наименьшее.

12.217. Исследовать на экстремум функцию $y = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Р е ш е н и е. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y' = \dfrac{5x-6}{3\sqrt[3]{x-2}}$ и определяем критические точки: $y = 0$ при $x_1 = {}^6/_5$ и y' не существует при $x_2 = 2$. Исследуем знаки первой производной до и после критической точки (рис. 12.4).

Рис. 12.4

Согласно первому достаточному условию в точке $x_1 = {}^6/_5$ функция имеет локальный максимум, а в точке $x_2 = 2$ — локальный минимум, при этом

$$y_{\max} = \frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}, \qquad \text{а } y_{\min} = 0.$$

12.218. Исследовать на экстремум функцию $y = 12x - x^3$.

Р е ш е н и е. Функция определена для всех вещественных чисел. Находим производную $y' = 12 - 3x^2$ и критические точки: $12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Находим вторую производную $y'' = -6x$. Имеем $y''(-2) = +12 > 0$, следовательно, согласно второму достаточному условию, в точке $x_1 = -2$ функция имеет локальный минимум, а $y''(2) = -12 < 0 \Rightarrow x_2 = 2$ — точка локального максимума функции, при этом $y_{\min} = y(-2) = -16$, а $y_{\max} = y(2) = 16$.

12.219. Функция суточного спроса Q на мороженое (тыс. шт.) в зависимости от цены P за одну порцию (руб.) имеет вид $Q = 3 - \sqrt{P}$. Эффективная область «работы» этой формулы от 1 до 9 руб. При какой цене за порцию мороженого совокупная выручка будет максимальной?

Р е ш е н и е. Совокупная выручка определяется из соотношения $TR = Q \cdot P$, где Q — количество реализованных порций мороженого (тыс. шт.); P — цена за одну порцию (руб.). Тогда функция совокупной выручки в зависимости от цены примет вид $TR = (3 - \sqrt{P})P$. Требуется найти наибольшее значение этой функции на отрезке $[1; 9]$.

Для этого находим критические точки функции, принадлежащие данному отрезку:

$$(TR)' = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{P} \Rightarrow (TR)' = 0, \quad \sqrt{P} = 2, \quad P = 4.$$

Критическая точка $P = 4$. Вычислим значение функции совокупной выручки на концах интервала и в критической точке:

$TR(1) = (3 - 1) \cdot 1 = 2;$
$TR(4) = (3 - 2) \cdot 4 = 4;$
$TR(9) = 0.$

Следовательно, при цене 4 руб. за порцию совокупная выручка будет максимальной и составит 4 тыс. руб.

Найти экстремумы функций:

12.220. $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x - 1$. **12.221.** $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$.

12.222. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$. **12.223.** $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **12.224.** $y = x - 2\ln x$.

12.225. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **12.226.** $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$.

12.227. $y = 2\sin x + \cos 2x$ на интервале $(0; \pi)$.

12.228. $y = x - 2\sin^2 x$. **12.229.** $y = x\ln x$. **12.230.** $y = x^2e^{-x}$.

12.231. $y = (3x+6)e^{\frac{x}{3}}$. **12.232.** $y = \sqrt[3]{x-1}$. **12.233.** $y = \dfrac{2x+3}{3x-5}$.

12.234. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3; 2]$.

12.235. Найти наибольшее значение функции $y = x + 2\sqrt{-x}$ на отрезке $[-4; 0]$.

12.236. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 4x - 8$ на отрезке $[-1; 8]$.

12.237. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$ на отрезке $[0; 4]$.

12.238. Из прямоугольного листа картона размером $2{,}4 \times 1{,}5$ м^2 требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырех углов листа, чтобы объем полученной коробки был максимальным? Чему равен объем такой коробки?

12.239. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 200 кг раннего картофеля и реализовать его по 12 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки составляет 5 недель?

12.240. Окно в загородном доме имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен P. При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

12.241. Из листа жести требуется сделать ведро цилиндрической формы с крышкой. Площадь полной поверхности цилиндра, который можно выкроить из этого листа, составляет S. Каковы должны быть размеры ведра наибольшего объема?

12.242. Требуется огородить прямоугольную площадь вдоль уже выстроенной стены. Стоимость ограждения стороны, параллельной стене, равна 60 руб. за метр; стоимость ограждения двух других сторон составляет 90 руб. за метр. Какая максимальная площадь может быть огорожена, если имеется всего 10 800 руб.?

12.243. Прямоугольный участок разделен перегородкой, параллельной меньшей из сторон прямоугольника. Стоимость установки внешнего ограждения составляет 900 руб. за метр, а перегородки — 1600 руб. за метр. Общая площадь участка 153 м^2. Определить размеры участка, минимизирующие стоимость строительства ограждения.

12.244. Издержки производства некоторого товара равны $TC = 4 + 15Q$; спрос на товар определяется функцией $P = -Q^2 + 20Q + 2$; $10 < Q < 20$. Найти объем продукции Q, максимизирующий прибыль.

12.7.5. Выпуклость вверх и выпуклость вниз (вогнутость). Точки перегиба. Асимптоты

График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) *выпуклость вверх* (*вниз*), если на этом интервале график расположен не выше (не ниже) касательной к графику функции, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 12.5).

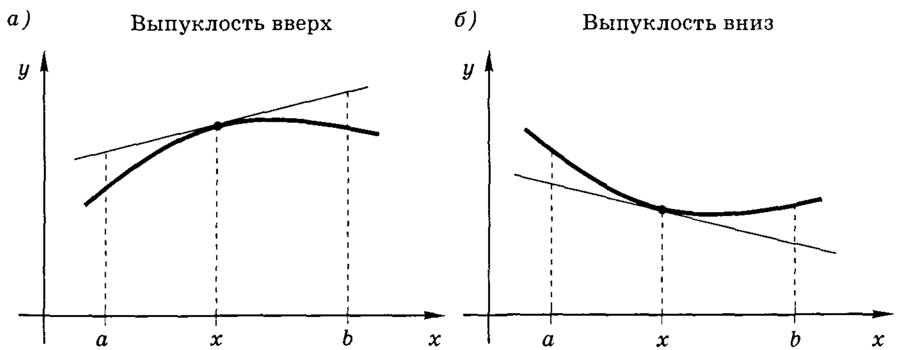


Рис. 12.5

Теорема (достаточное условие выпуклости вверх (вниз)). *Если функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) имеет $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$, то график функции имеет на интервале (a, b) выпуклость вверх (вниз).*

Если в точке $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот, то точка $M(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба.*

Теорема (необходимое условие точки перегиба). *Если в точке $M(x_0, f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба, а сама функция имеет непрерывную вторую производную, тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т.е. $f''(x_0) = 0$.*

Точки графика функции, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками II рода.*

Теорема (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0 и пусть в самой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если в указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, график функции имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.*

12.245. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = 0{,}5x^3 + 3x^2 - 18x + 20$.

Решение. Область определения функции — вся числовая ось. Находим производные:

$$f'(x) = 1{,}5x^2 + 6x - 18; \quad f''(x) = 3x + 6.$$

Приравняв к нулю вторую производную, получим критическую точку II рода: $3x + 6 = 0$; $x = -2$. Исследуем знак второй производной в окрестности этой точки:

$$f''(-3) = -3 < 0; \quad f''(0) = 6 > 0.$$

Следовательно, для $x \in (-\infty; -2)$ $f''(x) < 0$ и график функции выпуклый вверх, а для $x \in (-2; \infty)$ — выпуклый вниз. Таким образом, при переходе через точку $x_0 = -2$ $f''(x)$ меняет знак. Следовательно, точка $M(-2; 64)$ — точка перегиба графика данной функции.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функций:

12.246. $y = x^3 - 6x^2 + x$. **12.247.** $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

12.248. $y^2 = x^3$. **12.249.** $y = (x - 1)^4 - 24x^2 + 3x$.

12.250. $y = e^{-x^2}$. **12.251.** $y = xe^x$.

12.252. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$. **12.253.** $y = x - \ln x$.

Прямая линия L называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на кривой, до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Существуют вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, то прямая $x = a$ является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является *горизонтальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют одновременно пределы:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$$

или

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

12.254. Найти асимптоты кривой $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x + 2}}$.

Решение. Данная функция определена для

$$\frac{x^3 - 1}{x + 2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x + 2} \geqslant 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [1, \infty).$$

Так как $\lim\limits_{x \to -2-0} \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x + 2}} = +\infty$, то прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой. Горизонтальных асимптот график функции не имеет, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x + 2}} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x + 2}} = +\infty$.

Определим, существуют ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x}\right)}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1} - \sqrt{x^3 + 2x^2}}{\sqrt{x + 2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 1 - x^3 - 2x^2}{\sqrt{x + 2}\left(\sqrt{x^3 - 1} + \sqrt{x^3 + 2x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-(2x^2 + 1)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) x\sqrt{x}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1 + \frac{2}{x}}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)} = -1.$$

Следовательно, прямая $y = x - 1$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$. Далее,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x}}} \right) = -1;$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(-x)^3 - 1} + x\sqrt{-x + 2}}{\sqrt{-x + 2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^3 - 1 - (-x)^3 - 2x^2}{\sqrt{-x + 2}\left(\sqrt{(-x)^3 - 1} - x\sqrt{-x + 2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 - 2x^2}{-x^2\sqrt{1 + \frac{2}{-x}}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{(-x)^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{-x}}\right)} = 1.$$

Следовательно, существует левая наклонная асимптота $y = -x + 1$ (рис. 12.6).

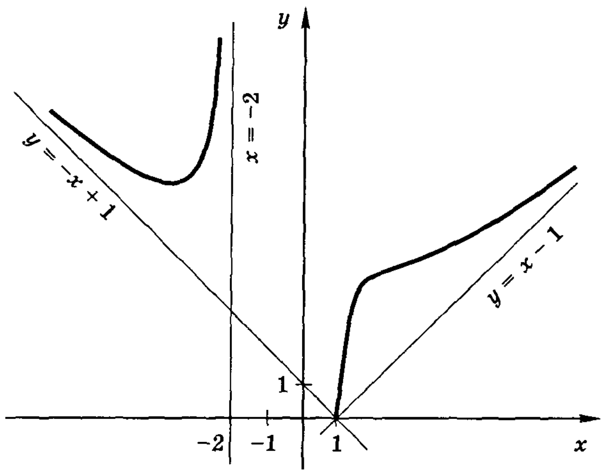


Рис. 12.6

Найти асимптоты кривых:

12.255. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$. **12.256.** $y = x^2 e^x$. **12.257.** $y = 2x + \dfrac{\sin x}{x}$.

12.258. $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$. **12.259.** $y = x - \ln x$.

12.260. $y = 2x + \operatorname{arctg} x$. **12.261.** $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 1} + 2x$.

Схема исследования графиков функции $y = f(x)$:

1. Определить область существования функции.

2. Исследовать функцию на четность и нечетность.

3. Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

4. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва функции, если они имеются; найти асимптоты кривой.

5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

6. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз; определить точки перегиба.

7. Построить график функции.

12.262. Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Область существования функции

$$D(f) = \{x \mid x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)\}.$$

2. Функция не является четной или нечетной.

3. Точки пересечения с осями координат:

если $x = 0$, то $y = 0$;

если $y = 0$, то $x = 0$,

т.е. кривая пересекает ось x и ось y в начале координат.

4. Точка разрыва $x = -1$. Исследуем характер разрыва:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty; \qquad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty,$$

таким образом, разрыв бесконечный II рода.

Найдем асимптоты графика функции: $x = -1$ — вертикальная асимптота; так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty,$$

горизонтальных асимптот нет.

Рассмотрим

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Заметим сразу, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Далее,

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 + x}{2x^2 + 4x + 2} = -1.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y = \frac{1}{2}x - 1$.

5. Вычислим первую производную и исследуем ее знаки (рис. 12.7):

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3};$$

$y' > 0$ для $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$ — функция возрастает;
$y' < 0$ для $x \in (-3; -1)$ — функция убывает.

Рис. 12.7

В точках $x = -3$ и $x = 0$ производная $y' = 0$, но в окрестности точки $x = -3$ она меняет знак, поэтому в точке $x = -3$ функция имеет экстремум (максимум); в окрестности точки $x = 0$ производная y' не изменяет знака, следовательно, точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции.

Вычислим значения: $y(-3) = \frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2} = -\frac{27}{8}$; $\quad y(0) = 0$.

В точке $x = -1$ производная y' не существует, но в этой точке не существует и сама функция, поэтому $x = -1$ не является критической точкой для производной.

6. Вычислим вторую производную и исследуем ее знаки:

$$y'' = \frac{1}{2}\,\frac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - 3(x^3 + 3x^2)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4};$$

$y'' < 0$ для $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ — функция выпукла вверх;
$y'' > 0$ для $x \in (0; \infty)$ — функция выпукла вниз.

В точке $x = 0$ $\quad y'' = 0$ и в окрестности этой точки вторая производная изменяет знак, значит, в точке $x = 0$ функция имеет точку перегиба.

7. Результаты этих исследований наносим на график (рис. 12.8).

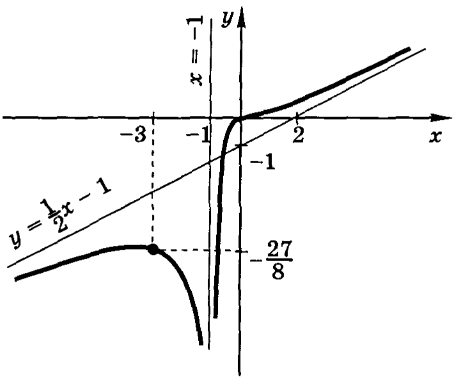


Рис. 12.8

Построить графики функций:

12.263. $y = 3\sqrt[3]{x} - x$.

12.264. $y = x\sqrt{1-x}$.

12.265. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

12.266. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

12.267. $y = \dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$.

12.268. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.

12.269. $y = xe^{-x/2}$.

12.270. $y = x^2e^{1/x}$.

12.271. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

12.272. $y = x^2e^{-x^2}$.

12.273. $y = \dfrac{2x}{\ln x}$.

12.274. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

12.275. $y = \dfrac{x^3+2}{x^2}$.

12.276. $y = (2 + x^2)e^{-x^2}$.

12.277. $y = (x - 1)\,e^{1-x}$.

12.278. $y = \ln \dfrac{x}{x-1}$.

12.279. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

12.280. $y = \ln(1 + e^{-x})$.

12.281. $y = x + e^{-x}$.

12.282. $y = e^{2x-x^2}$.

12.283. $y = (2x - 1)e^{\frac{2}{x}}$.

12.284. $y = x \operatorname{arctg} x$.

12.285. $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$.

12.286. $y = xe^{-\frac{1}{x}}$.

12.287. $y = \dfrac{3}{2}x\ln\left(e - \dfrac{1}{3x}\right)$.

12.288. $y = \dfrac{1}{4}|x^3 - 8|$.

12.289. $y = x^2 \ln x$.

12.290. $y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

13. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

13.1. Область определения, способы задания, линии и поверхности уровня

Если любой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторого числового множества $D = \{(x, y)\}$ поставлено в соответствие согласно некоторому правилу f число z из множества Z, то говорят, что на множестве D з а д а н а функция $z = f(x, y)$. При этом переменные x и y называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), а переменная z — *зависимой переменной* или *функцией двух переменных*. Множество $D = \{(x, y)\}$ называется *областью определения* функции, а множество $Z = \{f(x, y)\}$ — *множеством значений* функции.

Каждой упорядоченной паре чисел (x, y) при фиксированной прямоугольной системе координат соответствует единственная точка M плоскости xOy и, наоборот, каждой точке M соответствует единственная упорядоченная пара чисел (x, y), поэтому функцию двух переменных иногда удобно рассматривать как функцию точки M и записывать в виде $z = f(M)$. Область определения в этом случае рассматривается как некоторое множество точек плоскости.

Аналогично можно определить функцию любого конечного числа независимых переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $z = f(M)$, где M — точка в пространстве n измерений $M \in D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \subset \boldsymbol{R}^n$.

Геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (графическое задание функции) является некоторая поверхность. Графически задать функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ уже не представляется возможным.

Линией уровня $z = c$ функции $z = f(x, y)$ называется линия на плоскости $f(x, y) = c$. В каждой точке, лежащей на этой линии, функция $z = f(x, y)$ принимает значение, равное c. *Поверхностью уровня* $u = c$ функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция $u = f(x, y, z)$ сохраняет значение, равное c.

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может быть задана таблично.

Найти области определения функций:

13.1. $z = x + y$. **13.2.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$. **13.3.** $z = \sqrt{xy}$.

13.4. $z = y\sqrt{x}$. **13.5.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. **13.6.** $z = \arcsin(x + y)$.

13.7. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. **13.8.** $u = \sqrt{x + y + z}$.

13.9. $u = \dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

13.10. Найти область определения и множество значений таблично заданной функции:

Стоимость автомобиля z (тыс. руб.) **в зависимости от количества покупаемых автомобилей** x **и комплектации** y

Количество автомобилей в партии	Комплектация автомобиля		
	I	II	III
1—3	10,0	10,5	11,0
4—7	9,7	10,1	10,5
8—15	9,6	10,0	10,3
Более 15	9,5	9,8	10,2

Построить линии уровней следующих функций (для $z = 1, 2, 3$):

13.11. $z = x + y$. **13.12.** $z = x^2 - y^2$. **13.13.** $z = \dfrac{x}{y}$.

13.14. $z = x^2 + y^2 + 3$. **13.15.** $z = \dfrac{y - x^2}{x^2}$. **13.16.** $z = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

13.17. $z = \ln(xy)$. **13.18.** $z = e^{xy}$.

Построить поверхности уровней функций (для $u = 0, 1, 2$):

13.19. $u = 2x + y + 3z$. **13.20.** $u = x^2 + y^2 + z^2$.

13.21. $u = 4x^2 + 9y^2 + z^2$.

13.2. Частные производные. Производная по направлению. Градиент

Частные производные первого порядка. *Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x* называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

вычисленный при постоянном значении y.

Частной производной по y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

вычисленный при постоянном значении x.

Для вычисления частных производных можно воспользоваться обычными правилами и формулами дифференцирования.

13.22. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = x^2 + 3x\sqrt{y} - y + \dfrac{y^2}{x}$.

Решение. При вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменная y рассматривается как постоянная величина:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3\sqrt{y} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Рассмотрим теперь переменную x как постоянную величину:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x\frac{1}{2\sqrt{y}} - 1 + \frac{2y}{x}.$$

13.23. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = xye^{x^2-y^2}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = y(e^{x^2-y^2} + 2x^2e^{x^2-y^2})$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x(e^{x^2-y^2} - 2y^2e^{x^2-y^2})$.

13.24. Найти $\frac{\partial u}{\partial s}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$, если $u = \sqrt{s}\cos^2 t$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\cos^2 t$; $\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{s}\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t) = -\sqrt{s}\sin 2t$.

13.25. Показать, что функция $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{(при постоянных } y \text{ и } z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{(при постоянных } x \text{ и } z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{(при постоянных } x \text{ и } y).$$

Возводим эти выражения в квадрат и подставляем в левую часть заданного уравнения:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$$

Получаем тождественное равенство, т.е. функция u удовлетворяет уравнению.

Найти частные производные от функций:

13.26. $z = 2x^2 - xy^2 + 3x^2y - 2y^3 + 3x - 4y + 1$.

13.27. $u = yx^3 + xz^2 + y^2z$. **13.28.** $u = s^3\cos 4t$.

13.29. $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}$. **13.30.** $z = \ln(x^2+y^2)$. **13.31.** $z = \frac{xy}{x+y}$.

13.32. $u = e^{xyz}(x^2+y^2+z^2)$. **13.33.** $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$.

13.34. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$. **13.35.** $z = xye^{x+2y}$.

13.36. $z = \ln(x + \ln y)$. **13.37.** $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$.

13.38. $u = e^{\frac{z}{xy}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y+z}\right)$. **13.39.** $z = \arcsin\sqrt{xy}$.

Показать, что данные функции удовлетворяют приведенным уравнениям:

13.40. $z = \sqrt{x}\cos\frac{x}{y}$; $\quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

13.41. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$; $\quad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

13.42. $z = y\ln(x^2 - y^2)$; $\quad \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Производная по направлению. Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, пусть $l^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ — единичный вектор, задающий направление прямой L, проходящей через точку $M(x, y)$. Выберем на прямой L точку $M_1(x_1, y_1) = M(x, y) + \tau \cdot l^0$ (рис. 13.1). Рассмотрим приращение функции $\Delta z = z(M_1) - z(M) = f(x + \tau\cos\alpha,\ y + \tau\cos\beta) - f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

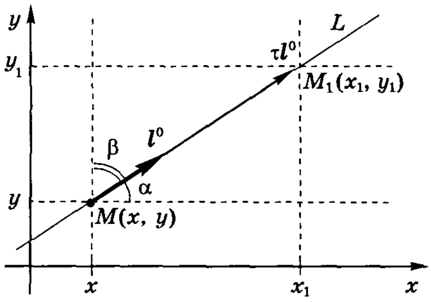


Рис. 13.1

Предел отношения $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{f(x+\tau\cos\alpha, y+\tau\cos\beta) - f(x, y)}{\tau}$, если он существует, называется *производной функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M(x, y)$ *по направлению* $l^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$.

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ непрерывные частные производные, то в этой точке существует и производная по любому направлению, исходящему из точки $M(x, y)$; вычисляется эта производная по формуле $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора l^0.

13.43. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ в точке $M(1;\ 1)$ по направлению вектора $l = (3;\ 4)$.

Р е ш е н и е. Находим единичный вектор l^0, совпадающий с направлением вектора l (т.е. найдем орт вектора l): $l^0 = \frac{l}{|l|} = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$, т.е. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y + 2$ и вычисляем их значения в точке $M(1;\ 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot 1 + 1 + 2 = 5, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + 2\cdot 1 + 2 = 5.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 5\cdot\frac{3}{5} + 5\cdot\frac{4}{5} = 7.$$

Градиент. *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке M_0, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке $M(x, y)$.

Градиент обозначается $\mathrm{grad}\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Аналогично определяются производная по направлению и градиент для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\mathrm{grad}\, u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы единичного вектора l^0.

Градиент есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции $u = f(M)$.

13.44. Найти градиент функции $u = x^2 + 3xy^2 - z^3y$ в точке $M(-2;\ 3;\ -1)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - z^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -3z^2y.$$

Вычисляем значение этих производных в точке $M(-2;\ 3;\ -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(-2;\ 3;\ -1) = 2\cdot(-2) + 3\cdot 3^2 = 23;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(-2;\ 3;\ -1) = 6\cdot(-2)\cdot 3 - (-1)^3 = -35;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_z(-2;\ 3;\ -1) = -3\cdot(-1)^2\cdot 3 = -9.$$

Окончательно получаем $\mathrm{grad}\, u(M) = (23;\ -35;\ -9)$.

Найти производные приведенных функций по направлению вектора l в заданной точке:

13.45. $z = x^3y - 5xy^2 + 8$, $\quad l = (1;\ 1)$ в точке $M_0(1;\ 1)$.

13.46. $z = \ln\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)$, $\quad l = (6;\ 8)$ в точке $M_0(1;\ 2)$.

13.47. $z = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$, $\quad l = (1;\ 1)$ в точке $M(x,\ y)$.

13.48. $u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad l = (2;\ 1;\ 2)$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

13.49. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1;\ 2;\ 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{MN}$, где $N(3;\ 6;\ 5)$.

13.50. Построить линии уровня функции $z = 4 - x^2 - y^2$. Найти величину и направление градиента $\operatorname{grad} z$ в точке $M_0(1;\ 2)$.

13.51. Построить поверхности уровня функции $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, найти $\operatorname{grad} u(M_0)$ в точке $M_0(a,\ b,\ c)$.

Найти $\operatorname{grad} z$ и $|\operatorname{grad} z|$:

13.52. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ в точке $M_0(0;\ 3)$.

13.53. $z = (x - y)^2$ в точке $M_0(1;\ 1)$.

13.54. $z = \mathrm{e}^{(x^2 + y^2)/(2xy)}$ в точке $M_0(1;\ 1)$.

Найти $\operatorname{grad} u(M_0)$ и $|\operatorname{grad} u(M_0)|$:

13.55. а) $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $M_0(2;\ 0;\ 3)$;

б) $u = 4 - x^2 - y^2 - z^2$ в точке $M_0(3;\ 2;\ 1)$.

13.56. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(3;\ -1;\ 2)$.

13.57. $u = -\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z}{c}$ в точке $M_0(a,\ b,\ c)$.

13.58. $u = xyz$ в точке $M_0(3;\ -1;\ 2)$.

13.3. Дифференциал

Полное приращение дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ можно представить в виде

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где ε_1 и ε_2 — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Дифференциалом dz дифференцируемой в точке M функции $z = f(M)$ называется главная, линейная относительно Δx и Δy, часть полного приращения этой функции, т.е. $dz = f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y$. Если принять приращения аргументов Δx и Δy равными их дифференциалам, т.е. $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то дифференциал функции можно записать следующим образом:

$$dz = f'_x(M)\,dx + f'_y(M)\,dy.$$

Из определения следует, что $dz \approx \Delta z$, т.е. при достаточно малых Δx и Δy полное приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

13.59. Найти дифференциал функции $z = e^{x^2 y}$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = e^{x^2 y} x^2,$$

а затем дифференциал

$$dz = 2xye^{x^2 y}\,dx + x^2 e^{x^2 y}\,dy.$$

Найти дифференциалы следующих функций:

13.60. $z = 2x^2 - xy + 3y^3$.

13.61. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

13.62. $z = \ln(3x + 2y)$.

13.63. $z = 2^{xy}$.

13.64. $z = x^y$.

13.65. $z = \arcsin \frac{x - y}{2x + y}$.

13.66. $z = xy \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

13.67. $z = e^x e^{\frac{x}{y}}$.

13.68. $z = e^{\cos^2(x^2 + y^2)}$.

13.69. $u = e^{xyz}$.

13.70. $u = \operatorname{tg}^2 \frac{xy}{z}$.

13.71. $u = e^x(\cos y + z \sin x)$.

13.72. Вычислить приближенное значение $\sqrt{\operatorname{tg}^3 2{,}4 + 3e^{0{,}01}}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{\operatorname{tg}^3 x + 3e^y}$ в точке $M(x,\ y)$ при $x = \frac{3\pi}{4} \approx 2{,}36$, $\quad y = 0$.

Решение. Находим значение данного корня из соотношения

$$\sqrt{\operatorname{tg}^3 2{,}4 + 3e^{0{,}01}} \approx \sqrt{\operatorname{tg}^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 3e^0} + dz = \sqrt{2} + dz,$$

при этом dz вычисляем как приращение функции, обусловленное приращением аргументов $\Delta x = 2{,}4 - 2{,}36 = 0{,}04$, $\quad \Delta y = 0{,}01$. Имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = \frac{3\operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{\operatorname{tg}^3 x + 3e^y}}\, dx + \frac{3e^y}{2\sqrt{\operatorname{tg}^3 x + 3e^y}}\, dy;$$

$$dz(M) = \frac{3\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)\frac{1}{\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{\operatorname{tg}^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 3e^0}}\, 0{,}04 + \frac{3e^0}{2\sqrt{\operatorname{tg}^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 3e^0}}\, 0{,}01 =$$

$$= \frac{3(-1)^2 \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{2\sqrt{(-1)^3 + 3}}\, 0{,}04 + \frac{3}{2\sqrt{(-1)^3 + 3}}\, 0{,}01 = \frac{6 \cdot 0{,}04}{2\sqrt{2}} + \frac{3 \cdot 0{,}01}{2\sqrt{2}} = \frac{0{,}27}{2\sqrt{2}} = 0{,}095.$$

Тогда $\sqrt{\operatorname{tg}^3 2{,}4 + 3e^{0{,}01}} \approx \sqrt{2} + \frac{0{,}27}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}509$.

13.73. Вычислить приближенное значение $3{,}01^{2{,}03}$, исходя из значения функции $z = x^y$ при $x = 3$, $\quad y = 2$, заменяя ее приращение дифференциалом.

13.74. Вычислить приближенно $\ln(8{,}001 + 0{,}99^3)$, исходя из значения функции $z = \ln(x^3 + y^3)$ при $x = 2$, $\quad y = 1$.

13.75. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{3{,}61 - 0{,}05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt[3]{x^2 - y^2}$ при $x = 2$, $\quad y = 0$.

13.76. Вычислить, на сколько процентов приближенно изменится спрос, описываемый функцией $z = 5474e^{-\sqrt{n + p^2}}$, где n — число производителей товара, а p — цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1%, а цена возрастет на 1%. На рынке товара имеется 7 производителей, цена товара составляет 3 ед.

13.4. Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет первые частные производные $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ в точке $M(x, y)$ и в каждой точке некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Тогда частные производные от частных производных $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ называются *частными производными второго порядка (вторыми частными производными)* от функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$. Частные производные второго порядка обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(M); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(M);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(M); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(M).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего порядка и более высоких порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(M); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = f'''_{yxx}(M);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xyx}(M).$$

Если частные производные первого порядка непрерывны, то значение «смешанной» производной не зависит от порядка дифференцирования, т.е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Это положение распространяется и на частные производные более высокого порядка.

13.77. Найти вторые частные производные функции $z = xy \ln \frac{x}{y}$.

Решение. Вначале находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \ln \frac{x}{y} + xy \frac{y}{x} \frac{1}{y} = y \ln \frac{x}{y} + y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y \ln \frac{x}{y} + xy \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = y \ln \frac{x}{y} - x.$$

Далее находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y \frac{y}{x} \frac{1}{y} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \ln \frac{x}{y} + 1 + y \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \ln \frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y}.$$

13.78. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = \sin x \operatorname{tg} y$.

Решение. Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} y \cos x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \frac{1}{\cos^2 y}$. Далее, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}$. Очевидно, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Найти вторые частные производные от заданных функций:

13.79. $z = 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2y - y^3$. **13.80.** $u = e^{xyz}$.

13.81. $u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$. **13.82.** $z = \arcsin(x + y)$.

13.83. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x+y}{x-y}$. **13.84.** $z = x \sin xy + y \cos xy$.

13.85. $z = x^2 \ln(x + y)$. **13.86.** $z = x^2 \sin \sqrt{y}$. **13.87.** $z = x^y$.

Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций:

13.88. $z = \frac{y^2}{1+x}$. **13.89.** $z = ye^x$. **13.90.** $z = \sin x \cos 2y$.

13.91. $z = y \ln x$. **13.92.** $z = e^{x+y^2}$. **13.93.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{xy}$.

Проверить, что $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ для функций:

13.94. $z = x \sin y$. **13.95.** $z = yx \ln(x + y)$.

13.96. $z = y^{x^2} + x^{y^2}$.

13.97. Показать, что функция $z = \frac{xy}{x-y}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}.$$

13.98. Показать, что функция $z = ye^{x^2-y^2}$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

13.99. Показать, что функция $u = f(x)g(y)h(z)$ удовлетворяет уравнению $u^2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$.

13.5. Экстремумы функций двух переменных

Функция $z = f(x, y)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любой точки $M(x, y)$, находящейся в некоторой ρ-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, выполняется условие $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) < f(x, y))$; ρ-окрестность можно представить множеством точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \rho$, где ρ — положительное достаточное малое число.

Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами*, а $M_0(x_0, y_0)$ — *экстремальной точкой.*

Теорема (необходимые условия экстремума). *Если $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция и достигает в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю:*

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0.$$

Точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль (или не существуют), называются *критическими* или *стационарными*. Исследование их на экстремум проводят с помощью достаточных условий существования экстремума функции двух переменных.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Для ее исследования сначала вычисляют частные производные второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} = A; \quad \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = B; \quad \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} = C,$$

а затем дискриминант $\Delta = AC - B^2$. Тогда **достаточные условия экстремума** функции $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ запишутся в следующем виде:

1) $\Delta > 0$ — экстремум есть, при этом, если $A > 0$ (или $C > 0$ при $A = 0$), в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум, а если $A < 0$ (или $C < 0$ при $A = 0$) — максимум;
2) $\Delta < 0$ — экстремума нет;
3) $\Delta = 0$ — требуются дополнительные исследования.

13.100. Найти экстремум функции $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x + 2y - 5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - y - 1.$$

Находим стационарные точки, используя необходимые условия:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, следовательно, $M_0(1;\ 1)$ есть стационарная точка.

Находим значения вторых частных производных:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1.$$

Значения производных не зависят от x и y, поэтому вычислять их величину в стационарной точке нет необходимости. Вычисляем дискриминант $\Delta = 3(-1) - 2^2 = -7 < 0$, следовательно, в точке $M_0(1;\ 1)$ функция не имеет экстремума.

13.101. Найти экстремумы функции $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xe^{-(x^2+y^2)} + (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}(-2x) = e^{-(x^2+y^2)}[4x - 2x(2x^2 + y^2)];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)} + (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}(-2y) = e^{-(x^2+y^2)}[2y - 2y(2x^2 + y^2)].$$

Решая систему

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}[4x - 2x(2x^2 + y^2)] = 0, \\ e^{-(x^2+y^2)}[2y - 2y(2x^2 + y^2)] = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x(2 - 2x^2 - y^2) = 0, \\ 2y(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \end{cases}$$

находим стационарные точки: $M_0(0;\ 0)$, $M_1(0;\ 1)$, $M_2(0;\ -1)$, $M_3(1;\ 0)$, $M_4(-1;\ 0)$.

Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}(-2x)(4x - 4x^3 - 2xy^2) + e^{-(x^2+y^2)}(4 - 12x^2 - 2y^2) =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}(8x^4 + 4x^2y^2 - 20x^2 - 2y^2 + 4);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}(-2y)(4x - 4x^3 - 2xy^2) + e^{-(x^2+y^2)}(-4yx) =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}(8yx^3 + 4xy^3 - 12xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}(-2y)(2y - 4yx^2 - 2y^3) + e^{-(x^2+y^2)}(2 - 4x^2 - 6y^2) =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}(4y^4 + 8y^2x^2 - 10y^2 - 4x^2 + 2).$$

Для каждой стационарной точки вычисляем соответствующее значение дискриминанта:

1) $M_0(0;\ 0)$: $A_0 = 4$; $B_0 = 0$; $C_0 = 2$; $\Delta_0 = A_0C_0 - B_0^2$; $\Delta_0 = 8 > 0$, $A_0 > 0$ — в точке $M_0(0;\ 0)$ функция имеет минимум $z_{\min} = 0$;

2) $M_1(0;\ 1)$: $A_1 = 2/e$; $B_1 = 0$; $C_1 = -2/e$; $\Delta_1 = -4/e^2 < 0$ — экстремума нет;

3) $M_2(0;\ -1)$: $A_2 = 2/e$; $B_2 = 0$; $C_2 = -2/e$; $\Delta_2 = -4/e^2 < 0$ — экстремума нет;

4) $M_3(1;\ 0)$: $A_3 = -8/e$; $B_3 = 0$; $C_3 = -2/e$; $\Delta_3 = 16/e^2 > 0$ — экстремум есть, $A_3 < 0$, в точке $M_3(1;\ 0)$ функция имеет максимум $z_{\max} = 2/e$;

5) $M_4(-1;\ 0)$: $A_4 = -8/e$; $B_4 = 0$; $C_4 = -2/e$; $\Delta_4 = 16/e^2 > 0$ — экстремум есть, $A_4 < 0$, в точке $M_4(-1;\ 0)$ функция имеет максимум $z_{\max} = 2/e$.

Найти экстремумы функций:

13.102. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

13.103. $z = xy^2 - xy - xy^3 \quad (x > 0;\ y > 0).$

13.104. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$

13.105. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

13.106. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$ **13.107.** $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$

13.6. Условный экстремум

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную и дифференцируемую в области G, координаты точек которой удовлетворяют системе уравнений связи $G = \{(x, y) \mid \varphi_i(x, y) = 0;\ \ i = 1, 2, \ldots, m\}$. В этой области нужно найти такую точку $M_0(x_0, y_0)$, чтобы выполнялось условие $f(M_0) \geqslant f(M)$ $\forall\ M(x, y) \in G$. Такие задачи называются *задачами отыскания условного экстремума функции* $z = f(x, y)$.

Для отыскания условного экстремума исследуется на обычный экстремум функция Лагранжа

$$L(x, y, \lambda_i) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x, y).$$

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x, y) = 0, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Из этой системы $m + 2$ уравнений с $m + 2$ неизвестными находят значения неизвестных x, y, λ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Числа λ_i называются *коэффициентами Лагранжа*.

13.108. Найти экстремумы функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Находим частные производные и составляем необходимые условия экстремума функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \quad y = -1; \quad \lambda = \dfrac{1}{2}, \\ x = 2; \quad y = 1; \quad \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0(-2; -1); \quad \lambda_0 = \dfrac{1}{2}, \\ M_1(2; 1); \quad \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

В данном случае $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$.

Для исследования на экстремум в полученных критических точках вычисляем значения $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$$

и составляем определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0\lambda_0) & \varphi'_y(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_x(M_0\lambda_0) & L''_{xx}(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) & L''_{yy}(M_0\lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, то $z = 2x + y$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ условный максимум, если $\Delta > 0$ — то условный минимум.

Итак,

$$\Delta_0 = -\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20 > 0,$$ следовательно, в точке $M_0(-2; -1)$ условный минимум, $z_{\min} = -5$;

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 16 = -20 < 0,$$ следовательно, в точке $M_1(2; 1)$ условный максимум, $z_{\max} = 5$.

Найти условные экстремумы функций:

13.109. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

13.110. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

13.111. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

13.112. $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

13.113. $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

13.114. Предприниматель решил выделить на расширение своего дела 150 тыс. руб. Известно, что если на приобретение нового оборудования затратить x тыс. руб., а на зарплату вновь принятых работников y тыс. руб., то прирост объема продукции составит $Q = 0{,}001x^{0{,}6}y^{0{,}4}$. Как следует распределить выделенные денежные ресурсы, чтобы прирост объема продукции был максимальным?

13.115. Общие издержки производства заданы функцией $TC = 0{,}5x^2 + 0{,}6xy + 0{,}4y^2 + 700x + 600y + 2000$, где x и y — соответственно количество товаров A и B. Общее количество произведенной продукции должно быть равно 500 ед. Сколько единиц товара A и B нужно производить, чтобы издержки на их изготовление были минимальными?

13.7. Метод наименьших квадратов

В экономической практике часто требуется представить наблюдаемые (измеренные) данные в виде функциональной зависимости. При этом предполагается, что вид функциональной зависимости известен (например, в результате ранее проведенных исследований), и требуется определить только параметры этой зависимости.

Пусть в ходе исследования (например, покупательского спроса) получена следующая таблица, где x — аргумент (цена товара), а y — функция (количество товара):

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Требуется по этим табличным данным получить функциональную зависимость (кривую спроса). Для оценки вида функциональной зависимости представим данные таблицы в виде точек на плоскости (рис. 13.2).

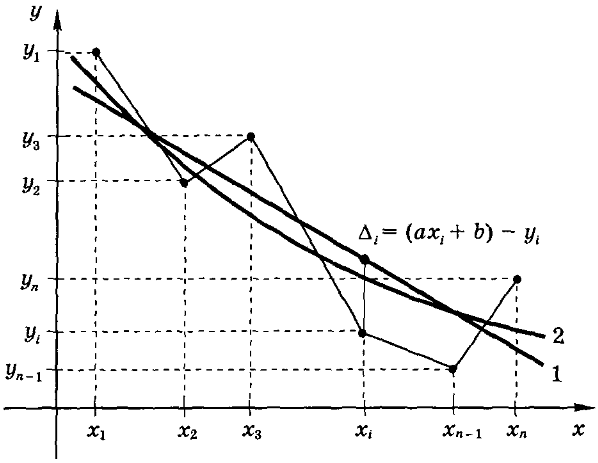


Рис. 13.2

Основываясь на графическом представлении, можно предполагать, что эта функциональная зависимость либо линейная: $y = ax + b$ (линия 1); либо квадратичная: $y = ax^2 + bx + c$ (линия 2).

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров a, b (a, b, c) этих зависимостей из условия минимума суммы квадратов отклонений:

для линейной зависимости

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i + b) - y_i]^2 \to \min;$$

для квадратичной зависимости

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i^2 + bx_i + c) - y_i]^2 \to \min.$$

Тогда из условий $\dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$ получаются формулы для определения коэффициентов линейной зависимости:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

а из условий $\frac{\partial\Phi}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial c} = 0$ — формулы для определения коэффициентов квадратичной зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

13.116. Найти квадратичную зависимость для следующих данных (см. задачу 10.2):

$P = x$	1,7	1,9	2,0	2,1
$Q = y$	27	25	19	9

Решение. Перепишем таблицу в виде столбцов и проведем необходимые вычисления:

n	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1,7	27	2,89	4,913	8,3521	45,9	78,03
2	1,9	25	3,61	6,859	13,0321	47,5	90,25
3	2,0	19	4,00	8,000	16,0000	38,0	76,00
4	2,1	9	4,41	9,261	19,4481	18,9	39,69
$\sum_{i=1}^{n}$	7,7	80	14,91	29,033	56,8323	150,3	283,97

Система линейных уравнений для определения величин a, b, c примет вид

$$\begin{cases} 56{,}8323a + 29{,}0330b + 14{,}9100c = 283{,}97, \\ 29{,}0330a + 14{,}9100b + 7{,}7000c = 150{,}30, \\ 14{,}9100a + 7{,}7000b + 4c = 80{,}00. \end{cases}$$

Решив систему, получим значения a, b, c. Функция спроса будет иметь вид

$$Q = 0{,}02P^2 - 16{,}64P - 6{,}67.$$

13.117. Получить линейную зависимость $y = ax + b$ по следующим данным:

x	1	2	3	4	5	6
y	6	8	10	9	12	11

13.118. Получить линейную зависимость $P = aQ + b$ по следующим данным:

Q	48	10	28	38	13	23
P	2,5	0,7	1,5	2,1	0,7	1,5

13.119. В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные:

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

Найти:

а) линейную зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации;

б) предполагаемую величину затрат на ремонт за 10-й год эксплуатации.

13.120. Прибыль предприятия за некоторый период деятельности по годам приведена ниже:

Год t	1	2	3	4	5	6	7
Прибыль π	54	57	62	65	67	69	70

Требуется:

а) составить квадратичную зависимость прибыли по годам деятельности предприятия;

б) определить ожидаемую прибыль для 8-го года деятельности.

ПРАКТИКУМ 1 ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

1. Вычислить предел (табл. 1).

2. Исследовать функцию (табл. 2) и построить ее график.

3. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных (табл. 3).

4. Найти экстремумы функции двух переменных (табл. 4).

5. Найти параметры линейной зависимости (табл. 5) методом наименьших квадратов.

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	Предел	Вариант	Предел
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^{50}}{(2n-2)^{48}(n+3)^2}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$	17	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{n+3}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+2x)}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-3}\right)^n$	19	$\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{2x^3}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3}{\sqrt{x^6+2x-3}}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$
8	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-5)^{60}}{(3n+2)^{57}(n-3)^3}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{n}\right)^n$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$
10	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4n}\right)^{n-2}$	25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-2}\right)^n$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$
12	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^n}{2^n+5^n}$	27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-2x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right)$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2x}{\operatorname{ctg} x}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-4}{\sqrt{x^8+3x^4-x}}$	29	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^2}$
15	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\ln x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+3x)}$

Таблица 2. Варианты задания 2

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	$y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$	16	$y = 2\ln\dfrac{x}{x-2} - 1$
2	$y = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$	17	$y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$
3	$y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$	18	$y = -(x+1)e^{x+2}$
4	$y = \dfrac{3}{2}x\ln\left(e + \dfrac{1}{3x}\right)$	19	$y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$
5	$y = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 2x + 3}$	20	$y = 2x\ln\left(e - \dfrac{2}{x}\right)$
6	$y = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$	21	$y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 12x + 8}{3x^2}$
7	$y = \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	22	$y = \dfrac{e^{x+3}}{x+3}$
8	$y = 3 - 3\ln\dfrac{x}{x+4}$	23	$y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$
9	$y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$	24	$y = \dfrac{x}{3}\ln\left(e^3 - \dfrac{1}{2x}\right)$
10	$y = \dfrac{e^{x/2}}{x^2}$	25	$y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 2}$
11	$y = \sqrt[3]{1 + x^3}$	26	$y = \dfrac{1}{e^{2x} \cdot 2x}$
12	$y = \dfrac{x}{2}\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$	27	$y = \dfrac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$
13	$y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$	28	$y = \dfrac{x}{5}\ln\left(e^2 + \dfrac{3}{x}\right)$
14	$y = \dfrac{x+4}{e^{x+4}}$	29	$y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$
15	$y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	30	$y = \dfrac{e^{x-2}}{x-2}$

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	$u = \dfrac{x^2}{y - 2z}$	16	$u = y^{zx^2}$
2	$u = xe^{yz}$	17	$u = \dfrac{x}{y^2 - 2z}$
3	$u = x^2 \sin \sqrt{y + z}$	18	$u = y^2xe^z$
4	$u = \ln(x^2 + y - 2z)$	19	$u = z \sin x \cos y$
5	$u = \dfrac{x + y^2}{2z}$	20	$u = \dfrac{x + y}{\ln(z - x)}$
6	$u = xye^z$	21	$u = \dfrac{x^2 + z}{y^2}$
7	$u = xz \operatorname{tg} \sqrt{y}$	22	$u = ze^{x^2y}$
8	$u = x^{yz}$	23	$u = \dfrac{x}{\sin \sqrt{yz}}$
9	$u = \dfrac{2x^2 + y}{z + x}$	24	$u = xy^z$
10	$u = yze^{x^2}$	25	$u = \dfrac{x^2 + 2y}{z^2}$
11	$u = xy \cos \sqrt{z}$	26	$u = zye^x$
12	$u = x \ln(y + z)$	27	$u = xy \operatorname{ctg} \sqrt{z}$
13	$u = \dfrac{y^2}{x + z}$	28	$u = xy \ln(y - z)$
14	$u = x^2ze^y$	29	$u = \dfrac{x^2y}{y^2 + z}$
15	$u = x \operatorname{arctg} yz$	30	$u = ye^{x+z}$

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	$z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$	16	$z = e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + y^2)$
2	$z = x^3 - y^3$	17	$z = e^{-2x^2}(x - y^2)$
3	$z = 6x^2y + 2y^3 - 24x - 30y$	18	$z = e^{-\frac{y}{2}}(x^2 - y)$

Вариант	Функция	Вариант	Функция
4	$z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$	19	$z = e^{-2y^2}(x^2 + y)$
5	$z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1$	20	$z = -\frac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y$
6	$z = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$	21	$z = 2y\sqrt{x} - y^2 - 3x + 8y$
7	$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$	22	$z = x^2 - 4x\sqrt{y} - 2x + 5y$
8	$z = x^2y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$	23	$z = e^{-\frac{x}{4}}(5x^2 - y^2)$
9	$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$	24	$z = 2x^2 + 3xy + 2y^3 + 5x$
10	$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$	25	$z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y$
11	$z = x^2y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$	26	$z = 2x^2 - 5xy + 2y^3 - 3x + 4y$
12	$z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x$	27	$z = 3x^2 + 10xy + 6y^3 + 2x + 2y - 1$
13	$z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$	28	$z = 3x^3 + 7xy - \frac{7}{2}y^2 - 60x + 2$
14	$z = 2x^3 - 12x^2y + 16y^3 - 9x^2$	29	$z = 3x^2 - 2y\sqrt{x} + 0{,}5y^2 - 56x$
15	$z = -8x^3 + 6xy^2 + y^3 + 9y^2$	30	$z = -2x^3 + 3x\sqrt{y} + 18x - 1{,}5y$

Таблица 5. **Варианты задания 5**

Вариант	Линейная зависимость						Вариант	Линейная зависимость					
1	x_i	1,0	1,5	2,0	3,0	3,2	16	x_i	2,1	2,3	3,1	3,8	4,5
	y_i	8,1	9,0	11,2	13,8	14,7		y_i	−9,3	−7,2	−13,4	−16,1	−18,9
2	x_i	0,3	0,5	0,8	1,1	2,3	17	x_i	1,1	2,1	3,4	4,3	4,9
	y_i	1,4	0,7	−0,9	−2,3	−8,8		y_i	−0,8	1,2	3,8	5,4	6,7
3	x_i	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0	18	x_i	10,1	11,5	13,6	16,2	17,5
	y_i	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8		y_i	0,9	0,8	0,6	0,3	0,2
4	x_i	1,2	1,7	3,3	4,1	4,3	19	x_i	0,1	0,3	0,5	1,2	2,1
	y_i	−3,1	−5,6	−17,1	−23,1	−24,8		y_i	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6
5	x_i	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3	20	x_i	3,2	4,1	5,3	6,7	7,3
	y_i	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0		y_i	1,6	1,4	1,1	0,9	0,7
6	x_i	−3,4	−3,2	−3,1	−2,5	−1,5	21	x_i	1,1	1,3	1,7	1,9	2,2
	y_i	−13,9	−12,9	−12,2	−9,1	−4,2		y_i	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7

Вариант	Линейная зависимость						Вариант	Линейная зависимость					
7	x_i	2,1	2,5	3,0	3,1	3,3	22	x_i	2,2	3,1	4,5	5,3	5,7
	y_i	11,1	12,8	13,9	14,5	15,1		y_i	0,1	−0,4	−1,2	−1,6	−1,8
8	x_i	0,7	0,9	1,2	1,3	1,7	23	x_i	1,3	2,4	3,5	4,1	5,5
	y_i	1,7	1,1	0,8	0,1	−0,5		y_i	3,4	4,7	5,5	6,5	7,8
9	x_i	−1,1	−0,5	0,2	0,4	0,7	24	x_i	1,9	2,4	3,7	4,3	6,1
	y_i	2,1	3,4	5,1	6,3	6,9		y_i	−3,4	−3,8	−4,7	−5,1	−6,4
10	x_i	−1,2	−0,7	0,3	1,5	1,7	25	x_i	−1,1	−0,7	−0,5	−0,1	1,2
	y_i	5,7	5,1	0,1	0,2	−0,7		y_i	2,4	2,7	2,9	3,4	4,9
11	x_i	2,1	3,0	3,2	3,9	4,1	26	x_i	−9,1	−7,5	−2,1	−0,6	2,0
	y_i	3,4	8,1	9,2	12,6	13,3		y_i	23,7	19,4	4,8	0,7	−6,3
12	x_i	1,7	1,9	2,3	2,5	3,5	27	x_i	4,5	5,1	5,2	6,1	6,4
	y_i	0,1	−0,6	−2,0	−2,7	−5,3		y_i	8,6	10,0	10,3	12,8	13,0
13	x_i	−0,1	0,2	0,5	0,9	1,2	28	x_i	−3,1	−1,5	−0,7	1,2	2,1
	y_i	−7,1	−6,2	−4,3	−2,7	−0,9		y_i	13,6	8,0	5,2	−1,5	−4,6
14	x_i	−1,2	−1,1	−0,9	−0,5	0,1	29	x_i	1,0	3,7	5,8	6,1	7,2
	y_i	8,7	8,1	7,8	6,4	4,5		y_i	2,8	6,8	10,0	10,4	12,1
15	x_i	3,2	3,8	4,7	5,1	5,4	30	x_i	5,1	5,5	5,7	6,2	8,1
	y_i	10,5	12,3	14,9	16,4	16,9		y_i	−23,7	−25,4	−26,2	−28,3	−36,3

14. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14.1. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$ называется *первообразной* по отношению к функции $f(x)$, если $F(x)$ дифференцируема и выполняется условие $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, что $(F(x) + C)' = f(x)$, где C — любая константа.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции. Неопределенный интеграл обозначается $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ и равен

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Основные правила интегрирования.

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \qquad \int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C,$

где C — произвольная постоянная.

2. $\int Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int f(x)\,\mathrm{d}x$, где A — постоянная величина.

3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$

4. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ и $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция, то $\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$

В частности,

$$\int f(at+b)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}F(at+b) + C \quad (a \neq 0).$$

Таблица простейших интегралов.

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C_1 \quad (a \neq 0).$

4. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

6. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C_1 \quad (a > 0).$

7. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \quad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$

8. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

10. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

11. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

12. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$

13. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Найти интегралы:

14.1. $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x.$

Решение.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

14.2. $\int 6x^5\,\mathrm{d}x$.

14.3. $\int\left(5x^2 + 7x - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

14.4. $\int \frac{x-4}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

14.5. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

14.6. $\int(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$.

14.7. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\mathrm{d}x$.

14.8. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,\mathrm{d}x$.

14.9. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

14.10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

14.11. $\int \frac{5 - 2\,\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

14.12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+8}$.

14.13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5}$.

14.14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$.

14.15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{12-x^2}}$.

14.16. $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

14.17. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

14.2. Интегрирование путем подведения под знак дифференциала и методом подстановки

Интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ можно записать в виде $\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)$. Такое преобразование называется *интегрированием путем подведения под знак дифференциала.*

Применяют также интегрирование методом подстановки.

Положим $x = \varphi(t)$. Получим $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Тогда

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (14.1)$$

Применение формулы (14.1) называется *интегрированием методом подстановки.* По существу, подведение под знак дифференциала есть одна из реализаций метода замены переменной.

Найти интегралы:

14.18. $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.

Решение. *Первый способ.*

$$\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \int \frac{(1+\mathrm{e}^x)'\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \int \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = 2\sqrt{1+\mathrm{e}^x} + C.$$

Второй способ. Положим $1 + \mathrm{e}^x = t$. Отсюда $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Следовательно,

$$\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\mathrm{e}^x} + C.$$

14.19. $\int \frac{(1-3x)\,dx}{3+2x}$. 14.20. $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$. 14.21. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

14.22. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}$. 14.23. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$. 14.24. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$.

14.25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 14.26. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx$. 14.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

14.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$. 14.29. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$. 14.30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

14.31. $\int \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$. 14.32. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$. 14.33. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

14.34. $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$. 14.35. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx$. 14.36. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

14.37. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. 14.38. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x-1}$. 14.39. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

14.40. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$. 14.41. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. 14.42. $\int x\sin(1-x^2)\,dx$.

14.43. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 14.44. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. 14.45. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$.

14.46. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$. 14.47. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$. 14.48. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\,dx$.

14.49. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$. 14.50. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 14.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

14.52. $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$.

14.3. Интегрирование по частям

Если $u = \psi(x)$, $v = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Найти интегралы:

14.53. $\int x\sin x\,dx$.

Решение. Положим $u = x$, $\sin x\,dx = dv$. Отсюда $du = dx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

14.54. $\int e^x \cos x\, dx$.

Р е ш е н и е. $\int e^x \cos x\, dx = \int e^x\, d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x\, de^x =$
$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x + \int e^x\, d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$
Следовательно,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + C.$$

14.55. $\int \ln x\, dx$. **14.56.** $\int x \ln(x-1)\, dx$.

14.57. $\int (5x+6)\cos 2x\, dx$. **14.58.** $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

14.59. $\int x e^{2x}\, dx$. **14.60.** $\int e^x \sin x\, dx$. **14.61.** $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

14.62. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$. **14.63.** $\int x \arcsin x\, dx$. **14.64.** $\int \arcsin x\, dx$.

14.65. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$. **14.66.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$. **14.67.** $\int (\ln x)^2\, dx$.

14.68. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1+x}}$. **14.69.** $\int \frac{x}{e^x}\, dx$. **14.70.** $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$.

14.71. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x}\, dx$. **14.72.** $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

14.4. Интегрирование рациональных функций

Выражение $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены m-й и n-й степени соответственно, называется *рациональной дробью* (или *функцией*). Рациональная дробь называется *правильной*, если $m < n$, и *неправильной*, если $m \geqslant n$.

Если подынтегральная дробь неправильная, нужно путем деления выделить частное и остаток от деления. Например,

$$\frac{x^3+2}{x^2+x-1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-1}.$$

Если знаменатель правильной дроби разлагается на множители $(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta \ldots$, то справедливо следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta \ldots} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta} + \ldots$$

Найти интегралы:

14.73. $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2}\,dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx = 2\int \frac{d(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2} = 2\ln|x^2+3x+2| + C.$$

14.74. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$

14.75. $\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1}\,dx.$

Решение. Выделим частное и остаток от деления:

$$\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1}\,dx = \int\left(x^2+x+\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+$$

$$+\int \frac{d(2x^2+3x+1)}{2x^2+3x+1} = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln|2x^2+3x+1|+C.$$

14.76. $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}\,dx.$

Решение. Сначала разложим подынтегральную функцию:

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{x+2}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)},$$

$$x+2 = A(x+6)+B(x-1) = (A+B)x+6A-B.$$

Отсюда $A+B=1$; $6A-B=2$. Следовательно, $A=\frac{3}{7}$, $B=\frac{4}{7}$. Тогда

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+5x-6} = \frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6} = \frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C.$$

14.77. $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx.$

14.78. $\int \frac{x^3}{x+3}\,dx.$

14.79. $\int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx.$

14.80. $\int \frac{x^5}{x^3-8}\,dx.$

14.81. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}.$

14.82. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}.$

14.83. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx.$

14.84. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx.$

14.85. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx.$

14.86. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx.$

14.87. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx.$

14.88. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$

14.89. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$

14.90. $\int \frac{3x-2}{x^4-x^3}\,dx.$

14.91. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$

14.92. $\int \frac{400x-240}{100x^2-20x+17}\,dx.$

14.93. $\int \frac{dx}{x^3+8}.$

14.94. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

14.95. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}\,dx.$

14.96. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

14.97. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx.$

14.98. $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}\,dx.$

14.99. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$

14.100. $\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x}\,dx.$

14.5. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx, \qquad (14.2)$$

где m и n — целые числа, находят следующим образом.

Если m и n — четные положительные числа, применяют формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

14.101. Найти интеграл $\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx.$

Решение.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4x\,d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Если m или n — нечетное положительное число, то интеграл (14.2) находят, отделяя от нечетной степени один множитель.

Найти интеграл:

14.102. $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx.$

Решение.

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x \, dx = -\int \cos^4 x \sin^2 x \, d(\cos x) =$$

$$= \int \cos^4 x(\cos^2 x - 1) \, d(\cos x) = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

14.103. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx.$

14.104. $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx.$

14.105. $\int \cos^3 x \, dx.$

14.106. $\int \sin^5 x \, dx.$

14.107. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$

14.108. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} \, dx.$

14.109. $\int \sin^4 x \, dx.$

14.110. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx.$

14.111. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$

14.112. $\int \cos^6 3x \, dx.$

14.113. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx.$

14.114. $\int \cos^7 x \, dx.$

14.115. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx.$

14.116. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx.$

14.117. $\int \sin^3 x \, dx.$

14.118. $\int \cos^5 x \, dx.$

14.119. $\int x \sin^2 x^2 \, dx.$

14.120. $\int e^x \cos^2 e^x \, dx.$

Для интегрирования функций $\sin nx \cos mx$, $\cos nx \cos mx$, $\sin nx \sin mx$ могут быть использованы следующие формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Найти интегралы:

14.121. $\int \sin 3x \sin 5x \, dx.$

Решение. $\int \sin 3x \sin 5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) \, dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

14.122. $\int \sin 2x \cos 4x\, dx$. **14.123.** $\int \sin 10x \sin 15x\, dx$.

14.124. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}\, dx$.

Если R — рациональная функция, то интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ вычисляют путем подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Отсюда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}.$$

Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, применяют подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Найти интегралы:

14.125. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

Решение. Применяя подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получаем

$$\int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\, dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

14.126. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение. Применяя подстановку $\operatorname{tg} x = t$, получаем

$$\int \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

14.127. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$. **14.128.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

14.129. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x}\, dx$. **14.130.** $\int \frac{\sin x}{1 - \sin x}\, dx$.

14.131. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\, dx$. **14.132.** $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$.

14.133. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$. **14.134.** $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$.

14.135. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. **14.136.** $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

14.137. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.　　**14.138.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

14.139. $\int \operatorname{tg}^2 5x \, dx$.　　**14.140.** $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$.

14.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интеграл вида $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\right] dx$, где R — рациональная функция, а p_1, q_1, p_2, q_2 — целые числа, находят с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n — наименьшее общее кратное q_1, q_2.

Найти интегралы:

14.141. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Р е ш е н и е. Сделаем подстановку $2x - 1 = t^4$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2t^3}{t^2 - t} dt = 2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = (t+1)^2 + 2\ln|t-1| + C =$$

$$= (1 + \sqrt[4]{2x-1}\,)^2 + 2\ln|\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C.$$

14.142. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$.　　**14.143.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$.

14.144. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.　　**14.145.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$.

Интеграл $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}\,) dx$, где R — рациональная функция, находят подстановкой $x = a \sin t$, интеграл $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}\,) dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{tg} t$, а интеграл $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}\,) dx$ — подстановкой $x = \frac{a}{\sin t}$.

Найти интегралы:

14.146. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

Р е ш е н и е. Положим $x = a \sin t$. Тогда

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int (a\cos t)(a\cos t)\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

14.147. $\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x.$ **14.148.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

14.149. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$ **14.150.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(9+x^2)^5}}.$

Интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ находят подстановкой $x-a=\frac{1}{t}$.

Найти интегралы:

14.151. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}.$

Р е ш е н и е. Положим $x=\frac{1}{t}$. Тогда

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}-4}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2-(2t-1)^2}} = \frac{1}{2}\arccos\frac{2t-1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C.$$

14.152. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}}.$ **14.153.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

14.154. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-x^2}}.$

15. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

15.1. Непосредственное вычисление определенного интеграла и подведение под знак дифференциала

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n элементарных промежутков. Предположим, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выбрана точка ξ_i. Тогда сумма

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а ее предел при $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})\to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определенный интеграл не должен зависеть от разбиений и выбора точек ξ_i.

Если определенный интеграл существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует первообразная от этой функции на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ (\textit{формула Ньютона—Лейбница})},$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Вычислить определенные интегралы:

15.1. $\int_0^\pi \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x.$

Решение.

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}\sin x = \frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\sin^3 \pi}{3} - \frac{\sin^3 0}{3} = 0.$$

15.2. $\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x.$ **15.3.** $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x.$ **15.4.** $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$

15.5. $\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}.$ **15.6.** $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$ **15.7.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.$

15.8. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x.$ **15.9.** $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x.$

15.10. $\int_0^1 \frac{y^2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^6+4}}.$ **15.11.** $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,\mathrm{d}y.$ **15.12.** $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\,\mathrm{d}x.$

15.13. $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$. **15.14.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$. **15.15.** $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

15.16. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$. **15.17.** $\int\limits_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$. **15.18.** $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2\alpha\,d\alpha$.

15.19. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$. **15.20.** $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$. **15.21.** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$.

15.2. Замена переменных в определенном интеграле

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$;

3) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;

4) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

15.22. $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$. Если $x = r$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\,\cos t\,dt = r^2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{r^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

15.23. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. **15.24.** $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. **15.25.** $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

15.26. $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$. **15.27.** $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^4}}$. **15.28.** $\int\limits_1^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

15.29. $\int\limits_0^{1} (e^x-1)^4 e^x\,dx$. **15.30.** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

15.31. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$. **15.32.** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

15.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемые в $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x).$$

Найти интегралы:

15.33. $\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$.

Решение. Обозначим $x = u$, $\sin 2x\,dx = dv$. Отсюда

$$du = dx, \quad v = \frac{-\cos 2x}{2};$$

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,dx = -x\,\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos 2x\,dx}{2} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{-\pi}{2}.$$

15.34. $\int\limits_0^{1} xe^{-x}\,dx$. **15.35.** $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$. **15.36.** $\int\limits_1^{e} \ln x\,dx$.

15.37. $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$. **15.38.** $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$.

15.39. $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$. **15.40.** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. **15.41.** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

15.4. Приложение определенного интеграла

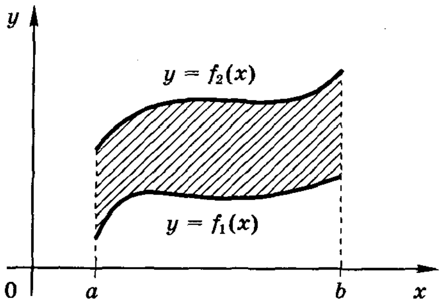


Рис. 15.1

Площадь S, ограниченная непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, вертикалями $x = a$, $x = b$ (рис. 15.1), где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

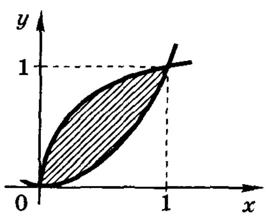


Рис. 15.2

15.42. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2$ (рис. 15.2).

Решение. Нетрудно видеть, что графики пересекаются в точках (0; 0) и (1; 1). Поэтому

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

15.43. $y = 4 - x^2, \quad y = 0.$ **15.44.** $y = 16 - x^4, \quad y = 0.$

15.45. $y = 4x - x^2, \quad y = 0.$ **15.46.** $y = -2 + 3x - x^2, \quad y = 0.$

15.47. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

15.48. $y = \operatorname{tg} x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{3}.$

15.49. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$ **15.50.** $x^2 + y^2 = 16.$

15.51. $y^2 = x^3, \ x = 3.$ **15.52.** $y^2 = 2x + 4, \ x = 0.$

15.53. $y = x^2, \ y = 2 - x^2.$ **15.54.** $y = x^2 + 4x, \ y = x + 4.$

15.55. $y = \ln x, \ x = e, \ y = 0.$ **15.56.** $y = x \sin x, \ y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x) \geqslant 0$ и прямыми $x = a, \quad x = b \quad (a < b), \quad y = 0$ (рис. 15.3), равен

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

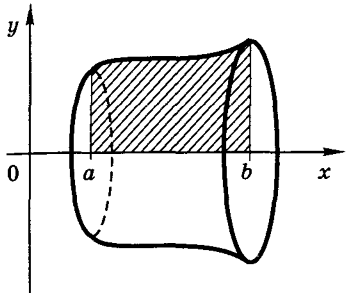


Рис. 15.3

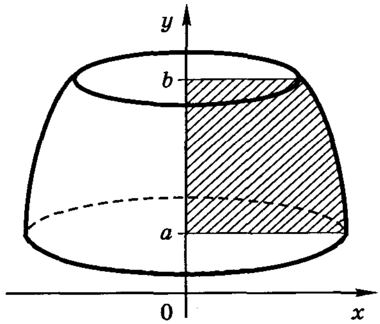


Рис. 15.4

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = g(y) \geqslant 0$ и прямыми $y = a$, $y = b$ $(a < b)$, $x = 0$ (рис. 15.4), равен

$$V = \pi\int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y.$$

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

15.57. $y^2 = 9x$, $y = 3x$ (рис. 15.5).

Решение.

$$V = \pi\int_0^1 (9x - 9x^2)\,\mathrm{d}x = 9\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\pi.$$

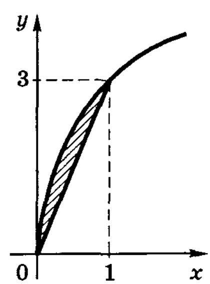


Рис. 15.5

15.58. $y = 4x - x^2$, $y = x$. **15.59.** $x^2 + y^2 = 25$.

15.60. $y^2 = 2x$, $x = 1$. **15.61.** $y = x^2$, $y^2 = x$.

15.62. $y^2 = 8x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. **15.63.** $y^2 - x^2 = 9$, $x - 2y + 6 = 0$.

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигур, ограниченных линиями:

15.64. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm b$. **15.65.** $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$.

15.66. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$. **15.67.** $y = x\sqrt{-x}$, $x = -4$, $y = 0$.

15.5. Несобственные интегралы

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, +\infty)$, то *несобственным интегралом* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Если этот предел существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*. В противном случае интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, c)$, $x \in (c, b]$ и имеет разрыв II рода в точке c, то *несобственным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ называется $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{\delta \to +0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Так же, как и выше, несобственный интеграл называется *сходящимся*, если оба предела существуют и конечны. В противном случае несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Если же точка разрыва находится в конце промежутка, то:

а) при $c = a$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

б) при $c = b$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Если при $x \geqslant a$ $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится. Такая сходимость называется *абсолютной*.

Если при $x \geqslant a$ $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ расходится.

Если при $x \geqslant a$ $f(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$, предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ конечен и не равен нулю, то оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Аналогичные признаки сходимости можно указать и для несобственных интегралов от разрывных функций.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

15.68. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1\right) = 1.$$

15.69. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin x \,\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(1 - \varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

15.70. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1$. Легко установить, что интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ сходится. Поэтому интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$ также сходится.

15.71. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. **15.72.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$. **15.73.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.

15.74. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$. **15.75.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1}\,dx$.

15.76. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3x^2\,dx}{x^3+1}$. **15.77.** $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}$. **15.78.** $\int\limits_{0}^{+\infty} 2xe^{x^2}\,dx$.

15.79. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx$. **15.80.** $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$.

15.81. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$. **15.82.** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. **15.83.** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

15.84. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$. **15.85.** $\int\limits_{0}^{1} x\ln x\,dx$. **15.86.** $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$.

15.87. $\int\limits_{0}^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **15.88.** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **15.89.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx$.

15.90. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$.

Исследовать сходимость (расходимость) интегралов:

15.91. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+1}$. **15.92.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$.

15.93. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{13}\,dx}{(x^5+x^3+1)^3}$. **15.94.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$.

15.95. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$. **15.96.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$.

15.97. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$. **15.98.** $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. **15.99.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

15.100. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}\,dx$. **15.101.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. **15.102.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

15.103. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\ln x}$. **15.104.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^3}}$.

15.6. Кратные интегралы

В данном разделе будут рассматриваться только двойные интегралы.

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую область D плоскости XOY, называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ и сумма распространена на те значения i и k, для которых точки (x_i, y_k) принадлежат области D.

Пусть область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, а снизу и сверху непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x))$. Тогда двойной интеграл сводится к повторному интегралу по формуле

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

где при вычислении $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ величину x полагают постоянной.

Вычислить интегралы:

15.105. $\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{d}x \int\limits_x^{2x} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y.$

Решение.

$$\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{d}x \int\limits_x^{2x} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^x \int\limits_x^{2x} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^y)\Big|_{y=x}^{y=2x} =$$

$$= \int\limits_0^{\ln 2} (\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}.$$

15.106. $\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)\,\mathrm{d}x.$ **15.107.** $\int\limits_3^4 \mathrm{d}x \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^2}.$

15.108. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}$.

15.109. $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx$.

15.110. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr$.

15.111. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi\,dr$.

Если область D снизу и сверху ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ $(d > c)$, а слева и справа непрерывными кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ $(\varphi_2(y) \geqslant \varphi_1(y))$, то двойной интеграл сводится к повторному интегралу по формуле

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

где при вычислении $\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx$ величина y считается постоянной.

Изменить порядок интегрирования:

15.112. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

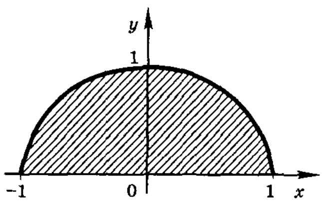


Рис. 15.6

Решение. Область интегрирования указана на рис. 15.6. Имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

15.113. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$.

15.114. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y)\,dy$.

15.115. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x, y)\,dy$.

15.116. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy$.

15.117. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy$. **15.118.** $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\,dy$.

15.119. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx$. **15.120.** $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy$.

16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

16.1. Основные понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{16.1}$$

которое связывает независимый аргумент x, неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. *Порядком дифференциального уравнения* называется максимальный порядок производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество. График этой функции называется *интегральной кривой*.

Для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{16.2}$$

задача Коши формулируется следующим образом: для заданных начальных условий $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, ..., $y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$ найти решение уравнения (16.2), удовлетворяющее начальным условиям.

Известен ряд теорем о существовании и единственности решения задачи Коши. Например, в случае уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ для существования и единственности решения задачи Коши требуется, чтобы в некоторой области D функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ были непрерывны. Тогда через каждую точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходит, и притом единственная, интегральная кривая.

Функция

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{16.3}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, называется *общим решением* уравнения (16.1), если выполняются следующие два условия:

1) для любых значений $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция (16.3) является решением дифференциального уравнения (16.1);

2) для любой точки

$$M_0(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}) \qquad (16.4)$$

$(n + 1)$-мерного пространства существуют такие константы C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0, при которых график решения (16.3) проходит через точку (16.4), т.е.

$$\begin{cases} y_0 = \psi(x_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0), \\ y_0' = \psi'(x_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0), \\ \ldots \\ y_0^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0). \end{cases}$$

Общее решение, записанное в неявном виде, называется *общим интегралом*. Если в общем решении (16.3) зафиксированы константы C_1, C_2, ..., C_n, то (16.3) называется *частным решением*. Частное решение, представленное в неявном виде, называется *частным интегралом*. Решить дифференциальное уравнение — значит найти его общее решение или общий интеграл.

Проверить, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции:

16.1. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$ **16.2.** $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \frac{1}{x}.$

16.3. $(x + y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0, \quad y = \frac{C^2 - x^2}{2x}.$

Показать, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:

16.4. $(x - 2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = C^2.$

Р е ш е н и е. Продифференцируем левую и правую части общего интеграла:

$$(x^2 - xy + y^2)' = (C^2)' \Rightarrow 2x - y - xy' + 2yy' = 0.$$

Отсюда получим исходное дифференциальное уравнение:

$$(x - 2y)y' = 2x - y.$$

16.5. $(x - y + 1)y' = 1, \quad y = x + Ce^y.$

16.6. $(xy - x)y'' + x(y')^2 + yy' - 2y' = 0, \quad y = \ln(xy).$

Составить дифференциальные уравнения заданных семейств кривых (C, C_1, C_2 — произвольные постоянные):

16.7. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. **(16.5)**

Р е ш е н и е. Продифференцируем данную функцию 2 раза:

$$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}, \qquad y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}. \tag{16.6}$$

Исключив из уравнений (16.5), (16.6) коэффициенты C_1, C_2, получим дифференциальное уравнение

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

16.8. $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. **16.9.** $x^2 + y^2 = C^2$.

Среди семейства кривых найти кривую, удовлетворяющую заданным начальным условиям:

16.10. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Продифференцировав данную функцию

$$y' = [2C_1 + C_2(2x + 1)]e^{2x},$$

подставим начальные условия

$$1 = C_1, \quad 0 = 2C_1 + C_2.$$

Отсюда

$$y = (1 - 2x)e^{2x}.$$

16.11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

16.12. $x^2 - y^2 = C$, $\quad y(0) = 5$.

16.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными. Любое дифференциальное уравнение вида

$$\varphi(x)\,dx = \psi(y)\,dy \tag{16.7}$$

называется *уравнением с разделенными переменными*. Уравнение, которое приводится к виду (16.7), называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

16.13. Решить дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Р е ш е н и е. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем его к виду (16.7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Если равны дифференциалы, то равны неопределенные интегралы $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$. Отсюда получаем $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$ — общий интеграл и $y = Cx$ — общее решение.

16.14. Решить дифференциальное уравнение $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение.

$$(x^2-1)\,dy = -2xy^2\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{2x\,dx}{x^2-1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} = -\int\frac{2x\,dx}{x^2-1} \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + C.$$

Таким образом, получаем общий интеграл

$$y(\ln|x^2-1| + C) = 1.$$

Подставляем начальное условие $y(0) = 1$:

$$1(0 + C) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Отсюда получаем частный интеграл

$$y(\ln|x^2-1| + 1) = 1.$$

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если указаны начальные условия:

16.15. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$. **16.16.** $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

16.17. $xyy' = 1 - x^2$. **16.18.** $xy' - y = y^3$.

16.19. $y'\mathrm{ctg}\,x + y = 2,\quad y(0) = -1$.

16.20. $xy' + y = y^2,\quad y(1) = 0{,}5$.

16.21. $y'y(1 + e^x) = e^x,\quad y(0) = 1$.

16.22. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0,\quad y(0) = 1$.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией m-го измерения*, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (16.8)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового измерения, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Уравнение (16.8) можно привести к виду $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого измерения.

С помощью замены $y = ux$, где u — новая неизвестная функция, уравнение (16.8) сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если указаны начальные условия:

16.23. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Р е ш е н и е. Так как $\dfrac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \dfrac{x+y}{x-y}$, то $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ является однородным уравнением. Сделав замену $y = ux$, получим

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\dfrac{1+u}{1-u} - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \frac{1-u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \ln|x| + C \Rightarrow \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C.$$

Сделав обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln|x| + C.$$

16.24. $(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$. **16.25.** $y^2 + x^2y' = xyy'$.

16.26. $y' = -\dfrac{x+y}{x}$. **16.27.** $xy' = y - x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

16.28. $(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 4$.

16.29. $(x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(2) = 1$.

Линейные уравнения первого порядка. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ или

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{16.9}$$

Для его решения применяется метод вариации произвольных постоянных. Предположим сначала, что правая часть уравнения (16.9) равна нулю. Тогда $v' + p(x)v = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -p(x)v \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{16.10}$$

Для решения исходного уравнения (16.9) предположим, что C в (16.10) есть некоторая функция от x, и решение уравнения (16.9) будем искать в виде

$$y = u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Для решения линейного уравнения (16.9) можно также применить подстановку

$$y = uv, \tag{16.11}$$

где u и v — функции от x. Тогда уравнение (16.9) примет вид

$$[u' + p(x)u]v + v'u = q(x). \tag{16.12}$$

Если потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках было равно нулю, т.е.

$$u' + p(x)u = 0, \tag{16.13}$$

то из (16.13) найдем $u(x)$, затем из (16.12) найдем v, а, следовательно, из (16.11) найдем y.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если указаны начальные условия:

16.30. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

Решение. Это линейное уравнение первого порядка ($p(x) = \dfrac{2}{x}$, $q(x) = 2x^3$).

Сначала решаем $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| \Rightarrow y = Cx^2.$$

Полагая $y = u(x)x^2$ и подставляя в исходное уравнение, находим u:

$$u'x^2 + 2xu - \frac{2}{x}x^2u = 2x^3 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow u = x^2 + C.$$

Отсюда получаем общее решение исходного уравнения

$$y = (x^2 + C)x^2.$$

16.31. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$. **16.32.** $x^2y' + xy + 1 = 0$.

16.33. $y = x(y' - x\cos x)$. **16.34.** $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

16.35. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0$.

16.36. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b$.

Уравнение Бернулли. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = y^n q(x), \quad \text{где } n \neq 0,\ n \neq 1,$$

называется *уравнением Бернулли*. Данное уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$ или метод вариации произвольных постоянных.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если указаны начальные условия:

16.37. $y' + \dfrac{2y}{x} = y^2 x$.

Р е ш е н и е. Сделав замену $y = u(x)v(x) = uv$, получим

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = (uv)^2 x.$$

Сгруппируем второе слагаемое с третьим:

$$u'v + u\left[v' + \frac{2v}{x}\right] = (uv)^2 x. \qquad (16.14)$$

Приравнивая к нулю выражение в квадратных скобках, находим функцию v:

$$v' + \frac{2v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{2\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln v = \ln|x|^{-2} \Rightarrow v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставив v в (16.14), находим u:

$$\frac{u'}{x^2} = u^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln|Cx| \Rightarrow u = -\frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Отсюда

$$y = uv = \frac{-1}{x^2 \ln|Cx|}.$$

16.38. $y' + 2y = y^2 e^x$. **16.39.** $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

16.40. $(1 - x^2)y' + 2xy = xy^2, \quad y(0) = 0{,}5$.

Уравнения в полных дифференциалах. Пусть $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ — непрерывные функции. Уравнение

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (16.15)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Уравнение (16.15) тогда и только тогда является уравнением в полных дифференциалах, когда существует функция $U = U(x, y)$, такая, что

$$\mathrm{d}U = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q. \qquad (16.16)$$

Общий интеграл уравнения (16.15) имеет вид

$$U(x, y) = C.$$

Решить дифференциальные уравнения. Найти частный интеграл, если даны начальные условия:

16.41. $2x\cos^2 y\,\mathrm{d}x + (2y - x^2\sin 2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

Решение. Здесь $P = 2x\cos^2 y$, $Q = 2y - x^2\sin 2y$, и мы имеем уравнение в полных дифференциалах (проверьте). Значит, существует функция U, такая, что

$$\mathrm{d}U = 2x\cos^2 y\,\mathrm{d}x + (2y - x^2\sin 2y)\,\mathrm{d}y.$$

Поэтому $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x\cos^2 y$. Отсюда $U = \int 2x\cos^2 y\,\mathrm{d}x = x^2\cos^2 y + f(y)$, где функция $f(y)$ зависит только от y (постоянна по отношению к x).

Дифференцируя найденную функцию по y, получим выражение

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x^2\sin 2y + f'(y),$$

которое, согласно (16.16), можно приравнять к Q:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x^2\sin 2y + f'(y) = 2y - x^2\sin 2y.$$

Отсюда $f'(y) = 2y$. Если уравнение в полных дифференциалах, то последнее выражение не будет зависеть от x (докажите это). Легко находим

$$f(y) = y^2 - C, \qquad U = x^2\cos^2 y + y^2 - C.$$

Окончательно получим:

$$x^2\cos^2 y + y^2 = C.$$

16.42. $(3x^2 + 2y)\,\mathrm{d}x + (2x - 3)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.43. $(3x^2y - 4xy^2)\,\mathrm{d}x + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.44. $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 2.$

16.3. Уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка

Решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$. Для решения уравнения $y^{(n)} = f(x)$ сделаем замену

$$y^{(n-1)}(x) = z(x), \quad y^{(n)}(x) = z'(x).$$

Тогда

$$z'(x) = f(x), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad z(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1.$$

Но $z(x) = y^{(n-1)}(x)$. Следовательно,

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1.$$

Повторяя эту операцию еще $(n-1)$ раз, получим $y(x)$.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если даны начальные условия:

16.45. $y^{(4)}(x) = \sin x$.

Р е ш е н и е. Проинтегрируем данное уравнение 4 раза:

$$\int (y'''(x))'\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$y'''(x) = -\cos x + C_1,$$

$$\int (y''(x))'\,\mathrm{d}x = \int (-\cos x + C_1)\,\mathrm{d}x,$$

$$y''(x) = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y'(x) = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y(x) = \sin x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

16.46. $xy'''' = 1$. **16.47.** $y^{(20)} = \sin x$.

16.48. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $\quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

16.49. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $\quad y(1) = 2$, $\quad y'(1) = 1$, $\quad y''(1) = 1$.

Уравнения, не содержащие явно функцию y. Уравнение

$$y'' = f(x, y')$$

сводится к уравнению первого порядка с помощью замены $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$.

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если даны начальные условия:

16.50. $x^2 y'' + xy' = 1$.

Р е ш е н и е. Уравнение не содержит явно функцию y. Сделав замену $y' = z(x)$, $\quad y'' = z'(x)$, получим

$$x^2 z' + xz = 1. \qquad (16.17)$$

Уравнение второго порядка перешло в линейное уравнение первого порядка, которое можно решить с помощью замены $z = uv$. Подставив это выражение в (16.17), получим

$$x^2u'v + xu(xv' + v) = 1. \tag{16.18}$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю:

$$xv' + v = 0,$$

и находим v:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln(|v|) = \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя его в (16.18), находим u:

$$xu' = 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow u = \ln(|C_1x|).$$

Отсюда

$$z = \ln(|C_1x|)\frac{1}{x}$$

и, следовательно,

$$y' = \ln(|C_1x|)\frac{1}{x}.$$

Находим y:

$$y = \int \ln(|C_1x|)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln(|C_1x|)\,\mathrm{d}\ln(|C_1x|) = \frac{1}{2}\ln^2(|C_1x|) + C_2.$$

16.51. $x^2y'' = (y')^2$. **16.52.** $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

16.53. $xy''' + y'' = 1 + x$. **16.54.** $xy'''' + y''' = \mathrm{e}^x$.

16.55. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$.

16.56. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 1$.

Уравнения, не содержащие явно x. Уравнение

$$y'' = f(y, y')$$

с помощью замены

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y), \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p'p$$

приводится к уравнению первого порядка относительно функции $p(y)$:

$$p' = \frac{1}{p}f(y, p).$$

Решить дифференциальные уравнения. Найти частное решение (интеграл), если даны начальные условия:

16.57. $y'' + 2yy' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4$.

Р е ш е н и е. После замены $y' = p$, $y'' = p'p$ получим уравнение первого порядка относительно $p(y)$:

$$pp' + 2yp = 0, \text{ или } p' = -2y.$$

Отсюда находим p:

$$\frac{dp}{dy} = -2y, \qquad \int dp = -\int 2y\, dy,$$

$$p = -y^2 + C_1.$$

Следовательно,

$$y' = -y^2 + C_1. \tag{16.19}$$

Подставив в (16.19) начальные данные, получим:

$$-4 = -4 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Отсюда

$$y' = -y^2, \qquad \frac{dy}{-y^2} = dx,$$

$$\frac{1}{y} = x + C_2, \qquad y = \frac{1}{x + C_2}.$$

Подставляем начальные данные:

$$2 = \frac{1}{0 + C_2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y = \frac{2}{2x + 1}.$$

16.58. $yy'' + (y')^2 = 0.$

16.59. $y^3y'' = 1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$

16.60. $y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

16.4. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x),$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции.

При $q(x) = 0$ оно называется *однородным*, а при $q(x) \neq 0$ — *неоднородным*.

Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n} C_i v_i(x),$$

где $v_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — линейно независимая система решений.

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n} C_i v_i(x) + y^*,$$

где $v_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — линейно независимая система решений, соответствующая линейному однородному уравнению;

y^* — частное решение неоднородного уравнения.

Линейно независимая система решений $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейного однородного уравнения называется *фундаментальной системой решений.*

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$v^{(n)} + p_1 v^{(n-1)} + p_2 v^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} v' + p_n v = 0, \qquad (16.20)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторые постоянные.

Решение (16.20) будем искать в виде $v = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Получим

$$(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

или

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \qquad (16.21)$$

Уравнение (16.21) называется *характеристическим.*

Рассмотрим различные случаи.

1. Если корни (16.21) действительны и различны, то

$$v_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ v_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ v_n = \mathrm{e}^{\lambda_n x}$$

— линейно независимые решения уравнения (16.20). Следовательно, общее решение уравнения (16.20) запишется в виде

$$v_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i x}.$$

2. Если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней: $\lambda_1 = h + i\omega$, $\lambda_2 = h - i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$, тогда им соответствуют два комплексных решения

$$\tilde{v}_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{hx}(\cos\omega x + i\sin\omega x),\ \ \tilde{v}_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{hx}(\cos\omega x - i\sin\omega x).$$

Из них можно составить два линейно независимых действительных решения:

$$v_1 = \frac{\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2}{2} = e^{hx} \cos \omega x, \qquad v_2 = \frac{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2}{2i} = e^{hx} \sin \omega x.$$

3. Если среди корней характеристического уравнения имеется корень $\lambda = a$ кратности $k > 1$, тогда

$$v_s = x^s e^{ax}, \quad s = 0, 1, \ldots, k - 1, \tag{16.22}$$

являются решениями уравнения (16.20). Причем, если $s \geqslant k$, то такие функции не будут решениями. Очевидно, что (16.22) — линейно независимые решения.

4. Если $a = h \pm i\omega$ — комплексные корни кратности k, то по аналогии с пунктом 2 получим линейно независимые действительные решения:

$$x^s e^{hx} \cos \omega x, \quad x^s e^{hx} \sin \omega x, \quad s = 0, 1, \ldots, k - 1.$$

Решить дифференциальные уравнения:

16.61. $v''' - 2v'' - v' + 2v = 0$.

Решение. Решая характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, получим $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2$. Тогда общее решение имеет вид

$$v_{\text{общ}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

16.62. $v''' - 4v'' + 6v' - 4v = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 + i, \quad \lambda_3 = 1 - i$.

Общее решение имеет вид

$$v_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

16.63. $v''' - 5v'' + 8v' - 4v = 0$.

Решение. Так как корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$, то общее решение имеет вид

$$v_{\text{общ}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}.$$

16.64. $v'''' + 4v''' + 8v'' + 8v' + 4v = 0$.

Решение. Раскладывая характеристический многочлен на множители

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

получим корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i, \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i.$$

Следовательно, общее решение

$$v_{\text{общ}} = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x).$$

16.65. $y'' + y' - 2y = 0.$

16.66. $y'' - 2y' + y = 0.$

16.67. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

16.68. $y''' - 8y = 0.$

16.69. $y'''' - y = 0.$

16.70. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

16.71. $y'''' + 2y'' + y = 0.$

16.72. $y'''' - 5y'' + 4y = 0.$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x), \qquad (16.23)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторые постоянные.

Его частное решение можно получить методом вариации произвольных постоянных.

Укажем способы нахождения частного решения в случае, когда правая часть (16.23) имеет специальный вид.

1. Если $q(x) = e^{\gamma x} P_m(x)$, где $P_m(x)$ — многочлен m-й степени, то частное решение можно искать в виде

$$y_{\text{част}} = x^s e^{\gamma x} Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ — многочлен m-й степени с неопределенными коэффициентами; $s = 0$, если γ не является корнем характеристического уравнения; если же γ является корнем характеристического уравнения, то s равно кратности этого корня.

2. Если $q(x) = e^{\gamma x}(P_{m_1}(x) \cos \beta x + \tilde{P}_{m_2}(x) \sin \beta x)$, где $P_{m_1}(x)$, $\tilde{P}_{m_2}(x)$ — многочлены степени m_1 и m_2, тогда частное решение можно искать в виде

$$y_{\text{част}} = x^s e^{\gamma x}[Q_m(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_m(x) \sin \beta x],$$

где $m = \max\{m_1, m_2\}$; $s = 0$, если $\gamma + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения; если $\gamma + i\beta$ — корень характеристического уравнения, то s — его кратность.

Решить дифференциальные уравнения:

16.73. $y'' + 3y' = 18x + 9.$

Р е ш е н и е. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$. Так как $\gamma = 0$ — корень характеристического уравнения кратности один, то частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{част}} = x(Ax + B).$$

Подставим его в уравнение

$$2A + 3(2Ax + B) = 18x + 9.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 6A = 18, \\ 2A + 3B = 9. \end{cases}$$

Отсюда $A = 3$, $B = 1$ и

$$y_{\text{част}} = 3x^2 + x, \quad y_{\text{общ}} = C_1 e^{-3x} + C_2 + 3x^2 + x.$$

16.74. $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}$.

Решение. Так как $\gamma = 3$ — корень кратности два, то

$$y_{\text{част}} = x^2(Ax + B)e^{3x}.$$

Подставив его в уравнение, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 27A - 54A + 27A = 0, \\ 27B + 81A - 54B - 108A + 27B + 27A = 0, \\ 54B + 54A - 72B - 36A + 18B = 1, \\ 18B + 6A - 12B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18A = 1, \\ 6A + 6B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = \dfrac{1}{18}$, $B = -\dfrac{1}{18}$ и

$$y_{\text{част}} = \frac{1}{18}(x^3 - x^2)e^{3x},$$

$$y_{\text{общ}} = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x} + \frac{1}{18}(x^3 - x^2)e^{3x}.$$

16.75. $y'' + 2y' + y = \cos x$.

Решение. Частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{част}} = x^0 e^{0 \cdot x}(A \cos x + B \sin x).$$

Подставив его в уравнение, получим

$$\begin{cases} (-A + 2B + A)\cos x = \cos x, \\ (-13 - 2A + B)\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 1, \\ -2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдя общее решение однородного уравнения, получим решение исходного уравнения:

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

16.76. $y'' + y = 4xe^x$.
16.77. $y'' + y = 4\sin x$.
16.78. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.
16.79. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.
16.80. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.
16.81. $y'' - y = 2e^x - x^2$.
16.82. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.
16.83. $y'''' + 5y'' + 4y = 3\sin x$.

17. РЯДЫ

17.1. Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов

Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (17.1)$$

называется *сходящимся*, если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — n-я частичная сумма ряда, S — сумма ряда. Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *расходящимся*.

Общие признаки сходимости ряда:

1. *Критерий Коши сходимости числового ряда.* Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер N, такой, что для любых $m > n > N$ выполнялось условие

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

2. *Необходимое условие сходимости ряда.* Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Свойства сходящихся рядов:

1. На сходимость ряда не влияет отбрасывание, добавление или изменение конечного числа его членов.

2. Пусть даны два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S^a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S^b$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S^a + S^b$.

3. Пусть дан сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S^a$ и постоянная C, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n = CS^a$.

Найти суммы следующих рядов:

17.1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Указание. Члены ряда являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = {}^1/_2$.

17.2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

17.3. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$

17.4. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Указание. Разложить a_n на элементарные дроби: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Тогда $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

17.5. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

17.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$. **17.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Доказать расходимость следующих рядов:

17.8. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Указание. $S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ — нечетное,} \\ 0, & n \text{ — четное.} \end{cases}$ Следовательно, последовательность частичных сумм не имеет предела.

17.9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ (гармонический ряд).

Указание. Рассмотреть подпоследовательность частичных сумм $\{S_{2^k}\}$:

$$S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = S_{2^1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_{2^3} = S_{2^2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{2},$$

...

$$S_{2^k} = S_{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \frac{1}{2^{k-1}+3} + \frac{1}{2^{k-1}+4}\right) > k \cdot \frac{1}{2} + \frac{2^{k-1}}{2^k} =$$

$$= (k+1) \cdot \frac{1}{2}.$$

17.10. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

Указание. Использовать критерий Коши:

$$|a_n + \ldots + a_{2n}| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right| > \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

17.11. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$

17.12. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{2n-1}{2n} + \ldots$

Указание. Проверить необходимое условие сходимости.

17.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$. **17.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}001}$.

17.2. Признаки сходимости положительных рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором все $a_n \geqslant 0$, называется *положительным.*

Общий признак сходимости положительных рядов. Для того чтобы положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Признаки сравнения положительных рядов. Пусть даны два положительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда:

1) если $a_n \leqslant b_n$ при всех n, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

2) если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n$, не равный нулю и конечный, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся и расходятся одновременно;

3) если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ при всех n, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Признак Коши. Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

а) если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

б) если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Примечание. Если $q = 1$, то теорема не дает ответа на вопрос о сходимости.

Признак Даламбера. Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

б) если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Примечание. Как и в случае признака Коши, теорема не дает ответа на вопрос о сходимости, если $q = 1$.

Интегральный признак Коши. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и убывают, т.е. $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots > 0$, и пусть $f(x)$ — непрерывная положительная убывающая функция, определенная при $x > 0$, такая, что

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots,\ f(n) = a_n,$$

тогда интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Используя признаки сравнения, исследовать сходимость следующих рядов:

17.15. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

Указание. Сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (см. задачу 17.4), используя второй признак сравнения.

17.16. $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots, \quad \alpha \geqslant 2.$

Указание. Использовать для сравнения ряд из задачи 17.15.

17.17. $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$

Указание. Использовать для сравнения гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

17.18. $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots, \quad \alpha \leqslant 1.$

17.19. $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$

17.20. $\frac{1}{\sqrt[4]{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3 \cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)}} + \ldots$

17.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^4 + 2n^2 + 1}$. **17.22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2+1}$.

17.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$. **17.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-1}}{3^n(n+1)}$.

Используя признаки Даламбера или Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

17.25. $\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \ldots + \frac{n^2}{2^n} + \ldots$

Решение. По признаку Даламбера

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

17.26. $3 + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{3^4}{4^4} + \ldots + \frac{3^n}{n^n} + \ldots$

Р е ш е н и е. По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

17.27. $\frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \frac{100^3}{3!} + \ldots + \frac{100^n}{n!} + \ldots$

17.28. $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$

17.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. **17.30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

17.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n}$. **17.32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$.

Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость следующих рядов:

17.33. $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$

Р е ш е н и е. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b & \text{при } \alpha \ne 1, \\ \ln x\big|_1^b & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \ne 1, \\ \lim\limits_{b\to\infty} \ln b & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится и при $\alpha \leqslant 1$ расходится.

17.34. $\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^2 n} + \ldots$

17.35. $\mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{4}}}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + \ldots$

17.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-6)\ln(n-2)}$. **17.37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n + \sqrt{3})\, 3^{-(n+\sqrt{3})^2}$.

17.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется *знакопеременным*, если он имеет бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится абсолютный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ влечет за собой сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если абсолютный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакочередующимся*, если для любого n члены ряда a_n и a_{n+1} имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что знакочередующийся ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n, \quad \text{где } c_n > 0.$$

Признак Лейбница. Пусть для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ выполнены условия:

1) последовательность $\{c_n\}$ является невозрастающей:

$$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_n \geqslant \ldots > 0.$$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ сходится.

17.38. Зная, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, найти суммы рядов, полученных из данного в результате перестановки его членов:

а) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots;$

б) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$

17.39. Члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

17.40. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}} + \ldots$

17.41. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} + \ldots$

17.42. $\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n \ln n} + \ldots$

17.43. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{n}{n+1}$. **17.44.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

17.45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!}$. **17.46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n(n+1)}$.

17.4. Функциональные ряды

Совокупность B тех значений x, при которых функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

сходится, называют *областью сходимости* ряда, а функцию $S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, $x \in B$, — его *суммой*.

Равномерная сходимость. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, зависящее только от ε, что для любого $n > N$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E к сумме $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно на множестве E к функции $S(x)$.

Критерий Коши равномерной сходимости. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n > N$ и любом p для всех $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ удовлетворяют неравенствам $|u_n(x)| < a_n$, где $x \in E$, а a_n — числа (не зависящие от x), и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве E равномерно.

Свойства равномерно сходящихся рядов:

1. Если функции $u_n(x)$ определены и непрерывны на множестве E и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к сумме $S(x)$ на множестве E, то эта сумма будет непрерывна на множестве E.

2. Если функции $u_n(x)$ определены и непрерывны на $[a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к сумме $S(x)$ на (a, b), то его можно почленно интегрировать на $[a, b]$:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Пусть функции $u_n(x)$ определены на $[a, b]$ и имеют непрерывные производные $u_n'(x)$ на (a, b). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, то сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет на (a, b) производную, причем

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

17.47. Определить при $|x| < 1$ сумму ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

и исследовать его на равномерную сходимость:

а) на отрезке $[0, r]$, где $0 < r < 1$;

б) на интервале $(-1, 1)$.

Решение. Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, получим (при $|x| < 1$): $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Следовательно,

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}\right| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right|. \tag{17.2}$$

а) При $|x| \leqslant r < 1$

$$\left|\frac{x^n}{1-x}\right| \leqslant \frac{r^n}{1-r}. \tag{17.3}$$

Так как при $0 < r < 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1-r} = 0$, то $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\, N$, такое, что при $n > N$ $\left|\dfrac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$. Тогда, учитывая (17.2), (17.3), получаем $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $x \in [0; r]$. Следовательно, ряд сходится равномерно на любом отрезке $[0, r]$, где $0 < r < 1$.

б) Интервал $(-1, 1)$ содержит точки, сколь угодно близкие к точке $x = 1$. Так как $|S(x) - S_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{1-x}\right| \to \infty$ при $x \to 1$, то, как велико бы ни было n, найдутся точки $x \in (-1, 1)$, для которых разность $|S(x) - S_n(x)|$ больше любого, сколь угодно большого числа. Следовательно, нельзя подобрать такое N, чтобы при $n > N$ неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ имело место во всех точках интервала $(-1, 1)$, а это и означает, что сходимость ряда в интервале $(-1, 1)$ не является равномерной.

17.48. Показать, что ряд

$$x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^n + \ldots$$

сходится неравномерно на отрезке $[0, 1]$ и равномерно на отрезке $[^1/_2, 1]$.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

17.49. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

17.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < +\infty.$

17.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

17.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$

17.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2^n}, \quad -2 < x < +\infty.$

17.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2.$

17.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$

17.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \quad -\infty < x < +\infty.$

17.5. Степенные ряды

Ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \tag{17.4}$$

где c_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — постоянные, называется *степенным*.

Данный ряд сводится к ряду

$$c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

с помощью линейной замены переменной.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ *сходится при некотором значении* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно при всяком значении* $|x| < |x_0|$.

Если ряд расходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, *то он расходится при всяком* $|x| > |x_0|$.

Существует такое число R (оно может быть и 0, и ∞), что:

а) ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ (если $R \neq 0$);

б) ряд расходится при $|x| > R$ (если $R < \infty$).

Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ — *интервалом сходимости*.

На концах интервала сходимости (т.е. при $x = R$ и $x = -R$) ряд может как расходиться, так и сходиться.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Свойства степенных рядов:

1. Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, где $r < R$, R — его радиус сходимости.

2. Сумма степенного ряда есть непрерывная на отрезке $[-r, r]$ функция.

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, x]$, $-R < x < R$, и почленно дифференцировать в интервале $(-R, R)$.

Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

17.57. $1 + x + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \ldots + \frac{x^n}{n^p} + \ldots, \qquad p > 0.$

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^p}{n^p}\right| = 1$. Таким образом, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Исследуем ряд на границах интервала сходимости. Пусть $x = -1$, тогда ряд имеет вид

$$1 - 1 + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n^p} + \ldots$$

Данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно при $p > 1$ и условно при $0 < p \leqslant 1$.

При $x = 1$ ряд имеет вид $2 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ и сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$.

17.58. $1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{3^n \cdot (n+1)} + \ldots$

17.59. $1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \ldots + \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} + \ldots$

17.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. **17.61.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 1}}$. **17.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$.

17.63. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.

17.64. $(x + 1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}} + \ldots$

Указание. Сделать замену $t = x + 1$.

$$17.65.\ (2x-5)-\frac{(2x-5)^2}{3}+\frac{(2x-5)^3}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2x-5)^n}{2n-1}+\ldots$$

$$17.66.\ 1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}}+\ldots$$

Р е ш е н и е. Формула для радиуса сходимости применима только тогда, когда все $c_i \neq 0$. В данном случае $c_{2k}=0$ при $k \geqslant 1$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера при каждом x:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2k+1}}{5^{k+1}\sqrt{k+2}}}{\dfrac{x^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}}}\right| = \frac{1}{5}x^2.$$

Следовательно, ряд сходится при $\frac{x^2}{5}<1$ и расходится при $\frac{x^2}{5}>1$ (так как не выполнено необходимое условие сходимости). Таким образом, данный степенной ряд сходится при $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. Исследуем сходимость ряда на границах интервала.

Пусть $x = \pm\sqrt{5}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{5})^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 5^k}{5^k\sqrt{k+1}\sqrt{5}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{5(k+1)}}; \qquad (17.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(-\sqrt{5})^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1} 5^k}{5^k\sqrt{k+1}\sqrt{5}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{5(k+1)}}. \qquad (17.6)$$

Нетрудно показать, что ряды (17.5) и (17.6) сходятся условно.

$$17.67.\ 1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\ldots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{3^k(k+1)\sqrt{k+1}}+\ldots$$

$$17.68.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)^n}. \qquad 17.69.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

17.6. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближенным вычислениям

Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в окрестности точки $x=a$, то для функции $f(x)$ получим бесконечный ряд, который называется *рядом Тейлора*:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Остаточный член $R_n(x) = f(a) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ этого ряда можно представить в следующем виде (форма Лагранжа):

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ не представляет данную функцию, хотя и может сходиться (к другой функции). Если все производные ограничены ($|f^{(k)}(x)| \leqslant K$, $k = 1, 2, \ldots$), то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Положим $a = 0$, тогда получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена элементарных функций:

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$;

2) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$;

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$;

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1)$;

5) $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$ $(-1 < x < 1)$.

Пользуясь разложением в ряд элементарных функций, написать разложения в степенной ряд следующих функций:

17.70. $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right) -$$

$$-\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots$$

17.71. e^{-x^2}. **17.72.** $\dfrac{x^{10}}{1-x}$. **17.73.** $\cos^2 x$.

17.74. $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$. **17.75.** $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

У к а з а н и е. В задачах 17.74, 17.75 разложить данную дробь на простейшие.

17.76. Разложить функцию $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в ряд по степеням x и почленным интегрированием данного ряда написать ряд для $\arcsin x$.

Р е ш е н и е. *Используя биномиальный ряд, напишем разложение для функции* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^{2n} + \ldots$$

Тогда

$$\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

17.77. Разложить функцию $\dfrac{1}{1+x^2}$ в ряд по степеням x и почленным интегрированием данного ряда написать ряд для $\operatorname{arctg} x$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

17.78. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$

17.79. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы рядов:

17.80. $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots$ **17.81.** $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$

17.82. $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$ **17.83.** $\dfrac{x}{1\cdot 2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$

17.84. Разложить $e^{\frac{x}{a}}$ по степеням $(x-a)$ и исследовать формулу остаточного члена ряда.

Р е ш е н и е. Найдем производные функции $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$ в точке $x = a$:

$$f'(a) = \frac{1}{a}e, \quad f''(a) = \frac{1}{a^2}e, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = \frac{1}{a^n}e.$$

Тогда ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{a^n n!}(x-a)^n, \tag{17.7}$$

а остаточный член можно представить в виде

$$R_n(x) = \frac{e^{a+\theta(x-a)}}{a^{n+1}(n+1)!}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{a+\theta(x-a)}}{a^{n+1}(n+1)!} = 0$, то ряд (17.7) сходится к функции $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$, т.е. $e^{\frac{x}{a}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e}{a^n n!}(x-a)^n$.

Разложить в ряд Тейлора следующие функции:

17.85. $y = x^4 + x^2$ по степеням $(x - 1)$.

17.86. $y = \frac{1}{x}$ по степеням $(x + 2)$.

17.87. $y = \cos\frac{x}{2}$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

17.88. $y = \sqrt[3]{x}$ по степеням $(x + 1)$.

Вычислить приближенно и оценить соответствующие погрешности:

17.89. $\sin 1$.

Р е ш е н и е. Полагая $x = 1$ в разложении в ряд Маклорена для $\sin x$, имеем

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots \tag{17.8}$$

Остаточный член оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким образом, при $x = 1$ погрешность определяется первым отброшенным членом. Если в разложении (17.8) оставить три первых члена, то погрешность по абсолютной величине будет меньше $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$. Отсюда $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx$ $\approx 0{,}8417$ с точностью до 0,0002.

17.90. $\operatorname{arctg} 1{,}2$. **17.91.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **17.92.** $\ln 1{,}25$.

Вычислить с указанной степенью точности:

17.93. $\cos 1°$ с точностью до 10^{-6}.

17.94. $\operatorname{tg} 9°$ с точностью до 10^{-3}.

17.95. $\sqrt[3]{19}$ с точностью до 10^{-3}.

17.96. Пользуясь тождеством $\frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{2}$, найти число π с точностью до 10^{-4}.

17.97. Пользуясь формулой

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right],$$

найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5}.

С помощью разложения подынтегральных функций в ряд вычислить с точностью до 10^{-3} следующие интегралы:

17.98. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$. **17.99.** $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

17.100. $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$. **17.101.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

ПРАКТИКУМ 2 ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Задания

1. Найти неопределенный интеграл (табл. 1).
2. Вычислить определенный интеграл (табл. 2).
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 3).

4. Вычислить несобственный интеграл (табл. 4).

5. Исследовать сходимость несобственного интеграла (табл. 5).

6. Решить дифференциальное уравнение первого порядка (табл. 6).

7. Решить линейное дифференциальное уравнение (табл. 7).

8. Исследовать сходимость ряда (табл. 8).

9. Найти промежуток сходимости степенного ряда (табл. 9)

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$	16	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}$ $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x+4)}\,dx$
2	$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$ $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$	17	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}$ $\int \frac{(x^3-1)\,dx}{4x^3-x}$
3	$\int \frac{\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx$	18	$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$ $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$
4	$\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x)\sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin x \cos 3x\,dx$	19	$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$ $\int \ln^2 x\,dx$
5	$\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\int \cos 3x \cos x\,dx$	20	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \frac{\ln x\,dx}{x^3}$
6	$\int \frac{e^x\,dx}{3+e^{2x}}$ $\int \sin 5x \sin x\,dx$	21	$\int \sqrt[3]{1+x^3}\,x^2\,dx$ $\int x^2 e^{-2x}\,dx$

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
7	$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{2+e^x}}$ $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	22	$\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx$ $\int x^3 e^x\,dx$
8	$\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$	23	$\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$ $\int \sin(\ln x)\,dx$
9	$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$	24	$\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{3/2}}$ $\int \cos(\ln x)\,dx$
10	$\int \sqrt{\frac{\ln x}{x^2}}\,dx$ $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$	25	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ $\int x^2\sin 2x\,dx$
11	$\int \frac{\ln^2 x+\ln x+1}{x}\,dx$ $\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$	26	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ $\int x^3\cos 3x\,dx$
12	$\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{1+3^x}}$ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$	27	$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$
13	$\int \frac{2^x\,dx}{1+4^x}$ $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$	28	$\int \frac{x\,dx}{x^2-5}$ $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$
14	$\int \frac{1+\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$	29	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ $\int e^x\cos x\,dx$
15	$\int \frac{3+\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}\,dx$ $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$	30	$\int \sqrt[6]{5-x^4}\,x^3\,dx$ $\int 3^x\sin x\,dx$

Таблица 2. Варианты задания 2

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$	16	$\int_0^1 \arcsin x\,dx$
2	$\int_1^e x^2 \ln x\,dx$	17	$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$
3	$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$	18	$\int_0^1 xe^{x}\,dx$
4	$\int_0^2 x^2 e^{-x}\,dx$	19	$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$
5	$\int_1^e \ln^2 x\,dx$	20	$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$
6	$\int_1^e x\ln^2 x\,dx$	21	$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$
7	$\int_0^1 \arcsin \frac{x}{2}\,dx$	22	$\int_0^{\pi/4} \sin x \cos 3x\,dx$
8	$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$	23	$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$
9	$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$	24	$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$
10	$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$	25	$\int_0^1 \frac{3^x\,dx}{1+9^x}$
11	$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$	26	$\int_0^1 \frac{2^x\,dx}{1+2^x}$

Окончание табл. 2

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
12	$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$	27	$\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$
13	$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$	28	$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$
14	$\int\limits_{0}^{1/2} xe^{2x}\,dx$	29	$\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
15	$\int\limits_{0}^{1/3} xe^{3x}\,dx$	30	$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	Уравнения линий	Вариант	Уравнения линий
1	$y = e^x,\quad y = e^{-x},\quad x = 1$	16	$\lvert y\rvert = -x^2 + 2x$
2	$y = x^2,\quad y = \frac{x^3}{3}$	17	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
3	$y = x^2,\quad y = \sqrt{x}$	18	$y^2 = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$
4	$y^2 = 2x + 1,\quad x - y - 1 = 0$	19	$y = 2 - x^2,\quad y^3 = x^2$
5	$y = x^2 + 1,\quad y = x + 1$	20	$y^3 = x,\quad y = 1,\quad x = 8$
6	$y = x^2 + 4x,\quad y = x + 4$	21	$y = x - 1,\quad y = x^2 - 2x + 1$
7	$y^2 = x + 1,\quad y = x^2 + 2x + 1$	22	$y = x^2 - 3,\quad y = -2x$
8	$y = \frac{1}{1+x^2},\quad y = \frac{x^2}{2}$	23	$y = \frac{1}{2+x^2},\quad y = \frac{x^2}{24}$
9	$y^2 = 4x,\quad x^2 = 4y$	24	$y^2 = 3x,\quad x^2 = 3y$
10	$\lvert y\rvert = 1 - x^2$	25	$\lvert y\rvert = -x^2 - 2x$
11	$y = e^x,\quad y = e^{-x},\quad x = -2$	26	$y = x^2 + \lvert x\rvert - 2,\quad y = 0$
12	$y = x^2,\quad y = x^5$	27	$y = e^x,\quad y = e^{-x},\quad x = 2$
13	$y = x^2,\quad y = \sqrt{-x}$	28	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
14	$y = x + 1,\quad y = x^2 + 2x + 1$	29	$y^2 = x^3,\quad x = 3$
15	$y = x^2 + 3x,\quad y = -x^2 - 3x$	30	$y = \ln x,\quad x = e,\quad y = 0$

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$	16	$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
2	$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$	17	$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx$
3	$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$	18	$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$
4	$\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$	19	$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$
5	$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$	20	$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$
6	$\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$	21	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}\,dx$
7	$\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$	22	$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^3}$
8	$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-1}}$	23	$\int_0^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2}$
9	$\int_0^1 \frac{e^{3x}\,dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$	24	$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$
10	$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$	25	$\int_0^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(x^5+5)^4}$
11	$\int_0^1 \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$	26	$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^3+3)^2}$
12	$\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$	27	$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}\,dx}{(e^{2x}+2)^3}$

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
13	$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$	28	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{3x}\,dx}{(e^{3x}+3)^3}$
14	$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$	29	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^5\,dx}{(x^6+6)^5}$
15	$\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$	30	$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$

Таблица 5. Варианты задания 5

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x\,dx}{1+x^2}$	16	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^2}$
2	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x\,dx}{1+x^2}$	17	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^3}$
3	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3+1}}$	18	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$
4	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4}\,dx$	19	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+\sqrt{1-x}}$
5	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$	20	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}+16-x^4}$
6	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2+1}$	21	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
7	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	22	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$
8	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$	23	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

Окончание табл. 5

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
9	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$	24	$\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-8}}$
10	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2}$	25	$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$	26	$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$
12	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{x^2}$	27	$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{3x^3-x^4}}$
13	$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^3-1}}$	28	$\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt[4]{x}(x^2+1)}$
14	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^4}\, dx$	29	$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x^3}}$
15	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$	30	$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{x}(x^3+1)}$

Таблица 6. **Варианты задания 6**

Вари-ант	Уравнение	Вари-ант	Уравнение
1	$x^2\, dy = (y^2 + xy)\, dx$	16	$y' + 2xy = 2x$
2	$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$	17	$dy = \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) dx$
3	$y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0$	18	$y' - 3\frac{y}{x} = x$
4	$(x - x^3)y' + (-x^2 - 1)y - 3x^3 = 0$	19	$x\, dy + (2y - x)\, dx = 0$
5	$(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0$	20	$y'(x - x^3) + (3x^2 - 1)y = 2x^3(x - x^3)^2$
6	$y' + xy = x^3y^3$	21	$-3x\, dx - 2xy^2\, dx = 3x^2y\, dy$
7	$2xy\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$	22	$8x + xy^2 + \sqrt{6 - x^2}\, y' = 0$
8	$y' + y \cos x = \sin 2x$	23	$x\sqrt{5 + y^2}\, dx + y\sqrt{1 + x^2}\, dy = 0$

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
9	$y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$	24	$(5 + e^x)yy' = e^x$
10	$(x + y)\,dx + x\,dy = 0$	25	$y(5 + \ln y) + xy' = 0$
11	$y' - \dfrac{3}{x}y = x^3e^x$	26	$y' = \dfrac{x^2 + xy + 4y^2}{x^2 - 2xy}$
12	$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$	27	$y' - \dfrac{y}{1-x} = \dfrac{e^{4x}}{1-x}$
13	$(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$	28	$y' - \dfrac{y}{2x+1} = e^{3x}\sqrt{2x+1}$
14	$y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$	29	$x\,dx - 2xy^2\,dx = 2y\,dy + 3x^2y\,dy$
15	$x\,dy = (x + 2y)\,dx$	30	$y' - y\sin x = y^2e^{\cos x}$

Таблица 7. **Варианты задания 7**

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$y'' + 9y = 6e^{3x}$	16	$y'' - 4y' + 3y = 12\sin x - 4\cos x$
2	$y'' - 3y' = 2 - 6x$	17	$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
3	$y'' + y = \cos x$	18	$y'' + 4y = 2\sin 2x$
4	$y'' - 8y' + 7y = 14$	19	$y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$
5	$y'' - y = e^x$	20	$y'' + 2y' + y = xe^x$
6	$y'' - 2y' - y = e^{-x}$	21	$y'' - 7y' + 12y = x$
7	$3y'' + 4y' = 8x + 6$	22	$y'' - 4y = x + 1$
8	$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$	23	$y'' - 9y = x + 1$
9	$y'' - y = e^{-x}$	24	$y'' - 6y' + 9y = e^x$
10	$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$	25	$4y'' - 12y' + 9y = e^x$
11	$y'' - y = 5x + 2$	26	$y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$
12	$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$	27	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
13	$y'' - 2y' + y = 2e^x$	28	$y'' + 2y' + 10y = xe^x$
14	$y'' + 4y = 8e^{2x}$	29	$y'' + y = \sin x$
15	$y'' - y = 2\cos x$	30	$y'' - y = xe^x$

Таблица 8. Варианты задания 8

Вариант	Ряд	Вариант	Ряд
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$
2	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\ln n}$	17	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\pi}{n\ln n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(2^n)}{n^2}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{3n5^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,e^{-n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n^2)^2}{(1+n^3)^2}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$	25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}n\,e^{-n^2}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n(n+1)(n+2)}$

Вариант	Ряд	Вариант	Ряд
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$	28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$
14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$	29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3^n+2}$	30	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

Таблица 9. Варианты задания 9

Вариант	Ряд	Вариант	Ряд
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$	18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n n x^n$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x-3)^n}{2^{n-1}}$	19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n\cdot 4^n}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$	21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^2\cdot 4^n}$	23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+5)^n}{n\cdot 5^n}$

Окончание табл. 9

Вариант	Ряд	Вариант	Ряд
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{4n-3}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$	25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)2^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)^{2n}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{7n-11}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n-1)\sqrt{n+1}}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 3^n(x-1)^n$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+5)^n}{16^n(2n+1)}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}10^nx^n$	29	$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-2}}$

18. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЭКОНОМИКЕ

18.1. Применение аналитической геометрии

Линейная модель амортизации. Существуют различные модели начисления амортизации на купленное предприятием оборудование. Наиболее простая из них — линейная модель. Пользуясь этой моделью, предприятие относит стоимость купленного оборудования на затраты производства равными долями. Если известны начальная стоимость оборудования P, остаточная стоимость S и срок службы T, то ежегодная амортизация

$$a = \frac{P-S}{T}.$$

Стоимость оборудования после t лет эксплуатации

$$V = P - \frac{P-S}{t} = P - at.$$

Последнее уравнение определяет прямую линию.

Линейная модель издержек. Точка безубыточности. При производстве x единиц любой продукции *совокупные издержки (затраты)* $C(x)$ состоят из двух слагаемых — постоянных (фиксированных) и переменных издержек:

$$C(x) = F + V.$$

Постоянные издержки F — это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещения, проценты по займам и т.п.

Переменные издержки V — это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п.

В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны x — количеству произведенной продукции. Коэффициент пропорциональности a — это переменные затраты по производству одной единицы продукции.

Если обозначить через b фиксированные затраты, то получится уравнение, которое называется *линейной моделью издержек:*

$$C(x) = b + ax.$$

Совокупный доход, или *выручка*, $R(x)$, получаемый предприятием от продажи x единиц продукции, определяется формулой

$$R(x) = px,$$

где p — цена единицы товара.

Очевидно, что область определения этой функции $\{x\colon x \geqslant 0\}$ и $R(0) = 0$.

Если произведено и продано x единиц продукции, то *прибыль* $P(x)$ определяется формулой

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

18.1. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки — 30 руб., выручка — 50 руб. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график.

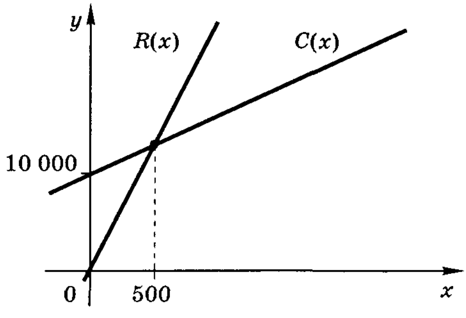


Рис. 18.1

Решение.

$$C(x) = F + V,$$
$$F = 10\,000, \qquad V = 30x$$
$$\downarrow$$
$$C(x) = 10\,000 + 30x,$$
$$R(x) = 50x$$

(рис. 18.1).

Таким образом, прибыль

$$P(x) = 50x - 30x - 10\,000 =$$
$$= 20x - 10\,0000.$$

При малых значениях x прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении x прибыль возрастает, в точке $x = 500$ она обращается в нуль и после этого становится положительной (рис. 18.2).

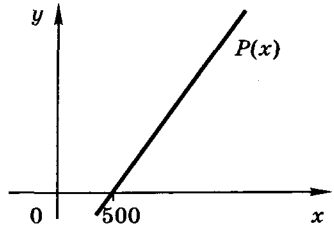


Рис. 18.2

Точка, в которой прибыль обращается в нуль, называется *точкой безубыточности.*

Законы спроса и предложения. Количество товара, которое покупатели приобретут на рынке, зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством купленного товара называется *функцией* или *законом спроса.*

Количество товара, которое производители выставят на продажу, также зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством товара, выставленного на продажу, называется *функцией* или *законом предложения.*

В простейшем случае эти функции линейны (рис. 18.3). Закон спроса обозначен через D, закон предложения — через S; x — количество товара, p — цена на этот товар.

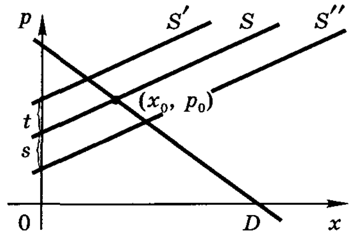


Рис. 18.3

Уравнение спроса можно составить, если заданы две точки, лежащие на его графике. Для этого нужно использовать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Точка пересечения кривых спроса и предложения (x_0, p_0) называется *точкой рыночного равновесия.* Соответственно, p_0 называется *равновесной ценой*, а x_0 — *равновесным количеством (объемом продаж).*

Если известен закон спроса $p(x)$, то совокупный доход $R = xp$ можно выразить через x.

Очень часто правительство вводит налог t на товар или предоставляет субсидию s, чтобы население могло приобрести этот товар по разумной цене.

При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_c, а предложение — только ценой p_s, получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями:

$$p_c = p_s + t,$$
$$p_c = p_s - s,$$

где t и s — соответственно налог и субсидия на единицу товара.

Таким образом, при введении налога или субсидии уравнение спроса D не изменится. График функции предложения поднимется на t единиц вверх (S') или опустится на s единиц вниз (S'') (см. рис. 18.3).

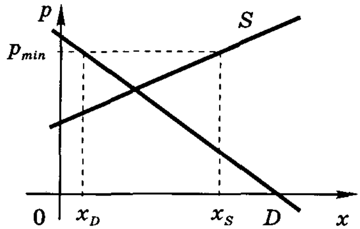


Рис. 18.4

Вместо субсидии иногда вводится минимальная цена. В этом случае правительство скупает излишек продукции, равный $x_S - x_D$ (рис. 18.4).

Некоторые налоги, например НДС (налог на добавленную стоимость), пропорциональны цене. В этом случае остается той же точка пересечения графика предложения с осью Ox и меняется угол наклона графика к оси Ox.

18.2. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = -2x + 12,$$
$$p = x + 3.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж.

в) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?

г) Вводится пропорциональный налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия и доход правительства.

д) Правительство установило минимальную цену, равную 7. Сколько денег будет израсходовано на скупку излишка?

Решение. а) Находим точку равновесия M:

$$x + 3 = -2x + 12,$$
$$x = 3, \quad p = 6.$$

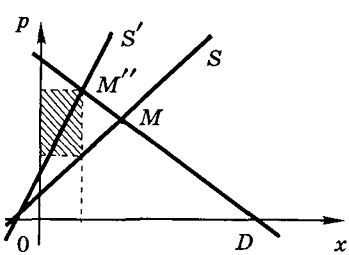


Рис. 18.5

Точка M (3, 6) является точкой равновесия (рис. 18.5).

б) Если введен налог $t = 3$, то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

$$D\colon\ p_c = -2x + 12,$$
$$S\colon\ p_s = x + 3,$$
$$p_c = p_s + 3.$$

Используя соотношение между ценой на рынке p_c и ценой p_s, получаемой поставщиками, имеем следующую систему для определения точки рыночного равновесия:

$$\begin{cases} p_c = -2x + 12, \\ p_c = x + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем новую точку равновесия $M'(2, 8)$. Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу.

в) Если предоставлена субсидия, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$D\colon p_c = -2x + 12,$$
$$S\colon p_s = x + 3,$$
$$p_c = p_s - s.$$

Новый объем продаж равен 5 единицам (3 + 2). Подставляя $x = 5$ в систему, находим:

$$p_c = 2, \qquad p_s = 5, \qquad s = p_s - p_c = 3.$$

г) Если налог составляет 20% , то вся рыночная цена составляет 120% , из них 100% получают поставщики товара, 20% — государство. Итак, поставщики получают

$$p_s = \frac{100}{120} p_c = \frac{5}{6}\, p_c.$$

Уравнение спроса остается неизменным, а в уравнение предложения подставляем $p_s = \dfrac{5}{6}\, p_c$:

$$\begin{cases} p_c = -2x + 12, \\ \dfrac{5}{6} p_c = x + 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим новую точку равновесия M'':

$$-2x + 12 = \frac{6}{5} x + \frac{18}{5}$$

$$x = 2\frac{5}{8}$$

$$p_c = 6\frac{3}{4}$$

$$M''\left(2\frac{5}{8},\, 6\frac{3}{4}\right).$$

Очевидно, что доход правительства R равен площади заштрихованного прямоугольника (см. рис. 18.5):

$$R = \frac{1}{6} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{4} = 2\frac{61}{64}.$$

д) Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения. Разницу между ними скупает правительство. Так как $p = 7$, то

$$x_S = p - 3 = 7 - 3 = 4,$$

$$x_D = \frac{12 - p}{2} = \frac{12 - 7}{2} = 2{,}5.$$

Затраты правительства составят

$$(x_S - x_D)p = (4 - 2{,}5) \cdot 7 = 10{,}5.$$

Точка рыночного равновесия называется *устойчивой*, если при малых отклонениях от равновесного значения цена стремится к этому равновесному значению.

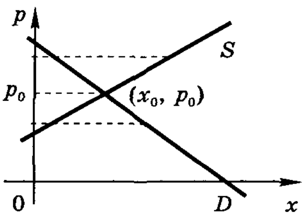


Рис. 18.6

Пусть $p > p_0$, тогда $x_S > x_D$ (рис. 18.6). Поскольку предложение превышает спрос, то цена падает и $p \to p_0$.

Если $p < p_0$, то $x_S < x_D$ (см. рис. 18.6). Поскольку спрос превышает предложение, то цена растет и $p \to p_0$. Следовательно, точка рыночного равновесия, изображенная на рис. 18.6, устойчива.

18.3. Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость автомобиля: а) через 5 лет; б) через 6 лет и 3 месяца.

18.4. Фирма купила четыре одинаковых компьютера. Первоначальная стоимость каждого компьютера составляет 3000 руб., остаточная — 200 руб. Срок жизни компьютера по норме — 4 года. Через 2 года компьютеры были проданы по цене 1800 руб. каждый. Построить график функции, определяющей стоимость четырех компьютеров в зависимости от времени t. Какую прибыль получило предприятие после продажи?

18.5. Цена телевизора 1000 руб., остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 100 руб.?

18.6. Станок был куплен за 12 тыс. руб. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 8 лет. Написать уравнение, определяющее стоимость станка в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость станка через 7 лет и 3 месяца эксплуатации.

18.7. Маша купила автомобиль за 60 тыс. руб., чтобы ездить на работу. Норма амортизации составляет 12% от первоначальной стоимости. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t. Поскольку транспортное средство используется для поездок на работу, Маше разрешили вычитать его годовую амортизацию из суммы, подлежащей обложению подоходным налогом. Какую сумму Маша будет экономить ежемесячно, если подоходный налог составляет 20%?

18.8. Газовая плита была куплена за 800 руб. Амортизация начисляется линейно и составляет 15% в год от первоначальной стоимости.

Найти:

а) стоимость газовой плиты через t лет;

б) стоимость газовой плиты через 6 лет после начала эксплуатации;

в) срок службы плиты.

18.9. Газовая плита была куплена за 800 руб. Амортизация начисляется ежегодно по норме 15% в год от последней стоимости газовой плиты (нелинейная модель).

Найти:

а) стоимость газовой плиты через t лет;

б) стоимость плиты через 6 лет после начала эксплуатации;

в) срок службы газовой плиты, если ее остаточная стоимость равна 50 руб.

18.10. Станок был куплен за 10 тыс. руб., его остаточная стоимость — 300 руб. Определить срок службы станка, если:

а) амортизация начисляется ежегодно из расчета 10% от последней стоимости станка;

б) норма амортизации составляет 10% от первоначальной стоимости.

18.11. Функция издержек производства шин имеет вид $C(x) = 30x + 2100$. Цена одной шины 60 руб. Найти точку безубыточности. Построить графики.

18.12. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс. руб. в месяц, а переменные — 300 руб. за одни часы. Цена часов 500 руб. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности.

18.13. Мебельная фабрика продает каждый стул по цене 3 тыс. руб. Функция издержек линейная. Издержки составляют 48 тыс. руб. за 10 стульев и 43,2 тыс. руб. за 6 стульев. Составить функцию дохода и функцию издержек. Найти точку безубыточности.

18.14. Постоянные издержки производства некоторой продукции составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные — 700 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1200 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить:

а) точку безубыточности;

б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 105 тыс. руб. в месяц.

18.15. Настольные лампы продаются по цене 1200 руб. каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс. руб. в месяц, а переменные — 800 руб. за лампу.

а) Найти точку безубыточности, построить график.

б) Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

18.16. Обувная фабрика продает туфли по цене 350 руб. за пару. Издержки составляют 63 тыс. руб. за 100 пар туфель и 60,75 тыс. руб. за 85 пар.

а) Найти точку безубыточности.

б) Сколько пар туфель фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

18.17. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 80$. Цена одной единицы равна 8. Найти точку безубыточности.

18.18. Фабрика продает одну единицу продукции по цене 1,2 руб. Постоянные издержки составляют 300 руб. в день, а переменные — 0,9 руб. за штуку.

а) Найти точку безубыточности.

б) Фабрика может купить новый станок. При этом постоянные издержки возрастут до 360 руб. в день, а переменные снизятся до 0,8 руб. за штуку. Выгодно ли это?

18.19. Найти точку рыночного равновесия для следующих функций спроса и предложения:

а) $p = -\frac{2}{3}x + 6,$ $\quad$ б) $p = -x + 4,$

$p = \frac{2}{3}x + 2;$ $\quad$ $p = 0{,}5x + 1.$

Построить графики.

18.20. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 руб. за штуку и 20 единицам при цене 280 руб. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 руб. и 5 единиц при цене 60 руб. Найти точку рыночного равновесия.

18.21. При цене 100 руб. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 руб. — только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара при цене 150 руб. и 15 единиц при цене 255 руб. Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

18.22. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = x + 100,$$
$$p = -2x + 250.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Был введен налог, равный 10 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога.

в) Налог был удвоен. Найти доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог?

г) Правительство предоставило субсидию, равную 5 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия.

18.23. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = 0{,}5x + 5,$$
$$p = -0{,}5x + 45.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Правительство ввело налог, равный 5. Найти новую точку рыночного равновесия.

в) Была предоставлена субсидия, равная 3 на единицу товара. Найти новую точку рыночного равновесия.

18.24. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -x + 100,$$
$$p = 3x + 20.$$

а) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж на 2 единицы?

б) Какой налог приведет к снижению равновесного объема продаж до 15 единиц?

в) Правительство выделило сумму денег, равную 384, для предоставления субсидии. Найти величину субсидии.

18.25. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -2x + 150,$$
$$p = 4x + 30.$$

а) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж на 2 единицы?

б) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж до 25 единиц?

в) Какой налог должно ввести правительство, если хочет получить доход, равный 216?

18.26. Известны функции предложения и спроса:

а) S: $p = x + 7$, D: $p = 2x + 8$;

б) S: $3p - 2x = 7$, D: $10p + x = 8$.

Найти точку рыночного равновесия. Построить графики.

18.27. Пусть спрос и предложение на некоторый товар определяются уравнениями

$$4p + x = 34,$$
$$6p - x = 38.$$

а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

б) Правительство ввело налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия, доход, полученный правительством, и показать его на графике.

в) Установлена минимальная цена, равная 7,5. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции?

18.28. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$2p + 3x = 36,$$
$$5p - 3x = 48.$$

а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

б) Правительство ввело налог, равный 25%. Найти новую точку равновесия, доход правительства и показать его на графике.

в) Введена минимальная цена, равная 13. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции?

г) Выделена сумма денег, равная 105, для установления минимальной цены. Найти эту цену.

18.29. Монопольный поставщик некоторого товара поставляет такое количество товара, чтобы обеспечить постоянный доход, т.е. закон предложения имеет вид $xp = \text{const} = \frac{16}{3}$. Спрос на этот товар определяется уравнением $x + 3p = 10$. Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

18.30. Законы спроса и предложения на некоторый товар имеют следующий вид:

$$x + 2p = 8,$$
$$xp = \frac{7}{2}.$$

Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

18.31. Исследовать на устойчивость точки рыночного равновесия в задачах 18.19 и 18.20.

18.32. По одному виду вкладов банк выплачивает 15% годовых, а по другому, более рискованному — 20% годовых. Вкладчик хочет вложить 3 тыс. руб. и получать ровно 500 руб. в год. Какие суммы нужно вложить по каждому виду вклада?

18.33. Петров взял кредит для строительства дома под 10% годовых в одном банке и под 12% в другом банке. Общая сумма займа составляет 10 тыс. руб., а сумма выплат по процентам — 1120 руб. Сколько было взято в кредит в каждом банке?

18.2. Предельный анализ

Производные применяются в экономике для получения так называемых предельных издержек, предельной выручки, предельной прибыли и т.п. Слово «предельный» в этих терминах означает производную, или скорость изменения.

18.34. Функция издержек имеет вид $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 10x + 2000$. Найти предельные издержки и посчитать их значение в точке $x = 10$.

Решение.

$$C'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}4x + 10$$
$$C'(10) = 3 - 4 + 10 = 9.$$

Пользуясь формулой для приближенного значения приращения функции

$$\Delta C \approx \mathrm{d}C = C'(x)\Delta x,$$

можно интерпретировать величину $C'(10)$: если произведено 10 изделий, то дополнительные издержки ΔC по производству одиннадцатого изделия приближенно равны $C'(10) = 9$.

Аналогично находятся предельная выручка (доход) $R'(x)$ и предельная прибыль $P'(x)$.

Функция потребления и сбережения. В экономике используются понятия функций потребления и сбережения.

Обозначим через y доход, остающийся у населения после уплаты налогов. Этот доход состоит из двух слагаемых. Часть дохода население тратит. Эта часть составляет *функцию потребления*, которую обычно обозначают $C(y)$. Второе слагаемое $S(y)$ составляют сбережения населения. Функция $S(y)$ называется *функцией сбережения*. Очевидно, что

$$y = C(y) + S(y).$$

Функции потребления и сбережения обычно считаются линейными в течение короткого промежутка времени. На больших интервалах времени эти функции не являются линейными.

Если национальный доход y получает приращение Δy, то функции потребления и сбережения также получают приращения соответственно ΔC и ΔS:

$$\Delta y = \Delta C + \Delta S.$$

Последнее равенство можно разделить на $\Delta y \neq 0$ и перейти к пределу при $\Delta y \to 0$. Тогда получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta y} = 1,$$

т.е.

$$\frac{dC}{dy} + \frac{dS}{dy} = 1.$$

Полученные производные $\frac{dC}{dy}$ и $\frac{dS}{dy}$ называются соответственно *предельной склонностью к потреблению* и *предельной склонностью к сбережению.*

Издержки хранения. Совокупные издержки производства товара состоят из издержек его производства и издержек хранения. Пусть товар завозится на склад партиями по x штук в одной партии, а расходуется с постоянной скоростью. Тогда наполняемость склада зависит от времени t и задается функцией, график которой приведен на рис. 18.7. Здесь V — число единиц товара на складе, $\frac{x}{2}$ — средняя наполняемость склада, t_0 — время использования партии товара.

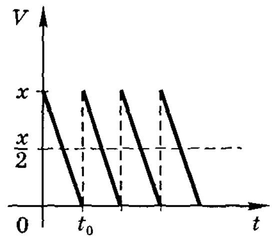


Рис. 18.7

18.35. Компании требуется произвести 1000 единиц некоторого товара в год. Издержки подготовки производства одной партии составляют 320 руб. Издержки производства товара составляют 8 руб. за единицу продукции, а издержки хранения — 1 руб. за единицу. Найти такое число единиц товара в партии x, при котором совокупные издержки производства и хранения были бы минимальны.

Решение. Издержки производства составляют

$$\frac{1000}{x} \cdot 320 + 1000 \cdot 8,$$

где $\frac{1000}{x}$ — число партий товара за год.

Издержки хранения равны $\frac{x}{2} \cdot 1$. Таким образом, совокупные издержки составляют

$$\frac{320\,000}{x} + 8000 + \frac{x}{2}.$$

Находим минимальное значение:

$$C'(x) = -\frac{320\,000}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$C'(x) = 0$$

$$-\frac{320\,000}{x^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$x = 800.$$

Далее определяем

$$C''(x) = \frac{640\,000}{x^3}$$

$$C''(800) = \frac{640\,000}{800^3} > 0.$$

Следовательно, при $x = 800$ функция имеет минимум. Таким образом, в партии должно быть 800 единиц товара.

Эластичность. Для упрощения процесса дифференцирования иногда используется логарифмическая производная (производная от логарифма функции)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y) = \frac{1}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

С этим понятием связано понятие эластичности функции. *Эластичность* функции η определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{x}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Если независимая переменная x изменится на Δx, функция y получит соответствующее приращение Δy. Процентное изменение x и y равно соответственно $\frac{\Delta x}{x}100\%$ и $\frac{\Delta y}{y}100\%$, при этом $\frac{\Delta y \cdot 100\,x}{y \cdot 100\,\Delta x}$ — отношение процентного изменения функции y к процентному изменению аргумента x.

Если $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta y x}{y \Delta x} \to \frac{x \mathrm{d}y}{y \mathrm{d}x} = \eta,$$

т.е. при малых значениях Δx процентное изменение функции приближенно равно эластичности η.

- Если $\eta < -1$, функция эластична.
- Если $-1 < \eta < 0$, функция не эластична.
- Если $\eta = -1$, эластичность функции называется единичной.

В терминах логарифмических производных

$$\eta = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)},$$

т.е. эластичность функции y по x — это отношение логарифмической производной y к логарифмической производной x.

Если известна функция спроса $x = x(p)$, можно найти предельную выручку по отношению к цене p:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(xp) = x + p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = x\left(1 + \frac{p}{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\right) = x(1 + \eta).$$

- Если спрос эластичный, то $1 + \eta < 0$, $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} < 0$ и выручка R — убывающая функция цены.
- Если спрос неэластичный, то $1 + \eta > 0$, $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} > 0$ и выручка R — возрастающая функция цены.
- В случае единичной эластичности $1 + \eta = 0$ и изменение цены не вызывает изменение выручки.

Задача максимизации дохода. При определении максимально возможного дохода государства от сбора налогов находится экстремум функции.

18.36. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -3x + 12,$$
$$p = 2x + 2.$$

Найти величину налога t, при которой доход государства будет максимален.

Решение. После введения налога t имеем систему

$$\begin{cases} p_c = -3x + 12, \\ p_s = 2x + 2, \\ p_c = p_s + t. \end{cases}$$

Выражаем t через x и подставляем в функцию T, определяющую доход государства:

$$-3x + 12 = 2x + 2 + t$$
$$t = 10 - 5x$$
$$T = xt = x(10 - 5x) = 10x - 5x^2.$$

Находим максимум функции T:

$$T' = 10 - 10x = 0$$
$$x = 1$$
$$T'' = -10 < 0,$$

следовательно, $x = 1$ — точка максимума.

В точке $x = 1$ находим $t = 5$, $T = 5$. Следовательно, доход государства максимален при $t = 5$.

18.37. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t) = 5000 + 1000t - 100t^2,$$

где t — время, измеряемое в месяцах;

V — количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 3$; в) $t = 6$.

18.38. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t) = 100\,000(1 + t)^2,$$

где время t измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 2$; в) $t = 5$.

18.39. Эпидемия медленно распространяется среди населения. Число заболевших определяется формулой

$$A(t) = 200\left(t^{\frac{5}{2}} + t^2\right),$$

где t — число недель, прошедших с момента начала эпидемии.

Найти скорость изменения числа заболевших в момент времени:

а) $t = 1$; б) $t = 4$; в) $t = 9$.

18.40. Предположим, что издержки получения питьевой воды заданы формулой

$$C = \frac{10\,000}{p} - 100,$$

где p — процентное содержание загрязняющих воду примесей.

Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.

18.41. Предположим, что спрос на некоторую продукцию зависит от цены p следующим образом:

$$D(p) = \frac{25\,000}{p^2} - \frac{1}{5}.$$

Найти скорость изменения спроса, если цена равна:

а) 10; б) 25.

18.42. Издержки удаления p процентов загрязнений из использованной воды равны

$$C(p) = \frac{7600p}{105 - p}.$$

Найти скорость изменения издержек в точке $p = 52{,}5$.

18.43. Спрос на некоторый товар зависит от цены p следующим образом:

$$D(p) = \frac{100}{\sqrt{p}} - \frac{1}{4}.$$

Найти скорость изменения спроса, если цена равна:

а) 100; б) 16.

18.44. Выручка от оптовой продажи радиоприемников определяется функцией

$$R(x) = 75x - 0{,}05x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 750,$$

где x — число проданных радиоприемников.

Найти предельную выручку, если продано:

а) 100 радиоприемников;

б) 200 радиоприемников.

18.45. Найти предельную выручку для следующих функций $R(x)$:

а) $R(x) = 2x - 0{,}01x^2$;

б) $R(x) = 4x - 0{,}005x^{\frac{3}{2}}$;

в) $R(x) = 0{,}2x - 10^{-2}x^2 - 10^{-4}x^{\frac{5}{2}}$;

г) $R(x) = 50x - 2x^3(\sqrt{x} + 1)$.

18.46. Найти предельную выручку, если заданы уравнение спроса и значение цены на некоторую продукцию:

а) $10x + p = 100$, $\quad p = 80$;

б) $\sqrt{x} + 3p = 50$, $\quad p = 10$;

в) $x^{\frac{3}{2}} + 10p = 94,$ $\qquad p = 38{,}6;$

г) $2p + x + 0{,}02x^2 = 1000,$ $\quad p = 494.$

18.47. В задаче 18.46 дополнительно заданы функция издержек и точка:

а) $C(x) = 50 + 3x,$ $\qquad x = 3;$

б) $C(x) = 40 + x,$ $\qquad x = 6;$

в) $C(x) = 100 + x^{\frac{3}{2}},$ $\qquad x = 4;$

г) $C(x) = 70 + 0{,}1x^2,$ $\qquad x = 25.$

Найти предельную прибыль и вычислить ее значение в заданной точке.

18.48. В задаче 18.47 (пункты «а», «б» и «г») найти максимальное значение прибыли. При какой цене p прибыль принимает свое максимальное значение?

18.49. Количество произведенной за день продукции $Q(x)$ зависит от числа рабочих в сборочном цехе следующим образом:

$$Q(x) = 100x + 3x^2,$$

где x — число рабочих.

а) Если в сборочном цехе работали 70 человек, оценить изменение количества произведенной за неделю продукции, вызванное добавлением одного рабочего.

б) Найти точное значение прироста выработки за неделю, вызванного добавлением одного рабочего.

18.50. Месячное производство $Q(x)$ некоторого продукта зависит от инвестиций следующим образом:

$$Q(x) = 500x^{\frac{3}{2}},$$

где x — инвестированный капитал в миллионах рублей.

Вычислить точно и приближенно прирост производства, вызванный дополнительным вложением 1 млн. руб., если первоначальные инвестиции составляли 100 млн. руб.

18.51. Пусть спрос q на некоторый товар зависит от цены p следующим образом:

$$q = \frac{40\,000}{p^2} - 1, \qquad p > 0.$$

Вычислить точно и приближенно изменение спроса, если цена вырастет:

а) с 50 до 51; б) со 100 до 101.

18.52. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 100 + 3x + x^2,$$

где x — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 20. Найти функцию предельной прибыли и ее значение в точке 30. Объяснить экономический смысл значения $P'(30)$. Вычислить и объяснить смысл величины $P(31) - P(30)$.

18.53. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 150 + 10x + 0{,}01x^2,$$

где x — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 36. Найти функцию прибыли и функцию предельной прибыли. Объяснить экономический смысл величины $P'(15)$. Вычислить и объяснить смысл величины $P(16) - P(15)$.

18.54. Функция издержек производства некоторой продукции определяется следующей формулой:

а) $C(x) = 2000 + 100x + 0{,}1x^2$;

б) $C(x) = 3500 + 150x + 0{,}2x^2$,

где x — число единиц произведенной продукции.

Найти функцию предельных издержек, средние издержки производства x единиц продукции и скорость изменения средних издержек. При каком уровне производства скорость изменения средних издержек равна нулю?

18.55. Фотограф заметил, что при цене 110 руб. за набор фотографий на паспорт он делает 45 наборов в день. Если повысить цену до 120 руб., то число клиентов снижается до 40. Считая линейным соотношение между спросом и ценой, найти функцию выручки. При каком значении цены выручка достигает своего максимального значения?

18.56. Производитель телевизоров продает 100 телевизоров в неделю при цене 1800 руб. за каждый. Если цена повышается до 1900 руб., то объем продаж снижается до 80 телевизоров. Фиксированные издержки производства телевизора составляют 50 тыс. руб. в неделю, а переменные издержки — 800 руб. за один телевизор. Полагая линейным закон спроса, найти функцию прибыли. Какова максимальная прибыль и при какой цене она достигается?

18.57. В гостинице 60 номеров. При цене 300 руб. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 280 руб. за номер, то занято 55 номеров. Найти максимальное значение выручки, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?

18.58. Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 120 руб. за обед бывает 70 посетителей, а при цене 100 руб. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 900 руб. в день, а переменные — 40 руб. за обед. Найти функцию прибыли, предполагая линейной зависимость между числом посетителей и ценой обеда. Каково максимальное значение прибыли?

18.59. Цена на некоторый товар составляет 250 руб. Издержки производства этого товара равны $120x + x^2$, где x — число единиц произведенного товара. Найти максимальное значение прибыли.

18.60. Издержки производства некоторой продукции определяются функцией $5x^2 + 80x$, где x — число единиц произведенной за месяц продукции. Эта продукция продается по цене 280 руб. за изделие. Сколько изделий нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальна.

18.61. Пусть известны функции соответственно спроса и предложения на некоторый товар на конкурентном рынке:

$$p = 2x + 50,$$
$$p = -x + 200,$$

где x — число единиц товара.

Предположим, что средние издержки производства одной единицы товара определяются следующей функцией:

$$\overline{C}(x) = \frac{500}{x} + 70 + 2x.$$

Найти максимальное значение прибыли.

18.62. На монопольном рынке спрос на некоторый товар определяется следующей функцией:

$$p = 780 - 2x - 0{,}1x^2,$$

где x — число единиц товара.

Найти максимальную прибыль, если средние издержки производства этого товара составляют

$$\overline{C}(x) = \frac{1000}{x} + 500 + 2x.$$

При каком значении цены прибыль максимальна?

18.63. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$$C(y) = 6 + 0{,}36y + 0{,}46y^{\frac{3}{4}},$$

где y — совокупный национальный доход.

Найти а) предельную склонность к потреблению и б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 5.

18.64. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$$C(y) = 7 + 0{,}24y + 0{,}36y^{\frac{4}{5}},$$

где y — совокупный национальный доход.

Найти а) предельную склонность к потреблению и б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 243.

18.65. Найти предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 15 млрд., а функция потребления имеет следующий вид:

а) $C(y) = 10 + 0{,}47y + 0{,}36y^{\frac{3}{4}}$;

б) $C(y) = 11 + 0{,}36y + 0{,}14y^{\frac{4}{5}}$.

18.66. Компании нужно произвести 15 тыс. единиц товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 150 руб. Производство одной единицы товара обходится в 7 руб., а издержки хранения составляют 0,5 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.67. Компания нашла покупателя, согласного покупать у нее 20 тыс. единиц некоторого товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 30 руб. Производство одной единицы товара обходится в 9 руб., а издержки хранения составляют 0,3 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.68. Компания должна произвести 96 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 1500 руб., а издержки производства одной единицы продукции — 10 руб. Хранение обходится в 0,5 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.69. Компания должна произвести 300 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 720 руб., а издержки производства одной единицы продукции — 7 руб. Хранение обходится в 3 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.70. Найти эластичность функции спроса:

а) $p + 5x = 100$ в точке $p = 50$;

б) $3p + 4x = 120$ в точках $p = 15$ и $p = 20$;

в) $p^2 + p + 4x = 40$ в точках $p = 2$ и $p = 4$.

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным?

18.71. Найти эластичность функции спроса $xp = 5$ в точке $p = 10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности?

18.72. Для следующих функций спроса найти значения p, при которых спрос является эластичным:

а) $2p + 3x = 12$;

б) $x = 50(10 - \sqrt{p})$;

в) $p = ax + b \quad (a < 0,\ b > 0)$.

18.73. Функция спроса имеет вид $p = \sqrt{3600 - x^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%.

18.74. Уравнение спроса имеет вид $p = 20 - 0{,}1\sqrt{x}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

18.75. Уравнение спроса имеет вид $x = 100\sqrt{4 - p}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц; б) 50 единиц.

18.76. Уравнение спроса имеет вид $(p + 1)\sqrt{x + 1} = 100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы; б) 15 единиц.

18.77. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $p = -3x + 124$, $p = 2x + 14$; б) $p = 250 - 2x^2$, $p = 700 + 3x$.

18.78. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $p = 800 - 0{,}5x$, $p = 700 + 2x$; б) $p = 8200 - 5x^2$, $p = 700 + 20x^2$.

18.3. Применение интегрального исчисления

Интегрирование используется для нахождения функций издержек, прибыли, потребления, если известны соответственно функции предельных издержек, предельной прибыли и т.д. Для определения произвольной постоянной интегрирования необходимо дополнительное условие. Если находится функция издержек, используется то, что ее значение в точке $x = 0$ (x — число единиц произвольной продукции) равно значению фиксированных издержек, а при определении функции дохода — то, что ее значение в точке $x = 0$ равно нулю (доход равен нулю, если не продано ни одного изделия).

18.79. Задана функция предельного дохода

$$R'(x) = 20 - 0{,}04x.$$

Найти функцию дохода и закон спроса на продукцию.

Решение.

$$R(x) = \int (20 - 0{,}04x)\mathrm{d}x = 20x - 0{,}04\frac{x^2}{2} + C = 20x - 0{,}02x^2 + C,$$

$$R(0) = 0, \text{ следовательно, } C = 0,$$

$$R(x) = 20x - 0{,}02x^2.$$

Если каждая единица продукции продается по цене p, то доход определяется формулой $R = xp$. Следовательно, деля на x функцию дохода, находим закон спроса $p(x)$:

$$p = 20 - 0{,}02x.$$

Коэффициент неравномерности распределения дохода. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где y — это доля совокупного дохода, получаемая частью x наиболее низко оплачиваемого населения. Например, $y(0{,}8) = 0{,}6$ означает, что 80% наиболее низко оплачиваемого населения получают 60% совокупного дохода. Очевидно, что $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y \leqslant x$. Предположим, что нет населения с нулевым доходом, т.е. $y(0) = 0$, и весь доход получается всей совокупностью населения, т.е. $y(1) = 1$.

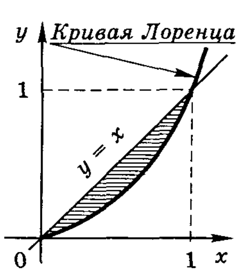


Рис. 18.8

На рис. 18.8 показан пример графика функции $y = f(x)$. Эта кривая называется *кривой Лоренца*. Если бы распределение доходов было совершенным, то 10% населения получали бы 10% совокупного дохода, 20% населения — 20% дохода и т.д. Тогда кривой распределения доходов была бы прямая $y = x$. Отклонение реального распределения доходов от идеального измеряется отношением L площади между прямой $y = x$ и кривой Лоренца к площади, ограниченной прямыми $y = x$, $x = 1$ и осью x, и называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов*.

Очевидно, что $0 \leqslant L \leqslant 1$. Значение $L = 0$ соответствует совершенному распределению доходов.

Кривая обучения. Часто необходимо оценить, сколько времени потребуется для производства некоторого дополнительного количества продукции. Для подобных расчетов пользуются так называемой кривой обучения.

Пусть $T = F(x)$ — время, измеряемое в человеко-часах, необходимое для производства первых x единиц продукции. Тогда $f(x) = F'(x)$ приближенно равно времени, необходимому для производства $(x+1)$-й единицы продукции. Обычно используют функции вида

$$f(x) = ax^b,$$

где $a > 0, \quad -1 \leqslant b < 0$.

График функции такого вида изображен на рис. 18.9 и называется *кривой обучения.*

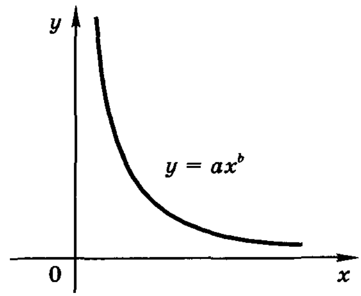


Рис. 18.9

Функция $f(x)$ — убывающая, так как время, необходимое для выполнения некоторой операции, убывает при возрастании числа повторов.

Время ΔT, необходимое для производства единиц продукции с номерами от (n_1+1) до n_2, определяется формулой

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

18.80. После сборки 100 часов оказалось, что в дальнейшем время убывает в соответствии с формулой $y = 15x^{-0,14}$. Найти время, которое потребуется для сборки еще 20 часов (т.е. с номера 101 до номера 120).

Решение.

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}\mathrm{d}x = \left.\frac{15x^{0,86}}{0,86}\right|_{100}^{120} = \frac{1500}{86}(120^{0,86} - 100^{0,86}) = 8,91.$$

Выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков. Пусть $p = f(x)$ — кривая спроса D на некоторый товар и $p = g(x)$ — кривая предложения S; (x_0, p_0) — точка рыночного равновесия (рис. 18.10).

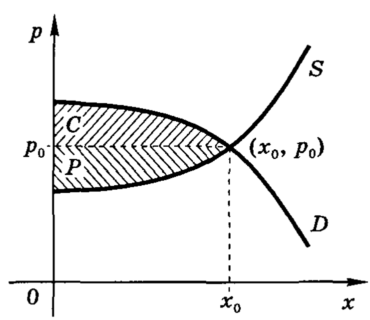


Рис. 18.10

Некоторые потребители могут заплатить за этот товар цену $p > p_0$. Найдем выигрыш потребителей от установленной цены p_0. Разобьем отрезок $[0, x_0]$ на n частей и обозначим точки разбиения

$$0 = \bar{x}_0, \quad \bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_{i-1}, \quad \bar{x}_i, \ \ldots, \ \bar{x}_n = x_0.$$

На каждом интервале выберем точку $x_i^* \in [\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i]$. Выигрыш потребителей на этом отрезке равен

$$(p(x_i^*) - p_0)\,\Delta x_i, \qquad \text{где} \qquad \Delta x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}.$$

Суммируя все выигрыши, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}(p(x_i^*) - p_0)\Delta x_i.$$

Если функция спроса непрерывна и $n \to \infty$, а длина максимального отрезка разбиения $\max|\Delta x_i| \to 0$, то эта интегральная сумма имеет предел, равный

$$\int_0^{x_0}(f(x) - p_0)\mathrm{d}x.$$

Таким образом, *выигрыш потребителей*

$$C = \int_0^{x_0} f(x)\mathrm{d}x - p_0x_0.$$

Аналогично находится *выигрыш поставщиков*:

$$P = p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\mathrm{d}x.$$

Очевидно, что выигрыш потребителей равен площади, заключенной между кривой спроса D и прямой $p = p_0$. Выигрыш поставщиков равен площади, заключенной между прямой $p = p_0$ и кривой предложения S (см. рис. 18.10).

18.81. Известны законы спроса и предложения:

$$p = 116 - x^2,$$

$$p = \frac{5}{3}x + 20.$$

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20$$

$$3x^2 + 5x - 288 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 3456}}{6}, \quad \text{откуда} \quad x_1 = 9; \quad x_2 = -\frac{32}{3}$$

$$x_0 = 9, \quad p_0 = 35$$

$$p_0x_0 = 35 \cdot 9 = 315$$

$$C = \int_0^9 (116 - x^2)\mathrm{d}x - 315 = \left(116x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^9 - 315 = 486$$

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right)\mathrm{d}x = 315 - \left(\frac{5}{3}\,\frac{x^2}{2} + 20x\right)\Big|_0^9 = 315 - \frac{5}{6}\cdot 81 - 180 = 67{,}5.$$

Среднее значение. Среднее значение непрерывной функции на промежутке $[a, b]$ находится по формуле

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Среднее значение функции используется при вычислении налога на *имущество предприятия*. Величина налога

$$N = kf(c) = k\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

где k — коэффициент, зависящий от вида предприятия;

$f(c)$ — среднее значение стоимости имущества за год;

$[a, b]$ — промежуток времени, равный году.

Интеграл вычисляется приближенно по формуле трапеций с разбиением года на 12 месяцев:

$$N = \frac{k}{12}\left(\frac{f(0)+f(12)}{2} + f(1) + f(2) + \ldots + f(11)\right),$$

где $f(0)$ — *стоимость имущества на 1 января;*

$f(1)$ — стоимость имущества на 1 февраля;

...

$f(11)$ — стоимость имущества на 1 декабря;

$f(12)$ — стоимость имущества на 1 января следующего года.

Задача максимизации прибыли. В ряде отраслей промышленности, например в горнодобывающей, после некоторого момента времени прибыль начинает убывать. В этом случае необходимо найти момент времени, в который прибыль принимает максимальное значение, и своевременно остановить производство.

18.82. Скорости изменения издержек и дохода во времени имеют следующий вид:

$$C'(t) = 2 + t,$$
$$R'(t) = 17 - 2t.$$

Найти максимальное значение прибыли, которое можно получить от этого производства. Когда производство следует остановить?

Решение.

$$P'(t) = R'(t) - C'(t) = 17 - 2t - 2 - t = 15 - 3t$$

$$P'(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 5$$

$$P''(5) = -3 < 0, \text{ следовательно, } t = 5 \text{ — точка максимума.}$$

$$P(5) = \int_0^5 P'(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 (15 - 3t)\mathrm{d}t = \left(15t - 3\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 = 75 - \frac{3}{2} \cdot 25 = \frac{75}{2}.$$

Изменение капитала. Если $I(t)$ — скорость изменения инвестиций, а $A(t)$ — капитал предприятия, то

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

Зная скорость изменения инвестиций, можно найти изменение капитала по формуле

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\mathrm{d}t.$$

18.83. Функция предельных издержек имеет вид

$$C'(x) = 50 + 0{,}02x.$$

а) Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 2500 руб. в месяц.

б) Каковы издержки производства 250 изделий в месяц?

в) Если продукция продается по цене 75 руб. за изделие, сколько нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальной?

18.84. Функция предельных издержек некоторого предприятия имеет вид

$$C'(x) = 60 - 0{,}04x + 0{,}003x^2.$$

а) Найти функцию издержек, если издержки производства 100 единиц продукции составляют 7 тыс. руб.

б) Найти фиксированные издержки.

в) Каковы издержки производства 250 единиц продукции?

г) Если цена составляет 65,5 руб. за единицу продукции, найти максимальное значение прибыли.

18.85. Функция предельных издержек имеет вид

$$C'(x) = 60 + 0{,}04x.$$

Фиксированные издержки составляют 1800 руб. в месяц, а цена одного изделия равна 80 руб.

а) Найти переменные издержки.

б) Каковы издержки производства 150 изделий?

в) Найти приращение прибыли, если объем производства вырос со 150 до 200 изделий.

18.86. Функция предельного дохода некоторого предприятия имеет вид

а) $R'(x) = 20 - 0{,}02x$; б) $R'(x) = 45 - 0{,}04x - 0{,}003x^2$.

Найти функцию дохода. Каково уравнение спроса?

18.87. Функция предельной прибыли имеет вид

$$P'(x) = 25 - 0{,}004x.$$

Прибыль предприятия составляет 35,8 тыс. руб., если продано 1200 изделий. Найти функцию прибыли.

18.88. Функция предельных издержек некоторой продукции имеет вид

$$C'(x) = 30x\mathrm{e}^{0{,}001x^2}.$$

Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 20 тыс. руб.

18.89. Функция предельного дохода имеет вид

а) $R'(x) = 25 - 0{,}4x - 0{,}06x^2$;

б) $R'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+900}}$;

в) $R'(x) = (5 - x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$.

Найти функцию дохода. Найти закон спроса на продукцию.

18.90. Найти функцию потребления, если потребление равно 6 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к потреблению имеет следующий вид:

а) $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 0{,}5 + \dfrac{0{,}2}{\sqrt{y}}$;

б) $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\sqrt{3y+4}} + 0{,}4$;

в) $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 0{,}6 - \mathrm{e}^{-3y}$.

18.91. Найти функцию потребления, если потребление равно 4 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к сбережению имеет следующий вид:

а) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = 0{,}37;$

б) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = 0{,}4 - \frac{1}{\sqrt{2y+9}};$

в) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y} = 0{,}3 + \mathrm{e}^{-1{,}6y}.$

18.92. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца:

а) $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x;$ б) $y = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}x.$

Какую часть дохода получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

18.93. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца:

а) $y = 0{,}87x^2 + 0{,}13x;$ б) $y = 0{,}96x^2 + 0{,}04x.$

Какую часть дохода получают 8% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

18.94. После покраски первых 30 автобусов было обнаружено, что кривая обучения имеет вид

$$y = 20x^{-0{,}312}.$$

Сколько времени потребуется для покраски следующих 50 автобусов?

18.95. Для сборки первых 50 CD-плейеров (1 единица продукции) понадобилось 70 человеко-часов. В последующем для сборки любой единицы продукции — 50 плейеров — требовалось меньше времени в соответствии с формулой обучения

$$f(x) = 70x^{-0{,}24}.$$

Найти время, которое потребовалось для производства 5 единиц продукции (250 CD-плейеров) после того, как 2 единицы были уже произведены.

18.96. После производства 100 изделий (1 единицы продукции), для которого потребовалось 30 ч, оказалось, что в дальнейшем требуемое время убывает в соответствии с формулой

$$f(x) = 30x^{-0,14}.$$

Сколько времени потребуется для производства 400 изделий после того, как 500 будет уже произведено?

18.97. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид

$$p = 112 - x^2.$$

Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 90.

18.98. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид

$$p = \frac{150}{2x+5}.$$

Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

18.99. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 89 - x^2$, $\quad 10x - 7p + 210 = 0$;

б) $5p + 2x = 50$, $\quad 5p - 6x = 10$;

в) $p = 44 - x^2$, $\quad p = x^2 + 2x + 20$;

г) $p = \dfrac{120}{x+2}$, $\quad p = \dfrac{5}{2}x + 10$.

18.100. Функция совокупных издержек монополии и уравнение спроса на этот товар имеют следующий вид:

а) $C(x) = 900 + 40x + 5x^2$, $p = 280 - 4x - 2x^2$;

б) $C(x) = 400 + 30x + x^2$, $p = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 50$.

Найти выигрыш потребителей в точке, где монополия имеет максимальную прибыль.

18.101. Уравнение спроса на некоторую продукцию имеет вид

$$p = 30 - 0,02x.$$

Найти среднее значение дохода, если объем продаж возрос с 80 до 150 единиц.

18.102. Функция совокупных издержек производства некоторой продукции имеет вид

$$C(x) = 1000 + 2x + 0{,}04x^2.$$

Найти среднее значение издержек при изменении объема производства от 100 до 200 единиц.

18.103. Кривая обучения при покраске автомобилей имеет вид

$$f(x) = 10x^{-0{,}312},$$

где $f(x)$ — число человеко-часов, необходимое для покраски $(x + 1)$-го автомобиля. Найти среднее значение времени, необходимое для покраски автомобиля, если:

а) было покрашено 100 первых автомобилей;

б) были покрашены автомобили с номерами 401—500.

18.104. Посчитать, какой налог на имущество должно заплатить предприятие, если $k = 2\%$, а стоимость имущества (сумма соответствующих счетов баланса) составляла на первое число каждого месяца:

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Млн. руб.	3,5	2,8	4,1	5,2	6,1	3,8	2,6	6,2	7,4	5,1	2,5	3,8	4,6

18.105. Посчитать, какой налог на имущество должно заплатить предприятие, если $k = 1{,}5\%$, а стоимость имущества на начало каждого квартала составляла:

Дата	1.01	1.04	1.07	1.10	1.01
Млн. руб.	11,2	9,8	4,5	10,8	7,6

18.106. Предприятие выпускает видеоаппаратуру. Его доход задается функцией

$$R(t) = 40e^{0{,}25t}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Найти среднее значение дохода на промежутке [0, 10].

18.107. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеет следующий вид:

а) $C'(t) = 3 + 2t, \qquad R'(t) = 28 - 3t;$

б) $C'(t) = 10 + 3t^{\frac{2}{3}}, \qquad R'(t) = 46 - t^{\frac{2}{3}};$

в) $C'(t) = 22 + 4t^{\frac{4}{5}}, \qquad R'(t) = 134 - 3t^{\frac{4}{5}}.$

Найти максимальное значение прибыли.

18.108. Найти прирост капитала предприятия на данном промежутке времени, если скорость изменения инвестиций имеет следующий вид:

а) $I(t) = 10 + 2\sqrt{t}$, $\quad 9 \leqslant t \leqslant 16$;

б) $I(t) = 2 + \sqrt[5]{t^3}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$.

18.109. Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первого года, а затем изменяется по закону

$$R(t) = 10e^{-0,2(t-1)},$$

где t — время в годах. Найти среднее значение дохода от инвестиций в течение первых 5 лет.

18.4. Применение дифференциальных уравнений

Эластичность и функция спроса. Если известна эластичность спроса на некоторый товар, то можно найти функцию спроса.

18.110. Эластичность $\eta = -\frac{1}{3}$ для любых значений p. Найти функцию спроса.

Решение. Пользуясь определением эластичности

$$\eta = \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp},$$

получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3}$$

$$3\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}.$$

Интегрируем и получаем уравнение спроса:

$$3\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dp}{p}$$

$$3\ln|x| = -\ln|p| + \ln C$$

$$px^3 = C.$$

Примечание. Для определения C нужна дополнительная информация.

Уравнение снабжения. *Уравнением снабжения* или *логистики* называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y),$$

где p и m — постоянные.

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(m-y)} = p\mathrm{d}t$$

$$-\frac{\mathrm{d}y}{y^2 - my} = p\mathrm{d}t.$$

Выделяем полный квадрат в знаменателе левой части равенства и интегрируем:

$$-\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y-\frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}} = p\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{m}\ln\left|\frac{y-m}{y}\right| = -pt - C$$

$$\frac{y-m}{y} = \mathrm{e}^{-mpt}\mathrm{e}^{-C}.$$

Из последнего равенства находим y:

$$y = \frac{m}{1+\mathrm{e}^{-mpt}\,\mathrm{e}^{-C}}.$$

Если обозначить $k = mp$, $A = \mathrm{e}^{-C}$, то получится функция, называемая *функцией снабжения (логистики)*:

$$y = \frac{m}{1+A\mathrm{e}^{-kt}},$$

где значение A определяется из начального условия.

Уравнение снабжения используется для моделирования ограниченного роста населения. При $y = m$ имеем $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ и производная меняет знак с «+» на «−». Следовательно, $y = m$ — максимальное значение. Если $y \ll m$, то

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx pmy = ky.$$

Уравнение $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ имеет решение $y = \mathrm{e}^{kt}$ и описывает неограниченный экспоненциальный рост населения.

18.111. Известно, что рост количества бактерий в сосуде удовлетворяет уравнению логистики с постоянной $k = pm = 0{,}2$. Пусть в начальный момент времени количество бактерий составляло 1% от максимально возможного значения m. За какое время количество бактерий достигнет 80% от максимального?

Решение.

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) = \frac{0{,}2y}{m}(m - y)$$

$$\frac{m\,dy}{y(m-y)} = 0{,}2dt.$$

Интегрируем и, используя условие $y < m$, получаем

$$\ln\frac{m-y}{y} = -0{,}2t - C.$$

Пользуясь начальным условием $y = 0{,}01m$ при $t = 0$, находим значение C и подставляем его в решение:

$$\ln\frac{0{,}99}{0{,}01} = -C$$

$$C = -\ln 99$$

$$\ln\frac{m-y}{99y} = -0{,}2t$$

$$\frac{m-y}{99y} = e^{-0{,}2t}$$

$$y = \frac{m}{1+99e^{-0{,}2t}}$$ — решение задачи.

Найдем теперь значение t, при котором $y = 0{,}8m$:

$$0{,}8 = \frac{1}{1+99e^{-0{,}2t}}$$

$$e^{-0{,}2t} = \frac{1}{396}$$

$$-0{,}2t = -\ln 396$$

$$t = 5\ln 396 \approx 29{,}91.$$

Функции спроса и предложения. В простейших случаях предполагается, что спрос и предложение на рынке зависят только от цены товара. В более сложных моделях учитывается их зависимость и от изменения цены, т.е. от производной. При этом для определения равновесной цены используется дифференциальное уравнение.

18.112. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x = 19 + p + 4\frac{dp}{dt},$$

$$x = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 20$.

Решение.

$$19 + p + 4\frac{dp}{dt} = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 9 - 3p$$

$$\frac{dp}{9 - 3p} = dt$$

$$-\frac{1}{3}\ln|9 - 3p| = t + C$$

$$9 - 3p = e^{-3t - 3C}$$

$$p = \frac{9 - e^{-3t - 3C}}{3}.$$

Подставляя начальное условие, находим C:

$$20 = \frac{9 - e^{-3C}}{3}$$

$$e^{-3C} = -51$$

$$p = \frac{9 + 51e^{-3t}}{3} = 3 + 17e^{-3t}$$ — решение задачи (рис. 18.11).

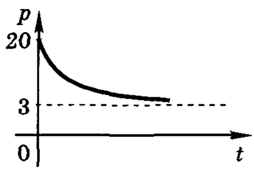


Рис. 18.11

Так как $\lim\limits_{t \to \infty} p = 3$, имеет место устойчивость. Если $\lim\limits_{t \to \infty} p = \infty$, то равновесная цена растет и имеет место инфляция.

18.113. Найти функцию спроса, если эластичность η постоянна и задано значение цены p в некоторой точке x:

а) $\eta = -2$, $\quad p = 10$ при $x = 4$;

б) $\eta = -\frac{4}{5}$, $\quad p = 15$ при $x = 1$;

в) $\eta = -\frac{1}{2}$, $\quad p = 5$ при $x = 2$;

г) $\eta = -3$, $\quad p = 2$ при $x = 27$.

18.114. Найти функцию спроса, если известно значение цены p в некоторой точке x и эластичность имеет следующий вид:

а) $\eta = \frac{x - 100}{x}$, $\quad 0 < x < 100$ и $p = 90$ при $x = 10$;

б) $\eta = \frac{p}{p - 20}$, $\quad 0 < p < 20$ и $p = 18$ при $x = 1$;

в) $\eta = \frac{x - 300}{x}$, $\quad 0 < x < 300$ и $p = 36$ при $x = 12$;

г) $\eta = \frac{p}{p - 40}$, $\quad 0 < p < 40$ и $p = 10$ при $x = 3$.

18.115. В городе с населением 3000 чел. распространение эпидемии гриппа подчиняется уравнению

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(3000 - y),$$

где y — число заболевших в момент времени t. Через какое время заболеет 70% населения, если в начальный момент времени было трое больных?

18.116. Численность населения $y(t)$ некоторой страны удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}2y(1 - 10^{-4}y),$$

где время t измеряется в годах. В начальный момент времени население составляло 1000 чел. Через сколько лет население возрастет в 4 раза?

18.117. *В городе с населением 4000 чел. распространение* эпидемии подчиняется уравнению

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}001y(4000 - y),$$

где y — число заболевших в момент времени t. Через какое время заболеет 90% населения, если в начальный момент болело 2% населения?

18.118. Численность населения $y(t)$ некоторого острова удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}05y(1 - 10^{-6}y),$$

где время t измеряется в годах. В начальный момент времени население составляло 10 тыс. чел. Через сколько лет население возрастет в 10 раз?

18.119. Пусть функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x = 50 - 2p - 4\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$x = 70 + 2p - 5\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p = 10$ в момент времени $t = 0$.

б) Найти $\lim\limits_{t \to \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график.

18.120. Пусть функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x = 30 - p - 4\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$x = 20 + p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p = 7$ в момент времени $t = 0$.

б) Найти $\lim\limits_{t \to \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график.

18.121. Пусть функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x = 100 - p - 2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$x = 140 + p - 3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p = 5$ в момент времени $t = 0$.

б) Найти $\lim\limits_{t \to \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график.

18.122. Пусть функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x = 54 - 4p - 3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$x = 26 + 3p + 2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p = 6$ в момент времени $t = 0$.

б) Найти $\lim\limits_{t \to \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график.

18.123. Пусть функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x = 100 - 3p + 4\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$x = 120 + 2p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

а) Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p = 10$ в момент времени $t = 0$.

б) Найти $\lim\limits_{t \to \infty} p$. Является ли равновесная цена устойчивой?

в) Построить график.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

19. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

19.1. Множество событий. Классическое определение вероятности события

В результате многократного повторения одних и тех же условий, которые носят название испытаний или опытов, можно наблюдать появление или непоявление в них некоторого события. Такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта, называется *случайным*.

Во многих задачах рассматривается схема равновозможных событий. Например, при бросании игральной кости имеется одна и та же возможность появления любой из цифр от 1 до 6. Другим примером может служить выбор номера объекта при контрольной выборочной проверке.

Каждый из равновозможных результатов испытаний (опытов) называется *элементарным исходом*. Элементарный исход может быть рассмотрен либо как самостоятельное событие, либо как составляющая более сложного события.

На множестве всех элементарных исходов Ω можно выделить подмножество, которое обладает заданными свойствами и определяет новое событие. Например, на множестве элементарных исходов при бросании игральной кости можно выделить подмножество таких исходов, которые соответствуют четному числу очков.

Исход называется *благоприятствующим* данному событию, если его появление влечет за собой наступление такого события. В частности, появлению четного числа очков при бросании игральной кости соответствуют элементарные исходы с цифрами 2, 4, 6.

Количественной мерой возможности появления некоторого случайного события служит вероятность.

При классическом определении за *вероятность* события A принимается отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов (m) к общему числу возможных исходов (n):

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для вычисления числа благоприятствующих рассматриваемому событию исходов или общего числа элементарных исходов широко используются формулы комбинаторики.

Если составляются такие комбинации из n элементов по m, которые отличаются друг от друга только составом элементов, то они называются *сочетаниями*. Общее число сочетаний из n элементов по m определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Если комбинации отличаются не только составом элементов, но и порядком их следования, то они называются *размещениями*. Их число находится по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Если комбинации берутся из всех n элементов и отличаются только порядком следования элементов, то они называются *перестановками*. Их число равно

$$P_n = n!.$$

19.1. В магазин поступило 30 холодильников, пять из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

19.2. В коробке находится шесть одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекаются из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра?

19.3. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

19.4. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Решение. Общее число возможных комбинаций для контрольного вскрытия равно числу сочетаний из 10 по 5, т.е. C_{10}^5.

Число исходов, благоприятствующих данному событию, будет равно числу таких комбинаций, в которых две цифры будут 2 и 5, а остальные будут составлять сочетания, число которых равно C_8^3. Тогда искомая вероятность найдется по формуле

$$P = \frac{C_8^3}{C_{10}^5} = \frac{8!5!5!}{3!5!10!} = \frac{2}{9}.$$

19.5. Изготовлена партия из 200 изделий, в которой оказалось три бракованных. Произведена выборка из пяти изделий. Найти вероятность следующих событий:

а) в выборке не будет ни одного бракованного изделия;

б) в выборке будет одно бракованное изделие?

19.6. Из 20 акционерных обществ (АО) четыре являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов?

Решение. Общее число комбинаций выбора АО равно числу сочетаний из 20 по 6, т.е. C_{20}^6. Число благоприятствующих исходов определяется как произведение $C_4^2\, C_{16}^4$, где первый сомножитель указывает число комбинаций выбора АО-банкротов из четырех. Но с каждой такой комбинацией могут встретиться АО, не являющиеся банкротами. Число комбинаций таких АО будет C_{16}^4. Поэтому искомая вероятность запишется в виде

$$P = \frac{C_4^2 C_{16}^4}{C_{20}^6}, \quad \text{т.е.} \quad P = 0{,}28.$$

19.7. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Для проверки были отобраны пять деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными?

19.8. На склад привезли 50 ящиков комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ, но среди них оказалось четыре ящика комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли шесть ящиков. Найти вероятность того, что в одном из этих шести ящиков окажутся некомплектные детали.

19.9. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе A, а 10 — на заводе B. Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе A.

19.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

События называются *несовместными*, если они не могут появиться вместе в одном опыте.

Если одно из событий произойдет обязательно, то такие события образуют *полную группу*.

Суммой событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из рассматриваемых событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

Произведением событий называется событие, состоящее в появлении всех из рассматриваемых событий.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что произошло событие A, называется *условной вероятностью* события B относительно события A. Эта вероятность обозначается $P(B/A)$.

Теорема умножения вероятностей двух событий. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго относительно первого*:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Эта теорема обобщается на любое конечное число событий:

$$P(ABC\cdots LM) = P(A)P(B/A)P(C/AB)\cdots P(M/AB\cdots L).$$

Если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого, то такие события называются *независимыми*.

Для независимых событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий. Для двух независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

События называются *совместными*, если они могут появиться одновременно в одном опыте.

Теорема сложения вероятностей двух совместных событий. *Вероятность сложения двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления*:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

19.10. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них три книги по теории вероятностей, три — по математическому анализу и четыре — по линейной алгебре. Студент случайным образом достает одну книгу. Какова вероятность того, что он возьмет книгу по теории вероятностей или по линейной алгебре?

Решение. Вероятности того, что студент взял книгу по теории вероятностей (A) и по линейной алгебре (B), соответственно таковы:

$$P(A) = \frac{3}{10}, \qquad P(B) = \frac{4}{10}.$$

События A и B несовместны. Поэтому искомая вероятность находится как сумма вероятностей

$$P(A + B) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7.$$

19.11. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

19.12. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта — 0,6. Найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.

19.13. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9.

а) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы?

б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

Решение. а) Учитывая то, что события A_1 (первое изделие стандартное) и A_2 (второе изделие стандартное) независимы, используем формулу

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad \text{т.е.} \quad P(A_1A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81.$$

б) Пусть B_1 — событие, состоящее в том, что только первое изделие стандартное; B_2 — только второе изделие стандартное. Событие B_1 можно рассматривать как произведение двух событий

$$B_1 = A_1\overline{A}_2,$$

т.е. появилось первое событие и не появилось второе.

Аналогично

$$B_2 = \overline{A}_1 A_2.$$

События B_1 и B_2 несовместные, поэтому

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2).$$

Если обозначить вероятность появления стандартного изделия через p, а вероятность противоположного события через $q = 1 - p$, то получим

$$P(B_1 + B_2) = pq + qp = 2pq.$$

В данном случае

$$P(B_1 + B_2) = 2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}18.$$

19.14. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

19.15. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех накладных только две оформлены правильно.

19.16. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что в первом выбранном поселке находится пункт проката; B — событие, состоящее в том, что во втором выбранном поселке находится пункт проката.

Вероятность события A

$$P(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Рассмотрим событие B при условии, что событие A произошло. Найдем условную вероятность

$$P(B/A) = \frac{4}{99}.$$

Искомая вероятность найдется как вероятность произведения двух событий

$$P(AB) = \frac{5}{100}\,\frac{4}{99} = \frac{1}{495}.$$

19.17. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные.

19.18. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся:

а) только женские шубы;

б) только мужские или только женские шубы.

19.19. На предприятие поступают заявки от нескольких торговых пунктов. Вероятности поступления заявок от пунктов A и B равны соответственно 0,5 и 0,4. Найти вероятность поступления заявок от пункта A или от пункта B, считая события поступления заявок от этих пунктов независимыми, но совместными.

19.3. Вероятность появления хотя бы одного события

В некоторых случаях вероятность события удобнее подсчитывать как вероятность противоположного другому событию.

Пусть события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы и известны вероятности этих событий:

$$P(A_1) = p_1,\ P(A_2) = p_2,\ ...,\ P(A_n) = p_n.$$

Обозначив вероятности противоположных событий

$$P(\overline{A}_1) = q_1,\ P(\overline{A}_2) = q_2,\ ...,\ P(\overline{A}_n) = q_n,$$

найдем вероятность того, что ни одно из событий A_1, A_2, ..., A_n в опыте не наступит:

$$P(B) = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

В этом случае искомая вероятность, т.е. вероятность появления хотя бы одного события, определяется как вероятность противоположного события

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n.$$

19.20. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, от второго — 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

19.21. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

19.4. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если некоторое событие B совершается с одним из n несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n, то для определения вероятности этого события может быть использована *формула полной вероятности*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i),$$

где $P(A_i)$ — вероятность события A_i;

$P(B/A_i)$ — условная вероятность события B.

Для определения вероятности события A_i при условии, что произошло событие B, используется *формула Байеса*

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}.$$

19.22. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго — 6 и от третьего — 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7.

Какова вероятность того, что:

а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;

б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события установки на автомашину двигателей, изготовленных соответственно на первом, втором или третьем моторных заводах. Вероятности этих событий таковы:

$$P(A_1) = 0{,}5; \quad P(A_2) = 0{,}3; \quad P(A_3) = 0{,}2.$$

а) Вероятность того, что наугад взятый двигатель проработает без дефектов, найдем по формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}83.$$

б) Если двигатель проработал без дефектов гарантийный срок, то вероятности того, что он изготовлен на первом, на втором заводах, найдем по формуле Байеса:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}83} = \frac{0{,}45}{0{,}83} = 0{,}54;$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}8}{0{,}83} = \frac{0{,}24}{0{,}83} = 0{,}29.$$

19.23. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.

б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

19.24. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй — 35, третий — 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго — 0,02, у третьего — 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

19.25. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $^3/_4$ продукции с процентом брака 4%, вторая — $^1/_4$ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие:

а) окажется бракованным;

б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

19.26. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель — 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это а) сапоги, б) туфли?

19.5. Формулы Бернулли и Пуассона

Если при проведении испытаний вероятность появления события A не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми*.

Формула Бернулли определяет вероятность появления ровно m раз события A в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad q = 1 - p.$$

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события A менее m раз ($X < m$), более m раз ($X > m$), не менее m раз ($X \geqslant m$), не более m раз ($X \leqslant m$). В этих случаях могут быть использованы формулы

$$P(X < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1),$$
$$P(X > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n),$$
$$P(X \geqslant m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n),$$
$$P(X \leqslant m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m).$$

При больших n и малых p вычисления по формуле Бернулли затруднены. В этих случаях обычно используется *формула Пуассона*

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np.$$

19.27. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:

а) одного мальчика;

б) двух мальчиков.

Решение. Вероятность появления мальчика или девочки равна $p = {}^1/_2$. Вероятность появления мальчика в семье, имеющей четырех детей, находится по формуле Бернулли:

$$P_4(1) = C_4^1 pq^3 = \frac{4!}{3!}({}^1/_2)({}^1/_2)^3 = {}^1/_4.$$

Вероятность появления в семье двух мальчиков равна

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!\,2!}({}^1/_2)^2({}^1/_2)^2 = {}^3/_8.$$

19.28. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «А», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется:

а) не менее чем двум покупателям;

б) не более чем трем покупателям;

в) всем четырем покупателям.

19.29. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух, в трех и в четырех магазинах.

19.30. В новом микрорайоне поставлено 10 000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна а) 0,0002; б) 0,001. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.

Решение. а) Используем формулу Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np.$$

В нашем случае

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2,$$

тогда

$$P_{10000}(2) = 2^2 e^{-2}/2! = 0{,}27;$$

$$P_{10000}(3) = 2^3 e^{-2}/3! = 0{,}18;$$

$$P_{10000}(5) = 2^5 e^{-2}/5! = 0{,}036.$$

Указание. Для пункта «б» принять $e^{-10} = 0{,}000045$.

19.31. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено:

а) ровно три изделия;

б) более трех изделий.

19.32. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа из строя выйдут два, три и пять автоматов?

19.33. Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

19.34. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено а) ровно 4 пары, б) ровно 5 пар.

20. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

20.1. Закон распределения вероятностей

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять любые заранее неизвестные значения. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется такая, значения которой есть конечное или счетное множество фиксированных величин. Для описания поведения дискретной случайной величины X задают все значения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые она может принять, и вероятности появления этих значений $p_1, p_2, ..., p_n$.

Законом распределения вероятностей (рядом распределения) дискретной случайной величины называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей, причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1: \qquad (20.1)$$

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Ряд распределения можно задать графически, откладывая на горизонтальной оси значения X, а на вертикальной — соответствующие им значения вероятностей. Графическое представление ряда распределения называется *многоугольником распределения.*

Для дискретной случайной величины можно ввести понятие *функции распределения* $F(x)$, которая равна вероятности случайного события, состоящего в том, что дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений, меньших некоторого значения x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Если дискретные значения случайной величины расположены в порядке возрастания $x_1, x_2, ..., x_n$, то $F(x)$ можно задать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant x_1; \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \leqslant x_2; \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \leqslant x_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & \text{если } x_{n-1} < x \leqslant x_n; \\ 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$$

Функцию распределения можно представить графически в виде ступенчатой функции (рис. 20.1).

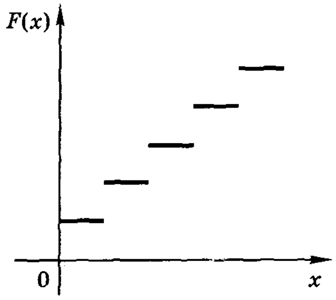


Рис. 20.1

20.1. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Написать закон распределения вероятностей числа выигрышных билетов среди купленных.

Решение. Пусть X — случайная величина числа выигрышных билетов среди купленных 2 билетов. Очевидно, что она может принимать значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Для определения вероятности появления каждого из этих значений воспользуемся следующей формулой:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $m = 0, 1, 2$ — число выигрышных билетов среди наудачу купленных $n = 2$ билетов;

$N = 10$ — всего имеющихся билетов;

$M = 4$ — число выигрышных среди всех 10 билетов.

Вычисляем соответствующие вероятности:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3};$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15};$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_6^0}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}.$$

Для проверки вычислений сложим $p_1 + p_2 + p_3 = {}^1/_3 + {}^8/_{15} + {}^2/_{15} = 1$.

Следовательно, искомый закон распределения имеет вид

X	0	1	2
p	${}^5/_{15}$	${}^8/_{15}$	${}^2/_{15}$

На рис. 20.2 представлен многоугольник распределения, полученного в задаче 20.1.

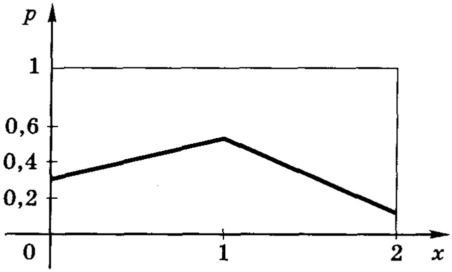


Рис. 20.2

20.2. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Найти закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Построить многоугольник распределения.

20.3. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий среди отобранных.

20.4. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них — 4 катушки с белыми нитками. Наудачу вынимают 2 катушки. Найти закон распределения числа катушек с белыми нитками среди вынутых.

20.5. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд распределения числа попаданий мяча в корзину.

Р е ш е н и е. Пусть X — случайная величина числа попаданий мяча в корзину. Баскетболист может не попасть ни разу, один раз, два раза и все три раза, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятности вычисляем по формуле Бернулли, при этом $n = 3$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$:

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0{,}3)^3 = 0{,}027;$$

$$p_2 = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}3)^2 = 0{,}189;$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441;$$

$$p_4 = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot (0{,}7)^3 = 0{,}343.$$

Проверяем выполнение соотношения (20.1):

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1.$$

Тогда ряд распределения случайной величины числа попаданий мяча в корзину при трех бросках примет вид

X	0	1	2	3
p	0,027	0,189	0,441	0,343

20.6. Имеются три базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить некий товар. Составить закон распределения числа баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует.

20.7. Бросают три игральных кубика. Составить закон распределения числа выпавших «шестерок» на трех кубиках. Построить многоугольник распределения.

20.8. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,15. Составить закон распределения отказавших элементов.

20.9. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Составить закон распределения числа положительных заключений на проверяемые балансы.

20.10. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлено 2 баланса. Составить закон распределения числа правильных заключений на проверяемые балансы.

20.11. Вероятность сбоя в работе АТС равна 0,1. Составить закон распределения числа сбоев, если в данный момент поступило 5 вызовов.

20.12. Имеется 4 различных ключа, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если опробованный ключ в дальнейшем не участвует в испытаниях.

20.13. В магазин привезли арбузы из Ташкента и Камышина в равных количествах. Вероятность покупки неспелого арбуза равна соответственно 0,1 и 0,3. Куплено 4 арбуза. Составить закон распределения спелых арбузов среди купленных.

20.14. У продавца имеются изделия, полученные в равных количествах с трех фабрик. Вероятность того, что эти изделия отличного качества, для каждой фабрики соответственно составляет 0,8; 0,7 и 0,9. Отобрано 2 изделия. Составить закон распределения количества изделий отличного качества среди отобранных.

Указание. Вначале вычисляется вероятность отбора изделия отличного качества: $p = (0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}9)/3$.

20.15. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,8, а вероятность того, что второй — 0,6. Случайная величина X — число покупок, сделанных покупателями. Описать закон распределения случайной величины X.

Решение. Очевидно, что сделать покупки могут либо оба покупателя, либо кто-то один, возможно также, что ни один покупатель ничего не купит. Следовательно, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Пусть событие A состоит в том, что первый покупатель сделал покупку, а событие B — в том, что второй покупатель сделал покупку. Тогда вероятность значения x_1 может быть подсчитана как вероятность события AB. Так как A и B — независимые события, то

$$p_1 = P(X = 2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$$

Вероятность значения x_2 может быть подсчитана как вероятность события $A\overline{B}$ или $\overline{A}B$, т.е. $p_2 = P(X = 1) = P(A\overline{B} + \overline{A}B)$. Учитывая, что $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ — события несовместные, $p_2 = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44$.

Вероятность значения x_3 есть вероятность события $\overline{A}\overline{B}$: $p_3 = P(X = 0) = P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$. Соответственно, закон распределения примет вид

X	2	1	0
p	0,48	0,44	0,08

20.16. В лотерее из 100 билетов разыгрываются два выигрыша на сумму 200 руб. и 60 руб. Стоимость билета 10 руб. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего два билета.

20.17. В лотерее 100 билетов, из которых 2 выигрышных по 50 руб. и 10 выигрышных по 1 руб. Стоимость билета 2 руб.

Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего 2 билета. Построить многоугольник распределения.

20.18. Партия содержит 20 телевизоров, среди которых шесть с дефектом. Купили два телевизора. Составить ряд распределения исправных телевизоров среди купленных.

20.19. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	−5	2	3	4
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения. Вычислить $P(X \geqslant 3{,}5)$ и $P(|X| < 2{,}5)$.

20.20. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,6, а вероятность того, что второй — 0,8. Случайная величина X — число покупок, сделанных покупателями. Найти функцию распределения случайной величины X.

20.2. Математическое ожидание и дисперсия

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма вида

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i, \tag{20.2}$$

где x_i — возможные значения дискретной случайной величины;

p_i — вероятность появления значения x_i.

Свойства математического ожидания:

1. $M(CX) = CM(X)$; $M(C) = C$,

где C — произвольная постоянная величина.

2. $M(X_1X_2 \cdots X_n) = M(X_1)M(X_2) \cdots M(X_n)$,

если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины.

3. $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$.

4. $M(X) = np$,

где X — дискретная случайная величина;

n — число испытаний с биномиальным законом распределения;

p — вероятность появления события в одном испытании.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Рассеяние случайной величины около среднего значения характеризуют дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию целесообразно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \qquad (20.3)$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$; $D(CX) = C^2D(X)$,

где C — произвольная постоянная.

2. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$,

где X_i — независимые случайные величины.

3. $D(X) = npq$,

где X — дискретная случайная величина с биномиальным законом распределения;

n — число испытаний;

p, q — вероятность появления и вероятность непоявления события в одном испытании соответственно.

4. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$,

где $\sigma(X)$ — среднее квадратичное отклонение.

20.21. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	0,3

Y	0	1	2
p	0,5	0,2	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

Решение. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, а также учитывая, что X и Y — независимые случайные величины, имеем:

$$M(Z) = M(2X + 3Y) = M(2X) + M(3Y) = 2M(X) + 3M(Y);$$

$$D(Z) = D(2X + 3Y) = D(2X) + D(3Y) = 4D(X) + 9D(Y).$$

По формуле (20.2) вычислим $M(X)$ и $M(Y)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}3 = 4{,}6;$$
$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}8.$$

Тогда

$$M(Z) = 2 \cdot 4{,}6 + 3 \cdot 0{,}8 = 11{,}6.$$

По формуле (20.3) вычислим $D(X)$ и $D(Y)$. Вначале найдем $M(X^2)$ и $M(Y^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}4 + 16 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}1 + 64 \cdot 0{,}3 = 27{,}6;$$
$$M(Y^2) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}4.$$

Затем определим $D(X)$ и $D(Y)$:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 27{,}6 - 4{,}6^2 = 6{,}44;$$
$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 1{,}4 - 0{,}8^2 = 0{,}76.$$

Окончательно получим

$$D(Z) = 4 \cdot 6{,}44 + 9 \cdot 0{,}76 = 32{,}6.$$

20.22. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 2:3. Доля продукции высшего качества на первом заводе составляет 90% , а на втором — 80% . В магазине куплено 3 банки консервов. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа банок с продукцией высшего качества.

Решение. Вначале составим закон распределения случайной величины X — числа банок с продукцией высшего качества среди купленных трех банок. Вероятность появления события A — куплена банка с продукцией высшего качества — найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = 0{,}9(^2/_5) + 0{,}8(^3/_5) = 0{,}84.$$

Закон распределения случайной величины X можно определить, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m}.$$

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Закон ее распределения (с учетом того, что $p = 0{,}84$, $q = 0{,}16$) примет вид

X	0	1	2	3
p	0,004	0,066	0,337	0,593

Тогда

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}004 + 1 \cdot 0{,}066 + 2 \cdot 0{,}337 + 3 \cdot 0{,}593 = 2{,}519,$$
$$D(X) = 1 \cdot 0{,}066 + 4 \cdot 0{,}337 + 9 \cdot 0{,}593 - 2{,}519^2 = 0{,}406,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}406} \approx 0{,}64.$$

20.23. Задан ряд распределения:

X	2	3	5	6	7	10
p	0,40	0,20	0,20	0,05	0,10	0,05

Найти $M(X)$, $\sigma(X)$ и $M(2X^2 + 3)$.

20.24. Даны законы распределения независимых случайных величин:

X	−4	0	4
p	0,1	0,5	0,4

Y	2	4
p	0,5	0,5

Найти $M(Z)$ и $D(Z)$, если $Z = (X + Y)/2$.

20.25. Два товароведа проверяют партию изделий. Производительность их труда соотносится как 5:4. Вероятность определения брака первым товароведом составляет 85%, вторым — 90%. Из проверенных изделий отбирают четыре. Найти а) математическое ожидание и б) дисперсию числа годных изделий среди отобранных.

20.26. В магазин поступили электролампы с трех заводов в пропорции 2:3:5. Доля брака в продукции первого завода — 5%, второго — 2%, третьего — 3%. Покупатель приобрел 3 лампочки. Найти а) математическое ожидание и б) среднее квадратичное отклонение числа качественных лампочек среди купленных.

20.27. Стороны прямоугольного участка X и Y в результате погрешностей измерения оказываются случайными величинами с такими распределениями:

X	19,5	19,7	20,0	20,2
p	0,20	0,05	0,70	0,05

Y	29,5	29,8	30,0	30,1
p	0,15	0,15	0,65	0,005

Найти математическое ожидание площади участка, если известно, что измерения проводились независимыми способами.

21. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

21.1. Функция распределения вероятностей и плотность вероятности

Непрерывные случайные величины характеризуются тем, что их значения могут сколь угодно мало отличаться друг от друга.

Вероятность события $X < x$ (где X — значение непрерывной случайной величины, а x — произвольно задаваемое значение), рассматриваемая как функция от x, называется *функцией распределения вероятностей*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Производная от функции распределения вероятностей называется *функцией плотности распределения вероятностей* или *плотностью вероятности*:

$$f(x) = F'(x).$$

Функция распределения вероятностей выражается через плотность вероятности в виде интеграла:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (21.1)$$

21.1. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

Р е ш е н и е. Плотность вероятности находим по формуле $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 2, \\ 2x-4, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Вероятности попадания случайной величины X в интервалы вычисляем по формуле (21.1):

$$P(1 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1) = 0{,}5^2 - 0 = 0{,}25;$$
$$P(2{,}5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

21.2. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ x - {}^1/_2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = 0, \text{ если } x \leqslant 1,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{x} f(x)\mathrm{d}x = 0 + x^2/2 - ({}^1/_2)x =$$
$$= (x^2 - x)/2, \quad \text{если} \quad 1 < x \leqslant 2,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{x} f(x)\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2 - x)/2\Big|_1^2 = 1, \text{ если } x > 2.$$

График функции представлен на рис. 21.1.

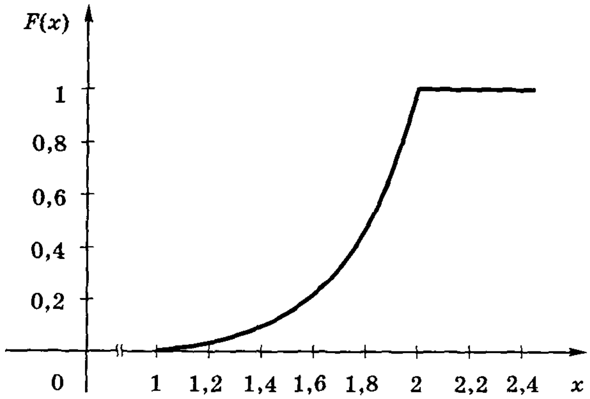


Рис. 21.1

21.3. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

21.4. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

21.5. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в виде $f(x) = 2C/(1 + x^2)$. Найти параметр C.

Р е ш е н и е. На основании равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

имеем

$$2C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2C\operatorname{arctg} x\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2C\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2C\pi = 1, \qquad C = \frac{1}{2\pi}.$$

21.6. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале $(0; \pi/4)$ функцией $f(x) = C\sin 4x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр C.

21.7. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ функцией $f(x) = C\cos x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр C и определить вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0; \pi/4)$.

21.2. Математическое ожидание и дисперсия. Мода и медиана

Средним значением или *математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$M(X) = M_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(X) = D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 \, f(x)\mathrm{d}x.$$

Для определения дисперсии может быть также использована формула

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x)\mathrm{d}x - M_x^2.$$

Модой $Mo(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое значение этой величины, плотность вероятности которого максимальна.

Медианой $Me(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, при котором выполняется равенство

$$P(X < Me) = P(X > Me).$$

21.8. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = x/2$ в интервале (0; 2), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

Решение. На основании формулы

$$M_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

имеем

$$M_x = \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{2 \cdot 3}\right|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

21.9. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = x/8$ в интервале (0; 4). Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание.

21.10. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = \mathrm{e}^{-2|x|}$ при $-\infty < x < \infty$. Найти математическое ожидание.

21.11. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = C(x^2 + 2x)$ в интервале (0; 1). Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр C.

Решение. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

то

$$C\int_0^1 (x^2 + 2x)\mathrm{d}x = C\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = C\frac{4}{3} = 1.$$

Откуда $C = {}^3/_4$.

21.12. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = a/(1 + x^2)$ при $-\infty < x < \infty$. Определить параметр a и математическое ожидание.

21.13. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = -\dfrac{3x^2}{4} + 6x - \dfrac{45}{4}$ на интервале (3; 5). Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, медиану и математическое ожидание.

Указание. Для нахождения моды можно использовать необходимое и достаточные условия экстремума функции. Для нахождения медианы нужно учесть симметричность параболы относительно ее оси.

21.14. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = -\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{9x}{2} - 6$ в интервале (2; 4). Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, медиану и математическое ожидание.

21.15. Случайная величина X задана в интервале $(0; \pi)$ плотностью вероятности $f(x) = {}^1/_2 \sin x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины X.

Решение. Для нахождения дисперсии используем формулу

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - M_x^2.$$

Математическое ожидание

$$M_x = \int_0^{\pi} x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x.$$

Интегрируя по частям, получаем $M_x = \pi/2$. Находим значение первого слагаемого в выражении дисперсии:

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\mathrm{d}x.$$

Интегрируя по частям дважды, получаем

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Подставляя в выражение дисперсии полученные значения, находим

$$D_x = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

21.16. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = 0{,}25 \sin(x/2)$ на интервале $(0;\, 2\pi)$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины X.

21.17. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = 0{,}5 \cos x$ на интервале $(-\pi/2;\, \pi/2)$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины X.

21.18. Случайная величина имеет распределение Рэлея

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)} \qquad (x \geqslant 0).$$

Написать выражение плотности вероятности случайной величины.

21.3. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины определяются выражениями

$$M_x = \frac{a+b}{2}, \qquad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

21.19. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1; 6]. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины.

Р е ш е н и е. Плотность вероятности для величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{5}, \text{ если } 1 < x \leqslant 6, \\ 0, \text{ если } x > 6. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения, вычисляемая по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x,$$

запишется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{5}\int\limits_{1}^{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x\Big|_{1}^{x} = \frac{x-1}{5}, & \text{если } 1 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{если } x > 6. \end{cases}$$

Математическое ожидание будет равно $M_x = (1 + 6)/2 = 3{,}5$. Находим дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$D_x = (6 - 1)^2/12 = 25/12, \qquad \sigma_x = 5\sqrt{3}/6\,.$$

21.20. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

21.21. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 мин. Считая, что случайная величина X — время ожидания автобуса — распределена равномерно, найти среднее время ожидания (математическое ожидание) и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

21.22. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин — случайная величина X — распределено равномерно, определить среднее время ожидания автомашиной прихода парома и дисперсию времени ожидания.

21.4. Нормальное распределение

Случайная величина X распределена по нормальному закону, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

где M_x — математическое ожидание;

σ_x — среднее квадратичное отклонение.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $(a,\ b)$ находится по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \qquad (21.2)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа.

Значения функции Лапласа для различных значений z приведены в Приложении 2.

21.23. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $M_x = 5$, дисперсия равна $D_x = 9$. Написать выражение для плотности вероятности.

21.24. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 12 и 2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (14; 16).

Решение. Используем формулу (21.2), учитывая, что $M_x = 12$, $\sigma_x = 2$:

$$P(14 < X < 16) = \Phi((16-12)/2) - \Phi((14-12)/2) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(2) = 0{,}4772$. После подстановки получаем значение искомой вероятности

$$P(14 < X < 16) = 0{,}1359.$$

21.25. Имеется случайная величина X, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью $p = 0{,}9972$ попадет случайная величина.

Р е ш е н и е. Так как $P(x_1 < X < x_2) = p = 2\Phi((x_2 - M_x)/\sigma_x)$, то $\Phi(z) = p/2 = 0{,}4986$. По таблице функции Лапласа находим значение z, соответствующее полученному значению функции $\Phi(z) = 0{,}4986$: $z = 2{,}98$. Учитывая то, что $z = (x_2 - M_x)/\sigma_x$, определяем $\delta = x_2 - M_x = \sigma_x z = 3 \cdot 2{,}98 = 8{,}94$. Искомый интервал будет иметь вид (11,06; 28,94).

21.26. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратичным отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет случайная величина.

21.27. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

21.28. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины — количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, — равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

21.29. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

21.5. Показательное распределение

Распределение непрерывной случайной величины X называется *показательным* (экспоненциальным), если плотность вероятности этой величины описывается функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где λ — положительное число.

Соответственно, функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

21.30. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-0,1x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. Для решения задачи используем формулы математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины:

$$M_x = \int_0^\infty x f(x) dx, \qquad D_x = \int_0^\infty x^2 f(x) dx - M_x^2.$$

Учтем, что $f(x) = F'(x)$. Тогда получим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0{,}1e^{-0,1x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Подставим в выражение для математического ожидания

$$M_x = 0{,}1 \int_0^\infty x e^{-0,1x} dx.$$

Интегрируя по частям, получаем $M_x = 1/\lambda$, или $M_x = 1/0{,}1$.

Для определения дисперсии проинтегрируем по частям первое слагаемое. В результате получим

$$\int_0^\infty x^2 f(x) dx = 2/\lambda^2.$$

Учтем найденное выражение для M_x. Откуда

$$D_x = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

В данном случае $M_x = 10$, $D_x = 100$.

21.31. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-0,4x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

21.32. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ Ce^{-0,1x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти параметр C.

21.33. Найти вероятность попадания случайной величины T, имеющей показательное распределение

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant 0, \\ 0{,}2e^{-0,2t}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

в интервал (4; 10).

21.34. Найти вероятность попадания случайной величины X с показательным распределением, приведенным в задаче 21.31, в интервал (2; 5).

22. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

22.1. Законы распределения двумерной случайной величины

Двумерной называют случайную величину (X, Y), каждое возможное появление которой представляет собой пару чисел (x, y).

Случайные величины X и Y, рассматриваемые совместно, образуют систему двух случайных величин.

Общей характеристикой двумерной случайной величины является *функция распределения вероятностей*, которая представляет собой вероятность события $(X < x, Y < y)$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Для дискретной случайной величины распределение может быть задано в виде таблицы распределения, в которой каждой паре значений (x_i, y_j) $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ ставится в соответствие вероятность появления этой пары $P(X = x_i, Y = y_j)$.

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины выражается через двумерную плотность вероятности по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Вероятность совместного появления пары дискретных случайных величин (x_i, y_j) можно записать в виде

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j/x_i) = p(y_j)p(x_i/y_j),$$

где $p(y_j/x_i)$, $p(x_i/y_j)$ — условные вероятности.

Для непрерывных случайных величин плотность вероятности записывается в виде

$$f(x, y) = f(x)f(y/x) = f(y)f(x/y).$$

22.1. Фирма выпускает мини-заводы по производству хлеба. На рекламу может быть израсходовано определенное количество средств.

В табл. 22.1 приведены возможное количество проданных в течение месяца заводов (X) и объем средств, израсходованных на рекламу (Y). Каждой паре (x_i, y_j) случайных величин (X, Y) поставлена в соответствие вероятность $p(x_i, y_j)$ появления этой пары.

Таблица 22.1

Y \ X	0	1	2
1	0,12	0,15	0,10
2	0,08	0,10	0,12
3	0,05	0,10	0,18

Требуется составить таблицы распределения вероятностей для каждой из величин X и Y и выразить условный закон распределения вероятностей величины Y при $X = 2$.

Решение. Так как с каждым значением x_i встречается ровно три значения y_j, т.е. имеет место полная группа событий, сумма вероятностей которых равна единице, то

$$\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{3} p(x_i)p(y_j/x_i) = p(x_i)\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i) = p(x_i).$$

Таким образом, вероятность события $p(x_i)$ равна сумме вероятностей $p(x_i, y_j)$ в каждой колонке.

В результате получаем таблицу распределения вероятностей величины X:

X	0	1	2
p	0,25	0,35	0,4

Аналогично получаем таблицу распределения для величины Y:

Y	1	2	3
p	0,37	0,3	0,33

Сумма вероятностей для каждой из величин должна быть равна единице. Проведем проверку:

$$\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = 0,25 + 0,35 + 0,4 = 1;$$

$$\sum_{j=1}^{3} p(y_j) = 0,37 + 0,3 + 0,33 = 1.$$

Находим условные вероятности величины Y при $X = 2$:

$$P(Y = 1 \,/\, X = 2) = P(Y = 1,\ X = 2)/P(X = 2) = 0,10/0,4 = 0,25;$$
$$P(Y = 2 \,/\, X = 2) = P(Y = 2,\ X = 2)/P(X = 2) = 0,12/0,4 = 0,30;$$
$$P(Y = 3 \,/\, X = 2) = P(Y = 3,\ X = 2)/P(X = 2) = 0,18/0,4 = 0,45.$$

22.2. Имеется таблица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

Y \ X	1	2	3
2	0,07	0,16	0,10
4	0,13	0,09	0,18
6	0,10	0,05	0,12

Составить таблицы распределения вероятностей для каждой из величин X и Y.

22.3. Задана дискретная двумерная случайная величина

Y \ X	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти условный закон распределения X при $Y = 0,8$.

22.2. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Среди числовых характеристик двумерной случайной величины важнейшими являются условное математическое ожидание и ковариация.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ называют сумму произведений возможных значений Y на их условные вероятности

$$M(Y\ /\ X = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j/x).$$

Для **непрерывных** случайных величин условное математическое ожидание определяется интегралом:

$$M(Y\ /\ X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) \mathrm{d}y.$$

Условное математическое ожидание $M(Y\ /\ X = x)$ называется также *регрессией* величины Y на X.

Аналогично определяется регрессия X на Y:

для **дискретной** случайной величины

$$M(X\ /\ Y = y) = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i/y);$$

для **непрерывной** случайной величины

$$M(X\ /\ Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/y) \mathrm{d}x.$$

Ковариацией или *корреляционным моментом* случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$\mu_{xy} = M((X - M_x)(Y - M_y)).$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma_x \sigma_y), \qquad -1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1.$$

Линейной средней квадратической регрессией Y на X называется функция вида

$$y_x = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

где

$$m_x = M(X), \qquad m_y = M(Y),$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, \qquad \sigma_y = \sqrt{D_y}, \qquad r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma_x \sigma_y).$$

22.4. Найти регрессию величины Y на X для двух значений $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$ на основе заданной таблицы распределения двумерной случайной величины

Y \ X	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Решение. Условное математическое ожидание, или регрессия, величины Y на X находится на основе соотношения

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j/x_i),$$

где

$$p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Определяем $P(X = 3)$ и $P(X = 6)$:

$$P(X = 3) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}32 = 0{,}72;$$

$$P(X = 6) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}13 = 0{,}28.$$

Вычисляем условные вероятности:

$P(Y = 10 / X = 3) = 0{,}25/0{,}72 = 0{,}35;$ $\quad P(Y = 10 / X = 6) = 0{,}10/0{,}28 = 0{,}36;$

$P(Y = 14 / X = 3) = 0{,}15/0{,}72 = 0{,}21;$ $\quad P(Y = 14 / X = 6) = 0{,}05/0{,}28 = 0{,}18;$

$P(Y = 18 / X = 3) = 0{,}32/0{,}72 = 0{,}44;$ $\quad P(Y = 18 / X = 6) = 0{,}13/0{,}28 = 0{,}46.$

Находим условные математические ожидания:

$$M(Y / X = 3) = 10 \cdot 0{,}35 + 14 \cdot 0{,}21 + 18 \cdot 0{,}44 = 14{,}4;$$

$$M(Y / X = 6) = 10 \cdot 0{,}36 + 14 \cdot 0{,}18 + 18 \cdot 0{,}46 = 14{,}3.$$

22.5. Найти регрессию величины X на Y для трех ее значений $Y = 2$, $Y = 6$, $Y = 8$ на основе заданной таблицы распределения двумерной случайной величины

Y \ X	1	3	4
2	0,22	0,10	0,06
6	0,12	0,08	0,05
8	0,17	0,13	0,07

22.6. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y)

$X \backslash Y$	−1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Найти условное математическое ожидание $M(Y / X = 1)$.

22.7. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y)

$X \backslash Y$	2	3	5
1	0,10	0,20	0,15
3	0,05	0,14	0,11
4	0,12	0,08	0,05

Найти условное математическое ожидание величины X для всех возможных значений величины Y.

22.8. Для заданного в задаче 22.7 закона распределения найти коэффициент корреляции между величинами X и Y.

Р е ш е н и е. Находим вероятности значений $X = 1$, $X = 3$, $X = 4$:

$$P(X = 1) = 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}45;$$

$$P(X = 3) = 0{,}05 + 0{,}14 + 0{,}11 = 0{,}30;$$

$$P(X = 4) = 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}05 = 0{,}25.$$

Определяем вероятности значений $Y = 2$, $Y = 3$, $Y = 5$:

$$P(Y = 2) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}12 = 0{,}27;$$

$$P(Y = 3) = 0{,}20 + 0{,}14 + 0{,}08 = 0{,}42;$$

$$P(Y = 5) = 0{,}15 + 0{,}11 + 0{,}05 = 0{,}31.$$

Находим $M(Y)$:

$$M(Y) = 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}42 + 5 \cdot 0{,}31 = 3{,}35.$$

Определяем $M(X)$:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}25 = 2{,}35.$$

Вычисляем $M(X^2)$ и $M(Y^2)$:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}45 + 9 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}25 = 7{,}15;$$

$$M(Y^2) = 4 \cdot 0{,}27 + 9 \cdot 0{,}42 + 25 \cdot 0{,}31 = 12{,}61.$$

Находим D_x, D_y:

$$D_x = 7{,}15 - 2{,}35^2 = 7{,}15 - 5{,}52 = 1{,}63;$$

$$D_y = 12{,}61 - 3{,}35^2 = 12{,}61 - 11{,}22 = 1{,}39.$$

Откуда $\sigma_x = 1{,}28$; $\sigma_y = 1{,}18$.

Ковариация величин X и Y может быть найдена по формуле

$$\mu_{xy} = M(XY) - m_x m_y.$$

Итак,

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j P(X = x_i,\ Y = y_j) =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 5 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 3 \cdot 0{,}14 + 3 \cdot 5 \cdot 0{,}11 +$$
$$+ 4 \cdot 2 \cdot 0{,}12 + 4 \cdot 3 \cdot 0{,}08 + 4 \cdot 5 \cdot 0{,}05 = 7{,}68,$$

$$\mu_{xy} = 7{,}68 - 2{,}35 \cdot 3{,}35 = -0{,}19,$$

$$r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma_x \sigma_y) = -0{,}19/(1{,}28 \cdot 1{,}18) = -0{,}126.$$

22.9. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y)

$X \backslash Y$	2	5
8	0,15	0,10
10	0,22	0,23
12	0,10	0,20

найти коэффициент корреляции между величинами X и Y.

22.10. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y)

$X \backslash Y$	1	4
3	0,12	0,20
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

найти коэффициент корреляции между величинами X и Y и написать уравнение линейной средней квадратической регрессии Y на X.

22.11. Задан закон распределения двумерной случайной величины

$X \backslash Y$	1	3	4
2	0,20	0,15	0,05
4	0,10	0,11	0,14
5	0,08	0,05	0,12

Найти уравнение линейной средней квадратической регрессии X на Y.

22.12. Задан закон распределения двумерной случайной величины

X \ Y	1	2	4
1	0,05	0,12	0,08
3	0,11	0,10	0,20
5	0,20	0,08	0,06

Найти уравнение линейной средней квадратической регрессии Y на X.

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задания

1. В партии из N изделий n изделий имеют скрытый дефект (табл. 1). Какова вероятность того, что из взятых наугад m изделий k изделий являются дефектными?

2. В магазине выставлены для продажи n изделий, среди которых k изделий некачественные (табл. 2). Какова вероятность того, что взятые случайным образом m изделий будут некачественными?

3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n_1 с первого завода, n_2 со второго, n_3 с третьего (табл. 3). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1, на втором p_2, на третьем p_3. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

4. Дано распределение дискретной случайной величины X (табл. 4). Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

5. В городе имеются N оптовых баз (табл. 5). Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах одинакова и равна p. Составить закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент.

6. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно M_x, среднее квадратичное отклонение равно σ_x (табл. 6). Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (a, b).

7. Найти линейную среднюю квадратическую регрессию случайной величины Y на случайную величину X на основе заданного закона распределения двумерной случайной величины (табл. 7).

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	N	n	m	k	Вариант	N	n	m	k
1	20	4	5	2	16	20	5	4	1
2	30	5	5	3	17	16	6	5	3
3	20	5	4	2	18	18	5	4	2
4	25	6	5	3	19	14	4	3	1
5	15	4	3	2	20	10	4	3	2
6	20	6	4	1	21	16	5	3	2
7	30	4	3	2	22	20	6	4	3
8	16	4	3	2	23	26	5	4	2
9	18	6	5	3	24	32	8	5	3
10	12	5	4	2	25	34	10	6	4
11	30	10	5	3	26	30	6	5	3
12	26	8	6	4	27	25	5	3	2
13	24	8	5	3	28	24	6	4	3
14	22	6	4	2	29	28	8	5	2
15	20	5	3	2	30	24	6	3	2

Таблица 2. **Варианты задания 2**

Вариант	n	k	m	Вариант	n	k	m
1	20	6	2	16	15	5	2
2	18	8	3	17	17	6	3
3	16	6	2	18	18	8	4
4	14	5	3	19	20	7	2

Окончание табл. 2

Вариант	n	k	m	Вариант	n	k	m
5	12	4	3	20	22	6	3
6	10	4	2	21	26	8	2
7	18	6	3	22	28	7	3
8	22	8	2	23	30	10	2
9	24	10	3	24	26	6	2
10	26	6	2	25	28	10	3
11	30	8	3	26	14	5	2
12	25	7	2	27	18	5	3
13	23	6	3	28	16	4	2
14	24	8	2	29	17	3	2
15	30	9	3	30	19	6	3

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3	Вариант	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7	16	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7	17	15	0,8	25	0,7	20	0,9
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9	18	40	0,9	25	0,8	35	0,8
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8	19	14	0,8	26	0,6	20	0,7
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6	20	18	0,9	32	0,8	30	0,7
6	40	0,8	30	0,8	30	0,9	21	30	0,9	20	0,7	10	0,8
7	20	0,8	50	0,9	30	0,8	22	16	0,9	24	0,8	60	0,9
8	35	0,7	35	0,8	30	0,9	23	30	0,9	10	0,7	10	0,7
9	15	0,9	45	0,8	40	0,9	24	15	0,8	35	0,9	50	0,8
10	40	0,8	15	0,7	45	0,8	25	40	0,8	20	0,8	40	0,9
11	20	0,9	15	0,9	15	0,8	26	10	0,9	20	0,8	10	0,6
12	14	0,8	26	0,9	10	0,8	27	35	0,8	25	0,7	50	0,8
13	16	0,8	40	0,9	44	0,7	28	40	0,8	20	0,9	40	0,8
14	30	0,9	20	0,7	50	0,7	29	30	0,9	40	0,8	30	0,9
15	20	0,8	10	0,9	20	0,9	30	10	0,7	20	0,9	20	0,7

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	Числовые данные					Вариант	Числовые данные				
1	x_i	−5	2	3	4	16	x_i	4	6	9	
	p_i	0,4	0,3	0,1	0,2		p_i	0,4	0,3	0,3	
2	x_i	0,2	0,5	0,6	0,8	17	x_i	4	6	8	9
	p_i	0,1	0,5	0,2	0,2		p_i	0,3	0,1	0,1	0,5
3	x_i	−6	−2	1	4	18	x_i	3	6	7	9
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,3	0,2	0,1	0,4
4	x_i	0,2	0,5	0,6		19	x_i	5	10	12	14
	p_i	0,5	0,4	0,1			p_i	0,4	0,2	0,1	0,3
5	x_i	−8	−2	1	3	20	x_i	6	8	14	
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,2	0,4	0,4	
6	x_i	−2	1	3	5	21	x_i	1	3	4	5
	p_i	0,1	0,3	0,4	0,2		p_i	0,4	0,3	0,1	0,2
7	x_i	−3	2	3	5	22	x_i	4	5	7	8
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2		p_i	0,1	0,5	0,2	0,2
8	x_i	2	3	10		23	x_i	2	4	5	6
	p_i	0,1	0,4	0,5			p_i	0,3	0,1	0,4	0,2
9	x_i	−4	−1	2	3	24	x_i	2	4	8	
	p_i	0,3	0,1	0,4	0,2		p_i	0,1	0,4	0,5	
10	x_i	−3	2	3	5	25	x_i	−3	−1	3	5
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2		p_i	0,4	0,3	0,1	0,2
11	x_i	−6	−2	2	3	26	x_i	2	4	6	9
	p_i	0,2	0,4	0,1	0,3		p_i	0,1	0,3	0,3	0,3
12	x_i	2	5	6		27	x_i	2	4	5	6
	p_i	0,5	0,1	0,4			p_i	0,5	0,1	0,3	0,1
13	x_i	−5	−3	1	3	28	x_i	1	3	8	
	p_i	0,2	0,1	0,1	0,6		p_i	0,2	0,1	0,7	
14	x_i	2	5	6	8	29	x_i	4	6	8	10
	p_i	0,2	0,2	0,4	0,2		p_i	0,3	0,2	0,4	0,1
15	x_i	4	6	8	12	30	x_i	6	8	12	16
	p_i	0,3	0,1	0,3	0,3		p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Таблица 5. **Варианты задания 5**

Вариант	N	p	Вариант	N	p
1	3	0,2	16	4	0,15
2	4	0,25	17	3	0,24
3	3	0,1	18	2	0,1
4	2	0,2	19	3	0,12
5	4	0,1	20	4	0,14
6	3	0,2	21	4	0,16
7	4	0,3	22	3	0,15
8	3	0,1	23	3	0,13
9	3	0,12	24	2	0,21
10	4	0,3	25	2	0,16
11	3	0,15	26	3	0,19
12	3	0,18	27	4	0,26
13	4	0,24	28	3	0,14
14	2	0,14	29	2	0,15
15	3	0,16	30	3	0,22

Таблица 6. **Варианты задания 6**

Вариант	M_x	σ_x	a	b	Вариант	M_x	σ_x	a	b
1	10	1	8	14	16	40	4	36	43
2	12	2	8	14	17	38	2	35	40
3	14	3	10	15	18	42	4	40	43
4	16	2	15	18	19	44	5	41	45
5	18	1	16	21	20	45	5	43	48
6	20	2	17	22	21	46	4	44	48
7	24	1	20	26	22	48	5	45	49
8	26	3	23	27	23	50	6	48	53
9	28	2	24	30	24	52	4	50	55
10	30	1	27	32	25	54	3	53	56
11	32	3	30	35	26	56	4	55	58
12	34	1	30	36	27	58	5	56	61
13	36	2	34	37	28	60	6	58	63
14	38	3	37	41	29	62	5	59	64
15	40	2	39	42	30	64	6	60	66

Т а б л и ц а 7. **Варианты задания 7**

Вариант	Числовые данные				Вариант	Числовые данные			
1	$X \backslash Y$	1	3	4	16	$Y \backslash X$	5	7	9
	2	0,16	0,10	0,28		4	0,14	0,15	0,21
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,16	0,20	0,14
2	$X \backslash Y$	2	3	5	17	$Y \backslash X$	1	4	6
	1	0,06	0,18	0,24		3	0,14	0,12	0,13
	4	0,12	0,13	0,27		7	0,13	0,20	0,28
3	$X \backslash Y$	1	2	4	18	$Y \backslash X$	5	8	10
	3	0,12	0,24	0,22		2	0,11	0,13	0,26
	4	0,20	0,15	0,07		6	0,21	0,06	0,23
4	$Y \backslash X$	2	3	4	19	$Y \backslash X$	4	7	9
	1	0,16	0,10	0,28		4	0,22	0,09	0,32
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,14	0,17	0,06
5	$Y \backslash X$	2	3	5	20	$Y \backslash X$	8	9	12
	4	0,06	0,18	0,24		1	0,14	0,11	0,18
	6	0,12	0,13	0,27		6	0,23	0,04	0,30
6	$Y \backslash X$	2	3	4	21	$Y \backslash X$	3	6	8
	1	0,16	0,10	0,28		2	0,21	0,07	0,23
	3	0,14	0,20	0,12		8	0,11	0,20	0,18
7	$Y \backslash X$	2	4	5	22	$Y \backslash X$	3	4	7
	1	0,12	0,13	0,24		4	0,15	0,23	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		8	0,21	0,09	0,17
8	$X \backslash Y$	4	5	6	23	$Y \backslash X$	4	5	8
	2	0,06	0,18	0,24		3	0,13	0,14	0,19
	3	0,12	0,13	0,27		5	0,24	0,08	0,22
9	$X \backslash Y$	2	4	5	24	$Y \backslash X$	6	9	12
	1	0,12	0,13	0,24		5	0,23	0,07	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		9	0,17	0,20	0,18
10	$X \backslash Y$	1	3	4	25	$Y \backslash X$	5	8	10
	3	0,13	0,24	0,12		2	0,11	0,21	0,14
	6	0,18	0,06	0,27		7	0,20	0,09	0,25
11	$Y \backslash X$	1	3	4	26	$Y \backslash X$	4	7	9
	3	0,13	0,24	0,12		4	0,30	0,12	0,10
	5	0,18	0,06	0,27		10	0,08	0,12	0,28

Окончание табл. 7

Вариант	Числовые данные				Вариант	Числовые данные			
	$Y \backslash X$	3	5	6		$Y \backslash X$	2	6	9
12	1	0,12	0,24	0,22	27	5	0,21	0,18	0,14
	3	0,20	0,15	0,07		9	0,08	0,14	0,25
	$Y \backslash X$	4	6	8		$Y \backslash X$	4	7	9
13	3	0,13	0,08	0,12	28	2	0,09	0,15	0,16
	5	0,20	0,16	0,31		7	0,17	0,23	0,20
	$Y \backslash X$	3	4	7		$Y \backslash X$	1	4	8
14	3	0,30	0,20	0,10	29	4	0,11	0,24	0,17
	6	0,05	0,12	0,23		8	0,21	0,08	0,19
	$Y \backslash X$	4	6	8		$Y \backslash X$	4	8	14
15	2	0,24	0,30	0,05	30	3	0,12	0,13	0,20
	5	0,10	0,12	0,19		5	0,23	0,12	0,20

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

23. ВЫБОРКА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

23.1. Распределение частот

Совокупность всех возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения, или совокупность всех возможных наблюдений, проводимых в одинаковых условиях над некоторой случайной величиной, называется *генеральной совокупностью*. Генеральная совокупность может содержать конечное или бесконечное число элементов.

Отобранные из генеральной совокупности объекты (результаты наблюдений над конечным числом объектов из генеральной совокупности) называются *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Число N элементов генеральной совокупности и число n элементов выборочной совокупности будем называть *объемами* генеральной и выборочной совокупности соответственно (обычно $N \gg n$).

Расположение выборочных наблюденных значений случайной величины в порядке неубывания называется *ранжированием*.

Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называется *вариантой*, а изменение этого значения — *варьированием*.

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется *частотой* или *весом* варианты. Если i — индекс варианты, то m_i — число измеренных значений i-й варианты.

Отношение m_i к общей сумме частот всех вариант $\Sigma m_i = n$ называется *относительной частотой* варианты и обозначается $p_i^* = m_i/n$.

Дискретным вариационным рядом распределения (распределением частот) называется ранжированная совокупность вариант x_i с соответствующими им частотами или относительными частотами.

Если наблюдаемая случайная величина непрерывна или дискретная величина такова, что число ее возможных значений велико, то для построения вариационного ряда используют интервальный ряд распределения. В этом случае весь возможный интервал варьирования разбивают на конечное число частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Интервальным вариационным рядом (интервальным распределением частот) называется упорядоченная последовательность интервалов варьирования случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений случайной величины.

23.1. В супермаркете проводились наблюдения над числом X покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число X является дискретной случайной величиной, а полученные данные представляют собой выборку из $n = 30$ наблюдений. Требуется составить ряд распределения частот (вариационный ряд).

Решение. Вначале составим ранжированный ряд:

60, 60, 60, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120.

Получено шесть групп, т.е. шесть различных значений случайной величины (шесть вариант). Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты и соответствующую относительную частоту. Все результаты укажем в табл. 23.1, которая и будет представлять вариационный ряд.

Таблица 23.1

Номер группы	i	1	2	3	4	5	6
Число обращений покупателей в кассу	x_i	60	65	70	75	100	120
Частота	m_i	3	3	7	5	8	4
Относительная частота	p_i	$^3/_{30}$	$^3/_{30}$	$^7/_{30}$	$^5/_{30}$	$^8/_{30}$	$^4/_{30}$

23.2. В табл. 23.2 приведена выборка результатов измерения роста 105 студентов (юношей). Измерения проводились с точностью до 1 см.

Таблица 23.2

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	179	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

Требуется составить интервальный вариационный ряд.

Р е ш е н и е. Очевидно, что рост юношей есть случайная непрерывная величина. Найдем сначала минимальное и максимальное значения случайной величины: $x_{\min} = 152$ см, $x_{\max} = 196$ см. Тогда интервал варьирования R («размах») будет равен $R = x_{\max} - x_{\min} = 44$ см.

На практике обычно считают, что правильно составленный ряд распределения содержит от 6 до 15 частичных интервалов, однако фактическое число частичных интервалов и, соответственно, размер интервала определяются условиями конкретной задачи.

В нашем случае удобно выбрать длину частичного интервала равной 5 см, тогда число частичных интервалов, начиная со 150 см и кончая 200 см, будет равно 10. Соответствующий интервальный вариационный ряд приведен в табл. 23.3.

Т а б л и ц а 23.3

Индекс интервала i	Рост студентов (интервалы) $x_i < X \leqslant x_{i+1}$	Частота m_i	Относительная частота p_i^*
1	150—155	4	0,0381
2	155—160	—	—
3	160—165	2	0,0190
4	165—170	19	0,1810
5	170—175	19	0,1810
6	175—180	26	0,2476
7	180—185	21	0,2000
8	185—190	10	0,0953
9	190—195	2	0,0190
10	195—200	2	0,0190

23.3. В ходе проведения эксперимента получен следующий набор данных:

32, 26, 16, 44, 28, 40, 30, 31, 17, 30, 37, 32, 42, 31, 36, 49, 35, 21, 25, 40, 27, 25, 33, 34, 27, 43, 19, 23, 36, 48, 31, 35, 43, 32, 26, 35, 33, 45, 19, 22, 28, 49, 23, 32, 33, 27, 43, 35, 23, 44.

Составить интервальный вариационный ряд, выбрав число частичных интервалов, равное 7.

23.4. Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдения получены следующие значения выигрышей (тыс. руб.):

0, 1, 0, 0, 5, 0, 10, 0, 1, 0, 0, 1, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 5, 10, 0, 1, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0.

Составить вариационный ряд случайной величины X — выигрыша в мгновенной лотерее.

23.5. В городе A для определения сроков гарантийного обслуживания проведено исследование величины среднего пробега автомобилей, находящихся в эксплуатации в течение двух лет с момента продажи автомобиля магазином. Получен следующий результат (тыс. км):

3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6.

Составить интервальный вариационный ряд.

23.2. Эмпирическая функция распределения

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называется функция $F^*(x)$, задающая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Следовательно, по определению $F^*(x) = m_x/n$, где m_x — число выборочных значений величины X, меньших x, а n — объем выборки.

Выборочную функцию распределения можно задать таблично или графически. Построим выборочную функцию распределения по данным табл. 23.1.

Объем выборки по условию примера $n = 30$. Наименьшая варианта равна 60, значит, $m_x = 0$ при $x \leqslant 60$. Тогда $F^*(x) = 0/30 = 0$ при $x \leqslant 60$. Если $65 < x \leqslant 70$, то неравенство $X < x$ выполняется для вариант $x_1 = 60$ и $x_2 = 65$, а эти варианты встречаются по 3 раза, поэтому $m_x = 6$ и $F^*(x) = 6/30$ и т.д. Результат вычисления $F^*(x)$ для всего множества значений вариант дискретной случайной величины приведен в табл. 23.4.

Таблица 23.4

x	$F^*(x)$ (для задачи 23.1)
$x \leqslant 60$	0
$60 < x \leqslant 65$	$p_1^* = {}^3/_{30}$
$65 < x \leqslant 70$	$p_1^* + p_2^* = {}^6/_{30}$
$70 < x \leqslant 75$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* = {}^{13}/_{30}$
$75 < x \leqslant 100$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = {}^{18}/_{30}$
$100 < x \leqslant 120$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* = {}^{26}/_{30}$
$x > 120$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* = 30/30 = 1$

График этой функции приведен на рис. 23.1.

В данном примере функция $F^*(x)$ есть выборочная функция распределения дискретной случайной величины и построена она по дискретному вариационному ряду.

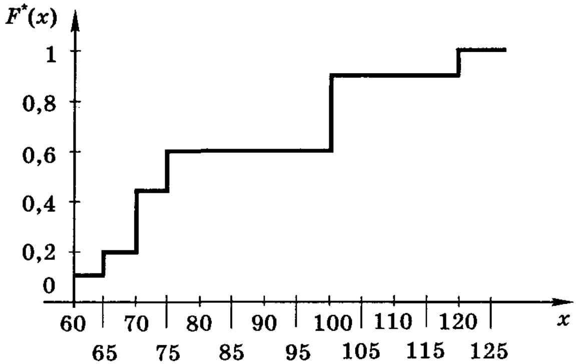


Рис. 23.1

Если случайная величина непрерывная и ее выборочные значения представлены в виде интервального вариационного ряда, то выборочную функцию распределения строят иначе. Рассмотрим для этого вариационный ряд из задачи 23.2 (см. табл. 23.3). Очевидно, что для $x \in (-\infty,\ 150]$ функция $F^*(x) = 0$, так как $m_x = 0$.

Используя результаты расчетов, представленные в табл. 23.3, подсчитаем на концах интервалов значения функции $F^*(x)$ в виде «нарастающей относительной частоты» (табл. 23.5).

Таблица 23.5

Индекс интервала i	$F^*(x)$
1	0,0381
2	0,0381
3	0,0571
4	0,2381
5	0,4197
6	0,6667
7	0,8667
8	0,9620
9	0,9810
10	1,0000

Очевидно, что табличные значения не полностью определяют выборочную функцию распределения непрерывной случайной величины, поэтому при графическом изображении такой функции ее доопределяют, соединив точки графика, соответствующие концам интервала, отрезками прямой (рис. 23.2).

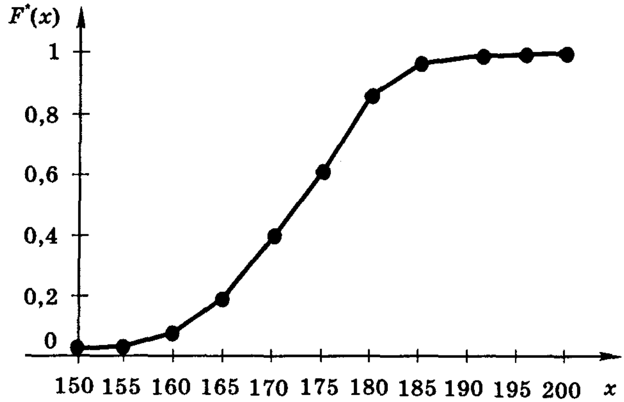


Рис. 23.2

23.6. На фирме работает 39 человек. Проведено исследование числа рабочих дней, пропущенных каждым работником фирмы в течение месяца. Результаты этого исследования таковы:

0, 1, 3, 0, 2, 3, 5, 7, 3, 5, 2, 10 ,7, 5, 0, 2, 5, 10, 5, 3, 1, 9, 15, 10, 1, 0, 2, 3, 5, 7, 7, 6, 5, 3, 0, 7, 10, 13, 0.

Составить интервальный вариационный ряд. Построить функцию распределения случайной величины числа пропущенных рабочих дней.

23.7. Найти эмпирическую функцию распределения по данным вариационным рядам:

а)

x_i	1	3	7	9	12
m_i	2	10	4	24	10

б)

x_i	−2	0	5	8	14
m_i	3	17	28	22	10

23.8. Найти эмпирическую функцию распределения по данным *интервальным вариационным рядам*:

а)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	0—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18
m_i	6	4	2	18	29	11	10	17	3

б)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	11—14	14—17	17—20	20—23	23—26	26—29	29—32	32—35
m_i	16	24	30	7	8	6	5	4

23.3. Полигон и гистограмма

Наблюденные данные, представленные в виде вариационного ряда, можно изобразить графически.

Полигон. Если вариационный ряд дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
m_i	m_1	m_2	m_3	$\cdots$	m_n

представить графически в виде ломаной линии, связывающей на плоскости точки с координатами $(x_i,\ m_i)$, то такой график называют *полигоном* или *многоугольником распределения*. Можно также построить полигон, где точками являются пары чисел $(x_i,\ p_i^*)$.

23.9. Выборка дана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7	8	11	13
m_i	10	9	21	25	30	5

Найти распределение относительных частот и построить полигон относительных частот.

Р е ш е н и е. Оценим объем выборки: $\sum_{i=1}^{6} m_i = 100$. Тогда вариационный ряд можно записать в виде

x_i	2	5	7	8	11	13
p_i^*	0,10	0,09	0,21	0,25	0,30	0,05

На рис. 23.3 приведен полигон относительных частот.

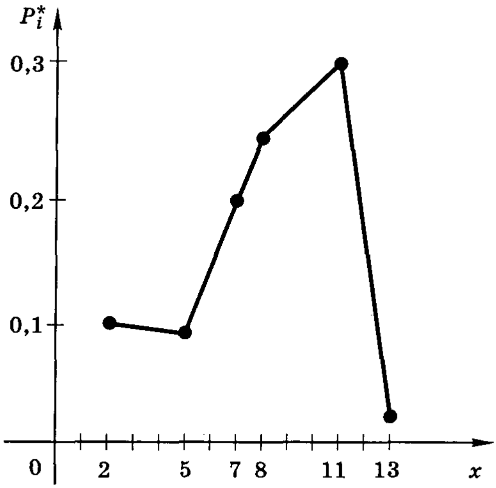


Рис. 23.3

Заметим, что полигон, построенный по дискретному вариационному ряду, является выборочным аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины.

Гистограмма. И н т е р в а л ь н ы й вариационный ряд графически изображают с помощью *гистограммы*. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси x откладывают отрезки частичных интервалов варьирования и на этих отрезках как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными частотам или относительным частотам соответствующих интервалов.

Если относительную частоту разделить на длину каждого интервала, то полученная величина будет представлять собой *выборочную оценку плотности вероятности*:

$$f^*(x_i) = p_i^* / \Delta_i.$$

23.10. Выборка задана интервальным вариационным рядом

i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
1	1—5	10
2	5—9	20
3	9—13	50
4	13—17	12
5	17—21	8

Построить гистограмму выборочной оценки плотности вероятности.

Р е ш е н и е. Длина каждого интервала равна $h = 4$. Объем выборки $n = 100$. Подсчитаем значения $m_i/(hn)$:

$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	1—5	5—9	9—13	13—17	17—21
$m_i/(hn)$	$25 \cdot 10^{-3}$	$50 \cdot 10^{-3}$	$125 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$

На рис. 23.4 представлена гистограмма данного распределения.

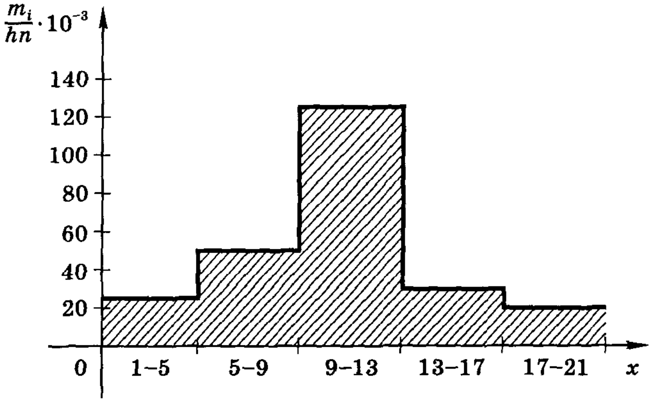


Рис. 23.4

Графическое изображение вариационных рядов в виде полигона и гистограммы позволяет получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в совокупности наблюдений.

23.11. Построить полигон относительных частот по данным вариационным рядам ($n = 110$):

а)

x_i	1	4	5	7	9
m_i	10	25	45	20	10

б)

x_i	−1	0	1	3	5
m_i	15	5	25	55	10

в)

x_i	2	3	6	7	10	12
m_i	8	10	32	45	13	2

г)

x_i	3	5	8	9	11	12
m_i	2	26	42	35	4	1

23.12. Построить гистограмму относительных частот по данным распределениям выборки объема $n = 100$:

а)

i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
1	3—5	20
2	5—7	25
3	7—9	15
4	9—11	13
5	11—13	12
6	13—15	8
7	15—17	7

б)

i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
1	−2—2	5
2	2—6	25
3	6—10	40
4	10—14	12
5	14—16	18

в)

i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
1	60—65	30
2	65—70	20
3	70—75	25
4	75—80	25

24. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

24.1. Точечные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются *статистическими*. Если статистическая оценка характеризуется одним числом, она называется *точечной*. К числу таких оценок относятся выборочная средняя и выборочная дисперсия.

Выборочная средняя определяется как среднее арифметическое полученных по выборке значений:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i / n,$$

где x_i — варианта выборки;
n_i — частота варианты;
n — объем выборки.

Замечание. Выборочная средняя будет также обозначаться и без нижнего индекса: $\bar{x}$.

Выборочная дисперсия представляет собой среднюю арифметическую квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$d_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 / n.$$

Для расчетов может быть использована также формула

$$d_{\text{в}} = \overline{x^2} - (\bar{x}_{\text{в}})^2,$$

где $\overline{x^2}$ — выборочная средняя квадратов вариант выборки.

Статистическая оценка является случайной величиной и меняется в зависимости от выборки. Если математическое ожидание статистической оценки равно оцениваемому параметру генеральной совокупности, то такая оценка называется *несмещенной*, если не равно — то *смещенной*.

Выборочная средняя является оценкой математического ожидания случайной величины и представляет собой несмещенную оценку. Выборочная дисперсия оценивает дисперсию генеральной совокупности и является смещенной оценкой.

Для устранения смещенности выборочной дисперсии ее умножают на величину $n/(n-1)$ и получают

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_{\text{в}}.$$

Величину s^2 называют *несмещенной* или *«исправленной» выборочной дисперсией*.

В некоторых случаях для удобства расчетов при определении статистических оценок переходят к условным вариантам. Например, если варианты x_i — большие числа, то используют разности

$$u_i = x_i - C,$$

где C — произвольно выбранное число (ложный нуль), такое, при котором условные варианты принимают небольшие значения.

В этом случае

$$\overline{x}_\text{в} = C + \sum_{i=1}^{k} n_i u_i / n, \qquad d_\text{в} = \overline{x^2} - (\overline{x}_\text{в})^2,$$

$$d_\text{в} = d_{\text{в}u} = \overline{u^2} - (\overline{u})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 / n - \left(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i / n \right)^2.$$

Для изменения значения варианты можно ввести также условные варианты путем использования масштабного множителя:

$$u_i = C x_i,$$

где $C = 10^b$ (b выбирается положительным или отрицательным целым числом).

24.1. Из генеральной совокупности

x_i	1	3	7	12
n_i	8	16	6	10

найти выборочную среднюю.

24.2. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	–8	–2	1	5
n_i	13	11	14	12

Найти выборочную среднюю.

24.3. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки:

x_i	1450	1480	1490
n_i	3	5	2

Решение. Так как выборочные значения — большие числа, то целесообразно ввести условные варианты. В качестве ложного нуля выбираем $C = 1470$ и рассчитываем u_i по формуле $u_i = x_i - 1470$:

u_i	–20	10	20
n_i	3	5	2

Определяем выборочную среднюю: $\overline{u} = 3$.

После этого находим $\overline{x}_\text{в} = 1470 + 3 = 1473$.

24.4. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки:

а)

x_i	3140	3150	3180
n_i	12	6	12

б)

x_i	2430	2460	2500
n_i	24	14	12

24.5. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

Р е ш е н и е. Находим выборочную среднюю

$$\bar{x}_в = \frac{8 \cdot 2 + 14 \cdot 7 + 10 \cdot 9 + 18 \cdot 10}{50} = 7{,}68.$$

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу $d_в = \overline{x^2} - (\bar{x}_в)^2$:

$$\overline{x^2} = \frac{8 \cdot 4 + 14 \cdot 49 + 10 \cdot 81 + 18 \cdot 100}{50} = 66{,}56,$$

$$d_в = 66{,}56 - 7{,}68^2 = 7{,}58.$$

Находим несмещенную оценку дисперсии («исправленную» выборочную дисперсию):

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_в = 50 \cdot 7{,}58/49 = 7{,}73.$$

24.6. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

24.7. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	0,02	0,05	0,08
n_i	3	2	5

Р е ш е н и е. В целях упрощения расчетов целесообразно перейти к условным вариантам $u_i = 100x_i$:

u_i	2	5	8
n_i	3	2	5

Найдем выборочную дисперсию условных вариант:

$$d_{\text{в}u} = \sum_{i=1}^{3} n_i u_i^2 / n - \left(\sum_{i=1}^{3} n_i u_i / n \right)^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 64}{10} - \left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8}{10} \right)^2 = 6{,}84.$$

Выборочная дисперсия данного распределения вариант x_i находится на основе выражения

$$d_{\text{в}} = d_{\text{в}u} / 100^2 = 6{,}84 / 100^2 \approx 7 \cdot 10^{-4}.$$

24.8. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	0,002	0,005	0,006
n_i	9	6	5

24.9. Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

24.2. Метод моментов

При заданном виде закона распределения случайной величины X неизвестные параметры этого распределения можно оценить, т.е. выразить как функцию вариант выборки, на основе метода моментов.

Этот метод состоит в том, что приравниваются соответствующие теоретические и эмпирические моменты и из полученных уравнений находятся оценки параметров. В случае одного параметра в теоретическом распределении для его оценки достаточно составить одно уравнение. Если имеются два параметра в теоретическом распределении, то нужно приравнять соответственно два теоретических и эмпирических момента и т.д.

Для оценки двух параметров закона распределения запишем следующие равенства:

$$\nu_1 = M_1, \qquad \mu_2 = m_2,$$

где ν_1 — начальный момент первого порядка закона распределения случайной величины;

M_1 — эмпирический момент первого порядка;

μ_2 — центральный момент второго порядка закона распределения случайной величины;

m_2 — центральный эмпирический момент второго порядка.

Так как $\nu_1 = M_x$ — математическое ожидание случайной величины X, $\mu_2 = D_x$ — дисперсия величины X, а $M_1 = \bar{x}_в$, $m_2 = d_в$, то получаем два уравнения:

$$M_x = \bar{x}_в, \qquad D_x = d_в.$$

24.10. На предприятии изготавливается определенный вид продукции. Ежемесячный объем выпуска этой продукции является случайной величиной, для характеристики которой принят показательный закон распределения

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geqslant 0).$$

В течение шести месяцев проводился замер объемов выпуска продукции, получены следующие данные:

Месяц	1	2	3	4	5	6
Объем выпуска	20	24	25	28	27	32

Найти оценку параметра λ.

Р е ш е н и е. Так как закон распределения содержит лишь один параметр λ, то для его оценки требуется составить одно уравнение.

Находим выборочную среднюю:

$$\bar{x}_в = (20 + 24 + 25 + 28 + 27 + 32)/6 = 26.$$

Определяем математическое ожидание:

$$M_x = \int_0^\infty x f(x) dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$M_x = 1/\lambda,$$

откуда

$$1/\lambda = \bar{x}_в. \qquad (24.1)$$

Равенство (24.1) является приближенным, так как правая часть его является случайной величиной. Таким образом, из уравнения (24.1) получается не точное значение λ, а его оценка λ^*:

$$1/\lambda^* = \bar{x}_в.$$

Итак, $1/\lambda^* = 26$, откуда $\lambda^* = {}^1/_{26}$.

24.11. При условии показательного распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

произведена выборка

x_i	4	3	10	12	15
n_i	3	3	6	4	4

Найти оценку параметра λ.

24.12. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \geqslant 0).$$

Произведена выборка

x_i	3	5	6	8	10
n_i	2	3	5	10	10

Найти оценку параметра λ.

24.13. При условии равномерного распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in (a, b), \\ 0, & \text{если } x \notin (a, b) \end{cases}$$

произведена выборка

x_i	2	3	4	5	6
n_i	4	6	5	12	8

Найти оценку параметров a и b.

24.14. При условии равномерного распределения случайной величины X произведена выборка

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Найти оценку параметров a и b.

24.15. Случайная величина подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Известно, что $\sigma = \sqrt{D_x}$, $\quad a = M_x$.

Произведена выборка

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	6	9	16	25	20	16	8

Найти оценку параметра a и несмещенную оценку параметра σ.

24.3. Метод наибольшего правдоподобия

Метод наибольшего правдоподобия, применяемый для определения точечной оценки, опирается на использование условий экстремума функции одной или нескольких случайных величин. В качестве такой функции принимают *функцию правдоподобия.*

Для дискретной случайной величины функция правдоподобия принимает вид

$$L = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \cdots p(x_n, \theta),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — варианты выборки;
θ — параметр, для которого находится оценка;
$p(x_i, \theta)$ — вероятность события $X = x_i$, зависящая от параметра θ.

Так как функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении θ, то обычно точки экстремума находятся для $\ln L$. Для этого определяется производная $\dfrac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}\,\theta}$ и приравнивается к нулю. На основании достаточного условия (вторая производная должна быть отрицательна) можно убедиться, что полученная точка является точкой максимума.

Для непрерывных случайных величин функция правдоподобия выбирается в виде

$$L = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta),$$

где $f(x_i, \theta)$ — заданная функция плотности вероятности в точках x_i.

Чаще всего метод наибольшего правдоподобия используется при биномиальном, пуассоновском и показательном распределениях случайной величины.

В случае биномиального распределения

$$P_r(m) = C_r^m p^m (1 - p)^{r-m},$$

где $P_r(m)$ — вероятность появления ровно m раз события A (случайной величины) в r испытаниях;
p — вероятность появления события A в одном испытании.

Величина p может рассматриваться как параметр.

Если проводится n опытов по r испытаний в каждом и фиксируется число появлений события (величины) в каждом испытании x_i, то при подстановке этого значения в формулу биномиального распределения получаем

$$P_r(x_i, p) = C_r^{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{r - x_i}.$$

Тогда функция правдоподобия примет вид

$$L = p_r(x_1, p)p_r(x_2, p) \cdots p_r(x_n, p).$$

После логарифмирования и приравнивания к нулю производной от $\ln L$ получаем выражение для оценки

$$p^* = \sum_{i=1}^{n} x_i/(nr).$$

Если значения x_i встречаются n_i раз, то оценка параметра p принимает вид

$$p^* = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i/(nr),$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ — число опытов по r испытаний в каждом.

В случае пуассоновского распределения

$$P_r(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

и подстановки вариант выборки получаем

$$P_r(x_i, \lambda) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}.$$

Составив функцию правдоподобия L, дифференцируя $\ln L$ и приравнивая его производную к нулю, находим оценку параметра λ в виде

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = \bar{x}_{\text{в}}$$

или

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i/n = \bar{x}_{\text{в}}.$$

В случае показательного распределения

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geqslant 0)$$

функция правдоподобия для выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ примет вид

$$L = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} \cdots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

После преобразований получаем выражение для оценки параметра λ:

$$\lambda^* = n/\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 1/\bar{x}_{\text{в}}.$$

24.16. Случайная величина X распределена по биномиальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Найти точечную оценку параметра p указанного закона распределения случайной величины ($r = 10$).

24.17. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Найти точечную оценку параметра λ.

24.18. Случайная величина X распределена по показательному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

Найти точечную оценку параметра λ.

24.19. Стеклянные однородные изделия отправлены для реализации из Москвы в Новосибирск в 1000 контейнерах. После поступления товара было выявлено количество разбитых изделий в каждом контейнере. Результаты представлены в таблице:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	785	163	32	16	4

Считая, что число разбитых изделий описывается законом Пуассона, найти точечную оценку параметра λ.

24.4. Интервальные оценки

Если статистическая оценка параметров закона распределения случайной величины X характеризуется двумя числами — концами интервала, то такая оценка называется *интервальной*.

Интервал, в который попадает оцениваемый параметр с заданной надежностью (вероятностью), называется *доверительным*. Доверительный интервал применяется в случае сравнительно небольшого объема выборки, когда предполагается, что надежность точечной оценки может быть невысокой.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания случайной величины X с заданной надежностью γ в случае нормального закона распределения определяется на основе неравенств

$$\bar{x}_{\text{в}} - z\sigma_x/\sqrt{n} < M_x < \bar{x}_{\text{в}} + z\sigma_x/\sqrt{n},$$

где z — значение аргумента функции Лапласа, получаемое из таблиц (см. Приложение 2), с учетом того, что $\Phi(z) = \gamma/2$;

σ_x — известное среднее квадратичное отклонение или его оценка;

n — объем выборки.

Доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения случайной величины X с надежностью γ для нормального закона распределения случайной величины находится из неравенств

$$\frac{s}{1+q} < \sigma_x < \frac{s}{1-q},$$

где s — несмещенное значение выборочного среднего квадратичного отклонения;

q — параметр, который находится по таблице (см. Приложение 3) на основе известного значения объема выборки n и заданной надежности оценки γ.

24.20. Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны ее среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = 4$, выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}} = 16$ и объем выборки $n = 16$.

Решение. По надежности $\gamma = 0{,}95$ из соотношения $\Phi(z) = \gamma/2$ находим значение функции Лапласа: $\Phi(z) = 0{,}475$.

По таблице значений функции Лапласа (см. Приложение 2) находим $z = 1{,}96$. Используя неравенства для интервальной оценки математического ожидания, получаем

$$16 - 1{,}96 \cdot 4/4 < M_x < 16 + 1{,}96 \cdot 4/4,$$

или

$$14{,}04 < M_x < 17{,}96.$$

24.21. Найти доверительный интервал с надежностью 0,8 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X со средним квадратичным отклонением $\sigma_x = 5$, выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}} = 20$ и объемом выборки $n = 25$.

24.22. На овцеводческой ферме из стада произведена выборка для взвешивания 36 овец. Их средний вес оказался равным 50 кг. Предположив распределение веса нормальным и определив несмещенную оценку выборочной дисперсии $s^2 = 16$, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью а) 0,8; б) 0,9; в) 0,95.

24.23. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 16$ и найдена выборочная средняя, равная 30. Получено также несмещенное значение выборочной дисперсии $s^2 = 9$. Предположив распределение случайной величины X нормальным, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью а) 0,8 и б) 0,9.

24.24. По данным выборки объема $n = 25$ найдено несмещенное значение выборочного среднего квадратичного отклонения $s = 3$ нормально распределенной случайной величины X. Найти с надежностью 0,99 доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения случайной величины.

Решение. На основании данных значений $\gamma = 0{,}99$, $n = 25$ по таблице (см. Приложение 3) находим значение $q = 0{,}49$. Подставляем в неравенства

$$\frac{3}{1+0{,}49} < \sigma_x < \frac{3}{1-0{,}49},$$

откуда

$$2{,}01 < \sigma_x < 5{,}88.$$

24.25. По данным выборки объема $n = 20$ найдено несмещенное значение выборочного среднего квадратичного отклонения $s = 2$ нормально распределенной случайной величины X. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения случайной величины.

24.26. В нескольких мелких магазинах проведена проверка качества 100 изделий, после чего осуществлена обработка полученных данных. В результате получено несмещенное значение выборочного среднего квадратичного отклонения $s = 4$. Считая распределение качественных изделий нормальным, найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения.

24.27. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице

x_i	3	5	7	8	10	12	14
n_i	3	7	4	6	7	5	8

Найти с надежностью 0,97 доверительный интервал для оценки математического ожидания и с надежностью 0,95 — для оценки среднего квадратичного отклонения.

24.28. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	2	5	4	6	3

Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки математического ожидания и с надежностью 0,99 — для оценки среднего квадратичного отклонения.

25. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

25.1. Основные понятия

Если принятое решение о законе распределения генеральной совокупности или о числовых значениях его параметров проверяется по выборочным данным, то говорят о проверке статистических гипотез. Проверке подвергается гипотеза об отсутствии разности между принятым и найденным по выборке значениями исследуемого параметра. Такую гипотезу называют *нулевой*. Противоположную ей гипотезу называют *альтернативной.*

Схема проверки нулевой гипотезы:

1. Рассматривая выборочные данные $x_1, x_2, ..., x_n$ и учитывая конкретные условия задачи, принимают H_0 — нулевую гипотезу и H_1 — альтернативную гипотезу, конкурирующую с H_0.

2. Так как решение о справедливости гипотезы H_0 принимается на основе выборочных данных, могут возникать ошибки двух родов:

• гипотеза H_0 отвергается, а на самом деле она верна — это *ошибка первого рода*; вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости α, т.е. $\alpha = P_{H_0}(H_1)$;

• гипотеза H_0 принимается, а на самом деле она неверна — это *ошибка второго рода*; вероятность ошибки второго рода равна β, т.е. $\beta = P_{H_1}(H_0)$.

Соответственно, вероятность принять верную гипотезу равна $P_{H_0}(H_0) = 1 - \alpha$, а вероятность отвергнуть неверную гипотезу H_0 равна $P_{H_1}(H_1) = 1 - \beta$.

3. Используя выборочные данные, вводят статистический критерий — некоторую функцию K, зависящую от условий решаемой статистической

задачи. Эти функции, являясь случайными величинами, подчинены некоторому известному, затабулированному закону распределения (t-распределение, χ^2-распределение или нормальное распределение).

4. В зависимости от принятого уровня значимости из области допустимых значений функции критерия K выделяют критическую область ω. Далее руководствуются следующим правилом: если вычисленное по выборке значение критерия K попадает в критическую область, то H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. При этом возможно, что H_0 справедлива и, следовательно, совершена ошибка первого рода, вероятность которой α, т.е. $P(K \in \omega) = \alpha$.

Возможны три варианта расположения критической области:

п р а в о с т о р о н н я я критическая область (рис. 25.1, *а*), состоящая из интервала $(k^{п}_{кр}, \infty)$, где $k^{п}_{кр}$ определяется из условия $P(K > k^{п}_{кр}) = \alpha$;

л е в о с т о р о н н я я критическая область (рис. 25.1, *б*), состоящая из интервала $(-\infty, k^{л}_{кр})$, где $k^{л}_{кр}$ определяется из условия $P(K < k^{л}_{кр}) = \alpha$;

д в у с т о р о н н я я критическая область (рис. 25.1, *в*), состоящая из интервалов $(-\infty, k^{л}_{кр})$ и $(k^{п}_{кр}, \infty)$, где точки $k^{л}_{кр}$ и $k^{п}_{кр}$ определяются из условий $P(K < k^{л}_{кр}) = \alpha/2$ и $P(K > k^{п}_{кр}) = \alpha/2$.

5. По выборочным данным находят числовое значение критерия (k_r). Если k_r попадает в критическую область ω, то гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1. Если k_r не попадает в критическую область, то гипотеза H_0 принимается.

При проверке статистических гипотез учитываются конкретные условия рассматриваемой задачи.

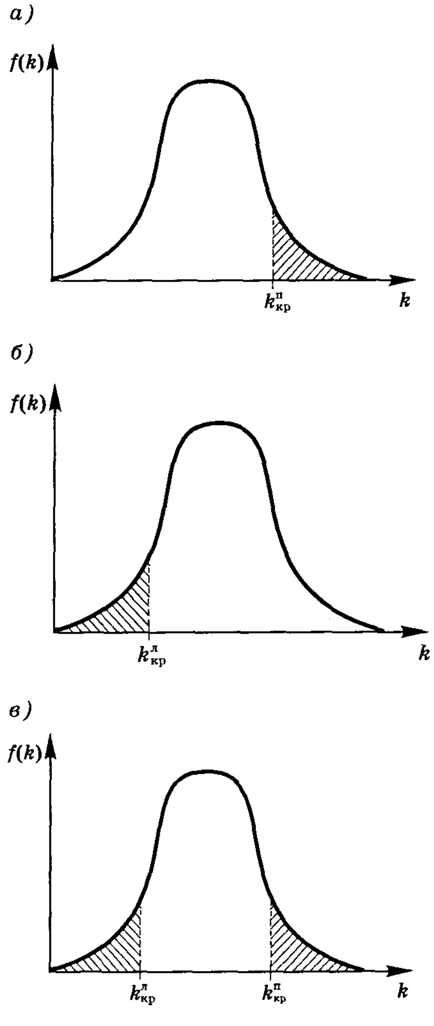


Рис. 25.1

25.2. Сравнение выборочной средней с математическим ожиданием

На практике часто требуется оценить, соответствуют ли действительности рекламные данные о параметрах того или иного товара. В этом случае возникает задача сравнения выборочной средней с анонсируемым значением этого параметра.

25.1. Фирма-поставщик в рекламном буклете утверждает, что средний срок безотказной работы предлагаемого изделия — 2900 ч. Для выборки из 50 изделий средний срок безотказной работы оказался равным 2720 ч при «исправленном» среднем квадратичном отклонении 700 ч. При 5%-м уровне значимости проверить гипотезу о том, что значение 2900 ч является математическим ожиданием.

Р е ш е н и е. Предположим, что случайная величина срока безотказной работы подчинена нормальному закону распределения. Требуется проверить гипотезу о числовом значении математического ожидания нормально распределенной величины (генеральной средней) при неизвестной генеральной дисперсии. В этом случае в качестве критерия выбирают функцию

$$T = \frac{\overline{X} - a_0}{S/\sqrt{n-1}},$$

где $\overline{X}$ — выборочная средняя, a_0 — математическое ожидание, S — «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение. Случайная величина T имеет t-распределение (распределение Стьюдента) с $l = n - 1$ степенями свободы. В данной задаче речь идет о сравнении выборочной средней 2720 ч с гипотетическим математическим ожиданием $\bar{a}_0 = 2900$ ч, при этом «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение равно 700 ч.

Требуется найти критическую область для нулевой гипотезы H_0: $a_0 = 2900$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_0 < 2900$. Очевидно, что другие альтернативные гипотезы ($a_0 > 2900$ и $a_0 \neq 2900$) нецелесообразны, так как потребитель обычно обеспокоен лишь тем, что срок службы изделия может оказаться меньше гарантируемого поставщиком.

Критическая область левосторонняя; $t^{\text{л}}_{\text{кр}}$ находим из условия $P(T < t^{\text{л}}_{\text{кр}}) = \alpha$.

При $\alpha = 0{,}05$ и $l = 50 - 1 = 49$ в таблице t-распределения (см. Приложение 6), используя линейную интерполяцию, находим $t^{\text{л}}_{\text{кр}} = -t^{\text{п}}_{\text{кр}} = -1{,}677$. Таким образом, критическая область $\omega = (-\infty, -1{,}677)$. Рассчитаем t_r, полагая $a_0 = \bar{a}_0$:

$$t_r = \frac{2720 - 2900}{700/\sqrt{50-1}} = \frac{-180}{100} = -1{,}8.$$

Значение $-1{,}8$ попадает в критическую область, поэтому нулевая гипотеза H_0 должна быть отвергнута. Следовательно, фирма в рекламе завышает срок безотказной работы изделия.

25.2. Составлена случайная выборка из 64 покупателей, которые интересовались товаром A. Из них товар A купили 16 человек. Поставщик утверждает, что данный товар должен привлечь треть покупателей, а среднее квадратичное отклонение σ_x равно одному человеку. Проверить нулевую гипотезу при 5%-м уровне значимости.

Решение. Предположим, что число покупателей, приобретающих товар A, есть случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения. Гипотетическая генеральная средняя при этом составит 21 человек ($64 \cdot {}^1/_3$). Будем считать, что $\sigma_x = 1$. Таким образом, речь идет о проверке гипотезы о числовом значении математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии, т.е. о сравнении гипотетической генеральной средней 21 с выборочной средней 16 при известном среднем квадратичном отклонении σ_x.

Нулевая гипотеза в этой задаче имеет вид H_0: $a_0 = 21$, а альтернативная, например, H_1: $a_0 \neq 21$. Возможны и другие альтернативные гипотезы, например H_1: $a_0 < 21$ или H_1: $a_0 > 21$. Уровень значимости задан: $\alpha = 0{,}05$.

В качестве критерия в этом случае рассматривается функция

$$Z = \frac{\overline{X} - a_0}{\sigma_x/\sqrt{n}}.$$

Функция Z подчинена нормальному закону распределения $N(0, 1)$. Критическая область будет двусторонней, ее образуют интервалы $(-\infty,\ z_{\text{кр}}^{\text{л}})$ и $(z_{\text{кр}}^{\text{п}},\ \infty)$, определяемые из условий $P(Z < z_{\text{кр}}^{\text{л}}) = \alpha/2$ и $P(Z > z_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha/2$.

Если $\alpha = 0{,}05$, то $\alpha/2 = 0{,}025$. Это вероятность попадания случайной величины Z в левостороннюю или правостороннюю области. В этом случае вероятность непопадания случайной величины Z в правостороннюю критическую область $(1 - \alpha/2)$ можно представить следующим образом:

$$P(-\infty < Z < z_{\text{кр}}^{\text{п}}) = P(-\infty < Z < 0) + P(0 < Z < z_{\text{кр}}^{\text{п}}) = 1 - \alpha/2.$$

Так как $P(-\infty < Z < 0) = 0{,}5$, а $P(0 < Z < z_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \Phi(z_{\text{кр}}^{\text{п}})$ — функция Лапласа в точке $z_{\text{кр}}^{\text{п}}$, то $\Phi(z_{\text{кр}}^{\text{п}}) = 1 - \alpha/2 - 0{,}5 = 0{,}475$. На основании таблицы значений функции Лапласа (см. Приложение 2) находим $z_{\text{кр}}^{\text{п}} = 1{,}96$. Точка $z_{\text{кр}}^{\text{л}}$ расположена симметрично и равна $-1{,}96$. Следовательно, критическая область состоит из интервалов $(-\infty; -1{,}96)$ и $(1{,}96; \infty)$. Рассчитаем z_r:

$$z_r = \frac{16 - 21}{1/\sqrt{64}} = -40.$$

Значение z_r попадает в критическую область, поэтому гипотеза H_0: $a_0 = 21$ отвергается.

25.3. Средний диаметр подшипников должен составлять 35 мм. Однако для выборки из 82 подшипников он составил 35,3 мм при «исправленном» среднем квадратичном отклонении 0,1 мм. При 5%-м уровне значимости проверить гипотезу о том, что станок, на котором изготавливают подшипники, не требует подналадки.

25.4. Поставщик удобрений утверждает, что применение новой партии удобрений обеспечивает урожайность пшеницы в 60 ц/га. Удобрения внесли на площади в 37 га и получили урожай 55 ц/га при «исправленном» среднем квадратичном отклонении 3 ц/га. При 5%-м уровне значимости оценить справедливость утверждения поставщика.

25.5. Среднесуточная продажа хлеба в течение многих лет для данного магазина составляла 6 т при среднем квадратичном отклонении 0,05 т. Сегодня магазином было продано 7 т хлеба. Можно ли при 5%-м уровне значимости предполагать, что и завтра будет продано 7 т хлеба?

25.6. Фирма — изготовитель женских украшений, выпустив новый товар, утверждает, что 40% покупателей купят эти украшения. В ходе 10-дневной рекламной распродажи в среднем приобрели украшения 29,5% покупателей, «исправленное» среднее квадратичное отклонение составило 16,5%. При 5%-м уровне значимости оценить утверждение изготовителя товара.

Р е ш е н и е. Проверим нулевую гипотезу H_0: $a_0 = 40\%$ и альтернативную H_1: $a_0 < 40\%$. Предположим, что случайная величина X — число покупателей — имеет нормальный закон распределения. В данной задаче требуется проверить гипотезу о числовом значении математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии. Критерий имеет вид

$$T = \frac{\overline{X} - a_0}{S/\sqrt{n-1}}.$$

Для заданного уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ найдем левостороннюю критическую область с учетом того, что $l = 10 - 1 = 9$ степеней свободы (см. Приложение 6). Критическая область ω есть интервал $(-\infty; -1{,}833)$. Вычислим t_r:

$$t_r = \frac{29{,}5 - 40}{16{,}5/\sqrt{9}} = -1{,}909.$$

Число $-1{,}909$ попадает в критическую область. Таким образом, нулевая гипотеза отвергается.

25.7. Поставщик двигателей утверждает, что средний срок их службы равен 800 ч. Для выборки из 17 двигателей средний срок службы оказался равным 865 ч при «исправленном» среднем квадратичном отклонении 120 ч. Проверить нулевую гипотезу при уровне значимости: а) 5%; б) 1%.

25.8. По результатам 10 замеров установлено, что среднее время обслуживания мастером клиента $\overline{x} = 15$ мин. Предполагая, что время обслуживания клиента — нормально распределенная случайная величина с дисперсией $\sigma_x^2 = 9$ мин^2, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, можно ли принять в качестве норматива (математического ожидания) для обслуживания одного клиента:

а) 21 мин; б) 16 мин.

25.9. По паспортным данным на автомобильный двигатель, расход топлива на 100 км пробега составляет 10 л при среднем квадратичном отклонении 2 л. В результате совершенствования конструкции ожидается, что расход топлива уменьшится. Для проверки проведены испытания 25 случайно отобранных автомобилей с модернизированным двигателем: средний расход топлива на 100 км пробега составил 9,2 л. Используя 5%-й уровень значимости, проверить гипотезу, утверждающую, что модернизация повлияла на расход топлива.

25.10. Из большой партии ананасов одного размера случайным образом отобрано 36 штук. Выборочная средняя масса одной штуки при этом оказалась равной 930 г. Используя двусторонний критерий при $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу, что средняя масса одного ананаса (по утверждению поставщика) составляет 1 кг, если:

а) среднее квадратичное отклонение известно и составляет 200 г;

б) среднее квадратичное отклонение неизвестно, а «исправленное» составило 250 г.

25.3. Сравнение двух дисперсий

Пусть имеются две случайные величины $X = N(a_x, \sigma_x)$ и $Y = N(a_y, \sigma_y)$ с неизвестными дисперсиями и две независимые выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Требуется по полученным выборочным оценкам

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} \quad \text{и} \quad s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2}{m-1}, \quad \text{где} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{и} \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i,$$

проверить гипотезу H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

В качестве критерия при проверке гипотезы H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ используют функцию

$$F(l_1, l_2) = S_x^2 / S_y^2,$$

которая имеет F-распределение (распределение Фишера — Снедекора) с $l_1 = n - 1$ и $l_2 = m - 1$ степенями свободы, если полученные по выборкам значения $s_x^2 > s_y^2$, и

$$F(l_1, l_2) = S_y^2 / S_x^2$$

с $l_1 = m - 1$, $l_2 = n - 1$, если $s_y^2 > s_x^2$.

Если задаться уровнем значимости α, то можно построить критические области для проверки гипотезы H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при двух альтернативных гипотезах:

1) H_1: $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$, если $s_x^2 > s_y^2$, или H_1: $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$, если $s_x^2 < s_y^2$. В этом случае критическая область правосторонняя $(f_{\text{кр}}^{\text{п}}, \infty)$, где $f_{\text{кр}}^{\text{п}}$ определяется из условия $P(F(l_1, l_2) > f_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha$;

2) H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. В этом случае критическая область двусторонняя. Однако можно использовать только правостороннюю область $(f_{\text{кр}}^{\text{п}}, \infty)$, где $f_{\text{кр}}^{\text{п}}$ определяется из условия $P(F(l_1 = n - 1,\ l_2 = m - 1) > f_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha/2$, если $s_x^2 > s_y^2$, и из условия $P(F(l_1 = m - 1,\ l_2 = n - 1) > f_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha/2$, если $s_x^2 < s_y^2$.

Если f_r попадает в критическую область, то принимается альтернативная гипотеза H_1, в противном случае принимается гипотеза H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$; при этом оценкой генеральной дисперсии служит величина

$$s^2 = \frac{s_x^2(n-1) + s_y^2(m-1)}{n+m-2}.$$

25.11. Срок хранения продукции, изготовленной по технологии A, составил:

Срок хранения	x_i	5	6	7
Число единиц продукции	n_i	2	4	4

а изготовленной по технологии B:

Срок хранения	y_i	5	6	7	8
Число единиц продукции	m_i	1	8	7	1

Предположив, что случайные величины X и Y распределены по нормальному закону, проверить гипотезу H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при уровне значимости 0,1 и альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Решение. Вычислим «исправленные» выборочные дисперсии s_x^2, s_y^2. Для этого вначале найдем $\bar{x}$, $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4}{10} = 6{,}2; \qquad \bar{y} = \frac{5 \cdot 1 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 1}{17} = 6{,}5.$$

Тогда

$$s_x^2 = \left[\frac{25 \cdot 2 + 36 \cdot 4 + 49 \cdot 4}{10} - 6{,}2^2\right]\frac{10}{9} = 0{,}62;$$

$$s_y^2 = \left[\frac{25 \cdot 1 + 36 \cdot 8 + 49 \cdot 7 + 64 \cdot 1}{17} - 6{,}5^2\right]\frac{17}{16} = 0{,}11.$$

Учитывая, что $s_x^2 > s_y^2$, определим f_r:

$$f_r = \frac{0{,}62}{0{,}11} = 5{,}64.$$

Критическое значение $f_{\text{кр}}^{\text{п}}$ находим из условия

$$P(F(l_1 = 10 - 1,\ l_2 = 17 - 1) > f_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha / 2 = 0{,}05.$$

По таблице F-распределения (см. Приложение 5) определяем $f_{\text{кр}}^{\text{п}} = 2{,}54$.

Так как число $f_r = 5{,}64$ попадает в критическую область $(2{,}54; \infty)$, то гипотезу о равенстве дисперсий среднего срока хранения продукции, изготовленной по технологиям A и B, отвергаем.

25.12. Температура в холодильной камере контролируется по двум электронным термометрам. Для сравнения точности термометров их показания фиксируются одновременно. Проведено 10 замеров показаний термометров:

Номер замера	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Термометр 1	–7,11	–8,63	–6,89	–7,23	–7,51	–7,68	–7,91	–6,97	–7,44	–7,64
Термометр 2	–7,13	–8,49	–7,12	–7,19	–7,67	–7,49	–8,03	–7,15	–7,29	–7,89

При уровне значимости 0,1 проверить гипотезу о равенстве дисперсий.

25.13. На двух станках производят одну и ту же продукцию, контролируемую по наружному диаметру изделия. Из продукции станка A было проверено 16 изделий, а из продукции станка B — 25 изделий. Выборочные оценки математических ожиданий и дисперсий контролируемых размеров составили $\bar{x}_A = 37{,}5$ мм при $s_A^2 = 1{,}21$ мм^2 и $\bar{x}_B = 36{,}8$ мм при $s_B^2 = 1{,}44$ мм^2. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий, если $\alpha = 0{,}1$.

25.14. Фирма поставляет радары для измерения скорости движения автомобилей. Для закупки большой партии проведены испытания приборов, изготовленных на заводе A и на заводе B. Измерения проводили на одной и той же машине и на одной и той же дороге. Определены величины отклонений между показаниями спидометра автомобиля и радара:

Завод A

Отклонение, км/ч	Δx_i	−0,7	−0,3	−0,1	0,5	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3
Число измерений	n_i	5	4	2	6	3	1	3	1	1

Завод B

Отклонение, км/ч	Δy_i	−0,6	−0,1	0,4	0,7	1,0	1,4
Число измерений	m_i	4	5	3	2	2	1

Полагая показания спидометра автомобиля эталоном, проверить гипотезу об одинаковой точности измерений, проводимых радарами завода A и завода B, при уровне значимости 0,1.

25.4. Сравнение двух математических ожиданий

Пусть имеются две выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$, полученные в результате независимых испытаний. По этим данным рассчитаны оценки $\bar{x}$ и $\bar{y}$, а также s_x^2 и s_y^2. В предположении, что случайные величины X и Y распределены по нормальному закону $X = N(a_x, \sigma_x)$ и $Y = N(a_y, \sigma_y)$, требуется проверить на основании выборочных данных гипотезу H_0: $a_x = a_y$ при условии, что гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается.

25.15. Средний ежедневный объем продаж за I квартал текущего года для 17 торговцев района A составляет 15 тыс. руб. при «исправленном» среднем квадратичном отклонении 2,5 тыс. руб., а для 10 торговцев района B — 13 тыс. руб. при «исправленном» среднем квадратичном отклонении 3 тыс. руб. Каждую группу можно считать случайной независимой выборкой из большой совокупности. Существенно ли различие объемов продаж в районах A и B при 5%-м уровне значимости?

Решение. Предположим, что ежедневный объем продаж подчинен нормальному закону распределения. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение законов распределения для районов A и B неизвестны. Предположим, что дисперсии объемов продаж одинаковы. В этих условиях возникает задача оценки статистической гипотезы H_0: $a_x = a_y$ при альтернативной H_1: $a_x \neq a_y$, если принять за a_x математическое ожидание объема продаж для района A, за a_y — для района B.

Выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами. В этом случае в качестве критерия используют функцию

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}, \quad \text{где } S = \sqrt{\frac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{n+m-2}}.$$

Функция T подчинена t-распределению для $l = m + n - 2$ степеней свободы.

По таблице t-распределения (см. Приложение 6) для $l = 17 + 10 - 2 = 25$ и 5%-го уровня значимости (для двусторонней критической области) находим $t_{\text{кр}} = 2{,}06$. Это значит, что критическая область есть интервал $(-\infty; -2{,}06)$ и $(2{,}06; \infty)$.

Вычислим t_r:

$$s = \sqrt{\frac{6{,}25 \cdot 16 + 9 \cdot 9}{25}} = \sqrt{7{,}24} = 2{,}69,$$

$$t_r = \frac{15 - 13}{2{,}69\sqrt{\frac{1}{17} + \frac{1}{10}}} = 1{,}86.$$

Полученное значение критерия t_r не принадлежит критической области, следовательно, разность несущественна и гипотеза H_0: $a_x = a_y$ принимается. В качестве общей средней выборочной принимают величину

$$\bar{x}_0 = \frac{15 \cdot 17 + 13 \cdot 10}{27} \approx 14.$$

25.16. В условиях задачи 25.15 выяснить, существенно ли при 5%-м уровне значимости превышение объема продаж в районе A по сравнению с объемом в районе B.

Р е ш е н и е. Вопрос в данной задаче отличается от вопроса в задаче 25.15 тем, что альтернативной к гипотезе H_0: $a_x = a_y$ становится не гипотеза H_1: $a_x \neq a_y$, а гипотеза H_1: $a_x > a_y$. В этом случае критическая область односторонняя (в частности, правосторонняя), для $l = 25$ и $\alpha = 0{,}05$ имеем критическую область $(1{,}708; \infty)$. Так как $t_r = 1{,}86 > 1{,}708$, то величина t_r входит в критическую область, поэтому превышение объема продаж в районе A по сравнению с объемом в районе B существенно и гипотеза H_0: $a_x = a_y$ отвергается.

25.17. Акционерное общество (АО) выпускает печенье «Русские узоры» в пачках, на которых написано: масса нетто 200 г. Осуществлена выборка для оценки средней массы печенья в пачках, выпущенных московской и санкт-петербургской фабриками АО. Результаты выборок таковы (указана масса пачек печенья «Русские узоры»):

Московская фабрика

201, 195, 197, 199, 202, 198, 199, 203, 195, 196, 198, 199, 194, 203, 195, 202, 197

Санкт-петербургская фабрика

203, 207, 191, 193, 197, 201, 196, 192, 194, 195, 198, 196

Предполагая, что случайная величина массы пачки печенья распределена по нормальному закону с одинаковыми дисперсиями, и считая выборки независимыми, определить:

а) средние выборочные и «исправленные» средние квадратичные отклонения массы для каждой фабрики;

б) для $\alpha = 0{,}05$ значимо или нет различие между средними выборочными (если это различие имеется);

в) является ли величина 200 г математическим ожиданием массы при 5%-м уровне значимости?

25.18. Расход сырья на единицу продукции составил:

по старой технологии

Расход сырья	x_i	305	307	308
Число изделий	n_i	1	4	4

по новой технологии

Расход сырья	y_i	303	304	305	308
Число изделий	m_i	2	6	4	1

Предположив, что соответствующие случайные величины X и Y имеют нормальные распределения с математическими ожиданиями a_x и a_y и одинаковыми дисперсиями, проверить:

а) при уровне значимости 0,1 гипотезу H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при альтернативной H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$;

б) при уровне значимости 0,05 гипотезу H_0: $a_x = a_y$ при альтернативной H_1: $a_x \neq a_y$.

25.19. Производительность каждого из агрегатов A и B составила (в кг вещества за час работы):

Номер замера	1	2	3	4	5
Агрегат A	14,1	13,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат B	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Можно ли считать производительность агрегатов A и B одинаковой в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей, при уровне значимости $\alpha = 0,1$?

25.20. Фирма предлагает автоматы по розливу напитков. При выборке $n = 16$ найдена средняя величина $\bar{x} = 182$ г дозы, наливаемой в стакан автоматом № 1. По выборке $m = 9$ найдена средняя величина $\bar{y} = 185$ г дозы, наливаемой в стакан автоматом № 2. По утверждению изготовителя, случайная величина наливаемой дозы имеет нормальный закон распределения с дисперсией, равной $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 25$ г^2. Можно ли считать отличия выборочных средних случайной ошибкой при уровне значимости $\alpha = 0,01$?

Решение. Пусть a_x и a_y — математические ожидания доз, наливаемых автоматом № 1 и автоматом № 2. Нулевая гипотеза в данном случае H_0: $a_x = a_y$ при альтернативных H_1: $a_x \neq a_y$ и H_1: $a_x < a_y$. Дисперсия известна: $\sigma^2 = 25$. В качестве критерия справедливости статистической гипотезы выбирается функция

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}},$$

распределенная по нормальному закону с параметрами (0, 1).

1. Рассмотрим вначале гипотезу H_0: $a_x = a_y$ для альтернативной H_1: $a_x < a_y$. В этом случае критическая область имеет вид $(-\infty,\ z^{л}_{кр})$, где $z^{л}_{кр}$ определяется из условия $P(Z < z^{л}_{кр}) = \alpha$.

Так как функция Лапласа — нечетная функция, т.е. $\Phi(-z) = -\Phi(z)$, а таблица этой функции содержит только положительные значения, то найдем вначале $z^{п}_{кр}$.

Для этого вычислим значение функции Лапласа в критической точке: $\Phi(z^{п}_{кр}) = 0{,}5 - \alpha = 0{,}49$. Откуда $z^{п}_{кр} = 2{,}33$. Значит, левосторонняя критическая область будет $(-\infty; -2{,}33)$.

Рассчитаем z_r:

$$z_r = \frac{182 - 185}{\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{25}{9}}} = \frac{-3 \cdot 12}{25} = -1{,}44.$$

Полученное значение $z_r = -1{,}44$ не входит в критическую область $(-\infty; -2{,}33)$, поэтому нулевая гипотеза принимается.

2. Рассмотрим гипотезу H_0: $a_x = a_y$ при альтернативной H_1: $a_x \neq a_y$. В этом случае критическая область двусторонняя и имеет вид $(-\infty;\ z^{л}_{кр}) \cup (z^{п}_{кр};\ \infty)$. Величины $z^{л}_{кр}$ и $z^{п}_{кр}$ рассчитываются из условий

$$P(Z < z^{л}_{кр}) = \alpha/2 \quad \text{и} \quad P(Z > z^{п}_{кр}) = \alpha/2.$$

Воспользовавшись таблицей значений функции Лапласа (см. Приложение 2), имеем

$$\Phi(z^{п}_{кр}) = 0{,}5 - \alpha/2 = 0{,}495, \qquad z^{п}_{кр} = 2{,}57.$$

Критическая область имеет вид $(-\infty; -2{,}57) \cup (2{,}57; \infty)$. Значение $z_r = -1{,}44$ не попадает в критическую область, поэтому нулевая гипотеза принимается.

25.21. В таблице приведены результаты измерения процентного содержания крахмала в картофеле (исследовали 16 клубней различных сортов картофеля) двумя различными способами:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	11	9	13	8	6	7	6	12	10	11	14	12	7	5	15	11
II	13	9	13	9	8	9	9	9	11	13	11	12	6	6	13	12

При уровне значимости 0,1 можно ли считать, что крахмалистость картофеля одна и та же для обоих способов?

25.22. Используются два вида удобрений: I и II. Для сравнения их эффективности были попарно выбраны 20 участков равной площади так, что пару составили участки, однородные по плодородию. Десять участков были обработаны удобрением I, а десять, парных им, — удобрением II. На соответствующих парах участков получили следующий урожай:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	8,0	8,4	8,0	6,4	8,6	7,7	7,7	5,6	5,6	6,2
II	5,6	7,4	7,3	6,4	7,5	6,1	6,6	6,0	5,5	5,0

При уровне значимости 5% проверить гипотезу о различном влиянии использования удобрения I или II.

25.5. Проверка гипотезы о распределении. Критерий Пирсона

При проверке статистических гипотез о соответствии отдельных параметров закона распределения случайных величин предполагалось, что законы распределения этих величин известны. Однако при решении практических задач (особенно экономических) модель закона распределения в общем случае заранее неизвестна, поэтому возникает необходимость выбора модели закона распределения, согласующейся с результатами выборочных наблюдений.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — выборка наблюдений случайной величины X с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$. Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что X распределена по закону, имеющему функцию распределения $F(x)$, равную функции $F_0(x)$, т.е. проверяется нулевая гипотеза H_0: $F(x) = F_0(x)$.

Критерии, с помощью которых проверяется нулевая гипотеза о неизвестном распределении, называются *критериями согласия*. Рассмотрим критерий согласия Пирсона.

Схема проверки нулевой гипотезы H_0: $F(x) = F_0(x)$:

1. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ строят вариационный ряд; он может быть как дискретным, так и интервальным. Рассмотрим для определенности дискретный вариационный ряд

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{k-1}	x_k
m_i	m_1	m_2	$\cdots$	m_{k-1}	m_k

2. По данным предыдущих исследований или по предварительным данным делают предположение (принимают гипотезу) о модели закона распределения случайной величины X.

3. По выборочным данным проводят оценку параметров выбранной модели закона распределения. Предположим, что закон распределения имеет r параметров (например, биномиальный закон имеет один параметр p; нормальный — два параметра (a_0, σ_x) и т.д.).

4. Подставляя выборочные оценки значений параметров распределения, находят теоретические значения вероятностей

$$p_i^{\text{т}} = P(X = x_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

5. Рассчитывают теоретические частоты $m_i^{\text{т}} = p_i^{\text{т}} n$, где $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$.

6. Рассчитывают значение критерия согласия Пирсона

$$\chi_r^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i^{\text{т}})^2}{m_i^{\text{т}}}.$$

Эта величина при $n \to \infty$ стремится к распределению χ^2 с $l = k - r - 1$ степенями свободы. Поэтому для расчетов используют таблицы распределения χ^2.

7. Задаваясь уровнем значимости α, находят критическую область (она всегда правосторонняя) $((\chi_{\text{кр}}^2)^{\text{п}}; \infty)$; значение $(\chi_{\text{кр}}^2)^{\text{п}}$ определяют из соотношения $\alpha = P(\chi^2 > (\chi_{\text{кр}}^2)^{\text{п}})$. Если численное значение χ_r^2 попадает в интервал $((\chi_{\text{кр}}^2)^{\text{п}}; \infty)$, то гипотеза H_0: $F(x) = F_0(x)$ отклоняется и принимается альтернативная гипотеза о том, что выбранная модель закона распределения не подтверждается выборочными данными, при этом допускается ошибка, вероятность которой равна α.

25.23. Экзаменационный билет по математике содержит 10 заданий. Пусть X — случайная величина числа задач, решенных абитуриентами на вступительном экзамене. Результаты сдачи экзамена по математике для 300 абитуриентов таковы:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	13	17	15	35	10	9	40	51	45	33	32

Оценить закон распределения случайной величины X.

Решение. Для составления гипотезы о модели закона распределения случайной величины X сделаем следующие предположения:

- вероятность решения задачи не зависит от исхода решения других задач;
- вероятность решить любую отдельно взятую задачу одна и та же и равна p, а вероятность не решить задачу равна $q = 1 - p$.

При этих допущениях можно предположить, что X подчинена биномиальному закону распределения (нулевая гипотеза), т.е. вероятность того, что абитуриент решит x задач, может быть подсчитана по формуле

$$P(X = x) = C_{10}^{x} p^x q^{10-x}. \qquad (25.1)$$

Найдем оценку параметра p, входящего в модель (25.1).

Здесь p — это вероятность того, что абитуриент решит задачу. Оценкой вероятности p является относительная частота p^*, которая вычисляется по формуле

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i m_i}{\nu \sum_{i=1}^{11} m_i} = \frac{\overline{x}}{\nu},$$

где $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{11} m_i}$ — среднее число задач, решенных одним абитуриентом;

ν — число задач, решаемое каждым абитуриентом.

Тогда оценку для p получим в виде

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i m_i / n}{\nu} = (0 \cdot 0{,}043 + 1 \cdot 0{,}057 + \ldots + 10 \cdot 0{,}107)/10 = 0{,}6.$$

Подставим значения $p^* = 0{,}6$ и $q^* = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ в выражение (25.1) и при разных x_i получим теоретические вероятности $p_i^{\text{т}}$ и частоты $m_i^{\text{т}} = p_i^{\text{т}} n$ (табл. 25.1).

Таблица 25.1

Номер группы i	x_i	$p_i^{\text{т}}$	$m_i^{\text{т}}$
1	0	0,0001	0,03
2	1	0,0016	0,48
3	2	0,0106	3,18
4	3	0,0425	12,75
5	4	0,1115	33,45
6	5	0,2007	60,21
7	6	0,2508	75,24
8	7	0,2150	64,50
9	8	0,1209	36,27
10	9	0,0403	12,09
11	10	0,0060	1,80

Из табл. 25.1 видно, что для групп 1, 2, 3 и 11 теоретическая частота $m_i^т < 5$. Такие группы обычно объединяются с соседними. Значения $m_i^т$ для групп 1, 2 и 3 можно объединить с $m_4^т$. Это представляется естественным, потому что за 0, 1, 2 и 3 решенные задачи на экзамене обычно ставится неудовлетворительная оценка. Объединим также группу 11 с группой 10 и составим табл. 25.2.

Таблица 25.2

Номер группы i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0—3	4	5	6	7	8	9—10
m_i	80	10	9	40	51	45	65
$m_i^т$	16	33	60	75	64	36	14

По данным табл. 25.2 рассчитываем величину критерия согласия:

$$\chi_r^2 = \frac{(80-16)^2}{16} + \frac{(10-33)^2}{33} + \frac{(9-60)^2}{60} + \frac{(40-75)^2}{75} + \frac{(51-64)^2}{64} +$$
$$+ \frac{(45-36)^2}{36} + \frac{(65-14)^2}{14} = 522{,}4.$$

Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, тогда для $l = k - r - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$ степеней свободы $\left(\chi_{кр}^2\right)^п = 11{,}1$ (см. Приложение 4).

Величина $\chi_r^2 = 522{,}4 \in (11{,}1; \infty)$, следовательно, нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

25.24. Коммерсант предполагает, что объем продаж нового вида продукции в каждой из пяти торговых точек, расположенных в различных районах, будет одинаков. Фактический объем продаж оказался разным:

Район	i	1	2	3	4	5
Фактический объем продаж	m_i	105	117	84	111	83

Оценить, значимы или нет различия между наблюдаемыми и ожидаемыми объемами продаж при уровне значимости 0,01 и 0,05.

Решение. Так как в задаче спрашивается о согласовании ожидаемых (одинаковых) и фактических объемов продаж, то теоретический «закон распределения» определен: во всех районах объем продаж одинаков, т.е.

$$m_1^т = m_2^т = m_3^т = m_4^т = m_5^т = \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i}{5} = \frac{500}{5} = 100.$$

Заметим, что в данном примере нельзя использовать в качестве закона распределения биномиальный или нормальный закон, так как речь идет об одновременном сравнении пяти районов.

Составим таблицу

Район	i	1	2	3	4	5
Фактический объем продаж	m_i	105	117	84	111	83
Ожидаемый объем продаж	$m_i^{\text{т}}$	100	100	100	100	100

Тогда

$$\chi_r^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(m_i - m_i^{\text{т}})^2}{m_i^{\text{т}}} = \frac{1}{100}(25 + 289 + 256 + 121 + 289) = 9{,}8.$$

Выбирая уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, по таблице χ^2-распределения (см. Приложение 4) для числа степеней свободы $l = 5 - 1 = 4$ находим $\left(\chi_{\text{кр}}^2\right)^{\text{п}} = 13{,}3$, а для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ при $l = 4$, соответственно, $\left(\chi_{\text{кр}}^2\right)^{\text{п}} = 9{,}5$.

Следовательно, для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ критическая область представляет собой интервал $(13{,}3; \infty)$, $\chi_r^2 = 9{,}8$ не попадает в критическую область, т.е. нулевая гипотеза, состоящая в том, что ожидаемые и фактические объемы продаж согласуются, не отвергается. Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ критической областью является интервал $(9{,}5; \infty)$, и, так как $\chi_r^2 = 9{,}8$ попадает в критическую область, нулевая гипотеза должна быть отклонена.

25.25. Результаты взвешивания 50 случайным образом отобранных пачек чая приведены ниже (в граммах):

150, 147, 152, 148, 149, 153, 151, 150, 149, 147, 153, 151, 152, 151, 149, 152, 150, 148, 152, 150, 152, 151, 148, 151, 152, 150, 151, 149, 148, 149, 150, 150, 151, 149, 151, 150, 151, 150, 149, 148, 147, 153, 147, 152, 150, 151, 149, 150, 151, 153.

Оценить закон распределения случайной величины X — массы пачки чая — для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$.

Р е ш е н и е. Масса пачки чая — непрерывная случайная величина, но в силу того, что взвешивание проведено с дискретностью 1 г и размах составляет $147 \div 153$ г, непрерывная величина может быть представлена дискретным вариационным рядом:

Значение случайной величины X	x_i	147	148	149	150	151	152	153
Частота появления	m_i	4	5	8	11	11	7	4

В качестве модели закона распределения выберем нормальный закон $N(a_0, \sigma_x)$, число параметров которого $r = 2$: a_0 — математическое ожидание, σ_x — среднее квадратичное отклонение.

По выборочным данным получим оценки параметров нормального закона распределения:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} m_i} = 7507/50 = 150{,}14;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_{\text{в}} = \frac{50}{49}(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) = 2{,}82; \qquad s = 1{,}68.$$

Для расчета теоретических частот $p_i^{\text{т}}$ воспользуемся табличными значениями функции Лапласа $\Phi(z)$. Алгоритм вычисления $p_i^{\text{т}}$ состоит в следующем:

• находим по нормированным значениям случайной величины Z значения $\Phi(z)$, а затем $F_N(x)$:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}, \qquad F_N(x_i) = 0{,}5 + \Phi(z_i).$$

Например,
$x_1 = 147;$ $z_1 = (147 - 150{,}14)/1{,}68 = -1{,}87;$ $\Phi(-1{,}87) = -0{,}46926;$
$F_N(147) = 0{,}03074;$

• находим $p_i^{\text{т}} = P(z_i \leqslant X < z_{i+1}) = F_N(x_{i+1}) - F_N(x_i);$

• находим $m_i^{\text{т}} = p_i^{\text{т}} n$, и если некоторое $m_i^{\text{т}} < 5$, то соответствующие группы объединяются.

Результаты вычисления $p_i^{\text{т}}$, $m_i^{\text{т}}$ и χ_r^2 приведены в табл. 25.3.

По таблице Приложения 4 находим χ_r^2 по схеме: для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $l = k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3 \Rightarrow \chi^2_{\text{кр}} = 7{,}8$. Следовательно, критическая область $(7{,}8;\ \infty)$.

Величина $\chi_r^2 = 5{,}267$ не входит в критическую область, поэтому гипотеза о том, что случайная величина X — масса пачки чая — подчинена нормальному закону распределения, согласуется с выборочными данными.

Таблица 25.3

i	$x_i \div x_{i+1}$	m_i	$\Phi(z_i)$	$F_N(x_i)$	$F_N(x_{i+1})$	$p_i^{\text{т}} = F_N(x_{i+1}) - F_N(x_i)$	$m_i^{\text{т}} = p_i^{\text{т}} n$	$(m_i - m_i^{\text{т}})^2 / m_i^{\text{т}}$
0	$-\infty \div 147$	0	–0,50000	0,00000	0,03074	0,03074	1,537	—
1	$147 \div 148$	4	–0,46926	0,03074	0,10204	0,07130	3,563	0,237
2	$148 \div 149$	5	–0,39796	0,10204	0,24825	0,14621	7,31	0,730
3	$149 \div 150$	8	–0,25175	0,24825	0,46812	0,21987	10,99	0,813
4	$150 \div 151$	11	–0,03188	0,46812	0,69497	0,22685	11,34	0,010
5	$151 \div 152$	11	0,19497	0,69497	0,86650	0,17153	8,58	0,683
6	$152 \div 153$	7	0,36650	0,86650	0,95543	0,08893	4,45	2,794
7	$153 \div \infty$	4	0,45543	0,95543	1,00000	0,04457	2,23	—
		$\Sigma = 50$				$\Sigma = 1{,}00000$		$\Sigma = 5{,}267$

25.26. Страховая компания выпустила четыре вида страховых полисов в предположении, что спрос на них будет одинаков. Фактические объемы реализации различных видов страховых полисов приведены ниже:

Виды страховых полисов	A	B	C	D
Фактический объем реализации	50	21	23	26

Оценить для уровней значимости $\alpha = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}05$, согласуется ли фактический и теоретический спрос на различные виды страховых полисов.

25.27. Результаты исследования числа покупателей в универсаме в зависимости от времени работы приведены ниже:

Часы работы	9—10	10—11	11—12	12—13
Число покупателей	41	82	117	72

Можно ли утверждать при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, что случайная величина X — число покупателей — подчинена нормальному закону?

25.28. Дано следующее распределение успеваемости 125 студентов, сдавших три экзамена:

Число сданных экзаменов	0	1	2	3
Число студентов	3	5	47	70

Проверить гипотезу о биномиальном распределении числа сданных экзаменов при $\alpha = 0{,}05$.

25.29. Масса (в граммах) произвольно выбранных 30 пачек полуфабриката «Геркулес» такова:

503, 509, 495, 493, 489, 485, 507, 511, 487, 495, 506, 504, 507, 511, 499, 491, 494, 518, 506, 515, 487, 509, 507, 488, 495, 490, 498, 497, 492, 495.

Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ утверждать, что случайная величина X — масса пачки — подчинена нормальному закону распределения?

25.30. При принятии на работу фирма предлагает 4 теста. Результаты решения этих тестов десятью претендентами приведены ниже:

Число верно решенных тестов	0	1	2	3	4
Число участников	1	2	2	3	2

Проверить гипотезу о биномиальном распределении случайной величины X — числа успешно решенных тестов — при $\alpha = 0{,}05$.

26. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

26.1. Линейная регрессия с несгруппированными данными

Регрессией Y на X или *условным математическим ожиданием случайной величины* Y *относительно случайной величины* X называется функция вида

$$M(Y/x) = f(x).$$

Регрессией X на Y называется функция вида

$$M(X/y) = \varphi(y).$$

Оценками этих функций являются *выборочные уравнения регрессии*, или *условные средние*,

$$\bar{y}_x = f^*(x), \qquad \bar{x}_y = \varphi^*(y).$$

На практике часто используются выборочные уравнения линейной регрессии в виде

$$\bar{y}_x = \rho x + \beta, \tag{26.1}$$

$$\bar{x}_y = \rho_1 y + \beta_1. \tag{26.2}$$

Для определения параметров ρ и β в уравнении (26.1) используется получаемая на основании метода наименьших квадратов система двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\rho + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\rho + n\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,, \end{cases}$$

откуда находятся выражения для ρ и β:

$$\rho = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{26.3}$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{26.4}$$

Аналогично находятся параметры ρ_1 и β_1 для функции $\bar{x}_y$.

Для оценки связи между случайными величинами обычно используется выборочный коэффициент корреляции.

Введем в рассмотрение *выборочный эмпирический корреляционный момент*

$$\mu_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}.$$

Раскроем скобки и учтем, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}.$$

Тогда

$$\mu_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}\bar{y}}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}n\bar{y} - \bar{y}n\bar{x} + n\bar{x}\bar{y}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n}. \tag{26.5}$$

Выборочный коэффициент корреляции представляет собой отношение

$$r_{\text{в}} = \frac{\mu_{xy}^*}{\sigma_{x\text{в}}\sigma_{y\text{в}}}.$$

26.1. С целью анализа взаимного влияния зарплаты и текучести рабочей силы на пяти однотипных фирмах с одинаковым числом работников проведены измерения уровня месячной зарплаты X и числа уволившихся за год рабочих Y:

X	100	150	200	250	300
Y	60	35	20	20	15

Найти линейную регрессию Y на X и выборочный коэффициент корреляции.

Решение. Составляем расчетную таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	100	60	10000	6000	3600
2	150	35	22500	5250	1225
3	200	20	40000	4000	400
4	250	20	62500	5000	400
5	300	15	90000	4500	225
Σ	1000	150	225000	24750	5850

Определяем ρ и β:

$$\rho = [(5 \cdot 24{,}75 - 150) \cdot 10^3]/(5 \cdot 22{,}5 \cdot 10^4 - 10^6) = -0{,}21;$$

$$\beta = (22{,}5 \cdot 10^4 \cdot 150 - 10^3 \cdot 24{,}75 \cdot 10^3)/(5 \cdot 22{,}5 \cdot 10^4 - 10^6) = 72.$$

Выборочное уравнение регрессии примет вид

$$\bar{y}_x = -0{,}21x + 72.$$

Из расчетной таблицы следует, что

$$\bar{x} = 1000/5 = 200, \qquad \bar{y} = 150/5 = 30.$$

По формуле (26.5) находим

$$\mu^*_{xy} = (24750 - 5 \cdot 200 \cdot 30)/5 = -1050.$$

Найдем $d_x = \sigma^2_{x\text{в}}$, $d_y = \sigma^2_{y\text{в}}$ по формулам $d_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, $d_y = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$:

$$d_x = 22{,}5 \cdot 10^4/5 - 200^2 = 5000, \qquad d_y = 5850/5 - 30^2 = 270.$$

Откуда $\sigma_{x\text{в}} \approx 70{,}7$, $\sigma_{y\text{в}} \approx 16{,}4$.
Таким образом,

$$r_\text{в} = \frac{-1050}{70{,}7 \cdot 16{,}4} = -0{,}91.$$

26.2. На основании полученных измерений величин X и Y

X	4	6	8	10	12
Y	5	8	7	9	14

найти линейную регрессию Y на X и выборочный коэффициент корреляции.

26.3. На основании полученных по результатам измерений значений величин X и Y

X	3	5	7	9	10	12
Y	14	10	9	9	6	5

найти линейную регрессию X на Y и выборочный коэффициент корреляции.

26.4. В магазине постельных принадлежностей были проведены в течение пяти дней подсчеты числа покупок простыней X и подушек Y:

X	10	20	25	28	30
Y	5	8	7	12	14

(В данной таблице значения X расставлены *в возрастающем* порядке.) Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и выборочный коэффициент корреляции.

26.2. Линейная регрессия со сгруппированными данными

В том случае, когда варианты парной выборки встречаются по нескольку раз, причем с одним значением варианты x_i может встретиться несколько вариант y_j, их обычно представляют в виде корреляционной таблицы. На пересечении строк и столбцов этой таблицы отмечается частота n_{ij} выбора соответствующей пары (x_i, y_j), а частоты вариант x_i $(i = 1, 2, \ldots, k_1)$, y_j $(j = 1, 2, \ldots, k_2)$ находятся как суммы значений n_{ij} по соответствующей строке или столбцу. Например, в корреляционной таблице

y_j \ x_i	10	20	30	n_{y_j}
5	3	—	2	5
10	5	4	2	11
n_{x_i}	8	4	4	$n = 16$

пара (10; 5) встречается 3 раза, т.е. $n_{11} = 3$, а частота появления величины $y_1 = 5$ находится как сумма $n_{y_1} = 3 + 2 = 5$.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k_1} n_{x_i} = \sum_{j=1}^{k_2} n_{y_j} = n$.

Для *коэффициента корреляции* случайных величин X и Y в случае сгруппированных данных используется выражение

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} x_i \widetilde{U}_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_{x\text{в}}\sigma_{y\text{в}}} = \frac{\sum_{j=1}^{k_2} y_j \widetilde{V}_j - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_{x\text{в}}\sigma_{y\text{в}}},$$

где

$$\widetilde{U}_i = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} y_j, \qquad \widetilde{V}_j = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij} x_i.$$

После подсчета $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\sigma_{x\text{в}}$, $\sigma_{y\text{в}}$ и $r_{\text{в}}$ получают выборочное уравнение линейной регрессии Y на X в виде

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\sigma_{y\text{в}}}{\sigma_{x\text{в}}} r_{\text{в}}(x - \bar{x})$$

или выборочное уравнение линейной регрессии X на Y в виде

$$\bar{x}_y - \bar{x} = \frac{\sigma_{x\text{в}}}{\sigma_{y\text{в}}} r_{\text{в}}(y - \bar{y}).$$

Для упрощения расчетов часто используются *условные варианты*, которые подсчитываются по формулам

$$u_i = (x_i - C_1)/h_1, \qquad v_j = (y_j - C_2)/h_2,$$

где C_1, C_2 — ложные нули (выбираемые значения);

h_1, h_2 — разности между соседними значениями X и Y.

Соответственно, для обратного перехода применяются выражения

$$\begin{aligned} x_i &= h_1 u_i + C_1, & y_j &= h_2 v_j + C_2, \\ \bar{x} &= h_1 \bar{u} + C_1, & \bar{y} &= h_2 \bar{v} + C_2, \\ \sigma_{x\text{в}} &= h_1 \sigma_u, & \sigma_{y\text{в}} &= h_2 \sigma_v, \end{aligned}$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$ — средние значения условных вариант;

σ_u, σ_v — средние квадратичные отклонения условных вариант.

Для подсчета выборочного коэффициента корреляции в этом случае используется формула

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} u_i U_i - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{\sum_{j=1}^{k_2} v_j V_j - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

где

$$U_i = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} v_j, \qquad V_j = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij} u_i.$$

Подсчитав выборочный коэффициент корреляции через условные варианты и осуществив переход к условным переменным, получают соответствующие уравнения регрессии.

26.5. Найти выборочное уравнение линейной регрессии X на Y на основании корреляционной таблицы

$y_j \backslash x_i$	15	20	25	30	35	40
100	2	1	—	7	—	—
120	4	—	2	—	—	3
140	—	5	—	10	5	2
160	—	—	3	1	2	3

Решение. Для упрощения расчетов введем условные варианты

$$u_i = (x_i - 30)/5, \qquad v_j = (y_j - 120)/20$$

и составим преобразованную корреляционную таблицу с условными вариантами, в которую внесем значения n_{u_i} и n_{v_j}:

$v_j \backslash u_i$	−3	−2	−1	0	1	2	n_{v_j}
−1	2	1	—	7	—	—	10
0	4	—	2	—	—	3	9
1	—	5	—	10	5	2	22
2	—	—	3	1	2	3	9
n_{u_i}	6	6	5	18	7	8	$n = 50$

Затем составим новую таблицу, в которую внесем посчитанные значения $n_{ij}U_i$ в правый верхний угол заполненной клетки и $n_{ij}V_j$ в левый нижний угол, после чего суммируем верхние значения по строкам для получения значений V_j и нижние значения по столбцам для U_i и подсчитаем величины u_iU_i и v_jV_j (табл. 26.1).

Таблица 26.1

v_j \ u_i	−3	−2	−1	0	1	2	V_j	v_jV_j
−1	−6 2 −2	−2 1 −1	—	0 7 −7	—	—	−8	8
0	−12 4 0	—	−2 2 0	—	—	6 3 0	−8	0
1	—	−10 5 5	—	0 10 10	5 5 5	4 2 2	−1	−1
2	—	—	−3 3 6	0 1 2	2 2 4	6 3 6	5	10
U_i	−2	4	6	5	9	8	—	$\Sigma = 17$
u_iU_i	6	−8	−6	0	9	16	$\Sigma = 17$	—

Подсчитываем суммы $\sum_{i=1}^{k_1} u_iU_i$ и $\sum_{j=1}^{k_2} v_jV_j$. Параллельный подсчет этих сумм осуществляется для контроля правильности расчетов. В данном случае

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_iU_i = \sum_{j=1}^{k_2} v_jV_j = 17.$$

Находим $\bar{u}$, $\bar{v}$:

$$\bar{u} = (-3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8)/50 = -0{,}24;$$

$$\bar{v} = (-1 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 2 \cdot 9)/50 = 0{,}6.$$

Находим $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = (9 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 8)/50 = 2{,}44;$$

$$\overline{v^2} = (1 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 4 \cdot 9)/50 = 1{,}36.$$

Определяем σ_u, σ_v:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{2{,}44 - (-0{,}24)^2} = 1{,}54;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{1{,}36 - (0{,}6)^2} = 1.$$

Вычисляем выборочный коэффициент корреляции $r_в$:

$$r_в = (17 - 50 \cdot (-0{,}24) \cdot 0{,}6)/(50 \cdot 1{,}54 \cdot 1) = 0{,}314.$$

Осуществим переход к исходным вариантам:

$$\bar{x} = h_1\bar{u} + C_1 = 5 \cdot (-0{,}24) + 30 = 28{,}8,$$

$$\bar{y} = h_2\bar{v} + C_2 = 20 \cdot 0{,}6 + 120 = 132,$$

$$\sigma_{x\text{в}} = h_1\sigma_u = 5 \cdot 1{,}54 = 7{,}7,$$

$$\sigma_{y\text{в}} = h_2\sigma_v = 20 \cdot 1 = 20.$$

Находим уравнение регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y - 28{,}8 = \frac{7{,}7 \cdot 0{,}314}{20}(y - 132) \quad \text{или} \quad \bar{x}_y = 0{,}12y + 12{,}8.$$

26.6. Найти уравнение регрессии X на Y по данным

y_j \ x_i	10	15	20	25	30	35
15	6	4	—	—	—	—
25	—	6	8	—	—	—
35	—	—	—	21	2	5
45	—	—	—	4	12	6
55	—	—	—	—	1	5

26.7. Найти уравнение регрессии Y на X по данным

y_j \ x_i	5	10	15	20	25	30
14	4	6	—	8	—	4
24	—	8	10	—	6	—
34	—	—	32	—	—	—
44	—	—	4	12	6	—

26.8. Найти уравнение регрессии X на Y по данным

y_j \ x_i	10	15	20	25	30	35	40
100	2	4	—	8	4	—	10
110	3	—	5	—	2	10	—
120	—	3	—	4	5	6	—
130	2	—	4	6	—	—	5
140	—	4	7	—	—	1	5

27. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионным анализом называется статистический метод анализа результатов испытаний, цель которого — оценить влияние одного или нескольких качественных факторов на рассматриваемую величину X.

Схема однофакторного дисперсионного анализа рассмотрена ниже на примере исследования влияния различных видов рекламы на прибыль предприятия.

Если разделить виды рекламы на несколько групп (уровней фактора) и через одинаковые интервалы времени измерять прибыль, то результаты можно представить в виде таблицы:

Номер измерения	Уровни фактора			
	Φ_1	Φ_2	$\dots$	Φ_p
1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2p}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
q	x_{q1}	x_{q2}	$\dots$	x_{qp}
Групповая средняя	$\bar{x}_{\text{г}1}$	$\bar{x}_{\text{г}2}$	$\dots$	$\bar{x}_{\text{г}p}$

Число измерений на каждом уровне считаем одинаковым и равным q. В последней строке помещены групповые средние для каждого уровня фактора.

Общую среднюю можно получить как среднее арифметическое групповых средних:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{p} \bar{x}_{\text{г}j}/p.$$

На разброс прибыли относительно общей средней влияют как изменения уровня рассматриваемого фактора, так и случайные факторы. Для того чтобы учесть влияние данного фактора, общая выборочная дисперсия разбивается на две части, первая из которых называется *факторной* ($s^2_{\text{ф}}$), а вторая — *остаточной* ($s^2_{\text{ост}}$).

С целью учета этих составляющих вначале рассчитываются общая сумма квадратов отклонений вариант от общей средней

$$R_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2 \qquad (27.1)$$

и факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая и характеризует влияние данного фактора,

$$R_ф = q \sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_{гj} - \bar{x})^2. \tag{27.2}$$

Последнее выражение получено путем замены каждой варианты в выражении $R_{общ}$ групповой средней для данного фактора.

Остаточная сумма квадратов отклонений получается как разность

$$R_{ост} = R_{общ} - R_ф.$$

Для определения общей выборочной дисперсии необходимо $R_{общ}$ разделить на число измерений pq:

$$d_{общ} = \frac{R_{общ}}{pq},$$

а для получения несмещенной общей выборочной дисперсии это выражение нужно умножить на $pq/(pq - 1)$:

$$s^2_{общ} = \frac{R_{общ}}{pq - 1},$$

где $pq - 1$ — число степеней свободы несмещенной общей выборочной дисперсии.

Соответственно, для несмещенной факторной выборочной дисперсии

$$s^2_ф = \frac{R_ф}{p - 1},$$

где $p - 1$ — число степеней свободы несмещенной факторной выборочной дисперсии.

Для несмещенной остаточной выборочной дисперсии число степеней свободы будет равно разности

$$pq - 1 - (p - 1) = p(q - 1),$$

и выражение дисперсии примет вид

$$s^2_{ост} = \frac{R_{ост}}{p(q - 1)}.$$

С целью оценки влияния фактора на изменения рассматриваемого параметра рассчитывается величина

$$f_{набл} = \frac{s^2_ф}{s^2_{ост}}.$$

Так как отношение двух выборочных дисперсий $S^2_ф$ и $S^2_{ост}$ распределено по закону Фишера — Снедекора, то полученное значение $f_{набл}$

сравнивают со значением функции распределения $F = S_{ф}^2 / S_{ост}^2$ в критической точке $f_{кр}$, соответствующей выбранному уровню значимости α (см. Приложение 5). Если $f_{набл} > f_{кр}$, то фактор оказывает существенное воздействие и его следует учитывать, в противном случае он оказывает незначительное влияние, которым можно пренебречь.

Для расчета $R_{общ}$ и $R_{ф}$ могут быть использованы также формулы

$$R_{общ} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2 - pq(\bar{x})^2, \tag{27.3}$$

$$R_{ф} = q\left[\sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_{гj})^2 - p(\bar{x})^2\right]. \tag{27.4}$$

27.1. Для проверки влияния внутрицехового оформления на качество продукции рассмотрены три участка по производству однотипной продукции и проведена выборочная проверка процента брака за пять месяцев. Результаты помещены в табл. 27.1.

Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о существенном влиянии оформления участка на качество продукции.

Таблица 27.1

Номер измерения	Уровни фактора		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	2	3	1
2	4	5	4
3	3	4	5
4	2	3	10
5	1	6	3
Групповая средняя	2,4	4,2	4,6

Решение. Находим общую среднюю:

$$\bar{x} = (2{,}4 + 4{,}2 + 4{,}6)/3 = 3{,}73.$$

Для расчета $R_{общ}$ по формуле (27.3) составляем таблицу квадратов вариант:

Номер измерения	Уровни фактора		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	4	9	1
2	16	25	16
3	9	16	25
4	4	9	100
5	1	36	9
$\sum$	34	95	151

Вычисляем $R_{общ}$:

$$R_{общ} = 34 + 95 + 151 - 3 \cdot 5 \cdot 3{,}73^2 = 71{,}3.$$

Находим $R_ф$ по формуле (27.4)

$$R_ф = 5(2{,}4^2 + 4{,}2^2 + 4{,}6^2 - 3 \cdot 3{,}73^2) = 14{,}1.$$

Получаем $R_{ост}$:

$$R_{ост} = R_{общ} - R_ф = 71{,}3 - 14{,}1 = 57{,}2.$$

Определяем факторную и остаточную дисперсии:

$$s_ф^2 = \frac{R_ф}{p-1} = 14{,}1/2 = 7{,}05;$$

$$s_{ост}^2 = \frac{R_{ост}}{p(q-1)} = 57{,}2/12 = 4{,}77.$$

Находим $f_{набл} = 7{,}05/4{,}77 = 1{,}48$.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, чисел степеней свободы 2 и 12 находим $f_{кр}$ из таблицы распределения Фишера — Снедекора (см. Приложение 5):

$$f_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 12) = 3{,}89.$$

В связи с тем, что $f_{набл} < f_{кр}$, нулевую гипотезу о существенном влиянии внутрицехового оформления на процент брака отвергаем.

27.2. В условиях задачи 27.1, но с другими выборочными значениями процента брака (табл. 27.2) оценить влияние внутрицехового оформления на качество продукции.

Таблица 27.2

Номер измерения	Уровни фактора		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	2	5	7
2	3	4	8
3	4	4	8
4	2	5	7
5	3	5	8

27.3. Проведено по пять испытаний на каждом из четырех уровней фактора Φ. Результаты испытаний приведены в табл. 27.3.

Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних.

Таблица 27.3

Номер измерения	Уровни фактора			
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	79	65

27.4. В трех филиалах одного из банков были организованы три уровня различных услуг для клиентов. После этого в течение шести месяцев измерялись объемы вкладов X (тыс. руб.). Данные приведены в табл. 27.4. Проверить нулевую гипотезу о влиянии организации услуг на объемы вкладов при уровне значимости 0,05.

Таблица 27.4

Номер измерения	Уровни фактора		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	10	17	14
2	15	15	18
3	14	25	30
4	18	22	27
5	20	30	34
6	16	28	40

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Задания

1. Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным (табл. 1), где m_i — частота попадания вариант в промежуток $(x_i, x_{i+1}]$,

2. Найти несмещенную выборочную дисперсию на основании данного распределения выборки (табл. 2).

3. Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение a_0 является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при 5%-м уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки объема $n = 10$ получено выборочное среднее $\bar{x}$, а несмещенное среднее квадратичное отклонение равно s (табл. 3).

4. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе выборочных данных (табл. 4) при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

5. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы (табл. 5).

6. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании пяти измерений для трех уровней фактора $\Phi_1 - \Phi_3$ (табл. 6).

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i	Вариант	i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
1	1	2—4	5	16	1	10—12	4
	2	4—6	8		2	12—14	12
	3	6—8	16		3	14—16	8
	4	8—10	12		4	16—18	8
	5	10—12	9		5	18—20	18
2	1	3—7	4	17	1	3—7	6
	2	7—11	6		2	7—11	8
	3	11—15	9		3	11—15	10
	4	15—19	10		4	15—19	12
	5	19—23	11		5	19—23	4

Вариант	i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i	Вариант	i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
3	1	−6 ÷ −2	2	18	1	5—7	4
	2	−2—2	8		2	7—9	14
	3	2—6	14		3	9—11	12
	4	6—10	6		4	11—13	8
	5	10—14	10		5	13—15	2
4	1	4—8	5	19	1	11—14	3
	2	8—12	7		2	14—17	8
	3	12—16	10		3	17—20	14
	4	16—20	12		4	20—23	15
	5	20—24	6		5	23—26	10
5	1	7—9	5	20	1	2—5	6
	2	9—11	4		2	5—8	24
	3	11—13	8		3	8—11	13
	4	13—15	12		4	11—14	1
	5	15—17	11		5	14—17	6
6	1	5—8	5	21	1	10—14	5
	2	8—11	7		2	14—18	14
	3	11—14	4		3	18—22	26
	4	14—17	1		4	22—26	9
	5	17—20	3		5	26—30	6
7	1	4—6	3	22	1	5—10	3
	2	6—8	9		2	10—15	9
	3	8—10	7		3	15—20	18
	4	10—12	22		4	20—25	14
	5	12—14	9		5	25—30	16
8	1	1—5	4	23	1	10—20	12
	2	5—9	5		2	20—30	17
	3	9—13	9		3	30—40	46
	4	13—17	10		4	40—50	12
	5	17—21	2		5	50—60	13
9	1	10—14	3	24	1	15—30	8
	2	14—18	16		2	30—45	16
	3	18—22	8		3	45—60	12
	4	22—26	7		4	60—75	4
	5	26—30	6		5	75—90	10
10	1	20—22	4	25	1	20—40	8
	2	22—24	6		2	40—60	14
	3	24—26	10		3	60—80	10
	4	26—28	4		4	80—100	9
	5	28—30	6		5	100—120	19

Вариант	i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i	Вариант	i	$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	m_i
11	1	2—6	5	26	1	4—10	4
	2	6—10	3		2	10—16	5
	3	10—14	18		3	16—22	12
	4	14—18	9		4	22—28	14
	5	18—22	5		5	28—34	5
12	1	14—16	3	27	1	12—16	7
	2	16—18	12		2	16—20	15
	3	18—20	10		3	20—24	13
	4	20—22	15		4	24—28	8
	5	22—24	10		5	28—32	7
13	1	5—10	2	28	1	8—10	5
	2	10—15	14		2	10—12	16
	3	15—20	11		3	12—14	11
	4	20—25	9		4	14—16	8
	5	25—30	4		5	16—18	10
14	1	3—5	1	29	1	100—110	7
	2	5—7	6		2	110—120	16
	3	7—9	14		3	120—130	12
	4	9—11	7		4	130—140	11
	5	11—13	2		5	140—150	4
15	1	4—9	5	30	1	100—120	10
	2	9—14	9		2	120—140	34
	3	14—19	13		3	140—160	25
	4	19—24	6		4	160—180	21
	5	24—29	7		5	180—200	10

Таблица 2. **Варианты задания 2**

Вариант	Распределение					Вариант	Распределение				
1	x_i	−6	−2	3	6	16	x_i	−3	1	4	8
	n_i	12	14	16	8		n_i	2	3	1	4
2	x_i	−10	−5	−1	4	17	x_i	16	20	22	30
	n_i	25	44	16	15		n_i	14	26	17	3
3	x_i	4	8	16	24	18	x_i	38	42	46	
	n_i	31	14	28	27		n_i	52	36	12	
4	x_i	430	450	500		19	x_i	15	26	31	
	n_i	20	18	12			n_i	426	318	256	
5	x_i	0,01	0,04	0,08	0,14	20	x_i	4	8	10	14
	n_i	19	28	31	22		n_i	12	24	38	26

Окончание табл. 2

Вариант	Распределение					Вариант		Распределение			
6	x_i	2	6	8	9	21	x_i	30	32	37	
	n_i	20	13	12	5		n_i	41	28	31	
7	x_i	10	14	16	22	22	x_i	0,1	0,3	0,5	
	n_i	13	24	14	9		n_i	16	21	13	
8	x_i	3	6	8	14	23	x_i	0,02	0,05	0,08	
	n_i	8	14	10	18		n_i	32	29	39	
9	x_i	0,2	0,3	0,5	0,6	24	x_i	10	16	26	
	n_i	16	11	10	13		n_i	14	18	18	
10	x_i	3150	3170	3200		25	x_i	−3	−1	5	7
	n_i	14	6	20			n_i	15	11	25	19
11	x_i	−4	−1	2	8	26	x_i	6	9	11	14
	n_i	16	8	14	12		n_i	21	32	23	24
12	x_i	47	50	52	56	27	x_i	246	250	257	
	n_i	24	16	23	17		n_i	24	12	14	
13	x_i	−6	−2	2	5	28	x_i	421	428	432	
	n_i	11	13	14	12		n_i	32	44	24	
14	x_i	14	15	18	20	29	x_i	15	18	23	24
	n_i	15	12	11	12		n_i	13	5	14	8
15	x_i	381	385	389		30	x_i	44	48	52	
	n_i	54	22	24			n_i	29	46	25	

Таблица 3. **Варианты задания 3**

Вариант	a_0	$\bar{x}$	s	Вариант	a_0	$\bar{x}$	s
1	10	12	1	16	100	96	6
2	20	22	4	17	80	78	4
3	20	18	2	18	80	84	3
4	40	44	3	19	50	48	2
5	58	56	4	20	60	54	2
6	60	64	6	21	90	96	5
7	70	66	8	22	80	86	4
8	70	72	5	23	70	68	5
9	50	48	2	24	70	74	6
10	30	34	4	25	60	62	3
11	50	52	3	26	42	46	2
12	90	88	6	27	60	62	3
13	86	84	5	28	30	34	2
14	80	78	4	29	40	38	4
15	60	66	5	30	84	80	6

Таблица 4. **Варианты задания 4**

Вариант	X		Y		Вариант	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i		x_i	n_i	y_i	m_i
1	142	3	140	5	16	42	15	84	3
	145	1	146	3		45	17	87	2
	146	2	147	2		46	12	92	4
	148	4	151	2		50	16	96	1
2	37	2	38	4	17	30	4	30	6
	38	1	39	3		32	5	31	4
	40	4	40	2		33	8	32	3
	41	3	41	2		34	1	34	5
	42	6	43	3		36	2	35	2
3	39	4	75	4	18	42	4	44	16
	43	2	80	2		44	8	45	12
	45	3	84	3		48	3	46	11
	47	4	91	4		50	5	51	6
	51	2	94	2		53	10	55	5
4	3,5	1	3,6	3	19	31	7	29	8
	3,7	3	3,7	5		35	3	32	9
	3,9	5	3,8	2		40	4	33	12
	4,0	4	4,4	1		42	2	35	10
	4,1	4	4,2	4		44	4	39	11
5	9	4	9	5	20	61	5	60	4
	10	5	10	6		62	4	63	3
	11	3	11	4		64	6	64	2
	12	2	13	8		67	2	68	6
	14	1	14	3		68	3	70	5
6	6,1	2	5,8	6	21	12	10	14	7
	6,5	3	6,0	4		16	12	15	6
	6,6	1	6,2	5		19	14	20	8
	7,0	4	6,3	2		21	9	21	10
	7,4	2	6,8	3		25	5	24	9
7	20	3	18	6	22	44	5	43	3
	22	4	19	3		45	2	46	3
	23	2	20	4		48	3	48	4
	24	2	22	2		52	4	50	4
	26	4	23	5		54	6	53	6

Окончание табл. 4

Вариант	X		Y		Вариант	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i		x_i	n_i	y_i	m_i
8	0,2	6	0,4	3	23	16	12	18	3
	0,4	4	0,5	5		18	10	25	1
	0,8	2	0,9	6		21	14	29	4
	1,0	5	1,2	6		24	8	36	6
	1,2	3	1,4	6		25	6	40	6
9	31	6	85	1	24	71	4	68	10
	33	2	88	3		73	5	69	14
	34	1	95	4		75	8	70	13
	38	3	97	2		79	10	74	12
	42	2	100	5		80	3	78	11
10	15	1	20	4	25	70	12	16	7
	17	3	22	2		72	10	18	4
	20	2	23	2		73	12	21	8
	21	4	25	3		75	8	25	5
	25	6	26	1		78	8	28	6
11	27	3	28	8	26	10	10	9	5
	29	9	29	9		11	14	10	3
	32	6	30	4		13	12	12	4
	33	2	32	9		14	14	13	8
12	82	2	−10	14	27	6	1	6,5	2
	83	1	−9	18		7	8	7,4	5
	85	3	−6	12		9	7	8,2	3
	90	4	−3	6		10	2	9,1	7
13	51	6	15	7	28	10	7	9	9
	53	5	18	5		11	5	11	12
	55	4	20	4		12	4	12	14
	56	3	23	3		14	6	14	9
	59	2	27	6		16	8	15	6
14	12	2	44	4	29	12,1	1	12,2	4
	15	5	46	5		12,5	2	12,4	8
	18	3	47	8		12,7	4	12,5	3
	19	1	50	6		13,0	1	12,7	2
	23	4	52	7		13,2	2	13,0	8
15	−8	3	10	4	30	23	8	30	7
	−5	2	14	10		25	7	35	8
	−3	4	15	9		26	6	41	2
	1	5	18	7		28	9	46	3
	3	4	21	4					
	4	2	25	6					

Таблица 5. **Варианты задания 5**

Вариант 1

Y \ X	10	15	20	25	30	35
15	6	4				
25		6	8			
35				21	2	5
45				4	12	6
55					1	5

Вариант 2

Y \ X	20	25	30	35	40	45
10		4	8			4
20	2		4		2	
30			10	8		
40		4		10	4	

Вариант 3

Y \ X	5	10	15	20	25	30
14	4	6		8		4
24		8	10		6	
34			32			
44			4	12	6	

Вариант 4

Y \ X	15	20	25	30	35	40
100	2	1		7		
120	4		2			3
140		5		10	5	2
160			3	1	2	3

Вариант 5

Y \ X	20	25	30	35	40	45
105			4	2	1	
115	2	1		3	8	5
125		4	2	1		3
135	3	2	10		3	2
145	1	3		8		2

Вариант 6

Y \ X	10	15	20	25	30	35
15	6	4				
25		6	8			
35				20	2	5
45				5	12	6
55					1	5

Вариант 16

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
100	2	4		8	4		10
110	3		5		2	10	
120		3		4	5	6	
130	2		4	6			5
140		4	7			1	5

Вариант 17

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
15	10		4	8		4	2
25		10	2		5		3
35		6	5	4		3	
45	5			6	4		2
55	5	1			7	4	

Вариант 18

Y \ X	10	15	20	25	30	35
10	2	4		8	4	10
30		4	7		5	1
50	3	2	5	10		
70	2		4	6	5	
90		3	5	6		4

Вариант 19

Y \ X	10	12	14	16	18	20	22
20		2	6	5			4
40	4			5	1		7
60	4	2	8	10		4	
80		3			10	2	5
100	3		4		6	5	

Вариант 20

Y \ X	5	10	15	20	25	30
80	5	1		4	7	
100		2	6	5		4
120	3		4		5	6
140		10		2	3	5
160	10		4	8	2	4

Вариант 21

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
10	1		5		7	4	
20		2		4	6		5
30		3		5		4	6
40	10		2	3		5	
50	2		4		4	8	10

Вариант	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
7	30		6		4		2	5
	40	4		5		7	1	
	50		4	3	5			6
	60	5	3			10	2	
	70			4	10	4	2	8

Вариант	Y \ X	12	17	22	27	32	37
8	105		4		3		
	115	2	3	1		10	
	125	3		5	1		4
	135				8	2	1
	145	1	2				

Вариант	Y \ X	10	15	20	25	30	35
9	14			4	2	1	
	24	2	1		3	8	5
	34		4	2	1		3
	44	3	2	10		3	2
	54	1	3		9		1

Вариант	Y \ X	10	15	20	25	30	35
10	20	1	5		7		4
	40	2		4		6	5
	60		3	5	4	6	
	80	10		2	3		5
	100	2	4		4	8	10

Вариант	Y \ X	5	10	15	20	25	30
11	15		6	4	2		2
	25	4	2	8	1	5	
	35				10	7	1
	45	5	3	8		6	7
	55	9	5		4		1

Вариант	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
12	5	10		3	5		1	4
	15		4	10		2	8	
	25	3	4		6			6
	35				4	7	1	5
	45	2	5			10		

Вариант	Y \ X	30	40	50	60	70	80	90
22	20		6		4		2	5
	30	4		5		7	1	6
	40		4	3	5	10		
	50	5	3			4	2	8
	60			4	10		2	

Вариант	Y \ X	24	28	32	36	40	44	48
23	10		6		4		2	5
	20	4		5		7	1	
	30		4	3	5			6
	40	5	3			10	2	
	50			4	10	4	2	8

Вариант	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
24	5	10		3	5		1	4
	15		4	10		2	8	
	25	3	4		6			6
	35				4	7	1	5
	45	2	5			10		

Вариант	Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
25	15	2		4	6	5		
	30		4	7			1	5
	45	3			4	5	6	
	60	3	5		2			10
	75		4	2		4	10	8

Вариант	Y \ X	20	22	24	26	28	30	32
26	30		6		4		2	5
	40	4		5		7	1	
	50		4	3	5			6
	60	5	3			10	2	
	70		4	10	4	2	8	

Вариант	Y \ X	5	10	15	20	25	30
27	100		6	4	2		2
	110	4	2	8	1	5	
	120				10	7	1
	130	5	3	8		6	7
	140	9	5		4		1

Окончание табл. 5

Вариант 13 — Корреляционная таблица

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
10	2		4	6	5		
20		4	7			1	5
30	3			4	5	6	
40	3	5		2			10
50		4	2		4	10	8

Вариант 14 — Корреляционная таблица

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
30		6		4		2	5
40	4		5		7	1	
50		4	3	5			6
60	5	3			10	2	
70			4	10	4	2	8

Вариант 15 — Корреляционная таблица

Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
30		4	7			1	5
50	2		4	6	5		
70		3		4	5	6	
90	10		2			5	3
110	2	4		8	4		10

Вариант 28 — Корреляционная таблица

Y \ X	20	25	30	35	40	45
30		6		4		2
40	4	1	5		7	
50	3		4	5		6
60	5	3		10	2	
70		2	3		3	5

Вариант 29 — Корреляционная таблица

Y \ X	10	15	20	25	30	35
36		4		3		
46	2	3	1		10	
56	3		5	1		4
66				8	2	1
76	1	2				

Вариант 30 — Корреляционная таблица

Y \ X	42	46	50	54	58	62
15			4	2	1	
25	2	1		3	8	5
35		4	2	1		3
45	3	2	10		3	2
55	1	3		9		1

Таблица 6. **Варианты задания 6**

Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	1	24	18	22	16	1	8	18	34
	2	16	14	15		2	12	23	36
	3	12	10	16		3	11	22	32
	4	5	4	12		4	10	20	30
	5	6	16	8		5	14	21	33
2	1	10	14	12	17	1	21	35	69
	2	8	5	9		2	45	30	54
	3	7	14	10		3	18	38	40
	4	18	4	7		4	16	18	12
	5	6	12	8		5	40	34	36
3	1	16	9	14	18	1	12	34	18
	2	10	8	16		2	10	32	21
	3	20	9	12		3	11	30	22
	4	25	7	16		4	10	33	20
	5	24	5	14		5	16	31	28

Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
4	1	34	38	28	19	1	8	15	24
	2	36	30	24		2	16	24	34
	3	26	34	22		3	40	42	18
	4	25	36	20		4	12	25	9
	5	30	38	23		5	32	30	14
5	1	48	40	34	20	1	124	64	34
	2	38	42	38		2	136	54	30
	3	30	37	44		3	120	44	28
	4	40	33	41		4	133	56	33
	5	36	39	45		5	125	59	31
6	1	12	10	20	21	1	17	26	45
	2	16	8	26		2	40	16	12
	3	15	7	28		3	16	17	40
	4	17	5	24		4	36	30	17
	5	14	9	27		5	30	12	44
7	1	44	40	38	22	1	45	36	44
	2	45	36	28		2	44	30	28
	3	48	32	30		3	40	31	15
	4	45	35	32		4	41	38	40
	5	40	30	26		5	39	35	32
8	1	16	18	26	23	1	12	24	20
	2	12	20	15		2	16	20	18
	3	10	22	28		3	14	34	14
	4	11	25	30		4	15	26	20
	5	10	24	26		5	13	28	19
9	1	9	4	12	24	1	24	32	30
	2	11	6	18		2	28	42	16
	3	10	5	24		3	40	30	9
	4	12	6	20		4	56	18	16
	5	9	5	23		5	24	24	10
10	1	54	32	16	25	1	108	244	326
	2	50	46	36		2	124	234	304
	3	43	28	30		3	110	254	298
	4	47	37	25		4	126	245	318
	5	36	28	17		5	114	236	312

Окончание табл. 6

Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
11	1	28	36	12	26	1	24	46	68
	2	24	34	10		2	26	45	76
	3	26	30	14		3	25	44	75
	4	27	29	18		4	27	40	68
	5	25	31	20		5	22	43	77
12	1	26	34	68	27	1	12	22	21
	2	45	30	46		2	14	20	30
	3	44	46	28		3	36	18	12
	4	27	17	34		4	20	9	31
	5	42	36	30		5	53	44	30
13	1	18	24	36	28	1	34	102	68
	2	28	36	12		2	35	98	60
	3	12	28	22		3	30	106	56
	4	14	40	45		4	33	112	57
	5	32	16	40		5	32	110	55
14	1	47	56	64	29	1	25	45	56
	2	46	55	60		2	64	24	54
	3	45	54	58		3	30	12	16
	4	41	50	62		4	20	47	32
	5	43	52	61		5	46	18	42
15	1	16	28	46	30	1	24	34	45
	2	20	12	43		2	26	30	47
	3	31	40	24		3	25	31	44
	4	56	24	14		4	27	29	42
	5	22	34	6		5	28	32	43

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

28. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математической моделью экономической задачи называется совокупность математических соотношений, описывающих рассматриваемый экономический процесс.

Для составления математической модели необходимо: 1) выбрать переменные задачи; 2) составить систему ограничений; 3) задать целевую функцию.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Системой ограничений задачи называется совокупность уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических условий, например условия положительности переменных. В общем случае они имеют вид

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \ldots, l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant (\geqslant)\, 0, & i = l+1, l+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Целевой функцией называют функцию $Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти переменные задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\,(\min) \tag{28.1}$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \ldots, l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant (\geqslant)\, 0, & i = l+1, l+2, \ldots, m. \end{cases} \tag{28.2}$$

Если целевая функция (28.1) и система ограничений (28.2) линейны, то задача математического программирования называется *задачей линейного программирования.*

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности. Множество допустимых решений задачи образует *область допустимых решений.*

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

28.1. Примеры составления математических моделей экономических задач

28.1 (задача использования ресурсов). При производстве n видов продукции используется m видов ресурсов. Известно: $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — запасы ресурсов; a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — расход каждого i-го вида ресурса на изготовление единицы j-й продукции; c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — прибыль, получаемая при реализации единицы j-й продукции. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение. Обозначим вектор переменных задачи $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — объем выпуска j-й продукции. Учитывая, что c_jx_j — прибыль от реализации всего объема j-й продукции, $a_{ij}x_j$ — затраты i-го вида ресурса на весь объем выпуска j-й продукции, запишем математическую модель задачи. Кроме того, необходимо учитывать неотрицательность переменных задачи, так как объем выпуска продукции не может быть отрицательным. Таким образом, математическая модель имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

28.2 (задача о составлении рациона питания). Животные должны получать ежедневно m питательных веществ в количестве не менее $b_1, b_2, \ldots, b_m$. В рацион животных входят корма n видов. Известно: a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — содержание i-го питательного вещества в единице j-го вида корма; c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — стоимость единицы j-го вида корма. Составить суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальные затраты.

Решение. Введем переменные задачи $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — объем j-го вида корма, входящего в суточный рацион. Так как $a_{ij}x_j$ — количество i-го питательного вещества, содержащегося в j-м виде корма, входящего в суточный рацион, c_jx_j — стоимость j-го корма, то математическая модель имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Составить математические модели следующих задач:

28.3. При производстве двух видов продукции используются три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли. Исходные данные таковы:

а)

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
	№ 1	№ 2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Прибыль	40	50

б)

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
	№ 1	№ 2
30	1	3
48	4	3
60	3	3
Прибыль	70	60

28.4. В рационе животных используется два вида кормов. Животные должны получать три вида веществ. Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты. Исходные данные таковы:

а)

Необходимое количество питательного вещества	Содержание питательного вещества в единице корма	
	№ 1	№ 2
15	5	1
12	2	1
7	1	1
Стоимость единицы корма	40	30

б)

Необходимое количество питательного вещества	Содержание питательного вещества в единице корма	
	№ 1	№ 2
12	2	1
10	1	1
24	2	3
Стоимость единицы корма	60	60

28.2. Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме

Каноническая задача линейного программирования имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to (\max)\ \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Она отличается от других задач тем, что ее система ограничений является системой уравнений и все переменные неотрицательные.

При необходимости перехода от неравенства к уравнению вводят дополнительные переменные. Неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$ заменяется уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ и условием неотрицательности дополнительной переменной $x_{n+1} \geqslant 0$, а неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i$ — уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$ и условием неотрицательности $x_{n+1} \geqslant 0$. Дополнительные переменные вводят в целевую функцию с коэффициентом, равным нулю.

Любая переменная x_j, на которую не наложено условие неотрицательности, заменяется разностью двух других неотрицательных переменных $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' \geqslant 0$, $x_j'' \geqslant 0$.

В канонической задаче целевая функция может как минимизироваться, так и максимизироваться. Для того чтобы перейти от нахождения максимума к нахождению минимума или наоборот, достаточно изменить знаки коэффициентов целевой функции. Полученная в результате этого задача и исходная задача имеют одно и то же оптимальное решение, а значения целевых функций на этом решении отличаются только знаком.

При решении некоторых задач возникает необходимость перехода от канонической задачи к *симметричной*, которая в матричной записи имеет вид

$$Z(X) = CX \to \max, \qquad AX \leqslant A_0, \quad X \geqslant \theta$$

или

$$Z(X) = CX \to \min, \qquad AX \geqslant A_0, \quad X \geqslant \theta,$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

28.5. Привести к каноническому виду задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad Д \\ \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 5, \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ +x_4 \\ -x_5 \end{array}\right. \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Перейдем к задаче на отыскание максимума целевой функции. Для этого изменим знаки коэффициентов целевой функции. В целях превращения в уравнения второго и третьего неравенств системы ограничений введем неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5 (на математической модели эта операция отмечена буквой Д). Переменная x_4 вводится в левую часть второго неравенства со знаком «+», так как неравенство имеет вид «$\leqslant$». Переменная x_5 вводится в левую часть третьего неравенства со знаком «−», так как неравенство имеет вид «$\geqslant$». В целевую функцию переменные x_4, x_5 вводятся с коэффициентом, равным нулю. Переменную x_1, на которую не наложено условие неотрицательности, заменяем разностью $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1' \geqslant 0$, $x_1'' \geqslant 0$. Записываем задачу в каноническом виде:

$$Z(X) = -3x_1' + 3x_1'' - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1' - x_1'' - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1' - 2x_1'' + x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \end{array}\right.$$

$$x_1' \geqslant 0, \quad x_1'' \geqslant 0, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 2, 3, 4, 5.$$

28.6. Привести к симметричному виду задачу линейного программирования

$$Z(X) = 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6, \\ -7x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Методом Жордана—Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной. Одновременно разрешенные неизвестные исключим из целевой функции. Для этого в таблице решения задачи (табл. 28.1) наряду с коэффициентами уравнений системы ограничений в дополнительной строке запишем коэффициенты целевой функции. В последнем столбце дополнительной строки (на месте правой части уравнения) запишем свободный член целевой функции, равный нулю. При вычислениях учитываем, что разрешающий элемент в последней строке (в целевой функции) выбирать нельзя.

Таблица 28.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	3	−2	$\boxed{1}$	4	6	×(−3) ×(−1)
	−7	10	3	−4	2	
Целевая функция	4	−5	1	2	0	
	3	−2	1	4	6	
	−16	16	0	−16	−16	$\times {}^1/_{16}$
	1	−3	0	−2	−6	
	3	−2	1	4	6	
	−1	$\boxed{1}$	0	−1	−1	×2 ×3
	1	−3	0	−2	−6	
	1	0	1	2	4	
	−1	1	0	−1	−1	
	−2	0	0	−5	−9	

Число −9, полученное в последнем столбце последней строки таблицы, необходимо записать в целевую функцию с противоположным знаком. В результате данных преобразований задача принимает следующий вид:

$$Z(X) = -2x_1 \qquad\qquad - 5x_4 + 9 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 = \ \ 4, \\ -x_1 + x_2 \qquad - \ \ x_4 = -1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Так как переменные x_2, x_3 неотрицательные, отбросив их, можно записать задачу в симметричном виде

$$Z(X) = -2x_1 - 5x_4 + 9 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 \leqslant \ \ 4, \\ -x_1 - \ \ x_4 \leqslant -1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 4.$$

Привести к каноническому виду:

28.7. $Z(X) = 3x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad - 3x_3 \leqslant -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant \ \ 6, \\ \ \ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 \geqslant \ \ 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

28.8. $Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 \geqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Привести к симметричной форме записи:

28.9. $Z(X) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 9x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

28.10. $Z(X) = 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 7x_1 - 10x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

28.11. $Z(X) = 9x_1 - 11x_2 - 3x_3 + 8x_4 + 5x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

28.12. $Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

29. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

29.1. Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными

Графический метод используется для решения задач с двумя переменными следующего вида:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max (\min), \tag{29.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant (\geqslant)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant (\geqslant)\, b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant (\geqslant)\, b_m, \end{cases} \tag{29.2}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{29.3}$$

Данный метод основывается на возможности графического изображения области допустимых решений задачи и нахождении среди них оптимального решения.

Область допустимых решений задачи строится как пересечение (общая часть) областей решений каждого из заданных ограничений (29.2), (29.3).

Областью решений линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство: если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку, если же неравенство не удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

Областью допустимых решений задачи является общая часть полуплоскостей — областей решений всех неравенств системы ограничений.

Для нахождения среди допустимых решений оптимального решения используют линии уровня и опорные прямые.

Линией уровня называется прямая, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение. Уравнение линии уровня в общем случае имеет вид $c_1x_1 + c_2x_2 = l$, где $l = \text{const}$. Все линии уровня параллельны между собой. Их нормаль $\bar{n} = (c_1, c_2)$.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с областью допустимых решений и по отношению к которой эта область находится в одной из полуплоскостей.

Область допустимых решений любой задачи имеет не более двух опорных прямых, на одной из которых может находиться оптимальное решение (рис. 29.1).

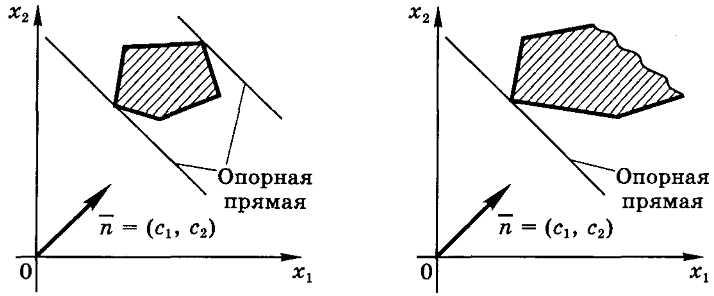


Рис. 29.1

Значения целевой функции на линиях уровня возрастают, если линии уровня перемещать в направлении их нормали, и убывают при перемещении линий уровня в противоположном направлении.

Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования с двумя переменными:

1. Построить область допустимых решений.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить нормаль линий уровня $\bar{n} = (c_1, c_2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.

4. Линию уровня переместить до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум — в противоположном направлении.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то для его нахождения решить совместно уравнения прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорной прямой. Если целевая функция задачи достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек. После нахождения оптимальных решений вычислить значение целевой функции на этих решениях.

29.1. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leqslant 0, & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0, & (3) \\ x_2 \leqslant 3, & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Строим область допустимых решений задачи. Нумеруем ограничения задачи. В прямоугольной декартовой системе координат (рис. 29.2) строим прямую $x_1 - x_2 + 2 = 0$ (L_1), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1). Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Так как прямая L_1 не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O (0, 0) в первое ограничение $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geqslant 0$. Получаем строгое неравенство $2 > 0$. Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений. Таким образом, стрелки на концах прямой L_1 должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O. Аналогично строим прямые $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ (L_2), $2x_1 + x_2 - 2 = 0$ (L_3), $x_2 = 3$ (L_4) и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности; полученную область допустимых решений отметим на рис. 29.2 штриховкой.

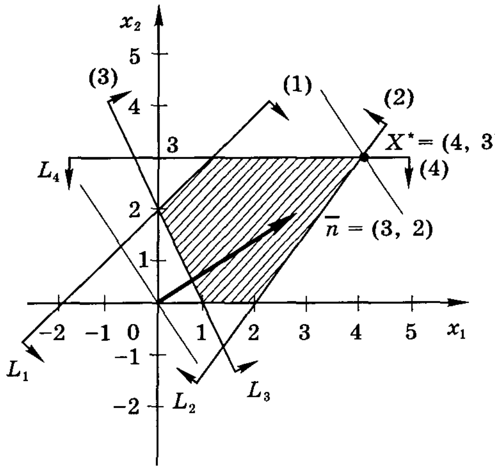


Рис. 29.2

Строим нормаль линий уровня $\bar{n} = (3, 2)$ и одну из этих линий, например $3x_1 + 2x_2 = 0$. Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня перемещаем в направлении нормали до опорной прямой. Эта прямая проходит через точку X^* пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Определяем координаты точки $X^* = L_2 \cap L_4$. Решая систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases}$ получаем $X^* = (4, 3)$. Вычисляем $Z(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$.

О т в е т: $\max Z(X) = 18$ при $X^* = (4, 3)$.

29.2. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 0, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 16, & (3) \\ x_1 \leqslant 4, & (4) \\ x_1 - x_2 \leqslant 0. & (5) \end{cases}$$

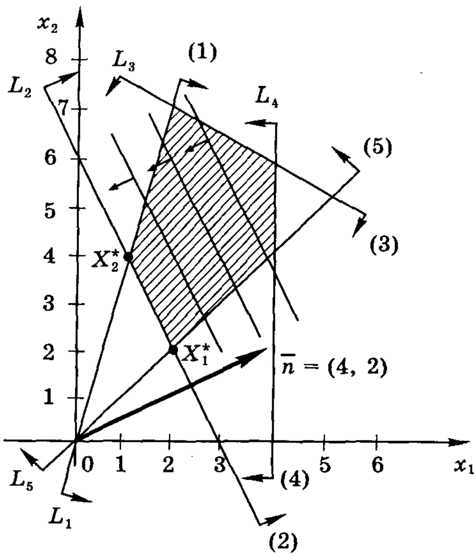


Рис. 29.3

Р е ш е н и е. Строим область допустимых решений, нормаль линий уровня $\bar{n} = (4, 2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью (рис. 29.3). Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению нормали $\bar{n}$, так как решается задача на отыскание минимума функции. Нормаль линий уровня $\bar{n} = (4, 2)$ и нормаль $\bar{n}_2 = (2, 1)$ граничной прямой L_2, в направлении которой перемещаются линии уровня, параллельны, так как их координаты пропорциональны ($4 : 2 = 2 : 1$). Следовательно, опорная прямая совпадает с граничной прямой L_2 области допустимых решений и проходит через две угловые точки этой области X_1^* и X_2^*. Задача имеет бесконечное множество оптимальных решений, являющихся точками отрезка $[X_1^*, X_2^*]$. Эти точки $X_1^* = L_2 \cap L_5$, $X_2^* = L_1 \cap L_2$ находим, решая соответствующие системы уравнений:

$$+\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0 & (L_5) \end{cases} \qquad +\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 6 & (L_2) \end{cases}$$

$$3x_1 = 6; \qquad\qquad 6x_1 = 6;$$

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2; \qquad\qquad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 4;$$

$$X_1^* = (2, 2); \qquad\qquad X_2^* = (1, 4).$$

Вычисляем $Z(X_1^*) = Z(X_2^*) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12.$

О т в е т: $\min Z(X) = 12$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

29.3. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - \ \ x_2 \geqslant 0, & (1) \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 \geqslant 5, & (2) \\ \qquad\quad x_2 \geqslant 3, & (3) \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0. & (4) \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений, нормаль $\bar{n} = (3, 7)$ и одну из линий уровня (рис. 29.4).

В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровня перемещаем в направлении нормали. Ввиду того что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровня уходит в бесконечность. Задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции.

Ответ: $Z(X) \to +\infty$.

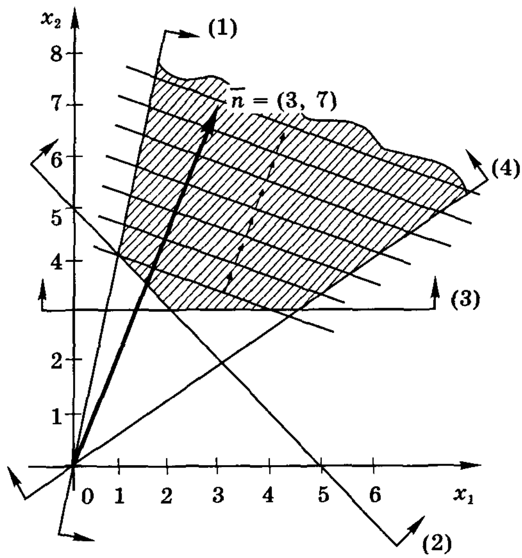


Рис. 29.4

29.4. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - \ \ x_2 \geqslant \ \ 0, & (1) \\ \qquad\quad x_2 \leqslant \ \ 6, & (2) \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leqslant 16, & (3) \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant \ \ 2, & (4) \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 \geqslant \ \ 3. & (5) \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Строим прямые линии, соответствующие неравенствам системы ограничений и находим полуплоскости, являющиеся областями решений этих неравенств (рис. 29.5).

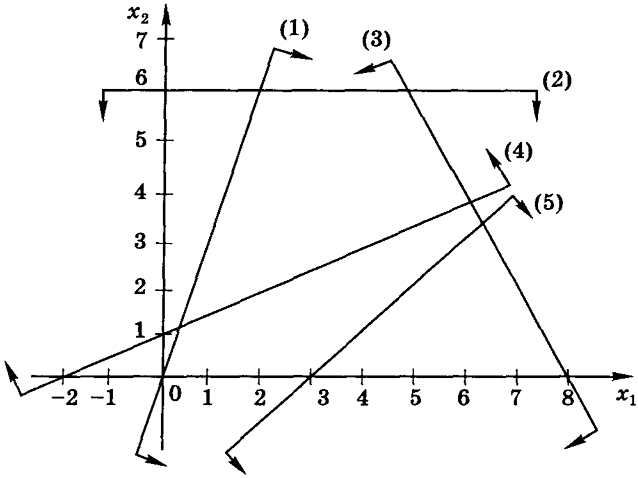


Рис. 29.5

Область допустимых решений задачи является пустым множеством. Задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

О т в е т: система ограничений несовместна.

29.2. Графический метод решения задач линейного программирования с n переменными

Графическим методом решаются задачи линейного программирования, записанные в каноническом виде и удовлетворяющие условию $n - r \leqslant 2$, где n — число неизвестных системы ограничений; r — ранг системы векторов условий. Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы m.

29.5. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 - 4x_5 = -4. \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Р е ш е н и е. Метод применим, так как $n - r = 5 - 3 = 2$.

Методом Жордана—Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной (табл. 29.1). Одновременно исключим разрешенные неизвестные из целевой функции.

Таблица 29.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
–1	$\boxed{1}$	1	2	–3	4	Система уравнений-ограничений
1	1	4	1	–8	3	
0	1	1	0	–4	–4	
–1	–1	1	3	7	0	Целевая функция
–1	1	1	2	–3	4	
2	0	3	–1	–5	–1	
$\boxed{1}$	0	0	–2	–1	–8	
–2	0	2	5	4	4	
0	1	1	0	–4	–4	
0	0	$\boxed{3}$	3	–3	15	
1	0	0	–2	–1	–8	
0	0	2	1	2	–12	
0	1	0	–1	–3	–9	
0	0	1	1	–1	5	
1	0	0	–2	–1	–8	
0	0	0	–1	4	–22	

Используя последнюю часть табл. 29.1, запишем задачу линейного программирования в преобразованном виде:

$$Z(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Отбросим в уравнениях-ограничениях неотрицательные разрешенные неизвестные x_1, x_2, x_3 и заменим знак равенства знаками неравенства «$\leqslant$», получим вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$Z(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 \leqslant -9, & (1) \\ x_4 - x_5 \leqslant 5, & (2) \\ -2x_4 - x_5 \leqslant -8, & (3) \end{cases}$$

$$x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0.$$

Решаем задачу графическим методом (рис. 29.6). Свободный член в целевой функции 22 на отыскание оптимального решения не влияет и учитывается только при вычислении значения целевой функции.

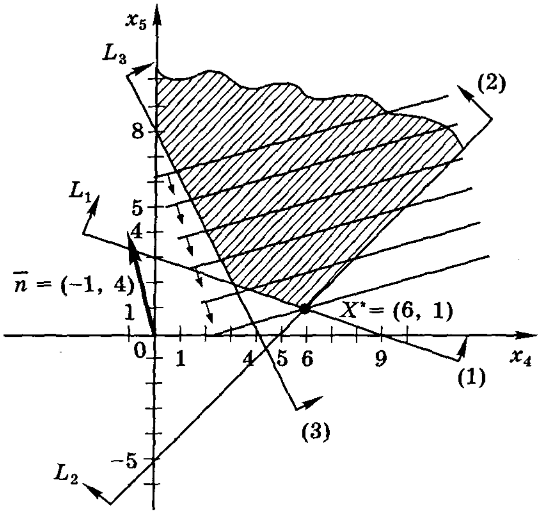


Рис. 29.6

Находим оптимальное решение вспомогательной задачи $X^* = L_1 \cap L_2$:

$$+\begin{cases} -x_4 - 3x_5 = -9, & (L_1) \\ x_4 - x_5 = 5 & (L_2) \end{cases}$$

$$-4x_5 = -4;$$

$$x_5^* = 1, \quad x_4^* = 6;$$

$$X^* = (6, 1).$$

Вычисляем минимальное значение целевой функции $Z(X^*) = -1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 22 = 20$.

Находим оптимальное решение исходной задачи. Для этого используем систему ограничений в разрешенном виде:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8. \end{cases}$$

Вычисляем x_2^*, x_3^* и x_1^*: $x_2^* = -9 + x_4^* + 3x_5^* = -9 + 6 + 3 \cdot 1 = 0$,

$x_3^* = 5 - x_4^* + x_5^* = 5 - 6 + 1 = 0$, $x_1^* = -8 + 2x_4^* + x_5^* = -8 + 2 \cdot 6 + 1 = 5$.

Получаем $X^* = (5, 0, 0, 6, 1)$.

Ответ: $\min Z(X) = 20$ при $X^* = (5, 0, 0, 6, 1)$.

Решить задачи линейного программирования графическим методом:

29.6. $Z(X) = 2x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \end{cases}$$
$$x_2 \geqslant 0.$$

29.7. $Z(X) = x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant -3, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

29.8. $Z(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \leqslant 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \geqslant 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

29.9. $Z(X) = -x_1 + 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 24, \\ -8x_1 + 3x_2 \leqslant 24, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant -12. \end{cases}$$

29.10. $Z(X) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 6, \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 12. \end{cases}$$

29.11. $Z(X) = 3x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant -4, \\ x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

29.12. $Z(X) = 3x_1 + 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \geqslant 20, \\ x_1 - x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

29.13. $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 16, \\ -2x_1 + 5x_2 \geqslant 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

29.14. $Z(X) = x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 7, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \\ 4x_1 - 3x_2 \leqslant 12, \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

29.15. $Z(X) = x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12, \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

29.16. $Z(X) = -3x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

29.17. $Z(X) = 2x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \geqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0.$$

29.18. $Z(X) = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

29.19. $Z(X) = 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -22, \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 17, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

29.20. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

29.21. $Z(X) = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 4, \\ 7x_2 - x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

29.22. $Z(X) = 11x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 18, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

29.23. $Z(X) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

29.24. Производственная мощность завода позволяет производить за месяц 20 тыс. изделий типа A или 16 тыс. изделий типа B. Прибыль, получаемая заводом при реализации одного изделия типа A, равна 800 ден. ед., типа B — 1000 ден. ед.

1. Определить план выпуска изделий каждого типа, обеспечивающий наибольшую прибыль.

2. Найти план выпуска изделий в случае, если прибыль от реализации изделий типа A: а) увеличится; б) уменьшится.

29.25. Механический цех может изготовить за смену 600 деталей № 1 или 1200 деталей № 2. Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на термообработку в тот же день, позволяет обрабатывать за смену 1200 деталей № 1 или 800 деталей № 2. Цены на детали одинаковые.

Определить ежедневный производственный план выпуска деталей, максимизирующий товарную продукцию предприятия, при следующих дополнительных условиях:

а) оба цеха работают в одну смену;

б) механический цех работает в три смены, а термический — в две смены;

в) предприятие работает в две смены, при этом деталей № 1 должно быть изготовлено не более 800 шт., а деталей № 2 — не более 1000 шт.

29.26. Для изготовления изделий A и B фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. Указанные изделия производят с помощью токарных и фрезерных станков. Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль. Исходные данные приведены ниже:

Вид ресурса	Объем ресурса	Нормы расхода на одно изделие	
		A	B
Сталь, кг	570	10	70
Цветные металлы, кг	420	20	50
Токарные станки, станко-час	5600	300	400
Фрезерные станки, станко-час	3400	200	100
Прибыль, ден. ед.		3	8

29.27. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). Определить оптимальный рацион из условия минимума себестоимости.

Данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и о себестоимости этих продуктов приведены ниже:

Продукт	Количество кормовых единиц	Белок, г/кг	Кальций, г/кг	Фосфор, г/кг	Себестоимость, ден. ед./кг
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

29.28 (задача о выборе технологий). Предприятие для выпуска некоторой продукции использует две технологии (два способа). При этом необходимы три вида ресурсов. Известно: b_i, ед. (i = 1, 2, 3) — запасы ресурсов; a_{ij}, ед./ч (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) — затраты i-го вида ресурса за 1 ч работы с использованием j-й технологии; c_j, руб./ч (j = 1, 2) — прибыль предприятия от реализации продукции, выпускаемой за 1 ч работы с использованием j-й технологии; T, ч — общее время работы предприятия по обеим технологиям.

Найти, сколько времени по каждой технологии должно работать предприятие, чтобы обеспечить максимум прибыли от реализации выпускаемой продукции:

а) при $T = 500$ ч; б) при $T = 300$ ч.

Исходные данные приведены ниже:

Вид ресурса	Запасы ресурса, ед. b_i	Затраты ресурсов a_{ij} за 1 ч работы по технологии	
		№ 1	№ 2
1	400	1	1
2	1500	3	5
3	900	1	3
Прибыль c_j, руб./ч		300	400

29.29. Из пункта A в пункт B ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и число пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов, приведены ниже:

Вагон	Число вагонов в поезде		Число пассажиров	Парк вагонов
	скором	пассажирском		
Багажный	1	1	—	12
Почтовый	1	—	—	8
Плацкартный	5	8	58	81
Купированный	6	4	40	70
Мягкий	3	1	32	26

Определить:

а) количество скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума;

б) оптимальное количество поездов для случая, когда железная дорога не может пропустить более шести пассажирских поездов.

29.30. Оборудование фабрики позволяет выпускать фруктовые компоты в таре трех видов: 10 ц компота в стеклянной таре; 8 ц — в жестяной и 5 ц — в полиэтиленовой. Найти производственный план предприятия, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 ц компота составляет: в стеклянной и полиэтиленовой таре — 16 руб., в жестяной — 10 руб. Отпускная цена независимо от тары составляет 40 руб. за 1 ц.

30. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод основывается на следующем:

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, т.е. многогранником или многоугольным множеством;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из угловых точек области допустимых решений;
- угловые точки области допустимых решений алгебраически представляют некоторые базисные (опорные) решения системы ограничений задачи.

Данный метод состоит в целенаправленном переборе опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Основное содержание симплексного метода:

1) найти начальное опорное решение;

2) осуществить переход от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному;

3) определить критерии завершения процесса решения задачи, позволяющие своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения.

30.1. Опорное решение задачи линейного программирования

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \qquad (30.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (30.2)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j, \quad b_i \geqslant 0 \quad \forall i. \qquad (30.3)$$

Будем считать, что правые части всех уравнений системы ограничений неотрицательны. Если в каком-либо уравнении правая часть отрицательна, то это уравнение нужно умножить на -1.

Опорным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение $X = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$, для которого векторы условий (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений) $A_1, A_2, ..., A_m$, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга r системы векторов условий (числа линейно независимых уравнений системы ограничений). В дальнейшем будем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т.е. $r = m$.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m, то решение называется *невырожденным*, в противном случае (меньше m) — *вырожденным.*

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, включающий в свой состав векторы, соответствующие отличным от нуля координатам опорного решения.

Базисное решение находится методом Жордана — Гаусса. При этом разрешающие элементы для преобразований Жордана необходимо выбирать из условия, обеспечивающего неотрицательность правых частей уравнений системы,

$$\theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ при } a_{ik} > 0. \tag{30.4}$$

Здесь k — номер вектора условия A_k, вводимого в базис (номер выбираемого столбца матрицы системы ограничений), а l — номер вектора A_l, выводимого из базиса (номер строки матрицы системы, в которой следует выбирать разрешающий элемент для преобразования Жордана).

С помощью данного условия можно выбрать разрешающий элемент в любом столбце k матрицы системы ограничений, в котором имеется хотя бы один положительный элемент. Если при выборе разрешающего элемента данное условие нарушается, в правой части системы уравнений появляются отрицательные величины.

Используя данное условие, можно получить допустимое базисное решение, которое является начальным опорным решением.

Аналогичное условие используется при переходе от одного опорного решения к другому.

30.1. Найти начальное опорное решение и путем перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи линейного программирования

$$Z(X) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Решение. Результаты нахождения начального опорного решения и дальнейшего перебора опорных решений приведены в табл. 30.1. В правой части таблицы на каждом шаге вычислений приведены значения параметра θ_k для различных столбцов k (минимальные значения θ_{0k} выделены жирным шрифтом), соответствующее опорное решение X_i и значение целевой функции $Z(X_i)$ на этом решении. Номера столбцов для выбора разрешающих элементов принимались произвольно.

Таблица 30.1

x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	
3	2	$\boxed{1}$	1	7	$^7/_3$	$^7/_2$	**7**	7	
5	3	1	2	11	$^{11}/_5$	$^{11}/_3$	11	$^{11}/_2$	Нахождение начального опорного решения
3	2	1	1	7	$^7/_3$	$^7/_2$		7	
2	1	0	$\boxed{1}$	4	**2**	4		**4**	
1	$\boxed{1}$	1	0	3	3	**3**			$X_1 = (0,\ 0,\ 3,\ 4)$,
2	1	0	1	4	**2**	4			$Б_1 = (A_3, A_4)$, $Z(X_1) = -1$;
1	1	1	0	3	3		**3**		$X_2 = (0,\ 3,\ 0,\ 1)$,
$\boxed{1}$	0	−1	1	1	**1**		—		$Б_2 = (A_2, A_4)$, $Z(X_2) = 5$;
0	1	$\boxed{2}$	−1	2			**1**	—	$X_3 = (1,\ 2,\ 0,\ 0)$,
1	0	−1	1	1			—	**1**	$Б_3 = (A_1, A_2)$, $Z(X_3) = 7$;
0	$^1/_2$	1	$-^1/_2$	1					$X_4 = (2,\ 0,\ 1,\ 0)$,
1	$^1/_2$	0	$^1/_2$	2					$Б_4 = (A_1, A_3)$, $Z(X_4) = 7$.

Сравниваем значения целевой функции на полученных опорных решениях: $\min\ \{-1,\ 5,\ 7,\ 7\} = -1$. Делаем вывод, что оптимальным решением является $X_1 = (0,\ 0,\ 3,\ 4)$.

Ответ: $\min Z(X) = -1$ при $X^* = (0,\ 0,\ 3,\ 4)$.

Найти начальное опорное решение и путем перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи:

30.2. $Z(X) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.3. $Z(X) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.4. $Z(X) = -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 4x_1 + 10x_2 + x_3 + 3x_4 = 22, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.5. $Z(X) = 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.6. $Z(X) = -2x_1 + 6x_2 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.7. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.8. $Z(X) = 3x_1 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 13, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

30.9. $Z(X) = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 12, \\ x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 16, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

30.2. Алгоритм симплексного метода

Оптимальное решение задачи линейного программирования можно найти путем перебора не всех, а только части опорных решений. Для этого необходимо каждое опорное решение проверять на оптимальность и переход от одного опорного решения к другому осуществлять таким образом, чтобы значение целевой функции увеличивалось в задаче на максимум или уменьшалось в задаче на минимум.

При переходе от одного опорного решения X_1 к другому X_2 приращение целевой функции находится по формуле

$$\Delta Z_k = Z(X_2) - Z(X_1) = -\theta_{0k}\Delta_k, \tag{30.5}$$

т.е.

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \theta_{0k}\Delta_k. \tag{30.6}$$

Здесь k — номер вектора, вводимого в базис опорного решения; Δ_k — оценка разложения вектора условий A_k по базису опорного решения, вычисляемая по формуле

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} - c_k, \tag{30.7}$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_б X_k - c_k, \tag{30.8}$$

где $C_б = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk})$ — вектор коэффициентов разложения вектора A_k по базису опорного решения; c_k —коэффициент целевой функции при переменной x_k.

Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) хотя бы для одного вектора условий оценка разложения по базису невырожденного опорного решения отрицательная (положительная), то опорное решение может быть улучшено, т.е. можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше (меньше).

Чтобы обеспечить наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому, векторы, выводимый из базиса и вводимый в базис опорного решения, необходимо выбирать, исходя из условий:

- в задаче на максимум $\max\limits_k\{\Delta Z_k\} = \max\limits_k\{-\theta_{0k}\Delta_k\}$; (30.9)

- в задаче на минимум $\min\limits_k\{\Delta Z_k\} = \min\limits_k\{-\theta_{0k}\Delta_k\}$. (30.10)

В упрощенном варианте вектор, вводимый в базис, можно выбрать, исходя из условий:

- в задаче на максимум $\min\limits_k\{\Delta_k\}$; (30.11)

- в задаче на минимум $\max\limits_k\{\Delta_k\}$. (30.12)

Опорное решение задачи линейного программирования на максимум (минимум) является о п т и м а л ь н ы м, если для любого вектора условий оценка разложения по базису опорного решения неотрицательная (неположительная), т.е.:

- в задаче на максимум $\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$; (30.13)
- в задаче на минимум $\Delta_k \leqslant 0 \quad \forall k$. (30.14)

Оптимальное решение задачи линейного программирования является е д и н с т в е н н ы м, если для любого вектора условий, не входящего в базис, оценка отлична от нуля, т.е.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k \in \{m+1, m+2, \dots, n\}. \tag{30.15}$$

Здесь предполагается, что в базис оптимального решения входят первые m векторов.

Задача линейного программирования имеет б е с к о н е ч н о е м н о ж е с т в о оптимальных решений, если при оптимальном решении оценка хотя бы одного вектора условия, не входящего в базис, равна нулю, т.е.

$$\exists\, k \in \{m+1, m+2, \dots, n\}: \Delta_k = 0. \tag{30.16}$$

Задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, если для какого-либо из векторов условий A_k с оценкой Δ_k, противоречащей признаку оптимальности, среди коэффициентов разложения по базису опорного решения нет положительного, т.е.:

- в задаче на максимум $\exists A_k$: $\Delta_k < 0$ и $x_{ik} \leqslant 0 \quad \forall i$; (30.17)
- в задаче на минимум $\exists A_k$: $\Delta_k > 0$ и $x_{ik} \leqslant 0 \quad \forall i$. (30.18)

Алгоритм решения задачи симплексным методом:

1. Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

2. Найти начальное опорное решение с базисом из единичных векторов и коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения. Если опорное решение отсутствует, задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

3. Вычислить оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и заполнить симплексную таблицу.

4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается.

5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора найти все оптимальные решения.

6. Если имеют место условия неограниченности целевой функции, то задача не имеет решения.

7. Если пункты 4—6 алгоритма не выполняются, найти новое опорное решение и перейти к пункту 3.

30.10. Решить симплексным методом

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10, \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{Д} \\ \\ +x_5 \\ +x_6 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть второго и третьего ограничений-неравенств типа «$\leqslant$» вводим дополнительные переменные x_5 и x_6 с коэффициентом $+1$. В целевую функцию x_5 и x_6 входят с коэффициентом 0 (т.е. не входят). Получаем

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Система ограничений этой задачи является системой уравнений, разрешенной относительно переменных x_4, x_5, x_6. Свободные (неразрешенные) переменные приравниваем к нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Получаем $x_4 = 6$, $x_5 = x_6 = 10$. Записываем базисное решение $X_1 = (0, 0, 0, 6, 10, 10)$, которое является начальным опорным решением с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

По формуле (30.8) вычисляем оценки разложений векторов условий по базису опорного решения:

$\Delta_1 = C_б X_1 - c_1 = (-1, 0, 0) \cdot (1, 1, 2) - 1 = -1 + 0 + 0 - 1 = -2;$

$\Delta_2 = C_б X_2 - c_2 = (-1, 0, 0) \cdot (1, 2, 1) - 1 = -1 + 0 + 0 - 1 = -2;$

$\Delta_3 = C_б X_3 - c_3 = (-1, 0, 0) \cdot (2, 1, 1) - 1 = -2 + 0 + 0 - 1 = -3;$

$\Delta_4 = C_б X_4 - c_4 = (-1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) - (-1) = -1 + 0 + 0 + 1 = 0;$

$\Delta_5 = C_б X_5 - c_5 = (-1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0;$

$\Delta_6 = C_б X_6 - c_6 = (-1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0.$

Опорное решение, коэффициенты разложений и оценки разложений векторов условий по базису опорного решения записываются в симплексную таблицу (табл. 30.2).

Таблица 30.2

				1↓	1	1	−1	0	0			
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_2	θ_3
	A_4	−1	6	1	1	2	1	0	0	6	6	**3**
	A_5	0	10	1	2	1	0	1	0	10	**5**	10
←	A_6	0	10	$\boxed{2}$	1	1	0	0	1	**5**	10	10
	Δ_k		−6	−2	−2	−3	0	0	0			

Для удобства вычислений оценок над таблицей записываются коэффициенты целевой функции. В первом столбце «$Б$» записываются векторы, входящие в базис опорного решения. Порядок записи этих векторов соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях-ограничениях. Во втором столбце таблицы «$C_б$» записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных в том же порядке. При правильном расположении коэффициентов целевой функции в столбце «$C_б$» оценки единичных векторов, входящих в базис, всегда равны нулю. В последней строке таблицы с оценками Δ_k в столбце «A_0» записывается значение целевой функции на опорном решении $Z(X_1)$.

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в рассматриваемой задаче на максимум векторам A_1, A_2 и A_3 соответствуют отрицательные оценки $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -3$ (не выполняется признак оптимальности).

В данном случае можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше. Определим, введение какого из трех векторов приведет к большему приращению целевой функции. Приращение целевой функции находится по формуле (30.5). Вычисляем значения параметра θ_{0k} для первого, второго и третьего векторов по формуле (30.4). Получаем $\theta_{01} = 5$ при $l = 3$; $\theta_{02} = 5$ при $l = 2$; $\theta_{03} = 3$ при $l = 1$ (см. табл. 30.2). Находим возможные приращения целевой функции при введении в базис каждого из этих векторов и определяем наибольшее из них:

$$\max_k \Delta Z_k = \max_k \{-5 \cdot (-2), -5 \cdot (-2), -3 \cdot (-3)\} = \max_k \{10, 10, 9\} = 10 \text{ при } k \in \{1; 2\}.$$

Следовательно, для более быстрого приближения к оптимальному решению необходимо ввести в базис опорного решения либо вектор A_1, либо вектор A_2. Вводим в базис вектор A_1. Так как минимальное значение $\theta_{01} = 5$ достигается при $l = 3$, то исключаем из базиса третий вектор A_6. За разрешающий элемент принимаем число 2, расположенное в первом столбце и третьей строке. Выполняем преобразование Жордана с элементом $x_{31} = 2$. Получаем второе опорное решение $X_2 = (5, 0, 0, 1, 5, 0)$ с базисом $Б_2 = (A_4, A_5, A_1)$, $Z(X_2) = 4$ (табл. 30.3).

Таблица 30.3

			1	1 ↓	1	−1	0	0		
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_2	θ_3
← A_4	−1	1	0	$\boxed{1/2}$	3/2	1	0	−1/2	**2**	**2/3**
A_5	0	5	0	3/2	1/2	0	1	−1/2	10/3	10
A_1	1	5	1	1/2	1/2	0	0	1/2	10	10
Δ_k		−4	0	−1	−2	0	0	1		

Это решение не является оптимальным, так как векторы A_2 и A_3 имеют отрицательные оценки $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -2$. Определяем, введение какого из векторов A_2 или A_3 в базис опорного решения приведет к большему приращению целевой функции:

$$\max_k \Delta Z_k = \max_k \{-2 \cdot (-1), -2/3 \cdot (-2)\} = \max_k \{2, 4/3\} = 2 \text{ при } k = 2.$$

Вводим в базис вектор A_2. Минимальное значение параметра $\theta_{02} = 2$ имеет место при $l = 1$, поэтому разрешающий элемент берем в первой строке. Из базиса исключаем вектор A_4. Выполняем преобразование Жордана с элементом $x_{12} = 1/2$. Получаем третье опорное решение $X_3 = (4, 2, 0, 0, 2, 0)$ с базисом $Б_3 = (A_2, A_5, A_1)$, $Z(X_3) = 6$ (табл. 30.4).

Таблица 30.4

			1	1	1	−1	0	↓ 0	
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_6
A_2	1	2	0	1	3	2	0	−1	—
← A_5	0	2	0	0	−4	−3	1	$\boxed{1}$	**2**
A_1	1	4	1	0	−1	−1	0	1	4
Δ_k		6	0	0	1	2	0	0	

Опорное решение X_3 является оптимальным, так как для всех векторов условий оценки в задаче на максимум неотрицательные. Однако данное решение не единственное, так как вектор A_6, не входящий в базис, имеет нулевую оценку. Этот вектор нужно ввести в базис опорного решения, чтобы получить еще одно оптимальное решение. Вектор, выводимый из базиса, находим с помощью параметра θ_6. Так как $\theta_{06} = \min\{2, 4\} = 2$ при $l = 2$, разрешающий элемент для следующего преобразования Жордана берем во второй строке. В базис входит вектор A_6 вместо вектора A_5. Получаем второе оптимальное решение $X_4 = (2, 4, 0, 0, 0, 2)$ с базисом $Б_4 = (A_2, A_6, A_1)$, $Z(X_4) = 6$ (табл. 30.5).

Таблица 30.5

			1	1	1	−1	0	0
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	1	4	0	1	−1	−1	1	0
A_6	0	2	0	0	−4	−3	1	1
A_1	1	2	1	0	3	2	−1	0
Δ_k		6	0	0	1	2	0	0

Исходная задача имела четыре переменные, поэтому в ответе в оптимальном решении последние две дополнительные переменные не записываем.

Ответ: $\max Z(X) = 6$ при $X^* = (1-t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$X_1^* = (4, 2, 0, 0)$, $X_2^* = (2, 4, 0, 0)$.

30.11. Решить симплексным методом

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{aligned} -x_2 + x_3 &\leqslant 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqslant 3, \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \text{Д} \\ +x_4 \\ \\ -x_5 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду:

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Используя метод Жордана — Гаусса, приведем систему ограничений задачи к равносильной разрешенной системе уравнений (табл. 30.6). При этом, используя параметр θ_k, сохраним правые части уравнений неотрицательными. Получим начальное опорное решение $X_1 = (0, 1, 1, 1, 0)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_2, A_3)$. Затем вычислим оценки разложений векторов условий по базису опорного решения по формуле (30.8) и дополним таблицу расчета строкой оценок. Далее продолжим расчет симплексным методом так же, как в предыдущей задаче.

Таблица 30.6

			↓ 3	−1	−4	0	0				
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_5
Нахождение начального опорного решения		1	0	−1	1	1	0	—	—	**1**	—
		2	−5	$\boxed{1}$	1	0	0	—	**2**	2	—
		3	−8	1	2	0	−1	—	3	$^3/_2$	—
		3	−5	0	2	1	0	—	—	$^3/_2$	—
		2	−5	1	1	0	0	—	—	2	—
		1	−3	0	$\boxed{1}$	0	−1	—	—	**1**	—
← A_4	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	2	**1**	—	—	$^1/_2$
A_2	−1	1	−2	1	0	0	1	—	—	—	1
A_3	−4	1	−3	0	1	0	−1	—	—	—	—
Δ_k		−5	11	0	0	0	3				
A_1	3	1	1	0	0	1	2				
A_2	−1	3	0	1	0	2	5				
A_3	−4	4	0	0	1	4	3				
Δ_k		−16	0	0	0	−11	−19				

Начальное опорное решение X_1 не является оптимальным, так как векторам A_1 и A_5 соответствуют положительные оценки. По признаку оптимальности в задаче на минимум все оценки должны быть неположительными. Определяем, введение какого из векторов (A_1 или A_5) в базис приведет к большему уменьшению целевой функции:

$$\min_k \Delta Z_k = \min_k \{-11 \cdot 1, -3 \cdot (^1/_2)\} = \min_k \{-11, -^3/_2\} = -11 \text{ при } k = 1.$$

В базис вводим вектор A_1. Исключаем из базиса вектор A_4, соответствующий минимуму параметра $\theta_{01} = 1$ при $l = 1$. Выполняем преобразование Жордана, получаем второе опорное решение $X_2 = (1, 3, 4, 0, 0)$ с базисом $Б_2 = (A_1, A_2, A_3)$. Данное опорное решение является оптимальным, потому что оценки для всех векторов условий неположительные. Оптимальное решение единственное, так как векторы, не входящие в базис, не имеют нулевых оценок.

Ответ: $\min Z(X) = -16$ при $X^* = (1, 3, 4)$.

Решить симплексным методом следующие задачи:

30.12. $Z(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.13. $Z(X) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.14. $Z(X) = x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.15. $Z(X) = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.16. $Z(X) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant -4, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.17. $Z(X) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 18, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.18. $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 12, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.19. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 12, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.20. $Z(X) = 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 15, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leqslant 10, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.21. $Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 9, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 12, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.22. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.23. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.24. $Z(X) = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 2, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.25. $Z(X) = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.26. $Z(X) = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 14, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 16, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.27. $Z(X) = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 10, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.28. $Z(X) = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.29. $Z(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$

30.30. $Z(X) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \leqslant 4, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geqslant 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.31. $Z(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ -2x_1 + 3x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.3. Метод искусственного базиса

Данный метод применяется для решения задач линейного программирования симплексным методом в случае, когда задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Согласно данному методу для задачи линейного программирования составляется так называемая расширенная задача, которая решается симплексным методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается причина отсутствия ее решения.

Пусть имеется каноническая задача линейного программирования

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (30.19)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что правые части уравнений системы ограничений неотрицательные, т.е. $b_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Для исходной задачи составляют расширенную задачу. При этом используют искусственные переменные.

Искусственными переменными называются неотрицательные переменные, которые вводятся в ограничения-равенства для получения начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений системы ограничений с коэффициентом +1 и в целевую функцию в задаче на максимум с коэффициентом $-M$, а в задаче на минимум с коэффициентом $+M$. Число M сколь угодно большое по сравнению с единицей ($M \gg 1$).

В общем случае расширенная задача на максимум имеет вид

$$\overline{Z}(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (30.20)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n + m; \qquad b_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если расширенная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, которое получается из $\overline{X}^*$ отбрасыванием нулевых искусственных переменных (признак оптимальности решения).

Если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений (признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений).

Если расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то и исходная задача не имеет решения по той же причине (признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции).

Метод искусственного базиса в основном совпадает с обычным симплексным методом, но имеет некоторые особенности.

Особенности метода искусственного базиса:

1. Ввиду того что начальное опорное решение расширенной задачи содержит искусственные переменные, входящие в целевую функцию с коэффициентом $-M$ (в задаче на максимум) или $+M$ (в задаче на минимум), оценки разложений векторов условий $\Delta_k = C_б X_k - c_k$ состоят из двух слагаемых Δ'_k и $\Delta''_k(M)$, одно из которых Δ'_k не зависит от M, а другое $\Delta''_k(M)$ зависит от M. Так как M сколь угодно велико по сравнению с единицей ($M \gg 1$), то на первом этапе расчета для нахождения векторов, вводимых в базис, используются только слагаемые оценок $\Delta''_k(M)$.

2. Соответствующие искусственным переменным векторы, выводимые из базиса опорного решения, в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

3. После того как все векторы, соответствующие искусственным переменным, исключаются из базиса, расчет продолжается обычным симплексным методом с использованием оценок Δ'_k, не зависящих от M.

30.32. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования

$$Z(X) = 7x_1 - 13x_2 - 8x_3 + 10x_4 \to \min,$$

и

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \end{cases} \left|\begin{matrix} +x_5 \\ +x_6 \end{matrix}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Составляем расширенную задачу. В левые части уравнений системы ограничений вводим неотрицательные искусственные переменные с коэффициентом +1 (всегда). Данная задача — задача на нахождение минимума, поэтому x_5 и x_6 в целевую функцию вводятся с коэффициентом $+M$. Получаем

$$\overline{Z}(\overline{X}) = 7x_1 - 13x_2 - 8x_3 + 10x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Приравниваем свободные переменные системы уравнений (ограничений) к нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, получаем начальное опорное решение расширенной задачи $\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 0, 3, 2)$ с базисом из единичных векторов $\overline{Б}_1 = (A_5, A_6)$. Вычисляем по формулам (30.8) оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и записываем в симплексную таблицу (табл. 30.7). При этом оценки Δ_k и $\overline{Z}(\overline{X}_1)$ для удобства вычислений записываем в две строки: в первую — слагаемые Δ'_k, не зависящие от M, во вторую — слагаемые $\Delta''_k(M)$, зависящие от M. Значения $\Delta''_k(M)$ удобно записывать без M, имея в виду однако, что оно там присутствует.

Таблица 30.7

			7	−13	−8	10 ↓	M	M		
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_4
← A_5	M	3	1	−1	−3	$\boxed{2}$	1	0	3	$^3/_2$
A_6	M	2	1	−2	−1	1	0	1	2	2
Δ'_k		0	7	13	8	−10	0	0		
$\Delta''_k(M)$		5	2	−3	−4	3	0	0		

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на минимум имеются положительные оценки. Выбираем номер вектора A_k, вводимого в базис опорного решения, и вектора A_l, выводимого из базиса. Для этого вычисляем приращения целевой функции ΔZ_k при введении в базис каждого из векторов с положительной оценкой и находим минимум этого приращения. При этом слагаемыми оценок Δ'_k (без M) пренебрегаем до тех пор, пока хотя бы одно слагаемое $\Delta''_k(M)$ (с M) отлично от нуля. В связи с этим строка со слагаемыми оценок Δ'_k может отсутствовать в таблице до тех пор, пока присутствует строка $\Delta''_k(M)$. Находим

$$\min_{k=1,4}\{-2\cdot 2M,\ -{}^3/_2\cdot 3M\} = \min_{k=1,4}\{-4M,\ -({}^9/_2)M\} = -({}^9/_2)M \text{ при } k=4.$$

В столбце «A_4» за разрешающий элемент выбираем коэффициент 2 в первой строке и выполняем преобразование Жордана.

Вектор A_5, выводимый из базиса, исключаем из рассмотрения (вычеркиваем). Получаем опорное решение $\overline{X}_2 = (0,\ 0,\ 0,\ {}^3/_2,\ 0,\ {}^1/_2)$ с базисом $\overline{Б}_2 = (A_4, A_6)$ (табл. 30.8).

Таблица 30.8

	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_3
				7 ↓	−13	−8	10	M	M		
	A_4	10	${}^3/_2$	${}^1/_2$	$-{}^1/_2$	$-{}^3/_2$	1	—	0	3	—
←	A_6	M	${}^1/_2$	$\boxed{{}^1/_2}$	$-{}^3/_2$	${}^1/_2$	0	—	1	**1**	**1**
	Δ'_k		0	−2	8	3	0	—	0		
	$\Delta''_k(M)$		${}^1/_2$	${}^1/_2$	$-{}^1/_2$	${}^1/_2$	0	—	0		

Данное решение не является оптимальным, так как векторы A_1 и A_3 имеют положительные оценки $\Delta''_1(M) = \Delta''_3(M) = {}^1/_2M$. Введение в базис опорного решения любого из этих векторов приведет к уменьшению целевой функции на одну и ту же величину $\Delta Z_1 = \Delta Z_3 = -1\cdot({}^1/_2)M = -M/2$ (слагаемыми без M пренебрегаем). По своему усмотрению вводим в базис вектор A_1, получаем опорное решение $\overline{X}_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ с базисом $\overline{Б}_3 = (A_4, A_1)$ (табл. 30.9).

Таблица 30.9

	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_2
				7	−13 ↓	−8	10	M	M	
←	A_4	10	1	0	$\boxed{1}$	−2	1	—	—	**1**
	A_1	7	1	1	−3	1	0	—	—	—
	Δ'_k		17	0	2	−5	0	—	—	

Опорное решение $\overline{X}_3$ не является оптимальным, так как вектор A_2 имеет положительную оценку. Вводим этот вектор в базис опорного решения. В соответствующем столбце симплексной таблицы единственное положительное число, а именно 1, принимаем за разрешающий элемент для перехода к новому опорному решению. Получаем следующее опорное решение $\overline{X}_4 = (4, 1, 0, 0, 0, 0)$, которое является оптимальным решением расширенной задачи, так как оценки для всех векторов неположительные (табл. 30.10).

Таблица 30.10

			7	−13	−8	10	M	M
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	−13	1	0	1	−2	1	—	—
A_1	7	4	1	0	−5	3	—	—
Δ'_k		15	0	0	−1	−2	—	—

Исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения расширенной задачи отбрасыванием нулевых искусственных переменных, т.е. $X^* = (4, 1, 0, 0)$.

Ответ: $\min Z(X) = 15$ при $X^* = (4, 1, 0, 0)$.

30.33. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования

$$Z(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{rl|l} & \text{Д} \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 \geqslant 2, & -x_4 \\ -x_1 + \quad x_2 + x_3 \leqslant 6, & +x_5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8, & +x_6 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду. Для этого вводим дополнительные переменные x_4, x_5, x_6:

$$Z(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} & \text{И} \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 \qquad\qquad\quad = 2, & +x_7 \\ -x_1 + \quad x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad = 6, & \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 = 8, & \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Чтобы найти начальное опорное решение с базисом из единичных векторов, вводим в первое уравнение-ограничение искусственную переменную, получаем расширенную задачу

$$\overline{Z}(\overline{X}) = x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 2, \\ -\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad\quad = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 \quad = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Данная расширенная задача имеет начальное опорное решение $\overline{X}_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 8,\ 2)$ с базисом из единичных векторов $\overline{Б}_1 = (A_7,\ A_5,\ A_6)$. Вычисляем оценки векторов условий и записываем в симплексную таблицу (табл. 30.11). Это решение не является оптимальным, так как оценки $\Delta_1''(M) = -2M$ и $\Delta_3''(M) = -M$ отрицательные. Находим приращение целевой функции при введении в базис опорного решения векторов A_1 и A_3. Получаем $\Delta\overline{Z}_1 = -1 \cdot (-2M) = 2M$, $\Delta\overline{Z}_3 = -2 \cdot (-M) = 2M$. По своему усмотрению вводим в базис вектор A_1.

Таблица 30.11

				1 ↓	−1	−2	0	0	0	M		
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ_1	θ_3
←	A_7	$-M$	2	$\boxed{2}$	0	1	−1	0	0	1	**1**	**2**
	A_5	0	6	−1	1	1	0	1	0	0	—	6
	A_6	0	8	−3	2	1	0	0	1	0	—	8
	Δ'_k		0	−1	1	2	0	0	0	0		
	$\Delta''_k(M)$		2	−2	0	−1	1	0	0	0		
	A_1	1	1	1	0	$^1/_2$	$-^1/_2$	0	0	—		
	A_5	0	7	0	1	$^3/_2$	$-^1/_2$	1	0	—		
	A_6	0	11	0	2	$^5/_2$	$-^3/_2$	0	1	—		
	Δ'_k		1	0	1	$^5/_2$	$-^1/_2$	0	0	—		

Выполняем преобразование Жордана с разрешающим элементом $x_{11} = 2$, получаем второе опорное решение $\overline{X}_2 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7,\ 11,\ 0)$ с базисом из единичных векторов $\overline{Б}_2 = (A_1,\ A_5,\ A_6)$. Данное решение не является оптимальным, потому что оценка для вектора A_4 отрицательная: $\Delta_4' = -^1/_2 < 0$. Однако опорное решение нельзя улучшить, так как все коэффициенты разложения вектора A_4 по базису опорного решения отрицательные: $x_{i4} < 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$. Таким образом, расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции. Исходная задача также не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

Ответ: $Z(X) \to +\infty$.

Решить задачи линейного программирования методом искусственного базиса:

30.34. $Z(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.35. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 26, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.36. $Z(X) = x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 6, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.37. $Z(X) = 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.38. $Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 8, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.39. $Z(X) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.40. $Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.41. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

30.42. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

30.43. $Z(X) = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

30.44. $Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.45. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.46. $Z(X) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.47. $Z(X) = -x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 \geqslant 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.48. $Z(X) = -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 \geqslant 8, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 4, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.49. $Z(X) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 \leqslant 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.50. $Z(X) = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geqslant 18, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leqslant 18, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.51. $Z(X) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad \leqslant 1, \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 \geqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.52. $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} \ \ \ x_1 - \ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 4, \\ - \ x_1 + \ x_2 + 2x_3 \leqslant \ \ 8, \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 \geqslant 12, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.53. $Z(X) = x_1 + \ x_2 - 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} \ \ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant 3, \\ -x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 5, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.54. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \geqslant \ \ 5, \\ \ \ \ x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 \leqslant \ \ 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 11, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.55. $Z(X) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 1, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \geqslant 5, \\ -x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \leqslant 3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.56. $Z(X) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 1, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.57. $Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.58. $Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.59. $Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.60. $Z(X) = x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 5, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 7, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

30.61. $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 12, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

31.1. Составление математических моделей двойственных задач

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной*. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач (приведем их в матричной форме записи):

Исходная задача	*Двойственная задача*	
	Симметричные пары	
1. $Z(X) = CX \to \max$, $AX \leqslant A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \min$, $YA \geqslant C$, $Y \geqslant \theta$.	(31.1)
2. $Z(X) = CX \to \min$, $AX \geqslant A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \max$, $YA \leqslant C$, $Y \geqslant \theta$.	(31.2)
	Несимметричные пары	
3. $Z(X) = CX \to \max$, $AX = A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \min$, $YA \geqslant C$.	(31.3)
4. $Z(X) = CX \to \min$, $AX = A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \max$, $YA \leqslant C$.	(31.4)

Здесь $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Правила составления двойственных задач:

1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными — в левой.

2. Ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

3. Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи «$\leqslant$», то целевая функция $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ должна максимизироваться, а если «$\geqslant$», то минимизироваться.

4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$F(Y) = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m,$$

где c_0 — свободный член целевой функции $Z(X)$ исходной задачи, $b_1, b_2, \dots, b_m$ — свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i — свободный член именно того ограничения исходной задачи, которому соответствует неизвестная y_i, а $y_1, y_2, \dots, y_m$ — неизвестные в двойственной задаче.

6. Целевая функция $F(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если $Z(X) \to \max$, то $F(Y) \to \min$, и если $Z(X) \to \min$, то $F(Y) \to \max$.

7. Каждому неизвестному x_j, $j = 1, 2, \dots, n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i, соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными $y_1, y_2, \dots, y_m$ — в левых. Все знаки неравенств имеют вид «$\geqslant$», если $F(Y) \to \min$, и «$\leqslant$», если $F(Y) \to \max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные $y_1, y_2, \dots, y_m$ входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j, совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j, с которым x_j входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i.

31.1. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Умножим первое ограничение-неравенство на −1. Задача примет вид исходной задачи симметричной пары двойственных задач (31.2):

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$F(Y) = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \to \max.$$

Функция $F(Y)$ максимизируется, так как целевая функция исходной задачи минимизируется.

Умножим коэффициенты при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим $-2y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3$. Данная сумма меньше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции $-2y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 5$. Неравенство имеет вид «$\leqslant$», потому что целевая функция двойственной задачи максимизируется. Аналогично составляются еще два ограничения двойственной задачи (соответствуют переменным x_2, x_3):

$$-1 \cdot y_1 + 2y_2 - 1 \cdot y_3 \leqslant 2,$$
$$1 \cdot y_1 - 1 \cdot y_2 + 2y_3 \leqslant 3.$$

Все переменные двойственной задачи удовлетворяют условию неотрицательности, потому что все ограничения исходной задачи — неравенства.

Окончательно двойственная задача имеет вид

$$F(Y) = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 5, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leqslant 2, \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \leqslant 3, \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

31.2. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Данная задача имеет вид исходной задачи второй несимметричной пары двойственных задач (31.4). Записываем двойственную задачу:

$$F(Y) = 17y_1 + 11y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 5y_2 \leqslant 2, \\ 5y_1 + 3y_2 \leqslant -2, \\ 3y_1 + y_2 \leqslant -4, \\ 2y_1 + 2y_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

Переменные y_1, y_2 не должны удовлетворять условию неотрицательности, так как они соответствуют ограничениям-равенствам исходной задачи.

31.3. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, & y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 7, & y_2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6, & y_3 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим второе ограничение-неравенство на -1, так как в задаче на минимум неравенства должны иметь вид «$\geqslant$» (см. правило 3). Исходная задача примет вид

$$Z(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, & y_1 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 \geqslant -7, & y_2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6, & y_3 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Составляем двойственную задачу

$$F(Y) = 3 + y_1 - 7y_2 + 6y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - y_3 \leqslant 2, \\ -3y_1 - 4y_2 + y_3 \leqslant 1, \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leqslant 6, \end{cases}$$

$$y_2 \geqslant 0, \quad y_3 \geqslant 0.$$

Переменная y_1, соответствующая ограничению-равенству, может быть любого знака (см. правило 4).

Составить двойственные задачи для следующих задач:

31.4. $Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.5. $Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.6. $Z(X) = 2x_1 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

31.7. $Z(X) = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

31.8. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.9. $Z(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.2. Первая теорема двойственности

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие. Возможны следующие случаи:

- обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;
- одна из задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, а другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема. *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают.*

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

31.10. Для данной задачи составить двойственную, решить ее симплексным методом и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl|l} 2x_1 + & x_2 + & 2x_3 \geqslant & 6, & y_1 \\ x_1 + & x_2 - & x_3 \geqslant & 5, & y_2 \\ & x_2 + & 2x_3 \geqslant & 2, & y_3 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Используя вторую симметричную пару двойственных задач (31.2), составляем задачу, двойственную к исходной:

$$F(Y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{l} \\ \left\{\begin{array}{rrrl} 2y_1 + & y_2 & & \leqslant 2, \\ y_1 + & y_2 + & y_3 & \leqslant 4, \\ 2y_1 - & y_2 + & 2y_3 & \leqslant 6, \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{|l} \text{Д} \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{array}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Вводя неотрицательные дополнительные переменные y_4, y_5, y_6, приводим задачу к каноническому виду:

$$F(Y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_4 = 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 4, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 = 6, \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Находим начальное опорное решение $Y_1 = (0, 0, 0, 2, 4, 6)$ с базисом из единичных векторов $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$. Решение задачи симплексным методом приведено в табл. 31.1.

Таблица 31.1

			6	↓5	↓2	0	0	0			
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_2	θ_3
← A_4	0	2	2	$\boxed{1}$	0	1	0	0	**1**	**2**	—
A_5	0	4	1	1	1	0	1	0	4	4	4
A_6	0	6	2	–1	2	0	0	1	3	—	**3**
Δ_j		0	–6	–5	–2	0	0	0	θ_4		
A_2	5	2	2	1	0	1	0	0	2		
← A_5	0	2	–1	0	$\boxed{1}$	–1	1	0	—		
A_6	0	8	4	0	2	1	0	1	$^4/_3$		
Δ_j		10	4	0	–2	5	0	0			
A_2	5	2	2	1	0	1	0	0	$\max F(Y) = 14$,		
A_3	2	2	–1	0	1	–1	1	0	$Y^* = (0, 2, 2)$,		
A_6	0	4	6	0	0	3	–2	1	$Б^* = (A_2, A_3, A_6)$		
Δ_j		14	2	0	0	3	2	0			

Оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = (0, 2, 2, 0, 0, 4)$, его базис $Б^* = (A_2, A_3, A_6)$, значение целевой функции $\max F(Y) = F(Y^*) = 14$.

Оптимальное решение исходной задачи, двойственной к решенной, можно найти по формуле

$$X^* = C^* D^{-1}. \tag{31.5}$$

Матрица D состоит из координат векторов A_2, A_3, A_6, входящих в базис оптимального решения двойственной задачи:

$$D = (A_2, A_3, A_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D^{-1} находится в последней симплексной таблице. Ее столбцы располагаются под столбцами единичной матрицы, т.е. под единичными векторами A_4, A_5, A_6, образующими базис начального опорного решения:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора C^* являются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных оптимального решения y_2, y_3, y_6. Данные коэффициенты записываются в том же порядке, в каком векторы условий входят в базис оптимального решения, т.е. $C^* = (5, 2, 0)$.

Вычисляем $X^* = C^*D^{-1} = (5, 2, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 0)$.

Оптимальное решение исходной задачи можно найти проще, по формуле

$$x_i^* = \Delta_i^* + c_i^*, \quad i = 1, 2, 3. \tag{31.6}$$

Для этого необходимо к оценкам разложений по базису оптимального решения векторов A_4, A_5, A_6, входящих в базис начального опорного решения, т.е. к оценкам этих векторов в последней симплексной таблице, прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции (они расположены над верхней строкой таблицы над соответствующими оценками)

$$x_1^* = 3 + 0 = 3, \quad x_2^* = 2 + 0 = 2, \quad x_3^* = 0 + 0 = 0.$$

Ответ: $\min Z(X) = 14$ при $X^* = (3, 2, 0)$.

Для следующих задач составить и решить двойственные и, используя их решение, найти решение исходных задач:

31.11. $Z(X) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.12. $Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geqslant -2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.13. $Z(X) = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.14. $Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 3, \\ x_2 + 2x_3 \geqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.15. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.16. $Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.17. $Z(X) = 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leqslant 7, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.18. $Z(X) = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + x_3 \geqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 10, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.19. $Z(X) = 15x_1 + 7x_2 + 12x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.20. $Z(X) = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 7, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ 11x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leqslant 27, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.21. $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geqslant 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.22. $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leqslant 4, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 \geqslant 5, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.3. Вторая теорема двойственности

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{31.7}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \qquad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Теорема. *Для того чтобы допустимые решения* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ *являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства*:

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \tag{31.8}$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{31.9}$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i-е ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i-я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i-я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

31.23. Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, & \Big| \; y_1 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 30, & \Big| \; y_2 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Составим двойственную задачу

$$F(Y) = 6y_1 + 30y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - \ \ y_2 \leqslant -\ 2, & (1) \\ -\ y_1 + 2y_2 \leqslant \ \ \ 4, & (2) \\ \ \ \ y_1 + 4y_2 \leqslant \ 14, & (3) \\ \ 2y_1 - 5y_2 \leqslant \ \ \ 2. & (4) \end{cases}$$

Решим эту задачу графическим методом. На рис. 31.1 изображены область допустимых решений задачи, нормаль $\bar{n}$ = (6, 30) линий уровня, линии уровня и оптимальное решение задачи Y^* = (2, 3).

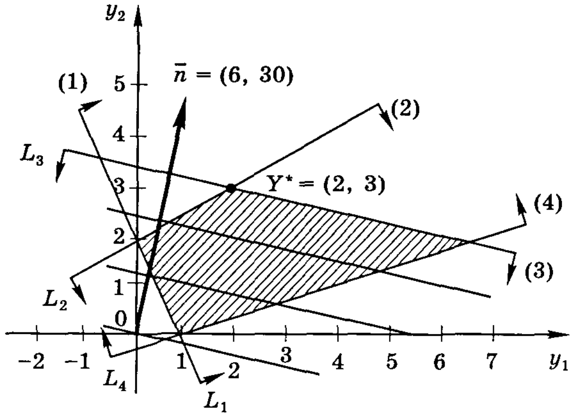


Рис. 31.1

$$Y^* = L_2 \cap L_3,$$

$$+\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = \ \ 4, & (L_2) \\ \ \ y_1 + 4y_2 = 14 & (L_3) \end{cases}$$
$$6y_2 = 18;$$

$$y_2^* = 3, \ \ y_1^* = 2;$$
$$Y^* = (2, 3);$$

$$F(Y^*) = 6 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 102.$$

Подставим оптимальное решение Y^* = (2, 3) в систему ограничений. Получим, что ограничения (1) и (4) выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} -2 \cdot 2 - 3 < -2 \Rightarrow x_1^* = 0, \\ -2 + 2 \cdot 3 = 4, \\ 2 + 4 \cdot 3 = 14, \\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 < 2 \Rightarrow x_4^* = 0. \end{cases}$$

Согласно второй теореме двойственности соответствующие координаты оптимального решения двойственной задачи, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1^* = x_4^* = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи получим

$$+\begin{cases} -\ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 6, \\ \ 2x_2 + 4x_3 = 30 \end{cases} \Bigg| \times 2$$
$$6x_3 = 42;$$

$$x_3^* = 7, \quad x_2^* = 1; \quad X^* = (0, 1, 7, 0).$$

О т в е т: $\min Z(X) = 102$ при $X^* = (0, 1, 7, 0)$.

Для следующих задач составить двойственные, решить их графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решения исходных задач:

31.24. $Z(X) = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.25. $Z(X) = -x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.26. $Z(X) = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 10x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.27. $Z(X) = 24x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.28. $Z(X) = -x_1 - 7x_2 - 8x_3 + x_4 + 4x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.29. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.30. $Z(X) = -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.31. $Z(X) = -2x_1 + 7x_2 - 10x_4 + 6x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$

31.4. Двойственный симплексный метод (метод последовательного уточнения оценок)

Двойственный симплексный метод, как и обычный симплексный метод, позволяет в результате последовательного улучшения так называемых почти допустимых опорных решений либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(X) = CX \to \max,$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0,$$

$$X \geqslant \theta.$$

Почти допустимым опорным решением (ПДОР) задачи линейного программирования называется такой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$, который удовлетворяет системе ограничений задачи, не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных и для которого векторы условий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, соответствующие отличным от нуля координатам, линейно независимы.

В двойственном симплексном методе рассматриваются ПДОР, при которых оценки Δ_k разложений векторов условий A_k по базису ПДОР соответствуют признаку оптимальности, т.е.:

- в задаче на максимум $\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$;
- в задаче на минимум $\Delta_k \leqslant 0 \quad \forall k$.

Почти допустимое опорное решение является о п т и м а л ь н ы м, если оно является допустимым (признак оптимальности ПДОР).

Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) для заданного ПДОР с неотрицательными (неположительными) оценками хотя бы одна координата отрицательная $x_{l0} < 0$ и при этом среди коэффициентов x_{lj} ($j = 1, 2, ..., n$) разложений векторов условий по базису данного решения существует хотя бы один отрицательный $x_{lk} < 0$, то решение может быть улучшено (приближено к оптимальному), т.е. можно построить новое ПДОР, для которого значение целевой функции будет меньше (больше), если из его базиса вывести вектор A_l и ввести вектор A_k, номер которого находится из условия

$$\theta_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{x_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{x_{lk}} \right|, \quad x_{lj} < 0. \tag{31.10}$$

Если для ПДОР существует хотя бы одна отрицательная координата x_{l0} и при этом не существует отрицательного коэффициента x_{lj} разложений векторов условий A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений (признак отсутствия решения задачи ввиду несовместности системы ограничений).

Алгоритм двойственного симплексного метода:

1. Привести задачу к каноническому виду.

2. Найти ПДОР с базисом из единичных векторов, вычислить оценки векторов условий по базису этого решения и, если они согласуются с признаком оптимальности, решить задачу двойственным симплексным методом.

3. Если ПДОР не имеет отрицательных координат, то оно является допустимым и оптимальным. Решение задачи заканчивается.

4. Если ПДОР имеет отрицательную координату $x_{l0} < 0$, для которой соответствующие коэффициенты разложений всех векторов условий неотрицательные ($x_{lj} \geqslant 0 \quad \forall j$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений. Решение задачи прекращается.

5. Если имеется хотя бы одна отрицательная координата ПДОР $x_{l0} < 0$ и при этом найдется хотя бы один отрицательный коэффициент x_{lj} разложений векторов условий A_j по базису решения, перейти к новому решению, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному. Номер вектора A_k, вводимого в базис, находится с использованием параметра θ_{0l} (31.10). Номер вектора A_l, выводимого из базиса, находится из условия $\min\limits_l \{x_{l0}\theta_{0l}\}$ в задаче на максимум или $\max\limits_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}$ в задаче на минимум.

Далее перейти к пункту 3 данного алгоритма.

31.32. Решить двойственным симплексным методом

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 15, \end{cases} \quad \begin{array}{|c} \text{Д} \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -x_6 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Приводим задачу к каноническому виду, для чего вводим в левые части ограничений-неравенств неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6:

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Для нахождения ПДОР с базисом из единичных векторов умножим каждое из ограничений на -1, получим

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -5, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -12, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = -15, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Записываем начальное ПДОР: $X_1 = (0, 0, 0, -5, -12, -15)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

Вычисляем оценки Δ_j разложений векторов условий по базису ПДОР и заполняем первую симплексную таблицу (табл. 31.2). Оценки для векторов условий, не входящих в базис, отрицательные. Следовательно, условия применимости двойственного симплексного метода к задаче на отыскание минимума выполнены. Начальное ПДОР $X_1 = (0, 0, 0, -5, -12, -15)$ не является оптимальным, так как не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных задачи. Переходим к новому ПДОР с неположительными оценками для векторов условий. Для того чтобы оценки остались неположительными, необходимо номер k вектора A_k, вводимого в базис, выбрать из условия (31.10). (В таблицах отношения $|\Delta_j / x_{lj}|$, соответствующие минимуму параметра θ_{0l}, выделены жирным шрифтом.) При этом номер l вектора A_l, выводимого из базиса, должен соответствовать отрицательной координате x_l ПДОР. В данном случае отрицательными являются три координаты: $x_4 = -5$, $x_5 = -12$, $x_6 = -15$. Для соответствующих строк (1, 2 и 3-й) симплексной таблицы находим

$$\theta_{01} = \min_j \left\{ \left| \frac{-15}{-3} \right| \right\} = \min_j \{5\} = 5 \text{ при } j = 2;$$

$$\theta_{02} = \min_j \left\{ \left| \frac{-2}{-3} \right|, \left| \frac{-15}{-1} \right|, \left| \frac{-6}{-2} \right| \right\} = \min_j \left\{ \frac{2}{3}, 15, 3 \right\} = \frac{2}{3} \text{ при } j = 1;$$

$$\theta_{03} = \min_j \left\{ \left| \frac{-2}{-1} \right|, \left| \frac{-15}{-1} \right|, \left| \frac{-6}{-1} \right| \right\} = \min_j \{2, 15, 6\} = 2 \text{ при } j = 1.$$

Отсюда следует, что оценки для векторов, не входящих в базис, останутся отрицательными, если при выведении первого вектора базиса A_4 ввести в базис вектор A_2 или при выведении второго или третьего векторов базиса (A_5 или A_6) ввести вектор A_1.

Таблица 31.2

	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
				2 ↓	15	6	0	0	0
	A_4	0	−5	1	−3	1	1	0	0
	A_5	0	−12	−3	−1	−2	0	1	0
←	A_6	0	−15	$\boxed{-1}$	−1	−1	0	0	1
	Δ_j		0	−2	−15	−6	0	0	0
	θ_1			—	5	—	—	—	—
	θ_2			$^2/_3$	15	3	—	—	—
	θ_3			2	15	6	—	—	—

Для обеспечения скорейшего достижения экстремума целевой функции задачи на отыскание минимума номер l вектора, выводимого из базиса, определяем из условия

$$\max_l \Delta Z_l = \max_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}, \quad x_l < 0, \tag{31.11}$$

где ΔZ_l есть приращение целевой функции при введении в базис ПДОР вектора A_l. Вычисляем максимум:

$$\max_l \Delta Z_l = \max_l \{-(-5)\cdot 5, -(-12)\cdot \frac{2}{3}, -(-15)\cdot 2\} = \max_l \{25, 8, 30\} = 30 \text{ при } l = 3.$$

Третий ($l = 3$) вектор базиса A_6 заменяем вектором A_1 ($\theta_{03} = 2$ при $j = 1$). Выполняем преобразование Жордана с разрешающим элементом $a_{31} = -1$ (см. табл. 31.2).

Получаем новое ПДОР $X_2 = (15, 0, 0, -20, 33, 0)$ (табл. 31.3). Данное решение X_2 не является оптимальным, так как координата решения, содержащаяся в первой строке симплексной таблицы, отрицательная: $x_4 = -20$. Находим

$$\theta_{01} = \min_j \left\{ \left| \frac{-13}{-4} \right| \right\} = \min_j \left\{ \frac{13}{4} \right\} = \frac{13}{4} \text{ при } j = 2.$$

Таблица 31.3

			2	15 ↓	6	0	0	0
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
← A_4	0	–20	0	$\boxed{-4}$	0	1	0	0
A_5	0	33	0	2	1	0	1	0
A_1	2	15	1	1	1	0	0	–1
Δ_j		30	0	–13	–4	0	0	–2
θ_2			—	$^1/_4$	—	—	—	—

Выводим из базиса $Б_2 = (A_4, A_5, A_1)$ решения X_2 вектор A_4, вводим вектор A_2, переходим к ПДОР $X_3 = (10, 5, 0, 0, 23, 0)$, которое является оптимальным, так как удовлетворяет условиям неотрицательности (табл. 31.4).

Таблица 31.4

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	15	5	0	1	0	$-^1/_4$	0	$-^1/_4$
A_5	0	23	0	0	1	$^1/_2$	1	$^1/_2$
A_1	2	10	1	0	1	$^1/_4$	0	$^1/_4$
Δ_j		95	0	0	–4	$^{-13}/_4$	0	$^{-21}/_4$

Ответ: $\min Z(X) = 95$ при $X^* = (10, 5, 0, 0, 23, 0)$.

Решить двойственным симплексным методом:

31.33. $Z(X) = 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 5, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.34. $Z(X) = 15x_1 + 2x_2 + 12x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 5, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.35. $Z(X) = 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.36. $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 12, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geqslant 3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.37. $Z(X) = 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 7, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.38. $Z(X) = 15x_1 + 7x_2 + 12x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 20, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.39. $Z(X) = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.40. $Z(X) = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

32. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

32.1. Математическая модель транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известны c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи записываются в таблице вида

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок $X = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \dots\ x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22}\ \dots\ x_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1}\ x_{m2}\ \dots\ x_{mn} \end{pmatrix}$.

Математическая модель транспортной задачи в общем случае имеет вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (32.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (32.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, .., n, \qquad (32.3)$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (32.4)$$

Целевая функция задачи (32.1) выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов. Первая группа из m уравнений (32.2) описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью. Вторая группа из n уравнений (32.3) выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей. Неравенства (32.4) являются условиями неотрицательности всех переменных задачи.

Таким образом, математическая формулировка транспортной задачи состоит в следующем: найти переменные задачи

$$X = (x_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

удовлетворяющие системе ограничений (32.2), (32.3), условиям неотрицательности (32.4) и обеспечивающие минимум целевой функции (32.1).

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (32.5)$$

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель — *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель — *открытой*.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей (см. равенство (32.5)), т.е. задача должна быть с правильным балансом.

32.1. Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

Решение. Введем переменные задачи (матрицу перевозок)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу стоимостей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи равна сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X:

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X — запасам второго поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110.$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 50,$$

$$x_{12} + x_{22} = 70,$$

$$x_{13} + x_{23} = 80.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными: $x_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Ответ: математическая модель задачи формулируется следующим образом: найти переменные задачи, обеспечивающие минимум функции

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110, \\ x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 70, \\ x_{13} + x_{23} = 80 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_{ij} \geqslant 0, \ i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n.$$

Для следующих транспортных задач составить математические модели:

32.2.

a_i \ b_j	40	20
20	7	4
30	5	3
10	6	8

32.3.

a_i \ b_j	100	50	50
50	9	7	1
70	8	5	3
80	4	2	6

32.2. Опорное решение транспортной задачи

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того что ранг системы векторов условий транспортной задачи равен $N = m + n - 1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат больше, чем N.

Для проверки линейной независимости векторов условий, соответствующих координатам допустимого решения, используют циклы.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), ..., (i_k, j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя также находятся в одной строке или столбце.

Система векторов условий транспортной задачи линейно независима тогда и только тогда, когда из соответствующих им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла. Следовательно, допустимое решение транспортной задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ является опорным только в том случае, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

Метод вычеркивания. Для проверки возможности образования цикла используется так называемый метод вычеркивания, который состоит в следующем.

Если в строке или столбце таблицы одна занятая клетка, то она не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждой строке или в столбце. Следовательно, можно вычеркнуть все строки таблицы, содержащие по одной занятой клетке, затем вычеркнуть все столбцы, содержащие по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов. Если в результате вычеркиваний все строки и столбцы будут вычеркнуты, значит, из занятых клеток таблицы нельзя выделить часть, образующую цикл, и система соответствующих векторов условий является линейно независимой, а решение — опорным. Если же после вычеркиваний останется часть клеток, то эти клетки образуют цикл, система соответствующих векторов условий линейно зависима, а решение не является опорным.

Метод северо-западного угла. Согласно данному методу запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. При этом нулевые перевозки принято заносить в таблицу только в том случае, когда они попадают в клетку (i, j), подлежащую заполнению, т.е. в таблицу заносятся только базисные нули (0^*), остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно $m + n - 1$ и векторы условий, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Необходимо иметь в виду, что метод северо-западного угла не учитывает стоимость перевозок, поэтому опорное решение, построенное по данному методу, может быть далеким от оптимального.

32.4. Составить начальное опорное решение, используя метод северо-западного угла, для транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	250	300	200	200
200	9	8	3	1
350	7	10	6	4
400	2	3	8	12

Решение. Распределяем запасы первого поставщика. Так как его запасы $a_1 = 200$ меньше запросов первого потребителя $b_1 = 250$, то в клетку (1, 1) записываем перевозку $x_{11} = 200$ и исключаем из рассмотрения первого поставщика (табл. 32.1). Определяем оставшиеся неудовлетворенными запросы первого потребителя $b_1' = b_1 - a_1 = 250 - 200 = 50$.

Распределяем запасы второго поставщика. Так как его запасы $a_2 = 350$ больше оставшихся неудовлетворенными запросов первого потребителя $b_1' = 50$, то в клетку (2, 1) записываем перевозку $x_{21} = 50$ и исключаем из рассмотрения первого потребителя. Определяем оставшиеся запасы второго поставщика $a_2' = a_2 - b_1' = 350 - 50 = 300$. Так как $a_2' = b_2 = 300$, то в клетку (2, 2) записываем $x_{22} = 300$ и исключаем по своему усмотрению либо второго поставщика, либо второго потребителя. Пусть исключили второго поставщика. Вычисляем оставшиеся неудовлетворенными запросы второго потребителя $b_2' = b_2 - a_2' = 300 - 300 = 0$.

Распределяем запасы третьего поставщика. Так как $a_3 > b_2'$ $(400 > 0)$, то в клетку (3, 2) записываем $x_{32} = 0$ и исключаем второго потребителя. Запасы третьего поставщика не изменились $a_3' = a_3 - b_2' = 400 - 0 = 400$. Сравниваем a_3' и b_3 $(400 > 200)$, в клетку (3, 3) записываем $x_{33} = 200$, исключаем третьего потребителя и вычисляем $a_3'' = a_3' - b_3 = 400 - 200 = 200$. Так как $a_3'' = b_4$, то в клетку (3, 4) записываем $x_{34} = 200$. Ввиду того что задача с правильным балансом, запасы всех поставщиков исчерпаны и запросы всех потребителей удовлетворены полностью.

Результаты построения опорного решения приведены в табл. 32.1.

Таблица 32.1

a_i \ b_j	250	300	200	200
200	9 200	8	3	1
350	7 50	10 300	6	4
400	2	3 0	8 200	12 200

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток должно быть равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. В табл. 32.1 занято 6 клеток.

Применяя метод вычеркивания, убеждаемся, что найденное решение является «вычеркиваемым»:

$$X = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0^* & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, векторы условий, соответствующие занятым клеткам, линейно независимы и построенное решение действительно является опорным.

Метод минимальной стоимости. Данный метод позволяет построить опорное решение, которое достаточно близко к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min\limits_{i,\,j}\{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую $\min\limits_{i,\,j}\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы заканчиваются. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от него требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично поступают с потребителем.

32.5. Используя метод минимальной стоимости, построить начальное опорное решение транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	80	120	160	120
120	1	3	4	2
160	4	5	8	3
200	2	3	6	7

Решение. Запишем отдельно матрицу стоимостей для того, чтобы удобнее было выбирать минимальные стоимости, вычеркивать строки и столбцы:

$$\begin{array}{cc} C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 5 \end{array} \\ \quad\;\; \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 3 \end{array} & \end{array}$$

Среди элементов матрицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость $c_{11} = 1$, отмечаем ее кружочком. Это стоимость перевозки груза от первого поставщика первому потребителю. В соответствующую клетку (1, 1) записываем максимально возможную перевозку $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{120, 80\} = 80$ (табл. 32.2). Запасы первого поставщика уменьшаем на 80, $a_1' = a_1 - b_1 = 120 - 80 = 40$. Исключаем из рассмотрения первого потребителя, так как его запросы удовлетворены. В матрице C вычеркиваем первый столбец.

Таблица 32.2

$a_i \backslash b_j$	80	120	160	120
120	1 80	3	4	2 40
160	4	5	8 80	3 80
200	2	3 120	6 80	7

В оставшейся части матрицы C наименьшей является стоимость $c_{14} = 2$. Максимально возможная перевозка, которую можно осуществить от первого поставщика четвертому потребителю, равна $x_{14} = \min\{a_1', b_4\} = \min\{40, 120\} = 40$. В соответствующую клетку таблицы записываем перевозку $x_{14} = 40$. Запасы первого поставщика исчерпаны, исключаем его из рассмотрения. В матрице C вычеркиваем первую строку. Запросы четвертого потребителя уменьшаем на 40, $b_4' = b_4 - a_1' = 120 - 40 = 80$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $c_{24} = c_{32} = 3$. Заполняем одну из двух клеток таблицы (2, 4) или (3, 2). Пусть в клетку (2, 4) запишем $x_{24} = \min\{a_2, b_4'\} = \min\{160, 80\} = 80$. Запросы четвертого потребителя удовлетворены полностью, исключаем его из рассмотрения, вычеркиваем четвертый столбец в матрице C. Уменьшаем запасы второго поставщика $a_2' = a_2 - b_4' = = 160 - 80 = 80$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $\min\{c_{ij}\} = c_{32} = 3$. Запишем в клетку таблицы (3, 2) перевозку $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{200, 120\} = 120$. Исключаем из рассмотрения второго потребителя, а из матрицы C второй столбец. Вычисляем $a_3' = a_3 - b_2 = 200 - 120 = 80$.

В оставшейся части матрицы C наименьшая стоимость $\min\{c_{ij}\} = c_{33} = 6$. Запишем в клетку таблицы (3, 3) перевозку $x_{33} = \min\{a_3', b_3\} = \min\{80, 160\} = 80$. Исключаем из рассмотрения третьего поставщика, а из матрицы C третью строку. Определяем $b_3' = b_3 - a_3' = 160 - 80 = 80$.

В матрице C остался единственный элемент $c_{23} = 8$. Записываем в клетку таблицы (2, 3) перевозку $x_{23} = 80$.

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток таблицы равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ (см. табл. 32.2). Применяя метод вычеркивания, проверяем линейную независимость векторов условий, соответствующих положительным координатам решения. Порядок вычеркивания показан на матрице X:

$$X = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 80 & 80 \\ 0 & 120 & 80 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

Решение является «вычеркиваемым» и, следовательно, опорным.

Переход от одного опорного решения к другому. В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решением. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок (осуществляется сдвиг по циклу). Перевозка «загружается» в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Для удобства вычислений вершины циклов нумеруют и отмечают нечетные знаком «+», а четные знаком «–». Такой цикл называется *означенным* (рис. 32.1).

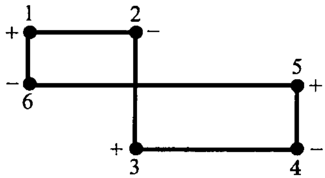


Рис. 32.1

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», и уменьшение объемов перевозок на ту же величину θ во всех четных клетках, отмеченных знаком «–».

Для следующих транспортных задач составить начальные опорные решения, используя методы северо-западного угла и минимальной стоимости:

32.6.

$a_i \backslash b_j$	20	30	30	20
23	4	3	6	5
38	3	4	5	6
39	2	5	4	7

32.7.

$a_i \backslash b_j$	40	40	30	50
40	3	1	5	4
60	6	1	2	3
60	4	4	5	7

32.8.

$a_i \backslash b_j$	20	20	30	30
20	2	4	8	2
30	4	6	10	3
50	2	5	9	7

32.9.

$a_i \backslash b_j$	100	100	150	150
100	2	1	3	4
150	4	3	1	7
250	5	8	9	15

32.3. Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов.

Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i, $i = 1, 2, ..., m$ и потребителей v_j, $j = 1, 2, ..., n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0, \tag{32.6}$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0. \tag{32.7}$$

Группа равенств (32.6) используется как система уравнений для нахождения потенциалов. Данная система уравнений имеет $m + n$ неизвестных u_i, $i = 1, 2, ..., m$ и v_j, $j = 1, 2, ..., n$. Число уравнений системы, как и число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения, равно $m + n - 1$. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одной из них можно задать значение произвольно, а остальные найти из системы.

Группа неравенств (32.7) используется для проверки оптимальности опорного решения. Эти неравенства удобнее представить в следующем виде:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = 0. \tag{32.8}$$

Числа Δ_{ij} называются *оценками* для свободных клеток таблицы (векторов условий) транспортной задачи.

Опорное решение является оптимальным, если для всех векторов условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

Оценки для свободных клеток транспортной таблицы используются при улучшении опорного решения. Для этого находят клетку (l, k) таблицы, соответствующую $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Если $\Delta_{lk} \leqslant 0$, то решение оптимальное. Если же $\Delta_{lk} > 0$, то для соответствующей клетки (l, k) строят цикл и улучшают решение, перераспределяя груз $\theta = \min\limits_{\leftarrow\rightarrow}\{x_{ij}\}$ по этому циклу.

Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом:

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(n + 1)$-го потребителя с запросами $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, равными разности суммарных запасов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{i(n+1)} = 0 \quad \forall i$.

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(m + 1)$-го поставщика с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{(m+1)j} = 0 \quad \forall j$.

3. При составлении начального опорного решения в последнюю очередь следует распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запросы фиктивного потребителя, несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

Алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов:

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводится фиктивный поставщик или потребитель с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Построить начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом), проверить правильность его построения по количеству занятых клеток (их должно быть $m + n - 1$) и убедиться в линейной независимости векторов условий (используя метод вычеркивания).

3. Построить систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0,$$

которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения системы одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам

$$u_i = c_{ij} - v_j \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{32.9}$$

если известен потенциал v_j, и

$$v_j = c_{ij} - u_i \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{32.10}$$

если известен потенциал u_i.

4. Проверить выполнение условия оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

и те из них, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leqslant 0$, то вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, опорное решение не является оптимальным.

5. Перейти к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка

$$\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}.$$

Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min\limits_{\leftarrow - \rightarrow}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «–», в которой достигается $\min\limits_{\leftarrow - \rightarrow}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$.

Далее перейти к пункту 3 данного алгоритма.

32.10. Решить транспортную задачу, исходные данные которой таковы:

$a_i \backslash b_j$	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12

Решение. 1. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и суммарные запросы потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 300 + 500 = 1000, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим четвертого, фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 1000 = 100$ и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза (табл. 32.3).

2. Находим начальное опорное решение методом минимальной стоимости (см. табл. 32.3). Полученное решение X_1 имеет $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении: $Z(X_1) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 100 + 9 \cdot 300 + 12 \cdot 100 + 0 \cdot 100 = 5300$.

Таблица 32.3

a_i \ b_j	200	200	300	400
200	4	3	2	1 200
300	2 200	3 100	5	6
500	6	7 100	9 300	12 100
100	0	0	0	0 100

3. Для проверки оптимальности опорного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке таблицы транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости ($u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$). Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_2 = 7, \\ u_3 + v_3 = 9, \\ u_3 + v_4 = 12, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Система неопределенная. Одному из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $u_3 = 0$. Остальные потенциалы находятся однозначно:

$$\begin{aligned} &u_3 = 0; \\ &v_2 = 7 - u_3 = 7 - 0 = 7; \\ &v_3 = 9 - u_3 = 9 - 0 = 9; \\ &v_4 = 12 - u_3 = 12 - 0 = 12; \\ &u_1 = 1 - v_4 = 1 - 12 = -11; \\ &u_4 = 0 - v_4 = 0 - 12 = -12; \\ &u_2 = 3 - v_2 = 3 - 7 = -4; \\ &v_1 = 2 - u_2 = 2 - (-4) = 6. \end{aligned}$$

Значения потенциалов записываем в таблицу рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей (табл. 32.4).

Система уравнений для нахождения потенциалов достаточно проста, обычно ее решают устно. Любой неизвестный потенциал, соответствующий занятой клетке, равен находящейся в этой клетке стоимости минус известный потенциал, соответствующий этой же клетке.

Таблица 32.4

X_1

	a_i \ b_j	$v_1 = 6$ 200	$v_2 = 7$ 200	$v_3 = 9$ 300	$v_4 = 12$ 400
$u_1 = -11$	200	4 –	3 –	2 –	1 200
$u_2 = -4$	300	2 200	– 3 100	5 $\boxed{0}$	+ 6 $\boxed{2}$
$u_3 = 0$	500	6 $\boxed{0}$	7 100 +	9 300	12 100 –
$u_4 = -12$	100	0 –	0 –	0 –	0 100

4. Проверяем опорное решение X_1 на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки Δ_{ij} для всех незаполненных клеток таблицы (для всех занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$):

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -11 + 6 - 4 = -9 < 0$; $\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -11 + 7 - 3 = -7 < 0$;
$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -11 + 9 - 2 = -4 < 0$; $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -4 + 9 - 5 = 0$;
$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -4 + 12 - 6 = 2 > 0$; $\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 6 - 6 = 0$;
$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -12 + 6 - 0 = -6 < 0$; $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -12 + 7 - 0 = -5 < 0$;
$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -12 + 9 - 0 = -3 < 0$.

Положительные оценки записываем в левые нижние углы соответствующих клеток таблицы, вместо отрицательных ставим знак «–».

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительная оценка $\Delta_{24} = 2$.

5. Переходим к новому опорному решению. Для клетки (2, 4) с положительной оценкой строим цикл. Ставим в эту клетку знак «+», присоединяем ее к занятым клеткам и, применяя метод вычеркивания, находим цикл (2, 4), (3, 4), (3, 2), (2, 2). Цикл изображен в табл. 32.4. В угловых точках цикла расставляем поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке (2, 4). В клетки, отмеченные знаком «+», добавляется груз θ, а из клеток, отмеченных знаком «–», убавляется такой же по величине груз. Определяем величину груза θ, перераспределяемого по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–»: $\theta = \min\limits_{«-»}\{100, 100\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем второе опорное решение X_2 (табл. 32.5).

Таблица 32.5

X_2		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$
	$a_i \backslash b_j$	200	200	300	400
$u_1 = -5$	200	^{4} –	^{3} –	^{2} –	^{1} 200
$u_2 = 0$	300	^{2} 200	^{3} 0	^{5} $\boxed{0}$	^{6} 100
$u_3 = 4$	500	^{6} $\boxed{0}$	^{7} 200	^{9} 300	^{12} –
$u_4 = -6$	100	^{0} –	^{0} –	^{0} –	^{0} 100

Находим для этого решения потенциалы (они приведены в табл. 32.5). Вычисляем оценки:

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -5 + 2 - 4 = -7 < 0$; $\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -5 + 3 - 3 = -5 < 0$;

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -5 + 5 - 2 = -2 < 0$; $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 5 - 5 = 0$;

$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 2 - 6 = 0$; $\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 4 + 6 - 12 = -2 < 0$;

$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -6 + 2 - 0 = -4 < 0$; $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -6 + 3 - 0 = -3 < 0$;

$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -6 + 5 - 0 = -1 < 0$.

Все оценки неположительные. Следовательно, решение является оптимальным. Вычисляем значение целевой функции на этом решении:

$$Z(X_2) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200.$$

Ответ: $\min Z(X) = 5200$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}$.

Решить транспортные задачи методом потенциалов:

32.11.

$a_i \backslash b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

32.12.

$a_i \backslash b_j$	10	10	5	8	7
7	4	6	8	3	2
13	5	3	4	6	4
20	3	2	5	7	5

32.13.

$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3

32.14.

$a_i \backslash b_j$	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4
600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

32.15.

$a_i \backslash b_j$	300	200	300	100
300	3	4	3	1
200	2	3	5	6
100	1	2	3	3
200	4	5	7	9

32.16.

$a_i \backslash b_j$	200	300	400	200
200	1	3	4	2
200	1	2	4	1
300	3	4	5	9
300	6	3	7	6

32.17.

$a_i \backslash b_j$	10	15	15	10	10
5	3	4	5	4	6
10	1	5	7	1	5
15	4	6	6	3	4
10	2	7	4	7	2

32.18.

$a_i \backslash b_j$	30	90	60	90	30
30	1	3	4	3	1
60	9	5	2	4	8
90	3	4	7	4	3
60	5	7	2	6	6

32.19.

$a_i \backslash b_j$	5	10	15	15	15
10	2	1	3	5	7
5	4	3	4	4	3
5	5	2	3	6	2
10	3	6	5	2	4
15	1	9	7	3	4

32.20.

$a_i \backslash b_j$	5	5	10	10	5
5	3	4	6	5	13
5	6	3	7	6	10
10	10	5	2	2	6
15	9	4	4	9	5
10	4	6	2	3	4

32.21.

$a_i \backslash b_j$	200	200	100	200
200	5	2	1	1
300	1	3	4	4
200	4	2	3	1
200	4	3	5	2
100	3	2	4	2

32.22.

$a_i \backslash b_j$	100	200	200	100	200
100	2	3	4	2	5
200	3	1	1	3	1
300	4	3	3	5	4
200	5	1	2	6	7
100	2	9	8	7	6

32.23.

$a_i \backslash b_j$	10	30	30	30	40
10	3	1	3	4	3
30	5	1	2	2	6
60	2	3	4	1	1
10	6	2	5	3	2
60	3	7	4	4	1

32.24.

$a_i \backslash b_j$	20	20	40	40	40
20	4	5	2	4	3
40	3	1	3	5	2
80	2	7	6	8	6
40	3	3	1	4	9
20	1	6	9	2	7

32.25.

$a_i \backslash b_j$	1000	500	1500	2000
500	3	1	2	5
1500	1	3	4	2
500	3	6	5	6
1500	2	8	5	7
500	4	3	9	8

32.26.

$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200	100
200	1	7	12	2	5
100	2	3	8	4	7
200	3	5	4	6	9
400	4	4	3	8	2
400	5	3	7	10	1

32.27.

$a_i \backslash b_j$	50	25	50	75
25	3	1	8	1
50	2	5	2	3
75	9	4	6	5
25	7	3	10	3
75	4	6	7	4

32.28.

$a_i \backslash b_j$	20	30	20	20	10
20	1	5	1	1	5
30	4	2	6	7	9
10	3	4	5	6	5
30	4	2	3	3	6
30	6	2	3	5	4

32.29.

$a_i \backslash b_j$	150	200	200	400
150	1	4	7	2
300	3	6	3	9
250	4	8	12	2
150	1	5	9	13

32.30.

$a_i \backslash b_j$	40	60	40	60	20
20	3	3	4	2	3
40	1	2	1	5	3
60	4	8	2	9	12
40	5	7	1	3	6

32.31.

$a_i \backslash b_j$	300	150	300	150
150	2	1	3	1
250	8	3	7	4
250	6	4	9	3
150	5	2	4	2

32.32.

$a_i \backslash b_j$	200	300	200	300	100
100	2	3	4	5	1
200	2	4	2	6	7
300	6	5	4	5	4
400	4	6	7	6	9

32.4. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером l к потребителю с номером k. Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geqslant a$; 2) $x_{lk} \leqslant b$, где a и b — постоянные величины.

1. Если $x_{lk} \geqslant a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы l-го поставщика и запросы k-го потребителя на величину a (зарезервировать перевозку $x_{lk} = a$). В полученном оптимальном решении следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a.

2. Если $x_{lk} \leqslant b$, то необходимо вместо k-го потребителя с запросами b_k ввести двух других потребителей. Один из них с номером k должен иметь запросы $b_k' = b$, а другой с номером $n + 1$ — запросы $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M ($M \gg 1$). После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n + 1)$-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок k-го потребителя. Так как $c_{l(n+1)} = M$ — самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l,\ n + 1)$ останется пустой ($x_{l(n+1)} = 0$) и объем перевозки x_{lk} не превзойдет b.

32.33. Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 32.6, при дополнительных условиях: объем перевозки груза от второго поставщика второму потребителю должен быть не менее 200 единиц ($x_{22} \geqslant 200$), а от третьего первому — не более 300 единиц ($x_{31} \leqslant 300$).

Таблица 32.6

a_i \ b_j	600	500	400
300	2	9	10
400	2	11	13
500	4	10	12

Решение. Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки x_{22} был не менее 200 единиц, при решении задачи будем предполагать, что запасы второго поставщика a_2 и запросы второго потребителя b_2 меньше фактических на 200 единиц. После получения оптимального решения объем перевозки x_{22} увеличим на 200 единиц.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{31} \leqslant 300$, вместо первого потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запросы $b_1 = 300$ единиц и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны $b_4 = 600 - 300 = 300$ единиц и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у первого потребителя, за исключением c_{34}, которую примем равной сколь угодно большому числу M, т.е. $c_{34} = M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для четвертого потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для первого потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь следующий вид:

a_i \ b_j	300	300	400	300
300	2	9	10	2
200	2	11	13	3
500	4	10	12	M

Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия существования решения задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 300 + 200 + 500 = 1000;$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 300 + 300 + 400 + 300 = 1300.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1300 - 1000 = 300$ единиц (табл. 32.7).

Таблица 32.7

X_1

	b_j / a_i	$v_1 = 2$ 300	$v_2 = 0$ 300	$v_3 = 2$ 400	$v_4 = 2$ 300
$u_1 = 0$	300	300 ^{2} −	^{9} −	^{10} −	0 ^{2} +
$u_2 = 1$	200	$\boxed{0}$ ^{2}	^{11} −	^{13} −	200 ^{3}
$u_3 = 10$	500	$\boxed{8}$ + ^{4}	300 ^{10}	200 ^{12} −	^{M} −
$u_4 = -2$	300	$\boxed{0}$ ^{0}	^{0} −	200 ^{0} +	100 ^{0} −

Составляем начальное опорное решение X_1 методом минимальной стоимости и находим потенциалы (см. табл. 32.7). Вычисляем оценки для свободных клеток таблицы. Все оценки неположительные, кроме оценки $\Delta_{31} = 8$. Находим цикл для клетки (3, 1). Он состоит из клеток (3, 1), (1, 1), (1, 4), (4, 4), (4, 3), (3, 3). Находим величину груза для перераспределения по означенному циклу $\theta = \underset{\leftarrow - \rightarrow}{\min}\{200, 100, 300\} = 100$ при $(i, j) = (4, 4)$. Осуществляем сдвиг по этому циклу на величину $\theta = 100$, получаем второе опорное решение X_2 (табл. 32.8).

Таблица 32.8

X_2

	b_j / a_i	$v_1 = 4$ 300	$v_2 = 10$ 300	$v_3 = 12$ 400	$v_4 = 4$ 300
$u_1 = -2$	300	200 ^{2}	^{9} −	$\boxed{0}$ ^{10}	100 ^{2}
$u_2 = -1$	200	$\boxed{0}$ ^{2}	^{11} −	^{13} −	200 ^{3}
$u_3 = 0$	500	100 ^{4}	300 ^{10}	100 ^{12}	^{M} −
$u_4 = -12$	300	^{0} −	^{0} −	300 ^{0}	^{0} −

Решение X_2 оптимальное, так как все оценки неположительные. Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки x_{22} на 200 единиц и объединим объемы перевозок четвертого потребителя с объемами перевозок первого потребителя. Получим

$$X^* = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 200 & 200 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}.$$

Вычислим значение целевой функции на оптимальном решении:

$$Z(X^*) = 2 \cdot 300 + 2 \cdot 200 + 11 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 10 \cdot 300 + 12 \cdot 100 = 7800.$$

Ответ: $\min Z(X) = 7800$ при $X^* = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 200 & 200 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}.$

Решить транспортные задачи с учетом ограничений на перевозки грузов:

32.34.

$x_{24} \leqslant 500; \ x_{32} \geqslant 500$

$a_i \backslash b_j$	500	1000	500	1500
500	1	3	1	2
1500	1	6	4	3
1000	2	5	3	4
1500	3	5	4	3

32.35.

$x_{44} \leqslant 200; \ x_{33} \geqslant 100$

$a_i \backslash b_j$	300	300	300	300
100	7	2	3	1
200	2	4	4	7
300	3	4	5	5
400	4	3	3	2

32.36.

$x_{12} \leqslant 500; \ x_{33} \geqslant 1000$

$a_i \backslash b_j$	2000	1000	2000	1000
1000	2	1	3	1
1500	4	2	4	5
2000	5	6	9	3
500	3	5	8	6

32.37.

$x_{31} \leqslant 50; \ x_{14} \geqslant 50$

$a_i \backslash b_j$	100	100	50	100
100	3	4	5	6
50	1	2	3	4
100	2	6	7	9
50	4	5	2	8

32.38.

$x_{41} \leqslant 100; \ x_{33} \geqslant 50$

$a_i \backslash b_j$	200	100	200	50
100	5	4	7	8
50	2	9	2	1
100	3	4	10	6
200	3	6	5	7

32.39.

$x_{41} \leqslant 50; \ x_{33} \geqslant 100$

$a_i \backslash b_j$	100	100	200	200
50	1	3	6	4
100	1	1	2	3
200	3	4	5	7
100	3	7	6	8

32.40.

$x_{41} \leqslant 20;\ x_{32} \geqslant 30$

$a_i \backslash b_j$	30	60	30	90
30	1	2	4	1
30	2	5	10	6
60	3	3	13	7
60	3	4	11	4

32.41.

$x_{24} \leqslant 10;\ x_{42} \geqslant 10$

$a_i \backslash b_j$	10	20	20	40
10	1	5	3	1
20	2	4	2	3
10	3	10	15	9
40	5	6	11	7

32.5. Транспортная задача по критерию времени

Задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной транспортной задаче, имеется m поставщиков с запасами однородного груза в количестве $a_1, a_2, \dots, a_m$ и n потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объемах $b_1, b_2, \dots, b_n$. Известны t_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ — интервалы времени, за которые груз доставляется от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и наибольшее время доставки всех грузов является минимальным.

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим x_{ij} — объем перевозимого груза от i-го поставщика j-му потребителю. Система ограничений задачи не отличается от системы ограничений обычной транспортной задачи. Пусть $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ — некоторое опорное решение задачи. Запишем целевую функцию задачи. Обозначим через $T(X)$ наибольшее значение элементов матрицы $T = (t_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, соответствующих клеткам таблицы, занятым опорным решением: $T(X) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}$. Таким образом, за время $T(X)$ план перевозок будет выполнен полностью.

Математическая модель транспортной задачи по критерию времени имеет вид

$$T(X) = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} \to \min, \tag{32.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{32.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{32.13}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n. \tag{32.14}$$

Задача решается в следующем порядке. Находится начальное опорное решение X_1. Определяется значение целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_1 k_1}$. Все свободные клетки, которым соответствуют значения $t_{ij} > T(X_1)$, исключаются из рассмотрения (перечеркиваются). Занимать эти клетки нецелесообразно, так как увеличится значение целевой функции. Чтобы уменьшить ее значение, необходимо освободить клетку (l_1, k_1), в которой t_{ij} достигает максимума. Для этого строят так называемые **разгрузочные** циклы, которые могут включать в свой состав несколько свободных клеток. В каждом разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой клетки (l_1, k_1), расставляются поочередно знаки «−» и «+» и осуществляется сдвиг на величину $\theta = \min\limits_{\leftarrow - \rightarrow}\{x_{ij}\}$. Если удается эту клетку разгрузить, то она исключается из рассмотрения (зачеркивается). Получается новое опорное решение X_2, на котором значение целевой функции меньше, чем на X_1. Далее снова пытаются разгрузить клетку, соответствующую $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_2k_2}$. Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую клетку не исчезнет.

32.42. Найти минимальное время на осуществление всех перевозок для следующей задачи:

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	13	8	7	11
40	6	7	9	8
50	5	12	5	10
60	19	6	14	4

Решение. Составим начальное опорное решение X_1 методом северо-западного угла (табл. 32.9). Максимум целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{13, 8, 7, 9, 5, 10, 4\} = 13$ достигается в клетке (1, 1). Перечеркнем клетки (4, 1) и (4, 3), в которых время доставки груза $t_{41} = 19$ и $t_{43} = 14$ больше $T(X_1) = 13$.

Таблица 32.9

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	13 20 −	8 10 +	7	11
40	6 +	7 30 −	9 10	8
50	5	12	5 40	10 10
60	~~19~~	6	~~14~~	4 60

Таблица 32.10

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	~~13~~	8 30 +	7	~~11~~
40	6 20	7 10	9 10 −	8 +
50	5	~~12~~	5 + 40	10 10 −
60	~~19~~	6	~~14~~	4 60

Для улучшения решения разгружаем клетку (1, 1) с помощью цикла (2, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2) (см. табл. 32.9). В означенном цикле находим $\theta = \underset{\leftarrow - \rightarrow}{\min}\{20, 30\} = 20$. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем второе опорное решение X_2 (табл. 32.10). Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{8, 6, 7, 9, 5, 10, 4\} = 10$ достигается в клетке (3, 4). Перечеркиваем клетки (1, 1), (1, 4) и (3, 2), в них время $t_{11} = 13$, $t_{14} = 11$ и $t_{32} = 12$ больше, чем $T(X_2) = 10$. Разгружаем клетку (3, 4) с помощью цикла (2, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 3). В означенном цикле находим $\theta = \underset{\leftarrow - \rightarrow}{\min}\{10, 10\} = 10$. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем третье опорное решение X_3 (табл. 32.11).

Таблица 32.11

a_i \ b_j	20	40	50	70
30	~~13~~	30, 8	7	~~11~~
40	20, 6	10, 7	~~9~~	10, 8
50	5	~~12~~	50, 5	~~10~~
60	~~19~~	6	~~14~~	60, 4

Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_3) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{8, 6, 7, 8, 5, 4\} = 8$ достигается в клетках (1, 2) и (2, 4). Перечеркиваем клетки (2, 3) и (3, 4), в которых время больше, чем $T(X_3) = 8$. С помощью оставшихся невычеркнутых клеток разгрузить клетки (1, 2) и (2, 4) не удается, поэтому X_3 является оптимальным решением.

Ответ: $\min T(X) = 8$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$.

Решить транспортные задачи по критерию минимума времени:

32.43.

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

32.44.

a_i \ b_j	200	200	200	200
200	8	7	6	5
100	7	6	5	7
200	4	5	6	7
300	5	7	6	4

33. МЕТОД ГОМОРИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В общем случае *задача целочисленного программирования* формулируется следующим образом: найти максимум или минимум функции

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{33.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{33.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{33.3}$$

$$x_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n \text{ — целые числа.} \tag{33.4}$$

Согласно методу Гомори задача линейного программирования сначала решается симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается. Если оптимальное решение нецелочисленное, то из системы ограничений выбирается уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнительное ограничение. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение, но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

Пусть i-е ограничение задачи, находящееся в последней симплексной таблице, имеет вид

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_j = x_i^*, \tag{33.5}$$

где x_i — базисная переменная в уравнении;

x_{ij} — коэффициенты при неизвестных (коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения);

x_j — свободные переменные в системе уравнений;

x_i^* — правая часть уравнения (координата оптимального решения), которая является дробным числом.

Тогда дополнительное ограничение имеет вид

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j \leqslant 0, \tag{33.6}$$

где q_i^* — дробная часть x_i^*;

q_{ij} — дробная часть x_{ij}.

Число $[x_i]$ называется целой частью числа x_i, если оно наиболее близкое к нему целое и не превосходит x_i.

Дробная часть q_i числа x_i находится как разность этого числа и его целой части:

$$q_i = x_i - [x_i]. \qquad (33.7)$$

Например, для числа $\frac{7}{4}$ целая часть $\left[\frac{7}{4}\right] = 1$, дробная часть равна $\frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$. Для числа $-\frac{9}{5}$ целая часть $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, дробная часть равна $-\frac{9}{5} - (-2) = \frac{1}{5}$. Дробная часть числа всегда неотрицательная и меньше единицы.

В неравенство (33.6) вводится дополнительная переменная x_{n+1}, получается уравнение

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij}x_j + x_{n+1} = 0. \qquad (33.8)$$

В систему ограничений задачи это ограничение записывается в виде

$$-\sum_{j=m+1}^{n} q_{ij}x_j + x_{n+1} = -q_i^*. \qquad (33.9)$$

После этого решение задачи продолжают двойственным симплексным методом. Если получается целочисленное решение, то процесс решения заканчивается, в противном случае необходимо снова составить дополнительное ограничение.

Задача не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит координату с дробной частью и все коэффициенты соответствующего уравнения являются целыми.

33.1. Найти оптимальное целочисленное решение задачи

$$Z(X) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl|l} & & & & \text{Д} \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geqslant 2, & -x_4 \\ & -x_2 & +2x_3 & \leqslant 3, & +x_5 \\ & -2x_2 & +3x_3 & \leqslant 6, & +x_6 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad x_j \text{ — целые}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду с помощью дополнительных переменных x_4, x_5, x_6:

$$Z(X) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_2 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad x_j \text{ — целые}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Данная задача имеет начальное опорное решение $X_1 = (2, 0, 0, 0, 3, 6)$ с базисом из единичных векторов $Б_1 = (A_1, A_5, A_6)$. Все описанные ниже вычисления приведены в табл. 33.1. Записываем опорное решение в симплексную таблицу и вычисляем оценки разложений векторов условий по базису этого решения. Данное решение не является оптимальным, так как в задаче на максимум для вектора A_3 оценка $\Delta_3 = -8 < 0$. Вводим в базис опорного решения вектор A_3 вместо вектора A_5, получаем оптимальное решение $X_2 = (^1/_2, 0, ^3/_2, 0, 0, ^3/_2)$ с дробными координатами. Составляем дополнительное ограничение вида (33.9). Для этого используем ограничение, у которого правая часть имеет большую дробную часть. Находим дробные части правых частей уравнений (координат опорного решения): $^1/_2 - 0 = {}^1/_2$; $^3/_2 - 1 = {}^1/_2$. Так как они равны между собой, для составления дополнительного ограничения используем по своему усмотрению первое уравнение. Находим дробные части коэффициентов этого уравнения: $1 - 1 = 0$; $-^3/_2 - (-2) = {}^1/_2$; $0 - 0 = 0$; $-1 - (-1) = 0$; $-^1/_2 - (-1) = {}^1/_2$. Составляем дополнительное ограничение: $-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 + x_7 = -\frac{1}{2}$.

Таблица 33.1

			-2	$\downarrow -1$	$\downarrow 6$	0	0	0	
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_3
A_1	-2	2	1	-2	1	-1	0	0	2
← A_5	0	3	0	-1	$\boxed{2}$	0	1	0	$^3/_2$
A_6	0	6	0	-2	3	0	0	1	2
Δ_k		-4	0	5	-8	2	0	0	A_7
A_1	-2	$^1/_2$	1	$-^3/_2$	0	-1	$-^1/_2$	0	0
A_3	6	$^3/_2$	0	$-^1/_2$	1	0	$^1/_2$	0	0
A_6	0	$^3/_2$	0	$-^1/_2$	0	0	$-^3/_2$	1	0
Δ_k		8	0	1	0	2	4	0	0
← A_7	0	$-^1/_2$	0	$\boxed{-^1/_2}$	0	0	$-^1/_2$	0	1
θ_7			—	**2**	—	—	8	—	—
A_1	-2	2	1	0	0	-1	1	0	-3
A_3	6	2	0	0	1	0	1	0	-1
A_6	0	2	0	0	0	0	-1	1	-1
A_2	-1	1	0	1	0	0	1	0	-2
Δ_k		7	0	0	0	2	3	0	2

Это уравнение записано в табл. 33.1 после строки оценок, и, так как оно имеет разрешенную неизвестную x_7, вектор A_7 включаем в число базисных неизвестных, в результате чего опорное решение X_2 превращается в почти допустимое опорное решение $X_2 = (^1/_2, 0, ^3/_2, 0, 0, ^3/_2, -^1/_2)$. Введение вектора A_7 в базис не приводит к изменению оценок. В задаче на максимум все оценки неотрицательные, условия для применения двойственного симплексного метода выполняются.

Теперь вектор A_7 необходимо вывести из базиса, так как дополнительное ограничение имеет в правой части отрицательную величину. С помощью параметра θ_{0l}, вычисляемого по формуле (31.10), находится вектор A_2, вводимый в базис. В результате преобразования Жордана с разрешающим элементом $-{}^1/_2$ при x_2 получается новое опорное решение $X_3 = (2, 1, 2, 0, 0, 2, 0)$, координаты которого являются целыми. Следовательно, это и есть оптимальное решение.

Ответ: $\max Z(X) = 7$ при $X^* = (2, 1, 2)$.

Решить задачи целочисленного программирования:

33.2. $Z(X) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 13, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0\ \forall j,\ x_j \text{ — целые.}$$

33.3. $Z(X) = x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leqslant 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 14, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0\ \forall j,\ x_j \text{ — целые.}$$

33.4. $Z(X) = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leqslant 23, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leqslant 17, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0\ \forall j,\ x_j \text{ — целые.}$$

33.5. $Z(X) = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leqslant 12, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \leqslant 7, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0\ \forall j,\ x_j \text{ — целые.}$$

33.6. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 17, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0\ \forall j,\ x_j \text{ — целые.}$$

33.7. $Z(X) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0\ \forall j,\ x_j \text{ — целые.}$$

33.8. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geqslant 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geqslant 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geqslant 3, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \ x_j \text{ — целые.}$$

33.9. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ \quad\ - 2x_2 + 3x_3 \leqslant 4, \\ \quad\ - 3x_2 + 4x_3 \leqslant 7, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \ x_j \text{ — целые.}$$

33.10. $Z(X) = 3x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \leqslant 4, \\ x_1 \qquad - 3x_3 \leqslant 3, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \ x_j \text{ — целые.}$$

33.11. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leqslant 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \ x_j \text{ — целые.}$$

33.12. $Z(X) = 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 \qquad - 2x_3 \leqslant 7, \\ 4x_1 \qquad - 3x_3 \leqslant 15, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \ x_j \text{ — целые.}$$

33.13. $Z(X) = 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leqslant 8, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leqslant 8, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \ x_j \text{ — целые.}$$

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Задания

1. Решить графическим методом задачи с двумя переменными (табл. 1).

2. Решить графическим методом задачи с n переменными (табл. 2).

3. Решить методом искусственного базиса задачи линейного программирования (см. табл. 2).

4. Решить симплексным методом задачи (табл. 3).

5. Решить методом потенциалов транспортные задачи (табл. 4).

6. Решить методом потенциалов транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность (табл. 5).

Таблица 1. **Варианты задания 1**

Вариант	Задача	Вариант	Задача
1	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1 - 3x_2 \geqslant -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 24, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$	16	$Z(X) = 5x_1 + 5x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -x_1 + 3x_2 \geqslant 9, \\ x_1 + x_2 \geqslant 3, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$
2	$Z(X) = 5x_1 - 3x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$	17	$Z(X) = -x_1 - x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1 + x_2 \geqslant 10, \\ 4x_1 - x_2 \leqslant 20, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$
3	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ -5x_1 + 9x_2 \leqslant 45, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$	18	$Z(X) = 5x_1 - x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ -5x_1 + 9x_2 \leqslant 45, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 4, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$
4	$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ 4x_1 - x_2 \leqslant 20, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$	19	$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 10, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + x_2 \geqslant 3, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
5	$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 10, \\ x_1 - 5x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$	20	$Z(X) = -3x_1 - x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 \leqslant 3, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$
6	$Z(X) = 15x_1 + 10x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 6x_1 - x_2 \geqslant 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 24, \\ x_1 - x_2 \leqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$	21	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0$
7	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 \geqslant -2, \\ 4x_1 - x_2 \leqslant 16, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 6, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$	22	$Z(X) = 4x_1 + 6x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 2 \end{cases}$
8	$Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 14, \\ -x_1 + 3x_2 \geqslant 5, \\ x_1 \leqslant 4, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$	23	$Z(X) = -x_1 + 4x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 \geqslant -1, \end{cases}$ $x_2 \geqslant 0$
9	$Z(X) = 2x_1 - x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 16, \\ x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 8, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$	24	$Z(X) = x_1 + 4x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ -2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
10	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 3, \\ x_2 \leqslant 3, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$	25	$Z(X) = x_1 - 4x_2 \to \min$, $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
11	$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 9, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 15, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 9, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 15, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$	26	$Z(X) = -5x_1 + x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 9, \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 3, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
12	$Z(X) = x_1 - 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 6, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \end{cases}$	27	$Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ 3x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \end{cases}$ $x_2 \geqslant 0$
13	$Z(X) = 3x_1 - x_2 \to \max$, $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \\ x_1 \leqslant 6, \\ x_2 \leqslant 6, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$	28	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ 3x_1 - x_2 \geqslant 6 \end{cases}$
14	$Z(X) = x_1 - 2x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant -2, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \geqslant -12, \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 18, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$	29	$Z(X) = 3x_1 - x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0 \end{cases}$
15	$Z(X) = 3x_1 + 6x_2 \to \max$, $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 \geqslant -3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$	30	$Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$, $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \geqslant 0, \end{cases}$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

Таблица 2. **Варианты заданий 2 и 3**

Вари-ант	Задача	Вари-ант	Задача
1	$Z(X)=2x_1+8x_2+3x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}13x_1-3x_2+2x_3-7x_4=8,\\-7x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	16	$Z(X)=2x_1+6x_2+x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases}-4x_1+5x_2+2x_3-x_4=-2,\\5x_1-8x_2-3x_3+x_4=-1,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
2	$Z(X)=2x_1+3x_2-x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+7x_4=21,\\-x_1-2x_2+x_3-5x_4=-12,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	17	$Z(X)=2x_1+5x_2+x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases}5x_1-2x_2-3x_3+x_4=1,\\3x_2+2x_3+x_4=6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
3	$Z(X)=4x_1+13x_2+3x_3+6x_4\to\min,$ $\begin{cases}-5x_1+3x_2-x_3+2x_4=-1,\\9x_1-4x_2+2x_3-3x_4=6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	18	$Z(X)=9x_1+2x_2+4x_3-8x_4\to\max,$ $\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3-7x_4=12,\\2x_1+2x_2+x_3-4x_4=4,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
4	$Z(X)=x_1+x_2+3x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}5x_1-6x_2+x_3-2x_4=2,\\11x_1-14x_2+2x_3-5x_4=2,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	19	$Z(X)=x_1-2x_2-x_3+3x_4\to\max,$ $\begin{cases}-4x_1+2x_2-x_3+x_4=2,\\-6x_1+6x_2-x_3+2x_4=10,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
5	$Z(X)=11x_2+x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}4x_1-5x_2+x_3-x_4=1,\\11x_1-11x_2+3x_3-2x_4=11,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	20	$Z(X)=2x_1+x_2-x_3-2x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,\\x_1+x_2+2x_3-x_4=7,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
6	$Z(X)=4x_1+4x_2-3x_3+2x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+13x_2-4x_3+3x_4=19,\\3x_1+7x_2-x_3+2x_4=16,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	21	$Z(X)=2x_1+3x_2+6x_3-18x_4\to\min,$ $\begin{cases}-4x_1+6x_2-x_3+2x_4=-8,\\4x_1-14x_2+2x_3-5x_4=12,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
7	$Z(X)=12x_1+8x_2+5x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}-6x_1+x_2-x_3+2x_4=-2,\\11x_1-x_2+2x_3-3x_4=7,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	22	$Z(X)=3x_1-x_2-3x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=9,\\-x_1+x_2-2x_3+x_4=-6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
8	$Z(X)=x_1-19x_2-5x_3-7x_4\to\min,$ $\begin{cases}5x_1-4x_2+x_3-x_4=-1,\\-6x_1+7x_2-x_3+2x_4=10,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	23	$Z(X)=x_1-2x_2+3x_4\to\max,$ $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3+x_4=10,\\2x_1-3x_2+x_3-2x_4=8,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$

Вари-ант	Задача	Вари-ант	Задача
9	$Z(X)=7x_1+3x_2+3x_3+2x_4\to\min$, $\begin{cases}-10x_1-x_2+2x_3+3x_4=-2,\\ 6x_1+2x_2+3x_3+x_4=18,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	24	$Z(X)=3x_1+3x_2+4x_3-6x_4\to\max$, $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3-x_4=3,\\ x_1+x_2+2x_3-2x_4=4,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
10	$Z(X)=3x_1+4x_2+2x_3+7x_4\to\min$, $\begin{cases}2x_1-x_2+10x_3-5x_4=10,\\ -x_1+x_2-6x_3+4x_4=-2,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	25	$Z(X)=2x_1+10x_2+4x_3+2x_4\to\min$, $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-2x_4=2,\\ -x_1+x_2+x_3+x_4=3,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
11	$Z(X)=-22x_1+19x_2-5x_3-6x_4\to\max$, $\begin{cases}4x_1-13x_2+7x_3-x_4=-1,\\ -4x_1+18x_2-10x_3+2x_4=6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	26	$Z(X)=2x_1+3x_2+4x_3-6x_4\to\max$, $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=8,\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
12	$Z(X)=3x_1+2x_2+5x_3+4x_4\to\min$, $\begin{cases}8x_1-7x_2+3x_3-2x_4=4,\\ x_1+4x_2+2x_3+3x_4=20,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	27	$Z(X)=7x_1-10x_3+6x_4\to\min$, $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3-2x_4=3,\\ x_1-5x_2-5x_3+3x_4=8,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
13	$Z(X)=-2x_1+x_2+3x_3-2x_4\to\min$, $\begin{cases}3x_1-x_2-4x_3+x_4=2,\\ 5x_1-x_2-7x_3+2x_4=6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	28	$Z(X)=2x_1+6x_2+4x_3+3x_4\to\max$, $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3+x_4=6,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=4,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
14	$Z(X)=-2x_1+2x_2-3x_3-7x_4\to\min$, $\begin{cases}-x_1-8x_2+x_3+6x_4=-2,\\ 3x_1+27x_2-4x_3-22x_4=-2,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	29	$Z(X)=-2x_1+6x_2-3x_3+6x_4\to\min$, $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3+x_4=6,\\ -2x_1+2x_2-x_3+2x_4=6,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$
15	$Z(X)=2x_1+x_2-4x_3+3x_4\to\max$, $\begin{cases}-2x_1+3x_3-x_4=-2,\\ 3x_1+x_2-5x_3+2x_4=7,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$	30	$Z(X)=4x_1+12x_2+4x_3+8x_4\to\max$, $\begin{cases}x_1+4x_2+x_3+2x_4=12,\\ 2x_1+3x_2+3x_3+x_4=12,\end{cases}$ $x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$

Таблица 3. **Варианты задания 4**

Вари-ант	Задача	Вари-ант	Задача
1	$Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 6, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	16	$Z(X) = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
2	$Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	17	$Z(X) = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + x_3 \leqslant 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
3	$Z(X) = x_1 - x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \leqslant 24, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	18	$Z(X) = -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geqslant -8, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
4	$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 12, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	19	$Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geqslant -2, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
5	$Z(X) = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant -4, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	20	$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leqslant 12, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
6	$Z(X) = -x_1 - 3x_2 - x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant -2, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	21	$Z(X) = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant -7, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
7	$Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 18, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 10, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	22	$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \geqslant -4, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$

Вари-ант	Задача	Вари-ант	Задача
8	$Z(X) = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \geqslant -4, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	23	$Z(X) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \geqslant -6, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
9	$Z(X) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	24	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \geqslant -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
10	$Z(X) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 13, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 11, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	25	$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
11	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geqslant 11, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -23, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -2, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	26	$Z(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \leqslant -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leqslant 6, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
12	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant -2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	27	$Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geqslant -8, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 16, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
13	$Z(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \leqslant -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 \leqslant 1, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	28	$Z(X) = x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant -3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 5, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 7, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$
14	$Z(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant -6, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	29	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$

Окончание табл. 3

Вариант	Задача	Вариант	Задача
15	$Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geqslant 4, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$	30	$Z(X) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 - x_3 \geqslant -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6, \end{cases}$ $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3$

Таблица 4. **Варианты задания 5**

Вариант	Задача						Вариант	Задача					
1	$a_i \backslash b_j$	10	10	25	25	30	16	$a_i \backslash b_j$	50	50	100	100	50
	10	1	5	7	9	3		50	3	4	6	5	13
	20	4	6	4	7	13		50	6	3	7	6	10
	10	1	5	3	4	9		100	10	5	2	2	6
	30	2	4	2	10	3		150	9	4	4	9	5
	10	3	2	5	6	4		100	3	2	4	2	3
2	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300	200	17	$a_i \backslash b_j$	200	200	400	200	100
	100	4	3	5	2	3		200	5	2	1	6	4
	200	7	1	2	3	1		300	6	2	4	4	6
	300	9	2	4	5	6		200	9	2	3	7	5
	100	1	3	6	4	10		200	7	3	5	8	7
	200	5	8	15	6	15		100	3	2	4	2	3
3	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200	100	18	$a_i \backslash b_j$	100	150	150	100	300
	200	1	7	12	2	5		50	3	4	5	4	1
	100	2	3	8	4	7		100	1	2	7	1	5
	200	3	5	4	6	9		150	4	6	6	3	7
	400	4	4	3	8	2		100	2	7	4	7	2
	400	5	3	7	10	1		200	3	8	9	4	5
4	$a_i \backslash b_j$	5	10	15	15	15	19	$a_i \backslash b_j$	400	600	500	400	500
	10	2	5	5	6	7		400	1	2	3	1	2
	5	4	3	4	4	3		500	3	4	2	4	5
	5	5	2	3	6	2		600	5	7	6	3	9
	10	3	6	5	7	8		400	4	10	15	4	8
	15	1	9	7	6	4		200	3	4	5	3	7
5	$a_i \backslash b_j$	10	30	30	30	40	20	$a_i \backslash b_j$	100	150	150	100	100
	10	3	1	3	4	3		50	3	4	5	4	6
	30	5	1	2	2	6		100	1	5	7	1	5
	60	2	3	4	1	1		150	4	6	6	3	4
	10	6	2	5	3	2		100	2	7	4	7	2
	60	3	7	4	4	1		100	1	9	6	3	2

Продолжение табл. 4

Вариант	Задача					
6	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	40	40
	20	4	5	2	4	3
	40	3	1	3	5	2
	80	2	7	6	8	6
	40	3	3	1	4	9
	20	1	6	9	2	7
7	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300	400
	100	1	3	4	1	3
	200	5	4	5	7	5
	400	4	9	5	10	9
	200	7	7	5	8	13
	100	12	10	8	11	6
8	$a_i \backslash b_j$	200	200	300	300	100
	300	4	6	3	4	1
	200	7	3	5	2	2
	100	5	3	2	4	4
	100	2	3	4	6	5
	200	1	4	4	3	3
9	$a_i \backslash b_j$	200	400	400	300	500
	200	1	6	9	3	4
	400	3	2	2	4	5
	600	4	5	4	7	6
	200	1	4	3	9	8
	200	7	9	7	1	9
10	$a_i \backslash b_j$	150	200	200	400	200
	150	1	4	7	2	4
	300	3	6	3	9	6
	250	4	8	12	2	5
	150	1	5	9	13	7
	200	2	3	4	6	5
11	$a_i \backslash b_j$	40	60	40	60	20
	20	3	3	4	2	3
	40	1	2	1	5	3
	60	4	8	2	9	12
	40	5	7	9	6	5
	20	10	14	17	7	6

Вариант	Задача					
21	$a_i \backslash b_j$	500	250	500	750	500
	250	3	1	8	1	4
	500	2	5	2	3	5
	750	9	4	6	5	7
	250	7	3	10	3	2
	500	6	6	4	7	8
22	$a_i \backslash b_j$	300	900	600	900	300
	300	1	3	4	5	1
	600	9	5	2	4	8
	900	3	4	5	4	3
	600	5	7	2	6	6
	300	1	4	3	7	8
23	$a_i \backslash b_j$	200	300	200	300	100
	100	2	3	4	5	1
	200	2	4	2	6	7
	300	6	5	4	5	4
	400	4	6	7	6	9
	400	5	7	6	9	8
24	$a_i \backslash b_j$	50	150	200	150	100
	50	4	5	6	10	9
	100	6	3	8	4	3
	150	5	1	3	1	7
	150	7	2	4	2	3
	100	1	5	7	8	4
25	$a_i \backslash b_j$	200	300	200	200	100
	200	1	5	1	1	5
	300	4	2	6	7	9
	100	3	4	5	6	5
	300	4	2	3	3	6
	300	6	2	3	5	4
26	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	100	200
	100	2	3	4	2	5
	200	3	1	1	3	1
	300	4	3	3	5	4
	200	5	1	2	6	7
	100	2	9	8	7	6

Окончание табл. 4

Вариант	$a_i \backslash b_j$	Задача					Вариант	$a_i \backslash b_j$	Задача				
12	$a_i \backslash b_j$	300	200	300	100	400	27	$a_i \backslash b_j$	200	200	400	100	100
	300	3	4	3	1	5		200	2	2	3	1	2
	200	2	3	5	6	8		100	1	2	3	4	5
	100	1	2	3	3	4		200	4	3	6	5	8
	200	4	5	7	9	9		100	1	2	3	7	5
	300	5	6	8	4	7		200	4	3	5	7	6
13	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	10	30	28	$a_i \backslash b_j$	50	100	100	200	200
	20	1	1	3	4	5		50	1	4	5	6	1
	10	2	3	4	2	6		100	2	2	2	5	5
	20	1	1	4	7	8		150	3	6	8	3	4
	30	5	6	3	4	7		200	4	7	9	4	8
	10	4	5	7	6	4		100	5	2	2	7	9
14	$a_i \backslash b_j$	200	300	400	200	300	29	$a_i \backslash b_j$	100	100	200	200	300
	200	1	3	4	2	5		300	1	2	3	4	8
	200	1	2	4	1	7		200	4	5	6	2	6
	300	3	4	5	9	9		100	1	1	3	4	5
	300	6	3	7	6	8		200	3	3	2	2	7
	100	5	6	7	3	4		300	5	6	7	8	10
15	$a_i \backslash b_j$	300	150	300	150	250	30	$a_i \backslash b_j$	100	300	300	300	600
	150	2	1	3	1	5		300	4	2	2	5	3
	250	8	3	7	4	6		600	3	3	4	5	5
	250	6	4	9	3	4		100	1	2	3	4	6
	150	5	2	4	2	3		300	2	6	1	1	8
	150	4	6	2	3	4		600	3	4	5	5	9

Таблица 5. Варианты задания 6

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
1	$x_{44} \leqslant 500,\ x_{23} \geqslant 500$					16	$x_{21} \leqslant 500,\ x_{44} \geqslant 1000$				
	$a_i \backslash b_j$	500	500	1000	1500		$a_i \backslash b_j$	1000	1500	500	2000
	1000	3	2	5	4		500	3	2	1	5
	1500	4	3	5	3		1000	3	6	5	4
	500	1	1	3	2		1000	4	8	5	7
	1500	4	1	6	3		1500	5	7	2	6
2	$x_{32} \leqslant 200,\ x_{11} \geqslant 100$					17	$x_{34} \leqslant 20,\ x_{12} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	300	300	300	300		$a_i \backslash b_j$	40	60	50	40
	300	5	5	4	3		40	1	2	3	1
	200	4	7	4	2		50	4	2	2	9
	400	3	2	3	4		50	5	7	10	5
	100	3	1	2	7		40	4	15	13	6

Продолжение табл. 5

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
3	$x_{21} \leqslant 500,\ x_{44} \geqslant 1000$					18	$x_{21} \leqslant 500,\ x_{44} \geqslant 500$				
	$a_i \backslash b_j$	1000	1000	2000	2000		$a_i \backslash b_j$	1000	500	1500	2000
	500	5	6	3	8		500	3	1	2	5
	1000	1	1	2	3		1000	1	3	4	2
	1500	2	5	4	4		500	3	6	5	6
	2000	6	3	5	9		1500	4	3	9	8
4	$x_{42} \leqslant 50,\ x_{24} \geqslant 50$					19	$x_{21} \leqslant 25,\ x_{32} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	50	100	100	100		$a_i \backslash b_j$	50	25	50	25
	50	2	4	5	8		25	3	1	8	1
	100	5	3	4	6		50	2	5	2	3
	50	3	1	2	4		75	9	4	6	5
	100	7	2	6	9		25	7	3	10	3
5	$x_{44} \leqslant 100,\ x_{23} \geqslant 50$					20	$x_{23} \leqslant 30,\ x_{32} \geqslant 30$				
	$a_i \backslash b_j$	50	100	200	200		$a_i \backslash b_j$	30	90	60	60
	50	1	9	2	2		30	1	3	4	5
	100	6	4	10	3		60	9	5	2	4
	100	8	4	7	5		90	3	4	5	4
	200	7	6	5	3		90	5	7	2	6
6	$x_{43} \leqslant 50,\ x_{21} \geqslant 100$					21	$x_{33} \leqslant 100,\ x_{42} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	100	200	100	200		$a_i \backslash b_j$	200	300	200	300
	100	1	3	1	2		100	2	3	4	5
	200	4	7	3	5		200	2	4	2	6
	50	3	4	1	6		300	6	5	4	5
	100	7	8	3	6		300	4	6	7	6
7	$x_{11} \leqslant 20,\ x_{33} \geqslant 30$					22	$x_{32} \leqslant 100,\ x_{43} \geqslant 100$				
	$a_i \backslash b_j$	30	30	60	90		$a_i \backslash b_j$	50	150	200	150
	60	3	11	4	4		50	4	5	6	10
	30	2	10	5	6		100	6	3	8	4
	60	3	13	3	7		150	5	1	3	1
	30	1	4	2	1		150	7	2	4	2
8	$x_{21} \leqslant 10,\ x_{12} \geqslant 10$					23	$x_{22} \leqslant 25,\ x_{44} \geqslant 25$				
	$a_i \backslash b_j$	40	20	10	20		$a_i \backslash b_j$	25	50	75	50
	40	7	6	5	11		25	1	1	3	4
	20	3	4	2	2		50	7	2	4	2
	10	9	10	3	15		50	8	9	5	6
	10	1	5	1	3		50	6	7	8	5

Приложение 1

Значение функции e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,60	0,027
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,00	0,0009

Окончание табл. 5

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
9	$x_{44} \leqslant 20,\quad x_{23} \geqslant 20$					24	$x_{42} \leqslant 10,\quad x_{23} \geqslant 20$				
	$a_i \backslash b_j$	40	30	40	50		$a_i \backslash b_j$	20	20	40	20
	20	5	3	1	6		20	2	2	3	4
	30	4	6	4	7		40	4	5	4	7
	20	4	1	2	3		20	6	7	3	5
	40	6	3	8	10		40	3	5	7	4
10	$x_{32} \leqslant 100,\quad x_{23} \geqslant 100$					25	$x_{43} \leqslant 10,\quad x_{22} \geqslant 5$				
	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300		$a_i \backslash b_j$	5	10	15	10
	100	4	3	5	2		5	2	2	4	5
	200	7	1	2	3		20	4	6	7	10
	300	9	2	4	5		15	5	3	3	6
	100	1	3	6	4		20	6	4	5	12
11	$x_{31} \leqslant 100,\quad x_{42} \geqslant 100$					26	$x_{34} \leqslant 100,\quad x_{43} \geqslant 50$				
	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200		$a_i \backslash b_j$	50	100	100	150
	200	1	7	12	2		50	1	3	4	1
	100	2	3	8	4		100	3	2	2	4
	200	3	5	4	6		150	4	8	9	5
	200	4	4	3	8		150	9	6	7	10
12	$x_{11} \leqslant 100,\quad x_{42} \geqslant 200$					27	$x_{33} \leqslant 60,\quad x_{42} \geqslant 60$				
	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200		$a_i \backslash b_j$	60	120	180	120
	200	2	1	3	5		60	1	3	2	1
	100	4	3	4	7		120	6	2	4	2
	100	5	8	3	6		180	5	9	5	10
	400	3	5	2	4		180	7	6	7	15
13	$x_{32} \leqslant 20,\quad x_{24} \geqslant 20$					28	$x_{32} \leqslant 70,\quad x_{43} \geqslant 140$				
	$a_i \backslash b_j$	10	30	30	40		$a_i \backslash b_j$	70	140	210	140
	10	3	1	3	4		70	1	2	1	3
	50	5	1	2	2		140	2	4	5	8
	60	2	3	4	6		210	3	5	6	9
	40	7	2	5	3		210	4	6	7	10
14	$x_{43} \leqslant 20,\quad x_{34} \geqslant 20$					29	$x_{42} \leqslant 80,\quad x_{23} \geqslant 80$				
	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	40		$a_i \backslash b_j$	80	160	240	160
	20	4	5	2	4		80	2	5	2	3
	40	3	1	3	5		160	3	4	4	5
	80	2	7	6	8		80	4	3	6	7
	40	3	3	1	4		160	5	2	5	4
15	$x_{33} \leqslant 100,\quad x_{42} \geqslant 100$					30	$x_{31} \leqslant 90,\quad x_{44} \geqslant 90$				
	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300		$a_i \backslash b_j$	180	90	270	180
	100	1	3	4	1		90	1	3	4	1
	200	5	2	2	7		90	3	2	9	13
	400	4	4	3	6		180	3	4	5	8
	200	7	2	5	3		180	4	5	6	4

Приложение 2

Нормированная функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2}\,dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00789	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997									
5,0	49999									

П р и м е ч а н и е. В таблице даны мантиссы значений функции (0,...).

Приложение 3

Значения чисел q в зависимости от объема выборки n и надежности γ для определения доверительного интервала среднего квадратичного отклонения σ_x

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
7	0,92	—	—	25	0,32	0,49	0,73
8	0,80	—	—	30	0,28	0,43	0,63
9	0,71	—	—	35	0,26	0,38	0,56
10	0,65	—	—	40	0,24	0,35	0,50
11	0,59	0,98	—	45	0,22	0,32	0,46
12	0,55	0,90	—	50	0,21	0,30	0,43
13	0,52	0,83	—	60	0,188	0,269	0,38
14	0,48	0,78	—	70	0,174	0,245	0,34
15	0,46	0,73	—	80	0,161	0,226	0,31
16	0,44	0,70	—	90	0,151	0,211	0,29
17	0,42	0,66	—	100	0,143	0,198	0,27
18	0,40	0,63	0,96	150	0,115	0,160	0,211
19	0,39	0,60	0,92	200	0,099	0,136	0,185
20	0,37	0,58	0,88	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы	Уровень значимости α					
	0,01	0,05	0,1	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,55	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,96	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,8	14,0	12,3	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

Приложение 5

Критические точки распределения Фишера – Снедекора

$P = 0{,}9$ $(\alpha = 0{,}1)$

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,31	1,30	1,24	1,17

$P = 0{,}95$ $(\alpha = 0{,}05)$

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58

Окончание Приложения 5

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

Приложение 6

t-распределение (значение $t_{кр}$, соответствующее $P(T > t_{кр}) = \alpha$)

l	α				
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,576
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

ОТВЕТЫ

1

1.1. $|\bar{a}| = 7$; $\cos\alpha = {}^2/_7$, $\cos\beta = {}^3/_7$, $\cos\gamma = -{}^6/_7$. **1.2.** $|\overline{M_2M_1}| = 9$; $\cos\alpha = {}^1/_3$, $\cos\beta = -{}^2/_3$, $\cos\gamma = {}^2/_3$. **1.3.** $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$. **1.4.** $D(9; -5; 6)$. **1.5.** 7. **1.6.** 3; $\sqrt{21}$. **1.7.** $\sqrt{34}/2$; $\sqrt{42}/2$. **1.8.** $\sqrt{14}/2$; $\sqrt{26}/2$. **1.9.** 22. **1.10.** 20. **1.11.** $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{97}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$. **1.12.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **1.14.** $\bar{c} = (5\bar{b} - 2\bar{a})/4$. **1.15.** $\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + \bar{c}$. **1.16.** $\bar{a} = (3\bar{b} - \bar{c} + \bar{d})/2$. **1.17.** 8. **1.18.** $\cos\varphi = {}^2/_7$. **1.19.** $\cos\varphi = 1/\sqrt{10}$. **1.20.** $|AB| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{2}$, $|AC| = 5$; $\hat{A} = \pi/2$, $\hat{B} = \hat{C} = \pi/4$. **1.21.** $\varphi = 90°$. **1.22.** $\cos\varphi = -43/(25\sqrt{13})$. **1.23.** $\cos\varphi = {}^1/_2$, $\varphi = 60°$. **1.24.** $\varphi = 120°$. **1.25.** $\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = 8/(3\sqrt{2})$. **1.26.** $\sqrt{7}$. **1.27.** $2\sqrt{7}$. **1.28.** $\cos\varphi = 2/\sqrt{13}$. **1.29.** $m = -6$. **1.31.** $1/\sqrt{3}$.

2

2.3. а) $k = {}^2/_5$, $\beta = -2$; б) $k = -{}^2/_5$, $\beta = 0$; в) $k = 0$, $\beta = 7$; г) $k = -2$, $\beta = 10$. **2.4.** б) $x/(-2) + y/({}^{10}/_3) = 1$. **2.5.** а) $y = 12x/5 - 13$; б) $x/({}^{65}/_{12}) + y/(-{}^{65}/_5) = 1$. **2.6.** Нет. **2.7.** 135°. **2.8.** 20 кв. ед. **2.10.** 1400 руб. **2.11.** $x/5 + y/3 = 1$, $x/5 - y/3 = 1$, $-x/5 + y/3 = 1$, $-x/5 - y/3 = 1$. **2.12.** $-x/2 - y/3 = 1$ или $x/4 + 2y/3 = 1$. **2.13.** $y = 0$, $y = 4$, $4x - 3y = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$, $x = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$. **2.14.** $-x/4 + y/3 = 1$ или $x/2 + y/(-6) = 1$. **2.15.** $x - 4 = 0$, $y + 5 = 0$. **2.17.** $y = x - 2$. **2.21.** а) $\operatorname{arctg} {}^3/_4$; б) 45°; в) 45°; г) 0°. **2.23.** $5x - 2y - 25 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$. **2.25.** $y = 3x$, $y = -x/3$. **2.28.** $x > 5$. **2.32.** 5. **2.33.** $\sqrt{10}$. **2.35.** $x + 2y + 3z - 14 = 0$. **2.37.** $x + y - 4 = 0$. **2.38.** $3x + 2z - 15 = 0$. **2.40.** $6y - 5z = 0$. **2.41.** $4x - 6z = 0$. **2.43.** $x/2 + y/4 + z/4 = 1$. **2.45.** $x - 2y - 3z - 4 = 0$. **2.47.** а) $\pi/3$ и $2\pi/3$; б) $\pi/4$ и $3\pi/4$; в) $\pi/2$; г) $\arccos {}^2/_{15}$ и $\pi - \arccos {}^2/_{15}$. **2.48.** 60°. **2.50.** $2x + y - 2z - 15 = 0$. **2.51.** $2x - 2y + z - 2 = 0$. **2.52.** $3x - y = 0$ и $x + 3y = 0$. **2.54.** $\sqrt{29}$. **2.55.** $2\sqrt{2}$. **2.56.** $(x - 4)/(-1) = (y - 3)/1 = (z - 2)/1$. **2.58.** а) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = 3t - 1$; б) $x = 2t + 1$, $y = -4t + 3$, $z = 2t + 2$. **2.60.** $\cos\alpha = {}^6/_7$, $\cos\beta = {}^3/_7$, $\cos\gamma = {}^2/_7$. **2.61.** $\cos\varphi = 1/\sqrt{3}$. **2.63.** $x = 2t + 1$, $y = 2t + 4$, $z = t - 1$.

2.64. $x = 2t$, $y = -8t$, $z = 4$. **2.65.** $x = 2t$, $y = -3$, $z = 5t$. **2.66.** $\sin\theta = 1/\sqrt{6}$. **2.68.** $y + z + 1 = 0$. **2.70.** $8x - 5y + z - 11 = 0$. **2.71.** (3; 4; –1). **2.72.** (4; 3; 3). **2.74.** (–2; 0; –2). **2.76.** (3; –1; 1). **2.77.** $x = 9t + 2$, $y = -8t + 1$, $z = -11t$. **2.78.** $x = 5t + 1$, $y = -4t$, $z = -t - 1$.

3

3.1. Точки M_1, M_2 принадлежат окружности, точка M_3 не принадлежит окружности. **3.3.** $C(-2; 2)$, $R = 3$. **3.4.** а) $C(-1; 0)$, $R = 2$; б) $C(4; -3)$, $R = 5$; в) $C(-5; 2)$, $R = 4$. **3.5.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ или $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **3.6.** $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$. **3.7.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. **3.8.** $x^2 + y^2 - 8y = 0$. **3.9.** $(x-3)^2 + y^2 = 9$. **3.10.** $x^2 + (y-1)^2 = 1$. **3.11.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$. **3.12.** $x^2 + y^2 = 16$. **3.13.** $x^2/10 + y^2 = 1$. **3.14.** $x^2/(^{25}/_8) + y^2/2 = 1$. **3.15.** $x^2/36 + y^2/27 = 1$. **3.16.** $\varepsilon = \sqrt{3}/2$. **3.17.** $2\sqrt{2}/3$. **3.18.** $x^2/16 + y^2/4 = 1$, $r_1 = 4 - \sqrt{3}$, $r_2 = 4 + \sqrt{3}$. **3.19.** $x^2/(^5/_3) + y^2/1 = 1$, $\varepsilon = \sqrt{^2/_5}$. **3.20.** $x^2/9 + y^2/8 = 1$. **3.21.** $x^2/3 + y^2/4 = 1$. **3.22.** $x^2/5 + y^2 = 1$. **3.23.** а) $(x-3)^2/16 + (y+1)^2/4 = 1$; б) $(x-1)^2/4 + (y+1)^2/2 = 1$. **3.24.** $x^2/169 + y^2/25 = 1$. **3.25.** $2c = 4\sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{5}/2$. **3.26.** $x^2/16 - y^2/9 = 1$; $\varepsilon = {}^5/_4$. **3.27.** $x^2 - y^2 = 1$. **3.28.** а) $(x-2)^2/9 - (y-3)^2/16 = 1$; б) $(x+5)^2/64 - (y-1)^2/36 = 1$; в) $(x-2)^2/9 - (y+1)^2/16 = 1$. **3.29.** $x^2/3 - y^2/5 = 1$. **3.30.** $x^2/4 - y^2/12 = 1$. **3.31.** $x^2/25 - y^2/75 = 1$. **3.32.** $x^2/25 - y^2/9 = 1$. **3.33.** $y^2 = 8x$. **3.34.** $y = x - x^2/4$. **3.35.** $y^2 = 4x$. **3.36.** $M_1(3; 2\sqrt{3})$, $M_2(3; -2\sqrt{3})$. **3.37.** $(x - {}^3/_2)^2 + (y - {}^3/_2)^2 = {}^9/_2$. **3.39.** 40 м. **3.40.** $x^2 = -2y$.

4

4.2. а) $4 + 3i$; б) $5 - 9i$; в) $-i$; г) $16 - 30i$; д) 1; е) $-11 - 2i$; ж) 1, если $n = 4k$; i, если $n = 4k + 1$; –1, если $n = 4k + 2$; $-i$, если $n = 4k + 3$, где k — целое число. **4.3.** а) $1 + i$; б) $-2i$; в) $-1{,}1 - 1{,}3i$; г) 2; д) $-0{,}5 + 1{,}5i$. **4.4.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да; ж) нет. **4.6.** а) $2(\cos 0 + i\sin 0)$; б) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$; в) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; д) $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; е) $3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$; ж) $3\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$; з) $3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$; и) $\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$; к) $2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$; л) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; м) $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **4.8.** а) –1; б) $-4i$; в) $2i\sqrt{2}$; г) 8; д) $-4\sqrt{2}$; е) 1;

ж) −4; з) −27. **4.10.** а) 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; б) −2; $1 \pm i\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $-1 + i$; $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; г) $\pm 2(\sqrt{3} + i)$; $\pm 2(-1 - i\sqrt{3})$; д) $1 \pm i$; $-1 \pm i$; е) ±1; $\pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.12.** а) Окружность радиуса 2 с центром в начале координат; б) луч, выходящий из начала координат и образующий с положительной полуосью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$; в) круг радиуса 3 с центром в начале координат; г) круг без границы радиуса 5 с центром в точке z_0. **4.13.** а) $\pm i$; б) $\pm 2i$; в) $1 \pm 3i$; г) $3 \pm 3i$; д) $2 \pm i$; $-2 \pm i$; е) $4 \pm i$; $-4 \pm i$. **4.15.** −10. **4.16.** 10. **4.17.** −3. **4.18.** 2. **4.19.** $3x + 1$. **4.20.** −1. **4.21.** 3. **4.22.** 2. **4.23.** 0. **4.24.** −20. **4.25.** $x(x^2 - a^2)$. **4.26.** $-4i$. **4.29.** а) $8x + 15y + 12z - 19t$; б) $3a - b + 2c + d$. **4.30.** а) $2a - 8b + c + 5d$; б) $-x - y - z + 4t$. **4.31.** а) 5; б) 50; в) 0; г) $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$; д) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_{1n}b_{2\,n-1}\cdots b_{n1}$. **4.34.** а) Умножится на $(-1)^n$; б) умножится на $(-1)^{n-1}$; в) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; г) не изменится. **4.36.** −3. **4.37.** 6. **4.38.** −18. **4.39.** 20. **4.40.** 26. **4.41.** 0. **4.42.** −192. **4.43.** 1. **4.44.** 37. **4.45.** −43. **4.46.** 98.

5

5.4. $X = \begin{pmatrix} -15 & -3 & -1 & -12{,}5 \\ -6{,}5 & 6{,}5 & -11 & 8 \\ -4{,}5 & -2{,}5 & -1{,}5 & -3 \end{pmatrix}$. **5.5.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$. **5.6.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. **5.7.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.8. $\begin{pmatrix} 2 & 41 \\ 11 & 30 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$. **5.9.** $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. **5.10.** $(5 \quad -19 \quad 5)$. **5.11.** 7. **5.12.** $\begin{pmatrix} 7 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 14 & 11 \end{pmatrix}$.

5.13. $\begin{pmatrix} 23 & 22 & 28 \\ -1 & -10 & -12 \\ -4 & -11 & -8 \end{pmatrix}$. **5.14.** $\begin{pmatrix} -3a^2 & a & 3a^2 \\ -a & 3 & a \\ 3a^2 & -a & -3a^2 \end{pmatrix}$. **5.15.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **5.16.** $\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a \end{pmatrix}$. **5.18.** а) Поменяются местами i-я и j-я строки; б) к i-й строке прибавится j-я строка, умноженная на число k; в) поменяются местами i-й и j-й столбец; г) к i-му столбцу прибавится

j-й столбец, умноженный на число k. **5.24.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **5.25.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5.26. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. **5.27.** $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **5.28.** $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ -0{,}6 & 2{,}4 & 2 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$. **5.29.** $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$.

5.30. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -17 & 8 & 11 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$. **5.31.** $\begin{pmatrix} -3 & 26 & 31 \\ 3 & -25 & -30 \\ 2 & -16 & -19 \end{pmatrix}$. **5.32.** $\begin{pmatrix} -10 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 9 \\ 14 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.

5.33. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **5.34.** $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. **5.35.** $\begin{pmatrix} 33 & -6 & -26 & 17 \\ 6 & -1 & -5 & 3 \\ -25 & 5 & 20 & -13 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5.36. $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -2 & -7 \\ 3 & 7 & -2 & -5 \\ -2 & -7 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **5.37.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/n \end{pmatrix}$. **5.38.** $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1/2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/n & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.39. $\begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **5.40.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **5.41.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 20 \\ -1 & -3 & 28 \\ -2 & -1 & 17 \end{pmatrix}$. **5.42.** $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 20 & 25 & -1 \end{pmatrix}$.

5.43. $\begin{pmatrix} -10 & 17 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$. **5.44.** $\begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 9 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$. **5.45.** $\begin{pmatrix} 22 & 8 & -27 \\ 25 & 12 & -30 \\ 51 & 21 & -62 \end{pmatrix}$. **5.46.** $\begin{pmatrix} -9 & 5 & 4 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

5.47. $\begin{pmatrix} -7 & -13 \\ -10 & -19 \end{pmatrix}$. **5.48.** $\begin{pmatrix} -182 & 68 \\ 142 & -53 \end{pmatrix}$. **5.49.** $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -6 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. **5.50.** $\begin{pmatrix} -16 & 38 & -6 \\ 30 & -69 & 12 \\ 16 & -55 & 1 \end{pmatrix}$.

5.52. $-2\mathrm{E} - \mathrm{A}$. **5.54.** В матрице A^{-1}: а) поменяются местами i-й и j-й столбцы (строки); б) i-й столбец (строка) умножится на число $1/k$; в) из j-го столбца (строки) вычтется i-й столбец (строка), умноженный на число k.

5.55. $\pm\mathrm{E}$; $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 1$. **5.58.** 2. **5.59.** 2. **5.60.** 4. **5.61.** 3.

5.62. 2. **5.63.** 3. **5.64.** $r(\mathrm{A}) = 0$, если $a_1 = \ldots = a_7 = 0$; $r(\mathrm{A}) = 1$, если ненулевые элементы есть в первой строке и $a_5 = a_6 = a_7 = 0$ или ненулевые элементы есть в последнем столбце и $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; $r(\mathrm{A}) = 2$, если ненулевые элементы, не совпадающие с a_4, есть и в первой строке, и в последнем столбце. **5.65.** $r(\mathrm{A}) = 1$, если $a = 1$; $r(\mathrm{A}) = 2$, если $a = -2$; $r(\mathrm{A}) = 3$, если $a \neq 1$ и $a \neq -2$.

6

6.2. $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$. **6.3.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. **6.4.** $x_1 = -9$, $x_2 = -10$, $x_3 = 13$. **6.5.** $x_1 = -7$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$. **6.6.** $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$. **6.7.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. **6.8.** $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$, $x_4 = -3$. **6.9.** $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$. **6.12.** $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$. **6.13.** $x_3 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_4$; $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$. **6.14.** $x_2 = 3 + 4x_3 - 7x_4$, $x_1 = -1 - 3x_3 + 5x_4$; $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_2 = -4$, $x_1 = 4$. **6.15.** $x_3 = 0$, $x_4 = x_1 + x_2$; $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$. **6.16.** $x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3$, $x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3$; $x_3 = 2$, $x_2 = 1$, $x_1 = -9$, $x_4 = 11$. **6.17.** $x_3 = 11x_1 - 11x_2 - 11$, $x_4 = -8x_1 + 8x_2 + 8$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$. **6.18.** Несовместна. **6.19.** Несовместна. **6.20.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. **6.21.** $x_1 = x_2 = x_4$, $x_3 = -x_4$; $x_1 = x_2 = x_4 = 2$, $x_3 = -2$. **6.22.** $x_1 = 2 + x_4$, $x_2 = -1 - 2x_4$, $x_3 = 2x_4$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. **6.23.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$. **6.24.** Несовместна. **6.25.** $x_1 = 5 - 2x_3$, $x_2 = \frac{1}{3}(7 - 5x_3)$, $x_4 = \frac{1}{3}(4 - 5x_3)$; $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$. **6.26.** $x_1 = -2x_2 + 2x_4$, $x_3 = -x_2 - x_4$, $x_5 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. **6.27.** Несовместна.

6.28. $\begin{cases} x_5 = -1 + x_1, \\ x_3 = -6 + 5x_1 + x_2 - x_4; \end{cases}$ $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$.

6.29. $\begin{cases} x_1 = 2 + x_5, \\ x_4 = 1 - x_2 + x_3 + 5x_5; \end{cases}$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$, $x_5 = -1$.

6.30. $\begin{cases} x_1 = -9 - x_2 - x_3, \\ x_4 = -7 + 2x_3, \\ x_5 = 3 + 2x_3; \end{cases}$ $x_1 = -9$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -7$, $x_5 = 3$.

6.31. Несовместна. **6.32.** $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = x_3 - 2x_5, \\ x_4 = 0; \end{cases}$ $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_5 = 1$.

6.33. $\begin{cases} x_2 = -x_1 + 12x_4, \\ x_3 = -x_1 + 7x_4, \\ x_5 = x_4; \end{cases}$ $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$, $x_4 = x_5 = 1$.

6.34. При $a = -2$ система несовместна; при $a \neq 1$, $a \neq -2$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{a+1}$; при $a = 1$ система имеет общее решение $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. **6.35.** При $a \neq -3$, $a \neq 1$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{a+1}$; при $a = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$; при $a = -3$ система несовместна. **6.36.** При $a \neq 0$, $a \neq -3$ система имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{2-a^2}{a(a+3)}$, $x_2 = \dfrac{2a-1}{a(a+3)}$, $x_3 = \dfrac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)}$; при $a = 0$ и при $a = -3$ система несовместна.

7

7.2. $B = A_1 + 2A_2 - A_3$. **7.3.** $B = 2A_1 + 2A_2 - A_3$. **7.4.** Вектор B не разлагается по системе A_1, A_2, A_3. **7.5.** Имеется бесконечно много различных разложений вектора B по системе A_1, A_2, A_3, A_4. Например, $B = A_1 - A_2 + A_3 + A_4$. **7.6.** $a = 3$. **7.7.** $a = 3$. **7.8.** a — любое число. **7.12.** Нет. **7.21.** Линейно зависима. **7.22.** Линейно независима. **7.23.** Линейно зависима. **7.24.** Линейно независима. **7.25.** Линейно независима. **7.26.** Линейно зависима. **7.27.** Линейно зависима. **7.28.** Линейно независима. **7.40.** а) Линейно независима; б) линейно зависима; в) линейно зависима; г) линейно независима. **7.44.** A_1, A_3; $A_2 = 3A_1 - A_3$; $A_4 = 4A_1 - 2A_3$. **7.45.** A_1, A_2, A_4; $A_3 = -A_1 - A_2 + 3A_4$. **7.46.** A_1, A_2, A_5; $A_3 = -A_1 - A_2 + 2A_5$; $A_4 = 4A_1 + 5A_2 - 4A_5$. **7.47.** A_1, A_3, A_5; $A_2 = A_1 - A_3$; $A_4 = -2A_1 + 2{,}5A_3 + A_5$. **7.48.** A_1, A_2, A_3; $A_4 = -3A_1 + 5A_2 - A_3$; $A_5 = -2A_1 + 3A_3$. **7.49.** A_2, A_3, A_4, A_5 и A_1, A_2, A_4, A_6. **7.50.** A_1, A_2, A_3; A_1, A_3, A_4; A_2, A_3, A_4. **7.51.** A_1, A_2, A_4; A_1, A_3, A_4; A_2, A_3, A_4. **7.52.** Каждые два вектора системы образуют базис. **7.53.** A_1, A_2, A_3; A_1, A_2, A_4; A_1, A_3, A_4. **7.59.** A_1. **7.62.** A_1; A_2; A_3; A_4. **7.63.** A_1, A_2, A_5; A_1, A_4, A_5; A_2, A_3, A_5; A_3, A_4, A_5. **7.64.** A_1, A_2, A_3; A_1, A_2, A_4; A_2, A_3, A_4. **7.65.** Два. **7.66.** 5. **7.74.** Ровно столько, сколько ненулевых коэффициентов в разложении вектора A_j по базису $B_1, B_2, \ldots, B_r$. **7.77.** $\mathrm{A}K_1 = (1, 7, 2)$, $\mathrm{A}K_2 = (5, 9, -4)$, $L_1\mathrm{A} = (2, -1, 0, 7)$, $L_2\mathrm{A} = (-3, 0, 1, -5)$. **7.92.** (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, −1). **7.93.** (1, −1, 1), (1, 2, 1), (1, 0, −1). **7.94.** (1, −2, 1), (1, −1, −3), (0, 0, 0), (7, 4, 1). **7.95.** (1, 2, 1, 3), (10, −1, 1, −3), (−6, −6, 36, −6). **7.96.** (−1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, −1, 0, 2). **7.97.** (−1, 0, 3, 2), (2, 2, 0, 1), (0, 0, 0, 0). **7.99.** $(^1/_2, -^1/_2, ^1/_2, ^1/_2)$, $(-^1/_2, ^1/_2, ^1/_2, ^1/_2)$, $(^1/_2, ^1/_2, ^1/_2, -^1/_2)$. **7.101.** а) Да; б) нет. **7.111.** (2, 1, −3, 0), (3, 0, −5, −1). **7.112.** (8, −6, 1, 0), (−7, 5, 0, 1). **7.113.** (7, 11, −1, 0), (11, 17, 0, −1). **7.114.** (1, −6, 0, −2), (0, 4, −1, 0). **7.115.** (1, −2, 1, 0), (1, −2, 0, 1). **7.116.** (1, −1, 1, −1). **7.117.** (1, −24, −9, 0), (0, 3, 2, 1). **7.118.** (3, 1, 0, −4, 0), (5, 0, 1, −9, 0). **7.119.** (1, 4, −3, 0, 0), (0, 0, 0, 3, −2), (0, 1, 0, −1, 0). **7.120.** $(3, 1, 1) + t(2, 1, 1)$. **7.121.** $(0, 0, 5, -2) + t(1, -1, -3, 1)$. **7.122.** $(2, 1, 0, 0) + t_1(1, -2, 1, 0) + t_2(-3, -4, 0, 1)$. **7.123.** $(0, -9, -2, 0) + t_1(1, 2, 0, 0) + t_2(0, 13, 5, 1)$. **7.124.** $(8, 0, 0, -10) + t_1(-9, 1, 0, 11) +$

$+ t_2(-4,\ 0,\ 1,\ 5)$. **7.125.** $t_1(-3,\ 3,\ 1,\ 0,\ 5) + t_2(-2,\ 1,\ 0,\ -1,\ 3)$. **7.126.** $t_1(1, 0, 0, -6, 5) + t_2(0, 1, 0, -2, 1) + t_3(0, 0, 1, -2, 1)$. **7.127.** Да. **7.128.** а) Да; б) да.

8

8.1. а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **8.2.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) да; ж) да; з) да. **8.3.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) нет; ж) да. **8.6.** y_1 принадлежит, y_2 не принадлежит. **8.14.** а) Да; б) нет; в) да. **8.15.** а) Да; б) нет. **8.16.** а) (1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (−1, 0, 0, 0, 1, 0), (0, −1, 0, 0, 0, 1); б) (7, 1, 0, −9), (−4, 0, 1, 5). **8.17.** а) Каждые два вектора системы; б) x_1, x_2; в) x_1, x_3, x_4; г) x_2, x_3, x_5. **8.18.** а) Базис состоит из одного вектора (1, 1, ..., 1); размерность равна единице; б) базис образуют векторы (1, 0, 0, 1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, 0, 1, 0, ...), (0, 0, 1, 0, 0, 1, ...); размерность равна трем; в) все те n-мерные векторы диагональной системы, у которых координаты, кратные трем, равны нулю; размерность равна $n - l$, где l — наибольшее натуральное число, для которого $3l \leqslant n$. **8.19.** а) Базис образуют векторы (1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1), (i, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., i); размерность равна $2n$; б) базис образуют векторы (1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1); размерность равна n. **8.20.** Каждый вектор системы x_1, x_2, x_3 дополняет вектор y до базиса линейной оболочки. **8.21.** Каждый из многочленов 1, t, t^2, t^3 дополняет данную систему до базиса. **8.28.** Совпадают. **8.29.** б) −2, 1, 4, 3; в) 2, −3, −3, 1; г) 2, −1, 1, 1. **8.30.** а) 1, −1, 1, −1, 1; б) 5, −4, 3, −2, 1; в) 2, −2, 2, −2, 1. **8.31.** а) x_1, x_2; 1; б) x_1, x_2, y_1, y_3; 1; в) (1, 1, −1, 0), (−1, −2, 0, −1), (1, −1, 0, −1), (0, 0, 1, 1); 0. **8.32.** а) x_2; б) (3, −5, 3, −5). **8.33.** Да. **8.46.** а) (1, 1, 1), (1, 0, −1); б) (1, −1, 1, −1), (2, 0, −2, 0), ($^3/_4$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^5/_4$). **8.47.** а) Например, векторами (0, 1, 1, 0), (1, 1, −1, −3); б) например, векторами (1, 0, 0, 1), (1, −3, 1, −1). **8.48.** а) Например, ($^1/_3$, $-^2/_3$, $^2/_3$, 0), ($^2/_3$, 0, $-^1/_3$, $^2/_3$); б) например, ($^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$), ($-^1/_2$, $-^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$). **8.49.** а) Не ортогонален; б) ортогонален. **8.50.** а) Ортогонален; б) не ортогонален. **8.55.** а) $L^\perp$ совпадает с линейной оболочкой системы векторов (1, 5, 3, 0), (0, −8, −3, 1); б) $L^\perp$ совпадает с подпространством решений системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 + 5t_2 + 3t_3 = 0, \\ 8t_2 + 3t_3 + t_4 = 0. \end{cases}$$

8.56. а) Не принадлежит; б) принадлежит.

9

9.3. $\lambda_1 = 2, \alpha(2, 1)$; $\lambda_2 = 3, \alpha(1, 1)$. **9.4.** $\lambda = 1$, $\alpha(1, 0)$. **9.5.** $\lambda_1 = 1, \alpha_1(1, -1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\alpha(1, 1, -1)$. **9.6.** $\lambda = 2$, $\alpha(1, 1, 1)$. **9.7.** $\lambda_1 = 0$, $\alpha(1, 1, 0)$; $\lambda_2 = 1$, $\alpha(1, 2, 1)$. **9.8.** $\lambda = 1$, $\alpha(1, 2, 1)$. **9.9.** $\lambda_1 = 0$, $\alpha_1(1, 0, -3) + \alpha_2(0, 1, 3)$; $\lambda_2 = 1$, $\alpha(1, 1, 1)$. **9.10.** $\lambda_1 = -2$, $\alpha(2, 1, -2)$; $\lambda_2 = -1$, $\alpha(-1, 0, 1)$;

$\lambda_3 = 1$, $\alpha(0, 0, 1)$. **9.11.** $\lambda_1 = 2$, $\alpha(-1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -1$, $\alpha(0, 0, 1)$. **9.12.** $\lambda_1 = 0$, $\alpha_1(0, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 1, 0) + \alpha_3(1, 0, 0, -1)$; $\lambda_2 = 2$, $\alpha(1, 0, 0, 1)$. **9.13.** $\lambda_1 = 0$, $\alpha_1(0, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 1, 0)$; $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1(0, 1, 0, 1) + \alpha_2(1, 0, 1, 0)$. **9.14.** $\lambda_1 = 0$, $\alpha(0, 1, 0, -1)$; $\lambda_2 = 1$, $\alpha(0, 0, 1, -1)$; $\lambda_3 = 2$, $\alpha(0, 1, 0, 1)$. **9.16.** Собственные значения равны диагональным элементам матрицы. **9.20.** а) $3\lambda_1, 3\lambda_2, \ldots, 3\lambda_m$; б) $\lambda_1 - 2, \lambda_2 - 2, \ldots, \lambda_m - 2$. **9.23.** Вектор x является собственным вектором матрицы **A** тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}^{-1}x$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$.

9.25. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.26.** $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9.27. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.28.** $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1{,}2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9.29. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.30.** $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.31. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **9.32.** $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

9.34. $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.35.** $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.36. $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **9.37.** $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

9.38. $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **9.39.** $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

9.40. $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **9.41.** $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. **9.51.** $A^2 = E$. **9.59.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. **9.60.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

9.62. $y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$; $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$ **9.63.** $2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2$;

$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$ **9.64.** $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$

9.65. $y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2$; $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = -2x_2 + x_3. \end{cases}$ **9.66.** $\lambda > 1$. **9.67.** $\lambda > 0{,}5$.

9.68. $\lambda > 1$. **9.69.** Требуемых значений λ не существует. **9.70.** Требуемых значений λ не существует. **9.71.** $\lambda < -2$. **9.72.** $-2 < \lambda < 0$. **9.73.** $\lambda < -2{,}5$.

9.74. $6{y_1}^2 + 3{y_2}^2 - 3{y_3}^2$; $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3. \end{cases}$

9.75. $5{y_1}^2 + 4{y_2}^2 - 4{y_3}^2$; $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3. \end{cases}$

9.76. $7y_1^2 - 7y_2^2 - 7y_3^2$; $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}x_1 + \dfrac{2}{\sqrt{14}}x_2 + \dfrac{3}{\sqrt{14}}x_3, \\ y_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2, \\ y_3 = -\dfrac{3}{\sqrt{70}}x_1 - \dfrac{6}{\sqrt{70}}x_2 + \dfrac{5}{\sqrt{70}}x_3. \end{cases}$

9.77. $4y_1^2 + 4y_2^2 + 7y_3^2$; $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2 - \dfrac{2}{\sqrt{6}}x_3, \\ y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_3. \end{cases}$

9.78. $9y_1^2 + 9y_2^2 + 27y_3^2$; $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}x_3, \\ y_2 = \dfrac{4}{\sqrt{45}}x_1 + \dfrac{5}{\sqrt{45}}x_2 + \dfrac{2}{\sqrt{45}}x_3, \\ y_3 = \dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{2}{3}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3. \end{cases}$

10

10.4. $(-9;\ 9)$. **10.5.** $[-3;\ 3]$. **10.6.** $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ \infty)$. **10.7.** $[-2;\ 2]$. **10.8.** $(-\infty; -6] \cup [1; \infty)$. **10.9.** $[2; 8]$. **10.10.** $(0; 3)$. **10.11.** $[-5; -1]$. **10.12.** $(-\infty; \infty)$. **10.13.** $(-\infty;\ -3{,}5) \cup (2;\ \infty)$. **10.14.** $[-2;\ 2]$. **10.15.** $[2;\ 5]$. **10.16.** $(0;\ 5)$. **10.17.** $(-\infty;\ -\sqrt{4{,}5}\,] \cup [\,\sqrt{4{,}5}\,;\ 3) \cup (3;\ \infty)$. **10.18.** $(-\infty;\ -8] \cup [-2;\ \infty)$. **10.19.** $[3;\ 5]$. **10.20.** $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{8}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4};\ \dfrac{4}{5}\right]$. **10.21.** $(-\infty;\ -0{,}6) \cup (-0{,}6;\ \infty)$. **10.22.** $(-\infty;\ -5] \cup [3;\ \infty)$. **10.23.** $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ \infty)$. **10.24.** $(0;\ 1) \cup (1;\ 2)$. **10.25.** $(-5; -4) \cup (0; 5)$. **10.26.** $\left[-\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6};\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \cup$ $\cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$. **10.27.** $(1;\ \infty)$. **10.28.** $(-\infty;\ -4) \cup (2;\ \infty)$. **10.29.** $(0;\ 1) \cup (1;\ 3)$. **10.30.** $[-3;\ \infty)$. **10.31.** $[0;\ 3]$. **10.32.** $(-\infty;\ \infty)$. **10.33.** $(-\infty;\ 5]$. **10.34.** $[3^{-16};\ \infty)$. **10.35.** $(-\infty;\ \infty)$. **10.36.** $(0;\ 1]$. **10.37.** $[2;\ 128]$. **10.38.** $[1;\ 3]$. **10.41.** Четная. **10.42.** Нечетная. **10.43.** Ни та, ни другая. **10.44.** Четная. **10.45.** Четная. **10.46.** Четная. **10.47.** Четная. **10.48.** Ни та, ни другая. **10.49.** Ни та, ни другая. **10.50.** Ни та, ни другая. **10.51.** $\pi/2$. **10.52.** $2\pi/3$. **10.53.** π. **10.54.** π. **10.55.** π.

11

11.3. а) 1; б) −1; в) не существует. **11.4.** 1. **11.5.** $^3/_2$. **11.6.** 1. **11.7.** $-^1/_2$. **11.8.** 2. **11.9.** −3. **11.10.** −0,1. **11.11.** 4. **11.12.** 27. **11.13.** 1. **11.15.** $n > 4/\lg 3$. **11.16.** а) $n > (1-\varepsilon)/(2\varepsilon)$; б) $n = 500$. **11.17.** $a = 1$, $n = 10$. **11.18.** $a = {}^5/_7$, $n = 3$. **11.19.** а) 3; б) $^1/_2$. **11.20.** а) $^1/_9$; б) 1. **11.21.** а) $^1/_2$; б) 2. **11.22.** а) $6\sqrt{3}$; б) $^1/_2$. **11.23.** а) e^{-4}; б) e^3. **11.24.** а) $e^{-1/2}$; б) $e^{-3/4}$. **11.25.** а) e^2; б) e^{-2}. **11.26.** а) 3; б) $e^{-3/2}$. **11.27.** а) −2; б) e^{-1}. **11.28.** а) e^{-4}; б) e^{-1}. **11.29.** $^1/_2$. **11.30.** 0. **11.31.** а) −1; б) 1. **11.32.** а) 1; б) $^2/_3$; в) $^4/_5$. **11.33.** а) 1; б) $^8/_5$. **11.34.** а) $^3/_2$; б) $-^1/_2$. **11.35.** а) $^3/_2$; б) $-^4/_3$; в) $^3/_7$. **11.36.** 6. **11.37.** 1. **11.38.** $(^3/_2)^{30}$. **11.39.** 5^{-5}. **11.40.** а) −4; б) 0. **11.41.** а) $-^5/_2$; б) $^1/_3$. **11.42.** а) 2; б) 3. **11.43.** а) e^{10}; б) e^{10}. **11.44.** 2. **11.45.** $\sqrt{^2/_3}$. **11.47.** 3-й. **11.48.** 3-й. **11.49.** 1-й. **11.50.** 3-й. **11.51.** $\alpha = o(\beta)$. **11.52.** $\alpha \sim \beta$. **11.53.** $\alpha = o(\beta)$. **11.54.** Точка разрыва $x = 4$. **11.55.** Точка разрыва $x = 0$. **11.56.** а) Точка разрыва $x = 0$; б) точки разрыва $x = (2n-1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$. **11.57.** Точка разрыва $x = 0$. **11.58.** а) Точка разрыва $x = 3$; б) точка разрыва $x = 0$; в) точка разрыва $x = 0$.

12

12.14. $14x^6 - 10x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **12.15.** $-\dfrac{14}{x^3}$. **12.16.** $2^x(2x-3) + 2^x\ln 2\cdot(x^2-3x+1)$. **12.17.** $x^{-6/7}(\ln x + 1)$. **12.18.** $\dfrac{1+x}{\sqrt[5]{x^2}}$. **12.19.** $x(6\ln x + 1)$. **12.20.** $3^x\cdot 2^{-3x}\times(\ln 3 - 3\ln 2)$. **12.21.** $2x\sin x + x^2\cos x$. **12.22.** $4^x\ln 4\cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{4^x}{\cos^2 x}$.

12.23. $3^{x-1}\left(\dfrac{1+3x\ln 3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$. **12.24.** $3x^2\arcsin x + \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$. **12.25.** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\left(\dfrac{\log_2 x}{5} + \dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

12.26. 0. **12.27.** $-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. **12.28.** $\dfrac{\sin x\cos x - x\ln x}{x\sin^2 x} - \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$.

12.29. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. **12.30.** $-\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. **12.31.** $\dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

12.32. $\dfrac{x + (1-x^2)\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$. **12.33.** $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{(1+2\sin x)^2}$. **12.34.** $-\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

12.35. $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **12.36.** $\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{4}$. **12.37.** $3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} + \dfrac{9x-1}{9+x^2}$. **12.38.** $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

12.39. $\dfrac{1}{\sin\dfrac{2x+1}{2}}$. **12.40.** $-\dfrac{2x}{1-x^4}$. **12.41.** $2\sin 3x\cos x$. **12.42.** $\dfrac{(1+\operatorname{tg} 2x)^2}{\cos^2 2x}$.

12.43. $\frac{3}{2}\frac{1-\sin 3x}{\sqrt{3x+\cos 3x}}$. 12.44. $\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}$. 12.45. $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$. 12.46. $\frac{4}{4-x^2}$.

12.47. $-\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}\ln 3$. 12.48. $\ln 2\cdot\sin 2x$. 12.49. $\frac{1}{2+x^2}$.

12.50. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{8-x^6}}$. 12.51. $\frac{1}{x\ln x}$. 12.52. $\frac{2ax}{a^4-x^4}$. 12.53. $\frac{2}{x(1-x^2)}$.

12.54. $\ln x+1+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 12.55. $\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$. 12.56. $\frac{1}{2\sqrt{x-2x^2}}$. 12.57. $\sqrt{1-x^2}$

. 12.58. $e^{x^2}[(x-1)\sin 2x+(x+1)\cos 2x]$. 12.59. $2^x\left[\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$.

12.60. $\sin^2 x^2\cos x^2$. 12.61. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{3}}$. 12.62. $2\sin\frac{x}{3}-\sin\frac{2x}{3}$.

12.63. $6x\cdot 2^{3x^2}\ln 2+\operatorname{ctg} x$. 12.64. $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. 12.65. $3\operatorname{ctg}(3x+2)$.

12.66. $-e^{-x^2}\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-3)^2}$. 12.67. $\frac{1}{\sqrt{-4x^2-2x}}$. 12.68. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$.

12.69. $\operatorname{ctg}\frac{3}{5}x\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{3}{5}x}$. 12.71. $\frac{x^{\operatorname{arctg} x}\ln x}{1+x^2}+\operatorname{arctg} x\cdot x^{\operatorname{arctg} x-1}$.

12.72. $(3x^2+3x-1)^x\ln(3x^2+3x-1)+(3x^2+3x-1)^{x-1}(6x^2+3x)$.

12.73. $(x+1)^{\ln x}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{\ln x}{x+1}\right)$. 12.74. $\frac{2^x\sqrt[4]{4x+1}}{(2x-1)^3\sqrt[3]{x^3+2}}\left(\ln 2+\frac{1}{4x+1}-\right.$

$\left.-\frac{6}{2x-1}-\frac{x^2}{x^3+2}\right)$. 12.75. $\frac{(x^2-1)^3\arcsin\sqrt{x}}{x^4(3x+2)}\left(\frac{6x}{x^2-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}\arcsin\sqrt{x}}-\right.$

$\left.-\frac{4}{x}-\frac{3}{3x+2}\right)$. 12.77. $2\cos 2x$. 12.78. $-\frac{6(3x^2+5)}{(x^2-5)^2}$. 12.79. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

12.80. $5x^3(4\ln x+1)$. 12.81. $\frac{x\operatorname{arctg} x+1}{\sqrt{1+x^2}}$. 12.82. $-\frac{1}{x^2}$. 12.83. $\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$.

12.84. $e^{-x}(3-x)$. 12.85. $(x+1)^{-4}$. 12.86. $133(8x+3)^{-9/8}$.

12.87. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$. 12.88. $\frac{(-1)^n e^{-x/a}}{a^n}$. 12.89. $(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

12.90. $(\ln 2)^n(2^x+(-1)^n 2^{-x})$. 12.91. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$. 12.92. $a^x(\ln a)^n$.

12.93. $2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$. 12.94. $\frac{1}{a^{n-1}}e^{x/a}\left(n+\frac{x}{a}\right)$. 12.95. $(-1)^n\times$

$\times 2^n n!(2x+1)^{-n}$. 12.98. $y=6(x+3)$; $y=-\frac{1}{6}(x+3)$. 12.99. $3x-3y+2=0$.

12.100. $y=0$; $3x-2y=1$. 12.101. $4x+y=9$. 12.102. $y=-4x-8$;

$y = -\frac{1}{4}x + 2$. **12.103.** $y = 4x$; $y = -4x + 16$. **12.104.** $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$; $x = 4$. **12.106.** $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{4}{5}$; $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{23}$. **12.107.** $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{11}\right)$. **12.108.** $\varphi = 135°$. **12.109.** $\varphi_1 = \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{16}{63}$. **12.111.** $x_1 = -2{,}215$; $x_2 = 0{,}536$; $x_3 = 1{,}675$. **12.112.** 1,055001. **12.113.** 0,265. **12.114.** 4,453. **12.117.** $-6\cos^2 2x \sin 2x\, dx$. **12.118.** $\frac{7-3x}{\sqrt{7-2x}}\,dx$. **12.119.** $\frac{dx}{x^2-36}$.

12.120. $-\sqrt{9-x^2}\,dx$. **12.121.** $-x^2 \cdot 3^{1-x^3}\ln 3\, dx$. **12.122.** $\frac{x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\,dx$.

12.123. $\left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)dx$. **12.124.** $\frac{e^{5x}}{x^3}(5x-2)dx$. **12.125.** $-3\frac{x^3-x^2+2}{e^{3x}}\,dx$.

12.126. $\left(\frac{e^{3x-5}}{\sqrt{x^2+4}}\;\frac{3x^2-x+2}{x^2+4}\right)dx$. **12.127.** $\Delta y = -0{,}007999$; $dy = -0{,}008$. **12.128.** $71°48'$. **12.129.** 1,0349. **12.130.** 2,995. **12.131.** 1,077. **12.132.** Увеличится на 2,94 руб. **12.134.** $(36x^2 - 30x)(dx)^2$. **12.135.** $64\sin(4x + 1)(dx)^3$. **12.136.** $-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}(x + 2)^{-11/3}(dx)^4$.

12.137. $-6x^{-4}(dx)^5$. **12.139.** $\frac{12xy^3-2y^4-5x^2}{4y^3-9x^2y^2}$. **12.140.** $\frac{4xy^2-3x^2-2xy-6}{x^2-4x^2y}$.

12.141. $-\frac{2x-(x^2y+y^3)e^{yx}}{2y-(x^3+xy^2)e^{yx}}$. **12.142.** $\frac{(2xy^3-14xy)\sqrt{1-y^2}}{(7x^2-3x^2y^2)\sqrt{1-y^2}+1}$. **12.144.** $-\frac{1}{t}$.

12.145. $\frac{t^2+1}{4t^3}$. **12.146.** 2. **12.147.** $t^2 + \frac{2}{3}$. **12.148.** $\frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$.

12.149. $-\frac{b}{4a^2\cos^3 t}$. **12.151.** Нет. **12.152.** Да; $x_0 = 1/e \approx 0{,}36$. **12.153.** Да; $x_{01} = -1$, $x_{02} = 0$. **12.155.** Да; $c = -3{,}5$. **12.156.** Да; $c = 0$. **12.157.** Да; $c = 1{,}5$. **12.161.** Да; $c = 3{,}5$. **12.162.** Да; $c = \frac{1}{\ln\sqrt{3}} \approx 1{,}8$. **12.163.** Да; $c = 4{,}5$.

12.164. а) Да; $c = \frac{25-\sqrt{157}}{9}$; б) да; $c = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}$. **12.165.** $^2/_3$. **12.166.** $\pi/4$.

12.167. $\left(\frac{15}{4}\right)^{2/3} - 1 \approx 1{,}41$. **12.172.** 0. **12.173.** $-^3/_{11}$. **12.174.** 2. **12.175.** $^2/_3$.

12.176. ∞. **12.177.** 0. **12.178.** 0. **12.179.** ∞. **12.180.** $-\infty$. **12.181.** 1. **12.182.** 0. **12.183.** 0,5. **12.184.** 1. **12.185.** $2/\pi$. **12.186.** 0. **12.187.** $1/\pi$. **12.188.** ∞. **12.189.** $^1/_6$. **12.190.** $^1/_2$. **12.191.** $^2/_3$. **12.192.** 0. **12.193.** 1. **12.194.** 1. **12.195.** 3. **12.196.** $e^{-2/\pi}$. **12.197.** 0. **12.200.** $3x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 3(x + 1)^3 - 11(x + 1)^2 + 18(x + 1) - 14$. **12.201.** $e^{x^2+2x} = 1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \frac{13}{5}x^5 + R_6$, где $R_6 = \frac{f^{VI}(\theta x)}{6!}x^6$, $0 < \theta < 1$. **12.202.** $\ln(x + 1) =$

$= \ln 4 + \frac{x-3}{4} - \frac{1}{2!}\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{2!}{3!}\frac{(x-3)^3}{4^3} + R_4$, где $R_4 = -\frac{3!}{4!}\frac{(x-3)^4}{(\xi+1)^4}$ и $\xi = 3 + \theta(x-3)$, $0 < \theta < 1$. **12.203.** $a^x = a\left[1 + (\ln a)(x-1) + \frac{(\ln a)^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}(x-1)^3 + \frac{(\ln a)^4}{4!}(x-1)^4\right] + \frac{(\ln a)^5}{5!}a^{-\theta(x-1)}(x-1)^5$, где $0 < \theta < 1$.

12.204. $\sqrt[3]{x+3} = 3^{1/3} + 3^{-5/3}x - \frac{1\cdot 2}{2!}3^{-11/3}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!}3^{-17/3}x^3 + R_4$, где $R_4 = -\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{4!}(\theta x+3)^{-23/3}x^4$, $0 < \theta < 1$. **12.206.** y возрастает для $\forall\, x \in (-1; \infty)$.

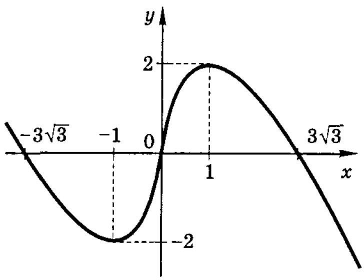
12.207. y возрастает для $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$. **12.208.** $x \in (-\infty; -1/3)$, y убывает; $x \in (-1/3; \infty)$, y возрастает. **12.209.** $x \in (-\infty; 1)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (1; \infty)$, $y' < 0$, y убывает. **12.210.** $x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (-2; 4)$, $y' < 0$, y убывает. **12.211.** $x \in (0; \infty)$, $y' > 0$, y возрастает. **12.212.** $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $y' < 0$, y убывает; $x \in (-1; 1)$, $y' > 0$, y возрастает. **12.213.** $x \in (-2; 0)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (0; 2)$, $y' < 0$, y убывает. **12.214.** $x \in (-\pi, \pi)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (\pi; 2\pi)$, $y' < 0$, y убывает. **12.215.** $x \in (0, \pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi)$, $y' < 0$, y убывает; $x \in (\pi/3, 5\pi/3)$, $y' > 0$, y возрастает. **12.216.** а) $Q = 20$; $P = 2$; $TR = 40$; б) $P = 4{,}5$; $Q = 1{,}25$; в) $E_\pi(Q) = 18$; $E_{TR}(Q) = 1$. **12.220.** $y_{\max}(-1) = -2$; $y_{\min}(-0{,}5) = -2{,}25$.

12.221. $y_{\max}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{49}}\right) \approx 0{,}2$. **12.222.** $y_{\max}(0) = 0$; $y_{\min}(4) = 8$. **12.223.** $y_{\min}(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y_{\max}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **12.224.** $y_{\min}(2) = 2 - 2\ln 2$. **12.225.** $y_{\min}(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$.

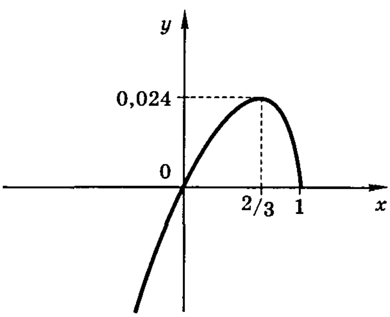
12.226. $y_{\min}(-3) = 6$; $y_{\max}(-1) = 2$. **12.227.** $y_{\max}(\pi/6) = y_{\max}(5\pi/6) = 3/2$; $y_{\min}(\pi/2) = 1$. **12.228.** $x_{\min} = \frac{5\pi}{12} + \pi n$; $y_{\min}(x_{\min}) = \frac{5\pi}{12} + \pi n - 2\sin^2\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$; $x_{\max} = \frac{\pi}{12} + \pi n$; $y_{\max}(x_{\max}) = \frac{\pi}{12} + \pi n - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12} + \pi n\right)$. **12.229.** $y_{\min}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

12.230. $y_{\min}(0) = 0$; $y_{\max}(2) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$. **12.231.** $y_{\min}(-5) = -9\mathrm{e}^{-5/3}$. **12.232.** Функция экстремумов не имеет; $y' > 0$ $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$ — функция всюду возрастает. **12.233.** Функция экстремумов не имеет; $y' < 0$ $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$ — функция всюду убывает. **12.234.** Наименьшее $y(-1) = y(1) = 2$; наибольшее $y(-3) = 66$. **12.235.** $y(-1) = 1$. **12.236.** Наибольшее $y(8) = 24$; наименьшее $y(1/8) = -7{,}8$. **12.237.** Наибольшее $y(4) = 0$; наименьшее $y(0) = y(1) = -4$. **12.238.** 0,3 м; $V = 0{,}486$ м^3. **12.239.** Через 1 неделю. **12.240.** $\frac{P}{4+\pi}$. **12.241.** $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. **12.242.** 2700 м^2 = 30×90. **12.243.** 17×19. **12.244.** 13.

12.246. $x \in (-\infty; 2)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x \in (2; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x = 2$ — точка перегиба. **12.247.** $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x \in (-2; 1)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x = -2$; $x = 1$ — точки перегиба. **12.248.** Для верхней ветви $y = \sqrt{x^3}$ $x \in (0; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; для нижней ветви $y = -\sqrt{x^3}$ $x \in (0; \infty)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x = 0$ — точка перегиба. **12.249.** $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x \in (-1; 3)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x = -1$, $x = 3$ — точки перегиба. **12.250.** $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегиба. **12.251.** $x \in (-\infty; -2)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x \in (-2; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x = -2$ — точка перегиба. **12.252.** $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x \in (-\sqrt[3]{2}; 0) \cup (0; 1)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x = -\sqrt[3]{2}$ — точка перегиба; в точке $x = 0$ перегиба нет. **12.253.** $y'' > 0$ $\forall x \in (0; \infty)$, y выпукла вниз. **12.255.** $x = 1$ — вертикальная асимптота, $y = x$ — наклонная асимптота. **12.256.** Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$. **12.257.** Наклонная асимптота $y = 2x$. **12.258.** Асимптот нет. **12.259.** Асимптот нет. **12.260.** Наклонные асимптоты $y = 2x + \pi/2$ при $x \to +\infty$ и $y = 2x - \pi/2$ при $x \to -\infty$. **12.261.** Вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$; наклонная: $y = 2x + 1$.

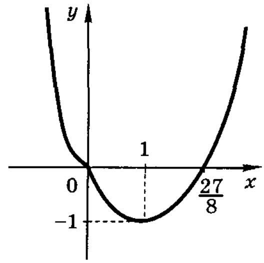


12.263. $D(f) = \{x \in R\}$; нечетная; точки пересечения с осями: $(0; 0)$, $(3\sqrt{3}; 0)$, $(-3\sqrt{3}; 0)$; функция всюду непрерывна; асимптот нет; $x \in (-1; 1)$, y возрастает; $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, y убывает; в точке $x = 0$ кривая имеет вертикальную касательную; в точке $x = -1$ имеет минимум $y(-1) = -2$; в точке $x = 1$ имеет максимум $y(1) = 2$; $x \in (-\infty; 0)$, $y'' > 0$, кривая выпукла вниз; $x \in (0; \infty)$, $y'' < 0$, кривая выпукла вверх; $x = 0$ — точка перегиба.

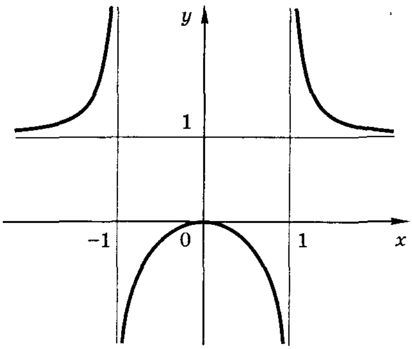


12.264. $D(f) = \{x \in (-\infty; 1]\}$; точки пересечения с осями: $(0; 0)$, $(1; 0)$; функция всюду непрерывна; асимптот нет; $x \in (-\infty; {}^2/_3)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in ({}^2/_3; 1)$, $y' < 0$, y убывает; в точке $x = {}^2/_3$ функция имеет максимум $y({}^2/_3) = 0{,}024$; в точке $x = 1$ вертикальная касательная; функция всюду выпукла вверх; точек перегиба нет.

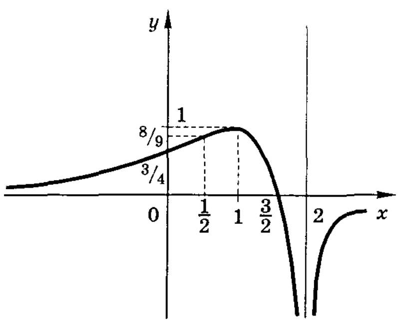
12.265. $D(f) = \{x \in \mathbf{R}\}$; точки пересечения с осями: $(0; 0)$, $(^{27}/_8; 0)$; функция всюду непрерывна; асимптот нет; $x \in (-\infty; 1)$, $y' < 0$, y убывает; $x \in (1; \infty)$, $y' > 0$, y возрастает; в точке $x = 1$ функция имеет минимум $y(1) = -1$; в точке $x = 0$ график функции имеет вертикальную касательную; $\forall x \in D(f)$ $y'' > 0$, функция всюду выпукла вниз.



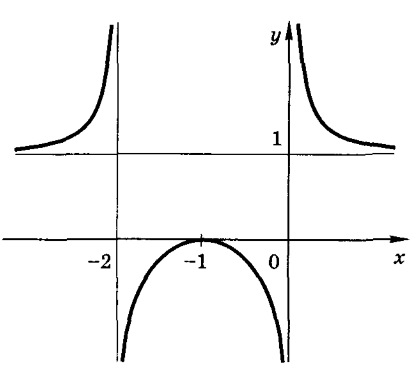
12.266. $D(f) = \{x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup \cup (1; \infty)\}$, четная; точка пересечения с осями $(0; 0)$; точки разрыва II рода в точках $x = \pm 1$; $x = -1$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты; $y = 1$ — горизонтальная асимптота; $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, $y' < 0$, y убывает; в точке $x = 0$ функция имеет максимум; $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in (-1; 1)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх.

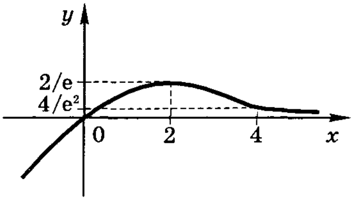


12.267. $D(f) = \{x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)\}$; точки пересечения с осями: $(0; ^3/_4)$ и $(^3/_2; 0)$; точка разрыва II рода в точке $x = 2$; горизонтальная асимптота $y = 0$; $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (1; 2)$, $y' < 0$, y убывает; в точке $x = 1$ функция имеет максимум $y(1) = 1$; $x \in (-\infty; ^1/_2)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x \in (^1/_2; 2) \cup (2; \infty)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; в точке $x = ^1/_2$ функция имеет точку перегиба $y(^1/_2) = ^8/_9$.

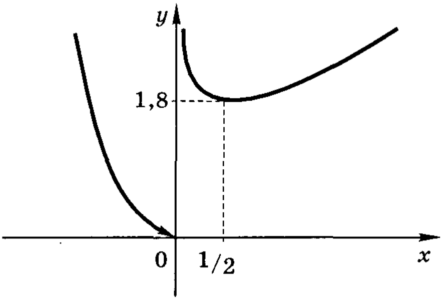


12.268. $D(f) = \{x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup \cup (0; \infty)\}$; точка пересечения с осями $(-1; 0)$; точки разрыва II рода: $x = -2$, $x = 0$; вертикальные асимптоты: $x = -2$, $x = 0$; горизонтальная асимптота $y = 1$; $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (-1; 0) \cup (0; \infty)$, $y' < 0$, y убывает; $x = -1$ — точка максимума, $y(-1) = 0$; $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x \in (-2; 0)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; точек перегиба нет.

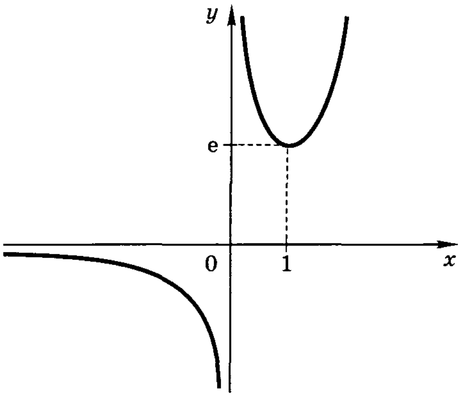




12.269. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точка пересечения с осями (0; 0); функция всюду непрерывна; горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to \infty$; $x \in (-\infty;\ 2)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (2;\ \infty)$, $y' < 0$, y убывает; $x = 2$ — точка максимума, $y(2) = 2/\mathrm{e} \approx 0{,}73$; $x \in (-\infty;\ 4)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x \in (4;\ \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x = 4$ — точка перегиба, $y(4) = 4/\mathrm{e}^2 \approx 0{,}54$.

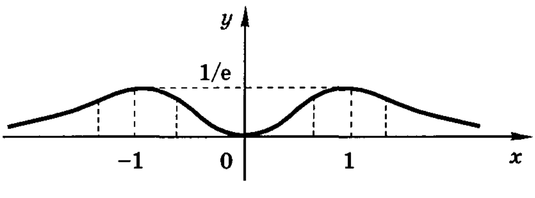


12.270. $D(f) = \{x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)\}$; при $x \to 0 - 0$ $y \to 0$, при $x \to 0 + 0$ $y \to \infty$; $x = 0$ — вертикальная асимптота; $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ {}^1/_2)$, $y' < 0$, y убывает; $x \in ({}^1/_2,\ \infty)$, $y' > 0$, y возрастает; $x = {}^1/_2$ — точка минимума, $y({}^1/_2) = \mathrm{e}^2/4 \approx 1{,}8$; $\forall\, x \in D(f)$ $y'' > 0$, y выпукла вниз.



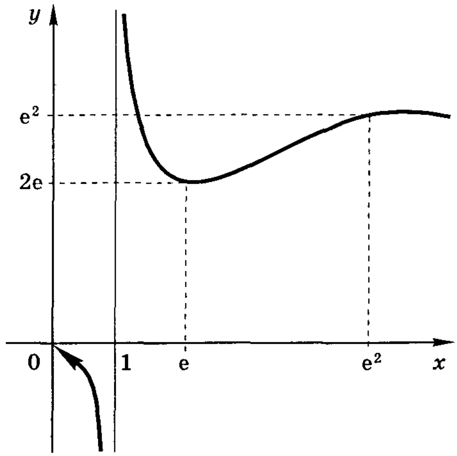
12.271. $D(f) = \{x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)\}$; точка разрыва II рода $x = 0$; при $x \to -\infty$ $y \to 0$, $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота; $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$, $y' < 0$, функция убывает; $x \in (1;\ \infty)$, $y' > 0$, функция возрастает; $x = 1$ — точка минимума, $y(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}72$; $x \in (-\infty;\ 0)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (0;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз.

12.272. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; четная; точка пересечения с осями (0; 0); непрерывная; горизонтальная асимптота $y = 0$; $x \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ 1)$, $y' > 0$,

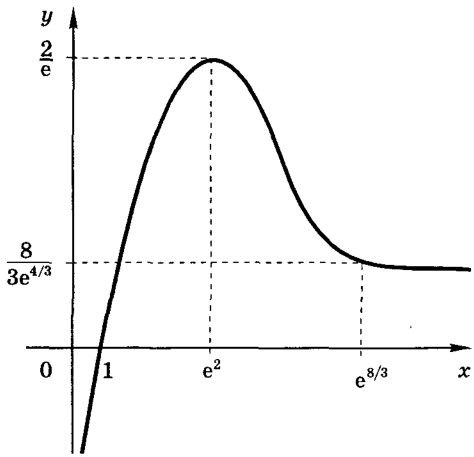


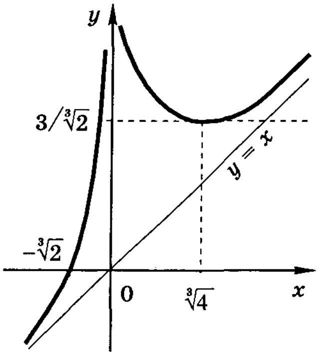
y возрастает; $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$, $y' < 0$, y убывает; в точках $x = \pm 1$ функция имеет максимум, в точке $x = 0$ — минимум; $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}\right) \cup$ $\cup \left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}; \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}; \infty\right)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in \left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}; -\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}; \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}\right)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; в точках $x = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}$ и $x = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$ функция имеет точки перегиба.

12.273. $D(f) = \{x \in (0; 1) \cup (1; \infty)\}$; $x = 1$ — точка разрыва II рода; $x = 1$ — вертикальная асимптота; $x \in (e; \infty)$, $y' > 0$, функция возрастает; $x \in (0; 1) \cup (1; e)$, $y' < 0$, функция убывает; $x = e$ — точка минимума, $y(e) = 2e$; $x \in (1; e^2)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in (0; 1) \cup (e^2; \infty)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; в точке $x = e^2$ — точка перегиба, $y(e^2) = e^2$.

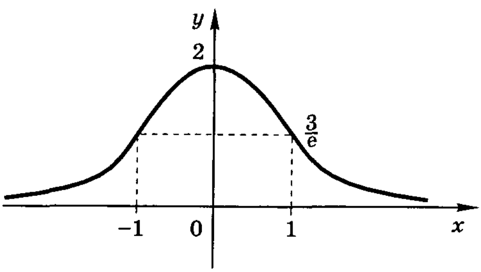


12.274. $D(f) = \{x \in (0; \infty)\}$; точка пересечения с осями $(1; 0)$; $x = 0$ — вертикальная асимптота; $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $x \in (0; e^2)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (e^2; \infty)$, $y' < 0$, y убывает; $x = e^2$ — точка максимума, $y(e^2) = 2/e$; $x \in (0; e^{8/3})$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (e^{8/3}; \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x = e^{8/3}$ — точка перегиба, $y(e^{8/3}) = 8/(3e^{4/3})$.

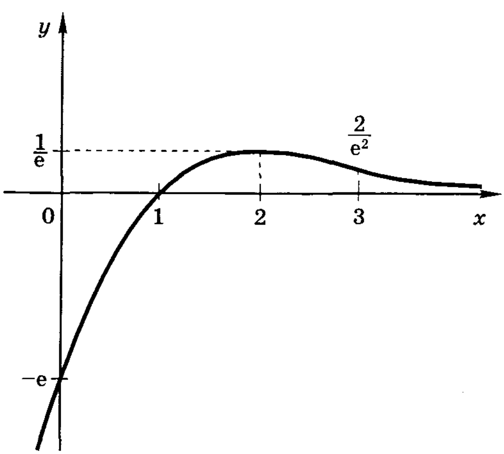




12.275. $D(f) = \{x \in (-\infty;\ 0) \cup \cup (0;\ \infty)\}$; точка пересечения с осями $(-\sqrt[3]{2}\ ;\ 0)$; $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y = x$ — наклонная асимптота; $x \in (-\infty;\ 0) \cup \cup (\sqrt[3]{4}\ ;\ \infty)$, функция возрастает; $x \in (0;\ \sqrt[3]{4}\ )$, функция убывает; $x = \sqrt[3]{4}$ — точка минимума, $y(\sqrt[3]{4}\ ) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}6$; $x \in (-\infty;\ 0) \cup \cup (0;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; точек перегиба нет.

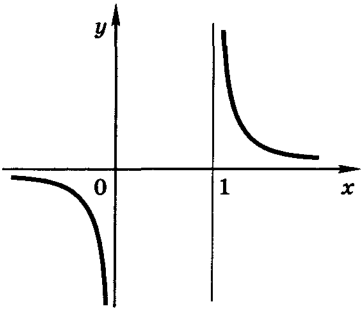


12.276. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; четная; точка пересечения с осями (0; 2); $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $x \in (-\infty;\ 0)$, функция возрастает; $x \in (0;\ \infty)$, функция убывает; $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 2$; $x \in (-\infty;\ -1) \cup \cup (1;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in (-1;\ 1)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x = \pm 1$ — точки перегиба, $y(\pm 1) = 3/e \approx 1{,}1$.

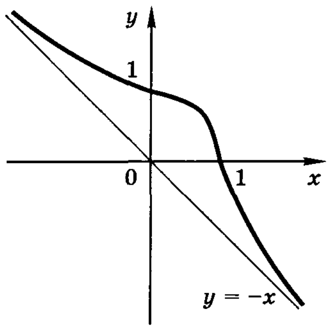


12.277. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точки пересечения с осями: (1; 0), (0; −e); точек разрыва нет; $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$; $x \in (-\infty;\ 2)$ — функция возрастает; $x \in (2;\ \infty)$ — функция убывает; $x = 2$ — точка максимума, $y(2) = 1/e \approx 0{,}37$; $x \in (-\infty;\ 3)$, $y'' < 0$, y выпукла вверх; $x \in (3;\ \infty)$, $y'' > 0$, y выпукла вниз; $x = 3$ — точка перегиба, $y(3) = 2/e^2 \approx 0{,}27$.

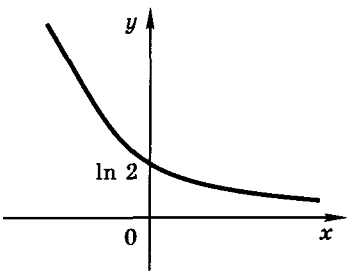
12.278. $D(f) = \{x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ \infty)\}$; точек пересечения с осями нет; $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $x = 0$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты; $y' < 0\ \ \forall\ x \in D(f)$ — функция всюду убывает; $x \in (-\infty;\ 0)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (1;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; точек перегиба нет.



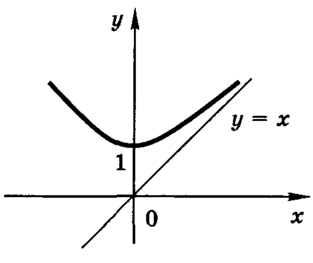
12.279. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точки пересечения с осями: $(0;\ 1)$ и $(1;\ 0)$; $y = -x$ — наклонная асимптота; $y' < 0\ \ \forall\ x \in D(f)$, функция всюду убывает; $x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in (0;\ 1)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; точки $x = 0$ и $x = 1$ — точки перегиба.

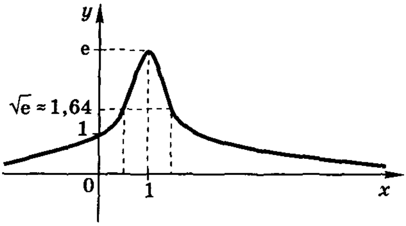


12.280. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точка пересечения с осями $(0;\ \ln 2)$; $x \to -\infty$, $y \to \infty$, при $x \to \infty\quad y \to 0 \Rightarrow y = 0$ — горизонтальная асимптота; $\forall\ x \in D(f)\quad y' < 0$, функция всюду убывает; $\forall\ x \in D(f)\quad y'' > 0$, функция выпукла вниз.

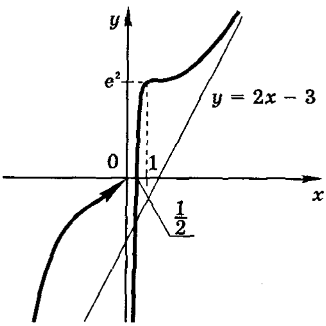


12.281. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точка пересечения с осями $(0;\ 1)$; $y = x$ — наклонная асимптота; $x \in (-\infty;\ 0)$ — функция убывает; $x \in (0;\ \infty)$ — функция возрастает; $x = 0$ — точка минимума, $y(0) = 1$; $\forall\ x \in D(f)\ \ y'' > 0$, функция всюду выпукла вниз.

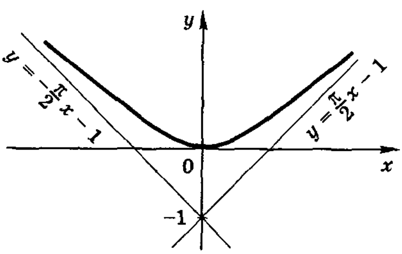




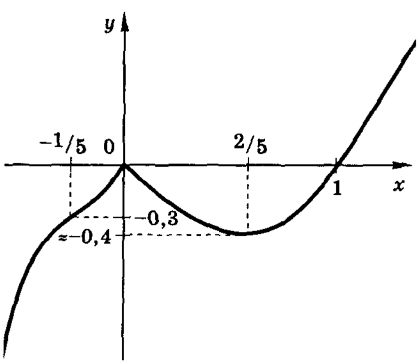
12.282. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точка пересечения с осями $(0;\ 1)$; $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $x \in (-\infty;\ 1)$, $y' > 0$, y возрастает; $x \in (1;\ \infty)$, $y' < 0$, y убывает; точка $x = 1$ — точка максимума, $y(1) = \mathrm{e}$; $x \in \left(-\infty;\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\ \infty\right)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; точки $x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ и $x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ — точки перегиба, $y(x_1) = y(x_2) = \sqrt{\mathrm{e}}$.



12.283. $D(f) = \{x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)\}$; точка пересечения с осью $(^1/_2;\ 0)$; $y = 2x - 3$ — наклонная асимптота; $\forall\ x \in D(f)$ $y' > 0$, функция всюду возрастает; $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (1;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; точка $x = 1$ — точка перегиба, $y(1) = \mathrm{e}^2$.

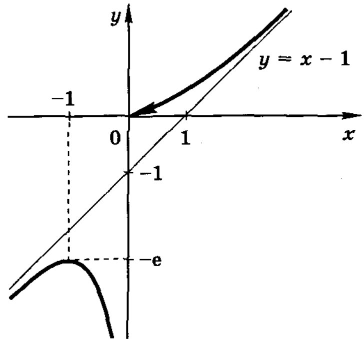


12.284. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точка пересечения с осями $(0;\ 0)$; наклонные асимптоты $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ и $y = \frac{\pi}{2}x - 1$; $x \in (-\infty;\ 0)$, $y' < 0$, y убывает; $x \in (0;\ \infty)$, $y' > 0$, y возрастает; $x = 0$ — точка минимума, $y(0) = 0$; $x \in \boldsymbol{R}$, $y'' > 0$, функция всюду выпукла вниз.

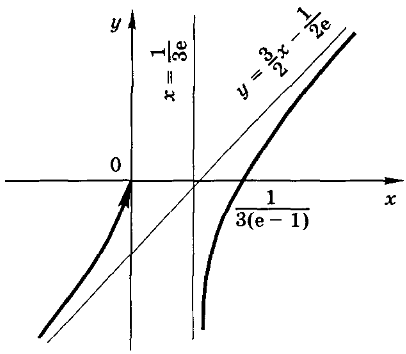


12.285. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точки пересечения с осями: $(0;\ 0)$ и $(1;\ 0)$; $x \in (-\infty;\ 0) \cup (^2/_5;\ \infty)$, $y' > 0$, функция возрастает; $x \in (0;\ ^2/_5)$, $y' < 0$, функция убывает; точка $(0;\ 0)$ — точка максимума, точка $\left(\frac{2}{5};\ -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}\right)$ — точка минимума; $x \in (-\infty;\ -^1/_5)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (-^1/_5;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; точка $x = -^1/_5$ — точка перегиба, в точке $x = 0$ перегиба нет.

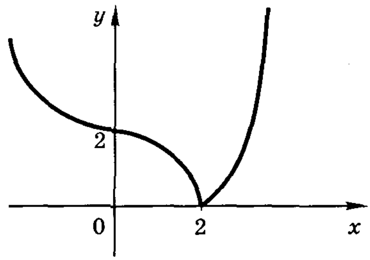
12.286. $D(f) = \{x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)\}$; $\lim\limits_{x \to 0+0} xe^{-1/x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-0} xe^{-1/x} = -\infty$; наклонная асимптота $y = x - 1$; $x \in (-\infty; -1) \cup (0, \infty)$, $y' > 0$, функция возрастает; $x \in (-1;\ 0)$, $y' < 0$, функция убывает; точка $(-1; -e)$ — точка максимума; $x \in (-\infty; 0)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (0, \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз.



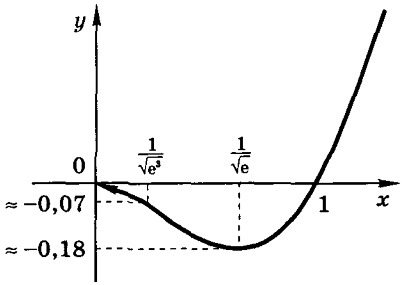
12.287. $D(f) = \{x \in (-\infty; 0) \cup (1/(3e); \infty)\}$; точка пересечения с осями $\left(\dfrac{1}{3(e-1)}\ ;0\right)$; $x \to 0-0$, $y \to 0$; $x = 1/(3e)$ — вертикальная асимптота; $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2e}$ — наклонная асимптота; $y' > 0\ \ \forall\, x \in D(f)$, функция всюду возрастает; $x \in (-\infty; 0)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in (1/(3e), \infty)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх.



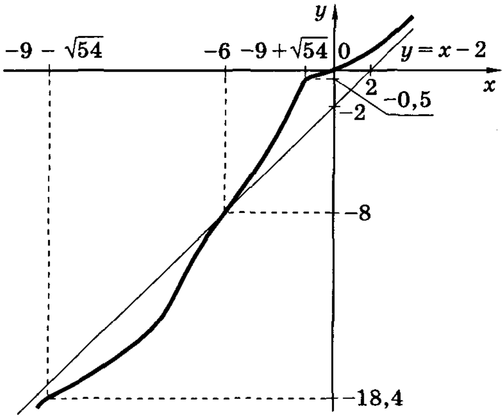
12.288. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\}$; точки пересечения с осями: $(0;\ 2)$, $(2;\ 0)$; 1) $x > 2$, $y' > 0$, y возрастает; $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x = 2$ — точка минимума, $y(2) = 0$; 2) $x < 2$, $y' < 0$, y убывает; $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; $x \in (0;\ 2)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; точки $x = 0$ и $x = 2$ — точки перегиба.



12.289. $D(f) = \{x \in (0; \infty)\}$; точка пересечения с осью $(1;\ 0)$; асимптот нет; $x \to 0+0\ \ y \to 0$; $x \in (0; 1/\sqrt{e})$, $y' < 0$, функция убывает; $x \in (1/\sqrt{e}\ ; \infty)$, $y' > 0$, функция возрастает; $x = 1/\sqrt{e}$ — точка минимума; $x \in (0; 1/\sqrt{e^3})$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (1/\sqrt{e^3}\ ;\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; точка $x = 1/\sqrt{e^3}$ — точка перегиба.



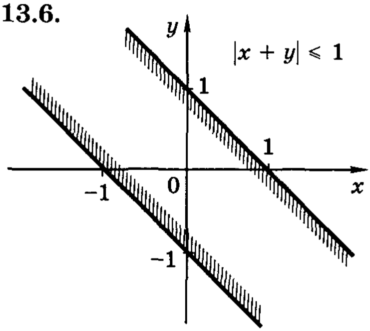
12.290. $D(f) = \{x \in R\}$; точка пересечения с осями (0; 0); $y = x - 2$ — наклонная асимптота; $y' > 0 \quad \forall\ x \in D(f)$, функция всюду возрастает; $x \in (-\infty;\ -9 - \sqrt{54}) \cup (-9 + \sqrt{54};\ 0)$, $y'' < 0$, функция выпукла вверх; $x \in (-9 - \sqrt{54};\ -9 + \sqrt{54}) \cup (0,\ \infty)$, $y'' > 0$, функция выпукла вниз; точки $x = -9 - \sqrt{54}$, $x = -9 + \sqrt{54}$, $x = 0$ — точки перегиба.



13

13.1. Вся плоскость. **13.2.** $x^2 + y^2 > 9$. **13.3.** $xy \geqslant 0$ (I и III квадранты). **13.4.** $x \geqslant 0 \cap y \in \boldsymbol{R}$ (I и IV квадранты). **13.5.** $x^2 + y^2 > 4$.

13.6.



13.7. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$. **13.8.** $x + y + z \geqslant 0$. **13.9.** $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $z \geqslant 0$, кроме точек (0; 0; z). **13.26.** $4x - y^2 + 6xy + 3$; $-2xy + 3x^2 - 6y^2 - 4$. **13.27.** $3x^2y + z^2$; $x^3 + 2yz$; $2xz + y^2$. **13.28.** $3s^2\cos 4t$; $-4s^3\sin 4t$. **13.29.** $\frac{2x}{y} - \frac{2y}{x^3}$; $-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2}$.

13.30. $\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{2y}{x^2+y^2}$. **13.31.** $\frac{y^2}{(x+y)^2}$; $\frac{x^2}{(x+y)^2}$. **13.32.** $e^{xyz}(yz(x^2 + y^2 + z^2) + 2x)$; $e^{xyz}(xz(x^2 + y^2 + z^2) + 2y)$; $e^{xyz}(xy(x^2 + y^2 + z^2) + 2z)$. **13.33.** $e^{x/y}\frac{1}{y}$; $e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + e^{-z/y}\left(\frac{z}{y^2}\right)$; $e^{-z/y}\left(-\frac{1}{y}\right)$. **13.34.** $\sqrt{y} - \frac{y}{3x\sqrt[3]{x}}$; $\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **13.35.** $ye^{x+2y}(1 + x)$;

$xe^{x+2y}(1+2y)$. **13.36.** $\dfrac{1}{x+\ln y}$; $\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$. **13.37.** $e^{3x^2+2y^2-xy}(6x-y)$;

$e^{3x^2+2y^2-xy}(4y-x)$. **13.38.** $-e^{\frac{z}{xy}}\left(\dfrac{z}{yx^2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y+z}\right)-\dfrac{1}{y+z}\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{y+z}\right)}\right)$;

$-e^{\frac{z}{xy}}\left(\dfrac{z}{xy^2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y+z}\right)+\dfrac{x}{(y+z)^2}\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{y+z}\right)}\right)$; $e^{\frac{z}{xy}}\left(\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y+z}\right)-\dfrac{x}{(y+z)^2}\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{y+z}\right)}\right)$.

13.39. $\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x-x^2y}}$; $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-xy^2}}$. **13.45.** $-\dfrac{11}{\sqrt{2}}$. **13.46.** $-\dfrac{3}{25}$. **13.47.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **13.48.** $-\dfrac{1}{6}$.

13.49. $\dfrac{7}{9}$. **13.50.** Точка M_0 лежит на линии уровня $x^2+y^2=5$; $|\text{grad } z|=2\sqrt{5}$;

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **13.51.** Точка M_0 лежит на поверхности уровня

$3=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$; $\text{grad } u(M_0)=\left(\dfrac{2}{a};\ \dfrac{2}{b};\ \dfrac{2}{c}\right)$. **13.52.** $\text{grad } z(M_0)=\left(\dfrac{3}{10};\ 0\right)$;

$|\text{grad } z(M_0)|=\dfrac{3}{10}$. **13.53.** (0; 0); 0. **13.54.** (0; 0); 0. **13.55.** а) (4; 0; –6);

$2\sqrt{13}$; б) (–6; –4; –2); $2\sqrt{14}$. **13.56.** $\left(\dfrac{6}{\sqrt{14}};-\dfrac{2}{\sqrt{14}};\dfrac{4}{\sqrt{14}}\right)$; 2.

13.57. $\left(-\dfrac{2}{a};\ -\dfrac{2}{b};\ \dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{abc}{\sqrt{4b^2c^2+4a^2c^2+a^2b^2}}$. **13.58.** (–2; 6; –3); 7.

13.60. $(4x-y)\,dx+(9y^2-x)\,dy$. **13.61.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(x\,dx-y\,dy)$.

13.62. $\dfrac{1}{3x+2y}(3\,dx+2\,dy)$. **13.63.** $2^{xy}\ln 2(y\,dx+x\,dy)$. **13.64.** $yx^{y-1}dx+$ $+x^y\ln x\,dy$. **13.65.** $\dfrac{3(y\,dx-x\,dy)}{(2x+y)\sqrt{3x(x+2y)}}$. **13.66.** $\left(y\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)dx+$ $+\left(x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)dy$. **13.67.** $e^{x+\frac{x}{y}}\left(\dfrac{y+1}{y}\,dx-\dfrac{x}{y^2}\,dy\right)$.

13.68. $-2e^{\cos^2(x^2+y^2)}\sin 2(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$.

13.69. $du=e^{xyz}(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)$. **13.70.** $du=2\operatorname{tg}\dfrac{xy}{z}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{xy}{z}}\left(\dfrac{y}{z}\,dx+\right.$ $\left.+\dfrac{x}{z}\,dy-\dfrac{xy}{z^2}\,dz\right)$. **13.71.** $du=e^x[(z(\sin x+\cos x)+\cos y)\,dx-\sin y\,dy+$ $+\sin x\,dz]$. **13.76.** $\approx 3{,}12\%$. **13.79.** $z''_{xx}=6+2y$, $z''_{xy}=2x+4y-4$, $z''_{yy}=4x-6y$. **13.80.** $u''_{xx}=y^2z^2e^{xyz}$; $u''_{yy}=x^2z^2e^{xyz}$; $u''_{zz}=x^2y^2e^{xyz}$;

$u''_{xy} = ze^{xyz}(xyz+1)$; $u''_{xz} = ye^{xyz}(xyz+1)$; $u''_{yz} = xe^{xyz}(xyz+1)$.

13.81. $u''_{xx} = -\left(\frac{y}{z}\right)^2 \sin\frac{xy}{z}$; $u''_{yy} = -\left(\frac{x}{z}\right)^2 \sin\frac{xy}{z}$; $u''_{zz} = -\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 \sin\frac{xy}{z}$;

$u''_{xy} = -\left(\frac{y}{z}\right)^2 \sin\frac{xy}{z} + \frac{1}{z}\cos\frac{xy}{z}$; $u''_{xz} = -\frac{xy^2}{z^3}\sin\frac{xy}{z} - \frac{y}{z^2}\cos\frac{xy}{z}$;

$u''_{yz} = \frac{x^2y}{z^3}\sin\frac{xy}{z} - \frac{x}{z^2}\cos\frac{xy}{z}$. **13.82.** $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = \frac{x+y}{(1-(x+y)^2)^{3/2}}$.

13.83. $z''_{xx} = \frac{8y}{(x-y)^3\sin 2\frac{x+y}{x-y}}\left(\frac{2y}{x-y}\operatorname{ctg}\left(2\frac{x+y}{x-y}\right) - 1\right)$; $z''_{yy} = \frac{8x}{(x-y)^3\sin 2\frac{x+y}{x-y}} \times$

$\times\left(1 - \frac{2y}{x-y}\operatorname{ctg} 2\frac{x+y}{x-y}\right)$; $z''_{xy} = \frac{4}{(x-y)^3\sin 2\frac{x+y}{x-y}}\left((3x-y) - \frac{4x^2}{x-y}\operatorname{ctg} 2\frac{x+y}{x-y}\right)$.

13.84. $z''_{xx} = (2y - y^3)\cos xy - xy^2\sin xy$; $z''_{yy} = -(2x + x^3)\sin xy - x^2y\cos xy$; $z''_{xy} = (2x - y^2)\cos xy - (2y + x^2y)\sin xy$. **13.85.** $z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \frac{3x^2+4yx}{(x+y)^2}$; $z''_{yy} = \frac{-x^2}{(x+y)^2}$; $z''_{xy} = \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$. **13.86.** $z''_{xx} = 2\sin\sqrt{y}$;

$z''_{yy} = \frac{-x^2}{4y\sqrt{y}}(\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{y})$; $z''_{xy} = \frac{x}{\sqrt{y}}\cos\sqrt{y}$. **13.87.** $z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$;

$z''_{yy} = x^y(\ln x)^2$; $z''_{xy} = x^{y-1}(\ln x + 1)$. **13.102.** $z_{\min} = -1$, $(-4;\ 1)$. **13.103.** Экстремума нет. **13.104.** $z_{\min} = -{}^4/_3$, $(0;\ -{}^2/_3)$. **13.105.** Экстремума нет. **13.106.** $z_{\min} = -2/e$, $(-2;\ 0)$. **13.107.** $z_{\max} = 4$, $(0;\ 0)$. **13.109.** $z_{\min} = -4{,}75$, $(-{}^3/_2;\ -{}^3/_2)$. **13.110.** $z_{\min} = 2$, $(1;\ 1)$. **13.111.** $z_{\min} = 0$, $(1;\ 0)$; $z_{\max} = {}^1/_{27}$, $({}^1/_3;\ {}^1/_3)$. **13.112.** $z_{\max} = \sqrt{5}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $z_{\min} = -\sqrt{5}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **13.113.** $z_{\max} = -4$, $(-2;\ -2)$; $z_{\min} = 4$, $(2;\ 2)$. **13.114.** $(90;\ 60)$.

13.115. $(0;\ 500)$. **13.117.** $y = \frac{36}{35}x + \frac{86}{15}$. **13.118.** $P = 0{,}051Q + 0{,}148$.

13.119. а) $S = 98{,}452t - 29{,}286$; б) $S(10) = 955$. **13.120.** а) $\pi = -0{,}321t^2 + 5{,}321t + 48{,}571$; б) $\pi(8) \approx 71$.

14

14.2. $x^6 + C$. **14.3.** $\frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2\ln|x| + C$. **14.4.** $\frac{2-x}{x^2} + C$. **14.5.** $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$. **14.6.** $x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}\right) + C$. **14.7.** $2\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} + C$. **14.8.** $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln x + C$. **14.9.** $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C$. **14.10.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

14.11. $5\,\mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{ctg}\,x + C$. **14.12.** $\frac{1}{\sqrt{8}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{8}} + C$. **14.13.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C$.

14.14. $\ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C$. **14.15.** $\arcsin\frac{x}{2\sqrt{3}} + C$. **14.16.** $\mathrm{tg}\,x - x + C$.

14.17. $-\mathrm{ctg}\,x - x + C$. **14.19.** $\frac{-3x}{2} + \frac{11}{4}\ln|3+2x| + C$. **14.20.** $x + \ln|2x+1| + C$.

14.21. $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$. **14.22.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-5| + C$. **14.23.** $\ln|x+1| +$ $+ \frac{1}{x+1} + C$. **14.24.** $\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,(x^3) + C$. **14.25.** $\sqrt{x^2+1} + C$. **14.26.** $2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

14.27. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}\,x + \sqrt{7+8x^2}) + C$. **14.28.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin(x\sqrt{5/7}) + C$.

14.29. $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + C$. **14.30.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C$. **14.31.** $\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,(x^4) + C$.

14.32. $\frac{1}{3}\ln|x^3 + \sqrt{x^6-1}| + C$. **14.33.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$. **14.34.** $\frac{1}{4}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right)^2 + C$.

14.35. $-\frac{1}{2e^{x^2+1}} + C$. **14.36.** $-e^{1/x} + C$. **14.37.** $\frac{2}{\ln 5}\,5^{\sqrt{x}} + C$. **14.38.** $\ln|e^x - 1| + C$.

14.39. $2\sin\sqrt{x} + C$. **14.40.** $-\ln 10[\cos(\lg x)] + C$. **14.41.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,(x^2) + C$.

14.42. $\frac{1}{2}\cos(1-x^2) + C$. **14.43.** $-\ln|\cos x| + C$. **14.44.** $\ln|\sin x| + C$.

14.45. $\frac{\sin^4 6x}{24} + C$. **14.46.** $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x) + C$. **14.47.** $\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^3 x} + C$.

14.48. $-\frac{3}{5}\,\mathrm{ctg}^{5/3}\,x + C$. **14.49.** $\ln(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+8}) + C$.

14.50. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$. **14.51.** $\arcsin\frac{x-2}{2} + C$. **14.52.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C$.

14.55. $x\ln x - x + C$. **14.56.** $\frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1)\right] + C$.

14.57. $\frac{1}{2}(5x+6)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x + C$. **14.58.** $\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + C$.

14.59. $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$. **14.60.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$. **14.61.** $-x\,\mathrm{ctg}\,x +$ $+ \ln|\sin x| + C$. **14.62.** $x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\cos x| + C$. **14.63.** $\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x +$ $+ \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$. **14.64.** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. **14.65.** $\frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$.

14.66. $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$. **14.67.** $x[(\ln x - 1)^2 + 1] + C$.

14.68. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. 14.69. $-\frac{x+1}{e^x}+C$. 14.70. $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$.

14.71. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. 14.72. $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

14.77. $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+C$. 14.78. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

14.79. $\frac{x^3}{3}-4x+8\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. 14.80. $\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3}\ln|x^3-8|+C$. 14.81. $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C$.

14.82. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$. 14.83. $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}+C$. 14.84. $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C$.

14.85. $\ln\frac{x^3(x-1)}{x+1}+C$. 14.86. $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$. 14.87. $\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}+C$.

14.88. $5x+\ln\left|\frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+C$. 14.89. $\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

14.90. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{x-1}{x^2}+C$. 14.91. $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$.

14.92. $2\ln(x^2-0{,}2x+0{,}17)-5\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{4}+C$. 14.93. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+$

$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. 14.94. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}-\frac{1}{x+1}+\operatorname{arctg}x+C$.

14.95. $\ln(|x+1|\sqrt{x^2+4})+C$. 14.96. $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

14.97. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}+C$. 14.98. $-\frac{1}{2(x^2+2x+3)^2}+C$. 14.99. $-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$.

14.100. $\ln|2x^3+5x^2+2x|+C$. 14.103. $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C$. 14.104. $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$.

14.105. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C$. 14.106. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C$.

14.107. $\frac{\sin^3x}{3}-\frac{\sin^5x}{5}+C$. 14.108. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}+C$.

14.109. $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. 14.110. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 2x}{16}+C$.

14.111. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. 14.112. $\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x-$

$-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C$. 14.113. $\frac{1}{4}\sin^4x-\frac{1}{6}\sin^6x+C$. 14.114. $\sin x-\sin^3x+$

$+\frac{3}{5}\sin^5x-\frac{1}{7}\sin^7x+C$. 14.115. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$. 14.116. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$.

14.117. $-\cos x+\frac{\cos^3x}{3}+C$. 14.118. $\sin x-\frac{2\sin^3x}{3}+\frac{\sin^5x}{5}+C$.

14.119. $\frac{x^2}{4} - \frac{\sin 2x^2}{8} + C.$ **14.120.** $\frac{e^x}{2} + \frac{\sin 2e^x}{4} + C.$ **14.122.** $-\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$ **14.123.** $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + C.$ **14.124.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C.$

14.127. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$ **14.128.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C.$ **14.129.** $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

14.130. $-x - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1} + C.$ **14.131.** $-\ln|\cos x - \sin x| + C.$

14.132. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + C.$ **14.133.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$ **14.134.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C.$ **14.135.** $-\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$ **14.136.** $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$ **14.137.** $2\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x + C.$ **14.138.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + C.$ **14.139.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x + C.$ **14.140.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C.$

14.142. $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x\right] + C.$ **14.143.** $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}} + C.$

14.144. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x} + C.$ **14.145.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + C.$

14.147. $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\right] + C.$ **14.148.** $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$

14.149. $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$ **14.150.** $\frac{x^3}{27\sqrt{(9+x^2)^3}} + C.$

14.152. $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C.$ **14.153.** $-\arcsin\frac{1}{x} + C.$ **14.154.** $-\sqrt{\frac{2-x}{x}} + C.$

15

15.2. 20. **15.3.** $^{21}/_8$. **15.4.** $\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$. **15.5.** $^{7}/_{72}$. **15.6.** $^{14}/_3$. **15.7.** $\pi/6$. **15.8.** $^{7}/_3$. **15.9.** $^{100}/_3$. **15.10.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **15.11.** $^{7}/_4$. **15.12.** $1 + \frac{1}{2}\lg e$. **15.13.** $e - \sqrt{e}$. **15.14.** $\pi/2$. **15.15.** 2. **15.16.** $^{1}/_2$. **15.17.** 0. **15.18.** $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. **15.19.** $^{2}/_3$. **15.20.** $1 - \cos 1$. **15.21.** 0. **15.23.** $4 - 2\ln 3$. **15.24.** $^{1}/_4$.

15.25. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$. 15.26. $4-2\sqrt{2}$. 15.27. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}$. 15.28. 1,5.

15.29. $0{,}2(e-1)^5$. 15.30. $2-\frac{\pi}{2}$. 15.31. $\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$. 15.32. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$.

15.34. $1-\frac{2}{e}$. 15.35. $\frac{\pi}{2}-1$. 15.36. 1. 15.37. 1. 15.38. $-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$.

15.39. $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$. 15.40. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 15.41. $\frac{\pi}{12}(4\sqrt{3}-3)-\ln\sqrt{2}$.

15.43. $^{32}/_{3}$. 15.44. $^{256}/_{5}$. 15.45. $^{32}/_{3}$. 15.46. $^{1}/_{6}$. 15.47. 2. 15.48. ln 2.
15.49. 6π. 15.50. 16π. 15.51. $36\sqrt{3}/5$. 15.52. $^{16}/_{3}$. 15.53. $^{8}/_{3}$. 15.54. $^{125}/_{6}$.
15.55. 1. 15.56. π. 15.58. $\frac{108\pi}{5}$. 15.59. $500\pi/3$. 15.60. π. 15.61. $3\pi/10$.

15.62. 12π. 15.63. 8π. 15.64. $\frac{8a^2b\pi}{3}$. 15.65. $58{,}5\pi$. 15.66. $512\pi/15$.

15.67. $512\pi/7$. 15.71. Расходится. 15.72. $^{1}/_{2}$. 15.73. π. 15.74. $\pi/\sqrt{5}$.
15.75. $\pi^2/8$. 15.76. Расходится. 15.77. Расходится. 15.78. Расходится.
15.79. Расходится. 15.80. Расходится. 15.81. Расходится. 15.82. 6.
15.83. $\pi/2$. 15.84. Расходится. 15.85. –0,25. 15.86. Расходится. 15.87. 1.
15.88. 2. 15.89. Расходится. 15.90. Расходится. 15.91. Сходится.
15.92. Расходится. 15.93. Сходится. 15.94. Расходится. 15.95. Сходится.
15.96. Сходится. 15.97. Сходится. 15.98. Сходится. 15.99. Сходится.
15.100. Сходится. 15.101. Сходится. 15.102. Сходится. 15.103. Расходится. 15.104. Сходится. 15.106. $4\frac{2}{3}$. 15.107. $\ln\frac{25}{24}$. 15.108. $\frac{9}{4}$.

15.109. 50,4. 15.110. $\frac{\pi a^2}{2}$. 15.111. 2,4. 15.113. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$.

15.114. $\int\limits_0^{48} dy\int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,dx$. 15.115. $\int\limits_0^{2} dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_2^{3} dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx$.

15.116. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy\int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy\int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$. 15.117. $\int\limits_1^{2} dy\int\limits_1^{y} f(x,y)\,dx+$

$+\int\limits_2^{4} dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$. 15.118. $\int\limits_0^{a} dy\int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_0^{a} dy\int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx+$

$+\int\limits_{a}^{a\sqrt{8}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,\ y)\,dx.$ **15.119.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,\ y)\,dy.$

15.120. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,\ y)\,dx.$

16

16.1. Да. **16.2.** Нет. **16.3.** Да. **16.8.** $y'' - 2y' + y = 0$. **16.9.** $x\,dx + y\,dy = 0$. **16.11.** $y = \frac{1}{6}(-5e^{-x} + 9e^{x} - 4e^{2x})$. **16.12.** $y^2 - x^2 = 25$. **16.15.** $y = C(x + 1)e^{-x}$. **16.16.** $\ln|x| = C + 2\sqrt{y^2+1}$. **16.17.** $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$. **16.18.** $y = 0;\ x = \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$. **16.19.** $y = 2 + C\cos x$. **16.20.** $y(1 - Cx) = 1$. **16.21.** $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}\,(1 + e^{x})$. **16.22.** $1 + y^2 = \frac{2}{1-x^2}$. **16.24.** $x + y = Cx^2$. **16.25.** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. **16.26.** $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$. **16.27.** $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$. **16.28.** $(x - 2)^2 - y^2 = 4$. **16.29.** $y = x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$. **16.31.** $y = \sin x + C\cos x$. **16.32.** $xy = C - \ln x$. **16.33.** $y = x(C + \sin x)$. **16.34.** $y = (2x + 1)(C + \ln|2x + 1| + 1)$. **16.35.** $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **16.36.** $y = \frac{e^{x}}{x} + \frac{ab - e^{a}}{x}$. **16.38.** $y(e^{x} + Ce^{2x}) = 1$. **16.39.** $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$. **16.40.** $y = \frac{2(1-x^2)}{x^2+C}$. **16.42.** $x^3 + 2xy - 3y = C$. **16.43.** $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$. **16.44.** $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. **16.46.** $6y = x^3\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **16.47.** $y = -\cos x + C_1x^{19} + C_2x^{18} + \ldots + C_{20}$. **16.48.** $y = -\ln\cos x$. **16.49.** $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$. **16.51.** $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$. **16.52.** $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$. **16.53.** $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$. **16.54.** $y = \frac{x^2}{2}\int\limits_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t}\,dt - \frac{x+1}{2}e^{x} + C_1x^2\ln|x| + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **16.55.** $y = x^3 + 3x$. **16.56.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **16.58.** $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$. **16.59.** $2y^2 - 4x^2 = 1$. **16.60.** $y = 2e^{x}$.

16.65. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. 16.66. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$. 16.67. $y = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)e^{2x}$. 16.68. $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}\,x + C_3\sin\sqrt{3}\,x)$. 16.69. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$. 16.70. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$. 16.71. $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$. 16.72. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$. 16.76. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)e^x$. 16.77. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$. 16.78. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$. 16.79. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32}\right)e^x$.

16.80. $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right)e^{2x}$. 16.81. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$. 16.82. $y = C_1 + C_2x + (C_3 + x)e^{-x} + x^3 - 3x^2$. 16.83. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos x$.

17

17.1. 2. 17.2. $\frac{2}{3}$. 17.3. $\frac{3}{2}$. 17.4. 1. 17.5. $\frac{1}{3}$. 17.6. 1. 17.7. $\frac{1}{4}$. 17.15. Сходится. 17.16. Сходится. 17.17. Расходится. 17.18. Расходится. 17.19. Сходится. 17.20. Расходится. 17.21. Сходится. 17.22. Расходится. 17.23. Сходится. 17.24. Сходится. 17.27. Сходится. 17.28. Сходится. 17.29. Сходится. 17.30. Расходится. 17.31. Сходится. 17.32. Сходится. 17.34. Сходится. 17.35. Расходится. 17.36. Расходится. 17.37. Сходится. 17.38. а) $\frac{1}{2}\ln 2$; б) $\frac{3}{2}\ln 2$. 17.40. Сходится условно. 17.41. Сходится абсолютно. 17.42. Сходится условно. 17.43. Сходится абсолютно. 17.44. Сходится условно. 17.45. Сходится абсолютно. 17.46. Сходится абсолютно. 17.49. Сходится неравномерно. 17.50. Сходится неравномерно. 17.51. Сходится равномерно. 17.52. Сходится равномерно. 17.53. Сходится равномерно. 17.54. Сходится равномерно. 17.55. Сходится равномерно. 17.56. Сходится равномерно. 17.58. $-3 \leqslant x < 3$. 17.59. $-\sqrt{3}/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}/2$. 17.60. $-1 \leqslant x < 1$. 17.61. $-1 < x \leqslant 1$. 17.62. $-\infty < x < +\infty$. 17.63. $x = 0$. 17.64. $-5 \leqslant x < 3$. 17.65. $2 \leqslant x < 3$. 17.67. $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. 17.68. $-\infty < x < +\infty$. 17.69. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

17.71. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(-\infty < x < +\infty)$. 17.72. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$.

17.73. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $(|x| < 1)$. 17.74. $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1 - (-2)^n]x^n$ $(|x| < 1)$.

17.75. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$ $(|x|<1)$. **17.77.** $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

17.78. $\frac{x}{(1-x)^2}$ $(|x|<1)$. **17.79.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ $(|x|<1)$. **17.80.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$. **17.81.** $\operatorname{arctg} x$ $(|x|\leqslant 1)$. **17.82.** $\operatorname{ch}(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$. **17.83.** $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$ $(|x|<1)$. **17.85.** $x^4+x^2=2+6(x-1)+14(x-1)^2+$ $+24(x-1)^3+24(x-1)^4$. **17.86.** $\frac{1}{x}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$ $(-3<x<-1)$.

17.87. $\cos\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n$. **17.88.** $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{1-(1+x)}=-1+\frac{x+1}{3}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^{n+1}$ $(-2<x<0)$. **17.90.** 0,87606.
17.91. 0,60653. **17.92.** 0,22314. **17.93.** 0,999848. **17.94.** 0,158. **17.95.** 2,087. **17.96.** 3,1416. **17.97.** $\ln 2=0{,}69315$, $\ln 3=1{,}09861$. **17.98.** 0,747. **17.99.** 8,041. **17.100.** 1,605. **17.101.** 0,927.

18

18.3. а) 12 000; б) 9000. **18.4.** 400. **18.5.** 400. **18.6.** 1125. **18.7.** 120 **18.8.** б) 80; в) 6,67 года. **18.9.** б) 301,72; в) 17,06 года. **18.10.** а) 33,28; б) 9,7. **18.11.** 70. **18.12.** 60. **18.13.** 20. **18.14.** а) 250; б) 460. **18.15.** а) 60; б) 69. **18.16.** а) 240; б) 264. **18.17.** 20; 40. **18.18.** а) 1000; б) 900; да. **18.19.** а) (3, 4); б) (2, 2). **18.20.** (30, 260). **18.21.** (10, 180). **18.22.** а) (50, 150); б) $\left(\frac{140}{3}, \frac{470}{3}\right)$; $\frac{1400}{3}$; в) $\frac{2600}{3}$; г) $\left(\frac{155}{3}, \frac{440}{3}\right)$. **18.23.** а) (40, 25); б) (35; 27,5); в) (43; 23,5). **18.24.** а) (20, 80); 8; б) 20; в) 16. **18.25.** а) (20, 110); 12; б) 30; в) 12. **18.26.** а) (−1, 6), недостаточный спрос; б) (−2, 1), недостаточный спрос. **18.27.** а) (5,2; 7,2); б) (2, 8); $\frac{8}{3}$; в) 22,5. **18.28.** а) (4, 12); б) $\left(\frac{8}{3}, 14\right)$; $\frac{112}{15}$; в) $\frac{91}{3}$; г) 15. **18.29.** (2, $^8/_3$) — устойчива; (8, $^2/_3$) — неустойчива. **18.30.** (1, $^7/_2$) — устойчива; (7, $^1/_2$) — неустойчива. **18.31.** Устойчива. **18.32.** (2000, 1000). **18.33.** (4000, 6000). **18.37.** а) 1000; б) 400; в) −200. **18.38.** а) 200 тыс.; б) 600 тыс.; в) 1,2 млн. **18.39.** а) 900; б) 5600; в) 17 100. **18.40.** −400. **18.41.** а) −50; б) −3,2. **18.42.** 0. **18.43.** а) −0,05; б) −0,78125. **18.44.** а) 65; б) 55. **18.46.** а) 60; б) $^{20}/_3$; в) 7,4; г) 497. **18.47.** а) 37; б) $^{38}/_3$; в) 4,4; г) 451,25. **18.48.** а) $P=185{,}23$ при $p=51{,}5$; б) $P=392{,}42$ при $p=14{,}8$; г) $P=34361{,}6$ при $p=322{,}27$. **18.49.** а) 520;

б) 523. **18.50.** 7518,72; 7500. **18.51.** а) −0,62, −0,64; б) −0,079, −0,08. **18.52.** −43; −44. **18.53.** 25,69; 25,7. **18.54.** а) 200; б) 135. **18.55.** $p = 100$. **18.56.** $P = 62{,}5$ тыс. при $p = 1550$. **18.57.** $R = 15\,600$ при $p = 260$. **18.58.** $P = 5150$. **18.59.** $P = 4225$. **18.60.** 20. **18.61.** $P = 300$. **18.62.** $P = 2200$ при $p = 720$. **18.63.** а) 0,5325; б) 0,4675. **18.64.** а) 0,336; б) 0,664. **18.65.** а) 0,39; б) 0,57. **18.66.** 3000. **18.67.** 2000. **18.68.** 24 000. **18.69.** 12 000. **18.70.** а) $\eta = -1$; не изменится; $p \in (50, 100)$; б) в точке $p = 15$ $\eta = -0{,}6$; увеличивается; в точке $p = 20$ $\eta = -1$; не меняется; $p \in (20, 40)$; в) в точке $p = 2$ $\eta = -\frac{5}{18}$; увеличивается; в точке $p = 4$ $\eta = -1{,}8$; уменьшается; $p \in (-6{,}84; -4) \cup (3{,}33; 5{,}84)$. **18.71.** $\eta = -1$; не изменится; единичная эластичность. **18.72.** а) (3, 6); б) $\left(\frac{400}{9}, 100\right)$; в) $\left(\frac{b}{2}, b\right)$.

18.73. а) $-\frac{25}{11}$; б) -25%. **18.74.** а) −18; б) -36%. **18.75.** а) $-\frac{7}{18}$; возрастает; б) $-\frac{15}{2}$; уменьшается. **18.76.** а) $-\frac{95}{48}$; уменьшается; б) −2,048; уменьшается. **18.77.** а) 55; б) 115. **18.78.** а) 50; б) 5000. **18.83.** б) 15 625; в) 1250. **18.84.** б) 200; в) 29 575; г) 0. **18.85.** б) 11 250; в) 650. **18.86.** а) $p = 20 - 0{,}01x$; б) $p = 45 - 0{,}02x - 0{,}001x^2$. **18.87.** $P = 25x - 0{,}002x^2 + 8680$. **18.88.** $C(x) = 15000e^{0{,}001x^2} + 5000$. **18.89.** а) $p = 25 - 0{,}2x - 0{,}02x^2$; б) $p = \frac{2\sqrt{x^3+900}-20}{x}$; в) $p = 5e^{-\frac{x}{5}}$. **18.90.** а) $C(y) = 0{,}5y + 0{,}4\sqrt{y} + 6$; б) $C(y) = 0{,}4y + \frac{2}{3}\sqrt{3y+4} + 4\frac{2}{3}$; в) $C(y) = 0{,}6y + \frac{1}{3}e^{-3y} + 5\frac{2}{3}$.

18.91. а) $C(y) = 0{,}63y + 4$; б) $C(y) = 0{,}6y + \sqrt{2y+9} + 1$; в) $C(y) = 0{,}7y + 0{,}625e^{-1{,}6y} + 3{,}375$. **18.92.** а) 0,0232; $^{11}/_{36}$; б) 0,02496; 0,3. **18.93.** а) 0,015968; 0,29; б) 0,01008; 0,32. **18.94.** 290,82. **18.95.** 258,19. **18.96.** 91,59. **18.97.** 83,33. **18.98.** 60,71. **18.99.** а) 228; 67,35; б) 5; 15; в) 18; 27; г) 51,83; 20. **18.100.** а) 216,67; б) 0,67. **18.101.** 3041. **18.102.** 2700. **18.103.** а) 3,45; б) 1,49. **18.104.** 0,09. **18.105.** 0,13. **18.106.** 194,92. **18.107.** а) 62,5; б) 388,8; в) 1592,89. **18.108.** а) 119,33; б) 2,625. **18.109.** 5,5. **18.113.** а) $p\sqrt{x} = 20$; б) $px^{\frac{5}{4}} = 15$; в) $px^2 = 20$; г) $p\sqrt[3]{x} = 6$. **18.114.** а) $p = 100 - x$; б) $p = 20 - 2x$; в) $p = 37{,}5 - 0{,}125x$; г) $p = 40 - 10x$. **18.115.** 2,58. **18.116.** 8,96. **18.117.** 1,52. **18.118.** 47,96. **18.119.** а) $p = 15e^{4t} - 5$; б) не является. **18.120.** а) $p = 5 + 2e^{-0{,}4t}$; б) устойчива. **18.121.** а) $25e^{2t} - 20$; б) не является. **18.122.** а) $p = 4 + 2e^{-1{,}4t}$; б) устойчива. **18.123.** а) $p = 14e^{\frac{5}{3}t} - 4$; б) не является.

19

19.1. $P = {}^{5}/_{6}$. **19.2.** $P = {}^{1}/_{720}$. **19.3.** $P = 0{,}0023$. **19.5.** а) $P = 0{,}926$; б) $P = 0{,}072$. **19.7.** $P = 0{,}07$. **19.8.** $P = 0{,}345$. **19.9.** $P = 0{,}38$. **19.11.** $P = {}^{11}/_{20}$. **19.12.** $P = 0{,}2$. **19.14.** $P = 0{,}095$. **19.15.** $P = 0{,}384$. **19.17.** $P = {}^{1}/_{114}$. **19.18.** а) $P = {}^{3}/_{14}$; б) $P = {}^{1}/_{4}$. **19.19.** $P = 0{,}7$. **19.20.** $P = 0{,}126$. **19.21.** $P = 0{,}94$. **19.23.** а) $P = 0{,}0345$; б) $P(A_1) = 0{,}362$; $P(A_2) = 0{,}408$; $P(A_3) = 0{,}232$. **19.24.** $P = 0{,}326$. **19.25.** а) $P = 0{,}045$; б) $P = 0{,}33$. **19.26.** а) $P = 0{,}41$; б) $P = 0{,}59$. **19.28.** а) $P(X \geqslant 2) = 0{,}5248$; б) $P(X \leqslant 3) = 0{,}9744$; в) $P(X = 4) = 0{,}0256$. **19.29.** $P_4(2) = 0{,}0486$; $P_4(3) = 0{,}0036$; $P_4(4) = 0{,}0001$. **19.30.** б) $P_{10000}(2) = 0{,}00225$; $P_{10000}(3) = 0{,}0075$; $P_{10000}(5) = 0{,}0375$. **19.31.** а) $P_{500}(3) = 0{,}0613$; б) $P_{500}(X > 3) = 0{,}02$. **19.32.** $P_{1000}(2) = 0{,}1464$; $P_{1000}(3) = 0{,}1952$; $P_{1000}(5) = 0{,}1562$. **19.33.** $P(X \geqslant 4) = 0{,}7373$. **19.34.** а) $P_{200}(4) = 0{,}09$; б) $P_{200}(5) = 0{,}036$.

20

20.2.

X	0	1	2	3
p	114/230	95/230	20/230	1/230

20.3.

X	0	1	2	3
p	364/1140	546/1140	210/1140	20/1140

20.4.

X	0	1	2
p	120/190	64/190	6/190

20.6.

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

20.7.

X	0	1	2	3
p	125/216	75/216	15/216	1/216

20.8.

X	0	1	2	3
p	0,614125	0,325125	0,057375	0,003375

20.9.

X	0	1	2	3
p	0,027	0,189	0,441	0,343

20.10.

X	0	1	2
p	0,0025	0,0950	0,9025

20.11.

X	0	1	2	3	4	5
p	0,59049	0,32805	0,07290	0,00810	0,00045	0,00001

20.12.

X	1	2	3	4
p	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$

20.13.

X	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

20.14.

X	0	1	2
p	0,04	0,32	0,64

20.16.

X	−20	40	180	240
p	9506/9900	196/9900	196/9900	2/9900

20.17.

X	−4	−3	−2	46	47	96
p	7656/9900	1760/9900	90/9900	352/9900	40/9900	2/9900

20.18.

X	0	1	2
p	15/190	84/190	91/190

20.19. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -5, \\ 0{,}3, & \text{если } -5 < x \leqslant 2, \\ 0{,}7, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}9, & \text{если } 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{если } x > 4; \end{cases}$ $P(X \geqslant 3{,}5) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$ $P(|X| < 2{,}5) = 0{,}4.$

20.20. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0{,}08, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}52, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

20.23. $M(X) = 3{,}9$: $\sigma(X) = 2{,}21$; $M(2X^2 + 3) = 43{,}2$. **20.24.** $M(Z) = 2{,}1$; $D(Z) = 1{,}89$. **20.25.** а) 3,48; б) 0,452. **20.26.** а) 2,91; б) 0,295. **20.27.** $M(XY) = 568$.

21

21.3. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{если } 0 < x \leqslant \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$

$$21.4.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant 1,\\ \frac{1}{6}(x^2-x), & \text{если } 1<x\leqslant 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

21.6. $C = 2$. **21.7.** $C = {}^1/_2$; $P(0 < X < \pi/4) = \sqrt{2}/4$. **21.9.** $M_x = {}^8/_3$. **21.10.** $M_x = 0$. **21.12.** $a = 1/\pi$; $M_x = 0$. **21.13.** $Mo = Me = M_x = 4$. **21.14.** $Mo = Me = M_x = 3$. **21.16.** $D_x = \pi^2 - 8$. **21.17.** $D_x = \pi^2/4 - 2$. **21.18.** $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$. **21.20.** $M_x = 2$; $\sigma_x = 2/\sqrt{3}$. **21.21.** $M_x = 2{,}5$ мин; $\sigma_x = 5/2\sqrt{3}$ мин. **21.22.** $M_x = 1$ ч; $D_x = {}^1/_3$ ч^2. **21.23.** $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$. **21.26.** (11; 19). **21.27.** (68,35; 91,65). **21.28.** $\sigma_x = 48{,}8$ г. **21.29.** $M_x = 120$; $P = 0{,}9973$. **21.31.** $M_x = 2{,}5$; $\sigma_x = \sqrt{6{,}25}$. **21.32.** $C = 0{,}1$. **21.33.** $P(4 < T < 10) = 0{,}314$. **21.34.** $P(2 < T < 5) = 0{,}314$.

22

22.2.

X	1	2	3
p	0,3	0,3	0,4

Y	2	4	6
p	0,33	0,4	0,27

22.3. $P(X = 2 / Y = 0{,}8) = 0{,}25$; $P(X = 5 / Y = 0{,}8) = 0{,}6$; $P(X = 8 / Y = 0{,}8) = 0{,}15$. **22.5.** $M(X / Y = 2) = 2$; $M(X / Y = 6) = 2{,}24$; $M(X / Y = 8) = 2{,}27$. **22.6.** $M(Y / X = 1) = 0{,}25$. **22.7.** $M(X / Y = 2) = 2{,}7$; $M(X / Y = 3) = 2{,}23$; $M(X / Y = 5) = 2{,}19$. **22.9.** $r_{xy} = 0{,}198$. **22.10.** $r_{xy} = -0{,}31$; $y_x = -0{,}382x + 4{,}04$. **22.11.** $r_{xy} = 0{,}258$; $x_y = 0{,}25y + 2{,}8$. **22.12.** $y_x = -0{,}188x + 2{,}92$.

23

23.3.

i	1	2	3	4	5	6	7
$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50
p_i^*	0,08	0,14	0,18	0,30	0,10	0,14	0,06

23.4.

i	1	2	3	4
x_i	0	1	5	10
p_i^*	${}^{31}/_{54}$	${}^{14}/_{54}$	${}^{7}/_{54}$	${}^{2}/_{54}$

23.5.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
m_i	3	4	5	6	2	4	0	0	1
p_i^*	0,12	0,16	0,20	0,24	0,08	0,16	0	0	0,04

23.6.

$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	0—3	3—7	7—11	11—15
m_i	19	13	5	2
p_i^*	0,487	0,333	0,128	0,052

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0{,}487, & \text{если } 0 < x \leqslant 3, \\ 0{,}820, & \text{если } 3 < x \leqslant 7, \\ 0{,}948, & \text{если } 7 < x \leqslant 11, \\ 1, & \text{если } x > 11. \end{cases}$$

23.7.

а) $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 0{,}04, & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 0{,}24, & \text{если } 3 < x \leqslant 7, \\ 0{,}32, & \text{если } 7 < x \leqslant 9, \\ 0{,}8, & \text{если } 9 < x \leqslant 12, \\ 1, & \text{если } x > 12; \end{cases}$$

б) $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -2, \\ 0{,}0375, & \text{если } -2 < x \leqslant 0, \\ 0{,}25, & \text{если } 0 < x \leqslant 5, \\ 0{,}6, & \text{если } 5 < x \leqslant 8, \\ 0{,}875, & \text{если } 8 < x \leqslant 14, \\ 1, & \text{если } x > 14. \end{cases}$$

23.8.

а) $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0{,}06, & \text{если } 0 < x \leqslant 2, \\ 0{,}1, & \text{если } 2 < x \leqslant 4, \\ 0{,}12, & \text{если } 4 < x \leqslant 6, \\ 0{,}3, & \text{если } 6 < x \leqslant 8, \\ 0{,}59, & \text{если } 8 < x \leqslant 10, \\ 0{,}7, & \text{если } 10 < x \leqslant 12, \\ 0{,}8, & \text{если } 12 < x \leqslant 14, \\ 0{,}97, & \text{если } 14 < x \leqslant 16, \\ 1, & \text{если } x > 16; \end{cases}$$

б) $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 11, \\ 0{,}16, & \text{если } 11 < x \leqslant 14, \\ 0{,}4, & \text{если } 14 < x \leqslant 17, \\ 0{,}7, & \text{если } 17 < x \leqslant 20, \\ 0{,}77, & \text{если } 20 < x \leqslant 23, \\ 0{,}85, & \text{если } 23 < x \leqslant 26, \\ 0{,}91, & \text{если } 26 < x \leqslant 29, \\ 0{,}96, & \text{если } 29 < x \leqslant 32, \\ 1, & \text{если } x > 32. \end{cases}$$

24

24.1. $\bar{x}_в = 5{,}45$. **24.2.** $\bar{x}_в = -1{,}04$. **24.4.** а) $\bar{x}_в = 3158$; б) $\bar{x}_в = 2455$. **24.6.** $s^2 = 6{,}67$. **24.8.** $d_в = 3{,}09 \cdot 10^{-6}$. **24.9.** $\bar{x}_в = 0{,}34$; $d_в = 0{,}0169$. **24.11.** $\lambda^* = 0{,}1$. **24.12.** $\lambda^* = 0{,}13$. **24.13.** $a^* = 2{,}09$; $b^* = 6{,}71$. **24.14.** $a^* = 2{,}25$; $b^* = 22{,}37$. **24.15.** $a^* = 9{,}48$; $s = 3{,}22$. **24.16.** $p^* = 0{,}4$. **24.17.** $\lambda^* = 1$. **24.18.** $\lambda^* = 0{,}05$. **24.19.** $\lambda^* = 0{,}3$. **24.21.** (18,72; 21,28). **24.22.** а) (49,15; 50,85); б) (48,9; 51,1); в) (48,7; 51,3). **24.23.** а) (29,04; 30,96); б) (28,77; 31,23). **24.25.** (1,46; 3,17). **24.26.** (3,5; 4,67). **24.27.** $7{,}83 < M_x < 10{,}27$; $2{,}87 < \sigma_x < 4{,}68$. **24.28.** $4{,}19 < M_x < 6{,}41$; $1{,}61 < \sigma_x < 6{,}05$.

25

25.3. Станок требует подналадки. H_0: $a_0 = 35$; H_1: $a_0 \neq 35$; $t_r = 27 \in (-\infty; -1{,}993) \cup (1{,}993; \infty)$. **25.4.** Утверждение поставщика не согласуется с опытными данными. H_0: $a_0 = 60$; H_1: $a_0 < 60$; $t_r = -10 \in (-\infty; -1{,}689)$. **25.5.** Можно. H_0: $a_0 = 6$; H_1: $a_0 > 6$; $z_r = 20 \in (1{,}96; \infty)$. **25.7.** H_0: $a_0 = 800$; H_1: $a_0 > 800$; $t_r = 2{,}17$; а) $\alpha = 0{,}05$; $l = 16$; $t_r \in (1{,}746; \infty)$, нулевая гипотеза отвергается; б) $\alpha = 0{,}01$; $l = 16$; $t_r \notin (2{,}583; \infty)$, нулевая гипотеза не отвергается. **25.8.** а) H_0: $a_0 = 21$; H_1: $a_0 < 21$; $z_r = -6{,}32 \in (-\infty; -1{,}645)$. Время обслуживания клиента, равное 21 мин, в качестве норматива опытными данными не подтверждается; б) H_0: $a_0 = 16$; H_1: $a_0 < 16$; $z_r = -1{,}054 \notin (-\infty; -1{,}645)$. Время обслуживания клиента, равное 16 мин, в качестве норматива не противоречит опытным данным. **25.9.** H_0: $a_0 = 10$; H_1: $a_0 < 10$; $z_r = -2{,}0 \in (-\infty; -1{,}645)$. Гипотеза $a_0 = 10$ отвергается. Опытные данные подтверждают влияние модернизации двигателя на расход топлива. **25.10.** а) H_0: $a_0 = 1000$; H_1: $a_0 \neq 1000$; $z_r = -2{,}1 \in (-\infty; -1{,}96) \cup (1{,}96; \infty)$. Гипотеза H_0 отвергается; б) H_0: $a_0 = 1000$; H_1: $a_0 \neq 1000$; $t_r = -1{,}656 \notin (-\infty; -2{,}032) \cup (2{,}032; \infty)$. Гипотеза H_0 не отвергается. **25.12.** H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ не отвергается при H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $f_r = 1{,}19 \notin (3{,}18; \infty)$. **25.13.** H_0: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ не отвергается при H_1: $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$, $f_r = 1{,}19 \notin (2{,}29; \infty)$. **25.14.** Гипотеза об одинаковой точности измерений, проводимых радарами заводов A и B, не противоречит выборочным данным. **25.17.** а) $\bar{x}_М = 198{,}4$; $s_М = 3{,}7$; $s_М^2 = 13{,}69$; $n_М = 17$; $\bar{x}_{С\text{-}П} = 196{,}9$; $s_{С\text{-}П} = 5{,}42$; $s_{С\text{-}П}^2 = 29{,}4$; $n_{С\text{-}П} = 12$; б) H_0: $a_М = a_{С\text{-}П}$ при H_1: $a_М \neq a_{С\text{-}П}$. Гипотеза H_0 не отклоняется. У к а з а н и е. Вначале проверяется гипотеза H_0: $\sigma_М^2 = \sigma_{С\text{-}П}^2$; в) H_0: $a_0 = 200$; H_1: $a_0 \neq 200$. Гипотеза H_0 отклоняется.

25.18. а) H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. H_0 не отвергается, $f_r = 1,05 \notin (3,28; \infty)$; б) H_0: $a_x = a_y$; H_1: $a_x \neq a_y$. H_0 отвергается, $t_r = 3,98 \in \omega = (-\infty; -2,086) \cup \cup (2,086; \infty)$. **25.19.** Первый этап: H_0: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$; H_1: $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$. H_0 не отвергается, $f_r = 1,34 \notin (6,39; \infty)$. Второй этап: H_0: $a_A = a_B$; H_1: $a_A \neq a_B$. H_0 не отвергается, $t_r = 0,3 \notin \omega = (-\infty; -1,86) \cup (1,86; \infty)$. **25.21.** Можно. **25.22.** H_0: $a_{\rm I} = a_{\rm II}$; H_1: $a_{\rm I} > a_{\rm II}$. H_0 не отвергается. Статистические данные не подтверждают преимущества какого-либо удобрения. **25.26.** Для обоих уровней значимости теоретический и фактический спрос согласуется. **25.27.** H_0: $F(x) = N(a, \sigma)$; H_1: $F(x) \neq N(a, \sigma)$. Гипотеза H_0 отвергается. **25.28.** Гипотеза H_0: $F(x) = F_0(x)$, где $F_0(x)$ — биномиальный закон, согласуется с выборочными данными. **25.29.** Гипотеза H_0: $F(x) = N(a, \sigma)$ согласуется с опытными данными. **25.30.** Гипотеза H_0: $F(x) = F_0(x)$, где $F_0(x)$ — биномиальный закон, согласуется с выборочными данными.

26

26.2. $\bar{y}_x = 0,95x + 1$; $r_{\rm в} = 0,895$. **26.3.** $\bar{x}_y = -0,99y + 16,4$; $r_{\rm в} = -0,93$. **26.4.** $\bar{y}_x = 0,45x - 1,1$; $r_{\rm в} = 0,89$. **26.6.** $\bar{x}_y = 0,589y + 4,44$. **26.7.** $\bar{y}_x = 0,39x + 22,9$. **26.8.** $\bar{x}_y = -0,0655y + 35$.

27

27.2. $f_{\rm набл} = 67,9$; $f_{\rm кр}\,(0,05; 2; 12) = 3,89$. $f_{\rm набл} > f_{\rm кр}$. Нулевую гипотезу принимаем. **27.3.** $f_{\rm набл} = 1,29$; $f_{\rm кр}\,(0,05; 3; 16) = 3,24$. $f_{\rm набл} < f_{\rm кр}$. Нулевую гипотезу принимаем. **27.4.** $f_{\rm набл} = 4,5$; $f_{\rm кр}\,(0,05; 2; 15) = 3,68$. $f_{\rm набл} > f_{\rm кр}$. Нулевую гипотезу принимаем.

29

29.6. $\min Z(X) = 4$, $X_1^* = (2,\ 0)$, $X_2^* = (1,\ 2)$. **29.7.** $Z(X) \to -\infty$. **29.8.** $\max Z(X) = 9$, $X^* = (6,\ 5)$. **29.9.** $\min Z(X) = -16$, $X^* = (0,\ -4)$. **29.10.** $\max Z(X) = 12$, $X_1^* = (0, 6)$, $X_2^* = (4, 4)$. **29.11.** $Z(X) \to +\infty$. **29.12.** Система ограничений несовместна. **29.13.** $\min Z(X) = {}^9/_2$, $X^* = ({}^3/_8,\ {}^3/_4)$. **29.14.** $\max Z(X) = 18$, $X_1^* = (3,\ 5)$, $X_2^* = (6,\ 4)$. **29.15.** $Z(X) \to +\infty$. **29.16.** $\max Z(X) = 12$, $X_1^* = (0,\ 6)$, $X_2^* = (2,\ 9)$. **29.17.** $\min Z(X) = -16$,

$X^* = (2, 5)$. **29.18.** $\max Z(X) = 60$, $X_1^* = (5, 1, 0, 0, 10)$, $X_2^* = (6, 4, 8, 0, 0)$. **29.19.** $\max Z(X) = -53$, $X^* = (3, 7, 3, 0, 0)$. **29.20.** $\min Z(X) = 4$, $X^* = (1, 0, 1, 0, 3)$. **29.21.** $\max Z(X) = 32$, $X_1^* = (5, 1, 0, 0, 5)$, $X_2^* = (2, 2, 7, 0, 0)$. **29.22.** $Z(X) \to -\infty$. **29.23.** $\max Z(X) = 14$, $X^* = (4, 1, 8, 0, 0)$. **29.24.** 1. $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (20\,000, 0)$, $X_2^* = (0, 16\,000)$. 2. а) $x_A = 20\,000$, $x_B = 0$; б) $x_A = 0$, $x_B = 16\,000$. **29.25.** а) $x_1 = 300$, $x_2 = 600$; б) $x_1 = 1500$, $x_2 = 600$; в) $x_1 = 600$, $x_2 = 1000$. **29.26.** $x_A = 1$, $x_B = 8$, $\max Z(X) = 67$ ден. ед. **29.27.** Сено 20 кг, силос 40 кг. **29.28.** а) $\max Z(X) = 135\,000$, $X^* = (250, 150)$; б) $\max Z(X) = 120\,000$, $X^* = (0, 300)$. **29.29.** а) 5 скорых; 7 пассажирских; б) 6 скорых; 6 пассажирских. **29.30.** В стеклянной таре $10t$; в жестяной $8—8t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

30

30.2. $\max Z(X) = 8$ при $X^* = (0, 0, 2, 1)$. **30.3.** $\min Z(X) = -4$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (0, 4, 0, 2)$, $X_2^* = (1, 3, 0, 0)$. **30.4.** $\max Z(X) = 8$ при $X^* = (0, 2, 2, 0)$. **30.5.** $\min Z(X) = -20$ при $X^* = (0, 4, 1, 0)$. **30.6.** $\max Z(X) = 12$ при $X^* = (0, 2, 3, 0)$. **30.7.** $\min Z(X) = 12$ при $X^* = (0, 0, 2, 2)$. **30.8.** $\max Z(X) = 28$ при $X^* = (8, 0, 0, 4, 1)$. **30.9.** $\max Z(X) = 26$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (10, 0, 0, 5, 1)$, $X_2^* = (0, 0, 8, 6, 4)$. **30.12.** $\max Z(X) = 14$ при $X^* = (2, 0, 4, 0)$. **30.13.** $\min Z(X) = -62$ при $X^* = (10, 0, 6, 0)$. **30.14.** $\max Z(X) = 5$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (0, {}^3/_2, 0, {}^5/_2)$, $X_2^* = ({}^5/_3, {}^2/_3, 0, 0)$. **30.15.** $Z(X) \to -\infty$. **30.16.** $\max Z(X) = 16$ при $X^* = (3, 0, 2)$. **30.17.** $\min Z(X) = -36$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (0, 18, 0)$, $X_2^* = (6, 6, 0)$. **30.18.** $\max Z(X) = 22$ при $X^* = (2, 4, 0)$. **30.19.** $\max Z(X) = 18$ при $X^* = (3, 4, 0)$. **30.20.** $\max Z(X) = 90$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (3, 6, 0)$, $X_2^* = (7, 4, 0)$. **30.21.** $\max Z(X) = 7$ при $X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^* + \lambda_3 X_3^*$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_j \geqslant 0$ $\forall j$, $X_1^* = (0, 7, 0)$, $X_2^* = (2, 5, 0)$, $X_3^* = (0, 6, 1)$. **30.22.** $Z(X) \to +\infty$. **30.23.** $Z(X) \to +\infty$.

30.24. min $Z(X) = -11$ при $X^* = (1, 4, 0)$. **30.25.** min $Z(X) = -14$ при $X^* = (2, 0, 4)$. **30.26.** min $Z(X) = -26$ при $X^* = (6, 4, 0)$. **30.27.** $Z(X) \to -\infty$. **30.28.** $Z(X) \to +\infty$. **30.29.** max $Z(X) = 6$ при $X^* = (0, 0, 2)$. **30.30.** min $Z(X) = 4$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (0, 4, 0)$, $X_2^* = (2, 0, 0)$. **30.31.** min $Z(X) = 0$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (7, 5, 1)$, $X_2^* = (\infty)$. **30.34.** min $Z(X) = -6$ при $X^* = (0, 2, 0, 4)$. **30.35.** min $Z(X) = 27$ при $X^* = (1, 13, 0, 0)$. **30.36.** max $Z(X) = 17$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (0, 9, 0, 4)$, $X_2^* = (0, 7, 2, 0)$. **30.37.** max $Z(X) = 10$ при $X^* = (2, 0, 3, 0)$. **30.38.** $Z(X) \to -\infty$. **30.39.** min $Z(X) = 26$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (1, 3, 0, 0)$, $X_2^* = (3, 0, 0, 5)$. **30.40.** Система ограничений несовместна. **30.41.** Система ограничений несовместна. **30.42.** max $Z(X) = 11$ при $X^* = (3, 3, 2, 0, 0)$. **30.43.** $Z(X) \to +\infty$. **30.44.** min $Z(X) = -74$ при $X^* = (0, 28, 16)$. **30.45.** min $Z(X) = 2$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (2, 0, 0)$, $X_2^* = (5/3, 0, 1/6)$. **30.46.** min $Z(X) = 4$ при $X^* = (0, 4, 0)$. **30.47.** $Z(X) \to -\infty$. **30.48.** max $Z(X) = 10$ при $X^* = (0, 2, 4)$. **30.49.** max $Z(X) = -2$ при $X^* = (2, 4, 0)$. **30.50.** max $Z(X) = 7$ при $X^* = (0, 11/2, 1)$. **30.51.** max $Z(X) = 7$ при $X^* = (1, 0, 2)$. **30.52.** Система ограничений несовместна. **30.53.** $Z(X) \to -\infty$. **30.54.** min $Z(X) = 5/2$ при $X^* = (0, 0, 5/2)$. **30.55.** min $Z(X) = 4$ при $X^* = (11, 6, 0)$. **30.56.** max $Z(X) = 2$ при $X^* = (0, 0, 2)$. **30.57.** min $Z(X) = 1$ при $X^* = (1, 0, 0)$. **30.58.** min $Z(X) = 5$ при $X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^* + \lambda_3 X_3^*$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_j \geqslant 0 \;\; \forall j$, $X_1^* = (0, 3, 1)$, $X_2^* = (0, 1, 2)$, $X_3^* = (7/4, 9/4, 3/4)$. **30.59.** min $Z(X) = 5$ при $X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^* + \lambda_3 X_3^*$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_j \geqslant 0 \;\forall j$, $X_1^* = (5, 0, 0)$, $X_2^* = (0, 5, 0)$, $X_3^* = (0, 0, 5)$. **30.60.** $Z(X) \to -\infty$. **30.61.** Система ограничений несовместна.

31

31.11. min $Z(X) = 7$ при $X^* = (4, 3, 0)$; $Y^* = (5, 2, 0)$. **31.12.** min $Z(X) = 10$ при $X^* = (0, 1/3, 2/3)$; $Y^* = (10, 2, 0)$. **31.13.** min $Z(X) = 11$ при $X^* = (1/2, 3/2, 0)$; $Y^* = (1, 4, 0)$. **31.14.** min $Z(X) = 3$ при $X^* = (2, 1, 0)$; $Y^* = (0, 1, 0)$. **31.15.** min $Z(X) = 3$ при $X^* = (0, 0, 3)$; $Y^* = (1/2, 0, 0)$.

31.16. $\min Z(X) = 14$ при $X^* = (1, 2, 0)$; $Y^* = (2, 0, 4)$. **31.17.** Задача не имеет решения; $\max F(Y) \to +\infty$. **31.18.** $\min Z(X) = 124/7$ при $X^* = (0, {}^{38}/_7, {}^{16}/_7)$; $Y^* = ({}^1/_7, 0, {}^{12}/_7)$. **31.19.** $\min Z(X) = 18$ при $X^* = ({}^1/_2, {}^3/_2, 0)$; $Y^* = (3, 4, 0)$. **31.20.** $\min Z(X) = 8$ при $\overset{*}{X_1} = (1, 0, 4)$, $\overset{*}{X_2} = (0, 1, 5)$; $Y^* = (5, 0, 1)$. **31.21.** Задача не имеет решения; $\max F(Y) \to +\infty$. **31.22.** Задача не имеет решения; $\max F(Y) \to +\infty$. **31.24.** $\max Z(X) = {}^{27}/_2$ при $X^* = ({}^5/_2, 0, 0, 1)$; $Y^* = (-{}^3/_2, {}^5/_2)$. **31.25.** $\min Z(X) = 9$ при $X^* = (0, 0, 1, 0)$; $\overset{*}{Y_1} = (9, 0)$, $\overset{*}{Y_2} = (3, 2)$. **31.26.** $\min Z(X) = 46$ при $X^* = (1, 0, 0, 4)$; $Y^* = (2, 4)$. **31.27.** $\min Z(X) = 1$ при $X^* = (0, 0, {}^1/_2, {}^3/_2)$; $Y^* = (3, 1)$. **31.28.** $\max Z(X) = -22$ при $X^* = (0, 2, 1, 0, 0)$; $Y^* = (-2, -5)$. **31.29.** $\max Z(X) = 9$ при $X^* = (0, 0, 1, 1, 0)$; $Y^* = (2, 1)$. **31.30.** $\min Z(X) = 18$ при $X^* = (0, 0, 1, 2, 0)$; $Y^* = (3, 4)$. **31.31.** $\min Z(X) = 41$ при $X^* = (0, 5, 0, 0, 1)$; $Y^* = (3, 4)$. **31.33.** $\min Z(X) = 22$ при $X^* = (0, 2, 1)$. **31.34.** $\min Z(X) = 10$ при $X^* = (0, 5, 0)$. **31.35.** $\min Z(X) = 12$ при $X^* = (0, 4, 0)$. **31.36.** Система ограничений несовместна. **31.37.** $\min Z(X) = 22$ при $X^* = (0, {}^4/_3, {}^{13}/_3)$. **31.38.** $\min Z(X) = 60$ при $X^* = (1 - t)\overset{*}{X_1} + t\overset{*}{X_2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\overset{*}{X_1} = (0, 0, 5)$, $\overset{*}{X_2} = (4, 0, 0)$. **31.39.** $\min Z(X) = 11$ при $X^* = (1, 2, 0)$. **31.40.** Система ограничений несовместна.

32

32.11. $\min Z(X) = 120$. **32.12.** $\min Z(X) = 125$. **32.13.** $\min Z(X) = 2100$. **32.14.** $\min Z(X) = 4600$. **32.15.** $\min Z(X) = 2200$. **32.16.** $\min Z(X) = 2800$. **32.17.** $\min Z(X) = 110$. **32.18.** $\min Z(X) = 720$. **32.19.** $\min Z(X) = 95$. **32.20.** $\min Z(X) = 95$. **32.21.** $\min Z(X) = 900$. **32.22.** $\min Z(X) = 1400$. **32.23.** $\min Z(X) = 210$. **32.24.** $\min Z(X) = 380$. **32.25.** $\min Z(X) = 7000$. **32.26.** $\min Z(X) = 2600$. **32.27.** $\min Z(X) = 600$. **32.28.** $\min Z(X) = 240$. **32.29.** $\min Z(X) = 2150$. **32.30.** $\min Z(X) = 380$. **32.31.** $\min Z(X) = 3100$. **32.32.** $\min Z(X) = 4000$. **32.34.** $\min Z(X) = 10\,500$. **32.35.** $\min Z(X) = 2700$. **32.36.** $\min Z(X) = 19\,500$. **32.37.** $\min Z(X) = 1050$. **32.38.** $\min Z(X) = 1900$. **32.39.** $\min Z(X) = 1650$. **32.40.** $\min Z(X) = 510$. **32.41.** $\min Z(X) = 340$. **32.43.** $\min T(X) = 4$. **32.44.** $\min T(X) = 6$.

33

33.2. $\max Z(X) = 19$ при $X^* = (2, 2, 1, 0, 1)$. **33.3.** $\max Z(X) = 9$ при $X^* = (1, 2, 0, 0)$. **33.4.** $\max Z(X) = 21$ при $X^* = (7, 0, 0, 0)$. **33.5.** $\max Z(X) = 11$ при $X^* = (0, 1, 3, 0)$. **33.6.** $\max Z(X) = 133$ при $X^* = (1, 0, 20, 18)$.

33.7. max $Z(X) = 9$ при $X^* = (1, 0, 0, 2)$. **33.8.** min $Z(X) = 6$ при $X^* = (0, 3, 0, 1, 7, 9)$. **33.9.** min $Z(X) = -25/3$ при $X^* = (1/3, 0, 4/3)$; min $Z(X_ц) = -6$ при $X_ц^* = (2, 1, 2)$. **33.10.** max $Z(X) = 11/3$ при $X^* = (4/3, 1/3, 0)$; min $Z(X_ц) = 1$ при $X_ц^* = (1, 2, 0)$. **33.11.** max $Z(X) = 6$ при $X^* = (0, 4/3, 1)$; $X_ц^*$ — не существует. **33.12.** max $Z(X) = 13$ при $X^* = (7/3, 1/3, 0)$; max $Z(X_ц) = 9$ при $X_ц^* = (1 - t)X_{ц1}^* + tX_{ц2}^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_{ц1}^* = (3, 2, 1)$, $X_{ц2}^* = (2, 1, 0)$. **33.13.** max $Z(X) = 13$ при $X^* = (0, 0, 1)$.

Содержание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное издание

Сборник задач по высшей математике для экономистов

Учебное пособие

Редактор *И.В. Мартынова*
Корректор *М.В. Литвинова*

Оригинал-макет подготовлен
Издательским Домом «ИНФРА-М»

ЛР № 070824 от 21.01.93 г.

Сдано в набор 10.12.2000. Подписано в печать 25.01.2001.
Формат 60x90/16. Бумага типографская. Гарнитура «SchoolBook».
Усл. печ. л. 36,0. Уч.-изд. л. 36,85. Доп. тираж 5000 экз.
Цена свободная. Заказ № 4504109.

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в
Тел.: (095) 380-05-40, 380-05-43
Факс: (095) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru
http://www.infra-m.ru

Отдел «Книга — почтой»:
(095) 363-42-60 (доб. 246, 247)

Отпечатано с готовых монтажей
на ФГУИПП «Нижполиграф».
603006, Нижний Новгород, ул. Варварская, 32.