+

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ОБЩИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

УЧЕБНИК

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
серия основана в 1996 г.

ОБЩИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

УЧЕБНИК

Под общей редакцией проф. ***В.И. Ермакова***

*Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по экономическим специальностям*

Москва
ИНФРА-М
2010

УДК 330.115(075.8)
ББК 22.11.я73
О27

Авторский коллектив:
Б.М. Рудык (раздел А);
В.И. Ермаков, Р.К. Гринцевичюс и Г.И. Бобрик (раздел В);
В.И. Матвеев и И.М. Гладких (раздел С);
Р.В. Сагитов и В.Г. Шершнев (раздел D)

Рецензенты:
кафедра статистики Московского банковского института
(зав. кафедрой — д-р экон. наук, проф. Б.И. Искаков)
и проф. В.И. Пучков

О27 **Общий курс высшей математики для экономистов:** Учебник / Под общ. ред. В.И. Ермакова. — М.: ИНФРА-М, 2010. — 656 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-16-003986-2

В учебник включены основные разделы математики, необходимые для подготовки экономистов различных специализаций.

Предназначен для студентов экономических факультетов вузов.

ББК 22.11.я73

ISBN 978-5-16-003986-2

Предисловие

Профессиональный уровень экономиста во многом зависит от того, освоил ли он современный математический аппарат и умеет ли использовать его при анализе сложных экономических процессов и принятии решений. Поэтому в подготовке экономистов широкого профиля изучение математики занимает значительное место.

Математическая подготовка экономиста имеет свои особенности, связанные со спецификой экономических задач, а также с широким разнообразием подходов к их решению.

Задачи практической и теоретической экономики очень разносторонни. К ним относятся, в первую очередь, методы сбора и обработки статистической информации, а также оценка состояния и перспективы развития экономических процессов. Применяются различные способы использования полученной информации – от простого логического анализа до составления сложных экономико-математических моделей и разработки математического аппарата их исследования.

Неопределенность экономических процессов, значительный случайный разброс и большой объем получаемой информации обусловливают необходимость привлечения к исследованию экономических задач теории вероятностей и математической статистики.

Наряду с моделированием экономистам необходимо изучать теорию оптимизации, которая представлена математическими методами исследования операций, в том числе линейным программированием.

Отмеченные направления требуют знания основополагающего математического аппарата: основ линейной алгебры и математического анализа, теории вероятностей и математического программирования.

Представленный курс высшей математики включает разделы, изучаемые экономистами различных специализаций – от общеэкономических и финансовых до экономической кибернетики и информатики.

Данный учебник написан преподавателями кафедры высшей математики Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова.

Материал разбит на четыре раздела.

Первый раздел (А) посвящен линейной алгебре, второй, наиболее емкий, раздел (В) – математическому анализу. Третий раздел (С) включает элементы теории вероятностей и математической статистики. Четвертый раздел (D) посвящен линейному программированию.

Каждый раздел имеет собственную нумерацию. Ссылки на номера параграфов, таблиц, рисунков, теорем и формул относятся только к данному разделу.

Для удобства читателей особыми значками отмечены начало и конец теорем и отдельных выводов (❑ и ■), следствий (✧ и ✦) и примеров (○ и ●).

А. ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Линейные уравнения

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – числа. При этом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами уравнения*, а b – *свободным членом*.

Последовательность n чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ называется *решением уравнения* (1.1), если после подстановки

$$x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \ldots,\ x_n = k_n$$

в данное уравнение оно превратится в верное числовое соотношение.

○ **Пример.** Уравнение

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \tag{1.2}$$

обладает решением 2, 1, 1, 2, так как после подстановки $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ получаем верное числовое соотношение $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 = 4$. Последовательность же чисел 3, 2, 0, 1 не является решением уравнения (1.2), так как полученное после подстановки $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ числовое соотношение $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 0 + 1 = 4$ не верно. ●

Подчеркнем, что последовательность чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ составляет одно решение уравнения (1.1) (а не n решений), поэтому решение уравнения (1.1) будем записывать в круглых скобках в виде $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Решения уравнения (1.1)

$$K = (k_1, k_2, \ldots, k_n), \quad L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

будем считать **одинаковыми** только в том случае, когда

$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \ldots,\ k_n = l_n. \tag{1.3}$$

Если же условие (1.3) не выполняется, решения считаются различными.

Два линейных уравнения называются *равносильными*, если их решения совпадают. Легко доказать, что если данное уравнение подвергнуть одному из следующих преобразований:

а) перенос членов из одной части уравнения в другую;

б) почленное умножение обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число, –

то получим уравнение, равносильное данному.

Решить уравнение (1.1) – значит найти все его решения или установить, что их нет. В зависимости от того, каковы числа $a_1, ..., a_n, b$, можно определить, имеет уравнение (1.1) решение или нет, а также количество этих решений. Возможны только следующие три случая:

1) $a_1 = ... = a_n = 0,\ b \neq 0$;

2) $a_1 = ... = a_n = 0,\ b = 0$;

3) хотя бы одно из чисел $a_1, ..., a_n$ отлично от нуля.

В первом случае уравнение (1.1) имеет вид

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b,\ b \neq 0 \tag{1.4}$$

и не имеет решений. В самом деле, пусть $(k_1, k_2, ..., k_n)$ – решение этого уравнения, тогда

$$0k_1 + 0k_2 + ... + 0k_n = b$$

должно быть верным числовым соотношением, что невозможно, так как $b \neq 0$. Противоречие возникает, если предположить, что уравнение (1.4) имеет решение. Следовательно, оно не имеет решений. Будем называть уравнение (1.4) *противоречивым*.

Во втором случае уравнение (1.1) имеет вид

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0 \tag{1.5}$$

и каждая последовательность $(k_1, k_2, ..., k_n)$ является решением этого уравнения. Поэтому уравнение (1.5) будем называть *тривиальным*.

В третьем случае предположим, для определенности, что $a_1 \neq 0$. Перенесем все члены из левой части уравнения (1.1), кроме члена a_1x_1, в правую часть, а затем разделим обе части уравнения на коэффициент $a_1 \neq 0$. Тогда получим

$$x_1 = c_0 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \tag{1.6}$$

где $c_0 = b/a_1,\quad c_i = -a_i/a_1,\quad i = 2, 3, ..., n.$

Уравнения (1.1) и (1.6) равносильны, поэтому для того, чтобы решить уравнение (1.1), достаточно найти все решения уравнения (1.6). Неизвестное x_1 назовем *разрешенным*, а неизвестные $x_2, ..., x_n$ – *свободными*.

❑ **Теорема 1.1.** Придадим свободным неизвестным $x_2, ..., x_n$ уравнения (1.6) произвольные значения $k_2, ..., k_n$. Тогда:

1) можно построить решение K уравнения (1.6), у которого значения свободных неизвестных равны соответственно $k_2, ..., k_n$;

2) если у решений K и L уравнения (1.6) значения свободных неизвестных совпадают, то и сами решения совпадают.

Доказательство. 1. Если значения свободных неизвестных $x_2 = k_2, ..., x_n = k_n$ подставить в (1.6), то для неизвестного x_1 получим значение

$$x_1 = c_0 + c_2k_2 + ... + c_nk_n.$$

Ясно, что

$$K = (c_0 + c_2k_2 + ... + c_nk_n, k_2, ..., k_n)$$

является решением уравнения (1.6).

2. Пусть у решения $L = (l_1, l_2, ..., l_n)$ уравнения (1.6) значения свободных неизвестных равны соответственно $k_2, ..., k_n$, т. е.

$$l_2 = k_2, ..., l_n = k_n. \quad (1.7)$$

Так как L – решение уравнения (1.6), то

$$l_1 = c_0 + c_2l_2 + ... + c_nl_n$$

или с учетом (1.7)

$$l_1 = c_0 + c_2k_2 + ... + c_nk_n. \quad (1.8)$$

Из условий (1.7) и (1.8) следует, что решения K и L совпадают. ■

Уравнение (1.6) имеет бесконечное множество решений, так как значения для неизвестных $x_2, ..., x_n$ можно выбирать бесконечным числом различных способов.

Итак, при $n > 1$ уравнение (1.1) не имеет решений либо имеет бесконечное множество решений.

1.2. Системы линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$. Уравнения системы будем считать пронумерованными – первое, второе и т. д. Коэффициенты при неизвестных в i-м уравнении системы обозначим через $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ (первый индекс указывает номер уравнения, второй – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент), а свободный член i-го уравнения – через b_i. Тогда система линейных уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.9)$$

Числа a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} называются *коэффициентами системы уравнений*, а числа b_1, b_2, ..., b_m – *свободными числами*.

Заметим, что в системе уравнений (1.9) количество неизвестных может не совпадать с числом уравнений.

Систему линейных уравнений (1.9) можно представить также в виде таблицы

x_1	x_2	...	x_n	
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

в i-й строке которой, $1 \leqslant i \leqslant m$, записаны коэффициенты при неизвестных и свободный член i-го уравнения системы (1.9).

Решением системы уравнений (1.9) называется такая последовательность чисел $(k_1, k_2, ..., k_n)$, которая является решением каждого уравнения системы. *Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или убедиться в том, что их нет.*

В дальнейшем увидим, что возможны только следующие три случая:

1) система уравнений **несовместна**, т. е. не имеет ни одного решения;

2) система уравнений является **определенной**, т. е. имеет единственное решение;

3) система уравнений является **неопределенной**, т. е. имеет бесчисленное множество решений.

Система уравнений, которая имеет хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Пусть система уравнений содержит противоречивое уравнение. Тогда каждое решение этой системы должно быть решением противоречивого уравнения. Так как противоречивое уравнение не имеет решений, то система, содержащая противоречивое уравнение, несовместна.

Чтобы найти все решения системы уравнений или установить их отсутствие, следует преобразовать данную систему уравнений, стремясь получить систему уравнений, все решения которой находятся без труда (в дальнейшем такую систему уравнений будем называть *разрешенной*). Если при этом использовать только такие преобразования, которые переводят систему уравнений в равносильную, то полученная разрешенная и исходная системы уравнений равносильны. Следовательно, все найденные решения разрешенной системы будут решениями исходной системы.

Заметим, что не всегда данную систему уравнений удается преобразовать в разрешенную. Если в процессе преобразований получена система, содержащая противоречивое уравнение, то эта система и, значит, равносильная ей исходная система не имеют решений.

Намеченная программа решения системы линейных уравнений будет реализована в параграфах 1.3–1.5.

1.3. Разрешенные системы линейных уравнений

В этом параграфе рассмотрены системы уравнений специального вида, которые играют большую роль при решении произвольных систем уравнений.

Неизвестное x_i называется **разрешенным**, если какое-нибудь уравнение системы содержит неизвестное x_i с коэффициентом, равным единице, а во все остальные уравнения системы неизвестное x_i не входит, т. е. входит с коэффициентом, равным нулю.

○ **Пример.** Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 \quad + 3x_3 \quad - 3x_5 \quad = 5, \\ \quad -7x_3 + x_4 + x_5 \quad = 8, \\ \quad x_2 + 2x_3 \quad - x_5 + x_6 = 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

содержит разрешенные неизвестные x_1, x_2, x_4, x_6. Неизвестные же x_3 и x_5 не являются разрешенными. ●

Если каждое уравнение системы содержит разрешенное неизвестное, то такую систему называют *разрешенной*. Ясно, что система уравнений (1.10) является разрешенной.

Из каждого уравнения разрешенной системы выберем по одному разрешенному неизвестному. Тогда получим набор попарно различных неизвестных, который называется **набором разрешенных неизвестных** данной разрешенной системы. Заметим, что набор разрешенных неизвестных в общем случае определен неоднозначно. Например, система (1.10) обладает двумя наборами разрешенных неизвестных x_1, x_4, x_2 и x_1, x_4, x_6.

Неизвестные системы линейных уравнений, которые не входят в данный набор разрешенных неизвестных, называются **свободными**. Если в системе (1.10) фиксирован набор разрешенных неизвестных x_1, x_4, x_2, то неизвестные x_3, x_5, x_6 являются свободными. Если же в системе (1.10) x_1, x_4, x_6 – набор разрешенных неизвестных, то свободными являются неизвестные x_2, x_3 и x_5.

Пусть теперь разрешенная система уравнений содержит неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$ и предположим, для определенности, что набор неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ является набором разрешенных неизвестных данной системы. Тогда возможны два случая: 1) $r = n$; 2) $r < n$.

В п е р в о м случае все неизвестные системы $x_1, x_2, ..., x_n$ образуют набор разрешенных неизвестных. Из определения набора разрешенных неизвестных следует, что данная система содержит n уравнений. Для определенности предположим, что первое уравнение системы содержит неизвестное x_1, второе – x_2 и т. д., n-е уравнение содержит неизвестное x_n. Из определения разрешенных неизвестных вытекает, что неизвестное x_1 содержится только в первом уравнении, неизвестное x_2 – только во втором и т. д., неизвестное x_n содержится только в n-м уравнении. Отсюда следует, что первое уравнение системы содержит только неизвестное x_1, второе – только x_2 и т. д., n-е уравнение содержит только неизвестное x_n, т. е. разрешенная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = b_1, \\ x_2 = b_2, \\ \dots\dots \\ x_n = b_n. \end{cases}$$

Ясно, что эта система уравнений имеет единственное решение $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Во втором случае ($r < n$) разрешенная система состоит из r уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{1.11}$$

Неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ являются свободными неизвестными системы (1.11).

Выразим разрешенные неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ системы (1.11) через ее свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{1.12}$$

Ясно, что системы уравнений (1.11) и (1.12) равносильны.

❑ **Теорема 1.2** (свойство свободных неизвестных). Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ системы уравнений (1.12) произвольные значения $k_{r+1}, \dots, k_n$.

Тогда:

1) можно построить решение K системы уравнений (1.12), у которого значения свободных неизвестных равны соответственно $k_{r+1}, \dots, k_n$;

2) если у решений K и L системы уравнений (1.12) значения свободных неизвестных совпадают, то и сами решения совпадают.

Доказательство. Если значения свободных неизвестных $x_{r+1} = k_{r+1}, \dots, x_n = k_n$ подставить в систему уравнений (1.12), то для разрешенных неизвестных $x_1, \dots, x_r$ получим следующие значения:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1\ r+1}k_{r+1} - \ldots - a_{1n}k_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r - a_{r\ r+1}k_{r+1} - \ldots - a_{rn}k_n. \end{cases}$$

Теперь

$$K = (b_1 - a_{1\ r+1}k_{r+1} - \ldots - a_{1n}k_n, \ldots, b_r - a_{r\ r+1}k_{r+1} - \ldots - a_{rn}k_n, k_{r+1}, \ldots, k_n)$$

является решением системы уравнений (1.12), так как после подстановки координат K в эту систему получим верные числовые соотношения. Поскольку у K значения свободных неизвестных равны соответственно $k_{r+1}, \ldots, k_n$, то K – искомое решение системы (1.12).

Пусть у решения $L = (l_1, \ldots, l_r, l_{r+1}, \ldots, l_n)$ системы (1.12) значения свободных неизвестных также равны соответственно $k_{r+1}, \ldots, k_n$, т. е.

$$l_{r+1} = k_{r+1}, \ldots, l_n = k_n. \tag{1.13}$$

Так как L является решением системы уравнений (1.12), то после подстановки его координат в уравнения системы (1.12) получим, учитывая равенства (1.13), следующие верные числовые соотношения:

$$\begin{cases} l_1 = b_1 - a_{1\ r+1}k_{r+1} - \ldots - a_{1n}k_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_r = b_r - a_{r\ r+1}k_{r+1} - \ldots - a_{rn}k_n. \end{cases} \tag{1.14}$$

Из условий (1.13) и (1.14) следует, что решения K и L совпадают. ■

✧ **Следствие**. Все решения системы (1.12) получаются в точности тем же путем, что и решение K.

Доказательство. Пусть $S = (s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}, \ldots, s_n)$ – произвольное решение системы (1.12). Возьмем для свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ значения

$$x_{r+1} = s_{r+1}, \ldots, x_n = s_n.$$

Из первого утверждения теоремы 1.2 следует, что можно построить решение K системы (1.12), у которого значения свободных неизвестных равны соответственно $s_{r+1}, \ldots, s_n$, а из второго утверждения – что $K = S$. ✦

Заметим, что значения для свободных неизвестных можно выбирать бесконечным числом различных способов, поэтому система (1.12) является неопределенной.

Резюмируя изложенное выше, получаем, что *разрешенная система уравнений всегда* ***совместна****. Она будет* ***определенной****, если число уравнений равно числу неизвестных, и* ***неопределенной****, если число уравнений меньше числа неизвестных.*

Задачи.

Выяснить, какие из следующих систем линейных уравнений являются разрешенными:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_5 = 5, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 9. \end{cases}$

1.4. Преобразование систем линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений. Требуется найти все решения этой системы. Ясно, что при решении этой задачи исходную систему уравнений можно заменить равносильной ей системой. Если бы удалось доказать, что любая совместная система линейных уравнений равносильна разрешенной системе, то задача была бы решена, так как мы уже умеем находить все решения разрешенной системы. В следующем параграфе будет доказано это утверждение, причем указанная разрешенная система линейных уравнений будет получена из исходной системы при помощи **элементарных преобразований**, под которыми понимается любое из следующих действий:

1) вычеркивание уравнения системы, у которого все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю, т. е. вычеркивание тривиального уравнения;

2) умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число;

3) замена i-го уравнения системы уравнением, которое получается путем почленного сложения i-го и j-го уравнений системы.

❑ **Теорема 1.3.** Элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в равносильную ей систему.

Доказательство. Ограничимся доказательством того, что третье элементарное преобразование переводит систему в равносильную.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.15)$$

После прибавления к i-му уравнению системы (1.15) ее j-го уравнения, предварительно умноженного на число k, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \ldots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Покажем, что системы (1.15) и (1.16) равносильны, т. е. произвольное решение системы (1.15) является решением системы (1.16) и наоборот.

Пусть $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – произвольное решение системы (1.15), т. е.

$$\begin{cases} a_{11}l_1 + \ldots + a_{1n}l_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}l_1 + \ldots + a_{in}l_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}l_1 + \ldots + a_{jn}l_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}l_1 + \ldots + a_{mn}l_n = b_m \end{cases} \qquad (1.17)$$

– верные числовые соотношения. Прибавим теперь к i-му равенству соотношений (1.17) j-е равенство, умноженное на число k. Тогда равенства (1.17) превратятся в следующие верные числовые соотношения:

$$\begin{cases} a_{11}l_1 + \ldots + a_{1n}l_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{i1} + ka_{j1})l_1 + \ldots + (a_{in} + ka_{jn})l_n = b_i + kb_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}l_1 + \ldots + a_{jn}l_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}l_1 + \ldots + a_{mn}l_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.18)$$

Из истинности равенств (1.18) следует, что $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ является решением системы уравнений (1.16). Этим установлено, что каждое решение системы уравнений (1.15) является решением системы уравнений (1.16).

Пусть теперь $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – произвольное решение системы (1.16). Тогда справедливы числовые равенства (1.18). Теперь прибавим к i-му соотношению равенств (1.18) j-е соотношение, умноженное на число $(-k)$. Выполнив это преобразование, получим верные числовые равенства (1.17), т. е. $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – решение системы (1.15).

Аналогично устанавливается, что первое и второе элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в равносильную. ■

Замечание. Ясно, что и после многократных элементарных преобразований данной системы уравнений получится система, равносильная исходной.

В дальнейшем важную роль будут играть так называемые жордановы преобразования системы уравнений. *Жордановы преобразования состоят из элементарных преобразований*, выполняемых в определенном порядке. Следовательно, *если проделать одно или несколько жордановых преобразований над данной системой уравнений, то получим равносильную систему.*

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Выполнять жорданово преобразование значительно удобнее, если систему уравнений записать в табличной форме

x_1	...	x_s	...	x_n	
a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
a_{r1}	...	$\boxed{a_{rs}}$	...	a_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	b_m

(1.19)

Далее таблицу (1.19) будем называть системой уравнений, а ее строки – уравнениями.

Выберем любой ненулевой коэффициент системы уравнений (1.19), например $a_{rs} \neq 0$, он называется *разрешающим*, а строка и столбец таблицы (1.19), содержащие элемент a_{rs}, – *разрешающими*. Отметим, что в качестве разрешающего элемента нельзя выбирать свободные члены системы уравнений (1.19). Выбранный разрешающий элемент отмечают, заключая в рамку. **Жордановым преобразованием** системы уравнений (1.19) с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$ называется следующая совокупность элементарных преобразований.

1. Умножим каждый элемент разрешающей строки таблицы (1.19), т. е. ее r-й строки, содержащей элемент a_{rs}, на число $1/a_{rs}$. Тогда получим таблицу

x_1	...	x_s	...	x_n	
a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
a'_{r1}	...	$\boxed{1}$	...	a'_{rn}	b'_r
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	b_m

(1.20)

Заметим, что нет никакой необходимости записывать выражения новых коэффициентов a'_{ri} и новых свободных членов b'_r через коэффициенты и свободные члены исходной системы (1.19).

2. При помощи новой разрешающей строки, т. е. r-й строки таблицы (1.20), преобразуем все остальные строки таблицы (1.20) следующим образом:

к первой строке прибавим новую разрешающую строку, умноженную на число $-a_{1s}$ (элемент a_{1s} находится на пересечении первой строки и разрешающего столбца таблицы (1.20)), и так далее;

к последней строке прибавим новую разрешающую строку, умноженную на число $-a_{ms}$ (элемент a_{ms} находится на пересечении последней строки и разрешающего столбца таблицы (1.20)).

После этих преобразований таблица (1.20) примет вид

x_1	...	x_s	...	x_n	
a'_{11}	...	0	...	a'_{1n}	b'_1
...	...	...	...	...	...
a'_{r1}	...	1	...	a'_{rn}	b'_r
...	...	...	...	...	...
a'_{m1}	...	0	...	a'_{mn}	b'_m

(1.21)

В результате жорданова преобразования с разрешающим элементом a_{rs} система уравнений (1.19) преобразовалась в систему (1.21).

Цель жорданова преобразования системы уравнений (1.19) *с разрешающим элементом* a_{rs} *– получить систему уравнений* (1.21), *у которой* r-е *уравнение* (r *– первый индекс элемента* a_{rs}) *содержит разрешенное неизвестное* x_s (s *– второй индекс элемента* a_{rs}).

○ **Пример.** Выполнить жорданово преобразование системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + \boxed{2}x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \tag{1.22}$$

с разрешающим элементом $a_{23} = 2$.

Запишем систему (1.22) в виде таблицы

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	7	4	1	6
3	5	$\boxed{2}$	2	4
4	4	1	7	2
1	–2	–2	1	–2

(1.23)

После умножения второй строки таблицы (1.23) на элемент $1/a_{23} = {}^1/_2$ получим

x_1	x_2	x_3	x_4			
2	7	4	1	6		
$^3/_2$	$^5/_2$	$\boxed{1}$	1	2	(−4) (−1) (2)	(1.24)
4	4	1	7	2		
1	−2	−2	1	−2		

Теперь из первого, третьего и четвертого уравнений системы (1.24) исключим неизвестное x_3. Для этого к первой строке прибавим вторую строку, умноженную на −4, к третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на −1, а к четвертой строке прибавим вторую строку, умноженную на 2. Указанные действия изображены в системе (1.24) следующим образом: число, на которое умножается вторая (новая разрешающая) строка, приведено в скобках, а стрелка, идущая от этого числа, показывает, к какому уравнению прибавляется это произведение. После выполнения этих преобразований получим систему уравнений

x_1	x_2	x_3	x_4		
−4	−3	0	−3	−2	
$^3/_2$	$^5/_2$	1	1	2	(1.25)
$^5/_2$	$^3/_2$	0	6	0	
4	3	0	3	2	

Таким образом, в результате жорданова преобразования системы уравнений (1.23) с разрешающим элементом $a_{23} = 2$ получим систему (1.25), второе уравнение которой содержит разрешенное неизвестное x_3. ●

З а м е ч а н и е. Практически, когда выполняется жорданово преобразование системы (1.23), систему уравнений (1.24) не выписывают. Тогда процесс преобразования системы (1.23) выглядит следующим образом:

x_1	x_2	x_3	x_4		
2	7	4	1	6	
3	5	$\boxed{2}$	2	4	
4	4	1	7	2	
1	−2	−2	1	−2	
−4	−3	0	−3	−2	
$^3/_2$	$^5/_2$	1	1	2	(−4) (−1) (2)
$^5/_2$	$^3/_2$	0	6	0	
4	3	0	3	2	

т. е. сначала преобразуется разрешающая строка, а затем при помощи этой строки и все остальные строки таблицы (1.23).

Задачи.

Выполнить жорданово преобразование систем линейных уравнений, заданных в табличной форме, с разрешающим элементом, который заключен в рамку:

а)

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	1	0	3	2
3	−2	$\boxed{1}$	4	−5
−1	4	3	5	−7

б)

x_1	x_2	x_3	x_4	
−1	2	5	−4	3
2	3	$\boxed{1}$	−1	1
5	2	−3	4	5

в)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	5	−1	4	2	−1
0	$\boxed{2}$	−4	−2	3	6
0	3	0	3	1	0
0	7	−5	2	5	2

г)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	−2	3	11
0	4	1	5	1	3
0	−4	0	$\boxed{2}$	1	2
0	2	0	−5	2	7

д)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	0	−3	0	6
0	−3	1	2	0	−7
0	$\boxed{5}$	0	−5	0	10
0	4	0	3	1	12

1.5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Решить систему линейных уравнений – значит получить *равносильную разрешенную* или *равносильную несовместную систему линейных уравнений*. Способ получения этих систем называется **методом Гаусса**.

❑ **Теорема 1.4.** Каждую систему линейных уравнений можно при помощи конечного числа элементарных преобразований превратить в разрешенную систему уравнений или в систему, содержащую противоречивое уравнение.

Доказательство. Пусть дана система уравнений

x_1	x_2	x_3	...	x_n	
$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	b_m

(1.26)

Преобразование системы уравнений (1.26) состоит из ряда последовательных шагов. Условимся, что перед выполнением очередного шага в таблице вычеркиваются все строки, состоящие из одних нулей, т. е. вычеркиваются тривиальные уравнения.

1-й шаг. Рассмотрим первое уравнение системы (1.26). Среди коэффициентов $a_{11}, ..., a_{1n}$ выберем любой отличный от нуля коэффициент и выполним жорданово преобразование системы (1.26) с этим элементом. Предположим, для определенности, что выбран коэффициент $a_{11} \neq 0$. Тогда после выполнения жорданова преобразования с разрешающим элементом a_{11} система (1.26) примет вид

x_1	x_2	x_3	...	x_n	
1	a'_{12}	a'_{13}	...	a'_{1n}	b'_1
0	a'_{22}	$\boxed{a'_{23}}$	...	a'_{2n}	b'_2
...	...	...	...	...	...
0	a'_{m2}	a'_{m3}	...	a'_{mn}	b'_m

(1.27)

Итак, после выполнения первого шага получили систему уравнений (1.27), первое уравнение которой содержит разрешенное неизвестное x_1.

2-й шаг. Рассмотрим теперь второе уравнение системы (1.27). Среди коэффициентов $a'_{22}, ..., a'_{2n}$ выберем отличный от нуля коэффициент и выполним жорданово преобразование системы (1.27) с этим элементом. Предположим, для определенности, что выбрали коэффициент $a'_{23} \neq 0$. В этом случае после выполнения жорданова преобразования системы (1.27) с разрешающим элементом a'_{23} получим систему

x_1	x_2	x_3	...	x_n	
1	a''_{12}	0	...	a''_{1n}	b''_1
0	a''_{22}	1	...	a''_{2n}	b''_2
...	...	...	...	...	...
0	a''_{m2}	0	...	a''_{mn}	b''_m

(1.28)

На **k-м шаге**, $k = 3, ...$, выполним жорданово преобразование системы, полученной после выполнения предыдущего шага, с любым ненулевым коэффициентом k-го уравнения этой системы. После выполнения k-го шага получим систему, содержащую не меньше k уравнений, причем каждое из первых k уравнений будет содержать разрешенное неизвестное.

Не более чем через m шагов (m – число уравнений в системе (1.26)) процесс преобразований остановится, так как невозможно выбрать разрешающий элемент. После выполнения l-го шага, $l \leqslant m$, разрешающий элемент нельзя выбрать только в следующих двух случаях.

1. Система уравнений, полученная после выполнения l-го шага, не содержит $(l + 1)$-го уравнения и, значит, является разрешенной.

2. Полученная после l-го шага система уравнений содержит $(l + 1)$-е уравнение, но все коэффициенты при неизвестных в этом уравнении равны нулю. А поскольку $(l + 1)$-е уравнение не может быть тривиальным (после выполнения l-го шага тривиальные уравнения должны быть вычеркнуты), оно является противоречивым. ■

✧ **Следствие 1.** Совместная система линейных уравнений равносильна разрешенной системе.

Доказательство. Так как методом Гаусса получается система уравнения, равносильная исходной (см. теорему 1.3), то из совместности исходной системы следует, что система уравнений, полученная методом Гаусса, также совместна и, значит, является разрешенной. ✦

✧ **Следствие 2.** Совместная система линейных уравнений имеет либо одно решение, либо бесчисленное множество решений.

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что совместная система уравнений равносильна разрешенной системе, которая имеет либо одно решение, либо бесчисленное множество решений. ✦

Общим решением совместной системы линейных уравнений называется равносильная ей разрешенная система линейных уравнений.

Применим полученные выше результаты к **системам линейных однородных уравнений**, т. е. к системам, все свободные члены которых равны нулю.

❑ **Теорема 1.5.** Система однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевые решения.

Доказательство. Система однородных уравнений совместна, так как обладает нулевым решением (0, 0, ..., 0). Тогда, согласно следствию 1, она равносильна разрешенной системе. Число шагов, выполненных при решении этой системы методом Гаусса, равно числу уравнений в разрешенной системе, которое, в свою очередь, не превышает числа уравнений в исходной системе. Так как по условию число уравнений в исходной системе меньше числа неизвестных, то и число уравнений в разрешенной системе меньше числа неизвестных. Следовательно, разрешенная система имеет бесчисленное множество решений и в том числе, конечно, ненулевые. ■

❍ **Примеры.**

1. Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 = 8, \\ 13x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Запишем эту систему в виде таблицы и будем выполнять шаги до тех пор, пока процесс решения не закончится:

	x_1	x_2	x_3		
	2	−3	$\boxed{1}$	3	(1) (3)
	1	0	−1	3	
	3	1	0	8	
	0	13	−3	8	
	2	−3	1	3	
	$\boxed{3}$	−3	0	6	
	3	1	0	8	
	6	4	0	17	
	0	−1	1	−1	
	1	−1	0	2	(−2) (−3) (−6)
	0	$\boxed{4}$	0	2	
	0	10	0	5	
	0	0	1	$-^1/_2$	
	1	0	0	$^5/_2$	
(−10) (1) (1)	0	1	0	$^1/_2$	
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	

В результате преобразований получили разрешенную систему уравнений

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -^1/_2, \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = {}^5/_2, \\ 0x_1 + \ x_2 + 0x_3 = {}^1/_2, \end{cases}$$

которая обладает единственным решением $(^5/_2, {}^1/_2, -^1/_2)$.

2. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \ x_4 + 7x_5 = 2, \\ 2x_1 - \ x_2 + \ x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему уравнений методом Гаусса:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
−2	$\boxed{1}$	−3	2	−4	1	(2) (1)
4	−2	5	1	7	2	
2	−1	1	8	2	1	
−2	1	−3	2	−4	1	
0	0	$\boxed{-1}$	5	−1	4	
0	0	−2	10	−2	2	
−2	1	0	−13	−1	−11	
0	0	1	−5	1	−4	(3) (2)
0	0	0	0	0	−6	

Последняя система уравнений содержит противоречивое уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -6$. Следовательно, исходная система несовместна.

3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Имеем:

x_1	x_2	x_3	x_4		
2	7	3	$\boxed{1}$	6	(−2) (−7)
3	5	2	2	4	
9	4	1	7	2	
2	7	3	1	6	
$\boxed{-1}$	−9	−4	0	−8	
−5	−45	−20	0	−40	
0	−11	−5	1	−10	
1	9	4	0	8	(−2) (5)

Общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10, \\ x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases} \tag{1.29}$$

Найдем какое-нибудь решение системы уравнений (1.29). Неизвестные x_1 и x_4 образуют набор разрешенных неизвестных, а x_2, x_3 – свободные неизвестные. Возьмем для свободных неизвестных значения $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ и подставим их в систему (1.29). Тогда получим

$$\begin{cases} -11 + 5 + x_4 = -10, \\ x_1 + 9 - 4 = 8. \end{cases}$$

Отсюда $x_4 = -4$, $x_1 = 3$. Итак, (3, 1, −1, −4) – решение системы уравнений (1.29) и, значит, данной системы. ●

Задачи.

Найти общее решение системы линейных уравнений или установить ее несовместность:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 15, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 = -12, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 4; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 6; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 19; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 11, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 19; \end{cases}$

о) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11. \end{cases}$

2. *n*-МЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ

2.1. Линейные операции над *n*-мерными векторами

В геометрии вектором называют направленный отрезок. В фиксированной системе координат каждый вектор A однозначно определен своими координатами: $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Если $B = (b_1, b_2, b_3)$ – какой-нибудь другой вектор, то

$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,

$kA = (ka_1, ka_2, ka_3)$,

где k – число.

Сложение векторов и умножение вектора на число называют **линейными операциями** над векторами.

Обобщим понятие вектора следующим образом. Назовем последовательность n чисел **n-мерным вектором** и запишем его в виде $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Число a_1 называется **первой координатой** вектора A,

a_2 — **второй координатой** и т. д., а число n (количество координат) называется **размерностью** вектора A.

Два n-мерных вектора

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n), \quad A' = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$$

считаем *равными* только тогда, когда равны их соответствующие координаты: $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2, ..., a_n = a'_n$.

Пусть теперь даны два n-мерных вектора $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Полагаем по определению

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$kA = (ka_1, ka_2, ..., ka_n)$$

и по-прежнему называем эти операции соответственно *сложением* векторов и *умножением* вектора на число.

Очевидно, что для любого вектора A

$$A + \theta = A,$$

где $\theta = (0, 0, ..., 0)$. Вектор θ называется **нулевым**.

Вектор $(-1)A$ называется **противоположным** вектору A и обозначается через $-A$, т. е. $-A = (-1)A = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$. Ясно, что $A + (-1)A = \theta$. Вместо $A + (-1)B$ будем писать $A - B$.

Так как операции под n-мерными векторами определялись через операции над их координатами, то неудивительно, что многие свойства арифметических операций справедливы и для операций над векторами:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $k(A + B) = kA + kB$;
4) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$;
5) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$.

Для доказательства какого-либо из приведенных соотношений надо найти координаты векторов, находящихся в правой и левой частях этого соотношения, и убедиться в том, что соответствующие координаты этих векторов равны. Например,

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$
$$B + A = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, ..., b_n + a_n).$$

Так как соответствующие координаты векторов $A + B$ и $B + A$ равны, то $A + B = B + A$.

○ **Пример.** Даны векторы:

$A_1 = (1, 2, 5, -9)$; $\quad A_2 = (-1, 3, 1, -5)$;
$A_3 = (0, 7, -2, 4)$; $\quad A_4 = (1, -2, -2, 3)$.

Найти координаты вектора $2A_1 - 3A_2 + A_3 + 0A_4$.

Выполняя указанные операции над векторами, получим

$$2A_1 - 3A_2 + A_3 + 0A_4 = 2(1, 2, 5, -9) - 3(-1, 3, 1, -5) + (0, 7, -2, 4) + 0(1, -2, -2, 3) = (2, 4, 10, -18) + (3, -9, -3, 15) + (0, 7, -2, 4) + (0, 0, 0, 0) = (5, 2, 5, 1).$$ ●

Задачи.

1. Даны векторы:

$A_1 = (1, -1, 1, 5)$, $A_2 = (2, -1, 3, 2)$, $A_3 = (1, 0, 4, 1)$.

Найти координаты следующих векторов:

а) $A_1 + A_2$; б) $A_1 - 2A_2$; в) $-2A_1 + {}^3/_2 A_2 - A_3$.

2. Найти вектор X из уравнения $2A_1 + A_2 + 4X - A_3 = \theta$, где $A_1 = (3, -1, 0, 0)$, $A_2 = (6, -12, 8, 5)$, $A_3 = (4, -1, 3, -1)$.

3. Найти вектор X из уравнения $3(A_1 - X) + 2(A_2 + X) = 5(A_3 + X)$, где $A_1 = (2, 5, 1, 3)$, $A_2 = (10, 1, 5, 10)$, $A_3 = (4, 1, -1, 1)$.

4. Дано, что l-я координата у каждого вектора системы $A_1, A_2, ..., A_m$ равна нулю. Доказать, что l-я координата вектора $k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_mA_m$ также равна нулю ($k_1, k_2, ..., k_m$ – произвольные числа).

5. Доказать, что первая и последняя координаты вектора $k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_mA_m$ равны, если первая и последняя координаты вектора A_i, $i = 1, 2, ..., m$, равны.

2.2. Скалярное произведение и длина n-мерных векторов

Как известно из геометрии, если векторы A и B заданы своими координатами $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$, то их скалярное произведение AB определяется по формуле $AB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

По аналогии **скалярным произведением** n-мерных векторов $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ называется число $AB = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$.

Некоторые с в о й с т в а произведения чисел справедливы и для скалярного произведения векторов (A, B, C – n-мерные векторы):

1) $AB = BA$;

2) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, где k – число;

3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) $AA \geqslant 0$ при любом A, причем $AA = 0$ тогда и только тогда, когда $A = \theta$.

Для доказательства какого-либо из свойств 1–3 надо найти числа, находящиеся в левой и правой частях этого соотношения, и убедиться в том, что они равны. Например, если

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n),\ B = (b_1, b_2, ..., b_n),$$

то $AB = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, $BA = b_1a_1 + b_2a_2 + ... + b_na_n$, а поэтому $AB = BA$.

Для доказательства свойства 4 найдем величину AA:

$$AA = a_1a_1 + a_2a_2 + ... + a_na_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Отсюда следует, что $AA \geqslant 0$ и

$$AA = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 0,\ a_2^2 = 0,\ ...,\ a_n^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ ...,\ a_n = 0 \Leftrightarrow A = \theta.$$

○ **Пример.** Используя свойства скалярного произведения, вычислить число $(k_1A + k_2B)(k_3C + k_4D)$.

Имеем:

$$(k_1A + k_2B)(k_3C + k_4D) = (k_1A + k_2B)(k_3C) + (k_1A + k_2B)(k_4D) =$$

$$= k_1k_3AC + k_2k_3BC + k_1k_4AD + k_2k_4BD. \bullet$$

Длиной n-мерного вектора A называется число $\sqrt{AA}$. Длину вектора A будем обозначать символом $|A|$:

$$|A| = \sqrt{AA}. \tag{2.1}$$

Из свойства 4 скалярного произведения векторов вытекает, что каждый n-мерный вектор A обладает длиной, причем нулевой вектор θ является единственным вектором, длина которого равна нулю.

Скалярное произведение AA называется **скалярным квадратом** вектора A и обозначается символом A^2. Из формулы (2.1) следует, что $|A|^2 = AA = A^2$, т. е. *квадрат длины вектора равен его скалярному квадрату*.

❑ **Теорема 2.1.** Если A и B – n-мерные векторы, то справедливы следующие числовые соотношения:

1) $|kA| = |k||A|$, где k – число;

2) $|AB| \leqslant |A||B|$ (неравенство Коши–Буняковского);

3) $|A + B| \leqslant |A| + |B|$ (неравенство треугольника).

Доказательство. 1. $|kA| = \sqrt{(kA)(kA)} = \sqrt{k^2(AA)} = \sqrt{k^2}\sqrt{AA} = |k||A|$.

2. Рассмотрим вектор $C = A^2B - A(AB)$. Введем обозначения: $A^2 = k$, $AB = l$. Тогда $C = kB - lA$. Теперь вычислим квадрат длины вектора C:

$$C^2 = (kB - lA)^2 = k^2B^2 - 2kl(AB) + l^2A^2 = (A^2)^2B^2 - 2A^2(AB)(AB) +$$
$$+ (AB)^2A^2 = (A^2)^2B^2 - A^2(AB)^2 = A^2(A^2B^2 - (AB)^2).$$

Из свойства 4 скалярного произведения вытекает, что $C^2 \geqslant 0$ и, значит, $A^2(A^2B^2 - (AB)^2) \geqslant 0$. Так как $A^2 \geqslant 0$, то из последнего неравенства получаем $A^2B^2 - (AB)^2 \geqslant 0$ или $A^2B^2 \geqslant (AB)^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем: $\sqrt{(AB)^2} \leqslant \sqrt{A^2B^2}$. Отсюда $|AB| \leqslant |A||B|$.

3. Так как $AB \leqslant |AB|$ и $|AB| \leqslant |A||B|$, то $AB \leqslant |A||B|$.

Теперь, используя полученное неравенство, имеем

$|A + B|^2 = (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \leqslant |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 = (|A| + |B|)^2$, т. е. $|A + B|^2 \leqslant (|A| + |B|)^2$. Отсюда $|A + B| \leqslant |A| + |B|$. ■

◇ **Следствие.** $|-A| = |A|$.

Действительно, $|-A| = |(-1)A| = |-1|\,|A| = |A|$. ◆

Вектор называется **нормированным**, если его длина равна единице. Каждый ненулевой вектор A можно нормировать, т. е. умножить на такое число k, чтобы вектор kA был нормированным. В самом деле, при $k = 1/|A|$

$$\left|\frac{1}{|A|}A\right| = \frac{1}{|A|}|A| = 1.$$

Задачи.

1. Даны векторы $A = (4, -2, -4, 8)$, $B = (5, -1, 3, -1)$. Вычислить: а) AB; б) $\sqrt{AA}$; в) $A(A - B)$; г) $(2A - B)(A + 3B)$.

2. Даны векторы A, B, C, и известно, что $AA = BB = CC = 1$; $AB = 2$; $AC = 3$; $BC = 4$. Найти скалярные произведения векторов: а) $(A + B)C$; б) $(A + B)(A + C)$; в) $(2A + 3B)(3A - B + C)$.

3. Дано, что $A + 3B - 2C = \theta$ и $AC = 1$, $BC = 2$. Найти скалярное произведение CC.

4. Даны векторы $A = (1, 1, -1, 0)$, $B = (2, -1, 2, 1)$, $C = (-1, 1, 0, 1)$. Найти длины векторов: а) A; б) $3B$; в) $A + B$; г) $-A + B + 2C$.

5. Найти длину вектора $C = 3A - 4B$, если $|A| = |B| = 1$ и $AB = 0$.

6. Векторы A, B и C связаны соотношением $3A + B - 2C = \theta$. Найти $|C|$, если $|A| = |B| = 4$ и $AB = 8$.

7. Даны n-мерные векторы A и B. Доказать справедливость следующих соотношений: а) $|A + B|^2 + |A - B|^2 = 2|A|^2 + 2|B|^2$; б) $|A - B| \geqslant \geqslant ||A| - |B||$.

2.3. Угол между n-мерными векторами

Из неравенства Коши–Буняковского $|AB| \leqslant |A||B|$ следует

$-|A||B| \leqslant AB \leqslant |A||B|$ или

$$-1 \leqslant \frac{AB}{|A||B|} \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Углом между ненулевыми n-мерными векторами A и B называется решение уравнения

$$\cos\varphi = \frac{AB}{|A||B|}, \tag{2.3}$$

которое принадлежит отрезку $[0, \pi]$. Из условия (2.2) следует, что уравнение (2.3) имеет решение при любых $A \neq \theta$ и $B \neq \theta$. Так как уравнение (2.3) имеет на отрезке $[0, \pi]$ единственное решение, то угол между векторами A и B определен однозначно.

Перепишем соотношение (2.3) в виде $AB = |A||B| \cos\varphi$. Отсюда следует, что *скалярное произведение векторов A и B равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.*

Геометрические характеристики векторов – длина вектора и угол между векторами – позволяют сформулировать критерий равенства n-мерных векторов.

❑ **Теорема 2.2.** Ненулевые n-мерные векторы A и B равны тогда и только тогда, когда угол между ними равен нулю и длины этих векторов равны.

Доказательство. *Необходимость.* Дано $A = B$. Тогда $|A| = \sqrt{AA} = \sqrt{BB} = |B|$,

$$\cos(\widehat{A,B}) = \frac{AB}{|A||B|} = \frac{AA}{|A||A|} = \frac{A^2}{|A|^2} = 1,$$

и, значит, $\widehat{A,B} = 0$.

Достаточность. Дано $|A| = |B|$ и $\widehat{A,B} = 0$. Для доказательства равенства векторов A и B рассмотрим скалярный квадрат $(A - B)^2$:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = |A|^2 - 2|A||B| \cos(\widehat{A,B}) + |B|^2 =$$
$$= |A|^2 - 2|A||A| + |A|^2 = 0,$$

т. е. $(A - B)^2 = 0$. Теперь из свойства 4 скалярного произведения векторов вытекает $A - B = \theta$ и $A = B$. ■

Коллинеарные векторы

Два ненулевых n-мерных вектора A и B называются **коллинеарными**, если угол между ними равен нулю или π.

Если $\hat{A,B} = 0$, то коллинеарные векторы считаются *одинаково направленными*. Если же $\hat{A,B} = \pi$, то коллинеарные векторы A и B *противоположно направлены*. Символьная запись $A\uparrow\uparrow B$ ($A\uparrow\downarrow B$) означает, что векторы A и B одинаково (противоположно) направлены.

Ненулевые векторы A, B называются **неколлинеарными**, если угол между ними больше нуля и меньше π.

❑ **Теорема 2.3.** Ненулевые векторы A и B коллинеарны тогда и только тогда, когда можно подобрать такое число k, что $B = kA$.

Доказательство. *Необходимость.* Если векторы A и B коллинеарны, тогда возможны два случая: 1) $\hat{A,B} = 0$; 2) $\hat{A,B} = \pi$.

Докажем, что в первом случае $B = kA$, где $k = |B| / |A|$.

Имеем

$$\left(B - \frac{|B|}{|A|}A\right)^2 = B^2 - 2\frac{|B|}{|A|}AB + \frac{|B|^2}{|A|^2}A^2 =$$

$$= |B|^2 - 2\frac{|B|}{|A|}|A||B|\cos 0 + \frac{|B|^2}{|A|^2}|A|^2 = 0.$$

Отсюда $B - \dfrac{|B|}{|A|}A = \theta$ и $B = \dfrac{|B|}{|A|}A$.

Аналогично доказывается, что во втором случае $B = kA$, где $k = -|B| / |A|$.

Достаточность. Если $B = kA$, то

$$\cos\left(\hat{A,B}\right) = \frac{AB}{|A||B|} = \frac{A(kA)}{|A||kA|} = \frac{k(AA)}{|k||A||A|} = \frac{k}{|k|}.$$

Так как число $k / |k|$ равно 1 или -1, то угол между векторами A и B равен 0 или π и, значит, векторы A и B коллинеарны. ■

Задачи.

1. Вычислить угол между векторами A и B:

а) $A = (1, 4, -2, 2)$, $B = (3, 1, 1, 5)$;

б) $A = (1, 1, 1, 1, 1)$, $B = (-1, -1, 0, 1, 1)$.

2. Угол между n-мерными векторами A и B равен 120°, $|A| = 3$, $|B| = 4$. Вычислить: а) AB; б) B^2; в) $(A - B)^2$; г) $(3A - 2B)(A + 2B)$.

3. Найти длину вектора $C = A - 2B$, если $|A| = 2$, $|B| = 3$, $\hat{A,B} = 60°$.

4. Даны n-мерные векторы A, B, C, которые попарно образуют друг с другом углы, равные 120°. Зная, что $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 6$, определить длину вектора $A + B + C$.

5. Вычислить угол между векторами $3A + 2B$ и $A + 5B$, если $|A| = |B| = 1$ и векторы A и B перпендикулярны.

6. Какой угол образуют нормированные векторы A и B, если известно, что векторы $A + 2B$ и $5A - 4B$ перпендикулярны?

7. Вектор A коллинеарен вектору $B = (2, 1, -1, 1)$ и образует тупой угол с вектором $C = (3, 2, 1, 1)$. Зная, что $|A| = 2\sqrt{7}$, найти координаты вектора A.

8. Найти координаты вектора A, который коллинеарен вектору $B = (2, 1, -1)$ и удовлетворяет условию $AB = 3$.

2.4. Разложение вектора по системе векторов

Пусть дана система m-мерных векторов $A_1, A_2, ..., A_n$. Выберем n произвольных чисел $k_1, k_2, ..., k_n$. Заметим, что чисел ровно столько, сколько векторов в системе. Вектор $k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_nA_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ с коэффициентами $k_1, k_2, ..., k_n$.

Пусть теперь наряду с векторами $A_1, A_2, ..., A_n$ дан еще m-мерный вектор B. Будем говорить, что вектор B линейно выражается через векторы $A_1, A_2, ..., A_n$, если он равен некоторой линейной комбинации векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, т. е. найдется такой набор чисел $l_1, l_2, ..., l_n$, что

$$B = l_1A_1 + l_2A_2 + ... + l_nA_n. \qquad (2.4)$$

В этом случае будем говорить также, что вектор B *разлагается* по векторам $A_1, A_2, ..., A_n$. Числа $l_1, l_2, ..., l_n$ в разложении (2.4) называются **коэффициентами разложения** вектора B по системе $A_1, A_2, ..., A_n$.

Разложение $B = k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_nA_n$ считается отличным от разложения (2.4), если различна хотя бы одна пара соответствующих коэффициентов разложения (например, $l_1 \neq k_1$).

Приведем несколько простых, но очень важных утверждений, в которых вопрос о разложении вектора B по системе $A_1, A_2, ..., A_n$ решается элементарно.

1. *Нулевой вектор θ разлагается по каждой системе векторов $A_1, A_2, ..., A_n$:*

$$\theta = 0A_1 + 0A_2 + ... + 0A_n.$$

2. *Если вектор B разлагается по части системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, то он разлагается и по всей системе векторов.*

Предположим, для определенности, что часть системы совпадает с первыми k векторами $A_1, A_2, ..., A_k$, и пусть

$$B = l_1A_1 + l_2A_2 + ... + l_kA_k.$$

Так как $\theta = 0A_{k+1} + ... + 0A_n$, то

$$B = B + \theta = l_1A_1 + ... + l_kA_k + 0A_{k+1} + ... + 0A_n.$$

3. *Каждый n-мерный вектор $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ разлагается по диагональной системе n-мерных векторов*

$$E_1 = (1, 0, 0, ..., 0),$$
$$E_2 = (0, 1, 0, ..., 0),$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$E_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

с коэффициентами, которые равны координатам вектора B.

В самом деле,

$$b_1E_1 + b_2E_2 + ... + b_nE_n =$$

$$= b_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + ... + b_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} = B.$$

4. *Если вектор A разлагается по системе векторов $B_1, B_2, ..., B_m$, а каждый вектор этой системы разлагается по системе векторов $C_1, C_2, ..., C_n$, то вектор A разлагается по системе векторов $C_1, C_2, ..., C_n$.*

Из условия следует, что

$$A = k_1B_1 + k_2B_2 + ... + k_mB_m, \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} B_1 = p_1C_1 + p_2C_2 + ... + p_nC_n, \\ B_2 = q_1C_1 + q_2C_2 + ... + q_nC_n, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ B_m = t_1C_1 + t_2C_2 + ... + t_nC_n. \end{cases} \tag{2.6}$$

После подстановки соотношений (2.6) в равенство (2.5) получим

$$A = k_1(p_1C_1 + p_2C_2 + ... + p_nC_n) + k_2(q_1C_1 + q_2C_2 + ... + q_nC_n) + ... +$$
$$+ k_m(t_1C_1 + t_2C_2 + ... + t_nC_n) = (k_1p_1 + k_2q_1 + ... + k_mt_1)C_1 +$$
$$+ (k_1p_2 + k_2q_2 + ... + k_mt_2)C_2 + ... + (k_1p_n + k_2q_n + ... + k_mt_n)C_n,$$

т. е. вектор A разлагается по системе векторов $C_1, C_2, ..., C_n$.

Если вектор B и система $A_1, A_2, ..., A_n$ – произвольные векторы, то задача разложения вектора B по системе $A_1, A_2, ..., A_n$, как будет показано далее, сводится к решению системы линейных уравнений.

Векторная форма системы линейных уравнений

Используя введенные операции над векторами, запишем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.7}$$

в векторной форме.

Обозначим через A_1, A_2, ..., A_n столбцы коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, ..., x_n, а через B – столбец свободных членов системы уравнений, т. е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Теперь систему уравнений (2.7) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) называется **векторной формой системы линейных уравнений** (2.7). Уравнение (2.8) будем называть также системой линейных уравнений. Последовательность чисел k_1, k_2, ..., k_n является решением уравнения (2.8), если $A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n = B$ – верное векторное равенство.

Пусть n-мерный вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ является решением системы уравнений (2.7), т. е.

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n = b_1, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2n}k_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n = b_m. \end{cases} \tag{2.9}$$

Так как числовые соотношения (2.9) равносильны равенству векторов $A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n$ и B, то можно утверждать, что вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ является решением системы уравнений (2.7) тогда и только тогда, когда он является решением уравнения (2.8).

Теперь ясно, что для разложения вектора B по системе A_1, A_2, ..., A_n достаточно найти какое-нибудь решение системы линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B.$$

○ **Пример. Даны система векторов A_1, A_2, A_3, A_4 и вектор B:**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, разлагается ли вектор B по системе векторов A_1, A_2, A_3, A_4. Найдем общее решение системы линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = B.$$

Имеем

x_1	x_2	x_3	x_4		
$\boxed{1}$	0	−1	1	−1	(−2)
0	2	5	2	7	
2	2	3	4	5	
1	0	−1	1	−1	
0	$\boxed{2}$	5	2	7	
0	2	5	2	7	
1	0	−1	1	−1	
0	1	$^5/_2$	1	$^7/_2$	(−2)
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 = -1, \\ \quad x_2 + {}^5/_2 x_3 + x_4 = {}^7/_2. \end{cases}$$

Если свободные неизвестные x_3 и x_4 положить равными нулю, т. е. $x_3 = x_4 = 0$, то для разрешенных неизвестных x_1 и x_2 получим значения $x_1 = -1$, $x_2 = {}^7/_2$. Следовательно,

$$B = -A_1 + {}^7/_2 A_2 + 0A_3 + 0A_4.$$

Если же $x_3 = x_4 = 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и

$$B = -A_1 + 0A_2 + A_3 + A_4.$$ ●

Задачи.

1. Найти разложение вектора $B = (1, -2, 0{,}5)$ по диагональной системе.

2. Найти разложение вектора $B = (1, 0, 0)$ по системе $A_1 = (0, 1, 0)$; $A_2 = (0, 0, 1)$; $A_3 = (1, 1, 1)$.

3. Найти разложение вектора $B = (-3, 3, 1, 4)$ по векторам $A_1 = (-1, 1, 0, 2)$; $A_2 = (-3, 2, 1, 1)$; $A_3 = (-5, 3, 1, 2)$.

4. Разложить каждый вектор системы $A_1, A_2, ..., A_n$ по векторам этой системы.

5. Доказать, что если векторы B_1 и B_2 разлагаются по системе векторов $A_1, A_2, ..., A_n$, то векторы $B_1 + B_2$, kB_1, $l_1B_1 + l_2B_2$ также разлагаются по системе векторов $A_1, A_2, ..., A_n$.

6. Доказать, что ни один из векторов диагональной системы не разлагается по остальным векторам этой системы.

7. Вектор B разлагается по системе векторов $A_1, A_2, ..., A_m$. Доказать, что каждый вектор системы $B + A_1$, $B + A_2$, ..., $B + A_m$ разлагается по системе $A_1, A_2, ..., A_m$.

2.5. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ называется **линейно зависимой**, если система уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \theta \qquad (2.10)$$

имеет ненулевое решение. Если же система уравнений (2.10) не имеет ненулевых решений, то система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ называется **линейно независимой**.

Будем говорить, что набор чисел $k_1, k_2, ..., k_n$ является *ненулевым*, если хотя бы одно из чисел $k_1, k_2, ..., k_n$ отлично от нуля.

Существование ненулевого решения у системы (2.10) равносильно существованию такого ненулевого набора чисел $k_1, k_2, ..., k_n$, что $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = \theta$.

С другой стороны, отсутствие ненулевых решений у системы (2.10) равносильно тому, что из всякого соотношения вида $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = \theta$ следует $k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_n = 0$. Поэтому определения линейной зависимости и линейной независимости системы векторов можно сформулировать и так: система векторов $A_1, A_2, ..., A_k$ **линейно зависима**, если существует такой ненулевой набор чисел $k_1, k_2, ..., k_n$, при котором выполняется линейное соотношение

$$A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = \theta; \qquad (2.11)$$

если же из каждого соотношения вида (2.11) следует $k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_n = 0$, то система векторов называется **линейно независимой**.

Для линейно зависимых и линейно независимых систем векторов справедливы следующие утверждения.

1. *Система векторов, состоящая из одного вектора $A \neq \theta$, линейно независима.*

В самом деле, из любого соотношения $Ak = \theta$ и $A \neq \theta$ вытекает $k = 0$, что и означает линейную независимость рассматриваемой системы.

2. *Диагональная система векторов*

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots, E_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

линейно независима.

Запишем систему уравнений

$E_1x_1 + E_2x_2 + \dots + E_nx_n = \theta$

в виде таблицы

x_1	x_2	...	x_n	
1	0	...	0	0
0	1	...	0	0
...	...	...	...	...
0	0	...	1	0

(2.12)

Теперь ясно, что система уравнений (2.12) имеет единственное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, т. е. не имеет ненулевых решений, и поэтому диагональная система векторов линейно независима.

3. *Система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ линейно зависима, если хотя бы один из векторов системы разлагается по остальным векторам этой системы.*

Пусть какой-нибудь вектор, например A_1, разлагается по остальным векторам системы $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$A_1 = l_2A_2 + \dots + l_nA_n.$

Перепишем это разложение в виде

$A_1 - l_2A_2 - \dots - l_nA_n = \theta.$

Так как набор чисел $1, -l_2, \dots, -l_n$ – ненулевой, то система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ линейно зависима.

4. *Система m-мерных векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ линейно зависима, если $n > m$.*

Действительно, система уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = \theta \qquad (2.13)$$

содержит m уравнений и n неизвестных. Так как по условию $n > m$, то из теоремы 1.5 вытекает, что система уравнений (2.13) обладает ненулевым решением. Следовательно, система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ линейно зависима.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

1. Непосредственно из определений видно, что *каждая система векторов либо линейно зависима, либо линейно независима.*

2. *Если часть системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ линейно зависима, то и вся система $A_1, A_2, ..., A_n$ линейно зависима.*

Допустим, что часть, состоящая из векторов $A_1, A_2, ..., A_p$, $p < n$, линейно зависима, т. е.

$$k_1A_1 + ... + k_pA_p = \theta$$

и $k_1, ..., k_p$ – ненулевой набор чисел. Тогда соотношение

$$k_1A_1 + ... + k_pA_p + 0A_{p+1} + ... + 0A_n = \theta$$

выполняется с ненулевым набором чисел $k_1, ..., k_p, 0, ..., 0$, что и означает линейную зависимость системы $A_1, A_2, ..., A_n$.

3. *Если система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ линейно независима, то и любая ее часть линейно независима.*

Докажем это свойство от противного. Предположим, что некоторая часть данной системы линейно зависима. Тогда из свойства 2 следует, что и вся система линейно зависима. Однако это противоречит условию. Следовательно, любая часть данной системы линейно независима.

Теперь докажем полезную в дальнейшем теорему.

❑ **Теорема 2.4.** Справедливы следующие утверждения.

1. Если система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ линейно зависима, то хотя бы один из векторов этой системы разлагается по остальным ее векторам.

2. Если система векторов $A_1, ..., A_{n-1}, A_n$ линейно зависима, а ее часть $A_1, ..., A_{n-1}$ линейно независима, то вектор A_n разлагается по векторам $A_1, ..., A_{n-1}$.

Доказательство. 1. Из линейной зависимости системы $A_1, A_2, ..., A_n$ вытекает, что найдется такой ненулевой набор чисел $k_1, k_2, ..., k_n$, что $k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_nA_n = \theta$. Так как набор чисел $k_1, k_2, ..., k_n$ ненулевой, то хотя бы одно из чисел этого набора отлично от нуля, например $k_1 \neq 0$. Тогда $k_1A_1 = -k_2A_2 - ... -k_nA_n$. Отсюда $A_1 = -(k_2/k_1)A_2 - ... - (k_n/k_1)A_n$.

2. Так как система векторов $A_1, ..., A_{n-1}, A_n$ линейно зависима, существует такой ненулевой набор чисел $k_1, ..., k_{n-1}, k_n$, что

$$k_1A_1 + ... + k_{n-1}A_{n-1} + k_nA_n = \theta. \qquad (2.14)$$

Докажем, что $k_n \neq 0$. Допустим, что $k_n = 0$. В этом случае $k_nA_n = \theta$ и соотношение (2.14) можно переписать в виде

$$k_1A_1 + ... + k_{n-1}A_{n-1} = \theta. \qquad (2.15)$$

Теперь из линейной независимости системы векторов $A_1, ..., A_{n-1}$ вытекает, что $k_1 = ... = k_{n-1} = 0$. Итак, если $k_n = 0$, то $k_1 = ... = k_{n-1} = 0$, что невозможно, так как по условию $k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n$ – ненулевой набор. Следовательно, $k_n \neq 0$. Теперь из равенства 2.14 находим

$$A_n = -(k_1/k_n)A_1 - \ldots - (k_{n-1}/k_n)A_{n-1}. \blacksquare$$

◇ **Следствие.** Если вектор A_n не разлагается по линейно независимой системе $A_1, \ldots, A_{n-1}$, то $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ – линейно независимая система векторов.

Действительно, допустим, что $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ – линейно зависимая система векторов. Тогда из второго утверждения теоремы 2.4 получаем, что вектор A_n разлагается по векторам $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Однако это противоречит условию. Следовательно, $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$– линейно независимая система векторов. ◆

Замечание. В первой части теоремы 2.4 утверждается, что какой-то вектор линейно зависимой системы разлагается по ее остальным векторам, но неизвестно какой именно. Во второй части теоремы 2.4 приводится условие, которое гарантирует возможность разложения вектора линейно зависимой системы $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ по остальным ее векторам.

Геометрическая интерпретация линейной зависимости

❑ 1. Два ненулевых вектора *линейно зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку эквивалентных утверждений: векторы A_1, A_2 линейно зависимы $\Leftrightarrow$ один из векторов разлагается по другому (см. теорему 2.4) $\Leftrightarrow$ векторы A_1 и A_2 коллинеарны (см. теорему 2.3). ■

❑ 2. Три ненулевых трехмерных вектора A_1, A_2, A_3 *линейно зависимы* тогда и только тогда, когда они *компланарны*, т. е. лежат в одной плоскости.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A_1, A_2, A_3 – линейно зависимые векторы. Тогда один из векторов, например A_1, разлагается по остальным (см. теорему 2.4):

$$A_1 = k_2A_2 + k_3A_3. \tag{2.16}$$

Соотношение (2.16) означает, что A_1 есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах k_2A_2 и k_3A_3, т. е. векторы A_1, A_2, A_3 лежат в одной плоскости.

Достаточность. Если векторы A_1, A_2, A_3 лежат в одной плоскости, то возможны два случая: либо два из трех векторов A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой, либо векторы A_1, A_2, A_3 лежат на разных прямых.

В первом случае пусть, например, A_1 и A_2 лежат на одной прямой. Тогда векторы A_1, A_2 коллинеарны и, значит, линейно зависимы. Теперь из свойства 2 линейной зависимости следует, что A_1, A_2, A_3 – линейно зависимые векторы.

Во **втором** случае A_1 и A_2 не лежат на одной прямой. Проведем через конец вектора A_3 прямые, параллельные векторам A_1 и A_2 (рис. 2.1).

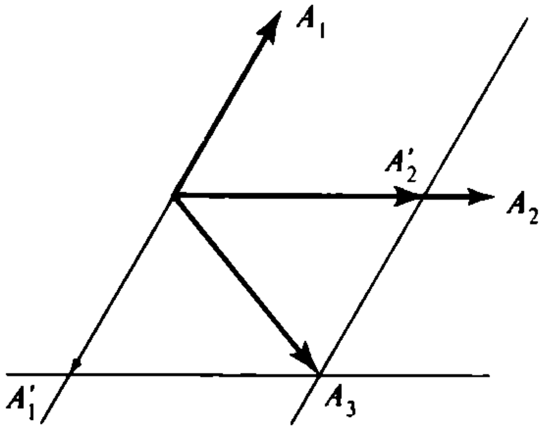


Рис. 2.1

Тогда вектор A_3 является диагональю параллелограмма, построенного на векторах A_1' и A_2', т. е. $A_3 = A_1' + A_2'$. Так как векторы A_1 и A_1', а также A_2 и A_2' коллинеарны, то $A_1' = k_1A_1$ и $A_2' = k_2A_2$. Теперь $A_3 = k_1A_1 + k_2A_2$ и, значит, система векторов A_1, A_2, A_3 линейно зависима.

Итак, в каждом из рассмотренных случаев доказано, что система векторов A_1, A_2, A_3 линейно зависима. ■

○ **Примеры.** Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой.

1. $A_1 = (3, 5, 1, 4)$, $A_2 = (-2, 1, -5, -7)$, $A_3 = (-1, -2, 0, -1)$.

Преобразуем систему линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \theta$ методом Гаусса (столбец свободных членов системы состоит только из нулей и не изменяется в процессе преобразований, поэтому его можно не записывать):

	x_1	x_2	x_3	
	3	−2	$\boxed{-1}$	
	5	1	−2	
	1	−5	0	
	4	−7	−1	
	−3	2	1	(2) (1)
	$\boxed{-1}$	5	0	
	1	−5	0	
	1	−5	0	
	0	−13	1	
(−1) (3)	1	−5	0	
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	

Общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} \quad -13x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение (5, 1, 13). Следовательно, векторы A_1, A_2, A_3 линейно зависимы.

2. $A_1 = (-20, -15, -4)$, $A_2 = (-7, -2, -4)$, $A_3 = (3, -1, -2)$.

Преобразуем систему линейных уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \theta$ методом Гаусса:

$$\begin{array}{c|c|c|c|cc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & & \\
\hline
 & -20 & -7 & 3 & & \\
 & -15 & -2 & -1 & & \\
 & -4 & -4 & \boxed{-2} & & \\
\hline
 & -26 & \boxed{-13} & 0 & & \\
 & -13 & 0 & 0 & & \\
 & 2 & 2 & 1 & (-3) & (1) \\
\hline
(-2) & 2 & 1 & 0 & & \\
 & \boxed{-13} & 0 & 0 & & \\
 & -2 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & & \\
 & 1 & 0 & 0 & (-2) & (2) \\
 & 0 & 0 & 1 & &
\end{array}$$

Общее решение исходной системы имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Эта система, а следовательно, и исходная система уравнений не имеют ненулевых решений. Таким образом, векторы A_1, A_2, A_3 линейно независимы. ●

Задачи.

1. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

а) $A_1 = (1, 1, -1, -2)$, $A_2 = (5, 8, -2, -3)$, $A_3 = (3, 9, 3, 8)$;

б) $A_1 = (1, 2, -1, 1)$, $A_2 = (-1, 1, 2, 5)$, $A_3 = (2, -1, 1, 8)$, $A_4 = (3, 2, 1, -5)$;

в) $A_1 = (2, 1, 1, 1, 1)$, $A_2 = (1, 3, 1, 1, 2)$, $A_3 = (1, 1, 4, 1, 3)$, $A_4 = (1, 1, 1, 5, 1)$.

2. Доказать, что четыре вектора $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$, $A_4 = (1, 1, 1)$ образуют линейно зависимую систему, но любые три из них линейно независимы.

3. Установить, что система векторов линейно зависима, если она содержит: а) два равных вектора; б) два пропорциональных вектора.

4. Дана линейно независимая система векторов A, B, C. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

а) $A + B$, $B + C$, $C + A$;

б) $A + B$, $C - B$, $C + A$.

5. Доказать, что два ненулевых n-мерных вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они не коллинеарны.

6. Доказать, что три ненулевых трехмерных вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они не компланарны, т. е. не лежат в одной плоскости.

2.6. Базисы системы векторов

Базисом системы векторов A_1, A_2, ..., A_n называется такая ее часть B_1, B_2, ..., B_r (каждый из векторов B_1, B_2, ..., B_r является одним из векторов A_1, A_2, ..., A_n), которая удовлетворяет следующим условиям:

1) B_1, B_2, ..., B_r – линейно независимая система векторов;

2) любой вектор системы A_1, A_2, ..., A_n разлагается по векторам B_1, B_2, ..., B_r.

Замечание. Так как каждый вектор B_1, B_2, ..., B_r разлагается по векторам B_1, B_2, ..., B_r (например, $B_1 = 1B_1 + 0B_2 + ... + 0B_r$), то условие 2 равносильно следующему условию: любой вектор системы A_1, A_2, ..., A_n, не входящий в систему B_1, B_2, ..., B_r, разлагается по векторам B_1, B_2, ..., B_r.

❑ **Теорема 2.5.** Если диагональная система является частью системы m-мерных векторов A_1, ..., A_n, то диагональная система является базисом системы векторов A_1, ..., A_n.

Доказательство. Диагональная система векторов линейно независима (см. утверждение 2 из параграфа 2.5), и каждый m-мерный вектор разлагается по диагональной системе m-мерных векторов (см. утверждение 3 из параграфа 2.4). Этим установлено, что диагональная часть удовлетворяет обоим условиям из определения базиса системы векторов. ■

Из теоремы 2.5 следует, что некоторые системы векторов обладают базисом. С другой стороны, система векторов, содержащая только нулевые векторы, базисом не обладает, так как любая ее часть будет линейно зависимой. Далее будет доказано, что каждая система векторов, содержащая ненулевой вектор, обладает базисом.

❑ **Лемма.** Если линейно независимая часть C_1, ..., C_k системы A_1, ..., A_n не является ее базисом, то среди векторов A_1, ..., A_n найдется такой вектор C_{k+1}, что C_1, ..., C_k, C_{k+1} – линейно независимая система.

Доказательство. Если каждый вектор системы A_1, ..., A_n разлагается по C_1, ..., C_k, то отсюда и из линейной независимости C_1, ..., C_k

вытекает, что $C_1, \dots, C_k$ – базис системы $A_1, \dots, A_n$. Так как по условию $C_1, \dots, C_k$ не является базисом системы $A_1, \dots, A_n$, то среди векторов $A_1, \dots, A_n$ найдется такой вектор C_{k+1}, который не разлагается по $C_1, \dots, C_k$. Теперь из следствия к теореме 2.4 вытекает, что $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}$ – линейно независимая система. ■

❑ **Теорема 2.6.** Каждую линейно независимую часть $C_1, \dots, C_k$ системы векторов $A_1, \dots, A_n$ можно дополнить до базиса этой системы.

Доказательство. Если $C_1, \dots, C_k$ не является базисом системы $A_1, \dots, A_n$, то из леммы следует, что можно построить линейно независимую часть $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}$.

Если и новая часть не является базисом, то из леммы следует, что можно построить линейно независимую часть $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}, C_{k+2}$.

Так как система $A_1, \dots, A_n$ содержит конечное число векторов, то указанный процесс расширения части $C_1, \dots, C_k$ остановится через l шагов, $l \leqslant n - k$, и будет получена система $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}, \dots, C_{k+l}$, которая является базисом системы векторов $A_1, \dots, A_n$ (если $C_1, \dots, C_{k+l}$ не является базисом, то согласно лемме можно построить линейно независимую часть $C_1, \dots, C_{k+l}, C_{k+l+1}$, что противоречит остановке процесса). ■

✧ **Следствие.** Если система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ содержит ненулевой вектор, то она имеет базис.

Доказательство. Допустим, что $A_1 \neq \theta$, тогда часть системы $A_1, A_2, \dots, A_n$, состоящая из одного вектора A_1, линейно независима (см. утверждение 1 из параграфа 2.5). Теперь из теоремы 2.6 следует, что вектор A_1 можно дополнить до базиса системы $A_1, A_2, \dots, A_n$. ✦

В определении базиса системы векторов сказано, что каждый ее вектор разлагается по базису. Следующая теорема уточняет этот факт.

❑ **Теорема 2.7.** Каждый вектор системы $A_1, A_2, \dots, A_n$ *единственным* образом разлагается по векторам ее базиса.

Доказательство. Докажем теорему от противного. Пусть какой-то вектор C системы $A_1, A_2, \dots, A_n$ разлагается по ее базису $B_1, B_2, \dots, B_r$ двумя различными способами:

$$C = k_1B_1 + k_2B_2 + \dots + k_rB_r, \tag{2.17}$$

$$C = l_1B_1 + l_2B_2 + \dots + l_rB_r. \tag{2.18}$$

Тогда

$$\theta = C - C = (k_1 - l_1)B_1 + (k_2 - l_2)B_2 + \dots + (k_r - l_r)B_r. \tag{2.19}$$

Так как система $B_1, B_2, \dots, B_r$ – базис и, значит, линейно независима, то из соотношения (2.19) вытекает

$$k_1 - l_1 = 0,\ k_2 - l_2 = 0,\ \dots,\ k_r - l_r = 0$$

или

$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \ldots,\ k_r = l_r.$$

Однако это противоречит тому, что разложения (2.17) и (2.18) различны. ■

Построение базиса векторов

При отыскании базиса системы векторов ключевой является следующая теорема.

❑ **Теорема 2.8.** Если система уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta \tag{2.20}$$

является разрешенной, то векторы-коэффициенты при неизвестных, образующих набор разрешенных неизвестных, совпадают с диагональной системой векторов.

Доказательство. Пусть набор разрешенных неизвестных системы (2.20) содержит r неизвестных. Покажем, что векторы-коэффициенты при этих неизвестных образуют систему r-мерных векторов.

Так как каждое уравнение содержит только одно разрешенное неизвестное из набора разрешенных неизвестных, то система уравнений (2.20) состоит из r уравнений и, значит, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – r-мерные векторы.

Все координаты вектора-коэффициента при разрешенном неизвестном равны нулю, кроме одной, которая равна единице, т. е. этот вектор принадлежит диагональной системе. Векторы-коэффициенты при разных разрешенных неизвестных не равны между собой, так как их координаты, равные единице, стоят на разных местах.

Диагональная система r-мерных векторов содержит r векторов. С другой стороны, число векторов-коэффициентов при разрешенных неизвестных равно r, кроме того, все эти векторы-коэффициенты различны и являются частью диагональной системы. Следовательно, векторы-коэффициенты при разрешенных неизвестных совпадают с диагональной системой. ■

Построение базиса системы векторов основано на следующей теореме, доказательство которой опирается на теорему 2.8.

❑ **Теорема 2.9.** Пусть дана система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Рассмотрим систему уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta \tag{2.21}$$

и ее общее решение

$$A'_1x_1 + A'_2x_2 + \ldots + A'_nx_n = \theta. \tag{2.22}$$

Тогда:

1) векторы, соответствующие диагональной части системы $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, образуют базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

2) вектор A_j разлагается по найденному в первом пункте базису с теми же коэффициентами, с которыми вектор A'_j разлагается по диагональной части системы $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

Доказательство. Из теоремы 2.8 следует, что система $A'_1, A'_2, ..., A'_n$ в качестве части содержит диагональную систему. Пусть $A'_1, ..., A'_r$ – диагональная часть системы $A'_1, ..., A'_r, ..., A'_n$. Покажем, что $A_1, ..., A_r$ удовлетворяет условиям определения базиса системы векторов.

Чтобы доказать линейную независимость системы $A_1, ..., A_r$, рассмотрим равенство

$$k_1A_1 + ... + k_rA_r = \theta, \tag{2.23}$$

которое перепишем в виде

$$k_1A_1 + ... + k_rA_r + 0A_{r+1} + ... + 0A_n = \theta. \tag{2.24}$$

Так как системы уравнений (2.21) и (2.22) равносильны, то из равенства (2.24) следует

$$k_1A'_1 + ... + k_rA'_r + 0A'_{r+1} + ... + 0A'_n = \theta$$

или

$$k_1A'_1 + ... + k_rA'_r = \theta. \tag{2.25}$$

Система $A'_1, ..., A'_r$ является диагональной и, значит, линейно независима, поэтому из равенства (2.25) вытекает $k_1 = ... = k_r = 0$. Итак, из каждого равенства (2.23) вытекает $k_1 = ... = k_r = 0$, т. е. $A_1, ..., A_r$ – линейно независимая система векторов.

Пусть теперь A_j – вектор, не принадлежащий части $A_1, ..., A_r$. Покажем, что вектор A_j разлагается по системе $A_1, ..., A_r$. Соответствующий вектор A'_j разлагается по диагональной системе $A'_1, ..., A'_r$:

$$A'_j = l_1A'_1 + ... + l_rA'_r. \tag{2.26}$$

Перепишем разложение (2.26) в виде

$$l_1A'_1 + ... + l_rA'_r + 0A'_{r+1} + ... + (-1)A'_j + ... + 0A'_n = \theta. \tag{2.27}$$

Так как системы уравнений (2.21) и (2.22) равносильны, то из соотношения (2.27) вытекает равенство

$$l_1A_1 + ... + l_rA_r + 0A_{r+1} + ... + (-1)A_j + ... + 0A_n = \theta,$$

которое можно переписать в виде

$$A_j = l_1A_1 + ... + l_rA_r. \tag{2.28}$$

Второе утверждение теоремы вытекает из равенства (2.26) и (2.28). ■

Доказанная теорема позволяет сформулировать алгоритм построения базиса данной системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$:

1. Выписать систему уравнений $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \theta$ и методом Гаусса найти ее общее решение $A'_1x_1 + A'_2x_2 + ... + A'_nx_n = \theta$.

2. Найти диагональную часть системы векторов $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

3. Векторы системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, соответствующие диагональной части системы $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, образуют базис данной системы векторов.

○ **Пример.** Найти базис системы векторов

$$A_1 = (5, 2, -3, 1),\ A_2 = (4, 1, -2, 3),\ A_3 = (1, 1, -1, -2),$$
$$A_4 = (3, 4, -1, 2),\ A_5 = (13, 8, -7, 4)$$

и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = \theta \tag{2.29}$$

и методом Гаусса найдем ее общее решение:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	5	4	$\boxed{1}$	3	13	(−1) (1) (2)
	2	1	1	4	8	
	−3	−2	−1	−1	−7	
	1	3	−2	2	4	
	5	4	1	3	13	
	−3	−3	0	1	−5	
	$\boxed{2}$	2	0	2	6	
	11	11	0	8	30	
	0	−1	1	−2	−2	
	0	0	0	$\boxed{4}$	4	
	1	1	0	1	3	(−5) (3) (−11)
	0	0	0	−3	−3	
	0	−1	1	0	0	
(3) (−1) (2)	0	0	0	1	1	
	1	1	0	0	2	
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	

Общее решение системы (2.29) имеет вид

$$A'_1x_1 + A'_2x_2 + A'_3x_3 + A'_4x_4 + A'_5x_5 = \theta, \tag{2.30}$$

где

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A'_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и A'_1, A'_3, A'_4 образуют диагональную систему векторов. Следовательно, векторы A_1, A_3, A_4 являются базисом системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Разложим теперь векторы A_2 и A_5 по базису A_1, A_3, A_4. Для этого сначала разложим соответствующие векторы A'_2 и A'_5 по диагональной системе A'_1, A'_3, A'_4, имея в виду, что коэффициентами разложения вектора по диагональной системе являются его координаты:

$$A'_2 = A'_1 - A'_3 + 0A'_4,$$

$$A'_5 = 2A'_1 + 0A'_3 + A'_4.$$

Векторы A_2 и A_5 разлагаются по базису A_1, A_3, A_4 с теми же коэффициентами, что и векторы A'_2 и A'_5 по диагональной системе A'_1, A'_3, A'_4:

$$A_2 = A_1 - A_3 + 0A_4,$$

$$A_5 = 2A_1 + 0A_3 + A_4. \bullet$$

Задачи.

1. Найти базис системы векторов и векторы, не входящие в базис, разложить по базису:

а) $A_1 = (1, 1, 2)$, $A_2 = (3, 1, 2)$, $A_3 = (1, 2, 1)$, $A_4 = (2, 1, 2)$;
б) $A_1 = (1, 1, 1)$, $A_2 = (-3, -5, 5)$, $A_3 = (3, 4, -1)$, $A_4 = (1, -1, 4)$;
в) $A_1 = (1, 1, 2)$, $A_2 = (0, 1, 2)$, $A_3 = (2, 1, -4)$, $A_4 = (1, 1, 0)$;
г) $A_1 = (1, 0, 1, 0)$, $A_2 = (-2, 1, 3, -7)$, $A_3 = (3, -1, 0, 3)$, $A_4 = (-4, 1, -3, 1)$.

2. Найти базис системы векторов $A_1 = (1, 1, 4, 2)$, $A_2 = (1, -1, -2, 4)$, $A_3 = (0, 2, 6, -2)$, $A_4 = (-3, -1, 3, 4)$, $A_5 = (-1, 0, -4, -7)$, содержащий вектор A_5, и все векторы разложить по базису.

3. Найти базис системы векторов $A_1 = (1, 3, 0, 5)$, $A_2 = (1, 2, 0, 4)$, $A_3 = (1, 1, 2, 3)$, $A_4 = (1, 0, -2, 2)$, $A_5 = (1, -3, 6, 1)$, содержащий векторы A_2 и A_3, и все векторы разложить по базису.

4. Доказать, что линейно зависимая система ненулевых векторов содержит два различных базиса.

5. Установить, что если система ненулевых векторов имеет только один базис, то она линейно независима.

6. Вектор A_1 разлагается по остальным векторам системы A_1, A_2, ..., A_n, которая не содержит нулевых векторов. Доказать, что система A_1, A_2, ..., A_n обладает базисом, который не содержит вектора A_1.

2.7. Ранг системы векторов

Рассмотрим систему векторов

$$A_1 = (1, 0, 1, 0),\ A_2 = (1, 1, 1, 1),\ A_3 = (0, 1, 0, 1).$$

Каждые два вектора этой системы являются ее базисом, что легко установить, например, методом Гаусса. Этот пример показывает, что, хотя система векторов может иметь несколько различных базисов, число векторов в каждом базисе одно и то же. Прежде чем установить этот факт в общем случае, докажем следующую теорему.

□ **Теорема 2.10** (теорема Штейница). Если каждый вектор системы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ разлагается по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $n > m$, то система векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ линейно зависима.

Доказательство. По условию каждый вектор системы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ разлагается по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_m$:

$$\begin{cases} B_1 = p_1A_1 + p_2A_2 + \ldots + p_mA_m, \\ B_2 = q_1A_1 + q_2A_2 + \ldots + q_mA_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m. \end{cases} \tag{2.31}$$

Для доказательства линейной зависимости системы векторов B_1, $B_2, \ldots, B_n$ установим, что система уравнений

$$B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_nx_n = \theta \tag{2.32}$$

имеет ненулевое решение.

Преобразуем левую часть системы уравнений (2.32), используя соотношения (2.31):

$$\begin{aligned} &B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_nx_n = (p_1A_1 + p_2A_2 + \ldots + p_mA_m)x_1 + \\ &+ (q_1A_1 + q_2A_2 + \ldots + q_mA_m)x_2 + \ldots + (t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m)x_n = \\ &= (p_1x_1 + q_1x_2 + \ldots + t_1x_n)A_1 + (p_2x_1 + q_2x_2 + \ldots + t_2x_n)A_2 + \ldots + \\ &+ (p_mx_1 + q_mx_2 + \ldots + t_mx_n)A_m. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Из равенства (2.33) следует, что вектор $B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_nx_n$ равен θ, если все коэффициенты при векторах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в (2.33) равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} p_1x_1 + q_1x_2 + \ldots + t_1x_n = 0, \\ p_2x_1 + q_2x_2 + \ldots + t_2x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_mx_1 + q_mx_2 + \ldots + t_mx_n = 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Заметим, что всякое решение системы (2.34) обращает $B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_nx_n$ в вектор θ, т. е. является решением системы (2.32).

Система уравнений (2.34) содержит n неизвестных и m уравнений. По условию теоремы $n > m$. Теперь из теоремы 1.5 получаем, что система уравнений (2.34) имеет ненулевое решение, которое является также ненулевым решением системы уравнений (2.32). ■

◇ **Следствие.** Если система векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ линейно независима и каждый вектор этой системы разлагается по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то $n \leqslant m$.

Действительно, если $n > m$, то из теоремы 2.10 вытекает линейная зависимость системы векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Возникает противоречие. Следовательно, $n \leqslant m$. ✦

❑ **Теорема 2.11.** Все базисы одной и той же системы векторов содержат одинаковое количество векторов.

Доказательство. Пусть $B_1, \ldots, B_p$ и $C_1, \ldots, C_q$ – два базиса системы $A_1, \ldots, A_n$. Покажем, что $p = q$.

Система $B_1, \ldots, B_p$ линейно независима, так как она является базисом. Далее, каждый вектор системы $A_1, \ldots, A_n$, а значит и векторы $B_1, \ldots, B_p$, разлагается по базису $C_1, \ldots, C_q$. Теперь из следствия к теореме 2.10 вытекает, что

$$p \leqslant q. \tag{2.35}$$

С другой стороны, $C_1, \ldots, C_q$ – линейно независимая система, каждый вектор которой разлагается по векторам $B_1, \ldots, B_p$. Из следствия к теореме 2.10 получаем, что

$$q \leqslant p. \tag{2.36}$$

Из сопоставления соотношений (2.35) и (2.36) следует, что $p = q$. ■

Рангом системы векторов называется число векторов в любом ее базисе. Ранг системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будем обозначать символом $r(A_1, A_2, \ldots, A_m)$.

Отметим простейшие свойства ранга системы векторов:

1. *Ранг системы векторов не превосходит числа векторов в системе.*

Действительно, ранг системы векторов равен количеству векторов в базисе системы векторов, которое не превосходит числа векторов в системе, так как базис – это часть системы векторов.

2. *Если система векторов линейно зависима, то ее ранг строго меньше количества векторов в системе.*

Так как базис – линейно независимая часть системы, то базис линейно зависимой системы векторов не может совпадать со всей системой. Отсюда вытекает утверждение свойства 2.

3. *Если система векторов линейно независима, то ее ранг равен количеству векторов в системе.*

Это утверждение справедливо, так как базис линейно независимой системы векторов совпадает со всей системой.

В тех случаях, когда нужно сравнить ранги двух систем векторов или установить равенство рангов этих систем, очень часто используется следующая теорема.

❑ **Теорема 2.12.** Если каждый вектор системы

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \tag{2.37}$$

разлагается по векторам системы

$$B_1, B_2, \ldots, B_l \qquad (2.38)$$

то $r(A_1, A_2, \ldots, A_m) \leqslant r(B_1, B_2, \ldots, B_l)$.

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_r$ и $B_1, \ldots, B_s$ – базисы соответственно систем векторов (2.37) и (2.38). Так как $A_1, \ldots, A_r$ – часть системы векторов (2.37), то из условия теоремы следует, что вектор A_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, разлагается по системе векторов (2.38). Каждый вектор системы (2.38) разлагается по базису $B_1, \ldots, B_s$ этой системы. Теперь из утверждения 4 в параграфе 2.4 следует, что вектор A_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, разлагается по векторам $B_1, \ldots, B_s$. Итак, каждый вектор линейно независимой системы $A_1, \ldots, A_r$ разлагается по векторам $B_1, \ldots, B_s$. Применяя следствие из теоремы 2.10, получаем, что $r \leqslant s$ и, значит, $r(A_1, \ldots, A_m) \leqslant r(B_1, \ldots, B_l)$. ■

✧ **Следствие 1.** Если каждый вектор системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ разлагается по векторам $B_1, B_2, \ldots, B_l$ и наоборот, то $r(A_1, A_2, \ldots, A_m) = r(B_1, B_2, \ldots, B_l)$. ✦

✧ **Следствие 2.** Ранг системы векторов

$$A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_m \qquad (2.39)$$

не изменится, если к некоторому вектору этой системы прибавить другой вектор, умноженный на число k.

Действительно, если к вектору A_i прибавить вектор A_j, умноженный на число k, получим систему векторов

$$A_1, \ldots, A_i + kA_j, \ldots, A_j, \ldots, A_m, \qquad (2.40)$$

каждый вектор которой разлагается по векторам системы (2.39) и наоборот. Теперь из следствия 1 вытекает равенство рангов систем (2.39) и (2.40). ✦

Пусть дана система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и ее ранг равен r. Тогда любой базис этой системы содержит r векторов. Рассмотрим какую-нибудь часть этой системы, содержащую столько векторов, каков ранг системы. Следующая теорема утверждает, что эта часть будет базисом, если она линейно независима.

❑ **Теорема 2.13.** Пусть ранг системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ равен r. Тогда каждая линейно независимая часть этой системы, состоящая из r векторов, является базисом.

Доказательство. Докажем теорему от противного. Если линейно независимая часть системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$, состоящая из r векторов, не является базисом, то, согласно теореме 2.6, ее можно дополнить до базиса. Этот базис будет содержать более r векторов, что невозможно, так как ранг системы равен r. Возникает противоречие. Следовательно, данная линейно независимая часть из r векторов является базисом. ■

Замечание. Как следует из теоремы 2.13, у системы $A_1, \ldots, A_n$ столько различных базисов, сколько она содержит различных линейно независимых частей из r векторов. Известно, что из n векторов можно составить различных частей, содержащих r векторов, ровно

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}.$$

Так как, вообще говоря, не каждая часть системы, содержащая r векторов, линейно независима, то число различных базисов системы $A_1, \ldots, A_n$, ранг которой равен r, не превосходит числа C_n^r.

При помощи метода Гаусса можно найти все базисы системы векторов. Это возможно, так как в результате жорданова преобразования разрешенной системы уравнений с *разрешающим элементом, который не является коэффициентом при разрешенном неизвестном*, получается разрешенная система с *новым* набором разрешенных неизвестных. Этот новый набор разрешенных неизвестных определяет, согласно теоремам 2.8 и 2.9, новый базис.

○ **Пример.** Найти базис системы векторов $A_1 = (1, 1, 1)$, $A_2 = (1, 2, 1)$, $A_3 = (1, 0, 1)$, $A_4 = (1, 2, 3)$, а затем перейти к другому базису.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = \theta$$

и методом Гаусса найдем ее общее решение

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \to \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array} \to \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad (2.41)$$

Неизвестные x_1, x_3, x_4 образуют набор разрешенных неизвестных общего решения (2.41), записанного в табличной форме. Следовательно, A_1, A_3, A_4 – базис системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4.

Перейдем к другому базису системы A_1, A_2, A_3, A_4. Для этого нужно выбрать разрешающий элемент в таблице (2.41), который не является коэффициентом при разрешенном неизвестном. Такой коэффициент в таблице (2.41) можно выбрать только при неизвестном x_2. Выберем в качестве разрешающего элемента число (-1) и выполним с этим разрешающим элементом жорданово преобразование системы (2.41):

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	−1	0
1	0	2	0
0	0	0	1

(2.42)

В новом общем решении (2.42) набор разрешенных неизвестных составляют x_1, x_2, x_4. Следовательно, A_1, A_2, A_4 – базис системы A_1, A_2, A_3, A_4, который не совпадает с базисом A_1, A_3, A_4. ●

Задачи.

1. Дана система векторов:

$A_1 = (1, 1, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 1, 0)$, $A_3 = (1, 0, 0, 1)$, $A_4 = (0, 1, 1, 0)$, $A_5 = (0, 1, 0, 1)$, $A_6 = (0, 0, 1, 1)$.

Найти ранг и базис системы векторов, содержащий векторы A_1 и A_2, а затем перейти к другому базису, у которого единственными общими векторами с первым базисом являются векторы A_1 и A_2.

2. Найти все базисы системы векторов

$A_1 = (1, 1, 0)$, $A_2 = (1, 0, 1)$, $A_3 = (0, -1, 1)$, $A_4 = (1, -1, 1)$.

3. Доказать, что если в системе векторов вычеркнуть вектор, который разлагается по остальным векторам системы, то ее ранг не изменится.

(Указание: воспользоваться теоремой 2.12.)

4. Установить, что следующие преобразования не изменяют ранга системы векторов:

а) вычеркивание нулевого вектора;

б) умножение какого-либо вектора системы на отличное от нуля число.

5. Доказать, что ранг системы $A_1 + B_1, \ldots, A_n + B_n$ не превосходит ранга системы векторов $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$.

6. Найти ранг следующих систем векторов:

а) $A_1 = (2, 1, 1)$, $A_2 = (2, 2, -2)$, $A_3 = (1, 0, 2)$;

б) $A_1 = (1, 1, 2)$, $A_2 = (1, 2, -1)$, $A_3 = (2, 2, 1)$;

в) $A_1 = (1, 2, 3, 1)$, $A_2 = (2, 0, 2, 0)$, $A_3 = (3, 2, 5, 1)$, $A_4 = (1, 0, 1, -2)$;

г) $A_1 = (0, -2, -1, 4)$, $A_2 = (2, 0, -3, 1)$, $A_3 = (1, 3, 0, -2)$, $A_4 = (-4, -1, 2, 0)$.

2.8. Базис и размерность n-мерного пространства

Совокупность всех n-мерных векторов, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется **n-мерным координатным пространством $\mathbf{R}^n$**.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется система векторов:

$$\begin{aligned} &E_1 = (1, 0, ..., 0), \\ &E_2 = (0, 1, ..., 0), \\ &. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ &E_n = (0, 0, ..., 1), \end{aligned} \tag{2.43}$$

которая называется *диагональной*. Эта система, во-первых, линейно независима (см. утверждение 2 в параграфе 2.5) и, во-вторых, каждый n-мерный вектор разлагается по векторам диагональной системы (см. утверждение 3 из параграфа 2.4).

Система n-мерных линейно независимых векторов называется **базисом пространства $\mathbf{R}^n$**, если каждый вектор из пространства $\mathbf{R}^n$ разлагается по векторам этой системы.

Одним из базисов пространства $\mathbf{R}^n$ является система E_1, E_2, ..., E_n. Любой другой *базис пространства* $\mathbf{R}^n$ также *состоит из n векторов*. В самом деле, если

$$A_1, A_2, ..., A_m \tag{2.44}$$

– произвольный базис пространства $\mathbf{R}^n$, то системы векторов (2.43) и (2.44) являются базисами системы векторов

$$E_1, E_2, ..., E_n, A_1, A_2, ..., A_m$$

и поэтому, в силу теоремы 2.11, $m = n$. Ясно, что каждый вектор пространства $\mathbf{R}^n$ единственным образом разлагается по векторам базиса (см. теорему 2.7).

Размерностью пространства $\mathbf{R}^n$ называется число векторов в любом его базисе. Это определение соответствует нашей терминологии и позволяет утверждать: n-мерное координатное пространство n-мерно.

Отметим также, что *система A_1, A_2, ..., A_n, содержащая n линейно независимых векторов, образует базис пространства* $\mathbf{R}^n$. Действительно, если к системе A_1, A_2, ..., A_n присоединить произвольный n-мерный вектор B, то получится линейно зависимая система A_1, A_2, ..., A_n, B (см. утверждение 4 в параграфе 2.5). Следовательно, согласно теореме 2.4 вектор B разлагается по векторам A_1, A_2, ..., A_n.

Наконец, *каждую линейно независимую систему n-мерных векторов A_1, A_2, ..., A_k можно дополнить до базиса пространства* $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим систему векторов

$$A_1, A_2, ..., A_k, E_1, E_2, ..., E_n, \tag{2.45}$$

ранг которой равен n. Из теоремы 2.6 следует, что систему векторов A_1, A_2, ..., A_k можно дополнить до базиса системы векторов (2.45). Так как ранг системы векторов (2.45) равен n, этот базис состоит из n векторов и поэтому является базисом пространства $\mathbf{R}^n$.

2.9. Ортогональные системы векторов

Свойства ортогональных систем векторов

Векторы A и B называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. Ясно, что нулевой вектор ортогонален каждому вектору. Ненулевые векторы A и B ортогональны, если угол между ними равен 90°.

Система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ называется **ортогональной**, если любые два ее вектора A_i и A_j, $i \neq j$, ортогональны. Систему, состоящую из одного вектора, также будем считать ортогональной.

○ **Пример.** Выяснить, будет ли ортогональной система векторов

$A_1 = (1, 1, 2, 3)$, $A_2 = (1, 0, 1, -1)$, $A_3 = (1, -4, 0, 1)$.

Так как

$$A_1A_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3\,(-1) = 0,$$

$$A_1A_3 = 1 \cdot 1 + 1\,(-4) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0,$$

$$A_2A_3 = 1 \cdot 1 + 0\,(-4) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0,$$

то данная система векторов ортогональна. ●

Важным примером ортогональной системы является диагональная система векторов.

Система векторов $A_1, A_2, ..., A_m$ называется **ортонормированной**, если она ортогональна и длина каждого вектора системы равна единице. Итак, для ортонормированной системы $A_1, A_2, ..., A_m$

$$A_iA_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j. \end{cases}$$

Если $A_1, A_2, ..., A_m$ – ортогональная система ненулевых векторов, то $A_1/|A_1|, A_2/|A_2|, ..., A_m/|A_m|$ – ортонормированная система.

Отметим несколько свойств ортогональных систем.

1. Если вектор B разлагается по ортогональной системе $A_1, A_2, ..., A_m$ ненулевых векторов: $B = k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_mA_m$, то $k_i = BA_i/(A_iA_i)$, $i = 1, 2, ..., m$.

Действительно, $BA_i = (k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_mA_m)A_i$ или

$BA_i = k_1A_1A_i + k_2A_2A_i + ... + k_mA_mA_i$.

Используя ортогональность системы $A_1, A_2, ..., A_m$, из последнего равенства находим $BA_i = k_iA_iA_i$. Так как $A_i \neq \theta$, то $A_iA_i \neq 0$ и $k_i = BA_i/(A_iA_i)$.

2. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Рассмотрим произвольное разложение вектора θ по системе $A_1, A_2, ..., A_m$:

$$\theta = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m.$$

Из первого свойства ортогональных систем вытекает, что $k_i = \theta A_i/(A_iA_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует линейная независимость системы $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

3. Если даны разложения векторов B и C по ортонормированной системе векторов $A_1, \ldots, A_m$

$$B = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m,$$

$$C = l_1A_1 + l_2A_2 + \ldots + l_mA_m,$$

то скалярное произведение векторов B и C может быть найдено по формуле

$$BC = k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots + k_ml_m.$$

Используя

$$A_iA_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} BC &= (k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m)(l_1A_1 + l_2A_2 + \ldots + l_mA_m) = \\ &= k_1l_1A_1A_1 + k_1l_2A_1A_2 + \ldots + k_1l_mA_1A_m + k_2l_1A_2A_1 + \\ &+ k_2l_2A_2A_2 + \ldots + k_2l_mA_2A_m + \ldots + k_ml_1A_mA_1 + k_ml_2A_mA_2 + \\ &+ \ldots + k_ml_mA_mA_m = k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots + k_ml_m. \end{aligned}$$

Ортогонализация системы векторов

Покажем, что каждую линейно независимую систему векторов можно преобразовать в ортогональную систему. В основе построения ортогональной системы лежит понятие ортогональной составляющей вектора относительно ортогональной системы векторов.

Вектор $A^0 = A - \frac{AB_1}{B_1B_1}B_1 - \ldots - \frac{AB_m}{B_mB_m}B_m$ называется **ортогональной составляющей** вектора A относительно ортогональной системы ненулевых векторов $B_1, \ldots, B_m$.

Ортогональная составляющая A^0 вектора A относительно ортогональной системы ненулевых векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$ ортогональна каждому вектору этой системы.

Действительно,

$$A^0B_i = \left(A - \frac{AB_1}{B_1B_1}B_1 - \ldots - \frac{AB_m}{B_mB_m}B_m\right)B_i =$$

$$= AB_i - \frac{AB_1}{B_1B_1}B_1B_i - \ldots - \frac{AB_m}{B_mB_m}B_mB_i = AB_i - AB_i = 0,$$

так как $B_kB_i = 0$ при $k \neq i$.

○ **Пример.** Найти ортогональную составляющую вектора $A = (1, 1, 1, -1)$ относительно ортогональной системы $B_1 = (1, 0, 1, 0)$, $B_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $B_3 = (1, 1, -1, 1)$.

Имеем

$$A^\circ = A - \frac{AB_1}{B_1B_1}B_1 - \frac{AB_2}{B_2B_2}B_2 - \frac{AB_3}{B_3B_3}B_3 =$$
$$= (1, 1, 1, -1) - (1, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, -1). \bullet$$

Описание процесса ортогонализации линейно независимой системы векторов начнем с доказательства следующей леммы.

❑ **Лемма** (ортогонализации). Дана линейно независимая система векторов

$$B_1, \ldots, B_l, A_{l+1}, \ldots, A_m, \; l \geqslant 1, \quad (2.46)$$

часть которой $B_1, \ldots, B_l$ ортогональна. Обозначим через B_{l+1} ортогональную составляющую вектора A_{l+1} относительно ортогональной системы $B_1, \ldots, B_l$.

Тогда:

1) система векторов

$$B_1, \ldots, B_l, B_{l+1}, A_{l+2}, \ldots, A_m \quad (2.47)$$

эквивалентна[1] системе (2.46);

2) система векторов (2.47) линейно независима, а ее часть $B_1, \ldots, B_l$, B_{l+1} ортогональна.

Доказательство. 1. Каждый вектор системы (2.46), кроме A_{l+1}, является вектором системы (2.47) и, следовательно, разлагается по системе векторов (2.47). Из определения ортогональной составляющей следует, что $B_{l+1} = A_{l+1} - k_1B_1 - \ldots - k_lB_l$. Отсюда получаем, что вектор A_{l+1} разлагается по системе $B_1, \ldots, B_l, B_{l+1}$ и, значит, по системе (2.47). Аналогично устанавливается, что векторы системы (2.47) разлагаются по векторам системы (2.46).

2. Доказательство линейной независимости системы (2.47) проведем от противного. Если предположить, что система (2.47) линейно зависима, то ее ранг меньше m. Теперь из следствия 1 теоремы 2.12

[1] Две системы векторов называются *эквивалентными*, если векторы одной системы разлагаются по векторам другой системы и наоборот.

вытекает, что ранг системы (2.46) тоже меньше m. Однако это противоречит линейной независимости системы (2.46). Таким образом, установлено, что система (2.47) линейно независима.

Так как B_{r+1} – ортогональная составляющая A_{r+1} относительно $B_1, \ldots, B_r$, то, как было показано ранее, вектор B_{r+1} ортогонален каждому вектору системы $B_1, \ldots, B_r$. Отсюда, в силу ортогональности системы $B_1, \ldots, B_r$, вытекает ортогональность системы векторов $B_1, \ldots, B_r, B_{r+1}$. ■

❑ Используя понятие ортогональной составляющей, опишем процесс превращения линейно независимой системы $A_1, \ldots, A_m$ в ортогональную систему $B_1, \ldots, B_m$ ненулевых векторов, который называется **ортогонализацией** системы $A_1, \ldots, A_m$.

Этот процесс состоит из m шагов (m – число векторов в исходной системе $A_1, \ldots, A_m$).

1-й шаг. Полагаем $B_1 = A_1$ и получаем систему

$$B_1, A_2, \ldots, A_m. \tag{2.48}$$

2-й шаг. Заменим в системе (2.48) вектор A_2 его ортогональной составляющей относительно B_1 и получим систему

$$B_1, B_2, A_3, \ldots, A_m. \tag{2.49}$$

Согласно лемме ортогонализации система векторов (2.49) линейно независима, а ее часть B_1, B_2 ортогональна.

Предположим, что уже построена линейно независимая система

$$B_1, \ldots, B_{k-1}, A_k, \ldots, A_m, \tag{2.50}$$

у которой часть $B_1, \ldots, B_{k-1}$ ортогональна.

На **k-м шаге**, $k = 3, \ldots, m$, заменим в системе (2.50) вектор A_k на его ортогональную составляющую B_k относительно $B_1, \ldots, B_{k-1}$ и получим систему

$$B_1, \ldots, B_k, A_{k+1}, \ldots, A_m. \tag{2.51}$$

Из леммы ортогонализации следует, что система векторов (2.51) линейно независима, а ее часть $B_1, \ldots, B_k$ ортогональна.

После выполнения **m-го шага** получим линейно независимую и ортогональную систему векторов $B_1, \ldots, B_m$.

Отметим, что исходная система $A_1, \ldots, A_m$ и ортогональная система $B_1, \ldots, B_m$ эквивалентны, поскольку после каждого шага получается система векторов, эквивалентная предыдущей (см. лемму ортогонализации).

Замечание. Если линейно независимая система $A_1, \ldots, A_m$ ортогональна, то ортогонализация не изменит ее. ■

❍ **Пример.** Подвергнуть ортогонализации линейно независимую систему векторов $A_1 = (2, 0, 1, 1)$, $A_2 = (1, 2, 0, 1)$, $A_3 = (0, 1, -2, 0)$.

Полагаем $B_1 = A_1$. Затем строим векторы B_2 и B_3:

$$B_2 = A_2 - \frac{A_2B_1}{B_1B_1}B_1 = A_2 - \frac{1}{2}B_1 =$$
$$= (1,\ 2,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ {}^1/_2,\ {}^1/_2) = (0,\ 2,\ -{}^1/_2,\ {}^1/_2);$$

$$B_3 = A_3 - \frac{A_3B_1}{B_1B_1}B_1 - \frac{A_3B_2}{B_2B_2}B_2 = A_3 + {}^1/_3B_1 - {}^2/_3B_2 =$$
$$= (0,\ 1,\ -2,\ 0) + ({}^2/_3,\ 0,\ {}^1/_3,\ {}^1/_3) - (0,\ {}^4/_3,\ -{}^1/_3,\ {}^1/_3) =$$
$$= ({}^2/_3,\ -{}^1/_3,\ -{}^4/_3,\ 0).$$

Таким образом, векторы $B_1 = (2,\ 0,\ 1,\ 1)$, $B_2 = (0,\ 2,\ -{}^1/_2,\ {}^1/_2)$, $B_3 = ({}^2/_3,\ -{}^1/_3,\ -{}^4/_3,\ 0)$ являются результатом ортогонализации данной системы векторов. ●

Задачи.

1. Дана ортогональная система векторов

$A_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $A_2 = (1,\ -1,\ -1,\ 1)$, $A_3 = (1,\ -1,\ 1,\ -1)$.

Выяснить, разлагается ли вектор B по системе A_1, A_2, A_3:
а) $B = (2,\ 0,\ 4,\ -2)$;
б) $B = (2,\ 1,\ -1,\ 2)$.

2. Найти ортогональную составляющую вектора B относительно ортогональной системы векторов $A_1 = (1,\ 2,\ 3,\ -1)$, $A_2 = (2,\ -1,\ 1,\ 3)$, $A_3 = (2,\ 0,\ -1,\ -1)$:
а) $B = (2,\ 1,\ 6,\ 3)$;
б) $B = (3,\ 5,\ -1,\ -5)$;
в) $B = (5,\ -3,\ 5,\ -1)$.

3. Применяя ортогонализацию, построить ортогональную систему векторов:
а) $A_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $A_2 = (4,\ 1,\ 1,\ 1)$, $A_3 = (3,\ 1,\ 1,\ 0)$;
б) $A_1 = (1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $A_2 = (1,\ 1,\ -5,\ 3)$, $A_3 = (3,\ 2,\ 8,\ -7)$;
в) $A_1 = (1,\ 1,\ -1,\ -2)$, $A_2 = (5,\ 8,\ -2,\ -3)$, $A_3 = (3,\ 9,\ 3,\ 8)$;
г) $A_1 = (2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $A_2 = (7,\ 4,\ 3,\ -3)$, $A_3 = (1,\ 1,\ -6,\ 0)$, $A_4 = (5,\ 7,\ 7,\ 8)$.

4. Доказать, что ортогональная система n-мерных векторов $A_1, \ldots, A_k$ содержит нулевой вектор, если $k > n$.

3. МАТРИЦЫ

3.1. Понятие матрицы

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

содержащая m строк и n столбцов, называется **матрицей с размерами** $m \times n$. Числа $a_{11}, \dots, a_{mn}$ называются *элементами матрицы*. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент.

В дальнейшем матрицы будем обозначать прописными буквами полужирного шрифта: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и т. д. Например, обозначив матрицу (3.1) буквой $\mathbf{A}$, можно написать

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Часто вместо подробной записи (3.1) употребляют сокращенную: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Строки матрицы $\mathbf{A}$ будем рассматривать как n-мерные векторы и обозначать их через $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^m$. Тогда матрицу $\mathbf{A}$ можно рассматривать как систему строк $\mathbf{A} = [\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^m]$, которую будем заключать в квадратные скобки.

Столбцы матрицы $\mathbf{A}$ можно рассматривать как m-мерные векторы. Обозначим их через $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$. Теперь матрицу $\mathbf{A}$ можно рассматривать как систему столбцов $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$, которую будем заключать в круглые скобки.

Две матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ считаются **равными**, если число их строк равно числу столбцов и если равны элементы, стоящие на соответствующих местах этих матриц: $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j. Очевидно, что матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие столбцы или равны их соответствующие строки.

Наряду с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

часто приходится рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A. Эта матрица называется **транспонированной** к A и обозначается через A^{T}:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что строками матрицы A^{T} являются столбцы матрицы A. Следовательно, $(A^{\mathrm{T}})_j = A^j$, $(A^{\mathrm{T}})^i = A_i$ при любых i и j.

Квадратные матрицы

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется **квадратной**, а число ее строк, равное числу столбцов, – **порядком** квадратной матрицы.

Множество всех элементов квадратной матрицы, которые лежат на отрезке, соединяющем ее левый верхний угол с правым нижним, т. е. совокупность элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, называется **главной диагональю**, а множество всех элементов, которые лежат на отрезке, соединяющем ее правый верхний угол с левым нижним, – **побочной диагональю**.

Квадратная матрица называется **треугольной**, если ее элементы, которые находятся над главной диагональю или под главной диагональю, равны нулю, т. е. матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

являются треугольными. Матрица A называется **треугольной снизу**, а матрица B – **треугольной сверху**.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если равны нулю все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, т. е. диагональная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что диагональная матрица является треугольной снизу и треугольной сверху.

3.2. Умножение матрицы на вектор

Умножение матрицы на вектор будет определено ниже только для случая, когда число столбцов матрицы равно числу координат вектора.

Пусть даны матрица A с размерами $m \times n$ и n-мерный вектор $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. **Произведением матрицы A на вектор K** называется вектор, обозначаемый через AK, который равен линейной комбинации столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$ матрицы A с коэффициентами $k_1, k_2, \dots, k_n$, являющимися координатами K, т. е.

$$AK = k_1A_1 + k_2A_2 + \dots + k_nA_n.$$

❍ **Примеры.**

1. $AE_i = 0A_1 + \dots + 1A_i + \dots + 0A_n = A_i$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}(3, -4, 1) = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. ●

Умножение матрицы на вектор обладает следующими **свойствами**:

1) $A(K + L) = AK + AL$;

2) $A(lK) = l(AK)$, где l – число.

Справедливость этих свойств устанавливается непосредственно. Если $K = (k_1, \dots, k_n)$, $L = (l_1, \dots, l_n)$, то $K + L = (k_1 + l_1, \dots, k_n + l_n)$ и

$$A(K + L) = (k_1 + l_1)A_1 + \dots + (k_n + l_n)A_n = (k_1A_1 + \dots + k_nA_n) + (l_1A_1 + \dots + l_nA_n) = AK + AL.$$

Аналогично доказывается и свойство 2.

Задачи.

1. Показать, что $A\theta = \theta$ и $A(-K) = -AK$.

2. Даны матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

и векторы $K_1 = (2, -1, 3, 5)$, $K_2 = (3, 4, -1, 2)$. Найти координаты векторов AK_1 и AK_2.

3. Подобрать такую матрицу A, у которой не все элементы равны нулю, и такой вектор $K \neq \theta$, чтобы $AK = \theta$.

4. Даны матрица A с размерами $m \times n$ и система n-мерных векторов $L_1, L_2, ..., L_m$. Доказать, что: а) из линейной зависимости системы векторов $L_1, L_2, ..., L_m$ следует линейная зависимость системы векторов $AL_1, AL_2, ..., AL_m$; б) из линейной независимости системы векторов $AL_1, AL_2, ..., AL_m$ вытекает линейная независимость векторов $L_1, L_2, ..., L_m$.

5. Даны матрица A и система векторов L_1, L_2, L_3, L_4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; \begin{matrix} L_1 = (1, 4, 3),\ L_2 = (1, -1, 1), \\ L_3 = (2, 5, 4),\ L_4 = (1, 0, 1). \end{matrix}$$

Найти базис системы векторов AL_1, AL_2, AL_3, AL_4.

3.3. Действия с матрицами

Умножение матрицы на число и сложение матриц

По определению, чтобы **умножить матрицу на число** k, нужно каждый элемент матрицы умножить на k.

❍ **Пример.** Умножить

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 3 & 21 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 21 & 0 & 9 & 63 \\ -3 & 6 & 3 & 18 \end{pmatrix}. \; \bullet$$

Если обозначить j-й столбец матрицы Ak через $(Ak)_j$, то из определения умножения матрицы на число вытекает, что $(Ak)_j = A_j k$, где A_j – j-й столбец матрицы A.

Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов. **Суммой матриц** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при любых i и j.

○ **Пример.** Сумма двух матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 15 & -1 & -35 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Обозначая j-й столбец матрицы $A + B$ через $(A + B)_j$, из определения сложения матриц получаем, что $(A + B)_j = A_j + B_j$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается через O. Для любой матрицы A имеем $A + O = A$, $A \cdot 0 = O$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$; 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A(k + l) = Ak + Al$; 4) $A(kl) = (Ak)l$;

5) $(A + B)k = Ak + Bk$,

где A, B, C – матрицы; k, l – числа.

Для доказательства приведенных соотношений достаточно убедиться в том, что соответствующие столбцы матриц в левой и правой частях этого соотношения равны. В качестве примера докажем справедливость пятого свойства:

$$((A + B)k)_j = (A + B)_j k = A_j k + B_j k,$$

$$(Ak + Bk)_j = (Ak)_j + (Bk)_j = A_j k + B_j k.$$

Из этих соотношений следует, что соответствующие столбцы матриц $(A + B)k$ и $Ak + Bk$ равны.

Сложение матриц и умножение матрицы на число связаны с умножением матрицы на вектор следующим образом:

1) $(A + B)K = AK + BK$;

2) $(Al)K = A(lK) = l(AK)$.

Действительно, если $K = (k_1, k_2, ..., k_n)$, то $(A + B)K = (A + B)_1 k_1 + \ldots + (A + B)_n k_n = (A_1 + B_1)k_1 + \ldots + (A_n + B_n)k_n = (A_1 k_1 + \ldots + A_n k_n) + (B_1 k_1 + \ldots + B_n k_n) = AK + BK$.

Аналогично проверяется справедливость второго соотношения.

Умножение матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

В результате умножения получим матрицу AB, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B:

	A	B	AB
Число строк	m	n	m
Число столбцов	n	l	l

Запишем матрицы A и B в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1j} \dots b_{1l} \\ b_{21} \dots b_{2j} \dots b_{2l} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{nj} \dots b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Обозначим элементы матрицы AB через c_{ij}. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1j} \dots c_{1l} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{i1} \dots c_{ij} \dots c_{il} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{m1} \dots c_{mj} \dots c_{ml} \end{pmatrix}.$$

По определению элемент c_{ij} матрицы AB равен скалярному произведению i-й строки A^i и j-го столбца B_j матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = A^i B_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant l.$$

Эта операция может быть выполнена лишь в том случае, когда размерности векторов A^i и B_j совпадают, т. е. число столбцов матрицы A (размерность вектора A^i) равно числу строк матрицы B (размерность вектора B_j).

○ **Пример.** Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как сомножители имеют размеры 3×4 и 4×3, то их произведение имеет размеры 3×3. Следовательно,

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^1B_1 & A^1B_2 & A^1B_3 \\ A^2B_1 & A^2B_2 & A^2B_3 \\ A^3B_1 & A^3B_2 & A^3B_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1-5\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3-5\cdot0 & 2\cdot1-3\cdot1+4\cdot2-5\cdot1 \\ 1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1-3\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot1-2\cdot1-3\cdot2+4\cdot1 \\ -1\cdot3-2\cdot4+3\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot2-2\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 & -1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+1\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 19 & 2 \\ 16 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \bullet$$

❑ **Теорема 3.1.** Столбцы матрицы AB вычисляются по формуле

$(AB)_j = AB_j.$

Доказательство. Рассмотрим цепочку равенств:

$(AB)_j = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{mj}) = (A^1B_j, A^2B_j, \ldots, A^mB_j) =$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{1j}+a_{12}b_{2j}+\ldots+a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j}+a_{22}b_{2j}+\ldots+a_{2n}b_{nj} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}b_{1j}+a_{m2}b_{2j}+\ldots+a_{mn}b_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} \\ a_{21}b_{1j} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}b_{1j} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{12}b_{2j} \\ a_{22}b_{2j} \\ \ldots\ldots \\ a_{m2}b_{2j} \end{pmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{pmatrix} a_{1n}b_{nj} \\ a_{2n}b_{nj} \\ \ldots\ldots \\ a_{mn}b_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}b_{1j}+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}b_{2j}+\ldots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}b_{nj}=$$

$= A_1b_{1j} + A_2b_{2j} + \ldots + A_nb_{nj} = AB_j.$ ■

✧ **Следствие.** Умножение матриц связано с умножением матрицы на вектор следующим соотношением:

$(AB)K = A(BK).$

Доказательство. Используя определение умножения матрицы на вектор $K = (k_1, \ldots, k_l)$ и теорему 3.1, имеем

$(AB)K = (AB)_1k_1 + \ldots + (AB)_lk_l = (AB_1)k_1 + \ldots + (AB_l)k_l =$
$= A(B_1k_1 + \ldots + B_lk_l) = A(BK).$ ◆

○ **Пример.** Пусть

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \ \bullet$$

Последний пример показывает, что произведение матриц зависит от порядка множителей, т. е. умножение матриц некоммутативно.

Заметим, что для некоторых пар матриц безразлично, в каком порядке стоят сомножители произведения. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Если $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, то матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ будем называть **перестановочными**.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $(\boldsymbol{AB})k = (\boldsymbol{A}k)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}k)$, где k – число;

2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$;

3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$;

4) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

Для доказательства приведенных соотношений надо найти столбцы матриц в левой и правой частях этого соотношения и убедиться в том, что соответствующие столбцы этих матриц равны. Докажем, например, справедливость последнего соотношения:

$$((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_j = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}_j),$$

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_j = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})_j = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}_j).$$

Отсюда следует, что j-е столбцы матриц $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ равны, поэтому равны и сами матрицы.

Задачи.

1. Даны матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить: а) $2\boldsymbol{A}$; б) $3\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{B}$.

Решить уравнение $5\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

2. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Доказать, что если для матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ оба произведения $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ определены, причем $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, то матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – квадратные и имеют одинаковый порядок.

4. Показать, что если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, то

а) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$;

б) $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 \neq (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$.

5. Доказать, что диагональные матрицы перестановочны.

3.4. Обратная матрица

Сложить или перемножить две матрицы можно только в том случае, если выполняются известные соотношения между числами их строк и столбцов. Это ограничение исчезает, если рассматривать только квадратные матрицы некоторого заданного порядка n. Любые две такие матрицы можно сложить и перемножить, и в результате получится также квадратная матрица порядка n. В этом параграфе рассматриваются только квадратные матрицы порядка n.

Среди действительных чисел существует число 1, обладающее свойством $k \cdot 1 = 1k$. При умножении матриц аналогичным свойством обладает так называемая **единичная матрица**

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой строки и столбцы образуют диагональную систему.

Отметим следующие **свойства** единичной матрицы:

1) $EK = K$ для любого n-мерного вектора K;

2) $AE = EA$ для любой квадратной матрицы A.

Действительно, если $K = (k_1, k_2, ..., k_n)$, то

$EK = E_1k_1 + E_2k_2 + ... + E_nk_n = K.$

Докажем свойство 2.

Для любого $j = 1, 2, ..., n$

$(AE)_j = AE_j = A_j$ и, значит, $AE = A$;

$(EA)_j = EA_j = A_j$, а поэтому $EA = A$.

Рассмотрим теперь произвольную квадратную матрицу A порядка n. Если существует такая матрица B, что

$AB = BA = E,$

то будем говорить, что A **обратима**, а B будем называть **обратной матрицей** для A. Из нижеследующей теоремы вытекает, что не каждая матрица обратима.

□ **Теорема 3.2.** Если матрица A обратима, то ее столбцы $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют линейно независимую систему векторов.

Доказательство. Рассмотрим произвольное соотношение

$$A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = \theta \qquad (3.2)$$

и покажем, что $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$. Этим будет установлена линейная независимость системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$.

Обозначим через $E_1, E_2, ..., E_n$ столбцы единичной матрицы E. Ясно, что

$AE_1 = A_1, AE_2 = A_2, ..., AE_n = A_n.$

После подстановки этих соотношений в равенство (3.2) получим

$(AE_1)k_1 + (AE_2)k_2 + ... + (AE_n)k_n = \theta$

или

$A(E_1k_1 + E_2k_2 + ... + E_nk_n) = \theta.$

Умножая последнее равенство слева на матрицу B, обратную для A, получим

$BA(E_1k_1 + E_2k_2 + ... + E_nk_n) = B\theta.$

или (вследствие $BA = E$, $B\theta = \theta$, $EE_i = E_i$)

$$E_1k_1 + E_2k_2 + ... + E_nk_n = \theta. \qquad (3.3)$$

Так как $E_1, E_2, ..., E_n$ – линейно независимая система векторов, то из соотношения (3.3) следует $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$. ■

Назовем матрицу **невырожденной**, если ее столбцы образуют линейно независимую систему векторов. Тогда теорема 3.2 утверждает, что обратимая матрица невырожденна. Наша ближайшая цель – доказать, что любая невырожденная матрица обратима. Прежде всего докажем следующую лемму.

❑ **Лемма** (о невырожденной матрице). Если A – невырожденная матрица, то:

1) из $AB = O$ следует, что $B = O$; 2) из $AB = E$ вытекает, что $BA = E$.

Доказательство. 1. Предположим, что $B \neq O$. Тогда один из столбцов матрицы B содержит ненулевые элементы. Пусть, для определенности, такие элементы содержатся в первом столбце матрицы B, т. е. $b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}$ – ненулевой набор чисел.

Из равенства $AB = O$ следует, что первый столбец матрицы AB является нулевым, т. е. $(AB)_1 = \theta$. Так как $(AB)_1 = AB_1$, то $AB_1 = \theta$. Отсюда $b_{11}A_1 + b_{21}A_2 + \ldots + b_{n1}A_n = \theta$. Так как среди чисел $b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}$ имеются ненулевые, то из последнего равенства следует линейная зависимость системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что противоречит невырожденности матрицы A. Итак, предположение $B \neq O$ приводит к противоречию. Следовательно, $B = O$.

2. По условию $AB = E$. Умножив это равенство справа на матрицу A, получим $ABA = EA$ или $ABA = AE$. Отсюда $A(BA - E) = O$. Так как A – невырожденная матрица, то из первого утверждения леммы вытекает $BA - E = O$ и $BA = E$. ■

❑ **Теорема 3.3.** Каждая невырожденная матрица A обратима, причем i-м столбцом обратной матрицы, $i = 1, 2, \ldots, n$, является единственное решение системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = E_i. \tag{3.4}$$

Доказательство. Покажем сначала, что система уравнений (3.4) имеет единственное решение. Так как матрица A невырожденна, то ее столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независимы. Отсюда следует, что $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – базис $\mathbf{R}^n$ (см. параграф 2.8). Следовательно, n-мерный вектор E_i (при любом $i = 1, 2, \ldots, n$) единственным образом разлагается по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\begin{aligned} &A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n = E_1, \\ &A_1l_1 + A_2l_2 + \ldots + A_nl_n = E_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_1t_1 + A_2t_2 + \ldots + A_nt_n = E_n. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ясно, что $(k_1, k_2, \ldots, k_n), (l_1, l_2, \ldots, l_n), \ldots, (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – единственные решения системы (3.4) соответственно при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теперь построим матрицу B, в качестве первого столбца которой возьмем решение $(k_1, k_2, ..., k_n)$ системы (3.4) при $i = 1$, в качестве второго столбца – решение $(l_1, l_2, ..., l_n)$ системы (3.4) при $i = 2$ и т. д.:

$$B = \begin{pmatrix} k_1 & l_1 & \dots & t_1 \\ k_2 & l_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n & l_n & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Используя умножение матрицы на вектор, разложения (3.5) можно переписать в виде

$$AB_1 = E_1, AB_2 = E_2, ..., AB_n = E_n$$

или, в силу теоремы 3.1,

$$(AB)_1 = E_1, (AB)_2 = E_2, ..., (AB)_n = E_n.$$

Из последней цепочки равенств вытекает, что $AB = E$. Отсюда согласно лемме о невырожденной матрице получаем $BA = E$. Таким образом, B – обратная матрица для A. ■

Из теорем 3.2 и 3.3 следует теорема 3.4.

❑ **Теорема 3.4.** Матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденна. ■

Остается выяснить, сколько обратных матриц может иметь данная невырожденная матрица.

❑ **Теорема 3.5.** Обратимая матрица A имеет только одну обратную матрицу.

Доказательство. Пусть B и C – обратные матрицы для A. Тогда $AB = E$ и $CA = E$.

Умножив равенство $AB = E$ слева на C, получим $CAB = C$. Отсюда, с учетом того, что $CA = E$, следует $B = C$. ■

Переходим к отысканию обратной матрицы. Из теоремы 3.3 следует, что столбцами обратной матрицы являются решения соответственно систем уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = E_1,$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = E_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = E_n.$$

Так как эти системы различаются только набором свободных членов, то их можно решать параллельно в одной таблице.

Единственную обратную матрицу для обратимой матрицы A будем обозначать через A^{-1}.

○ **Пример.** Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приступаем к решению трех систем уравнений с тремя неизвестными:

x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
$\boxed{1}$	0	−1	1	0	0
2	3	2	0	1	0
−1	1	2	0	0	1
1	0	−1	1	0	0
0	3	4	−2	1	0
0	$\boxed{1}$	1	1	0	1
1	0	−1	1	0	0
0	0	$\boxed{1}$	−5	1	−3
0	1	1	1	0	1
1	0	0	−4	1	−3
0	0	1	−5	1	−3
0	1	0	6	−1	4
1	0	0	−4	1	−3
0	1	0	6	−1	4
0	0	1	−5	1	−3

Последний шаг в решении заключался в перестановке строк местами, т. е. были переставлены местами уравнения системы. Ясно, что это преобразование не изменяет множество решений системы уравнений. Сделано это было для того, чтобы в последней системе первое уравнение содержало в качестве разрешенного неизвестное x_1, второе — неизвестное x_2, а третье — неизвестное x_3. В этом случае столбцы свободных членов разрешенной системы являются решениями системы уравнений и, значит, столбцами обратной матрицы. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Задачи.

1. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Показать, что если A – квадратная матрица и $(A + E)^2 = O$, то матрица A обратима. Найти обратную матрицу.

3. Пусть A и B – обратимые матрицы одного и того же порядка. Показать, что равенства $AB = BA$, $AB^{-1} = B^{-1}A$, $A^{-1}B = BA^{-1}$, $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ равносильны между собой.

3.5. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется ранг системы ее столбцов. Будем обозначать ранг матрицы A символом $r(A)$.

Ранг является одной из важнейших характеристик матрицы. Изучение ранга матрицы начнем с доказательства следующих двух лемм.

❑ **Лемма 1.** Пусть $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ и $B = (B_1, B_2, ..., B_n)$ – две такие матрицы, что системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \theta, \tag{3.6}$$

$$B_1x_1 + B_2x_2 + ... + B_nx_n = \theta \tag{3.7}$$

равносильны. Тогда ранги матриц A и B совпадают.

Доказательство. Пусть

$$A'_1x_1 + A'_2x_2 + ... + A'_nx_n = \theta \tag{3.8}$$

– общее решение системы уравнений (3.6). Из определения общего решения вытекает, что (3.8) – общее решение системы уравнений (3.7). Теперь из теоремы 2.9 получаем, что базис каждой из систем векторов $A_1, ..., A_n$ и $B_1, ..., B_n$ содержит столько векторов, сколько их в диагональной части системы векторов $A'_1, ..., A'_n$. Отсюда следует, что ранги матриц A и B равны. ■

❑ **Лемма 2.** Следующие преобразования со строками матрицы A не изменяют ее ранга:

1) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;

2) прибавление к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на число k;

3) вычеркивание строки матрицы, которая разлагается по остальным строкам матрицы.

Доказательство. Сначала покажем, что первые два преобразования со строками не изменяют ранга матрицы. Обозначим через

$A' = (A'_1, A'_2, ..., A'_n)$ матрицу, полученную из матрицы $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ при помощи этих преобразований. Тогда системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = \theta, \tag{3.9}$$

$$A'_1x_1 + A'_2x_2 + ... + A'_nx_n = \theta \tag{3.10}$$

равносильны, так как система уравнений (3.10) получена из системы (3.9) при помощи преобразований, которые не изменяют множество решений системы уравнений. Теперь из леммы 1 вытекает, что $r(A) = r(A')$.

Докажем, что вычеркивание строки, которая разлагается по остальным строкам матрицы, не изменяет ее ранга. Пусть, для определенности, последняя строка A^m матрицы $A = [A^1, ..., A^{m-1}, A^m]$ разлагается по строкам $A^1, ..., A^{m-1}$:

$$A^m = k_1A^1 + ... + k_{m-1}A^{m-1}.$$

Отсюда $A^m - k_1A^1 - ... - k_{m-1}A^{m-1} = \theta$.

Матрицу A можно при помощи первых двух преобразований со строками превратить в матрицу $[A^1, ..., A^{m-1}]$:

$$A = [A^1, ..., A^{m-1}, A^m] \to [A^1, ..., A^{m-1}, A^m - k_1A^1] \to ... \to$$
$$\to [A^1, ..., A^{m-1}, A^m - k_1A^1 - ... - k_{m-1}A^{m-1}] \to [A^1, ..., A^{m-1}, \theta] \to$$
$$\to [A^1, ..., A^{m-1}].$$

Так как первые два преобразования со строками не изменяют ранга матрицы, то

$$r(A) = r[A^1, ..., A^{m-1}, A^m] = r[A^1, ..., A^{m-1}]. \blacksquare$$

Выясним теперь, связаны ли ранг системы строк матрицы и ранг матрицы, т. е. ранг ее системы столбцов. Исчерпывающий ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

❑ **Теорема 3.6** (о ранге матрицы). Ранг p матрицы A равен рангу s системы ее строк.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Докажем сначала, что $p \leqslant s$. Из условия теоремы вытекает, что базис системы строк $A^1, ..., A^m$ содержит s векторов. Пусть, для определенности, строки $A^1, ..., A^s$ матрицы A образуют базис системы ее строк. Тогда все остальные строки матрицы A разлагаются по строкам $A^1, ..., A^s$. Вычеркнем в матрице A строки $A^{s+1}, ..., A^m$ и получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{s1} \dots a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 2 следует, что ранги матриц A и A^* равны, поэтому ранг матрицы A^* равен p. Столбцы $A^*_1, \ldots, A^*_n$ матрицы A^* являются s-мерными векторами. Так как $r(A^*) = p$, то и $r(A^*_1, \ldots, A^*_n) = p$.

Каждый s-мерный вектор, и в частности векторы $A^*_1, \ldots, A^*_n$, разлагается по диагональной системе s-мерных векторов $E_1, \ldots, E_s$, ранг которой равен s. Следовательно, $r(A^*_1, \ldots, A^*_n) \leqslant r(E_1, \ldots, E_s)$. Отсюда $p \leqslant s$.

Докажем теперь, что $p \geqslant s$. В первой части доказательства теоремы было установлено, что ранг системы столбцов матрицы не превосходит ранга системы ее строк. Применяя этот результат к матрице A^T, получим $r((A^T)_1, \ldots, (A^T)_m) \leqslant r((A^T)^1, \ldots, (A^T)^n)$.

Так как $(A^T)_i = A^i$, $(A^T)^j = A_j$, то $r(A^1, \ldots, A^m) \leqslant r(A_1, \ldots, A_n)$ и, значит, $s \leqslant p$.

Из условий $p \leqslant s$ и $s \leqslant p$ следует $p = s$. ■

◇ **Следствие.** При транспонировании матрицы ее ранг не изменяется, т. е. $r(A) = r(A^T)$.

Используя теорему 3.6 и определение ранга матрицы, имеем
$r(A) = r(A^1, \ldots, A^m) = r((A^T)_1, \ldots, (A^T)_m) = r(A^T)$. ◆

Задачи.

1. Вычислить ранг следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что следующие преобразования со столбцами матрицы не изменяют ее ранг:

а) умножение столбца на отличное от нуля число;

б) прибавление к одному столбцу другого столбца, умноженного на любое число;

в) перестановка двух столбцов.

3. Доказать, что добавление к матрице одной строки (или одного столбца) либо не изменяет ее ранга, либо увеличивает его на единицу.

4. Доказать, что вычеркивание одной строки (столбца) матрицы тогда и только тогда не изменяет ее ранга, когда вычеркнутая строка (столбец) разлагается по остальным строкам (столбцам) матрицы.

5. Даны матрица A с размерами $m \times n$, n-мерный вектор K и $AK = \theta$. Доказать, что $K = \theta$, если $r(A) = n$.

6. Дана матрица A с размерами $m \times n$. Доказать, что: а) $m \geqslant n$, если $r(A) = n$; б) $n \geqslant m$, если $r(A) = m$.

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

4.1. Понятие и вычисление определителей матриц

Определителем квадратной матрицы A называется число, которое обозначается через $\det A$ или $|A|$ и вычисляется при помощи следующих трех правил.

Правило 1. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Правило 2. Общий множитель элементов любой строки или столбца матрицы можно вынести за знак определителя, т. е.

$$\det [A^1, \dots, kA^i, \dots, A^n] = k \det [A^1, \dots, A^i, \dots, A^n],$$

$$\det (A_1, \dots, lA_j, \dots, A_n) = l \det (A_1, \dots, A_j, \dots, A_n).$$

Правило 3. Определитель матрицы не изменится, если к одной из строк (столбцов) матрицы прибавить другую строку (столбец) этой матрицы, т. е.

$$\det [A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n] = \det [A^1, \dots, A^i + A^j, \dots, A^j, \dots, A^n],$$

$$\det (A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = \det (A_1, \dots, A_i + A_j, \dots, A_j, \dots, A_n).$$

Замечание 1. Определитель одноэлементной матрицы $A = (a_{11})$ полагают равным a_{11}, т. е. $\det A = \det (a_{11}) = a_{11}$.

Замечание 2. Определитель матрицы, у которой строка или столбец состоит только из нулей, равен нулю.

Действительно, применяя правило 2, получим:

$$\det (A_1, \dots, \theta, \dots, A_n) = \det (A_1, \dots, 0\cdot\theta, \dots, A_n) = 0 \det (A_1, \dots, \theta, \dots, A_n) = 0.$$

Для вычисления определителя матрицы достаточно выполнить такое преобразование матрицы, которое не изменяет ее определителя и позволяет превратить матрицу в диагональную.

❑ **Теорема 4.1.** Определитель матрицы A не изменится, если к одной строке (столбцу) матрицы прибавить другую ее строку (столбец), умноженную на число k.

Доказательство. Докажем теорему для случая столбцов матрицы. Используя правила 1 и 2, имеем

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det\left(A_1, \ldots, A_i, \ldots, \frac{1}{k}(kA_j), \ldots, A_n\right) =$$
$$= \frac{1}{k}\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, kA_j, \ldots, A_n) = \frac{1}{k}\det(A_1, \ldots, A_i + kA_j, \ldots, kA_j, \ldots, A_n) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, A_i + kA_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

Аналогично проводится доказательство теоремы в случае строк. ■

◇ **Следствие.** Если к строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то определитель матрицы не изменится.

Доказательство. Покажем, например, что если в матрице $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n)$ к последнему столбцу прибавить комбинацию $k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_{n-1}A_{n-1}$ остальных ее столбцов, то определитель матрицы не изменится. Многократно используя теорему 4.1, имеем:

$$\det(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n) = \det(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n + k_1A_1) =$$
$$= \det(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n + k_1A_1 + k_2A_2) = \ldots =$$
$$= \det(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n + k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_{n-1}A_{n-1}). ◆$$

Используя теорему 4.1, можно, не изменяя величины определителя матрицы, преобразовать ее в диагональную матрицу. Чтобы описать это преобразование, введем понятие полужорданова преобразования строк и столбцов матрицы.

Полужордановым преобразованием строк матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ks} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

с разрешающим элементом $a_{ks} \neq 0$ называется совокупность следующих преобразований со строками матрицы: к первой строке прибавляем k-ю, умноженную на число $-a_{1s}/a_{ks}$, и т. д., к последней строке прибавляем k-ю, умноженную на число $-a_{ns}/a_{ks}$. После выполнения этих преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{ks} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Полужордановым преобразованием столбцов матрицы (4.1) с разрешающим элементом $a_{ks} \neq 0$ называется совокупность следующих преобразований со столбцами матрицы: к первому столбцу матрицы прибавляем s-й, умноженный на число $-a_{k1}/a_{ks}$, и т. д., к последнему столбцу матрицы (4.1) прибавляем ее s-й столбец, умноженный на число $-a_{kn}/a_{ks}$. После выполнения этих преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a''_{11} & \dots & a_{1s} & & a''_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & a_{ks} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a''_{n1} & & a_{ns} & \dots & a''_{nn} \end{pmatrix}.$$

Полужорданово преобразование строк или столбцов матрицы не изменяет ее определителя, так как состоит из преобразований, которые, в силу теоремы 4.1, не изменяют определителя матрицы.

Вычисление определителя матрицы

Для вычисления определителя матрицы преобразуем ее при помощи конечного числа полужордановых преобразований в диагональную матрицу, определитель которой находится по правилу 1.

Преобразование матрицы в диагональную состоит из ряда шагов. Если после выполнения очередного шага в матрице появляется строка или столбец, состоящие только из нулей, то процесс преобразований останавливается, а определитель матрицы, согласно замечанию 2, равен нулю.

1-й шаг. Выберем в матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

в качестве разрешающего элемент a_{11} и выполним полужорданово преобразование строк этой матрицы (если элемент $a_{11} = 0$, то к первой строке (столбцу) прибавим такую строку (столбец), чтобы на месте a_{11} появился ненулевой элемент). После выполнения полужорданова преобразования получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Теперь выполним полужорданово преобразование столбцов матрицы (4.3) с разрешающим элементом a_{11}, которое превратит матрицу (4.3) в матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Заметим, что сначала можно выполнить полужорданово преобразование столбцов матрицы, а затем – полужорданово преобразование строк матрицы.

2-й шаг. В матрице (4.4) возьмем в качестве разрешающего элемента a'_{22} и выполним с ним полужорданово преобразование строк матрицы (4.4), а затем – полужорданово преобразование столбцов матрицы (если элемент $a'_{22} = 0$, то ко второй строке (столбцу) матрицы (4.4) прибавим такую строку (столбец) этой матрицы, чтобы на месте a'_{22} появился ненулевой элемент). В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если в процессе преобразований не появится матрица с нулевой строкой или нулевым столбцом, то через n шагов получим диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{(n-1)}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Определители исходной матрицы (4.2) и диагональной матрицы (4.5) равны. Теперь, применяя правило 1, находим определитель матрицы (4.5), равный произведению ее диагональных элементов $a_{11}a'_{22}a''_{33} \cdots a^{(n-1)}_{nn}$.

○ **Примеры.**

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ниже приведено вычисление определителя данной матрицы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \; -1 \;\; -2 \; = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \; 1 =$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \; -1 \;\; 1 \; = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \; 2 =$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \; -3 \; = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-1) = 1.$

2. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем данную матрицу в диагональную:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \; -2 \; = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \; -2 \;\; -5 \;\; -3 \; =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -18 & -5 \\ 0 & -2 & -38 & -11 \\ 0 & -1 & -24 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -18 & -5 \\ 0 & -2 & -38 & -11 \\ 0 & -1 & -24 & -7 \end{vmatrix} \; -2 \;\; -1 \; =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -18 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \; -3 \; = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 1 = 2. \;\bullet$$

Задачи.

Вычислить определители матриц:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 7 & 3 & -4 \\ -15 & -3 & 12 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 14 & 23 & 20 & 17 \\ 12 & 20 & 20 & 16 \\ 12 & 27 & 24 & 18 \\ 10 & 32 & 18 & 19 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

л) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.2. Свойства определителей

❑ **Свойство 1.** Если строки или столбцы матрицы A линейно зависимы, то $\det A = 0$.

Доказательство. Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. Тогда из теоремы 2.4 следует, что один из столбцов матрицы разлагается по остальным. Пусть, например, $A_n = k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_{n-1}A_{n-1}$. Отсюда

$$A_n - k_1A_1 - k_2A_2 - ... - k_{n-1}A_{n-1} = \theta. \tag{4.6}$$

Теперь к столбцу A_n матрицы A прибавим линейную комбинацию остальных столбцов этой матрицы

$$-k_1A_1 - k_2A_2 - ... - k_{n-1}A_{n-1}.$$

Тогда из следствия к теореме 4.1 и равенства (4.6) получим цепочку равенств:

$$\det(A_1, ..., A_{n-1}, A_n) = \det(A_1, ..., A_{n-1}, A_n - k_1A_1 - k_2A_2 - ... - k_{n-1}A_{n-1}) =$$
$$= \det(A_1, ..., A_{n-1}, \theta) = 0.$$

Аналогично доказывается это свойство в случае, когда линейно зависимы строки матрицы. ■

Прежде чем сформулируем и докажем второе свойство определителей матриц, установим справедливость следующей леммы.

❑ **Лемма.** Пусть в матрице $A = (A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$ столбец A_i разлагается по векторам $A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n$:

$$A_i = t_1 A_1 + \ldots + t_{i-1} A_{i-1} + tB + t_{i+1} A_{i+1} + \ldots + t_n A_n, \tag{4.7}$$

где B – некоторый вектор. Тогда после замены i-го столбца A_i в матрице A на вектор tB определитель матрицы не изменится, т. е.

$$\det (A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = \det (A_1, \ldots, tB, \ldots, A_n).$$

Аналогичное утверждение справедливо для строк.

Доказательство. К столбцу tB матрицы $(A_1, \ldots, tB, \ldots, A_n)$ прибавим линейную комбинацию $t_1 A_1 + \ldots + t_{i-1} A_{i-1} + t_{i+1} A_{i+1} + \ldots + t_n A_n$ остальных столбцов этой матрицы. Тогда из следствия к теореме 4.1 и соотношения (4.7) получим

$$\det (A_1, \ldots, tB, \ldots, A_n) = \det (A_1, \ldots, t_1 A_1 + \ldots + t_{i-1} A_{i+1} + $$
$$+ tB + t_{i+1} A_{i+1} + \ldots + t_n A_n, \ldots, A_n) = \det (A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n). \ \blacksquare$$

❑ **Свойство 2.** Пусть i-й столбец A_i матрицы $A = (A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$ представлен в виде суммы двух векторов $A_i = \bar{A}_i + \tilde{A}_i$. Рассмотрим матрицы $\bar{A} = (A_1, \ldots, \bar{A}_i, \ldots, A_n)$ и $\tilde{A} = (A_1, \ldots, \tilde{A}_i, \ldots, A_n)$, которые получены из матрицы A заменой ее i-го столбца соответственно векторами $\bar{A}_i$ и $\tilde{A}_i$. Тогда

$$\det A = \det \bar{A} + \det \tilde{A}$$

или в более развернутой форме

$$\det (A_1, \ldots, \bar{A}_i + \tilde{A}_i, \ldots A_n) =$$
$$= \det (A_1, \ldots, \bar{A}_i, \ldots, A_n) + \det (A_1, \ldots, \tilde{A}_i, \ldots, A_n).$$

Аналогичное утверждение справедливо для строк.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) система $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ линейно зависима;

2) система $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ линейно независима.

В первом случае часть системы столбцов каждой из матриц A, $\bar{A}$ и $\tilde{A}$ линейно зависима. Следовательно, все столбцы каждой из матриц A, $\bar{A}$ и $\tilde{A}$ линейно зависимы. Теперь из первого свойства определителей матриц вытекает, что $\det A = \det \bar{A} = \det \tilde{A} = 0$, а поэтому $\det A = \det \bar{A} + \det \tilde{A}$.

Во втором случае линейно независимую систему $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ дополним до базиса некоторым вектором B (см. параграф 2.8). Тогда векторы $\bar{A}_i$ и $\tilde{A}_i$ разлагаются по этому базису:

$$\bar{A}_i = k_1 A_1 + \ldots + kB + \ldots + k_n A_n, \tag{4.8}$$

$$\tilde{A}_i = l_1 A_1 + \ldots + lB + \ldots + l_n A_n. \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{A}_i + \tilde{A}_i = (k_1 + l_1)A_1 + \ldots + (k + l)B + \ldots + (k_n + l_n)A_n. \qquad (4.10)$$

Теперь из соотношений (4.8)–(4.10), леммы и правила 2 вытекают следующие равенства:

$$\det(A_1, \ldots, \bar{A}_i, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, kB, \ldots, A_n) =$$
$$= k \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n), \qquad (4.11)$$

$$\det(A_1, \ldots, \tilde{A}_i, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, lB, \ldots, A_n) =$$
$$= l \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n), \qquad (4.12)$$

$$\det(A_1, \ldots, \bar{A}_i + \tilde{A}_i, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, (k + l)B, \ldots, A_n) =$$
$$= (k + l) \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n). \qquad (4.13)$$

Наконец, из соотношений (4.11)–(4.13) получаем

$$\det(A_1, \ldots, \bar{A}_i + \tilde{A}_i, \ldots, A_n) = (k + l) \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) =$$
$$= k \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + l \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, \bar{A}_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, \tilde{A}_i, \ldots, A_n). \blacksquare$$

❑ **Свойство 3.** Если поменять местами две строки или два столбца матрицы, то ее определитель умножится на -1, т. е.

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -\det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n),$$

$$\det[A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n] = -\det[A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n].$$

Действительно, используя правила 2 и 3, получим следующую цепочку равенств:

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j - (A_i + A_j), \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i +$$
$$+ A_j, \ldots, -A_i, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + A_j - A_i, \ldots, -A_i, \ldots, A_n) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, -A_i, \ldots, A_n) = -\det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n). \blacksquare$$

❑ **Свойство 4.** Определитель невырожденной матрицы не равен нулю.

Доказательство. Покажем, что невырожденную матрицу порядка n при помощи полужордановых преобразований можно превратить в диагональную матрицу, у которой на главной диагонали стоят отличные от нуля числа.

Сначала установим, что полужордановы преобразования не изменяют ранга матрицы. Действительно, прибавление к одной строке матрицы другой ее строки не изменяет ранга системы строк матрицы (см. следствие 2 из теоремы 2.12). Следовательно, полужорданово преобразование строк матрицы не изменяет ранга системы строк и, значит, ранга матрицы (см. теорему 3.6). Аналогично полужорданово преобразование столбцов матрицы не изменяет ранга системы столбцов и, значит, ранга матрицы.

По условию A – невырожденная матрица, т. е. ее столбцы линейно независимы, и, значит, $r(A) = n$. Отсюда следует, что полужордановы преобразования матрицы A превращают ее в матрицу, ранг которой равен n, и поэтому столбцы преобразованной матрицы линейно независимы, следовательно, она не содержит нулевых строк и столбцов.

Итак, матрицу A можно при помощи полужордановых преобразований превратить в диагональную матрицу B, у которой на главной диагонали стоят ненулевые числа. Из правила 1 следует, что $\det B \neq 0$. Так как $\det A = \det B$, то $\det A \neq 0$. ■

✧ **Следствие.** Определитель матрицы A не равен нулю тогда и только тогда, когда A – невырожденная матрица.

Необходимость. Пусть $\det A \neq 0$, а матрица вырожденная. Тогда ее столбцы линейно зависимы и из свойства 1 вытекает, что $\det A = 0$. Противоречие.

Достаточность непосредственно следует из свойства 4 определителей матриц. ✦

Задачи.

1. Доказать, что определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

2. Установить, что определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

3. Как изменится определитель матрицы порядка n, если у всех ее элементов изменить знак на противоположный?

4. Как изменится определитель матрицы порядка n, если переставить ее первый столбец на последнее место?

5. Как изменится определитель матрицы, если ее строки расположить в обратном порядке?

6. Доказать, что определитель матрицы не изменится, если к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку.

4.3. Миноры и алгебраические дополнения

Обозначим через A_{ik} матрицу, которая получается путем вычеркивания i-й строки и k-го столбца в матрице A. Тогда $\det A_{ik}$ называется **минором** элемента a_{ik} в $\det A$. Величина $(-1)^{i+k} \det A_{ik}$ называется **алгебраическим дополнением** элемента a_{ik} в $\det A$.

❑ **Лемма.** Если в матрице A все элементы первого столбца (строки) равны нулю, кроме a_{11}, то

$$\det A = a_{11} \det A_{11}.$$

Доказательство. Из условия леммы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $a_{11} = 0$, то все элементы первого столбца матрицы A равны нулю и поэтому $\det A = 0$. С другой стороны, $a_{11} \det A_{11} = 0$, так как $a_{11} = 0$. Отсюда вытекает, что $\det A = a_{11} \det A_{11}$.

Если же $a_{11} \neq 0$, то, выполняя полужорданово преобразование столбцов матрицы A с разрешающим элементом a_{11}, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем $\det A = \det B$.

Матрицу B при помощи полужордановых преобразований приведем к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det A = \det B = a_{11} a'_{22} \cdots a_{nn}^{(n-1)}. \tag{4.14}$$

Те же полужордановы преобразования приведут матрицу A_{11} к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

и

$$\det A_{11} = a'_{22} \cdots a_{nn}^{(n-1)}. \tag{4.15}$$

Из равенств (4.14) и (4.15) вытекает, что

$\det A = a_{11} \det A_{11}$. ■

□ **Теорема 4.2.** Если в матрице A все элементы k-го столбца (строки) равны нулю, кроме элемента a_{ik}, то

$$\det A = (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Доказательство. Из условия следует, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В матрице A переведем i-ю строку на первое место, последовательно переставляя ее с $(i - 1)$-й, $(i - 2)$-й строкой и т. д. Наконец, переставив ее с первой строкой, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице A была сделана $i - 1$ перестановка строк, при каждой из которых определитель умножается на (-1), то

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B. \tag{4.16}$$

Теперь в матрице B переведем k-й столбец на первое место, последовательно переставляя его с $(k - 1)$-м, $(k - 2)$-м столбцом и т. д. Наконец, переставив его с первым столбцом, получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице B была сделана $k - 1$ перестановка столбцов, при каждой из которых определитель умножается на (-1), то

$$\det B = (-1)^{k-1} \det C. \tag{4.17}$$

Из леммы вытекает, что

$$\det C = a_{ik} \det C_{11}. \tag{4.18}$$

Матрица C_{11} получается из C в результате вычеркивания первой строки и первого столбца или, что то же самое, после вычеркивания i-й строки и k-го столбца в матрице A. Следовательно, $C_{11} = A_{ik}$.

Наконец, подставляя в равенство (4.16) выражения для $\det B$ и $\det C$ из соотношений (4.17) и (4.18), получим

$$\det A = (-1)^{i+k-2} a_{ik} \det A_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Аналогично доказывается теорема в отношении строк. ■

4.4. Разложение определителя матрицы по элементам строки или столбца

❑ **Теорема 4.3.** Определитель каждой матрицы равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е. при разложении по элементам i-й строки

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + \\ + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}, \tag{4.19}$$

а при разложении по элементам k-го столбца

$$\det A = (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k} \det A_{2k} + \ldots + \\ + (-1)^{n+k} a_{nk} \det A_{nk}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Докажем, например, формулу (4.20). Представим матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} + 0 \; + \ldots + 0 \; \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots 0 \; + a_{2k} + \ldots + 0 \; \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots 0 \; + 0 \; + \ldots + a_{nk} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

где каждый элемент k-го столбца записан как сумма n слагаемых, из которых $n - 1$ слагаемое равно нулю. Из второго свойства определителей матриц вытекает, что

$$\det A = \det A' + \det A'' + \ldots + \det A^{(n)}, \tag{4.21}$$

где

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots 0 \; \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots 0 \; \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \; A'' = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots 0 \; \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2k} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots 0 \; \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots 0 \; \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots 0 \; \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 4.2 следует, что

$$\det A' = (-1)^{1+k} a_{1k} \det A'_{1k},$$
$$\det A'' = (-1)^{2+k} a_{2k} \det A''_{2k}, \tag{4.22}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\det A^{(n)} = (-1)^{n+k} a_{nk} \det A^{(n)}_{nk}.$$

Так как матрицы A', A'', ..., $A^{(n)}$ отличаются от матрицы A лишь k-м столбцом, который при вычислении A'_{1k}, A''_{2k}, ..., $A^{(n)}_{nk}$ вычеркивается, то

$$A'_{1k} = A_{1k},\ A''_{2k} = A_{2k},\ \dots,\ A^{(n)}_{nk} = A_{nk}. \tag{4.23}$$

Теперь из соотношений (4.21)–(4.23) вытекает

$$\det A = (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k} \det A_{2k} + \dots +$$
$$+ (-1)^{n+k} a_{nk} \det A_{nk}.$$

Теорема о разложении определителя по элементам i-й строки доказывается аналогично. ■

Используя формулу разложения определителя матрицы по первой строке, найдем выражения для определителя матриц второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det (a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det (a_{21}) =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{4.24}$$

Как следует из формулы (4.24), определитель матрицы третьего порядка представляет собой алгебраическую сумму шести слагаемых. Каждое слагаемое является произведением трех элементов, расположенных в разных столбцах и разных строках матрицы.

Знак «плюс» имеют произведение элементов, расположенных на главной диагонали, и два произведения элементов, образующих треугольники со стороной, параллельной главной диагонали (рис. 4.1, *а*).

Знак «минус» имеют произведение элементов, принадлежащих побочной диагонали, и два произведения элементов, образующих треугольники со стороной, параллельной побочной диагонали (рис. 4.1, *б*).

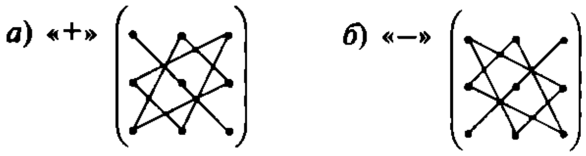


Рис. 4.1

С помощью формул разложения определителя матрицы по элементам строки или столбца вычисление определителя матрицы любого порядка сводится к вычислению определителей матриц второго или третьего порядка.

❍ **Примеры.**

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве разрешающего элемент $a_{21} = 1$ и выполним полужорданово преобразование строк матрицы, а затем разложим определитель полученной матрицы по элементам первого столбца:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

В матрице последнего определителя к первому столбцу прибавим третий, а затем выполним полужорданово преобразование с разрешающим элементом $a_{11} = 4$:

$$\det A = -\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 12 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 0 & -108 & -75 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\,(34 \cdot 75 - 26 \cdot 108) = 1032.$$

2. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1. \bullet$$

Задачи.

1. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ x & y & z & t \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Разлагая по второму столбцу, вычислить определитель матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & x & 1 & 1 \\ 1 & y & 2 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель матрицы путем разложения его по элементам третьей строки:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. **Вычислить определители матриц:**

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 1 & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. ТЕОРИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B \tag{5.1}$$

будет *совместной* тогда и только тогда, когда в процессе решения этой системы методом Гаусса мы не получим систему, содержащую противоречивое уравнение. К сожалению, этот критерий не дает возможности сформулировать условие совместности системы при помощи коэффициентов и свободных членов системы уравнений. Однако этого недостатка лишен критерий совместности, который содержится в теореме 5.1, носящей название **теоремы Кронекера–Капелли.**

❑ **Теорема 5.1.** Необходимым и достаточным условием совместности системы уравнений (5.1) является равенство рангов систем векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, т. е.

$$r(A_1, A_2, \ldots, A_n) = r(A_1, A_2, \ldots, A_n, B). \tag{5.2}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система уравнений (5.1) совместна, т. е. обладает решением $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Тогда

$$A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n = B \tag{5.3}$$

и, значит, вектор B разлагается по системе $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Покажем, что системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ обладают общим базисом. Предположим, что $A_1, \ldots, A_r$ – базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Так как вектор B разлагается по системе $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а каждый вектор этой системы разлагается по базису $A_1, \ldots, A_r$, то вектор B разлагается по части $A_1, \ldots, A_r$ (утверждение 4 из параграфа 2.4). Следовательно, $A_1, \ldots, A_r$ – базис не только системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, но и системы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$. Отсюда следует равенство (5.2).

Достаточность. Пусть $r(A_1, A_2, \ldots, A_n) = r(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) = r$, и предположим, что $A_1, \ldots, A_r$ – базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Так как $A_1, \ldots, A_r$ – линейно независимая часть системы $A_1, \ldots, A_n, B$ и $r(A_1, \ldots, A_n, B)$ равен числу векторов в части $A_1, \ldots, A_r$, то из теоремы 2.13 получаем, что $A_1, \ldots, A_r$ – базис системы $A_1, \ldots, A_n, B$. Следовательно, вектор B разлагается по векторам $A_1, \ldots, A_r$:

$$B = k_1A_1 + \ldots + k_rA_r.$$

Отсюда следует, что

$$B = k_1A_1 + \ldots + k_rA_r + 0A_{r+1} + \ldots + 0A_n. \tag{5.4}$$

Вектор $(k_1, \ldots, k_r, 0, \ldots, 0)$ является решением системы уравнений (5.1), так как после подстановки его координат в эту систему получим верное векторное соотношение (5.4). ■

Матрица $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$, столбцами которой являются векторы – коэффициенты $A_1, A_2, ..., A_n$ при неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, называется **матрицей системы линейных уравнений** (5.1). Обозначим через $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ неизвестный вектор. Так как $AX = A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n$, то систему линейных уравнений (5.1) можно записать в *векторно-матричной* форме

$$AX = B. \tag{5.5}$$

Вектор K будет решением системы линейных уравнений тогда и только тогда, когда $AK = B$ – верное векторное равенство.

Расширенной матрицей системы линейных уравнений (5.1) называется матрица $A^* = (A_1, ..., A_n, B)$, столбцами которой являются векторы – коэффициенты при неизвестных и столбец свободных членов.

Заметим, что ранг системы векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ равен рангу матрицы A системы уравнений (5.1), а ранг системы векторов $A_1, ..., A_n, B$ равен рангу расширенной матрицы A^*. Теперь **теорему Кронекера–Капелли** можно сформулировать следующим образом: *система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда* $r(A) = r(A^*)$.

5.2. Системы линейных уравнений с квадратной матрицей

Рассмотрим систему линейных уравнений (5.5) с квадратной матрицей A. Количество столбцов матрицы A равно числу неизвестных в системе (5.5), а число строк этой матрицы – числу уравнений. Следовательно, в системе уравнений с квадратной матрицей число уравнений равно числу неизвестных.

❑ **Теорема 5.2.** Если в системе уравнений (5.5) определитель квадратной матрицы A не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение, равное $A^{-1}B$.

Доказательство. Так как по условию $\det A \neq 0$, то из следствия к четвертому свойству определителей (см. параграф 4.2) вытекает, что A – невырожденная матрица, и поэтому матрица A обратима (см. теорему 3.3). Теперь утверждение теоремы следует из цепочки равносильных утверждений:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \ \blacksquare$$

В следующей теореме приведены выражения для координат решения $A^{-1}B$.

❑ **Теорема 5.3.** Если определитель матрицы системы $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B$ линейных уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение $K = (k_1, k_2, ..., k_n)$, координаты которого вычисляются по **формулам Крамера**:

$k_1 = d_1/d, \quad k_2 = d_2/d, \ldots, k_n = d_n/d,$

где

$$\begin{aligned}
d &= \det(A_1, A_2, \ldots, A_n),\\
d_1 &= \det(B, A_2, \ldots, A_n),\\
d_2 &= \det(A_1, B, \ldots, A_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_n &= \det(A_1, A_2, \ldots, B).
\end{aligned}$$

Доказательство. Из теоремы 5.2 вытекает, что данная система уравнений имеет единственное решение, которое обозначим через $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Тогда $A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n = B$.

Докажем сначала, что $k_1 = d_1/d$. Заметим, что система векторов A_i, $A_2, \ldots, A_n$ при любом $i \geqslant 2$ содержит два равных вектора, а следовательно, линейно зависима, и, в силу первого свойства определителей (см. параграф 4.2), $\det(A_i, A_2, \ldots, A_n) = 0$ при $i \geqslant 2$.

Теперь, используя свойства определителей, имеем

$$\begin{aligned}
d_1 &= \det(B, A_2, \ldots, A_n) = \det(A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_nk_n, A_2, \ldots, A_n) =\\
&= k_1 \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) + k_2 \det(A_2, A_2, \ldots, A_n) + \ldots +\\
&+ k_n \det(A_n, A_2, \ldots, A_n) = k_1 \det(A_1, A_2, \ldots, A_n),
\end{aligned}$$

т. е.

$$d_1 = k_1 \det(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Отсюда находим, что $k_1 = d_1/d$. Аналогично устанавливается, что $k_2 = d_2/d, \ldots, k_n = d_n/d$. ■

❍ **Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5,\\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8,\\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Вычислим определитель матрицы системы уравнений

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0\\ 5 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2\\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно найти при помощи формул Крамера. Вычислим определители:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -2\\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0\\ 20 & 5 & 0\\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2\\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 15,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1\\ 3 & 8 & -2\\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 0\\ 5 & 20 & 0\\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11\\ 5 & 20 \end{vmatrix} = 5,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = 3, \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = 1, \quad x_3 = \frac{d_3}{d} = 2. \bullet$$

Используя формулы Крамера, можно получить выражение для элементов матрицы A^{-1}.

❑ **Теорема 5.4.** Если $A = (a_{ij})$ – обратимая матрица, а $A^{-1} = (b_{ij})$ – обратная матрица для A, то

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A},$$

где A_{ji} – матрица, которая получается из A путем вычеркивания в ней j-й строки и i-го столбца.

Доказательство. Теорема 3.3 утверждает, что элементы j-го столбца $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ матрицы A^{-1} являются единственным решением системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = E_j. \tag{5.6}$$

Так как матрица A обратима, то A – невырожденная матрица (см. теорему 3.2) и $\det A \neq 0$.

Теперь из теоремы 5.3 следует, что единственное решение $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ системы (5.6) можно найти по формулам Крамера:

$$b_{ij} = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, E_j, A_{i+1}, \ldots, A_n)}{\det A}. \tag{5.7}$$

Заметим, что i-й столбец матрицы $(A_1, \ldots, A_{i-1}, E_j, A_{i+1}, \ldots, A_n)$ содержит единственный ненулевой элемент, равный единице, на том месте, которое в матрице A занимает элемент a_{ji}.

Разлагая $\det (A_1, \ldots, A_{i-1}, E_j, A_{i+1}, \ldots, A_n)$ по i-му столбцу, получим

$$\det (A_1, \ldots, E_j, \ldots, A_n) = (-1)^{j+i} \det A_{ji}. \tag{5.8}$$

Из сопоставления формул (5.7) и (5.8) находим

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}. \blacksquare$$

○ **Пример.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить элемент b_{12} матрицы A^{-1}, расположенный в первой строке и во втором столбце.

Имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \frac{\det A_{21}}{\det A} = \frac{1}{2}. \quad \bullet$$

Задачи.

1. Используя формулы Крамера, решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6. \end{cases}$

2. Вычислить элементы b_{23} и b_{43} матрицы A^{-1}, обратной для матрицы A:

а) $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$ б) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

3. Показать, что если система линейных уравнений, у которой число неизвестных на единицу меньше числа уравнений, совместна, то определитель расширенной матрицы равен нулю.

4. Установить, что система уравнений, число уравнений которой на единицу больше числа неизвестных, совместна, если ранг матрицы системы уравнений равен числу неизвестных, а определитель расширенной матрицы равен нулю.

5. Доказать, что система уравнений $AX = B$ с квадратной матрицей совместна, если система $AX = \theta$ имеет единственное решение.

5.3. Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены этой системы равны нулю. Однородная система уравнений в *векторной* форме имеет вид

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta,$$

а в *векторно-матричной* форме –

$$AX = \theta,$$

где $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Однородная система уравнений $AX = \theta$ обладает следующими свойствами:

1. Если K_1 и K_2 – решения однородной системы, то $K_1 + K_2$ является решением системы.

Действительно, по условию $AK_1 = \theta$ и $AK_2 = \theta$. Отсюда следует, что $A(K_1 + K_2) = AK_1 + AK_2 = \theta + \theta = \theta$.

2. Если K – решение однородной системы, то lK также решение этой системы (l – число).

Из $AK = \theta$ следует, что $A(lK) = l(AK) = l\theta = \theta$.

Из этих свойств вытекает, что любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Поэтому естественно стремиться найти такие линейно независимые решения однородной системы, по которым разлагаются все ее решения.

Линейно независимые решения $F_1, F_2, \ldots, F_k$ однородной системы уравнений называются **фундаментальной системой решений**, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией решений $F_1, F_2, \ldots, F_k$.

❑ **Теорема 5.5.** Однородная система уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta, r(A_1, A_2, \ldots, A_n) < n \tag{5.9}$$

обладает фундаментальной системой решений, которая содержит $n - r$ векторов, где r – ранг системы векторов $A_1, \ldots, A_n$.

Доказательство. Однородная система уравнений (5.9) всегда совместна, так как вектор $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ является ее решением. Следовательно, методом Гаусса можно найти ее общее решение

$$A'_1x_1 + A'_2x_2 + \ldots + A'_nx_n = \theta. \qquad (5.10)$$

В наборе разрешенных неизвестных системы (5.10) столько неизвестных, сколько векторов в диагональной части системы $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ (см. теорему 2.8) и, значит, в базисе системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (см. теорему 2.9). Так как $r(A_1, \ldots, A_n) = r$, то в этом наборе r неизвестных. Пусть, для определенности, $x_1, \ldots, x_r$ – набор разрешенных неизвестных системы (5.10). Тогда $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – свободные неизвестные этой системы (см. параграф 1.3). Рассмотрим $n - r$ наборов значений для свободных неизвестных:

$$\begin{array}{l} x_{r+1} = 1, \;\; x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0; \\ x_{r+1} = 0, \;\; x_{r+2} = 1, \ldots, x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+1} = 0, \;\; x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 1 \end{array}$$

(в каждом наборе только одному неизвестному придается значение 1).

Из теоремы 1.2 следует, что эти наборы значений свободных неизвестных определяют решения системы (5.10):

$$\begin{array}{l} F_1 = (\ldots, 1, 0, \ldots, 0), \\ F_2 = (\ldots, 0, 1, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-r} = (\ldots, 0, 0, \ldots, 1) \end{array}$$

(первые координаты этих векторов не выписаны, так как в доказательстве теоремы они не используются).

Докажем, что $F_1, F_2, \ldots, F_{n-r}$ является фундаментальной системой решений системы уравнений (5.10). Покажем сначала, что $F_1, F_2, \ldots, F_{n-r}$ – линейно независимая система решений. Действительно, пусть

$$k_1F_1 + k_2F_2 + \ldots + k_{n-r}F_{n-r} = \theta.$$

Так как

$$k_1F_1 + k_2F_2 + \ldots + k_{n-r}F_{n-r} = (\ldots, k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}),$$

то из равенства последних $n - r$ координат векторов $k_1F_1 + k_2F_2 + \ldots + k_{n-r}F_{n-r}$ и θ имеем

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_{n-r} = 0.$$

Отсюда следует (см. параграф 2.5) линейная независимость системы векторов $F_1, F_2, \ldots, F_{n-r}$.

Теперь покажем, что произвольное решение $L = (\ldots, l_{r+1}, l_{r+2}, \ldots, l_n)$ системы уравнений (5.10) разлагается по системе $F_1, F_2, \ldots, F_{n-r}$. Для этого установим, что вектор

$$L_0 = l_{r+1}F_1 + l_{r+2}F_2 + \ldots + l_nF_{n-r} - L \qquad (5.11)$$

равен нулевому вектору.

Так как вектор L_0 равен линейной комбинации решений системы (5.10), то он сам является решением этой системы. Используя (5.11), покажем, что значения свободных неизвестных x_{r+1}, ..., x_n у вектора L_0 равны нулю:

$$L_0 = l_{r+1}(\ldots, 1, 0, \ldots, 0) + l_{r+2}(\ldots, 0, 1, \ldots, 0) + \ldots +$$
$$+ l_n(\ldots, 0, 0, \ldots, 1) - (\ldots, l_{r+1}, l_{r+2}, \ldots, l_n) = (\ldots, 0, 0, \ldots, 0).$$

Поскольку у решения θ системы (5.10) значения свободных неизвестных x_{r+1}, ..., x_n также равны нулю, то из теоремы 1.2 следует, что $L_0 = \theta$. Теперь из равенства (5.11) вытекает, что

$$L = l_{r+1}F_1 + l_{r+2}F_2 + \ldots + l_nF_{n-r}.$$

Так как системы уравнений (5.9) и (5.10) равносильны, то F_1, F_2, ..., F_{n-r} – фундаментальная система решений системы уравнений (5.9). ■

Из доказанной теоремы вытекает следующий алгоритм построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta,$$

у которой ранг r системы векторов A_1, A_2, ..., A_n меньше числа n неизвестных.

1. Найти общее решение однородной системы уравнений.

2. Выписать диагональную систему $(n - r)$-мерных векторов: $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $E_{n-r} = (0, 0, \ldots, 1)$, где r – число разрешенных неизвестных в общем решении, найденном в первом пункте, а n – число неизвестных в системе.

3. Подставить в общее решение вместо свободных неизвестных координаты вектора E_1, а затем найти значения разрешенных неизвестных. Полученная совокупность значений неизвестных определяет решение F_1.

4. Аналогично с помощью векторов E_2, ..., E_{n-r} найти решения F_2, ..., F_{n-r}.

5. Полученные решения F_1, F_2, ..., F_{n-r} образуют фундаментальную систему решений.

○ **Пример.** Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение данной системы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	−2	2	$\boxed{-1}$	4
5	1	4	−2	7
1	−5	0	0	1
4	−7	2	−1	5

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
−3	2	−2	1	−4
$\boxed{-1}$	5	0	0	−1
1	−5	0	0	1
1	−5	0	0	1

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	−13	−2	1	−1
1	−5	0	0	1

Получим общее решение

$$\begin{cases} -13x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

с набором разрешенных неизвестных x_1, x_4. Так как $n = 5$, $r = 2$, то выпишем диагональную систему 3-мерных векторов: $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$. Выберем для свободных неизвестных x_2, x_3, x_5 значения, равные координатам векторов E_1, E_2, E_3. Тогда получим три набора значений для свободных неизвестных:

$x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_5 = 0;$
$x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_5 = 0;$
$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_5 = 1.$

Подставляя значения свободных неизвестных $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$ в систему (5.12), найдем значения разрешенных неизвестных: $x_1 = 5$, $x_4 = 13$. Полученная совокупность значений неизвестных определяет решение

$F_1 = (5, 1, 0, 13, 0).$

Аналогично находим решения

$F_2 = (0, 0, 1, 2, 0),$

$F_3 = (-1, 0, 0, 1, 1).$

Векторы F_1, F_2, F_3 образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы уравнений. ●

Задачи.

1. Найти фундаментальную систему однородных систем уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

2. Доказать, что любые два решения однородной системы пропорциональны тогда и только тогда, когда $n = r + 1$, где n – число неизвестных, а r – ранг матрицы системы уравнений.

3. Доказать, что система линейно независимых решений $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ однородной системы уравнений будет фундаментальной, если $k = n - r$, где n – число неизвестных, а r – ранг матрицы системы уравнений.

5.4. Общее решение системы уравнений в векторной форме

Рассмотрим совместную систему линейных уравнений, записанную в ***векторно-матричной*** форме:

$$AX = B. \tag{5.13}$$

Если в системе (5.13) заменить все свободные члены нулями, то получим однородную систему

$$AX = \theta, \tag{5.14}$$

которую называют **приведенной** для системы (5.13).

В следующей теореме приводится формула, которая называется ***общим решением*** системы уравнений (5.13).

❑ **Теорема 5.6.** Произвольное решение X совместной системы уравнений (5.13) определяется формулой

$$X = K + t_1F_1 + t_2F_2 + \ldots + t_kF_k, \tag{5.15}$$

где K – какое-нибудь решение системы (5.13); $F_1, F_2, \ldots, F_k$ – фундаментальная система решений системы уравнений (5.14); $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – произвольные числа.

Доказательство. Сначала покажем, что при помощи формулы (5.15) получаются только решения системы уравнений (5.13), т. е. что вектор (5.15) является решением системы уравнений (5.13) при любых значениях $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Имеем

$$A(K + t_1F_1 + \ldots + t_kF_k) = AK + t_1AF_1 + \ldots + t_kAF_k =$$
$$= B + t_1\theta + \ldots + t_k\theta = B,$$

т. е. вектор (5.15) – решение системы (5.13).

Теперь установим, что каждое решение L системы уравнений (5.13) можно представить в виде (5.15). Так как L и K – решения системы уравнений (5.13), то $AL = B$, $AK = B$. Отсюда

$$A(L - K) = AL - AK = B - B = \theta,$$

т. е. вектор $L - K$ является решением однородной системы уравнений (5.14) и, значит, разлагается по ее фундаментальной системе решений $F_1, F_2, \ldots, F_k$:

$$L - K = p_1F_1 + p_2F_2 + \ldots + p_kF_k.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$L = K + p_1F_1 + p_2F_2 + \ldots + p_kF_k.$$

Следовательно, решение L получается из формулы (5.15) при $t_1 = p_1$, $t_2 = p_2, \ldots, t_k = p_k$. ■

Замечание. Общее решение однородной системы уравнений в *векторной* форме имеет вид

$$X = t_1F_1 + \ldots + t_kF_k,$$

где $F_1, \ldots, F_k$ – фундаментальная система решений данной однородной системы, а $t_1, \ldots, t_k$ – произвольные действительные числа.

В самом деле, в формуле (5.15) в качестве решения K можно взять вектор θ.

❍ **Примеры.**

1. Найти в векторной форме общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -2, \\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases}$$

Найдем методом Гаусса общее решение данной системы уравнений:

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	1	4	1	2
1	5	5	−4	−2
0	3	2	−3	−2
−1	4	1	−5	−4

→

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	9	6	−9	−6
0	9	6	−9	−6
0	3	2	−3	−2
1	−4	−1	5	4

→

x_1	x_2	x_3	x_4	
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	$^3/_2$	1	$-^3/_2$	−1
1	$-^5/_2$	0	$^7/_2$	3

Общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{3}{2}x_4 = -1, \\ x_1 - \frac{5}{2}x_2 \qquad + \frac{7}{2}x_4 = 3, \end{cases} \tag{5.16}$$

а общее решение приведенной однородной системы –

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0, \\ x_1 - \frac{5}{2}x_2 \qquad + \frac{7}{2}x_4 = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Найдем какое-нибудь решение K системы уравнений (5.16). Для этого придадим свободным неизвестным x_2, x_4 какие-нибудь значения, например $x_2 = x_4 = 0$. Тогда $x_3 = -1$, $x_1 = 3$ и $K = (3, 0, -1, 0)$.

Теперь найдем фундаментальную систему решений приведенной однородной системы уравнений.

Подставляя наборы значений для свободных неизвестных

$x_2 = 1, \quad x_4 = 0;$
$x_2 = 0, \quad x_4 = 1$

в общее решение (5.17) приведенной однородной системы, получим решения $F_1 = (^5/_2, 1, -^3/_2, 0)$, $F_2 = (-^7/_2, 0, ^3/_2, 1)$, которые образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, общее решение данной системы уравнений в *векторной* форме имеет вид

$$X = K + t_1F_1 + t_2F_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} ^5/_2 \\ 1 \\ -^3/_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -^7/_2 \\ 0 \\ ^3/_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где t_1 и t_2 – произвольные числа.

2. Найти в векторной форме общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдем методом Гаусса общее решение данной системы уравнений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	3	2	5	–2
1	1	1	1	1
9	8	7	7	6

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	3	–4
1	1	1	1	1
2	1	0	0	–1

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	3	–4
–1	0	1	–2	5
0	0	0	–3	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	0	–1
–1	0	1	0	3
0	0	0	1	–1

Общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_5 = 0, \\ -x_1 \qquad + x_3 \qquad + 3x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Свободными неизвестными этой системы уравнений являются x_1 и x_5. Наборы значений этих неизвестных

$x_1 = 1, \quad x_5 = 0;$

$x_1 = 0, \quad x_5 = 1$

определяют соответственно решения $F_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$ и $F_2 = (0, 1, -3, 1, 1)$, которые образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы уравнений. Следовательно, общее решение исходной системы уравнений в *векторной* форме имеет вид

$$X = t_1(1, -2, 1, 0, 0) + t_2(0, 1, -3, 1, 1),$$

где t_1 и t_2 — произвольные числа. ●

Задачи.

Найти в векторной форме общее решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 16x_2 + 7x_3 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 0x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

6. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

6.1. Уравнение фигуры

Геометрической фигурой или просто **фигурой** на плоскости будем называть множество точек на плоскости. Задать фигуру – значит указать, из каких точек плоскости она состоит. Одним из важных способов задания фигуры на плоскости является ее задание при помощи уравнений с двумя неизвестными. Произвольное уравнение с двумя неизвестными x и y будем записывать в виде $F(x, y) = 0$.

Выберем на плоскости некоторую прямоугольную систему координат. В этой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$ называется **уравнением фигуры** Ф при выполнении следующих двух условий:

1) если точка $M(a, b)$ принадлежит фигуре Ф, то координаты (a, b) точки M являются решением уравнения $F(x, y) = 0$, т. е. $F(a, b) = 0$ – верное числовое равенство;

2) если же пара чисел (c, d) является решением уравнения $F(x, y) = 0$, то точка N, координатами которой служат числа c и d, принадлежит фигуре Ф.

Это определение в более компактной записи выглядит следующим образом. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется **уравнением фигуры Ф**, если

$$M(a, b) \in \Phi \Leftrightarrow (a, b) \text{ – решение уравнения } F(x, y) = 0.$$

Из определения уравнения фигуры следует, что фигура Ф состоит только из тех точек плоскости, координаты которых являются решениями уравнения $F(x, y) = 0$, т. е. уравнение фигуры задает эту фигуру.

Возможны два вида задач:

1) дано уравнение $F(x, y) = 0$, и надо построить фигуру Ф, уравнением которой является $F(x, y) = 0$;

2) дана фигура Ф, и надо найти уравнение этой фигуры.

Первая задача сводится к построению графика уравнения $F(x, y) = 0$ и решается чаще всего методами математического анализа.

Для решения второй задачи, как следует из определения уравнения фигуры, достаточно:

1) задать фигуру геометрически, т. е. сформулировать условие, которому удовлетворяют только точки фигуры (довольно часто определение фигуры содержит такое условие);

2) записать в координатах условие, сформулированное в первом пункте.

❍ **Примеры.**

1. *Уравнение окружности.* Окружность Ф с центром в точке O и радиусом R задается условием

$$M \in \Phi \Leftrightarrow \rho(O, M) = R, \qquad (6.1)$$

где $\rho(O, M)$ – расстояние между точками O и M.

Запишем условие (6.1) в координатах. Пусть центр O окружности имеет координаты (a, b), а через (x, y) обозначим координаты произвольной точки. Тогда условие (6.1) в координатах имеет вид

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R.$$

Это уравнение является ***уравнением окружности*** Ф. Возведя обе его части в квадрат, получим равносильное уравнение, которое называется *каноническим* уравнением окружности:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2. *Уравнение эллипса.* Фигура Ф, состоящая из всех точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (рис. 6.1) есть положительная постоянная, обозначаемая через $2a$, причем $2a > \rho(F_1, F_2)$, называется **эллипсом**.

Это определение можно записать в следующем виде:

$$M \in \Phi \Leftrightarrow \rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = 2a;\ 2a > \rho(F_1, F_2). \qquad (6.2)$$

Запишем условие (6.2) в координатах. Для этого выберем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой F_1F_2, начало координат делило отрезок между точками F_1 и F_2 пополам и абсцисса точки F_2 была положительной.

Обозначим расстояние между точками F_1 и F_2 через $2c$. Тогда в выбранной системе координат

$$F_1(-c, 0),\ F_2(c, 0);$$

$$\rho(M, F_1) = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad \rho(M, F_2) = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

где (x, y) – координаты произвольной точки M.

Теперь условие (6.2) в координатах имеет вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (6.3)$$

Это уравнение является ***уравнением эллипса.***

Можно доказать, что уравнение (6.2) равносильно уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2,$$

которое называется ***каноническим*** уравнением эллипса.

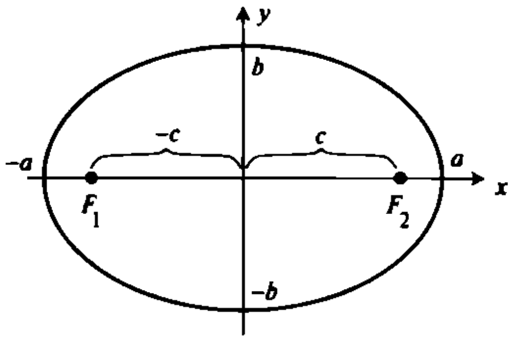


Рис. 6.1

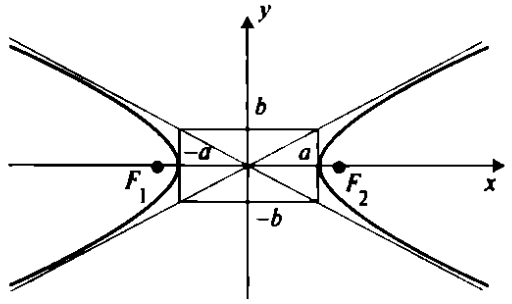


Рис. 6.2

3. *Уравнение гиперболы.* Фигура Ф, состоящая из всех точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (рис. 6.2) есть положительная постоянная, обозначаемая через $2a$, причем $2a < \rho(F_1, F_2)$, называется **гиперболой**.

Это определение можно записать в следующем виде

$$M \in \Phi \Leftrightarrow |\rho(M, F_1) - \rho(M, F_2)| = 2a. \tag{6.4}$$

Запишем условие (6.4) в координатах. Для этого выберем прямоугольную систему координат так же, как и в случае с эллипсом. Тогда если $\rho(F_1, F_2) = 2c$, то в выбранной системе координат

$$F_1(-c, 0),\ F_2(c, 0);$$

$$\rho(M, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad \rho(M, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

где (x, y) – координаты произвольной точки M.

Теперь условие (6.4) в координатах имеет вид

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a. \tag{6.5}$$

Это уравнение является ***уравнением гиперболы***.

Можно доказать, что уравнение (6.5) равносильно уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2,$$

которое называется *каноническим* уравнением гиперболы. ●

Пусть теперь дана фигура Ф в пространстве. Уравнение с тремя неизвестными $F(x, y, z) = 0$ называется ***уравнением фигуры*** Ф, если $M(a, b, c) \in \Phi \Leftrightarrow (a, b, c)$ – решение уравнения $F(x, y, z) = 0$.

◯ **Пример.** *Уравнение сферы.* Сфера Φ с центром в точке O и радиусом R задается условием

$$M \in \Phi \Leftrightarrow \rho(O, M) = R. \qquad (6.6)$$

Если (a, b, c) – координаты центра O, а (x, y, z) – координаты произвольной точки, то условие (6.6) в координатах имеет вид

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

Это уравнение является ***уравнением сферы***. Возведя его в квадрат, получим

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \qquad (6.7)$$

Уравнение (6.7) называется *каноническим* уравнением сферы. ●

6.2. Уравнения прямой на плоскости

Чтобы написать уравнение прямой l, ее надо задать. Существуют разные способы задания прямой, что приводит к различным по форме уравнениям, которые, конечно, равносильны, так как имеют одно и то же множество решений – координаты точек прямой l.

Общее уравнение прямой

Зададим прямую l при помощи точки M_0 (x_0, y_0), принадлежащей этой прямой, и ненулевого вектора[1] $\nu = (a, b)$, перпендикулярного прямой l.

Эти условия однозначно задают прямую, так как через точку перпендикулярно вектору можно провести только одну прямую.

❑ **Теорема 6.1.** Уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (6.8)$$

является уравнением прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\nu = (a, b)$.

Доказательство. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка прямой l. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Теперь имеем $M \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \nu \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\nu = 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$. ■

Каждый ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой, называется ее **нормальным вектором**.

Уравнение

$$ax + by + c = 0 \qquad (6.9)$$

[1] В этой главе векторы обозначены буквами греческого алфавита.

называется **уравнением первого порядка**, если хотя бы один из коэффициентов a и b не равен нулю.

Из теоремы 6.1 следует, что уравнением любой прямой является уравнение первого порядка. Выясним, будет ли каждое уравнение первого порядка уравнением прямой?

❑ **Теорема 6.2.** Уравнение первого порядка (6.9) является уравнением прямой.

Доказательство. Необходимо построить прямую, уравнением которой является уравнение (6.9).

Сначала покажем, что уравнение (6.9) имеет решение. Легко проверить, что пара чисел

$$x_0 = \frac{-ac}{a^2+b^2}, \quad y_0 = \frac{-bc}{a^2+b^2}$$

является решением уравнения (6.9), т. е.

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \tag{6.10}$$

Обозначим точку с координатами (x_0, y_0) через M_0, а через ν – вектор, координатами которого являются коэффициенты при неизвестных в уравнении (6.9), т. е. $\nu = (a, b)$. Так как (6.9) – уравнение первого порядка, то $\nu \neq \theta$.

Теперь обозначим через l прямую, которая проходит через точку M_0 перпендикулярно вектору ν, и покажем, что (6.9) – уравнение прямой l.

В уравнении (6.9) вместо c подставим его выражение из (6.10):

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Отсюда

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{6.11}$$

Уравнения (6.11) и (6.9) равносильны, так как (6.11) получено из (6.9) при помощи тождественных преобразований.

Теперь из теоремы 6.1 следует, что (6.11) – уравнение прямой l, и поэтому уравнение (6.9) также является уравнением прямой l, так как равносильные уравнения задают одну и ту же фигуру. ■

Замечание. Из доказательства теоремы 6.2 следует, что вектор $\nu = (a, b)$ перпендикулярен прямой (6.9).

Уравнение (6.9) называется **общим уравнением прямой**.

❍ **Примеры.**

1. Дана прямая $3x - y + 4 = 0$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 2)$ параллельно данной прямой.

Из замечания к теореме 6.2 следует, что вектор $\nu = (3, -1)$ перпендикулярен данной прямой. Так как данная и искомая прямые параллельны, то вектор $\nu = (3, -1)$ перпендикулярен искомой прямой. Теперь из теоремы 6.1 следует, что прямая, параллельная данной, имеет уравнение

$$3(x+1)-(y-2)=0$$

или

$$3x-y+5=0.$$

2. Даны вершины треугольника $A(1,-1)$, $B(-2,1)$, $C(2,4)$. Написать уравнение высоты AD, опущенной из вершины A на сторону BC.

Высота AD перпендикулярна вектору $\overrightarrow{BC}=(4,3)$ и проходит через точку $A(1,-1)$. Следовательно, согласно теореме 6.1 ее уравнение имеет вид

$$4(x-1)+3(y+1)=0$$

или

$$4x+3y-1=0. \bullet$$

Параметрическое уравнение прямой

Зададим прямую l на плоскости при помощи точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей этой прямой, и ненулевого вектора $\mu=(m, n)$, параллельного прямой l. Данные условия однозначно определяют прямую, так как через точку параллельно вектору можно провести только одну прямую.

❑ **Теорема 6.3.** Уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad t\in \mathbf{R}, \tag{6.12}$$

является уравнением прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\mu=(m, n)$.

Доказательство. Обозначим через $M(x_1, y_1)$ произвольную точку прямой l. Тогда

$$M\in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\parallel \mu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}=t\mu,\ t\in\mathbf{R} \Leftrightarrow \vec{M}-\vec{M}_0=t\mu^{1},\ t\in\mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{M}=\vec{M}_0+t\mu,\ t\in\mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + mt, \\ y_1 = y_0 + nt, \end{cases} \quad t\in\mathbf{R}. \blacksquare$$

---

[1] Вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, называется *радиус-вектором* точки M и обозначается через $\vec{M}$, т. е. $\overrightarrow{OM}=\vec{M}$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM_2}=-\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\vec{M}_2-\vec{M}_1$, т. е. $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{M}_2-\vec{M}_1$.

При изменении t величи́ны x и y в уравнении (6.12) будут меняться и точка $N(x, y)$ будет перемещаться вдоль прямой. Каждому значению t соответствует единственное положение точки N на прямой. Уравнение (6.12) называется **параметрическим уравнением прямой**, а переменная t — **параметром**.

Замечание. При доказательстве теоремы 6.3 установлено, что

$$M \in l \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{M}_0 + t\mu, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Уравнение $\vec{M} = \vec{M}_0 + t\mu$ будем называть параметрическим уравнением прямой l, проходящей через точку M_0 параллельно вектору μ, в *векторной* форме.

Каждый вектор, параллельный прямой, называется **направляющим вектором** этой прямой.

○ **Примеры.**

1. Найти абсциссу точки, принадлежащей прямой

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 + 2t, \end{cases}$$

с ординатой, равной 3.

Пусть координаты искомой точки $(x_0, 3)$. Тогда

$$\begin{cases} x_0 = 2 - t, \\ 3 = 3 + 2t. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x_0 = 2$.

2. Выяснить, принадлежат ли точки $A(2, 1)$ и $B(11, -3)$ прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t. \end{cases} \tag{6.13}$$

Если точка A принадлежит данной прямой, то найдется такое значение параметра t, которое является решением системы

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2t, \\ 1 = 2 - t. \end{cases} \tag{6.14}$$

Так как система (6.14) не имеет решений, то точка A не принадлежит прямой (6.13).

После подстановки координат точки B в уравнение прямой (6.13) получим систему

$$\begin{cases} 11 = 1 + 2t, \\ -3 = 2 - t, \end{cases}$$

которая имеет решение $t = 5$. Следовательно, точка B принадлежит прямой (6.13).

3. Написать уравнение прямой l, проходящей через две точки $A(1, 2)$ и $B(-3, 1)$.

Вектор $\overrightarrow{AB} = (-4, -1)$ параллелен прямой l, а точка $A(1, 2)$ принадлежит этой прямой. Следовательно, параметрическое уравнение прямой l имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 2 - t. \end{cases}$$

4. Написать параметрическое уравнение прямой $2x + y - 1 = 0$. Полагаем $x = t$. Из уравнения данной прямой находим $y = 1 - 2x$. Наконец,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

— параметрическое уравнение данной прямой, так как оно равносильно данному уравнению.

5. Написать общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + 2t. \end{cases}$$

Исключая параметр t из системы, получим общее уравнение данной прямой

$$-2x + y + 5 = 0. \ \bullet$$

Уравнение отрезка

Найдем уравнение прямой l, проходящей через точки M_1 и M_2. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ параллелен прямой l, то ее параметрическое уравнение в векторной форме имеет вид

$$\vec{M} = \vec{M_1} + t\,\overrightarrow{M_1M_2}, \ t \in \mathbf{R}.$$

При $t = 0$ точка M совпадает с точкой M_1. При увеличении параметра t точка M перемещается по прямой l от точки M_1 к точке M_2, а при $t = 1$ точка M совпадает с точкой M_2 (рис. 6.3).

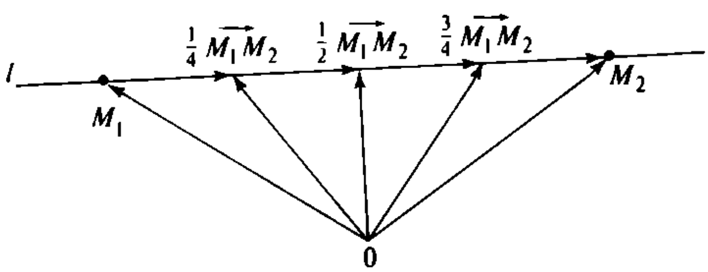


Рис. 6.3

Поэтому уравнение

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + t\,\overrightarrow{M_1M_2},\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

является параметрическим уравнением отрезка $[M_1, M_2]$ в *векторной* форме. Так как $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$, то уравнение отрезка можно записать в следующем виде

$$\vec{M} = (1-t)\vec{M}_1 + t\vec{M}_2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (6.15)$$

Пусть точки M, M_1 и M_2 имеют соответственно координаты (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда

$$\vec{M} = (x, y),\ (1-t)\vec{M}_1 + t\vec{M}_2 = ((1-t)x_1 + tx_2;\ (1-t)y_1 + ty_2).$$

Теперь из векторного равенства (6.15) следует, что соответствующие координаты векторов $\vec{M}$ и $(1-t)\vec{M}_1 + t\vec{M}_2$ равны, т. е.

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y = (1-t)y_1 + ty_2, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (6.16)$$

Система (6.16) называется **параметрическим уравнением отрезка**.

6.3. Полуплоскости

Пусть даны прямая l и ν – нормальный вектор этой прямой. Все точки плоскости, не принадлежащие прямой l, разобьем на два множества Π_1^ν и Π_2^ν (рис. 6.4).

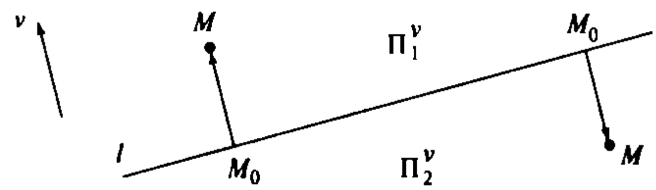


Рис. 6.4

Множеству Π_1^ν (Π_2^ν) принадлежат все точки M плоскости, для которых векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и ν одинаково (противоположно) направлены, где M_0 – проекция точки M на прямую l, т. е.

$$M \in \Pi_1^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \nu,$$

$$M \in \Pi_2^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \nu.$$

Множества Π_1^{ν} и Π_2^{ν} называют **полуплоскостями**. **Разбиение плоскости на две полуплоскости определяется только прямой l и не зависит от выбора нормального вектора этой прямой. Действительно, если ν_1 – другой нормальный вектор прямой l, то $\nu_1 \parallel \nu$, а следовательно, $\nu \uparrow\uparrow \nu_1$** или $\nu \uparrow\downarrow \nu_1$. В первом случае $\Pi_1^{\nu} = \Pi_1^{\nu_1}, \Pi_2^{\nu} = \Pi_2^{\nu_1}$, а во втором случае $\Pi_1^{\nu} = \Pi_2^{\nu_1}, \Pi_2^{\nu} = \Pi_1^{\nu_1}$.

Таким образом, от выбора нормального вектора зависят не сами полуплоскости, а только индекс (1 или 2), которым они будут снабжены.

❑ **Теорема 6.4.** Каждая прямая l, заданная уравнением

$$ax + by + c = 0, \tag{6.17}$$

разбивает плоскость на две полуплоскости Π_1^{ν} и Π_2^{ν}, где ν – нормальный вектор прямой (6.17), причем точки полуплоскости Π_1^{ν} являются решениями неравенства

$$ax + by + c > 0,$$

а точки полуплоскости Π_2^{ν} – решениями неравенства

$$ax + by + c < 0.$$

Доказательство. Пусть точка $M(x_1, y_1)$ не принадлежит l, а $M_0(x_0, y_0)$ – ее проекция на эту прямую. Тогда

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \tag{6.18}$$

Теперь, согласно (6.18) и учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $\nu = (a, b)$, имеем

$$ax_1 + by_1 + c = ax_1 + by_1 + c - ax_0 - by_0 - c =$$

$$= a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = \nu\overrightarrow{M_0M} = |\nu||\overrightarrow{M_0M}| \cos(\nu, \widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}),$$

т. е.

$$ax_1 + by_1 + c = |\nu||\overrightarrow{M_0M}| \cos(\nu, \widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}). \tag{6.19}$$

Используя соотношения (6.19), $|\nu| > 0$, $|\overrightarrow{M_0M}| > 0$, получим

$$M \in \Pi_1^{\nu} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \nu \Leftrightarrow \cos(\nu, \widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}) = 1 \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + c > 0,$$

$$M \in \Pi_2^{\nu} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \nu \Leftrightarrow \cos(\nu, \widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}) = -1 \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + c < 0. \blacksquare$$

✧ **Следствие.** Расстояние $\rho(M, l)$ от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, находится по формуле

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Из формулы (6.19) следует, что

$$|ax_1 + by_1 + c| = |\text{v}||\overrightarrow{M_0M}||\cos(\widehat{v, \overrightarrow{M_0M}})|.$$

Теперь из этого равенства, учитывая, что $|\cos(\widehat{v, \overrightarrow{M_0M}})| = 1$, $|\overrightarrow{M_0M}| = \rho(M, l)$, $|\text{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, находим

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. ✦$$

○ **Примеры.**

1. Определить, принадлежат ли точки $A(2, -1)$ и $B(3, 1)$ одной или разным полуплоскостям, на которые прямая $5x - 3y - 18 = 0$ разбивает плоскость.

Так как координаты точек A и B являются решениями одного и того же неравенства $5x - 3y - 18 < 0$, то они принадлежат одной полуплоскости.

2. Найти расстояние от точки $M(2, 5)$ до прямой l, заданной уравнением $3x + 4y - 1 = 0$. Имеем

$$\rho(M, l) = \frac{|2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5. ●$$

6.4. Уравнение плоскости

Сначала получим общее уравнение плоскости, затем построим его параметрическое уравнение и, наконец, определим способ перехода от параметрического уравнения плоскости к общему.

Общее уравнение плоскости

Зададим плоскость π при помощи точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой плоскости и ненулевого вектора $\text{v} = (a, b, c)$, перпендикулярного плоскости π. Эти условия однозначно задают плоскость, так как через точку перпендикулярно вектору можно провести только одну плоскость.

❑ **Теорема 6.5.** Уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (6.20)$$

является уравнением плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\text{v} = (a, b, c)$.

Доказательство. Пусть $M(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости π. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и

$$M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \mathrm{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\mathrm{v} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0. \blacksquare$$

Каждый ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется ее **нормальным вектором**.

Уравнение

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6.21}$$

называется **уравнением первого порядка**, если хотя бы один из коэффициентов a, b и c не равен нулю.

Из теоремы 6.5 следует, что уравнением любой плоскости является уравнение первого порядка. Выясним, будет ли каждое уравнение первого порядка с тремя неизвестными уравнением плоскости?

❑ **Теорема 6.6.** Уравнение первого порядка (6.21) является уравнением плоскости.

Доказательство. Необходимо построить плоскость, уравнением которой является уравнение (6.21).

Сначала покажем, что уравнение (6.21) имеет решение. Легко проверить, что тройка чисел

$$x_0 = \frac{-ad}{a^2 + b^2 + c^2},\ y_0 = \frac{-bd}{a^2 + b^2 + c^2},\ z_0 = \frac{-cd}{a^2 + b^2 + c^2}$$

является решением уравнения (6.21), т. е.

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \tag{6.22}$$

Обозначим точку с координатами (x_0, y_0, z_0) через M_0, а через v – вектор, координатами которого являются коэффициенты при неизвестных в уравнении (6.21), т. е. $\mathrm{v} = (a, b, c)$. Так как (6.21) – уравнение первого порядка, то $\mathrm{v} \neq \theta$.

Теперь обозначим через π плоскость, которая проходит через точку M_0 перпендикулярно вектору v, и покажем, что (6.21) – уравнение плоскости π.

В уравнении (6.21) вместо d подставим его выражение из (6.22):

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.$$

Отсюда

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{6.23}$$

Уравнения (6.23) и (6.21) равносильны, так как (6.23) получено из (6.21) при помощи тождественных преобразований.

Теперь из теоремы 6.5 следует, что (6.23) – уравнение плоскости π, поэтому уравнение (6.21) также является уравнением плоскости π, так как равносильные уравнения задают одну и ту же фигуру. ■

Замечание. Из доказательства теоремы 6.6 следует, что вектор $\nu = (a, b, c)$ перпендикулярен плоскости (6.21).

Уравнение (6.21) называется **общим уравнением плоскости**.

○ **Примеры.**

1. Написать уравнение плоскости π, которая проходит через точку $M(-2, 3, 4)$ параллельно плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$.

Из замечания к теореме 6.6 следует, что вектор $\nu = (1, -3, 2)$ перпендикулярен данной плоскости и, значит, плоскости π. Теперь из теоремы 6.5 следует, что уравнение плоскости π имеет вид

$$(x + 2) - 3(y - 3) + 2(z - 4) = 0$$

или

$$x - 3y + 2z + 3 = 0.$$

2. Написать уравнение плоскости π, которая перпендикулярна прямой AB, $A(9, 5, -1)$, $B(3, -4, 2)$, и пересекает эту прямую в точке $C(2, -1, 1)$.

Из условия следует, что вектор $\overrightarrow{AB} = (-6, -9, 3)$ перпендикулярен плоскости π. Из теоремы 6.5 следует, что уравнение плоскости π имеет вид

$$-6(x - 2) - 9(y + 1) + 3(z - 1) = 0$$

или

$$2x + 3y - z = 0. \bullet$$

Параметрическое уравнение плоскости

Зададим плоскость π при помощи точки M_0 этой плоскости и пары неколлинеарных векторов μ_1 и μ_2, которые параллельны π. Точка M_0 и пара векторов μ_1, μ_2 однозначно определяют плоскость, так как через точку параллельно двум неколлинеарным векторам можно провести только одну плоскость.

Переформулируем это задание плоскости в виде, более удобном для дальнейшей записи в координатах.

❑ **Теорема 6.7.** Даны точка M_0, принадлежащая плоскости π, и μ_1, μ_2 – неколлинеарные векторы, параллельные π.

Тогда

$$M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t_1\mu_1 + t_2\mu_2;\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \tag{6.24}$$

т. е. точка M тогда и только тогда принадлежит плоскости π, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ разлагается по векторам μ_1, μ_2.

Доказательство. *Необходимость.* Дано, что $M \in \pi$. Отложим векторы μ_1 и μ_2 от точки M_0 (рис. 6.5).

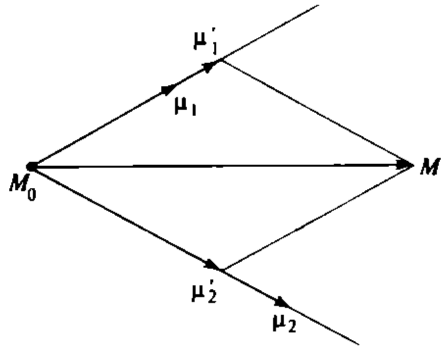


Рис. 6.5

Проведем через конец вектора $\overrightarrow{M_0M}$ прямые, параллельные векторам μ_1 и μ_2. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах μ_1' и μ_2', и поэтому $\overrightarrow{M_0M} = \mu_1' + \mu_2'$. Так как векторы μ_1 и μ_1', а также μ_2 и μ_2' коллинеарны, то $\mu_1' = t_1\mu_1$ и $\mu_2' = t_2\mu_2$. Отсюда $\overrightarrow{M_0M} = t_1\mu_1 + t_2\mu_2$.

Достаточность. Дано $\overrightarrow{M_0M} = t_1\mu_1 + t_2\mu_2$. Из этого равенства следует, что $\overrightarrow{M_0M}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $t_1\mu_1$ и $t_2\mu_2$. Поскольку векторы $t_1\mu_1$ и $t_2\mu_2$ лежат в плоскости π, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ также лежит в плоскости π и, значит, $M \in \pi$. ■

✧ **Следствие 1.** Условие (6.24) можно записать в виде

$$M \in \pi \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{M}_0 + t_1\mu_1 + t_2\mu_2;\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

Действительно, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{M} - \vec{M}_0$. Теперь утверждение следствия вытекает из условия (6.24). ✦

Уравнение

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + t_1\mu_1 + t_2\mu_2;\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \tag{6.25}$$

будем называть параметрическим уравнением плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно двум неколлинеарным векторам μ_1 и μ_2, в *векторной* форме.

✧ **Следствие 2.** Плоскость π, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\mu_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mu_2 = (m_2, n_2, p_2)$, имеет уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + m_1 t_1 + m_2 t_2, \\ y = y_0 + n_1 t_1 + n_2 t_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \\ z = z_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2, \end{cases} \tag{6.26}$$

В самом деле, если точка M имеет координаты (x, y, z), то условие (6.26) является *координатной* формой записи векторного равенства (6.25). ✦

Уравнение (6.26) называется **параметрическим уравнением плоскости**, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\mu_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mu_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

❍ **Примеры.**

1. Дана плоскость π

$$\begin{cases} x = 2 - 3t_1 + t_2, \\ y = -1 + t_1 - 2t_2, \\ z = 2t_1 + 5t_2. \end{cases}$$

Найти какую-нибудь точку в плоскости π и выяснить, принадлежит ли точка $M(1, 2, -1)$ плоскости π.

Подставляя в уравнение плоскости π, например, $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, получим $x = -1$, $y = 0$, $z = 2$, т. е. точка $(-1, 0, 2)$ принадлежит плоскости π.

После подстановки координат точки M в уравнение плоскости π получим систему

$$\begin{cases} 1 = 2 - 3t_1 + t_2, \\ 2 = -1 + t_1 - 2t_2, \\ -1 = 2t_1 + 5t_2, \end{cases}$$

которая не имеет решений. Следовательно, точка M не принадлежит плоскости π.

2. Написать уравнение плоскости π, которая проходит через точки $M_1(3, 2, -1)$ и $M_2(1, 3, 0)$ перпендикулярно плоскости

$x - y + 3z - 1 = 0.$

Вектор $\nu = (1, -1, 3)$ перпендикулярен плоскости $x - y + 3z - 1 = 0$ и, значит, параллелен плоскости π. Так как точки M_1 и M_2 принадлежат плоскости π, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2, 1, 1)$ также параллелен плоскости π. Таким образом, параметрическое уравнение плоскости π имеет вид

$$\begin{cases} x = 3 + t_1 - 2t_2, \\ y = 2 - t_1 + t_2, \\ z = -1 + 3t_1 + t_2. \end{cases}$$ ●

Переход от параметрического уравнения плоскости к общему

❑ **Теорема 6.8.** Пусть $\vec{M} = \vec{M_0} + t_1\mu_1 + t_2\mu_2$ – параметрическое уравнение плоскости π, где $M(x, y, z)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mu_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\mu_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Тогда общее уравнение плоскости π имеет вид

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку равносильных утверждений:

$$\vec{M} = \vec{M_0} + t_1\mu_1 + t_2\mu_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t_1\mu_1 + t_2\mu_2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_0M}$, μ_1, μ_2 линейно зависимы $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{M_0M}, \mu_1, \mu_2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & m_1 & m_2 \\ y - y_0 & n_1 & n_2 \\ z - z_0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} -$$

$$-(y - y_0)\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$$

❍ **Пример.** Написать общее уравнение плоскости π

$$\begin{cases} x = 1 + t_1 + t_2, \\ y = 2 - 3t_1 + 2t_2, \\ z = -1 + 2t_1 - t_2. \end{cases}$$

Так как $M_0(1, 2, -1)$, $\mu_1 = (1, -3, 2)$, $\mu_2 = (1, 2, -1)$, то общее уравнение плоскости π имеет вид

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(x - 1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(y - 2) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}(z + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x - 1) + 3(y - 2) + 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 5z = 0.$$

Итак, уравнение $-x + 3y + 5z = 0$ является общим уравнением плоскости π. ●

6.5. Полупространства

Пусть даны плоскость π и ν – нормальный вектор этой плоскости. Все точки пространства, не принадлежащие плоскости π, разобьем на два множества Π_1^ν и Π_2^ν (рис. 6.6).

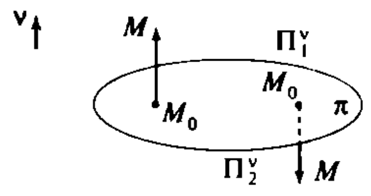


Рис. 6.6

Множеству Π_1^ν (Π_2^ν) принадлежат все точки M пространства, для которых векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и ν одинаково (противоположно) направлены, где M_0 – проекция точки M на плоскость π, т. е.

$$M \in \Pi_1^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \nu,$$

$$M \in \Pi_2^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \nu.$$

Множества Π_1^ν и Π_2^ν называются **полупространствами**. Разбиение пространства на два полупространства определяется только плоскостью π и не зависит от выбора нормального вектора этой плоскости. Действительно, если ν_1 – другой нормальный вектор плоскости π, то $\nu \parallel \nu_1$, а следовательно, $\nu \uparrow\uparrow \nu_1$ или $\nu \uparrow\downarrow \nu_1$. В первом случае $\Pi_1^\nu = \Pi_1^{\nu_1}, \Pi_2^\nu = \Pi_2^{\nu_1}$, а во втором случае $\Pi_1^\nu = \Pi_2^{\nu_1}, \Pi_2^\nu = \Pi_1^{\nu_1}$. Таким образом, от выбора нормального вектора зависят не сами полупространства, а только индекс (1 или 2), которым они будут снабжены.

❑ **Теорема 6.9.** Каждая плоскость π, заданная уравнением

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{6.27}$$

разбивает пространство на два полупространства Π_1^ν и Π_2^ν, где ν – нормальный вектор плоскости (6.27), причем точки полупространства Π_1^ν являются решениями неравенства

$$ax + by + cz + d > 0,$$

а точки полупространства Π_2^ν – решениями неравенства

$$ax + by + cz + d < 0.$$

Доказательство. Пусть точка $M(x_1, y_1, z_1)$ не принадлежит плоскости π, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – ее проекция на эту плоскость. Тогда

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \tag{6.28}$$

Теперь, согласно (6.28) и учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, $\nu = (a, b, c)$, имеем

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0 =$$
$$= a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = \nu\,\overrightarrow{M_0M} =$$
$$= |\nu|\,|\overrightarrow{M_0M}|\,\cos(\nu,\widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}),$$

т. е.

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = |\nu|\,|\overrightarrow{M_0M}|\,\cos(\nu,\widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}). \tag{6.29}$$

Используя соотношения (6.29), $|\nu| > 0$, $|\overrightarrow{M_0M}| > 0$, получим

$$M \in \Pi_1^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \nu \Leftrightarrow \cos(\nu,\widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}) = 1 \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 + d > 0,$$
$$M \in \Pi_2^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \nu \Leftrightarrow \cos(\nu,\widehat{\ }\overrightarrow{M_0M}) = -1 \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 + d < 0. \blacksquare$$

◇ **Следствие.** Расстояние $\rho(M, \pi)$ от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, находится по формуле

$$\rho(M, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{6.30}$$

Из формулы (6.29) следует, что

$$|ax_1 + by_1 + cz_1 + d| = |\nu|\,|\overrightarrow{M_0M}|\,|\cos(\nu,\widehat{\ }\overrightarrow{M_0M})|.$$

Теперь из этого равенства, учитывая, что $|\cos(\nu,\widehat{\ }\overrightarrow{M_0M})| = 1$, $|\overrightarrow{M_0M}| = \rho(M, \pi)$, $|\nu| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, находим

$$\rho(M, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \ \blacklozenge$$

○ **Пример.** Вычислить расстояние от точки $M(2, -1, -1)$ до плоскости π, проходящей через три точки $N_1(2, -1, -4)$, $N_2(0, 4, -10)$, $N_3(8, -1, -1)$.

Из условия задачи следует, что векторы $\overrightarrow{N_1N_2} = (-2, 5, -6)$ и $\overrightarrow{N_1N_3} = (6, 0, 3)$ параллельны плоскости π. Так как эти векторы неколлинеарны, то параметрическое уравнение плоскости π имеет вид $\vec{M} = \vec{N_1} + t_1\,\overrightarrow{N_1N_2} + t_2\,\overrightarrow{N_1N_3}$.

Теперь из теоремы 6.8 следует, что общим уравнением плоскости π является уравнение

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}(x - 2) - \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}(y + 1) + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}(z + 4) = 0.$$

После упрощений получим уравнение

$x - 2y - 2z - 12 = 0.$

Используя формулу (6.30), находим расстояние от точки M до плоскости π:

$$\rho(M, \pi) = \frac{|2 - 2(-1) - 2(-1) - 12|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 2. \bullet$$

6.6. Уравнения прямой в пространстве

В этом параграфе будут получены параметрическое и общее уравнения прямой в пространстве, а также указан переход от общего уравнения прямой в пространстве к параметрическому и наоборот.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Зададим прямую l в пространстве при помощи точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\mu = (m, n, p)$, параллельного прямой l. Эти условия однозначно определяют прямую, так как через точку параллельно вектору можно провести только одну прямую.

❑ **Теорема 6.10.** Уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbf{R}, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{6.31}$$

является уравнением прямой l в пространстве, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору $\mu = (m, n, p)$.

Доказательство. Обозначим через $M(x_1, y_1, z_1)$ произвольную точку прямой l, тогда

$$M \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \mu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\mu, \ t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} - \vec{M_0} = t\mu, \ t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{M_0} + t\mu, \ t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + mt, \\ y_1 = y_0 + nt, \quad t \in \mathbf{R}. \blacksquare \\ z_1 = z_0 + pt, \end{cases}$$

При изменении t величи́ны x, y и z в уравнении (6.31) будут меняться и точка $N(x, y, z)$ будет перемещаться вдоль прямой. Каждому значению t соответствует единственное положение точки N на прямой.

Уравнение (6.31) называется **параметрическим уравнением прямой**, а переменная t – **параметром**.

Замечание. При доказательстве теоремы 6.10 установлено, что

$$M \in l \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{M_0} + t\mu, \ t \in \mathbf{R}.$$

Уравнение $\vec{M} = \vec{M_0} + t\mu$ будем называть параметрическим уравнением прямой l, проходящей через точку M_0 параллельно вектору μ, в *векторной* форме.

Каждый вектор, параллельный прямой, называется **направляющим вектором** этой прямой.

Примеры.

1. Написать уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 (1, –1, 2) перпендикулярно плоскости $2x - 3y + z + 2 = 0$.

Вектор $\nu = (2, -3, 1)$ перпендикулярен данной плоскости и, значит, параллелен прямой l. Теперь параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

2. Найти значения m, при которых прямая

$$\begin{cases} x = 1 + mt, \\ y = 2 - t, \\ z = t \end{cases} \qquad (6.32)$$

лежит в плоскости $2x - y + z = 0$.

Прямая лежит в плоскости, если все точки прямой являются решениями уравнения плоскости. Отсюда следует, что после подстановки x, y и z из уравнения (6.32) в уравнение данной плоскости, получим равенство

$$2\,(1 + mt) - (2 - t) + t = 0, \qquad (6.33)$$

которое выполняется при всех значениях t. Равенство (6.33) выполняется при всех t только при $m = 1$. ●

Общее уравнение прямой в пространстве

Каждую прямую l в пространстве можно задать в виде пересечения двух непараллельных плоскостей π_1 и π_2.

Теорема 6.11. Если

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \qquad (6.34)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \qquad (6.35)$$

— уравнения соответственно непараллельных плоскостей π_1 и π_2, то прямая l пересечения этих плоскостей имеет уравнение

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \tag{6.36}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку равносильных утверждений:

$$M \in l \Leftrightarrow M \in \pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \pi_1 \Leftrightarrow \\ M \in \pi_2 \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} \text{координаты } M \text{ — решение уравнения (6.34)} \\ \text{координаты } M \text{ — решение уравнения (6.35)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ координаты M — решение системы уравнений (6.36). ■

Непараллельность плоскостей (6.34) и (6.35) означает, что нормальные векторы $\nu_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\nu_2 = (a_2, b_2, c_2)$ этих плоскостей не коллинеарны.

Система уравнений (6.36), в которой коэффициенты a_1, b_1, c_1 при неизвестных в первом уравнении не пропорциональны коэффициентам a_2, b_2, c_2 при неизвестных во втором уравнении, называется **общим уравнением прямой в пространстве**.

Переход от параметрического уравнения прямой в пространстве к общему уравнению

Чтобы перейти от параметрического уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{6.37}$$

к ее общему уравнению, надо из системы (6.37) исключить параметр t, т. е. найти выражение для параметра из одного уравнения и подставить его в два других уравнения. Если, например, $m \neq 0$, то $t = (x - x_0)/m$ и общее уравнение прямой (6.37) имеет вид

$$\begin{cases} y = y_0 + \dfrac{n}{m}(x - x_0), \\ z = z_0 + \dfrac{p}{m}(x - x_0). \end{cases} \tag{6.38}$$

Если же в уравнении (6.37) все числа m, n и p не равны нулю, то систему (6.38) можно записать в более симметричной форме

$$\begin{cases} \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{x - x_0}{m}, \\ \dfrac{z - z_0}{p} = \dfrac{x - x_0}{m}. \end{cases}$$

Переход от общего уравнения прямой к параметрическому уравнению

Для построения параметрического уравнения прямой, заданной общим уравнением

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases} \tag{6.39}$$

надо найти общее решение системы (6.39) в векторной форме

$$\vec{M} = \vec{M_0} + \mu t,$$

где $\vec{M_0}$ – какое-нибудь решение системы (6.39), а вектор μ образует фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{cases}$$

○ **Пример.** Найти параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2 = 0. \end{cases} \tag{6.40}$$

Сначала найдем методом Гаусса общее решение системы (6.40):

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 5 & \boxed{-1} & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & -2 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -5 & 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & \boxed{-1} & -8 \end{array} \quad \to$$

$$\to \quad \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -19 & 1 & 0 & -19 \\ 7 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

т. е. исходная система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} -19x_1 + x_2 = -19, \\ 7x_1 + x_3 = 8, \end{cases}$$

в которой x_2, x_3 – набор разрешенных неизвестных, а x_1 – свободное неизвестное.

Полагая $x_1 = 0$, находим $x_2 = -19$, $x_3 = 8$, т. е. $\vec{M_0} = (0, -19, 8)$. Для того чтобы найти фундаментальную систему решений, полагаем $x_1 = 1$. Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} -19x_1 + x_2 = 0, \\ 7x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

находим $x_2 = 19$, $x_3 = -7$, т. е. $\mu = (1, 19, -7)$. Итак,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -19 + 19t, \\ z = 8 - 7t \end{cases}$$

– параметрическое уравнение данной прямой. ●

Уравнение отрезка в пространстве

В точности так же, как в параграфе 6.2, выводится уравнение

$$\vec{M} = (1 - t)\vec{M}_1 + t\vec{M}_2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

отрезка $[M_1, M_2]$ в пространстве, которое в координатной форме имеет вид ($M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$)

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \\ z = (1 - t)z_1 + tz_2, \end{cases}$$

6.7. *n*-мерное точечное пространство $\mathbf{T}^n$

Если на плоскости или в пространстве введена система координат, то каждая пара чисел задает точку на плоскости, а каждая тройка чисел – точку в пространстве. Более того, множество $\mathbf{T}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2\}$ всех пар чисел можно отождествить с множеством всех точек плоскости, а множество $\mathbf{T}^3 = \{(a_1, a_2, a_3), a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3\}$ всех троек чисел – с множеством всех точек пространства, что позволяет следующим образом обобщить понятия точки, плоскости и пространства.

Произвольный упорядоченный набор из n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ называется ***n*-мерной точкой**, а сами числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – **координатами** этой точки.

Совокупность всех n-мерных точек называется ***n*-мерным точечным пространством $\mathbf{T}^n$**.

Если точка M пространства $\mathbf{T}^n$ имеет координаты $m_1, m_2, ..., m_n$, то будем писать $M(m_1, m_2, ..., m_n)$. Точка $O(0, 0, ..., 0)$ называется **началом координат**.

Множество всех точек пространства $\mathbf{T}^n$, у которых все координаты, кроме k-й, равны нулю, называется **координатной осью Ox_k**. Из этого определения следует, что ось Ox_k состоит из всех точек вида $M(0, ..., 0, a_k, 0, ..., 0)$, где a_k – произвольное действительное число. Отметим, что в пространстве $\mathbf{T}^n$ имеется n координатных осей: $Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n$.

Совокупность всех точек пространства $\mathbf{T}^n$, у которых k-я координата равна нулю, называется **координатной гиперплоскостью x_k**. Таким образом, гиперплоскость x_k состоит из точек вида $N(a_1, ..., a_{k-1}, 0, a_{k+1}, ..., a_n)$, где $a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n$ независимо друг от друга пробегают все действительные числа. В пространстве $\mathbf{T}^n$ имеется n координатных гиперплоскостей: гиперплоскости $x_1, x_2, ..., x_n$.

Направленные отрезки в пространстве и n-мерные векторы

На плоскости и в трехмерном пространстве направленным отрезком называется отрезок, у которого отмечены начало и конец. Первой в обозначении направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ записывают точку, которая является его началом, а второй – точку, являющуюся концом этого направленного отрезка. Таким образом, направленный отрезок однозначно определяется упорядоченной парой точек, т. е. парой, в которой определено, какая из двух точек является первой, а какая – второй. Обобщим это определение направленного отрезка на случай пространства $\mathbf{T}^n$.

Упорядоченная пара точек A, B пространства $\mathbf{T}^n$ называется **направленным отрезком**, который по-прежнему обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Точка A называется началом, а B – концом направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.

Определим координаты направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ следующим образом. Если $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, $B(b_1, b_2, ..., b_n)$, то числа $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, ..., $b_n - a_n$, которые равны разностям координат конца и начала $\overrightarrow{AB}$, называются **координатами** направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. В этом случае будем писать, что $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$.

Если соответствующие координаты n-мерного вектора α и направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ совпадают, то будем говорить, что вектор α отложен от точки A пространства $\mathbf{T}^n$, и писать $\alpha = \overrightarrow{AB}$. Таким образом, чтобы отложить n-мерный вектор α от точки A, надо построить такую точку B, чтобы соответствующие координаты направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и α совпадали.

Каждый n-мерный вектор $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n)$ можно отложить от любой точки $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ пространства $\mathbf{T}^n$. Действительно, обозначим через B точку с координатами $x_1 + a_1, x_2 + a_2, ..., x_n + a_n$. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha$.

Полагаем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если их соответствующие координаты равны. Сложение направленных отрезков и умножение их на число осуществляется по правилам, сформулированным для n-мерных векторов. Направленный отрезок часто называют вектором.

Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется **радиус-вектором** точки A. Ясно, что координаты точки A и радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ этой точки совпадают. Вместо $\overrightarrow{OA}$ будем писать $\vec{A}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{B} - \vec{A},$$

т. е. $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$.

❑ **Теорема 6.12.** Справедливы следующие утверждения (A, B, C, D – точки пространства $\mathbf{T}^n$):

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;

3) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Доказательство. 1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{B} - \vec{A} + \vec{C} - \vec{B} = \vec{C} - \vec{A} = \overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

3. $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B}) = -\overrightarrow{BA}$. ■

Расстоянием между точками A и B пространства $\mathbf{T}^n$ называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$. Расстояние между точками A и B обозначим через $\rho(A, B)$, тогда

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|.$$

❑ **Теорема 6.13.** Расстояние между точками пространства $\mathbf{T}^n$ обладает следующими свойствами:

1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;

2) $\rho(A, B) \geqslant 0$; $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

3) $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Доказательство. 1. $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |-\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BA}| = \rho(B, A)$.

2. $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| \geqslant 0$; $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \theta \Leftrightarrow A = B$.

3. $\rho(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \rho(A, B) + \rho(B, C)$. ■

6.8. Прямая и гиперплоскость в пространстве $\mathbf{T}^n$

Пусть в пространстве $\mathbf{T}^n$ даны точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и ненулевой вектор $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. **Прямой** l, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором μ, называется множество всех точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\mathbf{T}^n$, для которых векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и μ пропорциональны.

Отсюда

$M \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\mu,\ t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \vec{M} - \vec{M}_0 = t\mu \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{M}_0 + t\mu$.

Уравнение

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + t\mu,\ t \in \mathbf{R}, \tag{6.41}$$

называется параметрическим уравнением прямой l в *векторной* форме.

Записывая соотношение (6.41) в *координатной* форме, получим

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + tm_1, \\ x_2 = x_2^0 + tm_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n^0 + tm_n. \end{cases}$$

Эта система называется **параметрическим уравнением прямой в пространстве T^n.**

Вектор α *параллелен* прямой (6.41), если для *некоторой* пары различных точек A и B, принадлежащих этой прямой, векторы $\overrightarrow{AB}$ и α коллинеарны.

❑ **Теорема 6.14.** Прямая l в пространстве T^n проходит через точку M_0 с направляющим вектором μ. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) направляющий вектор μ прямой l коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$, где A и B – произвольные точки из l;

2) если вектор α параллелен прямой l, то α коллинеарен μ.

Доказательство. 1. Пусть точки A и B принадлежат прямой l. Так как (6.41) является уравнением прямой l, то найдутся такие числа t_1 и t_2, что

$$\vec{A} = \vec{M}_0 + t_1\mu, \quad \vec{B} = \vec{M}_0 + t_2\mu.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{M}_0 + t_2\mu - \vec{M}_0 - t_1\mu = (t_2 - t_1)\mu,$$

т. е. векторы $\overrightarrow{AB}$ и μ пропорциональны и, значит, коллинеарны.

2. Если вектор α параллелен прямой l, то $\alpha \parallel \overrightarrow{AB}$ для некоторой пары точек A и B из l. Из первого утверждения теоремы следует, что $\overrightarrow{AB} \parallel \mu$. Теперь из $\alpha \parallel \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB} \parallel \mu$ вытекает, что $\alpha \parallel \mu$. ■

◇ **Следствие.** Если вектор α параллелен прямой l и точки C и D принадлежат этой прямой, то $\alpha \parallel \overrightarrow{CD}$.

Действительно, так как вектор α параллелен прямой l, то из второго утверждения теоремы следует, что $\alpha \parallel \mu$, а из первого утверждения вытекает, что $\mu \parallel \overrightarrow{CD}$. Отсюда получаем, что $\alpha \parallel \overrightarrow{CD}$. ◆

Напишем теперь уравнение прямой, проходящей через точки $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Уравнение прямой, проходящей через точку A с направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$, имеет вид

$$\vec{M} = \vec{A} + t\vec{AB},\ t \in \mathbf{R},$$

или

$$\vec{M} = (1 - t)\vec{A} + t\vec{B},\ t \in \mathbf{R}. \tag{6.42}$$

Из (6.42) следует, что при $t = 0$ точка M совпадает с A, а при $t = 1$ точка M совпадает с B, т. е. прямая (6.42) проходит через точки A и B. Все точки прямой (6.42), которые получаются при $0 \leqslant t \leqslant 1$, по определению образуют отрезок $[AB]$ этой прямой.

В координатной форме уравнение (6.42) имеет вид ($\vec{M} = (x_1, x_2, ..., x_n)$)

$$\begin{cases} x_1 = (1 - t)\,a_1 + tb_1, \\ x_2 = (1 - t)\,a_2 + tb_2, \quad t \in \mathbf{R}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = (1 - t)\,a_n + tb_n, \end{cases}$$

Гиперплоскостью π в пространстве $\mathbf{T}^n$ называется множество всех точек $\mathbf{T}^n$, координаты которых являются решением уравнения

$$a_1x + a_2x + \dots + a_nx_n + b = 0, \tag{6.43}$$

где $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – числа, причем хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ отлично от нуля.

Если $b = 0$, то гиперплоскость (6.43) проходит через точку $O\,(0, 0, ..., 0)$, так как в этом случае координаты точки O являются решением уравнения (6.43).

Если же и b, и все коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ равны нулю, кроме a_k, то уравнение (6.43) приобретает вид $a_kx_k = 0$ или $x_k = 0$. Это уравнение, как отмечалось в параграфе 6.7, определяет k-ю координатную гиперплоскость.

Обозначим через $\text{v} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ вектор, координатами которого являются коэффициенты при неизвестных в уравнении (6.43). Этот вектор называется **нормальным вектором** гиперплоскости (6.43).

Вектор α называется **перпендикулярным** гиперплоскости π, если для *каждой* пары различных точек A, B из π векторы α и $\vec{AB}$ перпендикулярны.

❑ **Теорема 6.15.** Пусть гиперплоскость π задана уравнением (6.43). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) нормальный вектор v гиперплоскости π перпендикулярен π;

2) если вектор α коллинеарен v, то α перпендикулярен гиперплоскости π.

Доказательство. 1. Пусть $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ и $Q(q_1, q_2, ..., q_n)$ – произвольная пара различных точек из π. Тогда

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n + b = 0, \tag{6.44}$$

$$a_1q_1 + a_2q_2 + \ldots + a_nq_n + b = 0. \tag{6.45}$$

Вычитая из обеих частей равенства (6.45) соответствующие части равенства (6.44), получаем

$$a_1(q_1 - p_1) + a_2(q_2 - p_2) + \ldots + a_n(q_n - p_n) = 0. \tag{6.46}$$

Так как $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$, то из равенства (6.46) следует, что $v\overrightarrow{PQ} = 0$ и, значит, векторы v и $\overrightarrow{PQ}$ перпендикулярны.

2. Если вектор α коллинеарен v, то $\alpha = kv$. Теперь для каждой пары различных точек P, Q из гиперплоскости π

$$\alpha\overrightarrow{PQ} = kv\overrightarrow{PQ} = k(v\overrightarrow{PQ}) = 0.$$

Отсюда следует, что векторы α и $\overrightarrow{PQ}$ перпендикулярны. ■

□ **Теорема 6.16.** Если точка N не принадлежит гиперплоскости π, заданной уравнением (6.43), то прямая l, имеющая уравнение $\vec{M} = \vec{N} + vt$, пересекает гиперплоскость π в единственной точке N_0, которая называется **проекцией** точки N на гиперплоскость π.

Доказательство. Запишем параметрическое уравнение прямой l в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + a_1t, \\ x_2 = u_2 + a_2t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = u_n + a_nt. \end{cases} \tag{6.47}$$

Чтобы найти точки пересечения прямой (6.47) и гиперплоскости (6.43), надо найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + a_1t, \\ x_2 = u_2 + a_2t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = u_n + a_nt, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0. \end{cases} \tag{6.48}$$

Исключив из последнего уравнения неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим

$$a_1(u_1 + a_1t) + a_2(u_2 + a_2t) + \ldots + a_n(u_n + a_nt) + b = 0.$$

Отсюда

$$t = -\frac{b + a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

После подстановки найденного значения t в правую часть первых n уравнений системы (6.48) получим координаты точки N_0. ■

✧ **Следствие.** Если N_0 – проекция точки N на гиперплоскость π, то вектор $\overrightarrow{N_0N}$ коллинеарен нормальному вектору ν гиперплоскости π.

Действительно, $\vec{N_0} = \vec{N} + \nu t_1$. Отсюда $\vec{N} - \vec{N_0} = -\nu t_1$ или $\overrightarrow{N_0N} = (-t_1)\nu$ и, значит, $\overrightarrow{N_0N} \parallel \nu$. ✦

6.9. Полупространства пространства T^n

Пусть даны гиперплоскость π и ν – нормальный вектор этой гиперплоскости. Все точки пространства T^n, не принадлежащие гиперплоскости, разобьем на два множества Π_1^ν и Π_2^ν таким образом, что полупространству $\Pi_1^\nu(\Pi_2^\nu)$ принадлежат все точки M пространства T^n, для которых векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и ν одинаково (противоположно) направлены, где M_0 – проекция точки M на гиперплоскость π, т. е.

$$M \in \Pi_1^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \nu,$$

$$M \in \Pi_2^\nu \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \nu.$$

Заметим, что каждая точка пространства T^n, не принадлежащая π, попадает либо в множество Π_1^ν, либо в множество Π_2^ν. Действительно, если M_0 – проекция M на гиперплоскость π, то согласно следствию к теореме 6.16 векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и ν коллинеарны. Следовательно, либо $\overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \nu$, либо $\overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \nu$, а поэтому или $M \in \Pi_1^\nu$, или $M \in \Pi_2^\nu$.

❑ **Теорема 6.17.** Каждая гиперплоскость π, заданная уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0, \tag{6.49}$$

разбивает пространство T^n на два полупространства Π_1^ν и Π_2^ν, где ν – нормальный вектор гиперплоскости (6.49), причем точки полупространства Π_1^ν являются решениями неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b > 0,$$

а точки полупространства Π_2^ν – решениями неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b < 0.$$

Доказательство. Пусть точка $M(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ не принадлежит гиперплоскости π, а $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – ее проекция на эту гиперплоскость. Тогда

$$a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \ldots + a_nx_n^0 + b = 0. \tag{6.50}$$

Теперь, согласно (6.50) и учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = (x_1^1 - x_1^0, x_2^1 - x_2^0, \ldots, x_n^1 - x_n^0)$, $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, имеем

$$a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b = a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots +$$
$$+ a_nx_n^1 + b - a_1x_1^0 - a_2x_2^0 - \ldots - a_nx_n^0 - b =$$
$$= a_1(x_1^1 - x_1^0) + a_2(x_2^1 - x_2^0) + \ldots + a_n(x_n^1 - x_n^0) =$$
$$= \mathbf{v}\,\overrightarrow{M_0M} = |\mathbf{v}|\,|\overrightarrow{M_0M}|\cos(\overrightarrow{M_0M}, \hat{\ } \mathbf{v}),$$

т. е.

$$a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b = |\mathbf{v}|\,|\overrightarrow{M_0M}|\cos(\overrightarrow{M_0M}, \hat{\ } \mathbf{v}). \tag{6.51}$$

Используя соотношения (6.51), $|\mathbf{v}| > 0$, $|\overrightarrow{M_0M}| > 0$, получим

$$M \in \Pi_1^{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \mathbf{v} \Leftrightarrow \cos(\mathbf{v}, \hat{\ } \overrightarrow{M_0M}) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b > 0,$$

$$M \in \Pi_2^{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \mathbf{v} \Leftrightarrow \cos(\mathbf{v}, \hat{\ } \overrightarrow{M_0M}) = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b < 0. \ \blacksquare$$

Расстоянием от точки M до гиперплоскости π называется расстояние между точкой M и ее проекцией M_0 на гиперплоскость π.

◇ **Следствие.** Расстояние $\rho(M, \pi)$ от точки $M(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ до гиперплоскости π, заданной уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$, находится по формуле

$$\rho(M, \pi) = \frac{|a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{6.52}$$

Из формулы (6.51) следует, что

$$|a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b| = |\mathbf{v}|\,|\overrightarrow{M_0M}|\,|\cos(\mathbf{v}, \hat{\ } \overrightarrow{M_0M})|.$$

Теперь из этого равенства, учитывая, что $|\cos(\mathbf{v}, \hat{\ } \overrightarrow{M_0M})| = 1$, $\rho(M, \pi) = \rho(M, M_0) = |\overrightarrow{M_0M}|$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$, находим

$$\rho(M, \pi) = \frac{|a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \ldots + a_nx_n^1 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}. \ \blacklozenge$$

7. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

7.1. Собственные значения матрицы

Число l называется **собственным значением** (или **характеристическим числом**) квадратной матрицы A порядка n, если можно подобрать такой n-мерный *ненулевой* вектор β, что $A\beta = l\beta$.

Для того чтобы найти собственные значения матрицы A, рассмотрим матрицу

$$A - xE = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - x & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Особый интерес представляет определитель матрицы $A - xE$. Если раскрыть определитель $\det(A - xE)$, то получится многочлен n-й степени относительно неизвестной x:

$$\det(A - xE) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - x \end{vmatrix} =$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Этот многочлен называется **характеристическим многочленом** матрицы A. Его коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ зависят от элементов матрицы A. Отметим, что $a_n = (-1)^n$, $a_0 = \det A$.

Уравнение $\det(A - xE) = 0$ называется **характеристическим уравнением** матрицы A.

❑ **Теорема 7.1.** Множество $S(A)$ всех собственных значений матрицы A совпадает с множеством всех решений характеристического уравнения $\det(A - xE) = 0$ матрицы A.

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку равносильных утверждений:

$l \in S(A) \Leftrightarrow A\beta = l\beta,\ \beta = (k_1, k_2, \dots, k_n) \neq \theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\beta = (lE)\beta,\ \beta \neq \theta, \Leftrightarrow (A - lE)\beta = \theta,\ \beta \neq \theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A - lE)_1 k_1 + (A - lE)_2 k_2 + \dots + (A - lE)_n k_n = \theta,$

$k_1, k_2, \dots, k_n$ – ненулевой набор чисел $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A - lE)$ – вырожденная матрица $\Leftrightarrow \det(A - lE) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l$ – решение уравнения $\det(A - lE) = 0$. ■

○ **Пример.** Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$\det (A - xE) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} = -x^3 + 3x + 2.$$

Собственные значения матрицы A являются корнями ее характеристического уравнения

$$-x^3 + 3x + 2 = 0.$$

Так как $-x^3 + 3x + 2 = -x^3 + 4x - x + 2 = -x(x^2 - 4) - (x - 2) = -(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = -(x - 2)(x + 1)^2$, то матрица A имеет два собственных значения: $l_1 = 2$, $l_2 = -1$. ●

7.2. Собственные векторы матрицы

Собственным вектором квадратной матрицы A порядка n, *принадлежащим ее собственному значению* l, называется n-мерный вектор α, для которого $A\alpha = l\alpha$.

Множество всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих ее собственному значению l, обозначим через $A(l)$. В следующей теореме отыскание собственных векторов сводится к решению однородной системы линейных уравнений.

❑ **Теорема 7.2.** Множество $A(l)$ всех собственных векторов матрицы A порядка n, принадлежащих ее собственному значению l, совпадает с множеством всех решений однородной системы линейных уравнений $(A - lE)æ = \theta$, где $æ = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку равносильных утверждений:

$\alpha \in A(l) \Leftrightarrow A\alpha = l\alpha \Leftrightarrow A\alpha = (lE)\alpha \Leftrightarrow (A - lE)\alpha = \theta \Leftrightarrow$

α — решение системы уравнений $(A - lE)æ = \theta$. ■

Из теоремы 7.2 и теоремы 5.6 об общем решении системы линейных уравнений в векторной форме вытекает следующий алгоритм отыскания всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих ее собственному значению l.

1. Найти элементы матрицы $A - lE$.

2. Записать систему однородных уравнений $(A - lE)æ = \theta$ и найти ее фундаментальную систему решений $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$.

3. Произвольный собственный вектор α из $A(l)$ имеет вид $\alpha = t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 + \ldots + t_k\gamma_k$, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – произвольные числа.

○ **Пример.** Найти собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В примере из параграфа 7.1 были найдены собственные значения матрицы A, а именно $l_1 = 2$, $l_2 = -1$. Теперь найдем множества $A(2)$ и $A(-1)$.

Так как

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

то система линейных уравнений $(A - 2E)\text{æ} = \theta$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Найдем методом Гаусса общее решение этой системы уравнений:

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}$$

Общее решение системы (7.1) имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 0, \\ -x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_2, x_3 являются разрешенными, а x_1 – свободное неизвестное. Полагая $x_1 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\gamma = (1, 1, 1)$, а $t\gamma = (t, t, t)$, $t \in \mathbf{R}$, – произвольный собственный вектор из множества $A(2)$.

Теперь найдем множество $A(-1)$:

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(A + E)\text{æ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Найдем методом Гаусса общее решение этой системы уравнений:

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}$$

Уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

является общим решением системы (7.2), у которого каждое из неизвестных является разрешенным. Выберем в качестве разрешенного неизвестное x_1. Тогда x_2, x_3 – свободные неизвестные. Подставляя наборы значений для свободных неизвестных

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 0;$$
$$x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

в общее решение, получим решения $\gamma_1 = (-1, 1, 0)$, $\gamma_2 = (-1, 0, 1)$ системы (7.2), которые образуют ее фундаментальную систему решений. Отсюда следует, что $t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 = (-t_1 - t_2, t_1, t_2)$ – произвольный вектор из множества $A(-1)$. ●

7.3. Свойства собственных векторов матрицы

❑ **Свойство 1.** Если собственные векторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ матрицы A принадлежат ее собственному значению l, т. е. $\alpha_i \in A(l)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m \in A(l)$ при любых числах $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Доказательство. Так как $A\alpha_i = l\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то

$$A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m) = k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \ldots + k_mA\alpha_m =$$
$$= k_1l\alpha_1 + k_2l\alpha_2 + \ldots + k_ml\alpha_m = l(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m).$$

Отсюда следует, что $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m \in A(l)$. ■

❑ **Свойство 2.** Если $l_1, l_2, \ldots, l_m$ – попарно различные собственные значения матрицы A и векторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ принадлежат соответственно множествам $A(l_1), A(l_2), \ldots, A(l_m)$, то из равенства $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = \theta$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \theta$.

Доказательство. Воспользуемся способом индукции по числу векторов в системе.

При $m = 1$ утверждение теоремы очевидно.

Пусть утверждение теоремы справедливо при $m = k$ и пусть

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \alpha_{k+1} = \theta. \tag{7.3}$$

Умножим обе части равенства (7.3) на матрицу A:

$A(\alpha_1 + ... + \alpha_k + \alpha_{k+1}) = A\theta.$

Отсюда

$$A\alpha_1 + ... + A\alpha_k + A\alpha_{k+1} = \theta. \qquad (7.4)$$

Так как по условию $\alpha_i \in A(l_i)$, то $A\alpha_i = l_i\alpha_i$ и поэтому из равенства (7.4) следует

$$l_1\alpha_1 + ... + l_k\alpha_k + l_{k+1}\alpha_{k+1} = \theta. \qquad (7.5)$$

Умножим обе части равенства (7.3) на $-l_{k+1}$:

$$-l_{k+1}\alpha_1 - ... - l_{k+1}\alpha_k - l_{k+1}\alpha_{k+1} = \theta. \qquad (7.6)$$

После прибавления к обеим частям равенства (7.5) соответствующих частей соотношения (7.6) получим

$$(l_1 - l_{k+1})\alpha_1 + ... + (l_k - l_{k+1})\alpha_k = \theta. \qquad (7.7)$$

Из свойства 1 следует, что

$(l_1 - l_{k+1})\alpha_1 \in A(l_1), ..., (l_k - l_{k+1})\alpha_k \in A(l_k).$

Отсюда, из равенства (7.7) и предположения индукции следует, что

$(l_1 - l_{k+1})\alpha_1 = \theta, ..., (l_k - l_{k+1})\alpha_k = \theta.$

По условию $l_1 - l_{k+1} \neq 0, ..., l_k - l_{k+1} \neq 0$. Следовательно, $\alpha_1 = ... = \alpha_k = \theta$ и, согласно равенству (7.3), $\alpha_{k+1} = \theta$. ■

❑ **Свойство 3.** Пусть $l_1, l_2, ..., l_m$ – попарно различные собственные значения матрицы A и в каждом из множеств $A(l_1), A(l_2), ..., A(l_m)$ выбраны линейно независимые системы векторов

$\alpha_1, ..., \alpha_p \in A(l_1); \beta_1, ..., \beta_q \in A(l_2); ...; \gamma_1, ..., \gamma_s \in A(l_m),$

тогда объединенная система векторов

$$\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q, ..., \gamma_1, ..., \gamma_s \qquad (7.8)$$

линейно независима.

Доказательство. Рассмотрим произвольное равенство

$$k_1\alpha_1 + ... + k_p\alpha_p + p_1\beta_1 + ... + p_q\beta_q + ... + t_1\gamma_1 + ... + t_s\gamma_s = \theta. \qquad (7.9)$$

Из свойства 1 вытекает, что

$k_1\alpha_1 + ... + k_p\alpha_p \in A(l_1),$

$p_1\beta_1 + ... + p_q\beta_q \in A(l_2),$

. . . .

$t_1\gamma_1 + ... + t_s\gamma_s \in A(l_m).$

Теперь из свойства 2 получаем, что

$$k_1\alpha_1 + \ldots + k_p\alpha_p = \theta, \tag{7.10}$$
$$p_1\beta_1 + \ldots + p_q\beta_q = \theta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_1\gamma_1 + \ldots + t_s\gamma_s = \theta.$$

По условию векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ линейно независимы, поэтому из равенства (7.10) следует $k_1 = \ldots = k_p = 0$. Аналогично устанавливается, что равенство (7.9) возможно лишь в том случае, когда все коэффициенты при векторах $\beta_1, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ равны нулю, т. е. доказана линейная независимость системы векторов (7.8). ■

✧ **Следствие 1.** Ненулевые собственные векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ матрицы A, принадлежащие ее различным собственным значениям $l_1, \ldots, l_m$, линейно независимы.

Действительно, $\alpha_1 \in A(l_1), \ldots, \alpha_m \in A(l_m)$. Так как $\alpha_i \neq \theta$, то α_i – линейно независимая система векторов (см. утверждение 1 из параграфа 2.5). Теперь из свойства 3 следует линейная независимость системы векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. ✦

✧ **Следствие 2.** Матрица A порядка n имеет не более n различных собственных значений.

Докажем это утверждение от противного. Пусть $l_1, \ldots, l_m$ – различные собственные значения матрицы A и $m > n$. Из определения собственного значения следует, что в каждом множестве $A(l_i)$ имеется ненулевой вектор α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Из следствия 1 вытекает линейная независимость n-мерных векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. С другой стороны, из $m > n$ следует линейная зависимость системы векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (см. утверждение 4 из параграфа 2.5). Возникает противоречие. Следовательно, $m \leqslant n$. ✦

7.4. Базис пространства $\mathbf{R}^n$ из собственных векторов матрицы

В предыдущем параграфе было установлено, что при определенных условиях у матрицы порядка n может быть достаточно много линейно независимых собственных векторов. Существует ли базис пространства $\mathbf{R}^n$, состоящий только из собственных векторов матрицы? В общем случае ответ отрицательный, потому что матрица может не иметь собственных значений и, значит, собственных векторов.

❑ **Лемма.** Если l – собственное значение матрицы A порядка n, то в множестве $A(l)$ имеется $n - r(A - lE)$ линейно независимых собственных векторов матрицы A, где $r(A - lE)$ – ранг матрицы $A - lE$.

Доказательство. Из теоремы 7.2 следует, что множество $A(l)$ совпадает с множеством всех решений системы уравнений $(A - lE)æ =$

$= \theta$, где $æ = (x_1, \ldots, x_n)$, которое, как вытекает из теоремы 5.5, содержит $n - r(A - lE)$ линейно независимых решений. ■

❑ **Теорема 7.3.** Пусть $l_1, \ldots, l_m$ – все различные собственные значения матрицы A порядка n. Если сумма рангов матриц $A - l_1E, \ldots, A - l_mE$ равна $n(m - 1)$, то в пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется базис, состоящий из собственных векторов матрицы A.

Доказательство. Из каждого множества $A(l_i)$, $i = 1, \ldots, m$, выберем линейно независимую систему, содержащую $k_i = n - r(A - l_iE)$ векторов (согласно лемме). Свойство 3 из параграфа 7.3 утверждает, что объединение этих систем будет линейно независимой системой из собственных векторов матрицы A. Теперь из параграфа 2.8 следует, что эта объединенная система является базисом $\mathbf{R}^n$, так как

$$k_1 + \ldots + k_m = n - r(A - l_1E) + \ldots + n - r(A - l_mE) =$$
$$= nm - (r(A - l_1E) + \ldots + r(A - l_mE)) = nm - n(m - 1) = n. \blacksquare$$

7.5. Собственные векторы симметрической матрицы

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется **симметрической**, если $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i и j.

❑ **Теорема 7.4.** Пусть A – симметрическая матрица порядка n. Тогда в пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется ортонормированный базис[1], состоящий из собственных векторов матрицы A. ■

Приведем алгоритм построения ортонормированного базиса пространства $\mathbf{R}^n$, состоящего из собственных векторов симметрической матрицы A.

1. Найти все собственные значения матрицы A.

2. Для каждого собственного значения l найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $(A - lE)æ = \theta$ и подвергнуть ее ортогонализации.

3. Объединить все ортогональные системы векторов, полученные в предыдущем пункте, а затем нормировать все векторы.

❍ **Пример.** Найти ортонормированный базис $\mathbf{R}^3$, состоящий из собственных векторов симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Базис $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ называется *ортонормированным*, если $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – ортонормированная система векторов.

1. Найдем собственные значения матрицы A. Имеем

$$\det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2(1 - x) - (1 - x) = (1 - x)(x^2 - 1) = 0.$$

Следовательно, $l_1 = 1$, $l_2 = -1$ – собственные значения матрицы A.

2. Сначала найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $(A - 1E)æ = \theta$. Так как

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то построение общего решения системы уравнений $(A - 1E)æ = \theta$ происходит следующим образом:

x_1	x_2	x_3
-1	0	1
$\cancel{\theta}$	$\cancel{\theta}$	$\cancel{\theta}$
1	0	-1

→

x_1	x_2	x_3
1	0	-1
$\cancel{\theta}$	$\cancel{\theta}$	$\cancel{\theta}$

Итак, $x_1 - x_3 = 0$ – общее решение, у которого x_1 – разрешенное неизвестное, а x_2, x_3 – свободные неизвестные. Полагая

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 0;$$
$$x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

находим фундаментальную систему решений $\gamma_1 = (0, 1, 0)$, $\gamma_2 = (1, 0, 1)$. Векторы γ_1, γ_2 не надо ортогонализировать, так как они ортогональны.

Теперь найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $(A - (-1)E)æ = \theta$, т. е. системы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \theta.$$

Сначала найдем общее решение этой системы уравнений:

x_1	x_2	x_3
1	0	1
0	2	0
1	0	1

→

x_1	x_2	x_3
1	0	1
0	2	0
$\cancel{\theta}$	$\cancel{\theta}$	$\cancel{\theta}$

→

x_1	x_2	x_3
1	0	1
0	1	0

Итак,

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

– общее решение, у которого x_1, x_2 – разрешенные неизвестные, а x_3 – свободное неизвестное. Если $x_3 = 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Следовательно, $\gamma_3 = (-1, 0, 1)$ – фундаментальная система решений системы уравнений $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\text{æ} = \theta$.

3. Объединив полученные фундаментальные системы решений, получим систему векторов

$$(0, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 1),$$

которая после нормирования векторов примет вид

$$(0, 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{7.11}$$

Система (7.11) является ортонормированным базисом пространства $\mathbf{R}^3$, состоящим из собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$. ●

8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8.1. Суммирование

Рассмотрим сумму вида

$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$.

В математике принято следующее обозначение этой системы

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = \sum_{i=k}^{n} a_i .$$

Выражение a_i, стоящее справа от знака Σ, называется ***общим членом*** суммы. Под знаком Σ записываются индекс суммирования i и его начальное значение k, а над знаком Σ – последнее значение i, равное n. Выражение $\sum_{i=k}^{n} a_i$ означает, что в общем члене суммы надо последовательно задать $i = k$, $k + 1$, ..., n и получившиеся члены сложить.

Примеры.

1. $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n}$.

2. $\sum_{l=1}^{m} a_l b_l = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m$.

Свойства знака суммирования:

1. Обозначение индекса суммирования может быть изменено, т. е.

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{j=k}^{n} a_j .$$

2. Множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно вынести за знак суммы:

$$\sum_{i=k}^{n} c a_i = c \sum_{i=k}^{n} a_i ,$$

где c не зависит от i.

3. $\sum_{i=k}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i$.

Для доказательства этих равенств достаточно раскрыть суммы, находящиеся в левой и правой частях, и убедиться, что полученные выражения равны. Например,

$$\sum_{i=k}^{n}(a_i + b_i) = (a_k + b_k) + (a_{k+1} + b_{k+1}) + \ldots + (a_n + b_n), \qquad (8.1)$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i = (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) + (b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n). \qquad (8.2)$$

Так как правые части равенств (8.1) и (8.2) равны, то равны и левые части, т. е. доказана справедливость свойства 3.

Нередко знак Σ приходится употреблять несколько раз. Рассмотрим, например, сумму всех элементов матрицы с размерами $m \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую обозначим через S. Обозначим также сумму элементов i-й строки через u_i, а сумму элементов j-го столбца – через v_j.

Тогда $u_i = a_{i1} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$,

$v_j = a_{1j} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{mj} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$.

Ясно, что

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}). \qquad (8.3)$$

С другой стороны,

$$S = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \sum_{j=1}^{n} v_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}). \qquad (8.4)$$

Из сопоставления равенств (8.3) и (8.4) получаем четвертое свойство знака суммирования.

4. Два знака суммы могут быть переставлены местами, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}).$$

При суммировании по разным индексам скобки обычно опускают и вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij})$ пишут $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$, подразумевая, что слагаемые a_{ij} сначала суммируют по j при фиксированном i (внутренняя сумма), затем полученные величины суммируют по i (внешняя сумма).

5. При суммировании по двум индексам можно выносить из-под знака внутренней суммы множитель, не зависящий от индекса внутреннего суммирования:

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=l}^{m}a_{ij}b_i=\sum_{i=k}^{n}b_i\sum_{j=l}^{m}a_{ij}.$$

Задачи.

Доказать, что:

а) $(\sum_{i=1}^{m}a_i)(\sum_{j=1}^{n}b_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j;$

б) $(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i))^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_ib_j;$

в) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ia_i+\sum_{j=l}^{m}\beta_jb_j,$

если $c_{ij}=\alpha_i+\beta_j,\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ \sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i;$

г) $\sum_{j=1}^{m}k_i\alpha_i=0$, если $\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\beta_j,\ i=1,2,\ldots,m,$

и $\sum_{i=1}^{m}k_ia_{ij}=0,\ j=1,2,\ldots,n.$

8.2. Понятие квадратичной формы

Квадратичной формой $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных.

❍ **Пример.** Сумма

$$x_1^2-2x_1x_2+3x_3x_1+4x_2^2-2x_1x_3 \tag{8.5}$$

является квадратичной формой от трех неизвестных x_1, x_2, x_3. ●

Каждую квадратичную форму можно записать в стандартном виде. Для этого сначала приведем подобные в квадратичной форме, затем обозначим коэффициент при x_i^2 через a_{ii}, а коэффициент при произведении x_ix_k $(i\neq k)$ – через $a_{ik}+a_{ki}$, причем $a_{ik}=a_{ki}$. Член $(a_{ik}+a_{ki})x_ix_k$ запишем в виде $a_{ik}x_ix_k+a_{ki}x_kx_i$. Теперь квадратичную форму можно записать в виде

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots +$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \tag{8.6}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы F. Так как $a_{ik} = a_{ki}$, то A – симметрическая матрица.

○ **Пример.** Записать квадратичную форму (8.5) в стандартном виде и найти ее матрицу.

После приведения подобных получим

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2^2 =$$
$$= x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_3x_1 + 4x_2^2 =$$
$$= x_1x_1 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 - x_2x_1 + 4x_2x_2 + 0x_2x_3 +$$
$$+ \frac{1}{2}x_3x_1 + 0x_3x_2 + 0x_3x_3.$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & {}^1/_2 \\ -1 & 4 & 0 \\ {}^1/_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \bullet$$

Квадратичную форму (8.6) можно записать в *векторно-матричном* виде:

$$F(æ) = æ(Aæ), \; æ = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{8.7}$$

Действительно,

$$æ(A\,æ) = æ(x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n) =$$
$$= æ\sum_{j=1}^{n} x_jA_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\,æA_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\,(x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \ldots + x_na_{nj}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} x_ia_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_ix_ja_{ij} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Приведенные выкладки показывают, в частности, что если A – симметрическая матрица, то выражение $æ(Aæ)$ является квадратичной формой от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если α – произвольный n-мерный вектор, то, подставляя в квадратичную форму (8.7) α вместо $æ$, получим число $F(\alpha) = \alpha(A\alpha)$, которое называется **значением квадратичной формы** $F(æ)$ **на векторе** α.

8.3. Канонический базис квадратичной формы

Базис $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ пространства $\mathbf{R}^n$ называется **каноническим базисом квадратичной формы** $F(æ) = æ(Aæ)$, если $\gamma_i(A\gamma_j) = 0$ при $i \neq j$.

Если $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – канонический базис $F(æ)$, то выражение

$$F(æ) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2, \; c_i = F(\gamma_i) \tag{8.8}$$

называется **каноническим видом** $F(æ)$ **в базисе** $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – новый набор неизвестных.

❑ **Теорема 8.1.** Если $\alpha = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_n\gamma_n$ – разложение вектора α по каноническому базису $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ квадратичной формы $F(æ) = æ(Aæ)$, то значение $F(æ)$ на векторе α вычисляется по формуле

$$F(\alpha) = c_1 k_1^2 + c_2 k_2^2 + \ldots + c_n k_n^2, \; c_i = F(\gamma_i).$$

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$F(\alpha) = \alpha(A\alpha) = \left(\sum_{i=1}^n k_i\gamma_i\right)\left(A\sum_{j=1}^n k_j\gamma_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n k_i\gamma_i\right)\left(\sum_{j=1}^n k_j A\gamma_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n k_i k_j \gamma_i\left(A\gamma_j\right) = \sum_{i=1}^n k_i^2\gamma_i\left(A\gamma_j\right) = \sum_{i=1}^n k_i^2 c_i. \;\blacksquare$$

Замечание. Теорема 8.1 утверждает, что если известны канонический базис $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ квадратичной формы $F(æ)$ и ее канонический вид (8.8) в этом базисе, то для вычисления значения $F(\alpha)$ квадратичной формы $F(æ)$ на векторе α достаточно:

1) разложить вектор α по каноническому базису $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

$\alpha = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_n\gamma_n$;

2) коэффициенты разложения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ подставить вместо неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в канонический вид (8.8).

Квадратичная форма имеет много разных канонических базисов. Процесс построения канонического базиса называется **приведением квадратичной формы к сумме квадратов**.

Далее будем использовать два канонических базиса квадратичной формы, которые определим ниже.

❑ **Теорема 8.2.** Ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^n$, состоящий из собственных векторов $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ симметрической матрицы A, $\gamma_i \in A(l_i)$, является каноническим базисом квадратичной формы $F(æ) = æ(Aæ)$, а выражение

$$F(æ) = l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + ... + l_n y_n^2$$

– ее каноническим видом в базисе $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$.

Доказательство. Убедимся сначала, что $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ – канонический базис $F(æ)$. Имеем

$$\gamma_i(A\gamma_j) = \gamma_i(l_j\gamma_j) = l_j(\gamma_i\gamma_j) = 0, \text{ если } i \neq j,$$

так как $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ – ортогональная система векторов.

Вычислим теперь коэффициенты c_i в каноническом виде (8.8):

$$c_i = F(\gamma_i) = \gamma_i(A\gamma_i) = \gamma_i(l_i\gamma_i) = l_i(\gamma_i\gamma_i) = l_i,$$

так как векторы системы $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ нормированы, то $\gamma_i\gamma_i = 1$, $i = 1, 2, ..., n$. ■

Теперь приступим к построению **канонического базиса Якоби** квадратичной формы $F(æ) = æ(Aæ)$.

Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяет **условию Якоби**, если определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \; k = 1, 2, ..., n,$$

называемые **угловыми минорами** матрицы A, *не равны нулю*. Заметим, что $\Delta_1 = a_{11}$, а $\Delta_n = \det A$.

Обозначим через A_{kk} матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы, разлагая его по последнему столбцу, затем полученный определитель разложим по последнему столбцу и т. д.:

$$\det A_{kk} = (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \Delta_k.$$

Из условия $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $\det A_{kk} \neq 0$ и, значит, каждая система уравнений

$$A_{kk}\,æ = \varepsilon_k,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.9}$$

где $\varepsilon_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ – k-й вектор диагональной системы, имеет единственное решение γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ (см. теорему 5.2). Система векторов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ называется **системой векторов Якоби** матрицы A, которая удовлетворяет условию Якоби.

Пример. Найти систему векторов Якоби матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сначала убедимся, что матрица удовлетворяет условию Якоби:

$$\Delta_1 = 2 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Вектор γ_1 является решением системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} æ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Единственное ее решение – вектор $\gamma_1 = (^1/_2, 0, 0)$. Вектор γ_2 является решением системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} æ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Методом Гаусса находим ее решение:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{2} & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Следовательно, $\gamma_2 = (-1, -1, 0)$.

Наконец, вектор γ_3 является решением системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} æ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту систему уравнений методом Гаусса:

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
\boxed{2} & -2 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & -2 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 1
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{c|c|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 1
\end{array}
\;\rightarrow
$$

$$
\rightarrow\;
\begin{array}{c|c|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{4} & 1
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{c|c|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -^1/_2 \\
0 & 1 & 0 & -^1/_2 \\
0 & 0 & 1 & ^1/_4
\end{array}
$$

Итак, вектор $\gamma_3 = (-^1/_2, -^1/_2, ^1/_4)$. ●

❑ **Теорема 8.3.** Если матрица A квадратичной формы $F(æ) = æ\,(A\,æ)$ удовлетворяет условию Якоби, то система векторов Якоби $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ матрицы A является каноническим базисом квадратичной формы $F(æ)$, а выражение

$$F(æ) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

– ее каноническим видом в базисе $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. ■

8.4. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы

Квадратичная форма $F(æ)$ называется **положительно определенной**, если значение $F(æ)$ на каждом *ненулевом* векторе α больше нуля, т. е.

$F(\alpha) > 0$, если $\alpha \neq \theta$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$.

Если же $F(\alpha) < 0$ на каждом $\alpha \neq \theta$, то квадратичная форма называется **отрицательно определенной**.

❑ **Теорема 8.4.** Дана квадратичная форма $F(æ) = æ(Aæ)$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – ее канонический базис, а выражение

$$F(æ) = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_n\gamma_n,\; c_i = F(\gamma_i), \tag{8.10}$$

– канонический вид формы в базисе $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Квадратичная форма $F(æ)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, ..., $c_n > 0$.

2. Квадратичная форма $F(æ)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, ..., $c_n < 0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Необходимость. Дано, что $F(æ)$ – положительно определенная форма. Так как $\gamma_i \neq \theta$, то $F(\gamma_i) > 0$ и поэтому $c_i = F(\gamma_i) > 0$.

Достаточность. Дано, что в каноническом виде (8.10) все коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$ положительны. Покажем, что $F(æ)$ – положительно определенная квадратичная форма. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор α и разложим его по базису $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$:

$$\alpha = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + ... + k_n\gamma_n. \tag{8.11}$$

Так как $\alpha \neq \theta$, то в разложении (8.11) не все коэффициенты $k_1, k_2, ..., k_n$ равны нулю.

Теперь из теоремы 8.1 следует, что

$$F(\alpha) = c_1k_1^2 + c_2k_2^2 + ... + c_nk_n^2 > 0,$$

так как $c_1 > 0, c_2 > 0, ..., c_n > 0$ и среди чисел $k_1, k_2, ..., k_n$ хотя бы одно отлично от нуля.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■

Используя теорему 8.4, получим два наиболее часто употребляемых критерия положительной или отрицательной определенности квадратичной формы.

❑ **Теорема 8.5.** Дана квадратичная форма $F(æ) = æ(Aæ)$. Тогда справедливы два утверждения.

1. Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A положительны.

2. Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A отрицательны.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Рассмотрим ортонормированный базис $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ пространства $\mathbf{R}^n$, состоящий из собственных векторов симметрической матрицы A, и пусть $\gamma_i \in A(l_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ – канонический базис квадратичной формы $F(æ)$, а выражение

$$F(æ) = l_1y_1^2 + l_2y_2^2 + ... + l_ny_n^2$$

– ее канонический вид в базисе $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ (см. теорему 8.2). Теперь первое утверждение теоремы 8.5 вытекает из первого утверждения теоремы 8.4.

Второе утверждение теоремы 8.5 доказывается аналогично. ■

Перед тем как сформулировать критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы, докажем лемму.

❑ **Лемма.** Если какой-нибудь угловой минор Δ_k матрицы A равен нулю, то найдется такой ненулевой вектор δ, что $\delta(A\delta) = 0$.

Доказательство. Так как $\det A_{kk} = \Delta_k$, то $\det A_{kk} = 0$ и, значит, A_{kk} – вырожденная матрица (см. свойство 4 определителей матриц в параграфе 4.2). Отсюда следует, что столбцы матрицы линейно зависимы и поэтому система уравнений $A_{kk}\, æ = \theta$ имеет ненулевое решение, которое обозначим через δ. Тогда $A_{kk}\, \delta = \theta$.

Строение матрицы A_{kk} таково, что уравнения системы $A_{kk}æ = \theta$, начиная с $(k + 1)$-го, имеют вид

$$x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Следовательно, координаты вектора δ, начиная с $(k + 1)$-й, равны нулю и $\delta = (p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0)$.

Теперь

$$\delta(A\delta) = \delta(A_1 p_1 + \ldots + A_k p_k + A_{k+1} \cdot 0 + \ldots + A_n \cdot 0) =$$
$$= (\delta A_1) p_1 + \ldots + (\delta A_k) p_k =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} p_1 + \ldots + \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ a_{k+1\,k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} p_k =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} p_1 + \ldots + \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} p_k =$$

$$= \delta(A_{kk})_1 p_1 + \ldots + \delta(A_{kk})_k p_k = \delta((A_{kk})_1 p_1 + \ldots + (A_{kk})_k p_k +$$
$$+ (A_{kk})_{k+1} \cdot 0 + \ldots + (A_{kk})_n \cdot 0) = \delta(A_{kk}\delta) = \delta\theta = 0. \blacksquare$$

❑ **Теорема 8.6** (критерий Сильвестра). Справедливы следующие утверждения.

1. Квадратичная форма $F(æ) = æ(Aæ)$ положительно определена тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы A положительны.

2. Квадратичная форма $F(æ) = æ(Aæ)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A нечетного порядка отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Необходимость. Дано, что $F(æ)$ положительно определена. Покажем, что все угловые миноры матрицы A отличны от нуля. Допустим противное, и пусть $\Delta_k = 0$. Тогда согласно лемме найдется такой ненулевой вектор δ, что $F(\delta) = \delta(A\delta) = 0$. Однако это противоречит положительной определенности квадратичной формы.

Итак, матрица A удовлетворяет условию Якоби, поэтому можно построить систему векторов Якоби $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, которая является каноническим базисом квадратичной формы $F(æ)$, причем выражение

$$F(æ) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2 \tag{8.12}$$

– ее канонический вид в базисе $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (см. теорему 8.3). Теперь из положительной определенности квадратичной формы $F(æ)$ и первого утверждения теоремы 8.4 следует, что

$$\frac{1}{\Delta_1} > 0, \; \frac{\Delta_1}{\Delta_2} > 0, \; \ldots, \; \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} > 0 \tag{8.13}$$

и, значит,

$$\Delta_1 > 0, \; \Delta_2 > 0, \; \ldots, \; \Delta_n > 0.$$

Достаточность. Если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$, то угловые миноры матрицы A отличны от нуля и можно построить канонический базис квадратичной формы $F(æ)$, в котором выражение (8.12) является каноническим видом $F(æ)$. Теперь из справедливости условий (8.13) и первого утверждения теоремы 8.4 следует, что $F(æ)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■

Список литературы

1. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
2. *Ермаков В.И., Рудык Б.М.* Алгебра векторов и матриц. – М.: СП «Вся Москва», 1993.
3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984.
4. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
5. *Скорняков Л.А.* Элементы линейной алгебры: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1980.

В. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ОТНОШЕНИЯ

1.1. Множества и операции над множествами

Множеством в математике называют совокупность однородных элементов. Высказанное утверждение является не определением, а разъяснением, так как множество – первичное понятие и не может быть определено через другие, более элементарные понятия. Математические множества могут состоять из чисел, векторов, матриц, функций и других объектов. Обозначаются множества прописными буквами A, B, C и т. д. Объекты, из которых состоит данное множество, называют его *элементами* или *точками* и обозначают строчными буквами a, b, c и т. д. Если a принадлежит множеству, это записывается так: $a \in A$. Запись $a \overline{\in} A$ означает, что a не принадлежит A.

Множество A называется **подмножеством** B, если все элементы множества A являются одновременно элементами множества B. Это свойство записывается как операция включения: $A \subset B$.

Если известно, что $A \subset B$ и $B \subset A$, значит, $A = B$.

Далее будем использовать теоретико-множественные кванторы:

$\forall$ – любой элемент множества (общность);

$\exists$ – некий элемент множества (существование);

$\Rightarrow$ – логический квантор следствия.

Эти кванторы позволяют в удобной и однородной форме описать структурное строение и основные качественные свойства множеств.

Например, равенство множеств запишется так:

$A = B$: $\forall\, a \in A$ и $b \in B \Rightarrow a \in B$ и $b \in A$.

Множества A и B не равны, если $\exists a' \in A$ и $a' \overline{\in} B$ или $\exists b' \in B$ и $b' \overline{\in} A$.

Если элементы множества A имеют общий формальный признак (задаваемый законом, условием или ограничением $P(a)$), то множество можно представить в следующей символической форме:

$$A = \{x|_{P(a)}\}. \tag{1.1}$$

Например, множество всех рациональных чисел $\mathbf{Q}$ можно записать в виде

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \Big|_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ n \in \mathbf{N}}} \right\}.$$

Множества вида $[a, b]$ и (a, b), именуемые соответственно отрезком и интервалом, задаются на числовой оси $\mathbf{R}$ (ось действительных чисел) и определяются условиями

$$[a, b] = \{x|_{a \leqslant x \leqslant b}\}, \quad (a, b) = \{x|_{a < x < b}\}. \tag{1.2}$$

Множество называется **конечным**, если оно содержит конечное число элементов, и **бесконечным**, если число элементов бесконечно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

○ **Примеры.** 1. $A = \{x|_{P_n(x) = 0}\}$.

Здесь $P_n(x)$ – многочлен n-й степени вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Очевидно, что множество A является конечным.

2. $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Множество $\mathbf{N}$ является бесконечным.

3. $\{x|_{\substack{x < -1, \\ x > 2}}\} = \varnothing$.

4. $\{x|_{\substack{x^2 + 1 = 0, \\ x \in \mathbf{R}}}\} = \varnothing$. ●

Далее будем изображать множество в виде диаграмм, условно располагающих элементы множеств на плоскости.

Представим графически законы включения (рис. 1.1, *а*) и неравенства (рис. 1.1, *б*).

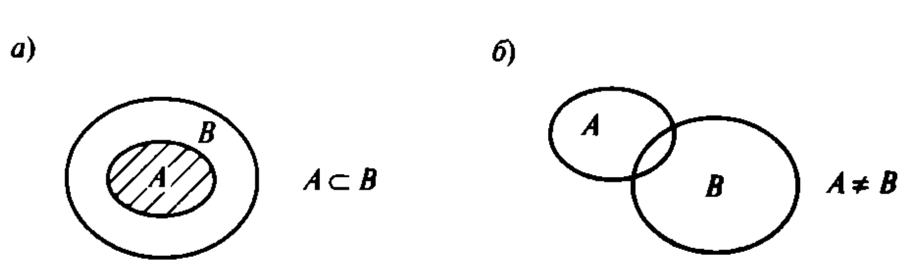


Рис. 1.1

Введем следующие операции над множествами.

1. ***Объединение.*** Множество C называется **объединением** множеств A и B, если оно содержит только все элементы A и все элементы B. Эта операция обозначается так:

$$C = A \cup B. \tag{1.3}$$

Таким образом, $\forall c \in C \Rightarrow c \in A$ или B и $\forall a \in A \Rightarrow a \in C$, $\forall b \in B \Rightarrow$ $\Rightarrow b \in C$.

Примеры диаграмм объединения множеств приведены на рис. 1.2.

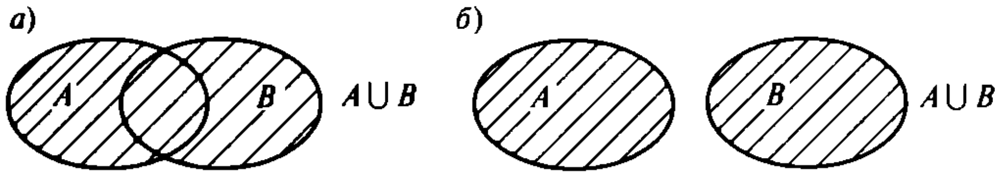


Рис. 1.2

На рис. 1.2, *а* объединение получается как слитное образование, а на рис. 1.2, *б* – как расчлененное.

2. ***Пересечение.*** Множество C называется **пересечением** множеств A и B, если оно содержит только все элементы, принадлежащие A и B одновременно. Эта операция обозначается так:

$$C = A \cap B. \tag{1.4}$$

Тогда $\forall c \in C \Rightarrow c \in A$ и B и $\forall x \in A$ и $B \Rightarrow x \in C$.

На рис. 1.3 приведены диаграммы пересечения для множеств, изображенных на рис. 1.2.

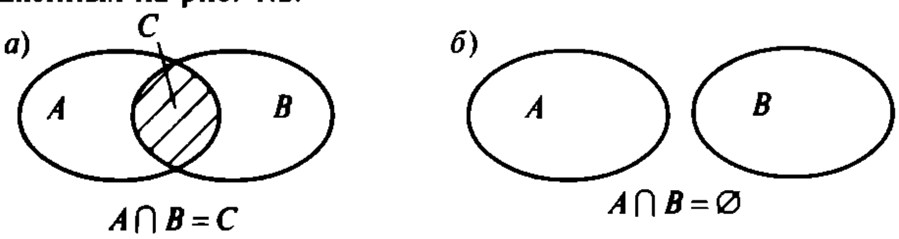


Рис. 1.3

Пересечение A и B на рис. 1.3, *б* является пустым множеством.

Два множества, пересечение которых есть пустое множество, называются **непересекающимися**.

○ **Пример.** Даны два множества:

$A = \{x|_{x>2}\} = (2, +\infty)$, $\qquad B = \{x|_{x<3}\} = (-\infty, 3)$.

Тогда объединение $A \cup B = (-\infty, +\infty)$ и пересечение $A \cap B = (2, 3)$. ●

3. *Разность.* Множество C называется **разностью** множеств A и B, если оно содержит только все элементы A, не принадлежащие B. Операция обозначается так:

$$C = A \setminus B. \tag{1.5}$$

Тогда $\forall\ c \in C \Rightarrow c \in A$ и $\notin B$, а также $\forall\ a \in A$ и $\notin B \Rightarrow a \in C$. Примеры диаграмм этой операции приведены на рис. 1.4.

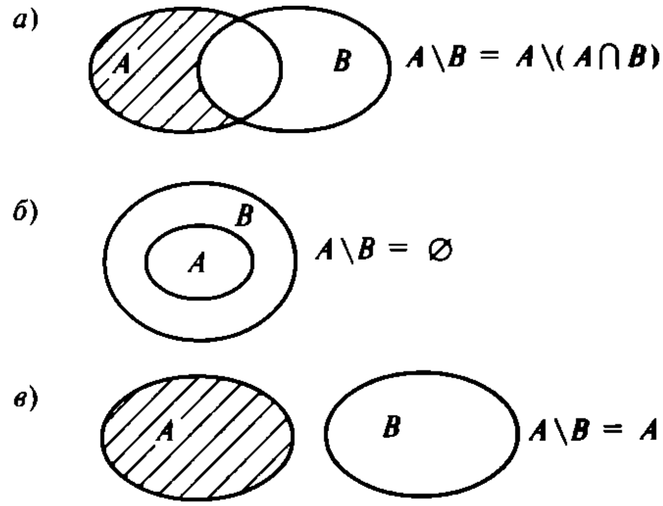


Рис. 1.4

На рис. 1.4, *б* разность $A \setminus B = \varnothing$, так как $A \subset B$, а на рис. 1.4, *в* разность $A \setminus B = A$, так как $A \cap B = \varnothing$.

○ **Пример.** Даны числовые множества:

$A = (2, +\infty)$, $B = (-\infty, 3)$.

Тогда их разность $C = A \setminus B = [3, +\infty) = \{\, x \mid_{x \geqslant 3} \}$. ●

Примечание. Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* B до множества A и обозначается $C_A B$. В этом случае A рассматривается как основное множество.

4. *Симметрическая разность.* Множество C называется **симметрической разностью** множеств A и B, если

$$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{1.6}$$

Обозначается симметрическая разность так:

$C = A \,\Delta\, B$ или $C = A \oplus B$.

Диаграммы операции «симметрическая разность» приведены на рис. 1.5.

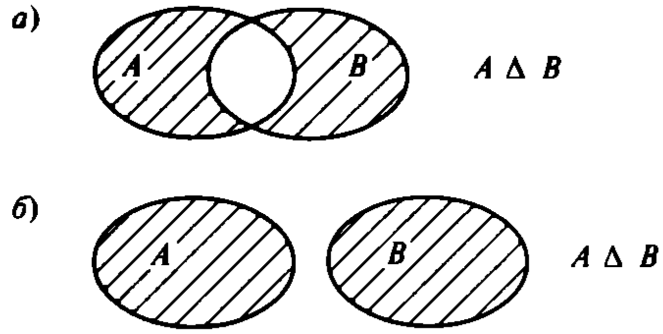


Рис. 1.5

Очевидно, что $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

○ **Пример.** Если $A = (2, +\infty)$ и $B = (-\infty, 3)$, тогда $A \Delta B = \mathbf{R} \setminus (2, 3) = C_{\mathbf{R}}(2, 3) = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. ●

Операции объединения и пересечения, как и действия над действительными числами, подчиняются законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Закон коммутативности (переместительности) по отношению к операциям над множествами выглядит следующим образом:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{и} \quad A \cap B = B \cap A. \tag{1.7}$$

Закон ассоциативности (сочетательности) запишется для любой тройки множеств A, B и C так:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{1.8}$$

т. е. расположение скобок не определяет результат операции объединения или пересечения.

Закон дистрибутивности (распределительности) запишется в двух формах:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1.9}$$

По существу это правило раскрытия скобок в смешанных операциях. Операции объединения и пересечения выступают здесь во взаимно сопряженной роли. Закон дистрибутивности справедлив и по отношению к скобкам, стоящим справа:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.10}$$

Эти законы можно обосновать, доказывая, что произвольный элемент левой части является элементом правой части, и наоборот. Однако подобные сопоставления весьма громоздки, поэтому предоставим читателю возможность самостоятельно обосновать справедливость законов коммутативности и ассоциативности.

Операция «разность», как легко заметить, не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Однако операция «симметрическая разность» и коммутативна, и ассоциативна. Последнее следует из того, что $A \cup B$ и $A \cap B$ – коммутативны и

$$A \Delta B \Delta C = (A \cup B \cup C) \backslash ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)).$$

Для дополнительных множеств справедливы следующие замечательные соотношения:

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B,$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B \quad (D \text{ – основное множество}), \qquad (1.11)$$

которые именуются ***законами Моргана*** или ***принципом двойственности*** [3].

Докажем одно из этих равенств (первое).

❑ Пусть $x \in C_D(A \cup B)$. Это означает, что $x \in D$ и $x \notin (A \cup B)$, т. е. $x \notin A$ и $x \notin B$. Следовательно, $x \in C_D A$ и $x \in C_D B$, т. е. $x \in C_D A \cap C_D B$.

И наоборот, пусть $x \in C_D A \cap C_D B$. Тогда $x \in C_D A$ и $C_D B$. Следовательно, $x \in D$, но $x \notin A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in C_D(A \cup B)$. ■

Все рассмотренные операции можно выполнять над любым количеством множеств. Пусть, например, даны конечные системы множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда с учетом перечисленных законов, в первую очередь закона ассоциативности, можно записать следующие выражения для объединения и пересечения этих множеств:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i. \qquad (1.12)$$

Формулы (1.12) позволяют весьма просто представить структуру многократно объединенных и пересеченных множеств. Более того, эти соотношения применимы и для бесконечной системы множеств с порядковыми номерами:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Аналогичные выводы можно сделать и для дополнительных множеств.

Большое значение в современной математике имеет множественная операция «декартово произведение».

Декартовым произведением множеств A и B называется множество C, составленное из упорядоченных пар (a, b):

$$C = \{ c \mid_{c = (x, y)} \} = A \times B, \tag{1.13}$$

где $x \in A$ и $y \in B$.

В частности, если $A = [a, b]$ и $B = [c, d]$, то $C = [a, b; c, d]$ – множество точек прямоугольника, заданного на плоскости xy (рис. 1.6).

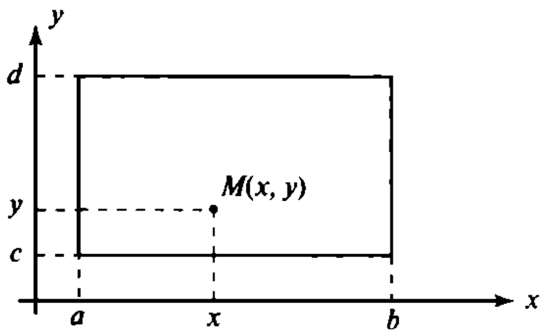


Рис. 1.6

Операция декартова произведения не является коммутативной, но обладает свойством ассоциативности.

Так, в частности, если принять, что $A \subset X$, $B \subset Y$, $C \subset Z$ (здесь X, Y, Z совпадают с множествами осевых точек прямоугольной системы координат $Oxyz$), то

$$A \times B \times C = \{ M \mid_{\substack{M = (x, y, z) \\ x \in A,\, y \in B,\, z \in C}} \}.$$

1.2. Числовые множества. Грани множеств. Множества в $\mathbf{R}^n$

Числовые множества заданы на оси действительных чисел, обозначаемой $\mathbf{R}$. На этой оси выбирают масштаб и указывают начало отсчета и направление. Наиболее распространенные числовые множества: $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ – целых чисел, $\mathbf{Q}$ – рациональных или дробных чисел, интервал (a, b) и отрезок $[a, b]$.

Зададим два числа: a и $\delta > 0$. Тогда интервал $(a - \delta, a + \delta)$ назовем δ-*окрестностью* точки a, а величины $a - \delta$ и $a + \delta$ – *нижней* и *верхней границей* окрестности. Множество $(a - \delta, a + \delta)\setminus\{a\}$ назовем *проколотой окрестностью* точки a.

Очевидно, что δ-окрестность можно задать так:

$$(a - \delta,\ a + \delta) = \{x|_{|x - a| < \delta}\}. \tag{1.14}$$

Напомним, что для действительных чисел

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Операция исчисления модуля или абсолютной величины обладает следующими свойствами:

1) $|x^m y^n| = |x|^m\, |y|^n$, где m и $n \in \mathbf{Z}$;

2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;

3) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ и $|x - y| \geqslant |y| - |x|$;

4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$. (1.15)

❑ Докажем свойства 3 и 4 и предоставим читателю возможность самостоятельно обосновать свойства 1 и 2.

Итак, $|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$,

$|y| = |(y - x) + x| \leqslant |-(x - y)| + |x| = |x - y| + |x|$.

Отсюда $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ и $|x - y| \geqslant |y| - |x|$.

Далее, если $|x| - |y| \geqslant 0$, то $||x| - |y|| = |x| - |y|$ и в силу свойства 3 $||x| - |y|| \leqslant |x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |y|$.

Если $|x| - |y| < 0$, то $||x| - |y|| = |y| - |x|$ и в силу свойства 3

$||x| - |y|| \leqslant |x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |y|$. ■

Поскольку каждое число характеризуется знаком и абсолютной величиной, числовые множества могут иметь грани, определяющие диапазон изменения чисел в сторону возрастания и убывания.

Число K называется **верхней гранью** множества A, если для $\forall\, x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant K$. Аналогично число k называется **нижней гранью** множества A, если для $\forall\, x \in A$ выполняется неравенство $x \geqslant k$. Очевидно, построение грани производится не единственным образом. Так, если существует верхняя грань K, то число $K + C$ ($C > 0$) также будет верхней гранью; если существует нижняя грань k, то число $k - C$ также будет нижней гранью.

Таким образом, множество A, имеющее верхние или нижние грани, порождает бесконечные множественные образования, составленные из числовых граней. Возникает необходимость выделить такие грани, которые обладают статусом единственности.

Для действительных чисел справедлива ***аксиома отделимости*** множеств. *Пусть A и B — непустые числовые множества, причем $\forall\, x \in A$ и $\forall\, y \in B$ удовлетворяют условию $x \leqslant y$. Тогда $\exists\, c \in \mathbf{R}$, такое, что $x \leqslant c \leqslant y$.*

По аксиоме отделимости устанавливаем, что между множеством A и множеством его граней существует единственное число, которое именуется **точной гранью**.

В случае верхних граней точная грань обозначается $\sup A = M$: для $\forall\ x$ и K $x \leqslant M \leqslant K$. В случае нижних граней точная грань обозначается $\inf A = m$: для $\forall\ x$ и k $k \leqslant m \leqslant x$.

Символы sup и inf являются сокращениями от supremum (самый верхний) и infimum (самый нижний).

Если множество имеет верхнюю и нижнюю грань, оно называется **ограниченным**. Если у множества существует только верхняя (нижняя) грань, оно называется **ограниченным сверху (снизу)**.

Множество, у которого ограничена абсолютная величина всех элементов (по условию абсолютная величина может ограничиваться только сверху, так как снизу она ограничена условием неотрицательности), называется **ограниченным по модулю**. Легко показать, что такое множество будет ограниченным и в обычном смысле, так как

$$|x| \leqslant C \Rightarrow -C \leqslant x \leqslant C.$$

Можно утверждать и обратное: всякое ограниченное множество ограничено и по модулю.

Действительно, если $k \leqslant x \leqslant K$, то, выбирая из чисел $|k|$ и $|K|$ наибольшую величину C, получим $-C \leqslant k \leqslant x \leqslant K \leqslant C$, т. е.

$$|x| \leqslant C.$$

Некоторые множества являются неограниченными снизу (сверху) или неограниченными с обеих сторон. Так, множество $\mathbf{N}$ ограничено снизу, но не ограничено сверху, а множество $\mathbf{Z}$ не имеет ограничений как снизу, так и сверху.

Понятия, рассмотренные для числовых множеств, используются при переходе к точкам, которые заданы парой значений и являются элементами декартова произведения $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y$, где $\mathbf{R}_x$ – множество действительных чисел, располагаемых на оси Ox, $\mathbf{R}_y$ – множество действительных чисел, располагаемых на оси Oy.

Множества, принадлежащие $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y$, задают в форме областей, расположенных на плоскости xy (рис. 1.7).

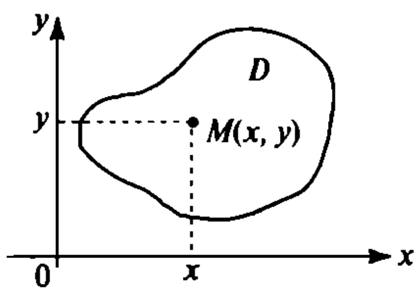


Рис. 1.7

Здесь множество обозначено D, а $M(x, y)$ – точка с координатами x и y. Координаты точки получаются с помощью проекций на оси Ox и Oy. Каждая ось рассматривается как независимое множество $\mathbf{R}$, а вся плоскость, на которой определено декартово произведение $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y$, именуется множеством $\mathbf{R}^2$. При этом за исходное числовое множество можно принять $\mathbf{R}^1$.

Продолжая геометрическую интерпретацию, построим множество $\mathbf{R}^3$ как $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y \times \mathbf{R}_z$. Элементы этого множества M заданы упорядоченными тройками (x, y, z), где x, y, z – координаты M. Наконец, точки множества $\mathbf{R}_{x_1} \times \mathbf{R}_{x_2} \times \ldots \times \mathbf{R}_{x_n} = \mathbf{R}^n$ заданы как упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с числовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Очевидно, что при $n > 3$ указанное определение множества лишается геометрической наглядности. Тем не менее и в этом случае можно рассматривать математические объекты и устанавливать общие положения, связанные с их определением. В частности, в $\mathbf{R}^n$ можно задавать объекты векторной природы, определяя их через числовые координаты и не относя последние к определенной системе прямоугольных осей.

Кроме того, в $\mathbf{R}^n$ (начиная с $n = 2$) имеется возможность строить множества с фигурной организацией. Так, на плоскости и в трехмерном пространстве можно задавать элементарные прямые и кривые линии, а в трехмерном пространстве – плоскости и поверхности.

Особое место в прикладных задачах занимают **выпуклые** множества, которые в общем случае удовлетворяют условию:

$$\text{для } \forall \bar{x} \in A \text{ и } \forall \bar{y} \in A \Rightarrow \lambda \bar{x} + \mu \bar{y} = \bar{z} \in A,$$

где $\lambda, \mu \geqslant 0$ и $\lambda + \mu = 1$.

Выражение $\lambda \bar{x} + \mu \bar{y}$ именуется *выпуклой комбинацией* векторов.

❑ Условие выпуклого комбинирования распространяется на любое число элементов:

$$\text{для } \forall \bar{x}_i \in A \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{x}_k = \bar{x} \in A,$$

где $\lambda_i \in \mathbf{R}$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Если рассматривать концы начальных векторов $\bar{x}^0$ и $\bar{x}'$ как точки M^0 и $M' \in A$, то выпуклая комбинация $\lambda\bar{x}^0 + \mu\bar{x}'$ будет определять точки, принадлежащие гиперпрямой

$$\frac{x_1 - x_1^0}{x_1' - x_1^0} = \frac{x_2 - x_2^0}{x_2' - x_2^0} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{x_n' - x_n^0} = \mu \qquad (1.16)$$

и расположенные на отрезке этой прямой, соединяющем точки M^0 и M'.

Это следует из того, что координаты выпуклой комбинации $\lambda\bar{x}^0 + \mu\bar{x}'$ с учетом ограничений $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ преобразуются к форме

$$\lambda\bar{x}^0 + \mu\bar{x}' = \bar{x}^0 + (\bar{x}' - \bar{x}^0)\mu = \bar{x}, \qquad (1.17)$$

где $\mu \in [0, 1]$ – параметр.

Равенство (1.17) идентично параметрическому уравнению гиперпрямой (1.16). Условие того, что точки располагаются между M^0 и M', определяется тем, что $\mu \in [0, 1]$.

Из указанного геометрического свойства следует, что наряду с точками M^0 и M' выпуклому множеству принадлежит отрезок $[M^0, M']$, соединяющий эти точки.

Далее, если взять любую выпуклую комбинацию

$$\lambda_1\bar{x}_1^0 + \lambda_2\bar{x}_2^0 + \ldots + \lambda_k\bar{x}_k^0 \quad \left(\lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1\right),$$

принадлежащую A, то вместе с ней множеству A принадлежат все точки выпуклого многогранника с вершинами, заданными в точках M_1^0, M_2^0, ..., M_k^0. ■

Приведем простейшие конфигурации выпуклых (рис. 1.8, *а* и *б*) и невыпуклых (рис. 1.8, *в* и *г*) множеств в $\mathbf{R}^2$.

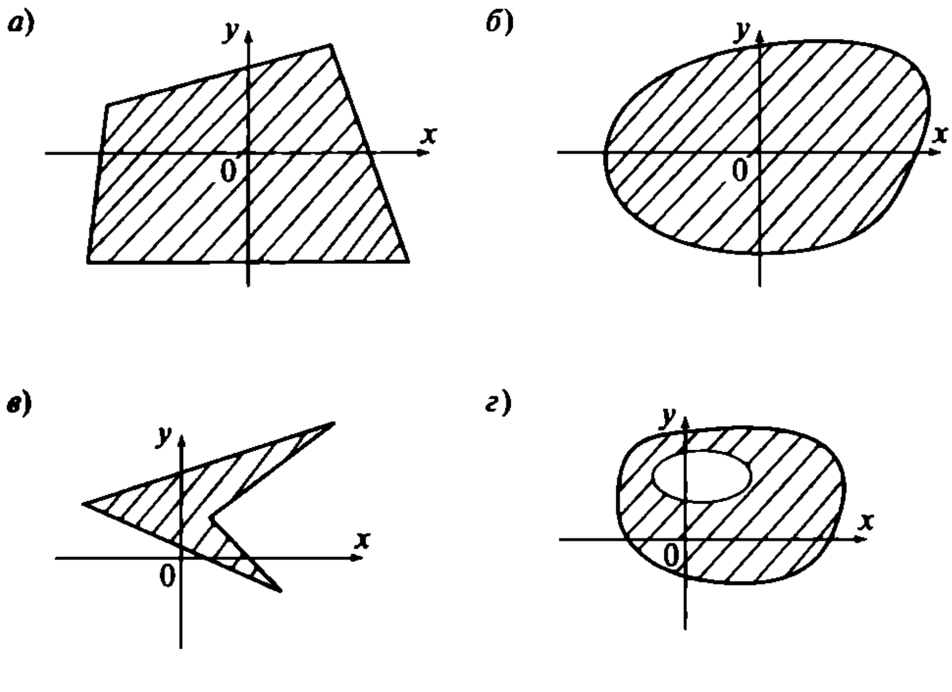


Рис. 1.8

1.3. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества

Пусть даны два множества A и B. Между множествами устанавливается *однозначное* соответствие, если каждому элементу A поставлен в соответствие один и только один элемент B. При этом возможно одному элементу B (образу) соответствует несколько элементов A (прообразов) (рис. 1.9).

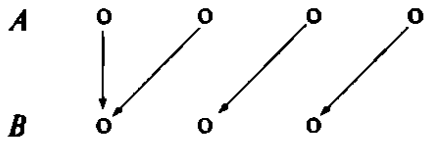


Рис. 1.9

Если соответствие устанавливается в обе стороны, т. е. от A к B и от B к A, то оно называется ***взаимно однозначным***. В этом случае множества называют **эквивалентными** или **равномощными** и обозначают так:

$A \leftrightarrow B$ или $A \sim B$.

Конечные множества равномощны только в том случае, если имеют одинаковое число элементов. Следовательно, мощность конечных множеств определяется числом их элементов. У бесконечных множеств более сложное условие равномощности.

Так, например, можно установить эквивалентность бесконечного множества и его части.

○ **Примеры.** 1. Возьмем множество N и множество всех четных положительных чисел N_2 и разместим их в две строчки:

$$\begin{array}{llllll} N: & 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ N_2: & 2, & 4, & 6, & \ldots, & 2n, \end{array}$$

Из приведенной схемы видно, что $\forall\, x \in N$ и $2x \in N_2$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 1.10).

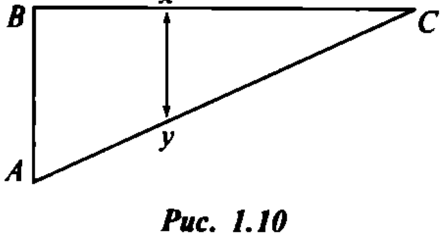


Рис. 1.10

Между точками катета BC и гипотенузы AC существует взаимно однозначное соответствие (двусторонняя стрелка указывает характер соответствия).

3. Покажем, что множество всех точек отрезка $[0, 1]$ эквивалентно множеству $\mathbf{R}$.

Решение этой задачи строится в форме диаграммы соответствий между $\{x\} = [0, 1]$ и $\{x'\} = \mathbf{R}$, приведенной на рис. 1.11.

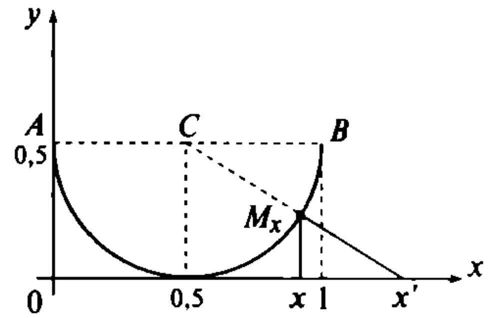


Рис. 1.11

В качестве посредника между $\{x\}$ и $\{x'\}$ выступает полуокружность с радиусом 0,5 и центром в точке $C(0,5; 0,5)$. Любую точку x с помощью вертикали переносим на окружность M_x ($x \to M_x$). Затем из центра окружности C проводим луч через точку M_x до пересечения с осью Ox в точке x'. Соответствие, образованное вертикалью и лучом, является однозначным. Точно так же, только в обратном порядке, строится соответствие между x' и x.

Отметим, что точка 0,5 переходит сама в себя, а точкам 0 и 1 соответствуют бесконечно удаленные точки $(-\infty)$ и $(+\infty)$.

4. Задача установления эквивалентности между множествами $A = [0, 1]$ и $B = (0, 1)$ сложнее.

Покажем, что $A \sim B$ $(A = \{x\}, B = \{y\})$.

Разобьем оба множества на две непересекающиеся части:

$$A = A' \cup C \text{ и } B = B' \cup C,$$

где $A' = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ и $B' = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ – последовательности; $C = A \setminus A'$ и $C = B \setminus B'$.

Если установить взаимно однозначное соответствие между A' и B', то между элементами A и B, принадлежащими C, легко установить взаимное соответствие типа равенства: $x = y$.

Множества A' и B' расположим в две строки:

$$\begin{array}{llllllll} A': & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & & \frac{1}{n}, \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ B': & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \dots, & \frac{1}{n+2}, \dots \end{array}$$

Итак, $0 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $1 \leftrightarrow \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{n} \leftrightarrow \frac{1}{n+2}$, ... ●

Задачи.

1. Установить эквивалентность открытого и замкнутого единичного круга (соответственно круг без границы и круг с границей в форме окружности).

2. Установить эквивалентность между сферой S с одной выколотой точкой M ($S \setminus \{M\}$, где $M \in S$) и плоскостью.

3. Установить эквивалентность между сферой и плоскостью.

Теоремы о бесконечных множествах

Множество, эквивалентное множеству $\mathbf{N}$, называется **счетным**.

❑ **Теорема 1.1** (необходимое и достаточное условие счетности). Для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы A было представимо в виде последовательности:

$$A = \{ x_n \mid _{n \in \mathbf{N}} \}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A – счетное множество. Тогда между A и $\mathbf{N}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Обозначим через a_n тот элемент A, который соответствует n. Очевидно, что порядковый индекс будет единственным у каждого a.

Достаточность. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

Расположим A и $\mathbf{N}$ в две строки:

$$\begin{array}{lllll} A: & a_1, & a_2, \dots, & a_n, & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbf{N}: & 1, & 2, \dots, & n, & \end{array}$$

Из приведенной схемы видно, что между A и $\mathbf{N}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. ■

❑ **Теорема 1.2.** Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

Доказательство. Возьмем в A некоторый элемент и обозначим его a_1. Составим разность $A \setminus \{a_1\} = A_1$. Возьмем в A_1 еще один элемент и обозначим его a_2. Составим новую разность $A_1 \setminus \{a_2\} = A_2$. Процесс продолжается до бесконечности, и на каждом шаге будет выделяться элемент с порядковым номером n и образовываться разность, содержащая бесконечное число элементов.

Таким образом из A выделяется подмножество $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, являющееся счетным. ■

❑ **Теорема 1.3.** Всякое подмножество счетного множества является счетным или конечным.

Доказательство. Пусть A – счетное множество. Тогда $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Путем проверки последовательно выделим элементы подмножества. Двигаясь от a_1 к a_2 и т. д., мы на каком-то шаге впервые встретим элемент подмножества B. Пометим этот элемент $b_1 = a_{n_1}$ (n_1 указывает место, где располагается b_1). Продолжив движение, мы на месте n_2 встретим второй элемент B: $b_2 = a_{n_2}$. При таком движении далее мы переберем все элементы A и пометим элементы B, присвоив им номера, соответствующие порядку встречи. Итак,

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_k, ...\} \text{ и } b_k = a_{n_k}, \quad k = 1, 2, ... \ ■$$

✧ **Следствие.** Счетное множество является минимальным бесконечным множеством (т. е. наиболее примитивно организованным). ✦

❑ **Теорема 1.4.** Декартово произведение двух счетных множеств является счетным.

Доказательство. Пусть A и B – счетные множества, т. е. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_r, ...\}$.

Составим $C = A \times B$, тогда элементы C будут иметь двойной индекс c_{ij}:

$$c_{ij} = (a_i, b_j), \quad i = 1, 2, ..., \quad j = 1, 2, ...$$

Расположим все c_{ij} в таблице:

$i \backslash j$	1	2	3	4	...
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	...
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	
4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	
...	...	...	...	...	...

(1.18)

и проведем в этой таблице диагонали вида

$$\begin{array}{|lllll}
1 & 2 & 4 & 7 & 11 \\
3 & 5 & 8 & 12 & \\
6 & 9 & 13 & & \\
10 & 14 & & & \\
15 & & & &
\end{array} \qquad (1.19)$$

Если двигаться по диагонали справа налево и сверху вниз, последовательно нумеруя элементы, то каждый c_{ij} с конечными i и j получит свой конечный и однозначный порядковый номер: c_{11} – номер 1, c_{12} – 2, c_{21} – 3 и т. д. ■

✧ **Следствие 1.** Декартово произведение $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ является счетным.✦

✧ **Следствие 2.** Декартово произведение $\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ является счетным. ✦

❑ **Теорема 1.5.** Объединение конечного или бесконечного числа конечных или счетных множеств является конечным или счетным множеством.

Доказательство. Примем вначале, что $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i – счетные множества. Далее положим $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \backslash A_1$, ..., $B_n = A_n \backslash (\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i)$, ...

Вновь образованные множества B_i являются попарно непересекающимися, т. е. для $\forall\ i$ и j $(i \neq j)$ $B_i \cap B_j = \varnothing$. Если исходные множества также попарно не пересекаются, то для $\forall i$ $B_i = A_i$.

Кроме того, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ при $n = 1, 2, ...$, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = A$.

Осталось показать счетность $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Очевидно, что все элементы объединения будут иметь два индекса (номер множества и порядковый номер элемента в множестве), тогда

$A = \{b_{ik}\} \sim \{(i, k)\} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$,

поэтому A является счетным. ■

П р и м е ч а н и е. 1. Если некоторые множества B_i являются пустыми или конечными, то им в таблице $K_N = \{(i, k)\}$ соответствуют полностью или частично вычеркнутые строки. В этом случае $A \sim K_N \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ и является конечным или счетным.

2. Если рассматривается объединение конечного числа множеств, то

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

при этом $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing$ и $B_{n+1} = B_{n+2} = \ldots = \varnothing$.

В этом случае в соответствии с примечанием 1 объединение будет конечным или счетным множеством.

❑ **Теорема 1.6.** Множество всех рациональных чисел является счетным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathbf{Q} = \{\frac{n}{m}\Big|_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ m \in \mathbf{N}}}\}$ представим в виде объединения $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, где

$$A_1 = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, \ldots, n, \ldots\},$$

$$A_2 = \{-\frac{n}{2}\Big|_{n \in \mathbf{N}}\} \cup \{\frac{n}{2}\Big|_{n \in \mathbf{N}}\},$$

. . . .

$$A_m = \{-\frac{n}{m}\Big|_{n \in \mathbf{N}}\} \cup \{\frac{n}{m}\Big|_{n \in \mathbf{N}}\},$$

. . . .

Каждое множество A_m является счетным. Очевидно, что эти множества имеют общие элементы, т. е. пересекаются. Тем не менее бесконечное объединение A_m является счетным. ■

✧ **Следствие 1.** Множество всех точек плоскости и пространства, имеющих рациональные координаты, является счетным.

Действительно, множество всех точек плоскости и пространства можно представить соответственно так:

$$A = \mathbf{Q}_x \times \mathbf{Q}_y, \quad A = \mathbf{Q}_x \times \mathbf{Q}_y \times \mathbf{Q}_z.$$

Ввиду того, что $\mathbf{Q}_x \times \mathbf{Q}_y$ – счетное множество, $\mathbf{Q}_x \times \mathbf{Q}_y \times \mathbf{Q}_z = (\mathbf{Q}_x \times \mathbf{Q}_y) \times \mathbf{Q}_z$ также является счетным. ✦

✧ **Следствие 2.** Множество всех точек пространства $\mathbf{R}^n$, имеющих рациональные координаты, является счетным.

Доказательство проводится по индукции:

$$\mathbf{Q}_{x1} \times \mathbf{Q}_{x2} \times \ldots \times \mathbf{Q}_{xn} = (\mathbf{Q}_{x1} \times \mathbf{Q}_{x2} \times \ldots \times \mathbf{Q}_{xn-1}) \times \mathbf{Q}_{xn}. \text{ ✦}$$

□ **Теорема 1.7.** Множество всех действительных чисел является несчетным.

Доказательство. Практически достаточно показать несчетность множества [0, 1], так как [0, 1] ~ **R**.

Представим произвольное число $x \in [0, 1]$ в форме десятичного разложения:

$$x = 0{,}p_1p_2...p_n...,$$

где p_i ($i = 1, 2, ..., n, ...$) – цифры i-го разряда, принимающие значения 0, 1, ..., 9.

Число запишется так:

$$x = \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + ... + \frac{p_n}{10^n} + ...$$

Допустим противное: множество [0, 1] будем считать счетным. Тогда $[0, 1] = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$.

Каждое число запишем в форме

$$x_i = 0{,}p_{i1}p_{i2}...p_{in}..., \quad i = 1, 2, ..., k, ..., \tag{1.20}$$

где p_{ij} – j-й разряд i-го числа ($j = 1, 2, ..., k, ...$).

Составим число y в виде

$$y = 0{,}q_1q_2...q_n..., \quad y \in [0, 1],$$

где $q_j = 1$, если $p_{jj} \neq 1$, и $q_j = 0$, если $p_{jj} = 1, j = 1, 2, ...$.

Тогда число y не может расположиться в последовательности $\{x_i\}$, так как все его разряды отличаются от соответствующих разрядов чисел, записанных в (1.20). Число y является действительным, и в силу этого последовательность не может охватить все числа [0, 1]. ■

Множество всех действительных чисел имеет мощность, называемую **континуумом**.

Рассмотрим множество мощности континуума, предложенное Кантором [3]. Составим последовательность множеств $A_0, A_1, ..., A_n, ...$, в которых производится изъятие срединной части:

$$A_0 = [0, 1], \quad A_1 = [0, 1]\backslash\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad A_2 = A_1\backslash[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)], ...$$

Множество A_1 состоит из двух частей: $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$, а A_2 – из четырех частей: $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$. Каждая часть имеет длину: $\frac{1}{3}$ в A_1, $\frac{1}{9}$ в A_2 и т. д.

Действуя по этой процедуре, составим A_n, имеющее 2^n частей длиной $(\frac{1}{3})^n$, и, вырезая из каждой части A_n центральный интервал длиной $(\frac{1}{3})^{n+1}$, построим A_{n+1}, содержащее 2^{n+1} частей. Очевидно, что $A_{n+1} \subset A_n$, где $n = 0, 1, \ldots$. Продолжая этот процесс до бесконечности, получаем

$$A_n = \bigcap_{i=0}^{n} A_i, \quad K = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Множество K называется **множеством Кантора**. Оно имеет следующие свойства.

Во-первых, просуммировав длины всех отброшенных промежутков, получим

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ldots = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3} + \ldots + (\frac{2}{3})^{n-1} + \ldots) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

т. е. оставшееся после всех вырезаний множество имеет общую протяженность, равную 0, так как длина A_0 равна 1.

Во-вторых, K не является плотным множеством, т. е. в любом промежутке, входящем в $[0, 1]$, можно выделить интервал, не содержащий точек K.

Кроме того, интересна структура троичного разложения элементов K.

В общем случае любое $x \in [0, 1]$ в троичном разложении запишется так:

$$x = 0{,}p_1p_2 \ldots p_n \ldots \quad (x = \frac{p_1}{3} + \frac{p_2}{3^2} + \ldots + \frac{p_n}{3^n} + \ldots),$$

где $p_i = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Для элементов K троичное разложение $z = 0{,}\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots$, где $\gamma_i = \begin{cases} 0, \\ 2. \end{cases}$

Это следует из того, что в A_1 изъяты все числа, первый разряд которых в троичном разложении равен 1, в A_2 – числа со вторым разрядом, равным 1, и т. д. Поэтому разрядное разложение чисел Кантора имеет бесконечный цифровой фильтр, запрещающий появление единиц.

Множество K эквивалентно $[0, 1]$. С этой целью сравним разрядные разложения чисел K и чисел $[0, 1]$ в двоичном разряде:

$$z = \frac{\gamma_1}{3} + \frac{\gamma_2}{3^2} + \ldots + \frac{\gamma_n}{3^n} + \ldots \quad (\gamma_i = \begin{cases} 0, \\ 2 \end{cases}), \quad x = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \ldots + \frac{p_n}{2^n} + \ldots \quad (p_i = \begin{cases} 0, \\ 1 \end{cases}).$$

Установим следующее соответствие: для $\forall\ z \in K \ \ \exists\ x \in [0, 1]$ и $p_i = \dfrac{\gamma_i}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$; для $\forall\ x \in [0, 1] \ \ \exists\ z \in K$ и $\gamma_i = 2p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Это взаимно однозначное соответствие.

Наконец, рассмотрим еще один пример множества мощности континуума не числовой природы.

Дано некоторое счетное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Составим произвольное подмножество множества A и обозначим его B: $B \subset A$. Очевидно, что $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$.

Параллельно с B рассмотрим последовательность номеров $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. В частности, если подмножество B является конечным, то ему соответствует конечная последовательность номеров. Каждой последовательности номеров поставим во взаимно однозначное соответствие двоичное разложение действительного числа, принадлежащего $[0, 1]$:

$$\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \leftrightarrow 0{,}\underbrace{\underbrace{\underbrace{0\ldots1}_{n_1}0\ldots1}_{n_2}0\ldots1}_{n_k}0\ldots$$

Таким образом, любое подмножество B порождает действительное число x отрезка $[0, 1]$ и наоборот, т. е. множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность континуума. В математике такие множества, которые составлены из подмножеств, положили начало изучению неформальной алгебры и логики.

1.4. Отношения. Отношения тождества и упорядоченности

Как было показано ранее, одинаковые по мощности множества могут иметь принципиально различную структуру. Для того чтобы установить внутреннюю градацию структурных образований, введем понятие отношения, которое выражает внутреннюю связь между парами элементов множеств A и B. **Отношением внешней композиции** множеств называется любое подмножество декартова произведения $A \times B$, обозначаемое T: $T \subset A \times B$. Если пара (x, y), являющаяся элементом $A \times B$, принадлежит T, то можно записать xTy или $(x, y) \in T$.

Отношением внутренней композиции называется отношение, заданное на $A \times A$.

Рассмотрим основные **свойства** (аксиомы) отношений внутренней композиции, которые используются при решении многих задач моделирования; рефлексивность, симметричность или антисимметричность и транзитивность.

1. Отношение является **рефлексивным**, если $\forall x$: $x\mathrm{T}x$, т. е. $(x, x) \in \mathrm{T}$.

2. Отношение является **симметричным**, если $\forall x, y$: $x\mathrm{T}y \Rightarrow y\mathrm{T}x$, и **антисимметричным**, если из $x\mathrm{T}y$ и $y\mathrm{T}x \Rightarrow x = y$.

3. Отношение является **транзитивным**, если $\forall x, y, z$: $x\mathrm{T}y$ и $y\mathrm{T}z \Rightarrow x\mathrm{T}z$.

Очевидно, что условие рефлексивности устанавливает принадлежность подмножеству T квадрата $A \times A$ (где $A = [a, b]$) точек диагонали $x = y$ (рис. 1.12, *а*).

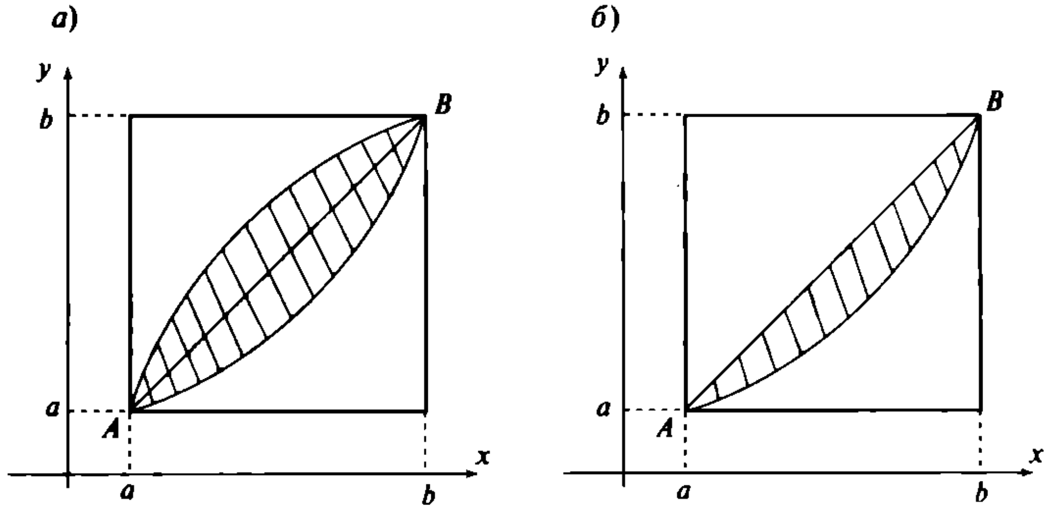


Рис. 1.12

Условие симметричности устанавливает, что элементы T располагаются симметрично по отношению к диагонали AB (см. рис. 1.12, *а*), а условие антисимметричности запрещает появление симметричных точек относительно диагонали (см. рис. 1.12, *б*).

Свойство транзитивности выражает условие формирования маршрутов смещений точек из любого пункта на диагонали (рис. 1.13).

Наряду с допустимыми точками M_0, M_1 и M_2 (M_0 – по условию рефлексии) множеству T принадлежит точка M_3, которая вместе с M_0, M_1, M_2 задает вершину прямоугольника $M_0M_1M_3M_2$: $M_0(x_0, x_0)$, $M_1(x_1, x_0)$, $M_2(x_0, x_2)$ и $M_3(x_1, x_2)$.

Отношение T называется **отношением тождества**, если оно обладает рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью.

Отношение T называется **отношением упорядоченности**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

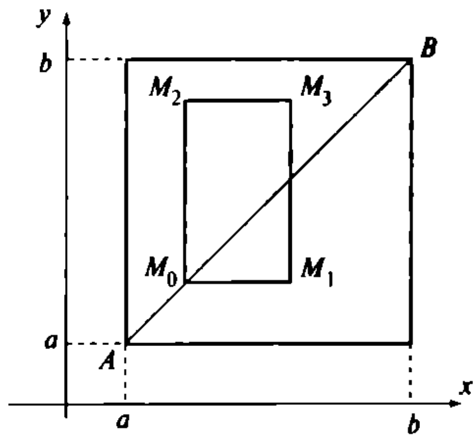


Рис. 1.13

Отношение тождества

Рассмотрим более подробно отношение тождества.

❑ **Теорема 1.8.** Всякое отношение тождества порождает разбиение множества A на непересекающиеся подмножества, именуемые *классами эквивалентности* (без доказательства) [3],

$$A = \bigcup_{\alpha} K_{\alpha}, \text{ где } K_{\alpha'} \cap K_{\alpha''} = \varnothing. \blacksquare$$

Указанная теорема, обладая самостоятельным значением, позволяет разбивать множества на классы.

Приведем простейшие примеры отношений тождества, которые обозначим символом $\equiv$.

1. Пусть $A = \mathbf{Z}$. Отождествим целые числа по признакам делимости на m ($m \in \mathbf{N}$ и $m \geqslant 2$). Это сравнение записывается так:

$x \equiv y \bmod (m)$, если $x - y = mk$, $k \in \mathbf{Z}$.

Данное отношение разбивает $\mathbf{Z}$ на m классов ($k_0, k_1, ..., k_{m-1}$) в соответствии с величиной остатка при делении на m.

Итак, $A = \bigcup\limits_{i=0}^{m-1} K_i$,

где $K_0 = \{mk\}$, $K_1 = \{mk + 1\}$, ..., $K_{m-1} = \{mk + m - 1\}$.

2. Пусть $A = \mathbf{R}^n$ (множество n-мерных векторов), тогда $\bar{x} \equiv \bar{y}$, если $\bar{x} = \bar{y}$, т. е. для $\forall\, i$ ($i = 1, 2, ..., n$) $x_i = y_i$.

Множество $A = \bigcup\limits_{\bar{x}} K_{\bar{x}}$.

В первом примере имеем конечное число классов и счетное множество элементов в каждом классе, во втором — несчетное множество классов с единственным элементом в каждом классе.

3. Составим тождество действительных чисел, имеющих одинаковые дробные части в разложении

$$x = E(x) + r,$$

где $E(x)$ — целая часть числа x, а r — дробная часть, $0 \leqslant r < 1$.

Тогда $x \equiv y$, если $x - y = l \in \mathbf{Z}$.

Проверим справедливость аксиом:

1) рефлексивность: $x \equiv x$, так как $x - x = 0 \in \mathbf{Z}$;

2) симметричность. Пусть $x \equiv y$, т. е. $x - y = l \in \mathbf{Z}$. Тогда $y - x = -l \in \mathbf{Z}$;

3) транзитивность. Пусть $x \equiv y$ и $y \equiv z$, т. е. $x - y = l$, $y - z = m$. Тогда $x - z = x - y + (y - z) = l + m = n \in \mathbf{Z}$.

Очевидно, что $A = \bigcup\limits_{r} K_r$, где K_r включает все числа с одинаковой дробной частью.

Имеем несчетное множество классов (по мощности множества $r \in [0, 1)$) со счетным числом элементов (по мощности всех целых чисел).

4. Множество всех треугольников, заданных на плоскости $\mathbf{R}^2$, разбивается на классы отношением тождества

$$\Delta_x \equiv \Delta_y, \quad \text{если } \Delta_x \sim \Delta_y.$$

Значок ~ означает закон подобия. Соответственно,

$$A = \bigcup\limits_{\Delta^*} K_{\Delta^*},$$

где Δ^* — треугольник с единичной стороной; K_{Δ^*} — объединение всех треугольников, подобных Δ^*.

В данном случае имеем несчетное множество классов и каждый класс содержит несчетное множество точек (треугольников).

Отношение упорядоченности

Рассмотрим отношение упорядоченности. Отношение упорядоченности называется *полным* или *линейным*, если оно распространяется на всевозможные пары элементов A. В противном случае упорядоченность называется *частичной*.

Примером полной упорядоченности служит неравенство $\leqslant$, заданное на множестве действительных чисел.

Частичная упорядоченность может быть задана на множестве натуральных чисел. Зададим это отношение в виде символа $\lessdot$, означающего предшествование.

Итак, $m \leqslant n$, если $n = mp$, где m, n и $p \in \mathbf{N}$.

Очевидно, что данная предшественность обладает: а) рефлексивностью, т. е. $m \leqslant m$, так как $m = m \cdot 1$; б) антисимметричностью, так как при $n = mp$ и $m = nq$ (p и $q \in \mathbf{N}$) имеем $n = n(pq)$, т. е. $pq = 1$.

Далее, если $m \leqslant n$ ($n = mp$) и $n \leqslant l$ ($l = nq$), то $l = m(pq)$ и, следовательно, $m \leqslant l$.

Функциональное отношение

Особое место в математическом анализе занимает отношение внешней композиции, именуемое функциональным. Для его определения введем понятие сечения отношения $\mathbf{T}$, заданного на $A \times B$.

Сечением T_x отношения $\mathbf{T}$ называется множество всех y, для которых пара $(x, y) \in \mathbf{T}$ при фиксированном x.

Функциональным отношением множества $A \times B$ называется такое отношение $\mathbf{T}$, для которого сечение T_x при $\forall x \in A$ содержит один элемент. В этом случае A называется *областью задания* функции, T_x – *значением* функции, обозначаемым $f(x)$ ($y = f(x) = T_x$).

Множество всех T_x называется *областью изменения* функции и обозначается E_y: $E_y = \{T_x\}$.

Данное определение полностью согласуется с известной формулировкой о функции как однозначном соответствии двух числовых множеств, которое будет рассмотрено в главе 2.

2. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

2.1. Функции и их задание

В параграфе 1.4 было дано определение функции общего вида как функционального отношения. Введем определение функции как соответствия.

Будем говорить, что на множестве $A \subset \mathbf{R}$ **задана функция** $y = f(x)$, если $\forall\, x \in A$ поставлено в соответствие по определенному правилу или закону единственное значение $y \in E_f \subset \mathbf{R}$. Тогда A называется *областью задания* функции, а $E_f = \{\, y \mid_{y = f(x)} \}$ – *областью изменения*. Значение x называется *аргументом* или *независимой переменной*, y – *зависимой переменной*.

Наиболее распространены следующие способы задания функции: *формульный*, или *аналитический*, *графический*, *логический* и *табличный*.

Примеры формульных зависимостей:

$y = ax + b$ – линейная функция с областью задания $A = \mathbf{R}$;

$y = \dfrac{k}{x}$ – обратно пропорциональная функция с областью задания $A = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Примеры логических зависимостей:

$$y = 2|x| - 1 = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -2x - 1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$A = \mathbf{R}$;

$y = D(x)$ (функция Дирихле),

$$\text{где } D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$A = \mathbf{R}$.

Графический способ задания основан на построении кривой на плоскости Oxy (рис. 2.1).

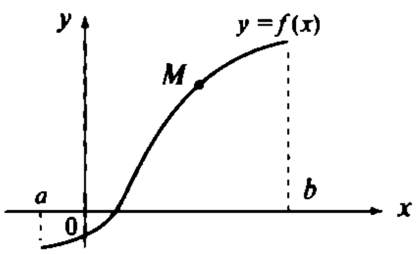


Рис. 2.1

Геометрическое место точек $M(x, f(x))$ определяет характер изменения кривой в области $A \subset \mathbf{R}$. Широко распространено задание элементарных зависимостей – показательных (рис. 2.2), логарифмических (рис. 2.3), тригонометрических (рис. 2.4 и 2.5) и обратных тригонометрических (рис. 2.6 и 2.7) с помощью графических представлений.

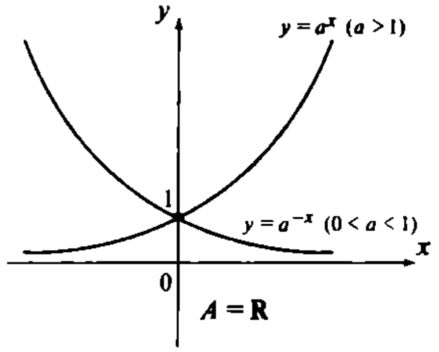


Рис. 2.2

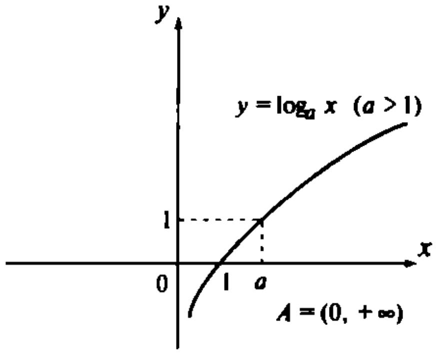


Рис. 2.3

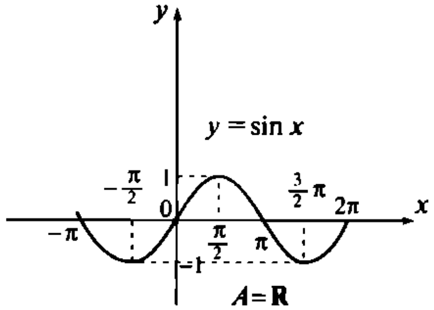


Рис. 2.4

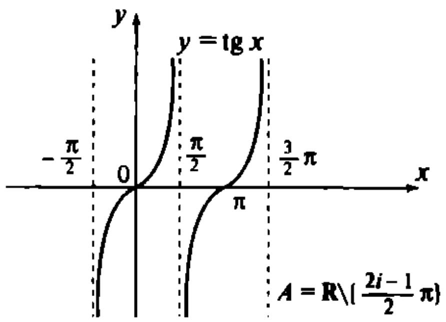


Рис. 2.5

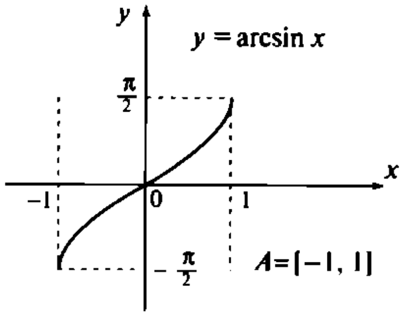


Рис. 2.6

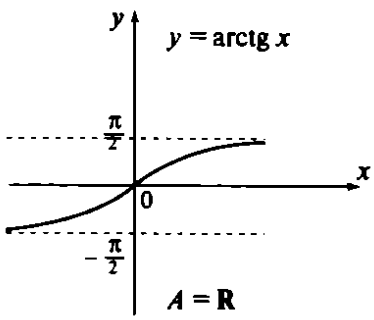


Рис. 2.7

Во многих случаях функция задана комбинированно, например использовано логическое и графическое построение. Так, функции $y = E(x)$ (целая часть числа) и $y = \{x\}$ (дробная часть числа) представлены в виде

$$\{x\} = x - E(x),$$

$$E(x) = \begin{cases} n - 1, \text{ если } n - 1 \leqslant x < n, \\ n, \text{ если } x = n, \end{cases} \tag{2.2}$$

(рис. 2.8 и 2.9).

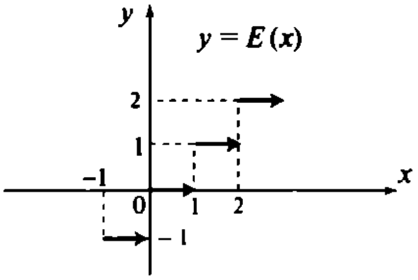


Рис. 2.8

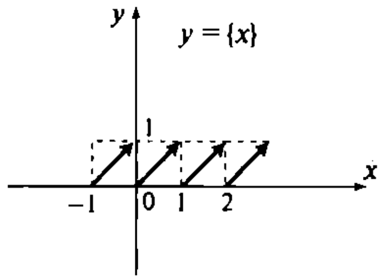


Рис. 2.9

Функциональная зависимость может быть задана неявно с помощью решения функционального уравнения вида

$$F(x, y) = 0. \tag{2.3}$$

Решением этого уравнения является функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой в (2.3) уравнение обратится в тождество на $[a, b]$ (области задания $\varphi(x)$):

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Для того чтобы пользоваться таким способом задания функции, необходимо установить условие однозначного разрешения функционального уравнения, что будет рассмотрено в главе 5. Здесь же приведем элементарный пример задания неявной функции с помощью уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (A = [-a, a]). \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) задает эллипс с центром в начале координат (рис. 2.10).

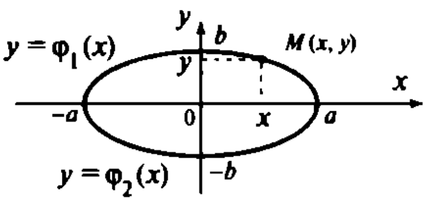


Рис. 2.10

Явное разрешение уравнения эллипса определяет две ветви графика:

$$y = \varphi_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad y = \varphi_2(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Особую форму задания функции представляет *параметрический* способ, определяющий функцию $y = f(x)$ как систему функциональных законов относительно промежуточной переменной t (рассматриваемой как параметр):

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \text{где } t \in G \subset \mathbf{R}. \end{cases}$$

Очевидно, что связь между x и y опосредуется переменной t.

○ **Пример.** Зададим параметрическую систему следующим образом:

$x = a \sin t, \quad y = b \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$

Легко убедиться, что эти соотношения в параметрической форме задают эллиптическую кривую (см. рис. 2.10), так как

$$\frac{a^2 \sin^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \cos^2 t}{b^2} \equiv 1. \ \bullet$$

Параметрический способ задания удобен при изучении характера изменения извилистых кривых, имеющих петлевые (рис. 2.11), овальные (рис. 2.12) и спиральные неоднозначности (рис. 2.13).

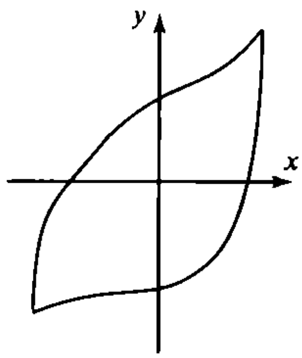


Рис. 2.11

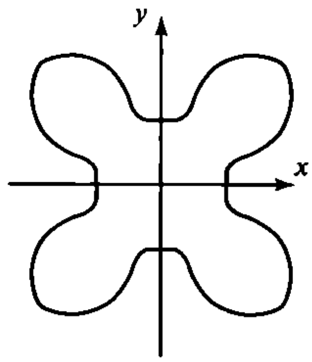


Рис. 2.12

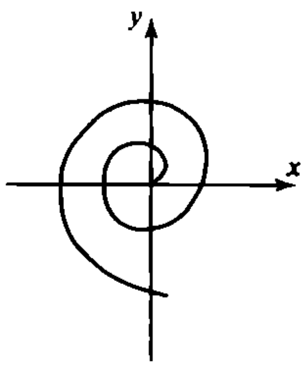


Рис. 2.13

В экономических моделях задается набор стоимостных зависимостей $P(Q)$: функции выручки $TR(Q)$ и функции издержек $TC(Q)$ от объема выпуска Q, выраженного в единицах продукции.

В частности, пусть

$$P(Q) = \begin{cases} TR(Q) = -\frac{1}{8}Q^2 + 7Q, \\ TC(Q) = 4Q + 10. \end{cases}$$

Выразим обе зависимости в форме графиков, построенных на плоскости OQP, где Q – независимая величина объема выпуска; P – стоимость выпуска (рис. 2.14).

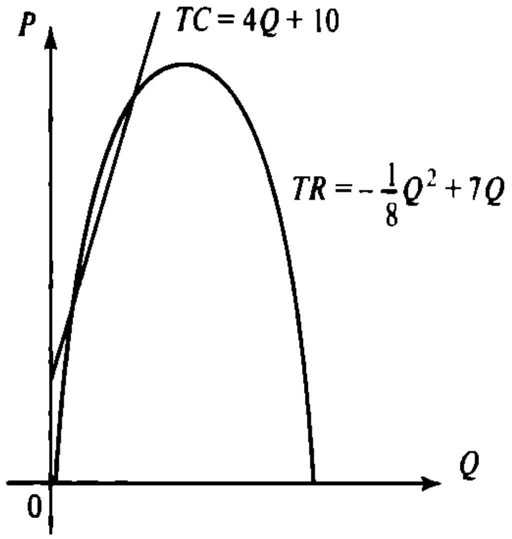


Рис. 2.14

2.2. Числовые последовательности и пределы

Рассмотрим специальные функции $y = f(n)$, заданные на множестве $\mathbf{N}$. Эти функции натурального аргумента называются **числовой последовательностью** $x_n = f(n)$ и обозначаются $\{x_n\}$.

Различают ограниченные и неограниченные последовательности.

Последовательность называется **ограниченной сверху**, если $\exists K \in \mathbf{R}$, такое, что для $\forall n \;\; x_n \leqslant K$. Аналогично последовательность **ограничена снизу**, если $\exists k \in \mathbf{R}$, такое, что для $\forall n \;\; x_n \geqslant k$. Если последовательность ограничена снизу и сверху, т. е. $\{x_n\} \subset [k, K]$, она называется **ограниченной**.

С другой стороны, последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной по модулю**, если $\exists\, C > 0$, такое, что для $\forall n \;\; |x_n| \leqslant C$.

Очевидно, что в этом случае для $\forall n$ справедливо неравенство $-C \leqslant x_n \leqslant C$ и, таким образом, $\{x_n\}$ является ограниченной. Верно и обратное утверждение: если последовательность ограничена, то она ограничена и по модулю.

Действительно, если $k \leqslant x_n \leqslant K$, то, выбирая $C = \max\{|k|, |K|\}$, получим

$-C \leqslant k \leqslant x_n \leqslant K \leqslant C$, т. е. $|x_n| \leqslant C$.

○ **Примеры.** 1. $\{x_n\} = \mathbf{N}$ ограничена снизу числом 1.

2. $\{-2 + \frac{3}{n}\}$ ограничена снизу числом -2, а сверху числом 1 и ограничена по модулю числом 2. ●

Задача.

Определить ограничения снизу и сверху, а также по модулю для последовательностей $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ и $\left\{1 - \frac{n}{n+1}\right\}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N$, такое, что $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Данная операция обозначается символом lim, означающим предельный переход:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или } x_n \to a \quad \text{при } n \to \infty.$$

По указанному определению последовательность имеет предел, если, начиная с некоторого номера N, т. е. при $n = N + 1, N + 2, \ldots$, элементы последовательности находятся в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, который называется ε-*окрестностью* точки a (рис. 2.15).

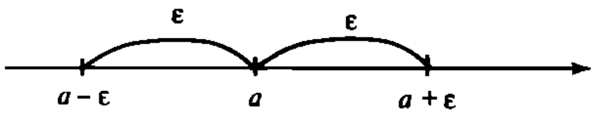


Рис. 2.15

Задачи.

1. Самостоятельно обосновать решения:

1) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;

2) $x_n = 10^{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2. Показать, что последовательность $x_n = \sin n + \frac{(-1)^n}{n}$ ограничена и не имеет предела.

В рассмотрении числовых пределов особую роль играет величина, именуемая бесконечно малой. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \text{ или } \alpha_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

○ **Примеры.** 1. $\alpha_n = \dfrac{3}{n+1}$. 2. $\beta_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+2}$.

Обе величины имеют нулевой предел. Обосновать. ●

Применительно к бесконечно малым справедливы утверждения:

1. *Сумма двух бесконечно малых является бесконечно малой.*

2. *Произведение бесконечно малой на ограниченную величину является бесконечно малой.*

Докажем первое утверждение.

Пусть α_n и $\beta_n \to 0$. Составим $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$. По определению для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\alpha$ и N_β, такие, что $n > N_\alpha \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$ и $n > N_\beta \Rightarrow |\beta_n| < \varepsilon$.

Тогда при $n > N = \max\{N_\alpha, N_\beta\}$

$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < 2\varepsilon.$

Так как ε произвольно, $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, если α_n – бесконечно малая и x_n – ограниченная величина, то для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$: при $n > N \ |\alpha_n| < \varepsilon$ и при $\forall n \ |x_n| \leqslant C$.

Тогда $\beta_n = x_n\alpha_n$ по модулю оценивается так:

$|\beta_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < C\varepsilon$ при $n > N$.

Так как ε произвольно, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из данных утверждений следует, что $\sum\limits_{i=1}^{k} x_{in}\alpha_{in}$, где x_{in} – ограниченные, а α_{in} – бесконечно малые величины, является бесконечно малой величиной.

❑ **Теорема 2.1.** Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{2.5}$$

где a – постоянная; α_n – бесконечно малая.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Тогда $x_n - a$ по определению является бесконечно малой, т. е. $x_n = a + \alpha_n$.

Достаточность. Если $x_n = a + \alpha_n$, тогда $|x_n - a| = |\alpha_n|$. Отсюда для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$: при $n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$ (так как $\alpha_n \to 0$). ■

Наряду с бесконечно малыми существуют **бесконечно большие** величины, являющиеся обратными по отношению к бесконечно малым. Поэтому $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ является бесконечно большой ($|x_n| = \dfrac{1}{|\alpha_n|} \to +\infty$ при $n \to \infty$), если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, такое, что при $n > N \ |x_n| > \varepsilon$.

В отличие от бесконечно малых бесконечно большие величины могут не иметь предела. Например, $x_n = (-1)^n n$ по модулю неограниченно растет, но сама величина x_n не имеет определенного стремления.

2.3. Свойства сходящихся последовательностей

Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**.

При изучении сходящихся последовательностей необходимо учитывать следующие свойства.

1°. Если $x_n \to a$ и $b > a$ (или $b < a$), то $\exists\ N$, такое, что при $n > N$ $x_n < b$ (или $x_n > b$).

Действительно, если $b - a = \Delta > 0$, то $\exists\ N'$, такое, что при $n > N'$ $-\Delta < x_n - a < \Delta$. Отсюда $x_n - a < b - a$ или $x_n < b$. По аналогии при $b < a$, используя общее неравенство, получаем $x_n > b$ при $n > N''$.

◇ **Следствие.** Если $x_n \to a$ и $a < 0$ (или $a > 0$), то при $n > N'$ $x_n < 0$ (или $x_n > 0$). ◆

2°. Если $x_n \to a$ и для $\forall\ n$ $x_n < b$ (или $x_n > b$), то $a \leqslant b$ (или $a \geqslant b$).

Обоснуем от противного. Пусть $a > b$ (или $a < b$). Тогда по свойству 1° $\exists\ N$, такое, что при $n > N$ $x_n > b$ (или $x_n < b$), что противоречит допущению.

3°. Если $x_n \to a$ и $y_n \to b$ и для $\forall n$ $x_n < y_n$, тогда $a \leqslant b$.

Докажем от противного. Пусть $a > b$. Тогда, начиная с некоторого N': $x_n > \dfrac{a+b}{2}$ и некоторого N'': $y_n < \dfrac{a+b}{2}$, т. е. при $N = \max\{N', N''\}$, $y_n < x_n$, что невозможно.

Здесь использовано условие, что при $b < a$

$$b < \frac{a+b}{2} < a,$$

так как $\dfrac{a+b}{2}$ лежит в центре интервала (b, a).

4°. Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ и выполнено условие: для $\forall\ n$ $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если x_n и z_n имеют один и тот же предел a $(x_n \to a,\ z_n \to a)$, то y_n также стремится к a.

Составим числа $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Тогда по свойству 1° $\exists\ N_1$ и N_2, такие, что $x_n > a - \varepsilon$ при $n > N_1$ и $z_n < a + \varepsilon$ при $n > N_2$.

Выберем $N = \max\{N_1, N_2\}$ и получим

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Отсюда $-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon$, т. е. $|y_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

5°. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Докажем от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет несколько пределов. Выберем из них любые два: a и b. (Примем $a < b$.)

По определению для $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$ $\exists N_1$ и N_2, такие, что при $n > N_1$ $|x_n - a| < \varepsilon$ и при $n > N_2$ $|x_n - b| < \varepsilon$. Тогда при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$2\varepsilon = |b - a| = |b - x_n - (a - x_n)| \leqslant |b - x_n| + |a - x_n| < 2\varepsilon,$$

что невозможно.

6°. Если последовательность имеет предел, то она ограниченная.

По определению для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists N$, такое, что $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Поэтому при $\forall\ n > N$ ($n = N + 1, N + 2, \ldots$) $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Оставшаяся часть множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ в силу конечности имеет наименьшее и наибольшее значения m_N и M_N, т. е.

$$m_N \leqslant x_n \leqslant M_N, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Зададим $m = \min\{a - \varepsilon, m_N\}$ и $M = \max\{a + \varepsilon, M_N\}$. Тогда при $\forall\ n$ $m \leqslant x_n \leqslant M$ или $\{x_n\} \subset [m, M]$, где $m = \inf\{x_n\}$, $M = \sup\{x_n\}$.

◇ **Следствие.** Если последовательность сходится, то она имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. ◆

Основное свойство точной верхней грани (соответственно точной нижней грани) заключается в том, что $M - \varepsilon$, где $M = \sup A$, не является верхней гранью ($m + \varepsilon$, где $m = \inf A$, не является нижней гранью) при $\forall\ \varepsilon > 0$.

2.4. Пределы композиций последовательностей. Композиции с неопределенностью

Алгебраическими композициями последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются последовательности $\{z_n\}$ вида:

$$z_n = x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n \cdot y_n \quad \text{и} \quad x_n/y_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

❑ **Теорема 2.2.** Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы ($x_n \to a$ и $y_n \to b$), то последовательность $\{z_n\}$ также имеет предел $z_n \to c$, где $c = a + b$, $a - b$, ab и $\dfrac{a}{b}$ (при $b \neq 0$) соответственно.

Доказательство. Для обоснования достаточно показать, что $z_n - c = \gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим все четыре случая:

1) $z_n - c = x_n + y_n - (a + b) = (x_n - a) + (y_n - b)$. Ввиду того, что $x_n - a = \alpha_n \to 0$ и $y_n - b = \beta_n \to 0$, $\gamma_n = z_n - c \to 0$;

2) $z_n - c = x_n - y_n - (a - b) = (x_n - a) - (y_n - b)$. Очевидно, что и здесь $\alpha_n = x_n - a \to 0$ и $\beta_n = y_n - b \to 0$, $\gamma_n = z_n - c = \alpha_n - \beta_n = \alpha_n + (-1)\beta_n \to 0$;

3) $z_n - c = x_n y_n - ab$. Заменим x_n и y_n на $a + \alpha_n$ и $b + \beta_n$; $\gamma_n = (a + \alpha_n) \times (b + \beta_n) - ab = b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n$.

Все три слагаемых являются бесконечно малыми, так как равны произведению ограниченной величины на бесконечно малую. Поэтому $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$;

4) $z_n - c = \dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \dfrac{1}{b+\beta_n}\alpha_n - \dfrac{a}{b}\dfrac{1}{b+\beta_n}\beta_n$.

Величина $\dfrac{1}{b+\beta_n}$ при $b \neq 0$ является ограниченной (предлагаем читателю самостоятельно доказать это). Тогда оба выражения $\dfrac{1}{b+\beta_n}\alpha_n$ и $\dfrac{a}{b}\dfrac{1}{b+\beta_n}\beta_n$ – бесконечно малые и $\gamma_n = z_n - c \to 0$ при $n \to \infty$. ■

Примечание. Теорема о пределе композиции (теорема 2.2) не может применяться в тех случаях, когда величины x_n и y_n являются бесконечно большими, а также при вычислении предела $\dfrac{x_n}{y_n}$, когда x_n и y_n являются бесконечно малыми. Указанные ситуации относят к числу задач с неопределенностью, а их решение называют раскрытием неопределенности.

Рассмотрим несколько примеров, в которых раскрываются неопределенности типа $\infty - \infty$ (разность бесконечно больших), $0 \cdot \infty$ (произведение бесконечно малой и бесконечно большой), $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ (отношение соответственно бесконечно малых и бесконечно больших).

❍ **Примеры.** 1. $z_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.

Здесь $x_n = \sqrt{n+2} \to +\infty$ и $y_n = \sqrt{n} \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Преобразуем z_n, умножив на сопряженную сумму:

$$z_n = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \to 0.$$

2. $z_n = \dfrac{(2n+3)^{100}}{(2n-1)^{98}(n+1)^2}$.

Здесь $x_n = (2n+3)^{100} \to +\infty$, $y_n = (2n-1)^{98}(n+1)^2 \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Преобразуем z_n, выделив в числителе и знаменателе старшие члены:

$$z_n = \frac{2^{100} n^{100} (1 + \frac{3}{2}\frac{1}{n})^{100}}{2^{98} n^{100} (1 - \frac{1}{2n})^{98} (1 + \frac{1}{n})^2} = 4 \frac{(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{n})^{100}}{(1 - \frac{1}{2n})^{98} (1 + \frac{1}{n})^2} \to 4. \text{ ●}$$

Неопределенности $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ легко преобразуются друг в друга путем перехода от бесконечно малых к бесконечно большим и наоборот.

2.5. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы

Среди композиций, обладающих неопределенностью типа $\frac{0}{0}$, особое место занимает величина $\zeta_n = \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$, где α_n – бесконечно малая ($\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$).

Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1$.

Для простоты примем, что $\alpha_n > 0$ (указанное допущение не является принципиальным, но позволяет использовать геометрическую интерпретацию).

Сравним величины α_n и $\sin \alpha_n$ с помощью диаграммы, построенной в первом квадранте (рис. 2.16).

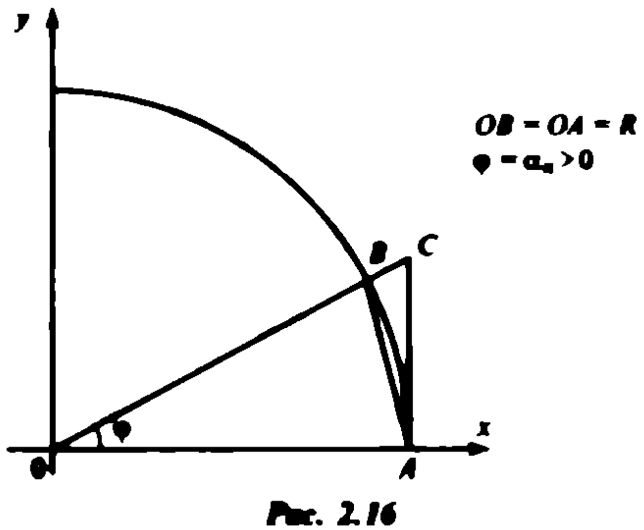


Рис. 2.16

Сравним площади треугольников OAB и OAC и сектора OAB:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}R^2 \sin \varphi < S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}R^2\varphi < S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда $\sin \varphi < \varphi < \operatorname{tg} \varphi$, и после деления на $\sin \varphi$ ($\varphi > 0$) получим

$$1 < \frac{\varphi}{\sin \varphi} < \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Для обратных величин

$$\cos\varphi \leqslant \frac{\sin\varphi}{\varphi} \leqslant 1.$$

Если обозначить $x_n = \cos\alpha_n$, $y_n = \dfrac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}$, $z_n = 1$, то при $n \to \infty$

$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, z_n и $x_n \to 1$. Отсюда $y_n = \dfrac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} \to 1$.

◇ **Следствие.** Рассмотрим отношение

$$z_n = \frac{\sin k\alpha_n}{\alpha_n}, \text{ где } \alpha_n \to 0.$$

Введем новую переменную $k\alpha_n = \beta_n$. Тогда $z_n = \dfrac{\sin\beta_n}{\beta_n}k$, где $\beta_n \to 0$.

Отношение $\dfrac{\sin\beta_n}{\beta_n} \to 1$ при $\beta_n \to 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = k$. ◆

○ **Примеры.** 1. $z_n = \dfrac{1-\cos\alpha_n}{\alpha_n^2} = \dfrac{2\sin^2\frac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n^2} = 2\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n}\right)^2$,

где α_n – бесконечно малая.

Отношение $\dfrac{\sin\frac{\alpha_n}{2}}{\alpha_n} \to \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1-\cos\alpha_n}{\alpha_n^2}$ по теореме о композиции (см. теорему 2.2) имеет предел, равный $\dfrac{1}{2}$.

2. $z_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(3\alpha_n)}{\alpha_n}$,

где α_n – бесконечно малая.

Обозначим $\alpha_n = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\beta_n$ (β_n – бесконечно малая). Тогда $z_n = \dfrac{3\beta_n}{\operatorname{tg}\beta_n} \to 3$. ●

Предел вида

$$\lim_{\alpha_n\to 0}\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n},$$

где α_n – бесконечно малая, называется **первым замечательным пределом**.

Введем понятие монотонной последовательности.

Последовательность называется **монотонно возрастающей (монотонно убывающей)** с ростом n, если для $\forall n$ $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$.

Последовательность называется **неубывающей (невозрастающей)**, если при $\forall n$ $x_{n+1} \geqslant x_n$ $(x_{n+1} \leqslant x_n)$.

Рассмотрим достаточные признаки существования предела для монотонных последовательностей.

❑ **Теорема 2.3.** Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел, равный значению точной верхней (нижней) грани.

Доказательство. Рассмотрим две величины $M = \sup A$ и $M - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, где $A = \{x_n\}$. Очевидно, что $M - \varepsilon$ не является верхней гранью и, следовательно, $\exists\ n^*$, такое, что $x_{n^*} > M - \varepsilon$.

Ввиду того, что последовательность монотонная, при $n > n^*$ $x_{n^*} < x_n \leqslant M$, т. е. $M - \varepsilon < x_n \leqslant M$. Отсюда $-\varepsilon < x_n - M \leqslant 0 < \varepsilon$.

Таким образом, $|x_n - M| < \varepsilon$ при $n \geqslant n^*$.

Отсюда, ввиду произвольности ε, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. ■

В качестве примера рассмотрим последовательность

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}.$$

Очевидно, что $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$. Покажем, что $x_{n+1} > x_n$. Неравенство $\sqrt{2+x} > x$ выполняется при $x \geqslant 0$ в промежутке $[0, 2)$, так как $x^2 - x - 2 < 0$ равносильно $(x + 1)(x - 2) < 0$, т. е. $-1 < x < 2$.

Следовательно, если $x_n < 2$, то последовательность монотонно возрастает и имеет предел, равный $\sup \{x_n\}$.

Ограничение $x_n < 2$ следует из того, что при $\forall n$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n} < \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{4}}}}}_{n} = 2.$$

Нетрудно убедиться, что $\sup \{x_n\} = 2$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Покажем, что последовательность вида $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху.

Воспользуемся формулой бинома [2]

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + \\ + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n, \qquad (2.6)$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Подставляя в (2.6) $a = 1$ и $b = \frac{1}{n}$, получаем $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n =$

$$= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

$$x_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+...+$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

Из приведенных соотношений следует, что для $\forall n$ $x_n < x_{n+1}$, так как в каждом слагаемом множители вида $1-\frac{i}{n}$ имеют меньшую величину по сравнению с $1-\frac{i}{n+1}$ при одном и том же i. Кроме того, в структуре x_{n+1} присутствует дополнительное положительное слагаемое $\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$, не имеющее аналога в x_n.

Установим ограниченность сверху x_n путем замены всех множителей $1-\frac{i}{n}$ на 1: $x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} =$

$$= 2+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}) = 2+\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

В соответствии с теоремой о пределе монотонной последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$ имеет предел, который обозначается e:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} = 2{,}7182\ldots\,. \tag{2.7}$$

Число e играет большую роль в качестве основания натурального логарифма: $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Действительно, $x_n = (1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. По теореме о композиции $x_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$ при $n\to\infty$.

Справедливо также следующее обобщение:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}=\mathrm{e}, \text{ если } \alpha_n \to 0 \tag{2.8}$$

(примем это утверждение без доказательства).

Данный предел называется **вторым замечательным пределом**.

○ **Примеры.** 1. $x_n = (1-\frac{1}{n})^n$. Обозначим $-\frac{1}{n} = \alpha_n$, тогда

$$x_n = (1+\alpha_n)^{-\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}} \to \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ при } n \to \infty.$$

2. $x_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{2n^2-2}$ Обозначим $\dfrac{3}{n^2-1} = \alpha_n$, тогда

$$x_n = \left(1+\frac{3}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{3}6} = \left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^6 \to \mathrm{e}^6 \text{ при } n \to \infty. \bullet$$

Далее рассмотрим вопрос о существовании пределов последовательностей концевых точек бесконечной системы промежутков, вложенных друг в друга.

❑ **Лемма Кантора.** Пусть дана последовательность промежутков $\{[a_n, b_n]\}$, где для $\forall n$ $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(a_n < b_n)$.

Если при этом $l_n = b_n - a_n \to 0$, то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют равные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Доказательство. По условию обе указанные последовательности монотонны, так как для $\forall\, n$ $a_{n+1} > a_n$ и $b_{n+1} < b_n$. При этом $a_n < b_n < b_1$ и $b_n > a_n > a_1$.

Поэтому $\{a_n\}$ ограничена сверху, а $\{b_n\}$ – снизу. Из этого следует, что $a_n \to c'$ и $b_n \to c''$. По теореме о композиции последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Подставляя сюда значения пределов, получаем $c'' - c' = 0$, т. е. $c' = c'' = c$. ■

❑ **Теорема 2.4** (теорема Больцано–Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Если $\{x_n\}$ – ограниченная, то $\{x_n\} \subset [k, K]$ по определению. Обозначим $k = a_0$, $K = b_0$ и разделим промежуток $[a_0, b_0]$ пополам. Выберем ту из двух половин, на которой содержится бесконечное число элементов $\{x_n\}$. Если таким свойством обладают обе половины, то возьмем произвольно одну из них, например правую. Обозначим выбранный промежуток как $[a_1, b_1]$. Вновь разделим пополам промежуток $[a_1, b_1]$ и выберем одну из половин, содержащую бесконечное число элементов $\{x_n\}$. Процесс деления пополам и выбора бесконечного подмножества будем продолжать неограниченно долго. При этом образуется последовательность вложенных промежутков $[a_k, b_k]$ и $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ при любом k.

Кроме того, на каждом шаге будем помечать одну из точек $\{x_n\}$, принадлежащую промежутку $[a_k, b_k]$: $x_{n_k} \subset [a_k, b_k]$.

Очевидно, что $l_k = b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда $a_k \to c$ и $b_k \to c$. По свойству сходящихся последовательностей 4°, так как $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ также имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. ■

Данная теорема в математическом анализе именуется *условием компактности*.

Фундаментальное значение в теории пределов имеет следующая теорема.

❑ **Теорема 2.5** (признак Больцано—Коши). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ являлась сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N$, такое, что при $n > N$ и $m > N$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{x_n\}$ имеет предел a. Тогда $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a|$. По определению предела для $\forall \dfrac{\varepsilon}{2}\; \exists\, N$, такое, что при $n > N$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем значения n и m из условия $n > N$ и $m > N$. Тогда $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Достаточность. Пусть будет выполнено условие (2.15). Выберем некоторое ε^* и зададим для него N^*, такое, что $|x_n - x_m| < \varepsilon^*$ при $n > N^*$ и $m > N^*$. Зафиксируем один из индексов, например m, и пометим его как m^*.

Тогда для $n = N^* + 1,\ N^* + 2, \ldots$ имеем $x_{m^*} - \varepsilon^* < x_n < x_{m^*} + \varepsilon^*$.

Оставшаяся часть последовательности $\{x_n\}$, т.е. $x_1, x_2, \ldots, x_{N^*}$, является ограниченной в силу конечности: $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N^*}\} \subset [m', M']$, где m' и M' равны соответственно наименьшему и наибольшему значению x_i из данной конечной совокупности.

Итак, $\{x_n\} \subset [m'', M'']$ $(m'' = x_{m^*} - \varepsilon^*, \quad M'' = x_{m^*} + \varepsilon^*)$ при $n \geqslant N^* + 1$ и $\{x_n\} \subset [m', M']$ при $n \leqslant N^*$.

Выбирая $m = \min\{m', m''\}$ и $M = \max\{M', M''\}$, имеем $\{x_n\} \subset [m, M]$, т. е. является ограниченной.

По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$. Покажем, что значение c является пределом для всей последовательности.

Составим $|x_n - c| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c|$.

В силу условия Больцано–Коши для $\forall \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\exists N'$, такое, что при $n > N'$ и $n_k > N'$

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, по определению предела для $\forall \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\exists N''$, такое, что при $n_k > N''$

$$|x_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая $N = \max\{N', N''\}$, имеем при $n > N$, $n_k > N$

$$|x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{n\to\infty} x_n = c. \blacksquare$$

Примечание. Указанная теорема является концептуальной установкой, на которую ориентируются все последующие предельные построения в анализе функций в пространствах более высокой размерности.

3. ВИДЫ ФУНКЦИЙ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И РАЗРЫВЫ ФУНКЦИЙ

3.1. Определение монотонных функций, композиций и суперпозиций функций

Функция $f(x)$ называется **монотонно возрастающей** (или **монотонно убывающей**), если для $\forall\, x$ и $x' \in A$ выполняется условие: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ (или $f(x) > f(x')$). Если функциональное неравенство выполняется нестрого, то $f(x)$ называется **неубывающей** (или **невозрастающей**). Указанные свойства монотонного возрастания (монотонного убывания), а также неубывания (невозрастания) распространяются и на последовательности $\{x_n = f(n)\}$ при условии, что в качестве аргумента рассматривается переменная n.

Свойство монотонности может проявляться либо на всем множестве A, либо на отдельных подмножествах. При этом на одних участках функция может возрастать, а на других – убывать.

Так, например, $y = a^x$ при $a > 1$ монотонно возрастает на всем множестве $\mathbf{R}$, в то время как $y = \sin x$ разбивает $\mathbf{R}$ на два подмножества $A_1 = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ и $A_2 = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2} + 2i\pi, \frac{3}{2}\pi + 2i\pi\right]$.

В A_1 функция $y = \sin x$ с учетом ее периодичности монотонно возрастает, а в A_2 – монотонно убывает.

Композицией функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных в A, называется функция $h(x)$, принимающая значения:

$$f(x) + g(x),\quad f(x) - g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad f(x)/g(x). \tag{3.1}$$

В последнем случае $g(x) \neq 0$.

❍ **Примеры.** 1. $f = e^x$, $g = 2\cos x$ и $h = e^x + 2\cos x$.

2. $f = x^2$, $g = \ln x + \operatorname{arctg} x$ и $h = \dfrac{x^2}{\ln x + \operatorname{arctg} x}$. ●

Сложной функцией или **суперпозицией функций** $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, определенных в $B = \{u\}$ и $A = \{x\}$, называют функцию $y = f(\varphi(x)) = F(x)$, если при этом $E_\varphi \subset B$.

❍ **Примеры.** 1. $y = e^{2x^2+1} \Rightarrow y = e^u$ и $u = 2x^2 + 1$.

Тогда $B = \{u\} = \mathbf{R}$ и $A = \{x\} = \mathbf{R}$.

2. $y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1}) \Rightarrow y = \ln u$, $u = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$.

Тогда $B = \{u\} = (0, +\infty)$ и $A = \{x\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. ●

Пусть даны две функции: $y = f(x)$, определенная в A, и $x = g(y)$, определенная в B. Они составляют пару **взаимно обратных** функций, если $A = E_g$, $B = E_f$ и выполнены тождества

$$\forall\, y \in B \quad y \equiv f(g(y)); \quad \forall\, x \in A \quad x \equiv g(f(x)). \tag{3.2}$$

○ **Примеры.** 1. $y = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

$x = \arcsin y, \quad y \in [-1, 1]$

составляют пару взаимно обратных функций.

2. $y = e^x, \quad x \in \mathbf{R},$

$x = \ln y, \quad y \in (0, \infty)$

также являются взаимно обратными. ●

3.2. Предел функции и его свойства. Непрерывные функции. Типы разрывов

Введем понятие предельной точки множества. Точка x_0 называется **предельной** или **точкой сгущения** множества A, если в любой окрестности этой точки найдутся точки множества, отличные от x_0. В этом случае из состава множества A можно выделить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0. К числу предельных точек можно отнести внутренние точки множества, входящие в состав A вместе с некоторой окрестностью. Разумеется, произвольная точка сгущения может оказаться не внутренней. Таковыми являются все точки множества Q, которые в любой окрестности содержат рациональные и иррациональные числа.

Множество A называется **замкнутым**, если оно содержит *все свои предельные* точки, и множество A называется **открытым**, если оно состоит из *одних внутренних* точек. Открытые множества могут не содержать некоторые предельные точки. Так, открытый интервал (a, b) не содержит концевые точки a и b, являющиеся предельными.

Функция $y = f(x)$, определенная в A, имеет предел C в точке сгущения x_0, если для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$, такое, что $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$.

$$\text{Отсюда} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = C. \tag{3.3}$$

Условие существования предела можно записать в форме неравенств:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Указанное определение опирается на понятие функции и именуется *определением предела по Коши*.

Существует эквивалентное *определение предела по Гейне*, которое сводит это понятие к пределу сходящихся последовательностей значений функции $\{f(x_n)\}$, задаваемых для различных последовательностей $\{x_n\}$, стремящихся к x_0. Можно легко показать, что если для $\forall \{x_n\} \to x_0$ соответствующая $\{f(x_n)\}$ имеет предел, то этот предел единствен.

Целесообразность двух определений предела функции обусловлена разными подходами к изучению проблемы существования предела.

Определение Коши используется для обоснования существования предела, а определение Гейне – для обоснования отсутствия предела.

Кроме предела, связанного с произвольным стремлением аргумента x к x_0, рассматривают так называемые односторонние пределы функции (пределы слева и справа).

Число C' называют **односторонним пределом слева** функции $f(x)$ в точке сгущения x_0, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$, такое, что

$$x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \Rightarrow f(x) \in (C' - \varepsilon,\ C' + \varepsilon). \tag{3.5}$$

По аналогии число C'' называют **односторонним пределом справа** функции $f(x)$ в точке сгущения x_0, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$, такое, что

$$x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (C'' - \varepsilon,\ C'' + \varepsilon). \tag{3.6}$$

Указанные условия можно записать в неравенствах:

$$\begin{aligned} &x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - C'| < \varepsilon, \\ &x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - C''| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Односторонние пределы обозначают так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = C', \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = C''. \tag{3.8}$$

Очевидно, что если в точке x_0 существует предел C, то существуют односторонние пределы C' и C'', причем

$$C' = C'' = C. \tag{3.9}$$

○ **Пример.** $y = E(x)$.

В точках $x \in \mathbf{R}$ и $\overline{\in}\ \mathbf{Z}$ функция имеет предел; в точках $x \in \mathbf{Z}$ $(x = n)$ имеется односторонний предел слева (и справа), равный

$$\lim_{x \to n - 0} E(x) = n - 1 \quad \left(\lim_{x \to n + 0} E(x) = n\right). \ ●$$

Функция $f(x)$, определенная в A, называется **ограниченной**, если E_f является ограниченным множеством: $E_f \subset [k,\ K]$.

Соответственно, $f(x)$ **ограничена сверху** (или **снизу**), если E_f является ограниченным сверху (снизу) множеством.

□ Покажем, что любая монотонно возрастающая функция, определенная в $[a,\ b]$ и ограниченная сверху, имеет конечный односторонний предел слева в $\forall\ x_0 \in [a,\ b]$, численно равный $\sup f(x)$ в $[a,\ x_0]$.

Действительно, ограниченная сверху функция имеет точную верхнюю грань в $[a,\ x_0] \subset [a,\ b]$. Обозначим ее M_{x_0}. Зададим $M_{x_0} - \varepsilon$.

Тогда в $[a, x_0]$ $\exists\ x'$, такое, что $f(x') > M_{x_0} - \varepsilon$. В силу монотонности, если $x' < x \leqslant x_0$, то

$$M_{x_0} - \varepsilon < f(x') < f(x) \leqslant M_{x_0} \text{ или } -\varepsilon < f(x) - M_{x_0} \leqslant 0 < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Отсюда при $x \in (x', x_0]$

$$|f(x) - M_{x_0}| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = M_{x_0}.$$

Точно так же любая монотонно убывающая функция, определенная в $[a, b]$ и ограниченная снизу, имеет конечный односторонний предел справа в $\forall\ x_0 \in [a, b]$, численно равный $\inf f(x) = m_{x_0}$ в $[x_0, b]$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = m_{x_0}. \blacksquare$$

Предел функции, как и предел последовательностей, обладает следующими основными свойствами: предел единствен и функция в некоторой окрестности предельной точки ограничена.

Аналогично на предел функции можно распространить и сравнительные свойства 1°–4° (см. параграф 2.3). Для обоснования справедливости этих свойств большую помощь оказывает определение предела функции по Гейне.

Функция, имеющая нулевой предел в точке сгущения x_0, называется **бесконечно малой** в окрестности этой точки.

❑ **Теорема 3.1.** Для того чтобы функция $f(x)$, определенная в A, имела конечный предел в точке сгущения x_0, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности x_0

$$f(x) = C + \alpha(x), \quad (3.11)$$

где C – постоянная; $\alpha(x)$ – бесконечно малая в окрестности точки x_0. ■

Примечание. Если $f(x)$ является бесконечно большой в некоторой окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty,$$

т. е. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Кроме предела в точке x_0, можно рассматривать предел в точке, бесконечно удаленной в сторону $+\infty$ или $-\infty$:

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = C; \qquad 2)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = C. \quad (3.12)$$

В этом случае понятие предела требует следующего уточнения:

1) для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ M > 0$, такое, что
при $x > M \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$; (3.13)

2) для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M > 0$, такое, что

при $x < -M \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$. (3.14)

❑ **Теорема 3.2.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в A, имеют конечные пределы C_f и C_g в точке сгущения x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C_f$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = C_g$), то композиции этих функций $h(x)$ вида $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g также имеют предел в точке x_0, равный соответственно

$$C_f + C_g,\quad C_f - C_g,\quad C_f \cdot C_g \quad \text{и} \quad C_f/C_g \; (C_g \neq 0). \;\blacksquare \tag{3.15}$$

Обоснование теорем 3.1 и 3.2 адекватно доказательству аналогичных утверждений для последовательностей (см. параграфы 2.2 и 2.4).

Примечание. В случае если f и g имеют бесконечные пределы или являются бесконечно малыми, а также если аргумент x стремится к $+\infty$ или $-\infty$, могут возникнуть неопределенности, условно классифицируемые как $(\infty - \infty)$, $(\frac{\infty}{\infty})$, $(\frac{0}{0})$ и $(0 \cdot \infty)$ и требующие специального рассмотрения.

○ **Примеры.** 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4})$.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}} = \frac{(x+2)-(x-4)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2+4)^{10}(2x-1)^{30}}{(-x^2+2x)^{25}}$.

$$\frac{\left(x^2+4\right)^{10}(2x-1)^{30}}{\left(-x^2+2x\right)^{25}} = \frac{x^{50}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{10}\left(2-\frac{1}{x}\right)^{30}}{\left(-x^2\right)^{25}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{25}} =$$

$$= -\frac{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{10}\left(2-\frac{1}{x}\right)^{30}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{25}} \to -2^{30} \text{ при } x \to +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

$$\frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)} = \frac{x+2}{x^2+2x+4} \to \frac{1}{3}. \; \bullet$$

Функция $f(x)$, определенная в A, является **непрерывной** в точке сгущения x_0, если: 1) $x_0 \in A$; 2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$; 3) $C = f(x_0)$.

Из определения следует, что

$$\Delta x = x - x_0 \to 0 \Rightarrow \Delta f = f(x) - f(x_0) \to 0. \tag{3.16}$$

Величины Δx и Δf именуют *приращениями аргумента* и *функции*.

Функция $f(x)$, определенная в A, называется **непрерывной** в $B \subset A$, если она непрерывна во всех точках B.

Нарушение непрерывности $f(x)$ в точке x_0 называют **разрывом функции** в этой точке. Для того чтобы осуществить классификацию разрывов функции $f(x)$, необходимо наряду с понятием конечных односторонних пределов слева и справа ввести понятие бесконечных односторонних пределов.

Функция $f(x)$, определенная в A, имеет в точке x_0 **односторонний бесконечный предел** $+\infty$ **слева** (или **справа**), если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такое, что $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ (или $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$), т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty \quad (\text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty). \tag{3.17}$$

Аналогично в точке x_0 вводится **односторонний бесконечный предел** $-\infty$ **слева** (или **справа**), если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$ (или $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$), т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty \quad (\text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty). \tag{3.18}$$

Теперь введем следующую классификацию разрывов функции $f(x)$.

Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если в x_0 существуют односторонние конечные пределы слева и справа C' и C'' и выполняются условия:

а) $C' \neq C''$ или б) $C' = C'' = C, \quad f(x_0) \neq C$.

Второе условие предусматривает существование предела, не совпадающего с $f(x_0)$. Такой разрыв именуют **устранимым**, так как при задании в точке x_0 значения, равного C, непрерывность в этой точке будет восстановлена.

Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**, если в точке x_0 имеется разрыв, который не является разрывом первого рода. Очевидно, что к этому типу относятся все точки разрыва, соответствующие случаю, когда функция имеет односторонние бесконечные пределы или в данной точке отсутствует хотя бы один односторонний конечный предел.

Как уже установлено, функция $y = E(x)$ имеет конечные односторонние пределы слева и справа в точках $x = n$. Поэтому эти точки являются разрывами первого рода. Аналогично функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа) имеет разрывы первого рода в точках $x = n$, так как

$$\lim_{x \to n-0} \{x\} = 1, \quad \lim_{x \to n+0} \{x\} = 0.$$

Точку разрыва первого рода имеет функция $y = \operatorname{sign} x$ (знак числа) в точке $x = 0$ (рис. 3.1), так как $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1$.

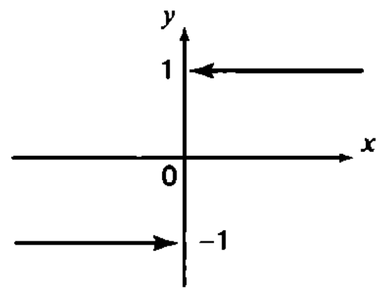


Рис. 3.1

Примерами функций, имеющих разрывы второго рода, служат зависимости $f = \dfrac{1}{x-1}$ (рис. 3.2) и $f = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 2.5). Первая имеет разрыв второго рода в точке $x = 1$, вторая – в точке x_k: $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Как видно,

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Примером функции, не имеющей односторонних конечных пределов в точке $x_0 = 0$, служит функция $f = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, определенная в $A = \mathbf{R} \backslash \{0\}$.

Очевидно, что точка $x_0 = 0$ является точкой сгущения A и не принадлежит A. (Следовательно, нарушено первое условие непрерывности: $x_0 \overline{\in} A$.)

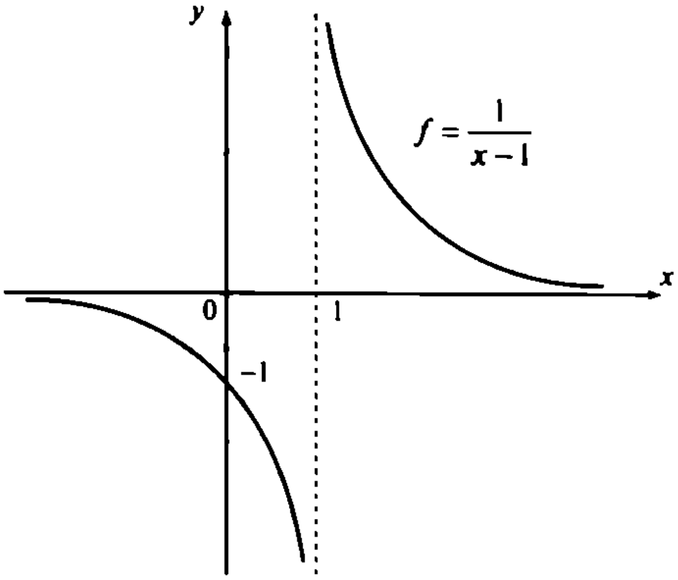


Рис. 3.2

Эта функция, оставаясь ограниченной в A, не имеет односторонних конечных пределов в точке x_0. Действительно, последовательности $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $x''_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ при $n \to \infty$ имеют предел $+0$, а соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ принимают постоянные значения $f(x'_n) = 1$, $f(x''_n) = -1$. Поэтому $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ не существует.

Точно так же можно показать, что последовательности

$x^{*}_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - 2\pi n}$, $x^{**}_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}$ при $n \to \infty$ имеют предел -0, а соответствующие значения $f(x^*_n) = f(x'_n) = 1$, $f(x^{**}_n) = f(x''_n) = -1$. Поэтому $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ также не существует.

Далее рассмотрим функцию Дирихле $D(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}, \\ 1, \text{ если } x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$

Очевидно, что эта функция, оставаясь ограниченной, не имеет односторонних пределов во всех точках $\mathbf{R}$, так как для $\forall\, x_0$ можно построить последовательности $x'_n \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ и $x''_n \in \mathbf{Q}$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = \lim\limits_{n \to \infty} x''_n = x_0 - 0$ (или $x_0 + 0$).

Последовательности $f(x'_n) = 0$ и $f(x''_n) = 1$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$) не существует.

3.3. Теоремы о непрерывных функциях

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в A и непрерывные в $x_0 \in A$. Тогда композиции этих функций $h(x)$, равные $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, также непрерывны в точке x_0 (в последней композиции $g(x_0) \neq 0$). Это следует из того, что в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$.

Рассмотрим **условие непрерывности сложной функции** $f(\varphi(x))$.

❑ **Теорема 3.3.** Пусть даны две функции: $y = f(u)$, определенная в B, и $u = \varphi(x)$, определенная в A, которые составляют суперпозицию $y = F(x) = f(\varphi(x))$, определенную в A. Если при этом $f(u)$ непрерывна в u_0, а $\varphi(x)$ непрерывна в x_0 и $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $F(x)$ также непрерывна в x_0.

Доказательство. По условию непрерывности $\Delta f(u) = f(u) - f(u_0) \to 0$, если $\Delta u \to 0$, а также $\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Если в выражение $f(u) - f(u_0)$ подставить $u = \varphi(x)$ и задать $\Delta u = \Delta\varphi(x)$, то $\Delta f(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))$ будет стремиться к нулю при $\Delta x \to 0$, так как $\Delta\varphi(x) = \Delta u \to 0$.

При этом $f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = F(x) - F(x_0) = \Delta F(x)$ и $\Delta F(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, $F(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

◇ **Следствие 1.** Если $f(u)$ и $\varphi(x)$, составляющие сложную функцию $F(x) = f(\varphi(x))$, удовлетворяют условиям теоремы 3.3, то

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)). \tag{3.19}$$

Таким образом, операция предельного перехода может быть внесена под знак непрерывной функции $f(u)$. ◆

◇ **Следствие 2.** Указанное выше свойство сохраняется и в том случае, если входящая в состав суперпозиции функция $\varphi(x)$ не обладает непрерывностью в точке x_0, но имеет конечный предел. При этом сложная функция, которая получается после внесения предельного перехода под знак непрерывной функции $f(u)$, не обладает непрерывностью:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x))$$

и

$$\lim_{x \to x_0} F(x) \neq F(x_0). \text{ ◆} \tag{3.20}$$

○ **Примеры.** 1. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$

Запишем: $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x)=\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right].$

Очевидно, что

$$\left(1+\frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}<(1+x)^{\frac{1}{x}}<\left(1+\frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)+1}\right)^{E\left(\frac{1}{x}\right)+1},$$

так как $\left(1+\dfrac{1}{1/x}\right)^{\frac{1}{x}}$ — монотонно возрастает с ростом $\dfrac{1}{x}$ $(x\to+0)$.

Если $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=N\to\infty$, то крайние члены имеют один и тот же предел e. Поэтому $(1+x)^{1/x}\to e$ при $x\to+0$. Функция $\log_a u$ непрерывна в точке e и, следовательно,

$$\lim_{x\to+0}\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a\left[\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e. \tag{3.21}$$

2. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{1}{\log_a e}\quad(a>1).$

Введем обозначения $a^x-1=\beta$, т. е. $a^x=1+\beta$ и $x=\log_a(1+\beta)$, где $\beta\to+0$ при $x\to+0$.

Тогда $\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\dfrac{1}{\log_a\left[(1+\beta)^{1/\beta}\right]}$. Поэтому

$$\lim_{x\to+0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a\left(\lim\limits_{\beta\to+0}(1+\beta)^{1/\beta}\right)}=\frac{1}{\log_a e}. \tag{3.22}$$

Примечание. Полученные в примерах 1 и 2 пределы можно распространить на случай, когда $x\to0$ произвольно, так как при отрицательных x имеем $x=-z$, где $z>0$, и

$$(1-z)^{-\frac{1}{z}}=\left(\frac{1}{1+\frac{z}{1-z}}\right)^{-\frac{1}{z}}=\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{z}}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{1-z}}.$$

Здесь $\alpha = \frac{z}{1-z} > 0$ и $\alpha \to +0$ при $z \to +0$,

т. е.

$$\lim_{z\to+0}(1-z)^{-\frac{1}{z}} = \exp\{\lim_{z\to+0}\frac{1}{1-z}\ln[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]\} = e^{\ln e} = e.$$

Поскольку односторонние пределы в точке $x_0 = 0$ совпадают, можно положить $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e$ при $x \to 0$ произвольно.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$,

где $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции ($f(x) > 0$) в некоторой окрестности точки x_0. Выражение $f(x)^{g(x)}$ не является композиционным и суперпозиционным, поэтому при вычислении предела необходимо преобразовать его к виду

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

В данном случае имеем совмещение суперпозиции: e^u, $u = g(x)\ln f(x) = \varphi(x)$ – и композиции. Очевидно, что e^u непрерывна при $\forall\ u \in \mathbf{R}$, а $\varphi(x) = g(x)\ln f(x)$ непрерывна по теореме о композиции и суперпозиции.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \exp\{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]\} = e^{g(x_0)\ln f(x_0)} =$

$= e^{\ln(f(x_0)^{g(x_0)})} = f(x_0)^{g(x_0)}$. ●

Общие с в о й с т в а непрерывных функций, заданных в промежутке $[a, b]$, определяются четырьмя теоремами: двумя теоремами Больцано–Коши и двумя теоремами Вейерштрасса.

❑ **Теорема 3.4** (первая теорема Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$. Тогда, если $f(a)\cdot f(b) < 0$, то $\exists\ \xi \in (a, b)$: $f(\xi) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть, для определенности, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Обозначим $[a, b]$ как $[a_0, b_0]$ и разделим его пополам. Тогда в точке $\frac{a_0 + b_0}{2}$ либо $f(x)$ обратится в нуль, и теорема будет доказана, либо на одной из половин отрезка знаки функции в концевых точках останутся различными. Выберем эту половину и обозначим ее $[a_1, b_1]$. Далее продолжим процесс деления $[a_1, b_1]$ пополам. В точке $\frac{a_1 + b_1}{2}$ либо получим нулевое значение $f(x)$, либо на одной из половин $[a_1, b_1]$ функция будет иметь разные знаки на концах. В первом случае теорема подтвердится, во втором – образуется новый отрезок, который обозначим $[a_2, b_2]$. В дальнейшем данная процедура либо прервется, если на одной из середин делимых отрезков получим нулевое значение $f(x)$, либо образуется бесконечная последовательность вложенных промежутков $[a_n, b_n]$ длиной $l_n = b_n - a_n = \frac{l_0}{2^n} = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

При возрастании n длина $l_n \to 0$ и по лемме Кантора точки a_n и b_n образуют две сходящиеся к общему пределу последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c, \quad c \in (a, b),$$

так как $\forall\ n \quad a \leqslant a_n \leqslant b_n$ и $a_n \leqslant b_n \leqslant b$.

В соответствии с выбором при $\forall\ n \quad f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0$.

С другой стороны, в точке c

$$\lim_{a_n\to c} f(a_n) = f(c) \text{ и } \lim_{b_n\to c} f(b_n) = f(c).$$

Поэтому $f(c) \leqslant 0$ и $f(c) \geqslant 0$, т. е. $f(c) = 0$. ■

❑ **Теорема 3.5** (вторая теорема Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$. Тогда, если $f(a) \neq f(b)$, то при $\forall\ C \in (m, M)$, где $m = \min\{f(a), f(b)\}$, $M = \max\{f(a), f(b)\}$, $\exists \xi \in (a, b)$: $f(\xi) = C$.

Доказательство. Построим композицию $g(x) = f(x) - C$.

Очевидно, что $g(x)$ непрерывна в $[a, b]$, так как $f(x)$ и C непрерывны (непрерывность постоянной C следует из равенства нулю ее приращения во всех точках $[a, b]$). Кроме того, $g(a)\, g(b) < 0$, так как $f(a) - C$ и $f(b) - C$ в силу выбора C имеют разные знаки. Поэтому $\exists\, \xi \in (a, b)$: $g(\xi) = 0$.

Отсюда $f(\xi) - C = 0$ или $f(\xi) = C$. ■

Примечание. Условие непрерывности функции $f(x)$ во всех точках $[a, b]$ является обязательным.

Приводимые ниже примеры подтверждают это положение.

Наличие разрыва в точке x_0 (рис. 3.3) привело к тому, что $f(x)$ не имеет нулевого значения в $[a, b]$. По аналогичной причине разрыв функции в точке x_0 (рис. 3.4) обусловил такое изменение функции, что ни в одной точке $[a, b]$ функция не принимает промежуточных значений, лежащих между m и M.

Теоремы Больцано–Коши имеют большое значение при изучении свойств непрерывных функций. Первая теорема обеспечивает существование корня функции $f(x)$ в (a, b), не гарантируя его единственности (рис. 3.5), вторая указывает на то, что график функции имеет проекции на ось y, заполняющие множество E_f и $E_f \supset [m, M]$ (рис. 3.6).

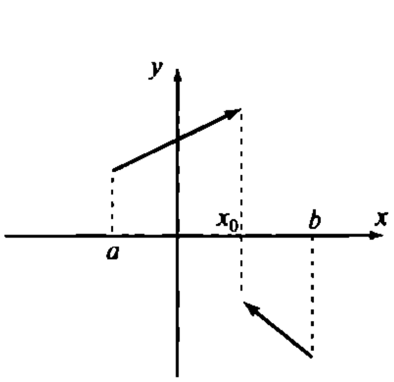


Рис. 3.3

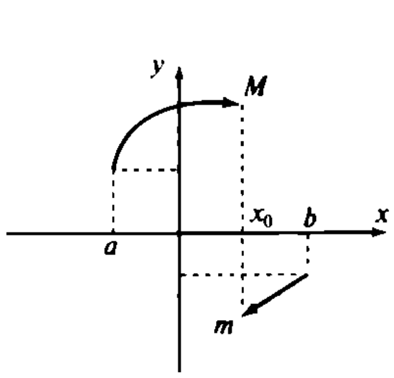
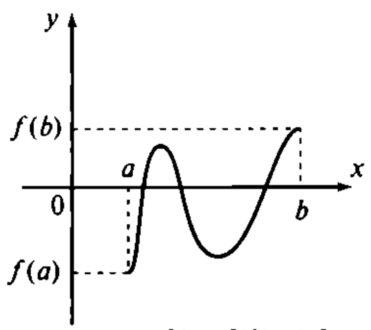
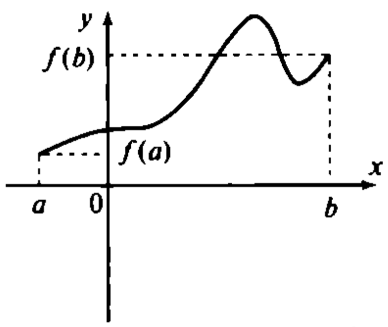


Рис. 3.4



$f(a)f(b) < 0$

Рис. 3.5



$f(a) \neq f(b)$

Рис. 3.6

❑ **Теорема 3.6** (первая теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$. Тогда $f(x)$ является ограниченной (множество E_f ограниченное).

Доказательство. Предположим противное: функция не ограничена сверху или снизу. Примем для определенности, что $f(x)$ не ограничена сверху, т. е. для $\forall\, n\ \exists\, x_n \in [a, b]$: $f(x_n) > n$. Последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$ является ограниченной. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} = c$, где $c \in [a, b]$. В точке c функция $f(x)$ непрерывна, т. е.

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c) \text{ и } |f(x_{n_k}) - f(c)| \to 0.$$

Однако это невозможно, так как $f(x_{n_k}) > n_k$ и $f(x_{n_k}) - f(c)$ при возрастании n_k является бесконечно большой, а не бесконечно малой величиной. По аналогии обосновываем ограниченность снизу. ■

❑ **Теорема 3.7** (вторая теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$. Тогда $f(x)$ имеет минимум и максимум в этом промежутке (E_f включает в себя точные нижнюю и верхнюю грани $f(x)$).

Доказательство. Примем противное: $f(x)$, оставаясь ограниченной, не достигает нижней или верхней грани. Для определенности предположим, что $f(x) \neq \sup\{f\}$. Составим функцию $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$, где $M = \sup\limits_{[a,b]} \{f\}$.

По условию $M - f(x) > 0$ для $\forall\, x \in [a, b]$.

Функция $g(x)$ непрерывна (по теореме о композиции непрерывных функций) в $[a, b]$. Поэтому

$$\exists \mu > 0: \ \forall x \ \ g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu.$$

Обе части неравенства положительны, и его можно обратить:

$$M - f(x) \geqslant \frac{1}{\mu}, \text{ т. е. } f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu} < M.$$

Последнее неравенство невозможно, так как $M - \dfrac{1}{\mu}$ не является верхней гранью. Доказательство для случая нижней грани аналогично. ■

Приведем два случая нарушения теорем Вейерштрасса. В первом случае функция $y = \log_a x$ (рис. 3.7) является неограниченной (отсутствует ограничение снизу), так как $f(x)$ непрерывна в незамкнутом промежутке. Во втором случае сохраняется ограниченность функции $y = \{x\}$ (рис. 3.8), но она не достигает значения точной верхней грани вследствие разрыва первого рода на конце промежутка $[0, 1)$.

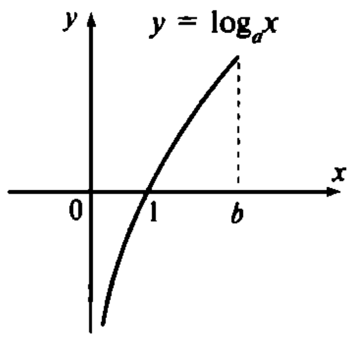


Рис. 3.7

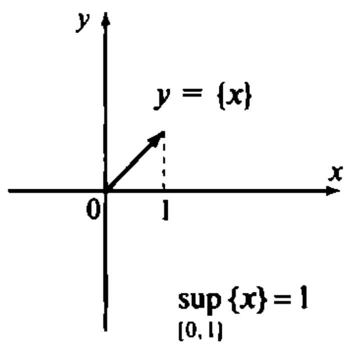


Рис. 3.8

Процесс отыскания минимальных и максимальных значений функции будет рассмотрен в следующей главе. Кроме того, остается открытым вопрос, достигаются ли максимальные и минимальные значения на границе промежутка или во внутренних точках.

4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

4.1. Сравнение бесконечно малых. Производная и ее смысл

Пусть даны две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные в A, и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$ $(x_0 \in A)$.

Рассмотрим, как изменяется отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \gamma(x)$ в окрестности x_0.

Если $\gamma(x)$ имеет конечный предел в x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\gamma(x) = k \quad \text{и} \quad k \neq 0,$$

то величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ считаются малыми одного порядка.

Например, $\sin kx$ и $\operatorname{tg} x$ имеют один порядок малости при $x \to 0$:

$$\gamma(x) = \frac{\sin kx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin kx}{x}\,\frac{x}{\operatorname{tg} x} \to k\cdot 1 = k \quad \text{при } x \to 0.$$

Если отношение $\gamma(x)$ при $x \to x_0$ является величиной бесконечно малой, то $\alpha(x)$ считается малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Так, $1 - \cos x$ и $\sin 2x$ имеют разный порядок малости при $x \to 0$. Примем $\alpha = 1 - \cos x$ и $\beta = \sin 2x$, тогда

$$\gamma(x) = \frac{1-\cos x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x} = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 \frac{x}{\sin x}\,\frac{x}{\cos x},$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{\sin x} \to 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\cos x} \to 0 \quad \text{при } x \to 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\gamma(x) = 0$, т. е. $1 - \cos x$ имеет более высокий порядок малости, чем $\sin 2x$ при $x \to 0$.

Величина порядка устанавливается следующим образом. Если отношение $\gamma_m = \dfrac{\alpha(x)}{\beta^m(x)}$, где $m \in \mathrm{N}$ при $x \to x_0$, имеет конечный предел $k \neq 0$, то величина $\alpha(x)$ считается малой m-го порядка по сравнению с $\beta(x)$.

Например, $\alpha = 1 - \cos x$ имеет второй порядок малости по отношению к $\beta = \sin 2x$ при $x \to 0$:

$$\gamma_2 = \frac{1-\cos x}{\sin^2 2x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 x} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{8}.$$

Наконец, особую разновидность бесконечно малых составляют эквивалентные величины, обладающие свойством:

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \text{при } x \to x_0, \text{ если } = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Легко убедиться, что эквивалентными бесконечно малыми являются величины $\sin x$ и x; $1 - \cos x$ и $\frac{1}{2}x^2$; $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ и x при $x \to 0$.

Далее в качестве сравнимых бесконечно малых будем рассматривать приращение функции и аргумента, когда последний стремится к нулю. В этом случае функция определена на множестве A и $x_0 \in A$.

Если отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ имеет конечный предел при $x \to x_0$, то этот предел называется **производной** функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{4.1}$$

Данное символическое обозначение производной введено И. Ньютоном. Кроме того, широко используется обозначение производной, предложенное другим основоположником исчисления производных Г. Лейбницем: $\frac{df}{dx}$ [7].

В силу данного определения величину отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в некоторой окрестности точки x_0 (при наличии производной $f'(x_0)$) можно представить в виде

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Отсюда следует, что

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) выражает основное свойство приращения функции, имеющей конечную производную в точке x_0: если $f'(x_0) \neq 0$, то приращение функции Δf можно представить как сумму двух бесконечно малых $f'(x_0)\Delta x$ и $\alpha(x)\Delta x$ с разным порядком малости.

Первое слагаемое имеет первый порядок малости по отношению к Δx, а второе – более высокий порядок, чем первый, так как $\dfrac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(x) \to 0$.

Из формулы (4.2) вытекает и другое важное свойство: если функция имеет конечную производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, так как $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Разумеется, это следует и из определения производной, так как конечный предел отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ имеет место только тогда, когда $\Delta f \to 0$.

Установим геометрический смысл производной $f'(x)$. С этой целью построим график функции $f(x)$ (рис. 4.1) и отметим на нем точки, определяющие изменение $f(x)$ в промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$: $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$.

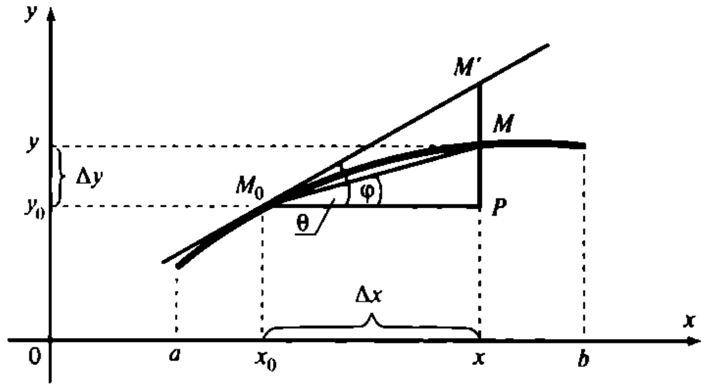


Рис. 4.1

Образуем хорду $\overline{M_0M}$ и треугольник M_0PM с острым углом φ. По построению $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|MP|}{|M_0P|} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если точку M устремить вдоль графика по направлению к M_0, то значение $\operatorname{tg}\varphi$ будет стремиться к некоторому пределу, который обозначим $\operatorname{tg}\theta$ (если $\exists f'(x_0)$).

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to \theta} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta. \qquad (4.3)$$

В данном случае было использовано свойство непрерывности функции $\operatorname{tg} \theta$:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\lim_{\varphi \to \theta} \varphi). \tag{4.4}$$

Предельный угол θ совпадает с углом наклона касательной, проведенной к графику функции в точке M_0, а производная $f'(x_0)$ численно равна угловому коэффициенту касательной в указанной точке:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = k \quad (k = \operatorname{tg} \theta). \tag{4.5}$$

Из этого свойства вытекает важное следствие: в точках, где функция имеет конечную производную, обязательно существует касательная, и наоборот. Отсутствие касательной в той или иной точке указывает на то, что в этой точке функция не имеет конечной производной.

Характерным примером служит непрерывная функция $y = |x|$, графиком которой является ломаная (рис. 4.2). В точке $x_0 = 0$ функция $|x|$ не имеет касательной.

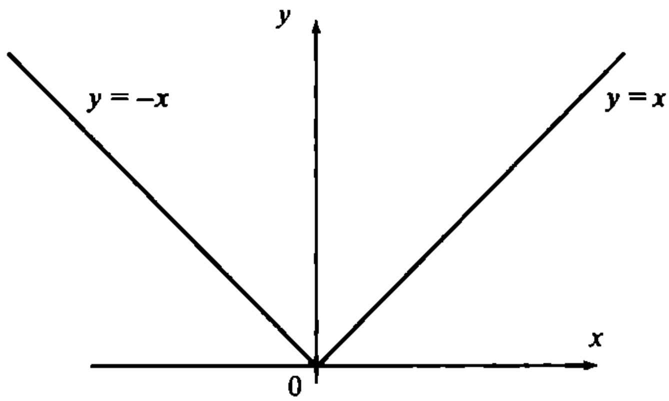


Рис. 4.2

Очевидно, что производная $|x|$ определена всюду, кроме $x = 0$:

$$|x|' = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Это означает, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции $|x|$ имеет односторонние пределы слева и справа при $\Delta x \to -0$ и $\Delta x \to +0$:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \qquad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Односторонние конечные и бесконечные пределы отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to -0$ и $\Delta x \to +0$ будем именовать *односторонними производными*, а их значения отождествлять с *угловыми коэффициентами* односторонних касательных.

Определим выражения для производных элементарных функций.

1. *Степенная функция* $y = x^\mu$ $(x > 0,\ \mu \in \mathbf{R})$.

Составим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{\mu-1}.$$

Обозначим $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ $(\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0)$, отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\mu-1} \lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha}.$$

Введем новую переменную β: $\beta = (1 + \alpha)^\mu - 1$ $(\beta \to 0$ при $\alpha \to 0)$ и $\mu \log_a(1 + \alpha) = \log_a(1 + \beta)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Следовательно,

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} \frac{\mu \log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha}}{\log_a(1+\beta)^{1/\beta}} \mu.$$

В силу свойства пределов суперпозиций $\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha} \to \log_a e$ при $\alpha \to 0$ и $\log_a(1+\beta)^{1/\beta} \to \log_a e$ при $\beta \to 0$, поэтому

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}. \tag{4.6}$$

○ **Примеры.** 1. $\mu = 0$; $y = 1$; $(1)' = 0$.

2. $y = C$; $\Delta y = 0$; $(C)' = 0$.

3. $\mu = 1$; $y = x$; $(x)' = 1$. ●

2. *Показательная функция* $y = a^x$ $(a > 0)$.

Составим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Обозначим $\Delta x = \alpha$, тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = a^x \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha}.$

Согласно (3.22) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\frac{1}{\log_a e}$, т. е.

$$(a^x)'=\frac{a^x}{\log_a e}=a^x\ln a. \qquad (4.7)$$

Соответственно, при a = e

$$(e^x)'=e^x.$$

3. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$.

Составим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\,\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Обозначим $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$ $(\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0)$, тогда

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha}=\frac{1}{x}\log_a e. \qquad (4.8)$$

Соответственно, если a = e, то $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

4. *Тригонометрические функции* $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

Составим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x};\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу, получаем

$$(\sin x)'=\cos x;\quad (\cos x)'=-\sin x. \qquad (4.9)$$

4.2. Производные композиции, суперпозиции функций и обратной функции

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в A и имеющие конечные производные в точке $x \in A$. Тогда композиция этих функций $h(x)$ вида: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и f/g (в последнем случае $g(x) \neq 0$) – также имеет конечную производную в точке x, равную: $f'+g'$, $f'-g'$, $f'g+fg'$ и $\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ соответственно.

Составим отношение $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}$, которое для приведенных композиций примет следующий вид:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x},\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}-\frac{\Delta g}{\Delta x},\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}g+\frac{\Delta g}{\Delta x}f+\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g,\quad \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g-\dfrac{\Delta g}{\Delta x}f}{g(x)\,g(x+\Delta x)}.$$

Переходя к пределу, получаем вышеуказанные выражения:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=f'+g',\quad f'-g',\quad f'g+fg' \quad \text{и} \quad \frac{f'g-fg'}{g^2}\quad (g\neq 0).$$

Например, производная композиции функций $y=(ax^2+b)\sin x$

$y'=(ax^2+b)'\sin x+(ax^2+b)(\sin x)'=2ax\sin x+(ax^2+b)\cos x.$

Рассмотрим производную сложной функции.

❑ **Теорема 4.1.** Пусть даны функции $y=f(u)$, определенная в B, и $u=\varphi(x)$, определенная в A. Если эти функции составляют суперпозицию $f(\varphi(x))$ и имеют конечные производные в u_0 и x_0 соответственно $(u_0=\varphi(x_0))$, то $F(x)=f(\varphi)$ имеет производную в точке x_0, равную

$F'(x_0)=f(\varphi(x_0))'=f'(u_0)\varphi'(x_0).$

Доказательство. По свойству (4.2) функции, имеющей конечную производную,

$$\Delta f=f'(u_0)\Delta u+\beta(u)\Delta u,$$

$$\Delta\varphi=\varphi'(x_0)\Delta x+\alpha(x)\Delta x, \qquad (4.10)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(u)$ – бесконечно малые величины и $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\beta\to 0$ при $\Delta u\to 0$.

Зададим величину u как функциональную: $u=\varphi(x)$. Тогда

$$\Delta u=u-u_0=\Delta\varphi(x)$$

и по (4.10) будет являться бесконечно малой при $\Delta x\to 0$. Если разделить первое равенство (4.10) на Δx, то получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

После подстановки $u = \varphi(x)$ левая и правая части последнего выражения примут вид

$$\left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_{u=\varphi(x)} = \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

$$\left.\left(f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\right|_{u=\varphi(x)} = f'(u_0)\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \beta(\varphi)\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Оба слагаемых правой части имеют предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f'(u_0)\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\beta(\varphi)\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = 0,$$

так как $\beta(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to \varphi(x_0) = u_0$, а $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$,

т. е. $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ является ограниченной в некоторой окрестности x_0.

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0). \blacksquare \tag{4.11}$$

○ **Пример.** Рассмотрим $y = e^{2x^2 + \sin x}$.

Примем $f(u) = e^u$, $\varphi(x) = 2x^2 + \sin x$.

Тогда $f'(u) = e^u$, $\varphi'(x) = 4x + \cos x$ и

$F'(x) = e^u(4x + \cos x) = (4x + \cos x)e^{2x^2 + \sin x}$.

При нахождении производных иногда возникает вопрос о существовании и значении производной обратной функции. ●

❑ **Теорема 4.2.** Пусть в A и B определены непрерывные функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$, являющиеся взаимно обратными (т. е. $y \equiv f(g(y))$ и $x \equiv g(f(x))$).

Если в точке $x_0 \in A$ $\exists f'(x_0) \neq 0$, то в точке $y_0 \in B$ $(y_0 = f(x_0))$ $\exists g'(y_0)$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Составим $\dfrac{\Delta g}{\Delta y}$. Если $\Delta y \neq 0$, то, соответственно, $\Delta x \neq 0$ (это следует из однозначности функции $y = f(x)$).

Отсюда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x}. \tag{4.13}$$

Если $\Delta y \to 0$, то (в силу непрерывности $g(y)$) $\Delta x = \Delta g(y)$ также стремится к нулю.

В этом случае предел правой части выражения (4.13) равен $\dfrac{1}{f'(x)}$,

а предел левой части равен $g'(y)$, поэтому $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$. ■

Примечание. Если выполнено условие существования взаимно обратных непрерывных функций $y = f(x)$, $x = g(y)$ и при этом в точке y_0 $\exists\, g'(y_0) \neq 0$, то в точке x_0 $(x_0 = g(y_0))$ обратная функция $y = f(x)$ также имеет производную вида $f'(x_0) = \dfrac{1}{g'(y_0)}$.

Теоремы 4.1 и 4.2 позволяют дополнить список производных элементарных функций.

1. *Тригонометрические функции* tg x и ctg x.

Производные

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \notin \frac{\pi}{2} + k\pi; \tag{4.14}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \notin k\pi. \tag{4.15}$$

2. *Обратные тригонометрические функции*:

а) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$;

б) $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbf{R}$.

В обоих вариантах рассмотрим пары взаимно обратных непрерывных функций:

а) $x = \sin y$, $y = \arcsin x$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$x = \cos y$, $y = \arccos x$, $y \in [0, \pi]$;

б) $x = \operatorname{tg} y$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$x = \operatorname{ctg} y$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y \in (0, \pi)$.

В точках, где $g'(y) \neq 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Отсюда

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.16}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.17}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}, \tag{4.18}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} =$$

$$= -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{4.19}$$

4.3. Прикладной смысл производной. Эластичность функции

Если функция f задана в промежутке $[t_0, T]$ и независимый аргумент t является текущим временем, то производная f' равна мгновенной скорости изменения функции. Это следует из того, что отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

задает среднюю скорость изменения $f(t)$ в промежутке $(t, t+\Delta t)$.

Очевидно, если $\Delta t \to 0$, то средняя скорость в пределе стремится к значению мгновенной скорости, равной $f'(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t).$$

❍ **Пример.** Пусть $f(t) = 2\ln(1 + 2t^2) + 4t$, тогда

$$f'(t) = 2\frac{1}{1+2t^2}(1+2t^2)' + 4 = \frac{8t}{1+2t^2} + 4. \bullet$$

При изучении экономических процессов довольно широко применяется вычисление производных, которые обычно именуются *предельными значениями функций.*

Так, например, пусть задана функция выручки TR или функция издержек TC в зависимости от объема продукции Q. Тогда средняя выручка AR и средние издержки AC вычисляются так:

$$AR = \frac{TR}{Q}, \quad AC = \frac{TC}{Q}. \tag{4.20}$$

Если величину ΔQ устремить к нулю, то отношения $\dfrac{\Delta TR}{\Delta Q}$ и $\dfrac{\Delta TC}{\Delta Q}$ приближаются к предельным значениям выручки MR и издержек MC:

$$MR = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = (TR)'_Q, \quad MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = (TC)'_Q. \tag{4.21}$$

❍ **Пример.** Пусть $TR = 10Q^{5/2} - 2Q^3 + 10Q^2 + 5Q$, тогда $MR = 25Q^{3/2} - 6Q^2 + 20Q + 5$.

Если $TC = \dfrac{Q^3}{10} + 200Q$, то $MC = \dfrac{3}{10}Q^2 + 200$.

При $Q = 16$ получим $MR = 1600 - 1536 + 320 + 5 = 389$ и $MC = 76{,}8 + 200 = 276{,}8$. ●

Данное представление производной задает показатель абсолютного изменения функции. Однако в экономике широко применяют анализ относительных изменений, именуемый вычислением эластичности.

Для оценки относительной производной введем относительные приращения функции и аргумента: $\delta y = \dfrac{\Delta y}{y}$ и $\delta x = \dfrac{\Delta x}{x}$.

Составим отношение $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\dfrac{x}{y}$. Эта величина определяет среднее изменение относительной величины. Если устремить $\delta x \to 0$, получим значение эластичности функции $y(x)$ в точке x:

$$E_x(y) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{x}{y}y'(x). \tag{4.22}$$

Эластичность определяет процентный прирост функции на 1% прироста аргумента.

Зависимость спроса (количество покупаемого товара) от его цены называется *функцией спроса* $Q_D(P)$ (рис. 4.3).

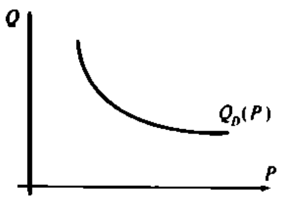


Рис. 4.3

Ввиду того, что функция спроса – убывающая функция цены, ее производная отрицательна и эластичность спроса также имеет отрицательный знак.

Неэластичный спрос означает, что малое процентное увеличение цены приводит к еще меньшему процентному уменьшению спроса ($\delta x > \delta y$ и $|E_x(y)| < 1$).

Эластичный спрос означает, что малому процентному изменению цены соответствует большее процентное изменение спроса ($\delta x < \delta y$ и $|E_x(y)| > 1$).

○ **Пример.** Пусть $Q_D = \dfrac{38}{\sqrt{P}}$. Примем $y = Q_D$ и $x = P$. Тогда

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{38\frac{1}{\sqrt{x}}}38\left(-\frac{1}{2x}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Ввиду того, что $|E_x| = \dfrac{1}{2} < 1$, условие $\delta x > \delta y$ выполняется при всех значениях P, т. е. спрос неэластичен. ●

По аналогии можно исследовать эластичность или неэластичность предложения. *Функция предложения* $Q_S(P)$ задает зависимость количества товара, предлагаемого по определенной цене (рис. 4.4).

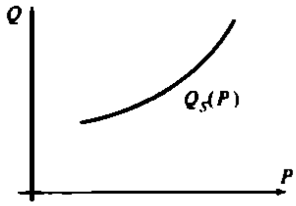


Рис. 4.4

По виду графика $Q_S(P)$ (см. рис. 4.4) имеем $Q'_S > 0$ и $E_x(y) > 0$ ($x = P$, $y = Q_S$). При $E_x(y) < 1$ неэластичное предложение, при $E_x(y) > 1$ – эластичное.

4.4. Дифференциалы функций

Функция $y = f(x)$, определенная в A, называется **дифференцируемой в точке** $x \in A$, если в некоторой окрестности этой точки приращение функции Δf можно представить в виде $\Delta f = C\,\Delta x + \alpha\,(\Delta x)\Delta x$, где C – постоянная, а $\alpha\,(\Delta x)$ – бесконечно малая величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Здесь первое слагаемое, если $C \neq 0$, имеет первый порядок малости, а $\alpha\Delta x$ — бесконечно малая высшего порядка.

Величина $C\Delta x$ является главным членом разложения Δy и называется **дифференциалом функции** $f(x)$: $\mathrm{d}f = C\Delta x$.

Если ввести обозначение $o(\Delta x)$ – величина высшего порядка малости относительно Δx, то формулу приращения дифференцируемой функции можно записать так:

$$\Delta f = \mathrm{d}f + o(\Delta x). \tag{4.23}$$

Справедливо следующее утверждение.

❑ Для того чтобы функция $f(x)$, определенная в A, была дифференцируема в точке $x \in A$, необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в точке x.

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда разделим Δy на Δx и в силу (4.23) получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C + \alpha(\Delta x).$$

Очевидно, что правая часть выражения при $\Delta x \to 0$ имеет предел C, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = C.$$

Достаточность. Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в точке x. Тогда из основного свойства (4.2) следует, что

$$\Delta y = y'(x)\Delta x + \alpha\,(\Delta x)\Delta x.$$

Поэтому $y\,(x)$ дифференцируема в точке x. ■

◇ **Следствие 1.** $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$.

Если обозначить приращение аргумента Δx как $\mathrm{d}x$, то формула дифференциала примет окончательный вид

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x. \tag{4.24}$$ ◆

◇ **Следствие 2.** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$.

Если разделить обе части (4.24) на $\mathrm{d}x$, получим $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$. ◆

Эта формула указывает на то, что значение производной функции равно отношению дифференциалов dy и dx, т. е. символическое обозначение производной имеет не только формальный, но и содержательный смысл.

Установим геометрический смысл дифференциала функции $f(x)$ с помощью графика (рис. 4.5).

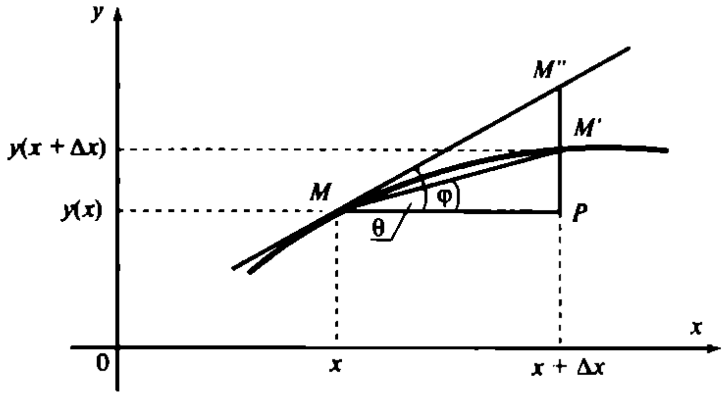


Рис. 4.5

Сравним треугольники $\triangle MM'P$ и $\triangle MM''P$, где M' лежит на кривой, а M'' – на касательной. Очевидно, что $M'P = \Delta f$, а $M''P = \operatorname{tg} \theta \Delta x = f'(x)\Delta x = df$. Отсюда следует, что дифференциал численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке x.

Значение дифференциала $df(x)$ можно использовать для приближенного вычисления изменения функции в малой окрестности точки x. Для этого необходимо в формуле (4.23) отбросить второе слагаемое, имеющее высший порядок малости, и принять

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \tag{4.25}$$

○ **Пример.** Рассмотрим и запишем приближенно приращение $y = \lg(1 + x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$ с радиусом 0,2 (т. е. $|x| \leqslant 0{,}2$):

$$\Delta \lg(1 + x) \approx \frac{\lg e}{1 + x_0}\Delta x = (\lg e)\Delta x.$$

Сравним точные и приближенные значения указанной функции в следующих узлах:

x_i	–0,2	–0,1	0	0,1	0,2
$y_{точн}$	–0,0969	–0,0458	0	0,0414	0,0792
$y_{прибл}$	–0,0868	–0,0434	0	0,0434	0,0868 ●

Дифференциал композиции двух функций, дифференцируемых в x_0, $f(x)$ и $g(x)$ находится с помощью выражения

$$d(f+g) = (f'+g')dx = df + dg, \quad d(f-g) = (f'-g')dx = df - dg,$$

$$d(f \cdot g) = (gf' + fg')dx = gdf + fdg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gf' - fg'}{g^2}dx =$$

$$= \frac{gdf - fdg}{g^2}, \; g \neq 0.$$

Теперь рассмотрим структуру дифференциала сложной функции:

$y = f(\varphi(t)) = F(t)$: $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$.

Здесь за независимую переменную принято $t \in B$, а за промежуточную переменную $x \in A$.

Пусть в точке t_0 существует конечная производная φ'_t и в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ – конечная производная f'_x. Тогда в точке t_0 $\exists\, F'(t_0)$: $F'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)$.

Представим $dF(t) = F'(t_0)dt = (f'(x_0)\varphi'(t_0))dt$.

Далее, **дифференциал сложной функции**

$$dF(t) = f'(x_0)(\varphi'(t_0)dt) = f'(x_0)dx, \tag{4.26}$$

где $dx = \varphi'(t_0)dt$.

Отсюда $df(x) = f'(x_0)dx$ при $x = \varphi(t)$.

По форме это выражение совпадает с выражением дифференциала простой функции. Это свойство именуется **инвариантностью формы** дифференциала сложной и простой функции. Однако совпадение формы дифференциалов не исключает их принципиального различия, так как дифференциал зависимой переменной x ($x = \varphi(t)$) отличается от ее приращения, в то время как дифференциал независимой переменной по определению совпадает с Δx.

4.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f(x)$, определенная в A, имеет производную во всех точках A, то эту производную можно принять за новую функцию $g(x)$:

$g(x) = f'(x)$, $x \in A$.

К этой функции применимы все предельные законы, в том числе и вычисление производной, т. е. дифференцирование.

Если $g(x)$, определенная в A, имеет конечную производную $g'(x)$ в точке $x \in A$, то значение этой производной будем именовать **второй производной** функции $f(x)$ и обозначать: $f''(x) = (f'(x))'$.

Производная f'' полагается производной второго порядка, а f' – производной первого порядка.

Эту процедуру вычисления производных высшего порядка можно распространить на третий порядок, четвертый и т. д.

По этой схеме для любого порядка n

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \tag{4.27}$$

где $f^{(n)}$ и $f^{(n-1)}$ – производные соответственно n-го и $(n - 1)$-го порядков.

○ **Примеры.**

1. $y = e^{ax}$, $y' = a\,e^{ax}$, $y'' = a^2 e^{ax}$, ..., $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

2. $y = \ln(1 + x)$, $y' = \dfrac{1}{1+x} = (1 + x)^{-1}$, $y'' = -(1 + x)^{-2}$, ..., $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}$.

3. $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(IV)} = \sin x$.

В последнем случае производную любого порядка n от $\sin x$ можно задать циклической формулой

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}). \quad ● \tag{4.28}$$

Дифференциал второго порядка определим по аналогии с производной второго порядка.

Если $f(x)$ дифференцируема при $\forall\, x \in A$ $(\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x)$ и $g = f'(x)$ имеет конечную производную в точке x, тогда **вторым дифференциалом** в точке x назовем первый дифференциал от первого дифференциала $f(x)$:

$$\mathrm{d}^2 f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(x)). \tag{4.29}$$

Очевидно, что $\mathrm{d}(\mathrm{d}f(x)) = \mathrm{d}(f'(x)\Delta x) = (f'(x)\Delta x)'\Delta x = f''(x)\Delta x^2 + f'(x)(\Delta x)'\Delta x$.

Приращение Δx в случае, если x является независимой переменной, не зависит от x и поэтому Δx следует считать постоянной по отношению к x. При этом $(\Delta x)' = 0$ и $\mathrm{d}^2 f(x) = f''(x)\Delta x^2 = f''(x)\mathrm{d}x^2$.

Продолжая эту процедуру далее и предполагая, что существуют конечные производные f''', $f^{(IV)}$, ..., $f^{(n)}$ в различных точках A, получаем $\mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{(n-1)} f)$.

Нетрудно заметить, что

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}^{(n-1)} f) = \mathrm{d}(f^{(n-1)}\,\Delta x^{n-1}) = f^{(n)}\,\Delta x^n = f^{(n)}\mathrm{d}x^n.$$

Следовательно,

$$\mathrm{d}^n f = f^{(n)}\,\mathrm{d}x^n. \tag{4.30}$$

Выражение $\mathrm{d}^n f$ именуется **дифференциалом n-го порядка**.

✧ **Следствие.** $\dfrac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Если разделить обе части (4.30) на dx^n, получим $\dfrac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$. Это означает, что n-я производная $f(x)$ является отношением дифференциалов n-го порядка функции и аргумента. ✦

Определим **второй дифференциал сложной функции** по аналогии со вторым дифференциалом простой функции:

$$d^2 f(\varphi(t)) = d(df(\varphi(t))). \tag{4.31}$$

По условию $df(\varphi(t)) = f'(x)dx$, где $x = \varphi(t)$. Отсюда

$d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)\,d(dx)$.

Если обозначить $f'(x) = g(x)$, тогда

$d(f'(x)) = dg(x) = g'(x)dx = (f'(x))'dx = f''(x)dx$.

Кроме того, $d(dx) = d^2x = d^2\varphi(t)$.

Таким образом,

$$d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x, \quad x = \varphi(t). \tag{4.32}$$

Вполне очевидно, что второй дифференциал сложной функции существует, если функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ имеют конечные производные до второго порядка включительно.

Из формулы (4.32) следует, что второй дифференциал сложной функции не обладает инвариантностью формы по отношению ко второму дифференциалу простой функции, так как в его состав входит член $f'(x)d^2x$, отсутствующий в аналогичной формуле для простой функции.

○ **Пример.** $y = e^{2\sin t}$.

Обозначим $x = \sin t$, тогда $d^2y = (e^{2x})''(dx)^2 + (e^{2x})'d^2x = 4e^{2x}(dx)^2 + 2e^{2x}d^2x$, но $dx = \cos t\,dt$, $d^2x = -\sin t\,dt^2$ и $d^2(e^{2\sin t}) = (4\cos^2 t - 2\sin t)e^{2\sin t}\,dt^2$. ●

4.6. Теоремы о дифференцируемых функциях

Производная является важной характеристикой при изучении свойств функции. Установим связь между производной и наибольшими (наименьшими) значениями функции, достигаемыми во внутренних точках промежутка.

❑ **Теорема 4.3** (теорема Ферма). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a, b]$, достигает наибольшего (наименьшего) значения в точке $x_0 \in (a, b)$ и имеет в этой точке конечную производную, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ достигает в x_0 наибольшего значения. Тогда $\exists\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такой, что $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$.

Составим отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Если $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$, и если $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$, так как $\Delta f \leqslant 0$ в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\Delta x < 0$ в $(x_0 - \delta, x_0)$ и $\Delta x > 0$ в $(x_0, x_0 + \delta)$.

Сопоставим односторонние пределы: $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f' \geqslant 0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f' \leqslant 0$.

Из этих неравенств вытекает, что $f' = 0$.

Примечания: 1. В доказательстве используются односторонние производные, которые существуют и равны общей производной.

2. Аналогичное рассуждение проводится и в том случае, если $f(x)$ достигает в точке x_0 наименьшего значения. ■

❑ **Теорема 4.4** (теорема Ролля). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$, имеет конечную производную в (a, b) и $f(a) = f(b)$, то в $(a, b)\ \exists \xi$, такое, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса (см. теорему 3.7) $f(x)$ достигает минимума (m) и максимума (M) в $[a, b]$. Рассмотрим два варианта:

1) $m = M = c$. Тогда очевидно, что $f(x) \equiv c$ и $f'(x) \equiv 0$ во всех точках (a, b);

2) $m \neq M$. Так как $f(a) = f(b)$, то по крайней мере одно из значений m или M достигается внутри (a, b). Тогда по теореме Ферма (см. теорему 4.3) в этой точке $f' = 0$. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что в (a, b) найдется точка, в которой касательная к кривой будет горизонтальна (угловой коэффициент обращается в нуль) (рис. 4.6).

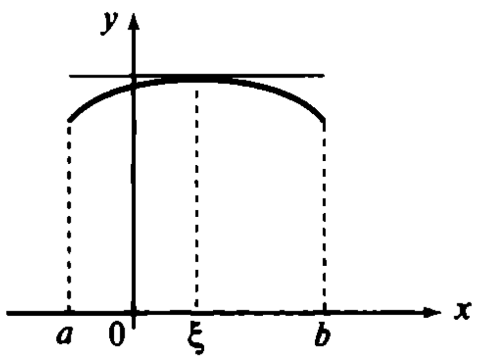


Рис. 4.6

Нарушение условий данной теоремы в одной-единственной точке может привести к отсутствию горизонтальной касательной (рис. 4.7). Здесь выполнено условие непрерывности $f(x)$ в $[a, b]$, но существует разрыв производной в точке x_0 (отсутствует касательная): $x_0 \in (a, b)$.

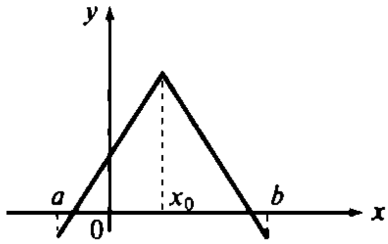


Рис. 4.7

❑ **Теорема 4.5** (теорема Лагранжа о конечных приращениях). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$, имеет конечную производную в (a, b), то $\exists\ \xi \in (a, b)$, такое, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (4.33)$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x)$:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

являющуюся композицией функций $f(x) - f(a)$ и $x - a$.

Она удовлетворяет условиям теоремы Ролля, так как непрерывна в $[a, b]$, имеет производную в (a, b) и $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, $\exists\ \xi \in (a, b)$ и $F'(\xi) = 0$.

Вычислим производную $F'(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

При $x = \xi$:

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad \text{т.е. } f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \ ■$$

✧ **Следствие 1.** Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как при $f(b) = f(a)$ имеем $f'(\xi) = 0$. ✦

✧ **Следствие 2.** Если умножить обе части равенства (4.33) на $b - a$, получим формулу конечных приращений

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \ ✦ \qquad (4.34)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа раскрывает график, приведенный на рис. 4.8.

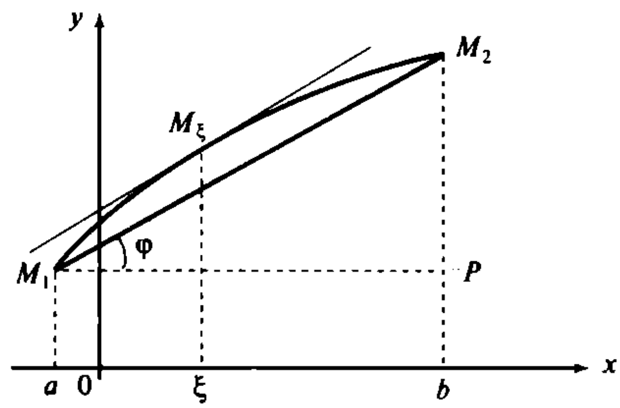


Рис. 4.8

Здесь ΔM_1M_2P составим из катетов M_1P и PM_2 длиной соответственно $b - a$ и $f(b) - f(a)$. Величина tg φ, где φ – угол наклона секущей M_1M_2 к оси Ox, совпадает с отношением $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. С другой стороны, tg φ равен угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику в точке M_ξ. Поэтому в точке M_ξ касательная параллельна секущей, а значение производной $f'(\xi)$ равно

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

❑ **Теорема 4.6** (теорема Коши). Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и непрерывные в $[a, b]$, имеющие конечные производные в (a, b), и при этом $g'(x) \neq 0$ всюду в (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b)$, такое, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{4.35}$$

(Предварительно отметим, что теорема Коши совпадает с теоремой Лагранжа, если в качестве $g(x)$ выбрать функцию x.)

Доказательство. Построим, как и в теореме Лагранжа, вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)),$$

являющуюся композицией функций $f(x) - f(a)$ и $g(x) - g(a)$.

Сначала покажем, что разность $g(b) - g(a)$ не равна нулю. Действительно, если $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля (см. теорему 4.4) найдется точка x_0, в которой $g'(x_0) = 0$, что невозможно в силу принятого ограничения.

Функция $F(x)$ непрерывна в $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b). Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$. Поэтому, применяя теорему Ролля к $F(x)$, имеем $F'(\xi) = 0$, где $\xi \in (a, b)$.

Построим производную $F'(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x). \tag{4.36}$$

Подставив в (4.36) значение ξ, получим

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$$

или

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \ \blacksquare$$

Как уже было отмечено, теорема Коши сходна с теоремой Лагранжа. Однако ее принципиальное значение не исчерпывается этим сходством и сфера ее приложений весьма разнообразна, так как она характеризует совместное изменение двух функций.

Рассмотрим задачу раскрытия неопределенностей композиций вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – определенные и непрерывные в $[a, b]$ функции, дифференцируемые в (a, b). Неопределенность отношения может быть двух типов: во-первых, если при $x \to a + 0$ функции $f(x)$ и $g(x) \to 0$, и во-вторых, если при $x \to a + 0$ функции $f(x)$ и $g(x) \to \infty$.

Рассмотрим первую неопределенность и примем $f(a) = g(a) = 0$ и для $\forall x \in (a, b)$ $g'(x) \neq 0$. Если при этом $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то одновременно $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Это утверждение можно считать непосредственным следствием теоремы Коши. Возьмем $[a, x] \subset [a, b]$. Очевидно, что теорема Коши применима к данному $[a, x]$ и в $(a, x)\ \exists\ \xi$, такое, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}. \tag{4.37}$$

В силу того что $f(a) = g(a) = 0$,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{4.38}$$

Если $x \to a + 0$, то и $\xi \to a + 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$.

Отсюда отношение $\dfrac{f}{g}$ имеет предел при $x \to a + 0$, равный K.

Таким образом, при раскрытии неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ эффективным инструментом является дифференцирование функций, так как

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.39}$$

Подобная схема раскрытия неопределенностей называется **правилом Лопиталя**.

○ **Пример.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Примем $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{4}$, $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ и $g(x) = x - \sin x$. Очевидно, что $g' = 1 - \cos x \neq 0$, если $x \in (0, \dfrac{\pi}{4})$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$. ●

При раскрытии неопределенностей типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ будем считать, что отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ имеет предел: $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$. Тогда отношение бесконечно больших $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ будет иметь предел, равный K:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K. \tag{4.40}$$

Примечание. Правило Лопиталя распространяется на случай, когда $a = +\infty$ $(-\infty)$. При этом отношение $\dfrac{f}{g}$ имеет неопределенность при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, а $\dfrac{f'}{g'}$ стремится к K.

○ **Примеры.** 1. $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{\ln(x-a)}{(x-a)^{-2}}$.

Примем $f(x) = \ln(x-a)$, $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$. Обе функции непрерывны и дифференцируемы при $x > a$.

Производные $f' = \dfrac{1}{x-a}$ и $g' = \dfrac{-2}{(x-a)^3}$ имеют предел:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'}{g'} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to a+0}(x-a)^2 = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to a+0} \frac{\ln(x-a)}{(x-a)^{-2}} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$.

Примем $f(x) = x$, $g(x) = e^x$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и имеют конечные производные в $(a, +\infty)$. При этом $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

Тогда по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$. ●

Иногда после перехода от $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ к $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ по правилу Лопиталя сохраняется неопределенность отношения производных. В этом случае, принимая $f'(x)$ и $g'(x)$ за новые функции $f_1(x)$ и $g_1(x)$, переходим от $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ к $\dfrac{f_1'(x)}{g_1'(x)}$. Если последнее отношение имеет конечный предел в точке a, то он численно равен $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Такая схема перехода от отношения функций к отношению производных будет считаться двухшаговой. Однако может оказаться, что отношение $\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)}$ также имеет неопределенность, и схема правила Лопиталя станет многошаговой: переход от $\frac{f(x)}{g(x)}$ к $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ и установление $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = K$.

Обоснование многошаговой схемы раскрытия неопределенности проводится с помощью обобщенной теоремы Коши.

❑ **Теорема 4.7.** Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и непрерывные в $[a, b]$, имеющие конечные производные до n-го порядка в (a, b). Если выполняются условия:

1) при $\forall x \in (a, b) \quad g^{(i)}(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, ..., m$;

2) $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m - 1$, то для $\forall x \in (a, b) \; \exists \xi \in (a, x)$, такое, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(m)}(\xi)}{g^{(m)}(\xi)}. \tag{4.41}$$

Доказательство. Предварительно обозначим текущие значения аргумента как τ и производные $f^{(i)}(\tau)$, $g^{(i)}(\tau)$ как $f_i(\tau)$, $g_i(\tau)$, где $i \leqslant m$. Теорема Коши применима к $[a, b]$ и любому промежутку $[a, x] \in [a, b]$.

Тогда в (a, x) найдется x_1, такое, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{f_1(x_1)}{g_1(x_1)}.$$

Функции f_1 и g_1 непрерывны в $[a, x_1]$, имеют конечные производные в (a, x_1) и $f_1(a) = g_1(a) = 0$. По теореме Коши $\exists x_2 \in (a, x_1)$, такое, что

$$\frac{f_1(x_1)}{g_1(x_1)} = \frac{f_1(x_1) - f_1(a)}{g_1(x_1) - g_1(a)} = \frac{f_1'(x_2)}{g_1'(x_2)} = \frac{f_2(x_2)}{g_2(x_2)}.$$

Подобный переход от отношения $\frac{f_i(x_i)}{g_i(x_i)}$ к $\frac{f_{i+1}(x_{i+1})}{g_{i+1}(x_{i+1})}$, основанный на применении теоремы Коши, можно проводить вплоть до i, равного $m - 1$. В результате получим

$$\frac{f_1(x_1)}{g_1(x_1)} = \frac{f_2(x_2)}{g_2(x_2)} = \ldots = \frac{f_m(x_m)}{g_m(x_m)} \quad \text{и} \quad a < x_m < x_{m-1} < \ldots < x_1 < x.$$

Окончательно будем иметь $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f_m(x_m)}{g_m(x_m)}=\dfrac{f^{(m)}(x_m)}{g^{(m)}(x_m)}$.

Если обозначить $x_m = \xi$, то получим равенство (4.41). ■

✧ **Следствие.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы и при этом $f(a) = g(a) = 0$, то отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке a имеет неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Принимая, что отношение $\dfrac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$ имеет конечный предел в точке a, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}=K$, получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(m)}(\xi)}{g^{(m)}(\xi)}=K, \tag{4.42}$$

так как при $x \to a$ и $\xi \to a$.

Данный вывод непосредственно вытекает из равенства (4.41). ✦

○ **Пример.** $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x^2 \sin x$.

Отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет неопределенность в точке 0. Составим производные

$f' = 1 - \cos x$, $f'' = \sin x$, $f''' = \cos x$;

$g' = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $g'' = (2 - x^2)\sin x + 4x \cos x$, $g''' = -6x \sin x + (6 - x^2)\cos x$.

Отношение $\dfrac{f'''}{g'''}=\dfrac{\cos x}{(6-x^2)\cos x-6x\sin x}\to\dfrac{1}{6}$ при $x \to 0$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\dfrac{1}{6}$. ●

П р и м е ч а н и е . Многошаговая процедура раскрытия неопределенностей применима и к случаям, когда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, а также когда точка $a = +\infty$ $(-\infty)$.

4.7. Многочлен Тейлора и формула Тейлора

Поставим следующую задачу: описать изменение некоторой функции $f(x)$, определенной и непрерывной в промежутке $[a - R, a + R]$ и имеющей в интервале $(a - R, a + R)$ конечные производные до n-го порядка. Центр данного промежутка располагается в точке a, а длина промежутка равна $2R$. В силу этого величина R совпадает с радиусом окрестности точки a, расположенной в центре промежутка.

Назовем **многочленом Тейлора** n-го порядка функции $y = f(x)$ следующее выражение:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (4.43)$$

Указанный многочлен обладает следующим свойством: в точке $x = a$

$$f(a) = P_n(a), \quad f'(a) = P'_n(a), \ \ldots, f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a). \quad (4.44)$$

Это легко установить путем вычисления производных:

$$P'_n(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{IV}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.45)$$

$$P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a),$$

$$P_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(a).$$

Тогда при подстановке в (4.43) и (4.45) $x = a$ получим равенства (4.44).

Таким образом, в центре промежутка функция $f(x)$ и ее многочлен Тейлора имеют высокую степень соответствия, выраженную совпадением их значений и производных до n-го порядка. Оценим степень соответствия f и P_n во всех остальных точках интервала $(a - R, a + R)$. Для этого предположим, что $f(x)$ имеет производные до $(n + 1)$-го порядка на всем интервале, и составим две функции $T_n = f(x) - P_n(x)$ и $S_n = (x - a)^{n+1}$. Эти функции определены и непрерывны во всем промежутке $[a - R, a + R]$, имеют конечные производные до $(n + 1)$-го порядка в интервале $(a - R, a + R)$ и

$$T_n(a) = T_n^{(m)}(a) = 0, \quad S_n(a) = S_n^{(m)}(a) = 0 \text{ при } m \leqslant n.$$

Кроме того, $S_n^{(i)}(x) \neq 0$, если $x \neq a$ и $i \leqslant n + 1$.

Применим к функциям T_n и S_n обобщенную теорему Коши (см. теорему 4.7), полагая $m = n + 1$ и учитывая, что $T_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, $S_n^{(n+1)} = (n + 1)!$:

$$\frac{T_n(x)}{S_n(x)} = \frac{T_n^{(n+1)}(\xi)}{S_n^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

или

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Перенесем $P_n(x)$ в правую часть выражения и запишем **формулу Тейлора** с остаточным членом:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.46}$$

Примечание. При выводе формулы (4.46) обобщенная теорема Коши применяется как к промежутку $[a, a + R]$, так и к промежутку $[a - R, a]$. При этом сохраняется зависимость (4.41) с учетом того, что и сами функции $T_n(x)$ и $S_n(x)$, и их производные обращаются в нуль на правом конце промежутка $[a - R, a]$.

Остаточный член формулы (4.46) в силу неопределенности положения ξ может быть использован главным образом для оценки погрешности, получаемой при замене точной функции многочленом Тейлора.

Оценим эту погрешность для двух случаев, когда $f(x)$ – показательная функция e^x или логарифмическая функция $\ln(1 + x)$ и $a = 0$.

1. Для показательной функции $(e^x)^{(i)} = e^x$, $i = 1, 2, \ldots$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{4.47}$$

Величина погрешности по модулю

$$\left|\frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{e^R R^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \text{ и } \xi \in (-R, R).$$

Если принять $R = 1$ и $n = 9$, то

$$\left|\frac{e^\xi}{10!}x^{10}\right| < \frac{3}{10!} < 1\cdot 10^{-6};$$

если же взять $R = 2$ и $n = 9$, то

$$\left|\frac{e^{\xi}x^{10}}{10!}\right| < \frac{3^2 \cdot 2^{10}}{10!} < 1 \cdot 10^{-2}.$$

2. В случае логарифмической зависимости

$$[\ln(1 + x)]^{(i)} = (-1)^{i-1}(i - 1)!\,(1 + x)^{-i}, \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{4.48}$$

$$(\ln(1 + x))' = (1 + x)^{-1};$$

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{(1+\xi)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1}. \tag{4.49}$$

Остаточный член формулы Тейлора примет вид

$$(-1)^n \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}$$

Оценка величины погрешности, возникающей при отбрасывании остаточного члена, дает:

$$\left|(-1)^n \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}\right| \leqslant \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{R}{1-R}\right)^{n+1}$$

Примем $R = 0{,}5$ и $n = 9$, тогда

$$\frac{1}{10!}\left(\frac{0{,}5}{0{,}5}\right)^{10} = \frac{1}{10!} < 1 \cdot 10^{-6}.$$

Очевидно, что если R увеличить до единицы, то величина погрешности начнет резко возрастать и при $R = 0{,}9$, $n = 9$ получим

$$\frac{1}{10!}\left(\frac{0{,}9}{0{,}1}\right)^{10} \leqslant 1 \cdot 10^3.$$

4.8. Понятия экстремума, перегиба и локальной выпуклости

Полученные в предыдущих параграфах выражения можно использовать при исследовании функциональных зависимостей. С этой целью установим признаки постоянства и монотонного изменения функции в определенном промежутке.

❑ **Теорема 4.8** (признак постоянства функции). Пусть $y = f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$ и имеет конечную производную в (a, b). Тогда для того, чтобы $f(x)$ была постоянна в $[a, b]$ (тождественно равна постоянному значению), необходимо и достаточно, чтобы для $\forall x \in (a, b)$

$$f'(x) = 0. \qquad (4.50)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f \equiv C$ в $[a, b]$, где C – постоянная.

Тогда производная $f' = 0$ в любой точке (a, b).

Достаточность. Если для $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то, взяв две точки a и x $(a < x < b)$, по теореме Лагранжа получим: $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0$, где $\xi \in (a, x)$.

Действительно, $f'(\xi) = 0$ и $f(x) = f(a)$ для $\forall x \in (a, b)$, т. е.

$f(x) \equiv f(a) = C$. ■

✧ **Следствие.** Если две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и непрерывные в $[a, b]$ и дифференцируемые в (a, b), имеют равные производные в (a, b) (т. е. $f'(x) \equiv g'(x)$), то они отличаются на постоянную.

Действительно, композиция $h = f - g$ имеет нулевую производную в (a, b): $h' = f' - g' \equiv 0$, поэтому $h = C$. ✦

❑ **Теорема 4.9** (условие монотонного возрастания (убывания) функции в промежутке $[a, b]$). Пусть $y = f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b]$ и имеет конечную производную в (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) в $[a, b]$, достаточно, чтобы для $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$).

Доказательство. По теореме Лагранжа для любой пары x_1 и $x_2 \in [a, b]$, такой, что $x_1 < x_2$,

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1, x_2)$.

По условию $f'(x) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$.

Примечание. Если $f'(x) < 0$ в (a, b), то для указанной пары x_1 и x_2 получим $f(x_2) < f(x_1)$. ■

Итак, при изучении особенностей изменения функции нужно разбить область задания функции на отдельные промежутки, внутри которых производная либо не меняет знака (оставаясь положительной или отрицательной), либо равна нулю. Каждый такой участок соответствует монотонному изменению или постоянству функции. На границе этих участков будут возникать так называемые графические горбы или впадины местного (локального) минимума и максимума функции.

Исследование и выявление указанных особенностей проводится с помощью определенных критериев, рассматриваемых ниже. Введем определение локального экстремума функции $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$, определенная и непрерывная в A, имеет **локальный экстремум** в точке $x_0 \in A$, если $\exists$ такая δ-окрестность x_0, что для

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется условие знакопостоянства приращения Δf ($\Delta f \geqslant 0$ или $\Delta f \leqslant 0$).

Примечание. В первом случае $f(x) > f(x_0)$ при $x \neq x_0$ и $f(x_0)$ называется **локальным минимумом**; во втором случае $f(x) < f(x_0)$ при $x \neq x_0$ и $f(x_0)$ называется **локальным максимумом**.

Это определение применимо в случае, если $f(x)$ сохраняет непрерывность в точке x_0.

Наряду с точками локального экстремума будем выявлять точки локального перегиба, предполагая при этом, что в данной точке функция $f(x)$ дифференцируема и свойство перегиба проявляется в расположении графика функции по разные стороны относительно касательной в левой и правой частях окрестности точки x_0.

Для исследования этого эффекта введем понятие относительного приращения функции $\Delta' f$:

$$\Delta' f = \Delta f - \mathrm{d}f. \qquad (4.51)$$

Указанное приращение исчисляет относительное смещение приращений ординаты графика (Δf) и ординаты касательной (рис. 4.9).

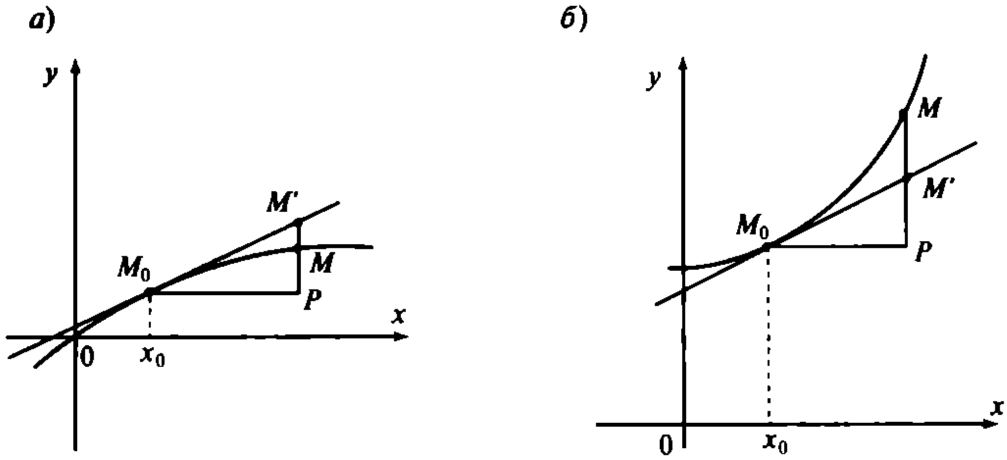


Рис. 4.9

На рис. 4.9, *а* $M'P = \mathrm{d}f > 0$, $MP = \Delta f > 0$ $(M'P > MP)$ и $MM' = \Delta' f = \Delta f - \mathrm{d}f < 0$.

На рис. 4.9, *б* $M'P = \mathrm{d}f > 0$, $MP = \Delta f > 0$ $(M'P < MP)$ и $MM' = \Delta' f = \Delta f - \mathrm{d}f > 0$.

Функция $y = f(x)$, определенная в A и дифференцируемая в x_0, имеет **локальный перегиб** в точке x_0, если $\exists\,\delta$-окрестность точки x_0, такая, что $\Delta' f(x)$ меняет знак при переходе x через точку x_0 ($\Delta' f$ имеет разный знак в полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$).

Примечание. Если в некоторой окрестности точки x_0 приращение $\Delta' f$ не меняет знак при переходе x через точку x_0, то такую точку будем называть **точкой локальной выпуклости**. При этом если $\Delta' f > 0$, то x_0 – **точка выпуклости вниз**, если $\Delta' f \leqslant 0$, то x_0 – **точка выпуклости вверх**. Очевидно, что в этих случаях график функции в некоторой окрестности x_0 располагается по одну сторону касательной (выше касательной, если выпуклость ориентирована вниз, и ниже касательной, если выпуклость ориентирована вверх).

Функция называется **локально выпуклой** на множестве A, если она локально выпукла во всех точках A.

Теперь определим условия существования локальных экстремумов, перегибов и выпуклости.

❑ **Теорема 4.10** (необходимое условие существования экстремума). Для того чтобы $y = f(x)$, определенная в A и непрерывная в x_0, имела локальный экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы в x_0 производная функция f' имела разрыв или $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим противное: $f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности x_0

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x, \quad \text{где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

При достаточно малом Δx первый член суммы будет определяющим, так как $\alpha\Delta x$ имеет более высокий порядок малости, чем $f'(x_0)\Delta x$.

Поэтому $\Delta f \approx \mathrm{d}f = f'(x_0)\Delta x$ и вследствие линейности $f'(x_0)\Delta x$ по отношению к Δx ($\mathrm{d}f = K\Delta x$, где $K = f'(x_0)$) главный член разложения Δf меняет знак в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ при переходе x через x_0.

Следовательно, Δf меняет знак внутри δ-окрестности и точка x_0 не может являться точкой локального экстремума, если $f'(x_0) \neq 0$. ■

Остаются случаи: $f'(x_0)$ не существует или $f'(x_0) = 0$. Например, функции $y = |x|$ и $y = x^2$ имеют локальный экстремум в точке $x = 0$ (рис. 4.10), при этом $(|x|)'$ не существует, а $(x^2)' = 0$ в точке $x = 0$.

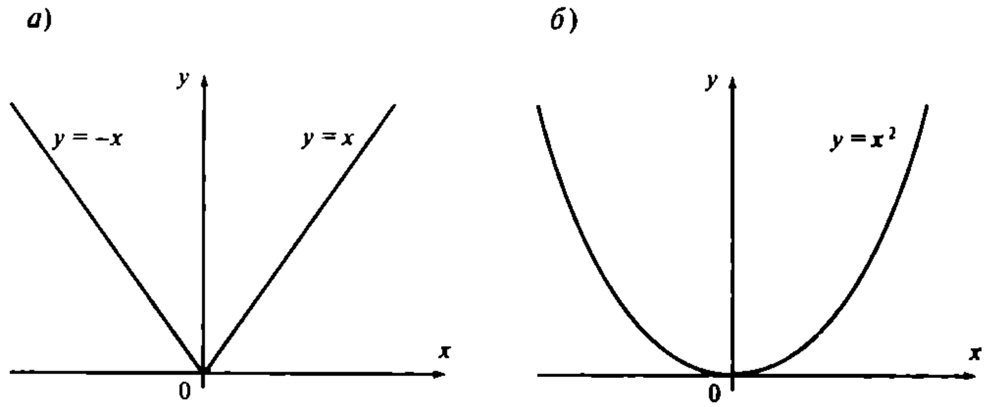


Рис. 4.10

Точки, в которых функция $f(x)$ имеет нулевую производную и в которых f' не существует (имеет разрыв), называют **критическими**.

❑ **Теорема 4.11** (достаточные условия существования экстремума). Для того чтобы $y = f(x)$, определенная в A и непрерывная в x_0, имела локальный экстремум в точке x_0, достаточно, чтобы $\exists\,\delta$-окрестность x_0, такая, что: 1) в $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имела конечную производную; 2) $f'(x)$ имела различные и постоянные знаки в $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$.

Доказательство. Рассмотрим изменение $f(x)$ в каждой полуокрестности. Для определенности примем, что $f'(x) < 0$ в левой полуокрестности и $f'(x) > 0$ в правой полуокрестности. Тогда для $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x)$ по теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ и $\xi \in (x, x_0)$.

Точно так же для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f(x) - f(x_0) = f'(\eta)(x - x_0)$ и $\eta \in (x_0, x)$. По условию $f'(\xi)(x - x_0)$ и $f'(\eta)(x - x_0)$ имеют одинаковый знак в полуокрестностях. Поэтому для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ приращение $\Delta f = = f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, т. е. Δf сохраняет знак в δ-окрестности x_0. Аналогично, если $f'(x) > 0$ в левой и $f'(x) < 0$ в правой полуокрестности, получим $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leqslant 0$. ■

Примечание. Если $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» при переходе x через x_0 слева направо, то точка x_0 является **локальным минимумом**. Если $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–» при тех же условиях, то точка x_0 является **локальным максимумом**.

✧ **Следствие.** Если $f'(x)$ существует во всех точках δ-окрестности x_0 и выполнены условия: 1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой **локального экстремума**. ✦

Нетрудно показать, что в этом случае выполнены достаточные условия. С этой целью введем функцию $g(x) = f'(x)$. Так как $g(x)$ имеет в x_0 конечную производную,

$$\Delta g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $g'(x_0) = f''(x_0)$, $g(x_0) = 0$.

Отсюда

$$f'(x) = f''(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x.$$

Если Δx достаточно мало, то $f'(x) \approx f''(x_0)(x - x_0)$.

Произведение $f''(x_0)(x - x_0)$ меняет знак при переходе через x_0, и поэтому $f'(x)$ имеет разные и постоянные знаки в полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$.

По формулировке условия существования локального перегиба близки к условиям существования экстремума и отличаются главным образом порядком производных, используемых в критериальных соотношениях.

❑ **Теорема 4.12** (необходимые условия существования локального перегиба). Для того чтобы $y = f(x)$, определенная в A и дифференцируемая в x_0, имела локальный перегиб в x_0, необходимо, чтобы $f''(x_0) = 0$ или f'' имела разрыв в точке x_0.

Примем это условие без доказательства, так как оно абсолютно идентично обоснованию необходимости существования экстремума. ■

❑ **Теорема 4.13** (достаточные условия существования перегиба). Для того чтобы $y = f(x)$, определенная в A и дифференцируемая в x_0, имела локальный перегиб в точке x_0, достаточно, чтобы $\exists$ δ-окрестность x_0, такая, что: 1) $f(x)$ имела конечную вторую производную в $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$; 2) f'' имела разные и постоянные знаки в $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$.

Доказательство. Ввиду того, что в точке x_0 определены $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, а f'' существует в каждой полуокрестности, построим разложения $f(x)$ по формуле Тейлора для $P_1(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (x < x_0,\ \xi \in (x, x_0));$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\eta)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (x > x_0,\ \eta \in (x_0, x)).$$

Отсюда $\Delta' f = \Delta f - df = f(x) - f(x_0) - \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$ имеет вид $\Delta' f = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$ при $x < x_0$ и $\Delta' f = \dfrac{f''(\eta)}{2!}(x - x_0)^2$ при $x > x_0$.

В силу того, что f'' имеет разные знаки в полуокрестностях, $\Delta' f$ меняет знак при переходе x через x_0. ■

✧ **Следствие.** Если $f''(x)$ существует во всех точках δ-окрестности x_0 и выполнены условия: 1) $f''(x_0) = 0$; 2) $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой локального перегиба.

Покажем, что в этом случае f'' имеет разные знаки в полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$. Обозначим $f''(x) = g(x)$, и так как $g'(x_0) = f'''(x_0) \neq 0$, то $\Delta g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$. Здесь $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $g(x_0) = 0$. Следовательно, $f''(x) = f'''(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$. Если Δx достаточно мало, то $f''(x) \approx f'''(x_0)(x - x_0)$. Выражение $f'''(x_0)(x - x_0)$ меняет знак при переходе x через x_0 слева направо, поэтому $f''(x)$ имеет разные и постоянные знаки в полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$. ✦

Точки экстремума отделяют участки монотонного убывания и возрастания функции, а точки перегиба отделяют участки ориентированной выпуклости функции (выпуклости вверх и вниз графика функции).

Ранее было введено понятие локальной выпуклости функции, тесно связанное со значением второй производной функции. Покажем, что понятие локальной выпуклости вверх или вниз полностью согласуется с определением выпуклой функции.

Функция $y = f(x)$, определенная в $[a, b]$, называется **выпуклой вверх** в этом промежутке, если для $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \leqslant f(\lambda x_1 + \mu x_2), \qquad (4.52)$$

где $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$.

Параметры λ и μ являются коэффициентами выпуклой комбинации, а точки $M^*(x^*, y^*)$: $\lambda x_1 + \mu x_2 = x^*$, $\lambda y_1 + \mu y_2 = y^*$ ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$) задаются как точки, расположенные на отрезке $[M_1, M_2]$, соединяющем концевые значения графика функции $f(x)$ (рис. 4.11).

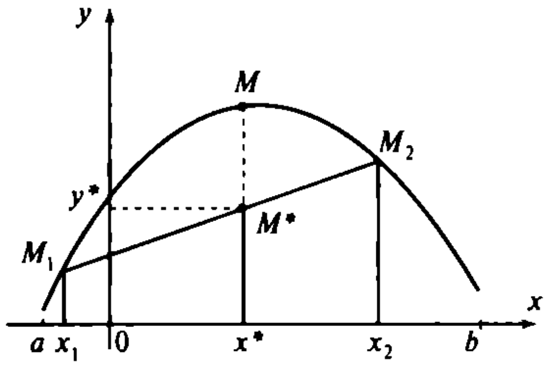


Рис. 4.11

Покажем, что условие локальной выпуклости (постоянство знака f'' в (a, b)) является достаточным для общего определения выпуклой функции в $[a, b]$.

Рассмотрим случай локальной выпуклости вверх ($f''(x) < 0$ во всех точках (a, b)).

Составим промежутки $[x_1, x^*]$ и $[x^*, x_2]$ (см. рис. 4.11), по теореме Лагранжа получим

$$f(x^*) - f(x_1) = f'(\xi)(x^* - x_1), \quad \xi \in (x_1, x^*);$$

$$f(x_2) - f(x^*) = f'(\eta)(x_2 - x^*), \quad \eta \in (x^*, x_2). \qquad (4.53)$$

Отсюда следует, что при $x_1 < x_2$, $\xi < \eta$

$$f(x^*) = f(x_1) + f'(\xi)(x^* - x_1);$$

$$f(x^*) = f(x_2) - f'(\eta)(x_2 - x^*).$$

Составим выпуклую комбинацию левой и правой частей равенства с коэффициентами λ и μ:

$$(\lambda + \mu)f(x^*) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) + \lambda f'(\xi)(x^* - x_1) - \mu f'(\eta)(x_2 - x^*),$$

где $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$.

Применим теорему Лагранжа к $f'(x)$ в промежутке $[\xi, \eta]$:

$$f'(\eta) - f'(\xi) = f''(\theta)(\eta - \xi), \ \theta \in (\xi, \eta).$$

Отсюда $f'(\eta) = f'(\xi) + f''(\theta)(\eta - \xi)$.

После подстановки $f'(\eta)$ в (4.53) получим

$$f(x^*) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) + f'(\xi)(x^* - \lambda x_1 - \mu x_2) -$$
$$- \mu(\eta - \xi)(x_2 - x^*)f''(\theta).$$

С учетом того, что $x^* = \lambda x_1 + \mu x_2$,

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) - \mu(\eta - \xi)(x_2 - x^*)f''(\theta).$$

Выражение $-\mu(\eta - \xi)(x_2 - x^*)f''(\theta)$ принимает неотрицательные значения, так как по условию $f''(x) < 0$, $\eta - \xi > 0$, $x_2 - x^* > 0$ и $\mu \geqslant 0$.

Таким образом,

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

Примечание. Если в (a, b) выполнено условие локальной выпуклости вниз ($f''(x) > 0$ в (a, b)), то $f(x)$ является выпуклой вниз по определению:

для $\forall\, x_1, x_2$ $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + \mu x_2)$,

где $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ и $\lambda + \mu = 1$.

4.9. Исследование функций с помощью производных

Анализ конкретной функции включает несколько этапов: 1) установление области определения функции и ее общих классификационных свойств (симметрии, периодичности и др.); 2) определение промежутков монотонного возрастания и убывания; 3) определение промежутков ориентированной вверх или вниз выпуклости; 4) выявление характерных точек пересечения осей, критических точек экстремума и перегиба, разрывов функции.

Все перечисленные задачи можно рассмотреть и проанализировать, используя диаграммы изменения знаков самой функции $f(x)$, ее производной $f'(x)$ и второй производной $f''(x)$. На указанных диаграммах выявляются точки локального экстремума и перегиба, а также определяются промежутки монотонности, выпуклости и знакоопределенности $f(x)$. Кроме того, на диаграммах можно зафиксировать характер и типизацию разрывов функции и ее производных (если они существуют).

Однако кроме перечисленных задач существует задача асимптотического изменения $f(x)$ при $x \to x_0 \pm 0$, а также при $x \to \pm\infty$. Эта особенность графика проявляется в неограниченном приближении последнего к некоторой прямой, именуемой *асимптотой*.

Различают два вида асимптот – вертикальные и наклонные. Первые имеют место в случае существования у $f(x)$ разрывов второго рода, связанных с неограниченным изменением f при $x \to x_0 \pm 0$.

Вторые обусловлены одновременным существованием двух пределов:

1) $\dfrac{f}{x} \to k$ при $x \to \pm\infty$,

2) $(f - kx) \to b$ при $x \to \pm\infty$.

Если оба условия выполнены, то график функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ неограниченно приближается к графику прямой $y = kx + b$, являющейся наклонной асимптотой.

○ **Примеры.** 1. $y = x + \dfrac{1}{x}$, $A = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Функция $y(x)$ с нечетной симметрией (рис. 4.12, *а*); производная $y'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ с четной симметрией (рис. 4.12, *б*); производная $y''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ с нечетной симметрией (рис. 4.12, *в*).

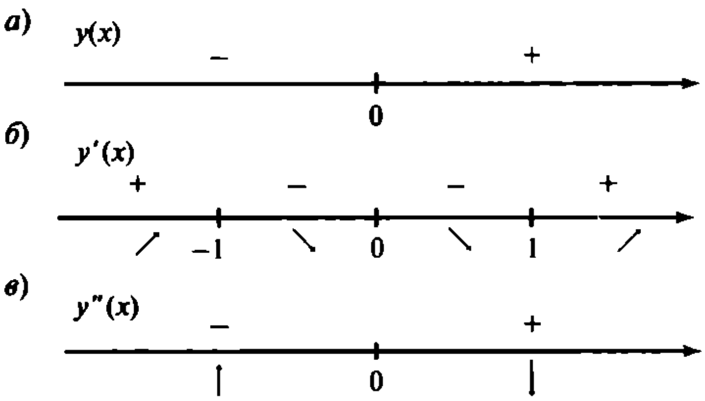


Рис. 4.12

На рис. 4.12 стрелка ↗ означает возрастание, ↘ – убывание функции, ↑ – выпуклость вверх, ↓ – выпуклость вниз.

В точке 0 – разрыв второго рода функции и производных, в точке –1 – максимум, +1 – минимум.

График функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту в точке 0 и наклонную асимптоту $y = x$ (рис. 4.13), так как $\dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{1}{x^2} \to 1$ при $x \to \pm\infty$, $y - x = \dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

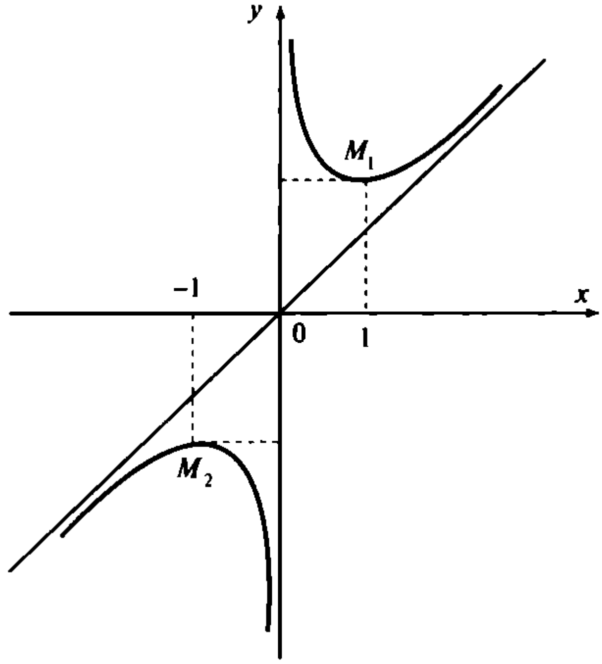


Рис. 4.13

2. Функция выручки фирмы квадратично зависит от объема продукции Q:

$TR = 100Q - 2Q^2$.

Функция издержек имеет кубическую зависимость от Q:

$TC = Q^3 - 77Q^2 + 1300Q + 7400$.

Тогда функция прибыли

$$\pi = TR - TC = -Q^3 + 75Q^2 - 1200Q - 7400 =$$
$$= -(Q - 25)^3 + 75(9Q - 307).$$

Вычислим предельную прибыль $M\pi$ ($M\pi = \pi'$):

$\pi' = -3Q^2 + 150Q - 1200 = -3(Q - Q_1)(Q - Q_2)$, $Q_1 = 40$, $Q_2 = 10$.

Критические точки прибыли:

$\pi'(Q) = 0$, $Q^2 - 50Q + 400 = 0$; $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$;

$\pi'' = -6Q + 150 = -6(Q - 25)$.

В точке 10 вторая производная прибыли $\pi''(10) = -60 + 150 = 90 > 0$ (минимум), в точке 40 она равна $\pi''(40) = -240 + 150 = -90 < 0$ (максимум).

Итак, максимальная прибыль фирмы

$$\pi_{max} = \pi(40) = -40^3 + 75 \cdot 40^2 - 1200 \cdot 40 - 7400 = 600.$$

Вторая производная прибыли

$$\pi'' = -6(Q - 25) > 0 \text{ при } Q < 25, \quad \pi'' < 0 \text{ при } Q > 25.$$

В точке $Q = 25$ функция прибыли имеет локальный перегиб (рис. 4.14).

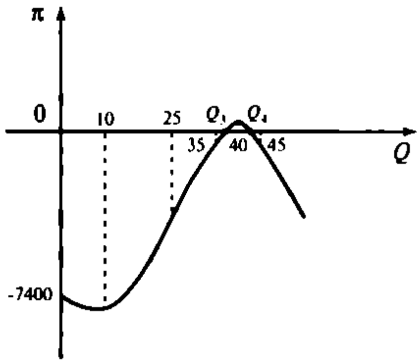


Рис. 4.14

Практически прибыль принимает положительные значения в диапазоне (Q_3, Q_4), являющемся промежутком рентабельности фирмы. Этот промежуток, как легко видеть, достаточно узок, так как в точках $Q = 35$ и $Q = 45$ — концах окрестности точки 40 с радиусом 5 — значение прибыли отрицательно:

$$\pi(35) = -1000 + 75 \cdot 8 < 0, \quad \pi(45) = -8000 + 75 \cdot 98 < 0.$$

3. В общем случае кривая издержек TC задается графической зависимостью (рис. 4.15).

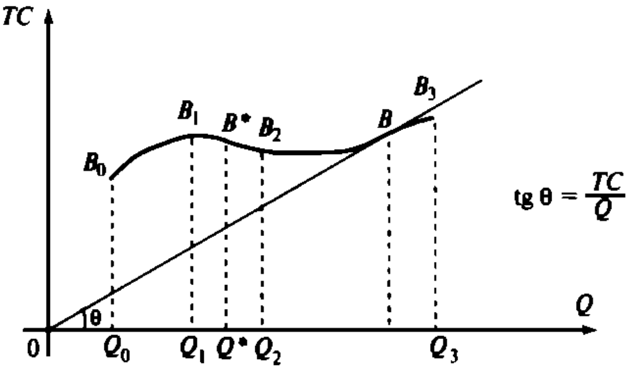


Рис. 4.15

Чем определяется подобный характер издержек? В период становления (B_0B_1) возрастают относительные затраты и график кривой имеет выпуклость вверх. Последующее увеличение Q сопровождается расходами на новое оборудование и приводит к новому росту издержек (B_2B_3), но с выпуклостью вниз. Между этими участками расположен промежуток небольших изменений издержек в зависимости от значений приращений Q (B_1B_2).

График предельных издержек имеет вид, приведенный на рис. 4.16.

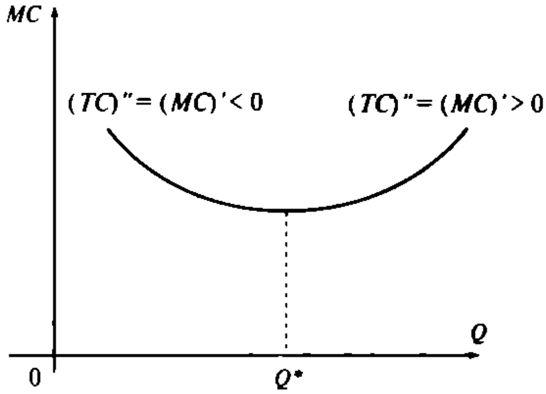


Рис. 4.16

В точке Q^* предельные издержки достигают минимума, и при $Q < Q^*$ кривая TC выпукла вверх, при $Q > Q^*$ кривая TC выпукла вниз. Поэтому точка Q^* является точкой перегиба TC.

На практике интерес вызывает изменение средних издержек AC, равных $\frac{1}{Q}TC$, и их сравнение с предельными издержками MC ($MC = (TC)'$).

Схематично их изменение иллюстрирует график, приведенный на рис. 4.17.

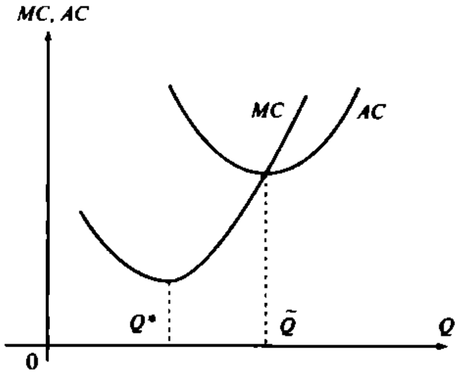


Рис. 4.17

Определим критическую точку кривой AC: $\left(\frac{TC}{Q}\right)' = \frac{MC \cdot Q - TC}{Q^2} = 0.$

Это точка $\tilde{Q}$, где $MC = \frac{TC}{Q} = AC$.

Значение AC соответствует угловому коэффициенту хорды OB на рис. 4.15. Очевидно, что если угловой коэффициент касательной к графику TC, равный MC $((TC)')$, меньше углового коэффициента хорды OB:

$$k_{\text{кас}} = MC < k_{\text{хорд}} = AC \quad \text{и} \quad Q < \tilde{Q},$$

то в этом случае средние издержки превосходят предельные издержки. Если $Q > \tilde{Q}$, то

$$k_{\text{кас}} = MC > k_{\text{хорд}} = AC$$

и средние издержки меньше предельных издержек.

Знаковое значение производной $(AC)'$ распределено следующим образом:

$$(AC)' < 0, \text{ если } Q < \tilde{Q}; \quad (AC)' > 0, \text{ если } Q > \tilde{Q}.$$

Поэтому в точке $\tilde{Q}$ средние издержки достигают минимума.

Сравнительное расположение кривых MC и AC указывает на то, что точка минимума предельных издержек находится слева от точки минимума средних издержек и по значению минимум предельных издержек меньше минимума средних издержек, т. е. $Q^* < \tilde{Q}$ и $MC(Q^*) < AC(\tilde{Q})$ (см. рис. 4.17). ●

5. ФУНКЦИИ n ПЕРЕМЕННЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

5.1. Задание функции в области R^n. Пределы и непрерывность функций n переменных

Ранее в параграфе 1.3 были рассмотрены множества из точек n-мерной области $D = \{M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$. Для точек M и M' вводится понятие *расстояния*

$$\rho(M, M') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')^2} \geqslant 0.$$

Указанное расстояние удовлетворяет условиям:

1) если $\rho(M, M') = 0$, то $M = M'$ (для $\forall\ i \quad x_i = x'_i$);

2) $\rho(M, M') = \rho(M', M)$;

3) для $\forall\ M, M', M'' \in D$: $\rho(M, M') \leqslant \rho(M, M'') + \rho(M'', M')$. (5.1)

Первые два требования очевидны, читатель может доказать их самостоятельно. Третье требование, именуемое *неравенством треугольника*, нуждается в обосновании.

Во-первых, отметим, что при $n = 1$ неравенство треугольника превращается в широко известное свойство действительных чисел. В этом случае $M = x$, $M' = x'$ и $M'' = x''$, а неравенство имеет вид

$$|x - x'| \leqslant |x - x''| + |x'' - x'|.$$

Если принять $x - x'' = \alpha$ и $x'' - x' = \beta$, то $x - x' = x - x'' + (x'' - x') = \alpha + \beta$, т. е.

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

что вытекает из свойств действительных чисел.

Во-вторых, если $n = 2$, то $M = (x, y)$, $M' = (x', y')$ и $M'' = (x'', y'')$, т. е. точки располагаются на координатной плоскости xy и составляют в общем случае три вершины треугольника. При этом рассматриваемое неравенство будет выражать известное в геометрии неравенство треугольника: длина любой стороны треугольника (например, MM') равна $\rho(M, M')$ и не превосходит суммы длин двух других сторон, т. е. $\rho(M, M'') + \rho(M'', M')$.

Покажем, что неравенство выполняется в общем случае. Для этого выразим все расстояния через координаты и возведем обе части выражения в квадрат:

$$\sum_i (x_i - x_i')^2 \leqslant \sum_i (x_i - x_i'')^2 + \sum_i (x_i'' - x_i')^2 + 2\rho(M, M'')\rho(M'', M').$$

Введем новые обозначения:

$$x_i - x_i'' = u_i, \quad x_i'' - x_i' = v_i, \quad x_i - x_i' = u_i + v_i. \tag{5.2}$$

Тогда

$$\sum_i (u_i + v_i)^2 \leqslant \sum_i u_i^2 + \sum_i v_i^2 + 2\rho(M, M'')\rho(M'', M').$$

Далее раскроем выражение в левой части неравенства:

$$\sum_i u_i^2 + \sum_i v_i^2 + 2\sum_i u_i v_i \leqslant \sum_i u_i^2 + \sum_i v_i^2 + 2\rho(M, M'')\rho(M'', M').$$

После сокращения и подстановки u_i, v_i в $\rho(M, M'')$ и $\rho(M'', M')$ имеем

$$\sum_i u_i v_i \le \sqrt{\sum_i u_i^2}\sqrt{\sum_i v_i^2}. \tag{5.3}$$

Неравенство (5.3) на языке алгебры векторов в $\mathbf{R}^n$ определяет соотношение $(\bar{u}, \bar{v}) \le |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$, где $(\bar{u}, \bar{v})$ – скалярное произведение векторов; $|\bar{u}|, |\bar{v}|$ – длины векторов $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ и $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Покажем, что это неравенство справедливо всегда, так как для указанных векторов выполняется более сильное условие, именуемое *неравенством Коши–Буняковского*:

$$|(\bar{u}, \bar{v})| \le |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|. \tag{5.4}$$

Справедливость неравенства (5.4) легко обосновать, если рассмотреть квадрат комбинационного вектора $\bar{u} + \lambda\bar{v} = \bar{z}$:

$$\bar{z}^2 = (\bar{z}, \bar{z}) = (\bar{u} + \lambda\bar{v})(\bar{u} + \lambda\bar{v}) \ge 0,$$

где λ – произвольный параметр из $\mathbf{R}$.

Раскрывая это скалярное произведение, будем иметь

$$(\bar{u} + \lambda\bar{v})(\bar{u} + \lambda\bar{v}) = (\bar{u}, \bar{u}) + \lambda(\bar{u}, \bar{v}) + \lambda(\bar{v}, \bar{u}) + \lambda^2(\bar{v}, \bar{v}) =$$
$$= \bar{u}^2 + 2\lambda(\bar{u}, \bar{v}) + \lambda^2\bar{v}^2.$$

Поскольку этот квадратный трехчлен относительно λ всегда неотрицателен, его дискриминант должен быть неположительным и тогда

$$\frac{D}{4} = (\bar{u}, \bar{v})^2 - \bar{u}^2\,\bar{v}^2 \le 0.$$

Перенося $\bar{u}^2\bar{v}^2$ в правую часть выражения и извлекая арифметический корень, получаем

$$|(\bar{u},\bar{v})| \le \sqrt{\bar{u}^2}\sqrt{\bar{v}^2} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|,$$

что соответствует неравенству Коши–Буняковского.

С помощью расстояния ρ можно определить понятие сферы с радиусом R и центром в точке M_0:

$$S_R(M_0) = \{M \mid_{\rho(M,\, M_0) < R}\}. \tag{5.5}$$

В соответствии с этим назовем δ-окрестностью точки M_0 сферу с радиусом δ и центром в M_0.

Последовательность точек M_1, M_2, ..., M_k называется **сходящейся** к точке M_0, если $\rho(M_k, M_0)$ является величиной бесконечно малой:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(M_k, M_0) = 0.$$

На пределы последовательностей точек, задаваемых в $\mathbf{R}^n$, переносятся многие свойства, которые были установлены для числовых последовательностей. Отметим наиболее важные из них:

1) единственность предела любой сходящейся последовательности;

2) ограниченность сходящейся последовательности.

Последнее свойство связано с общим условием, определяющим ограниченность множеств.

Множество A, составленное из точек M, является **ограниченным** в $\mathbf{R}^n$, если $\exists\, M^* \in \mathbf{R}^n$ и $k \in \mathbf{R}$ $(k > 0)$, такие, что для $\forall\, M \in A$ $\rho(M, M^*) \leqslant k$.

Примем без доказательства универсальный признак сходимости последовательности в $\mathbf{R}^n$.

❑ **Теорема 5.1** (теорема Больцано–Коши). Для того чтобы последовательность $\{M_k\} \subset \mathbf{R}^n$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N$, такое, что $k > N$ и $k' > N \Rightarrow \rho(M_k, M_{k'}) < \varepsilon$. ■

Далее введем классификацию точек области D (множества в $\mathbf{R}^n$).

Точка M_0 называется **предельной** или **точкой сгущения** области D, если в любой окрестности этой точки найдутся точки множества D, отличные от M_0. Очевидно, если M_0 – предельная точка множества D, то всегда можно построить некоторую последовательность $\{M_k\} \subset D$, сходящуюся к M_0.

Точка M_0 называется **внутренней** точкой множества D, если она входит в D вместе с некоторой окрестностью. Любая внутренняя точка является предельной точкой множества, однако обратное утверждение не верно. Например, в $\mathbf{R}$ множество $\mathbf{Q}$ (рациональные числа) составлено только из предельных точек, но ни одна из них не является внутренней точкой.

Наконец, точка M_0 называется **изолированной** точкой множества D, если она принадлежит D, но имеет некоторую окрестность, в которой отсутствуют точки этого множества, отличные от M_0. Примером изолированных точек являются целые числа.

Множество, составленное из одних внутренних точек, называется **открытой** областью. Множество, которое содержит все свои предельные точки, называется **замкнутым**. Множество, которое не содержит изолированных точек, называется **совершенным**.

Докажем следующие общие свойства множеств, полученных путем простейших преобразований: объединений и пересечений.

Бесконечные объединения и пересечения

1°. Любое объединение бесконечного числа открытых множеств A_i является открытым множеством.

Доказательство. Пусть точка $M_0 \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда $\exists\, i' \in N$, такое, что $M_0 \in A_{i'}$. Поскольку $A_{i'}$ – открытая область, M_0 входит в $A_{i'}$ вместе с некоторой окрестностью. Очевидно, что вся эта окрестность войдет и в объединение.

Следовательно, M_0 будет принадлежать объединению вместе с окрестностью. Так как M_0 – произвольная точка, свойство доказано.

2°. Любое пересечение бесконечного числа замкнутых множеств B_i является замкнутым множеством.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку сгущения пересечения M_0 и составим последовательность $\{M_k\} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, стремящуюся к M_0. Очевидно, что $\{M_k\}$ входит во все множества B_i и поэтому точка M_0 является предельной для всех B_i. В силу замкнутости последних M_0 будет принадлежать каждому B_i. Однако в этом случае M_0 войдет и в состав $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, т. е. $M_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, что и требовалось доказать.

Конечные объединения и пересечения

3°. Всякое конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть дано конечное объединение замкнутых множеств $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i$. Рассмотрим произвольную предельную точку объединения M_0. Эта точка должна быть предельной хотя бы для одного B_i, так как в противном случае она будет изолированной для всех B_i и в силу конечности объединения можно указать такую окрестность M_0, внутри которой не будет ни одного элемента B_i при всех i. В силу замкнутости B_i, точка M_0 будет принадлежать B_i, и тем самым войдет в объединение.

4°. Всякое конечное пересечение открытых множеств является открытым множеством.

Доказательство. Рассмотрим конечное пересечение открытых множеств $\bigcap_{i=1}^{N} A_i$ и возьмем любую точку $M_0 \in \bigcap_{i=1}^{N} A_i$. Тогда M_0 будет входить во все A_i и в силу их открытости в каждом из них будет иметь определенную окрестность δ_i. Поскольку число множеств конечно, существует $\min\limits_{i=1,2,\ldots,N} \{\delta_i\} = \delta > 0$. Выбрав радиус окрестности точки M_0 равным δ, будем иметь: $S_\delta(M_0) \subset A_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Поэтому M_0 войдет в состав пересечения вместе с данной окрестностью $S_\delta(M_0)$.

Примечания: 1. Бесконечное объединение замкнутых множеств может оказаться незамкнутым множеством.

В качестве примера приведем объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где $B_i = \{M \mid \frac{1}{i} \leqslant \rho(M_0, M) \leqslant 1\}$, $M_0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

2. Бесконечное пересечение открытых множеств может оказаться не открытым множеством.

В качестве примера возьмем пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i = \{M \mid \rho(M_0, M) < \frac{1}{i}\}$, $M_0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

Геометрическая иллюстрация указанных примеров для случая $n = 2$ приведена на рис. 5.1 и 5.2.

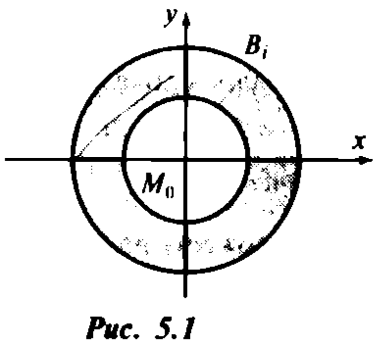


Рис. 5.1

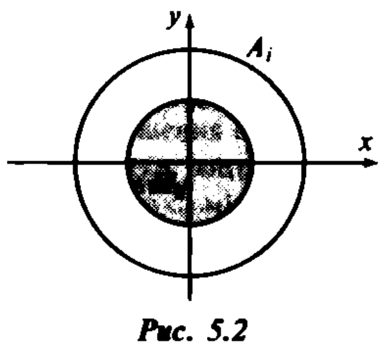


Рис. 5.2

В первом примере (см. рис. 5.1) система множеств B_i является расширяющейся, т. е. $B_i \subset B_{i+1}$ для $\forall\, i$ и $\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_N$. При $N \to \infty$ получим множество типа проколотой сферы, в состав которой не входит предельная точка M_0.

Во втором примере (см. рис. 5.2) система множеств A_i является сужающейся, т. е. $A_{i+1} \subset A_i$ для $\forall\, i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i = A_N$. При $N \to \infty$ получим множество, состоящее из одной точки M_0, которое не является открытым (M_0 – изолированная точка).

В качестве иллюстрации бесконечного пересечения можно привести пример совершенного канторовского множества, представляющего бесконечное пересечение множеств K_i (см. параграф 1.3):

$$K_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ K_2 = K_1 \setminus \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right], \ldots, K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

При этом $K_{n+1} \subset K_n$ для $\forall\, n$. Если $n \to \infty$, то $K_n \to K$. Здесь K – замкнутое совершенное множество, составленное из чисел, троичное разложение которых не имеет разрядных элементов, равных единице.

Определение функции n переменных

Будем говорить, что в области $A \subset \mathbf{R}^n$ **задана функция** $y = f(M)$ (или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$), если для $\forall\, M \in A$ по определенному правилу или закону найдется единственное значение $y \in E_y \subset \mathbf{R}$. Координаты точки M называются *независимыми переменными* или *аргументами*, а значение y – *зависимой переменной* или *функцией*.

Функции многих переменных в отличие от функций одной переменной имеют ограниченные возможности в реализации закона соответствия $M \to y$, так как описание этих законов представляет большие трудности. Тем не менее укажем основные способы задания $f(M)$:

1) **формульный, или аналитический.** Например: 1. $y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ – линейная функция с областью задания $A = \mathbf{R}^n$, коэффициентами a_i и свободным членом b $(a_i \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R})$.

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - r^2}}$ $(r \in \mathbf{R})$, область задания $A = \mathbf{R}^n \setminus \bar{S}_r(0)$, где $\bar{S}_r(0)$ – замкнутая сфера: $\bar{S}_r(0) = \{M \mid_{\rho(M,\, M_0) < r}\}$;

2) **структурно-логический.** Например: 1. $y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, |x_i| + b$ – линейная функция от модулей аргументов.

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - r^2\right|}}$ – дробная функция с областью задания

$A = \mathbf{R}^n \backslash \{M \mid_{\rho(M,\ M_0) = r}\}$;

3) **геометрический.** Значительную сложность в задании функции $f(M)$ имеет геометрический способ, так как даже при $n = 2$ график функциональной зависимости совпадает с кривой поверхностью вида $z = f(x, y)$, построенной в трехмерном пространстве (рис. 5.3).

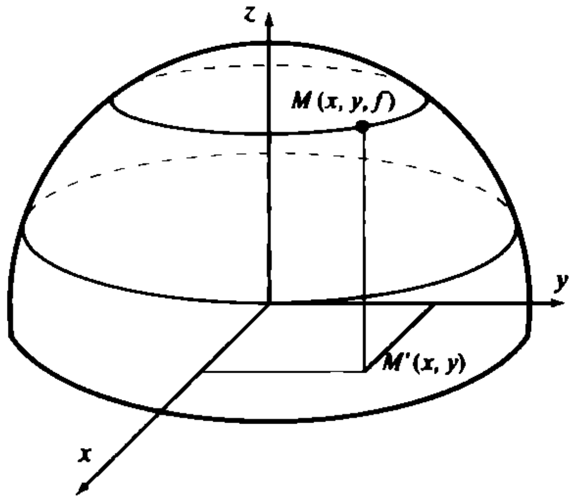


Рис. 5.3

Для того чтобы лучше представить себе характер изменения графика при различных значениях аргументов x и y в пространстве, задают плоские сечения поверхности плоскостями $z = C$. Получающиеся в каждом сечении кривые называют *линиями уровня.*

Таким образом, изменение функции расчленяется на две составляющие: изменение уровня (величины C) и изменение вдоль линии уровня.

Однако при $n \geqslant 3$ наглядность в задании функциональной зависимости исчезает и все представления такого рода относятся к рассмотрению гиперповерхностных форм.

Определение суперпозиции функций

Пусть даны функция $y = f(u_1, u_2, ..., u_n)$, определенная в $A \in \mathbf{R}^n$, и семейство функций $u_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_m)$, определенных в $B \in \mathbf{R}^m$. Если области изменения функций φ_i содержатся в множестве A, т. е. $E_{\varphi_i} \subset A$, то в B задана сложная зависимость $y = F(x_1, x_2, ..., x_m) = f(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$.

В частности, если $m = 1$, то имеем сложную функцию одной переменной x, заданную с помощью промежуточной функции n переменных.

○ **Пример.** Пусть $n = 2$, $m = 1$, $z = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}$,

где $x = at$, $y = bt$ – линейные функции t.

Тогда $z = F(t) = \dfrac{1}{2t^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \dfrac{1}{2}\right)^{-1}$. ●

Определение предела функции в $\mathbf{R}^n$

Пусть дана функция $y = f(M)$, определенная в $A \in \mathbf{R}^n$. Число C называется **пределом** $f(M)$ в точке сгущения M_0, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такое, что $\rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - C| < \varepsilon$. Символически операция исчисления предела обозначается так: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = C$.

Данное определение совпадает с формулировкой Коши, и оно эквивалентно определению предела по Гейне (см. параграф 3.2), по которому для $\forall \{M_k\} \to M_0$ соответствующие числовые последовательности $\{y_k\}$ сходятся. В этом случае у всех последовательностей $\{y_k\}$ должен быть единый предел.

Непрерывность функций

Функция многих переменных, определенная в A, называется **непрерывной в точке сгущения** M_0, если: 1) $M_0 \in A$; 2) $\exists \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = C$; 3) $C = f(M_0)$.

Из данного определения следует, что приращение $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ для любой непрерывной функции является величиной бесконечно малой:

$$\Delta f \to 0 \text{ при } M \to M_0. \tag{5.6}$$

Условие $M \to M_0$ означает, что $\rho(M, M_0) \to 0$, т. е. в соответствии с (5.6) $\Delta f \to 0$ при $\rho(M, M_0) \to 0$.

Указанное приращение функции $f(M) - f(M_0)$ будем называть **полным приращением**.

Функция $y = f(M)$ называется **непрерывной на множестве** A, если она непрерывна во всех точках этого множества.

Непрерывные функции многих переменных обладают следующими свойствами:

1°. Композиции $h(M)$ функций $f(M)$ и $g(M)$ вида: $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$ (при $g(M) \neq 0$) – являются непрерывными в точке M, если $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M.

Доказательство можно опустить, так как оно полностью аналогично доказательству непрерывности композиций функции одной переменной (см. параграф 3.3) и основывается на обосновании бесконечной малости приращения функции $\Delta h(M) = h(M) - h(M_0)$.

2°. Суперпозиция функции $y = f(u_1, u_2, ..., u_n)$, определенной в A и непрерывной в $M_0(u^0_1, u^0_2, ..., u^0_n)$, и семейства функций $u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m)$, $u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_m)$, ..., $u_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_m)$, определенных в B и непрерывных в $N_0(x^0_1, x^0_2, ..., x^0_m)$, при условии, что $u^0_1 = \varphi_1(N_0)$, $u^0_2 = \varphi_2(N_0)$, ..., $u^0_n = \varphi_n(N_0)$, является непрерывной в точке N_0: $y = f(\varphi_1(N), \varphi_2(N), ..., \varphi_n(N)) = F(x_1, x_2, ..., x_m) \to F(x^0_1, x^0_2, ..., x^0_m)$ при $N \to N_0$.

Здесь также можно не проводить доказательства и сослаться на то, что по своей конструкции оно идентично доказательству для сложной функции одной переменной.

Обоснуем теперь теоремы Больцано–Коши и Вейерштрасса для функций многих переменных в замкнутой области. Эти теоремы имеют свою специфику, обусловленную более сложной природой множеств, на которых заданы функции, а также природой самих функциональных объектов.

Предварительно введем следующие геометрические истолкования функциональных объектов в $\mathbf{R}^m$: $y = f(M)$ – гиперповерхность, проведенная в $(n + 1)$-мерном пространстве переменных $(x_1, x_2, ..., x_n, y)$; $y = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ – гиперкривая, задаваемая как суперпозиция функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и параметрических зависимостей $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$.

При таком задании график гиперкривой, если $E_{\varphi_1}, E_{\varphi_2}, ..., E_{\varphi_n} \subset A$, целиком располагается на гиперповерхности: $y = f(M)$.

Теперь рассмотрим содержание теорем Больцано–Коши.

❑ **Теорема 5.2** (первая теорема Больцано–Коши). Пусть функция $f(M)$ определена и непрерывна в замкнутой и связной[1] области A. Если в двух точках области M_1 и M_2 имеем $f(M_1) \cdot f(M_2) < 0$, то $\exists\, M^* \in A$, такая, что $f(M^*) = 0$ (точка M^* располагается на некоторой гиперкривой, соединяющей точки M_1 и M_2).

Доказательство. Несмотря на кажущуюся громоздкость условий теоремы, доказательство является весьма простым, так как функ-

---

[1] Область A является *связной*, если любые пары точек этой области можно соединить гиперкривой, расположенной в области.

ция $f(M)$ после введения непрерывной гиперкривой, соединяющей точки M_1 и M_2: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, становится сложной функцией одной переменной $y = f(\varphi_1, ..., \varphi_n) = F(t)$. Эта функция непрерывна в промежутке $[t_1, t_2]$, где $F(t_1) = f(M_1)$, $F(t_2) = f(M_2)$ и $F(t_1)F(t_2) < 0$. В (t_1, t_2) по теореме Больцано–Коши для функций одной переменной $\exists\ t^*$, такое, что $F(t^*) = f(M^*) = 0$, где $M^*(\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*), ..., \varphi_n(t^*)) \in A$. ■

❑ **Теорема 5.3** (вторая теорема Больцано–Коши). Пусть функция $f(M)$ определена и непрерывна в замкнутой и связной области A. Если в двух точках области M_1 и M_2 функция $f(M_1) \neq f(M_2)$, то для $\forall\ C \in (m, M)$, где $m = \min\,(f(M_1), f(M_2))$, $M = \max\,(f(M_1), f(M_2))$, найдется $M^* \in A$, такая, что $f(M^*) = C$.

Доказательство. Введем композиционную функцию $g(M) = f(M) - C$, непрерывную в A и удовлетворяющую условию $g(M_1) \cdot g(M_2) < 0$. Тогда по первой теореме Больцано–Коши найдется $M^* \in A$, такая, что $\varphi(M^*) = 0$ $(f(M^*) = C)$. ■

Прежде чем рассмотреть теоремы Вейерштрасса, сделаем следующее замечание.

Теоремы Больцано–Коши требуют соблюдения условий связности области A. При этом сама область может быть неограниченной. В то же время теоремы Вейерштрасса требуют, чтобы область A была ограниченной, но обходят вопрос об ее связности.

❑ **Теорема 5.4** (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $y = f(M)$ определена и непрерывна в ограниченной и замкнутой области, то она ограничена в этой области.

Доказательство полностью идентично доказательству ограниченности в случае функции одной переменной. При этом используется теорема Больцано–Вейерштрасса о том, что в любой ограниченной последовательности $\{M_k\} \subset \mathbf{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{M_{k_l}\}$ (см. теорему 2.4). ■

❑ **Теорема 5.5** (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области A, то она имеет минимум и максимум в указанной области.

При обосновании вновь сошлемся на доказательство, построенное для функций одной переменной. ■

Таким образом, математический инструментарий, отработанный на элементарном и наглядном объекте – функциях одной переменной, легко переносится на объекты весьма сложной природы – функции многих переменных.

5.2. Частные приращения и частные производные функции. Полный дифференциал

Ранее было введено понятие полного приращения функции:

$$\Delta f(M) = f(M) - f(M_0). \tag{5.7}$$

Здесь точка M выбирается произвольно.

Назовем **частным приращением** по переменной x_i в точке M_0 функции $f(M)$, определенной в A ($M_0 \in A$), величину

$$\Delta_i f = f(M'_{x_i}) - f(M_0), \tag{5.8}$$

где $M'_{x_i} = M(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$.

Таким образом, точка M'_{x_i} по отношению к M_0 имеет приращение только по одной координате x_i.

Функция $f(M)$ при таком характере изменения переменных становится функцией только одной переменной x_i. Поэтому если составить отношение $\dfrac{\Delta_i f}{\Delta x_i}$ и устремить Δx_i к нулю, то полученный предел (если он существует) совпадет с обычной производной функции одной переменной.

Предел отношения частного приращения $\Delta_i f$ к приращению Δx_i при стремлении последнего к нулю (если он существует) называется **частной производной** функции $y = f(M)$ по переменной x_i в точке M_0.

Частная производная обозначается так:

$$f'_{x_i} \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x_i}: \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f}{\Delta x_i} = f'_{x_i} \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

○ **Примеры.** 1. $f = x^2 + 2xy - y^2$. Частные производные $f'_x = 2x + 2y$, $f'_y = 2x - 2y$.

2. $f = e^{x-y} \ln(x+y)$. Частные производные $f'_x = e^{x-y}\left[\ln(x+y) + \dfrac{1}{x+y}\right]$, $f'_y = e^{x-y}\left[-\ln(x+y) + \dfrac{1}{x+y}\right]$. ●

Фиксирование в структуре $\Delta_i f$ всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за исключением x_i (т. е. придание им значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) позволяет рассматривать их как постоянные, что чрезвычайно упрощает схемы вычисления частных производных.

Геометрический смысл частных производных установим на примере пространства $\mathbf{R}^2$. В этом случае $z = f(x, y)$ задает конфигурацию поверхности (рис. 5.4).

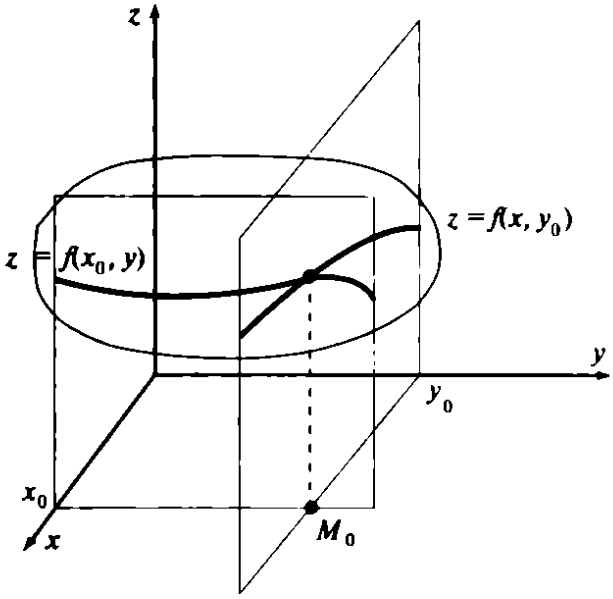


Рис. 5.4

Рассечем эту поверхность двумя плоскостями: $x = x_0$ (параллельная плоскости yz) и $y = y_0$ (параллельная плоскости xz).

Обе плоскости пересекут поверхность и вырежут на ней плоские линии $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$. Частная производная $f_x'(M_0)$ совпадает с обычной производной $f'(x, y_0)$ в точке x_0, а частная производная $f_y'(M_0)$ – с обычной производной $f'(x_0, y)$ в точке y_0. Как известно, $f'(x, y_0)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к плоской линии $z = f(x, y_0)$ в точке x_0, а $f'(x_0, y)$ – угловому коэффициенту касательной, проведенной к плоской линии $z = f(x_0, y)$ в точке y_0.

Таким образом, значения частных производных f_x' и f_y' в точке M_0 численно совпадают с угловыми коэффициентами касательных, проведенных к плоским кривым, полученным при пересечении поверхности с плоскостями, параллельными координатным.

При переходе к пространству $\mathbf{R}^n$ можно сохранить прежний геометрический смысл f'_{x_i}, если пересекать гиперповерхность $y = f(M)$ системой гиперплоскостей: $x_1 = x^0_n, \ldots, x_{i-1} = x^0_{i-1}, x_{i+1} = x^0_{i+1}, \ldots, x_n = x^0_n$, высвобождающих только одну координату x_i. В сечении получится гиперплоская кривая, угловой коэффициент которой в точке x^0_i совпадает с $f'_{x_i}(M_0)$.

Нетрудно показать, что композиции вида $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$, составленные из функций f и g, имеющих конечные частные производные, также имеют конечные частные производные. При этом

$$(f+g)'_{x_i} = f'_{x_i} + g'_{x_i}; \quad (f-g)'_{x_i} = f'_{x_i} - g'_{x_i};$$

$$(f \cdot g)'_{x_i} = f'_{x_i}g + fg'_{x_i}; \quad \left(\frac{f}{g}\right)'_{x_i} = \frac{f'_{x_i}g - fg'_{x_i}}{g^2}. \tag{5.9}$$

Эти формулы не нуждаются в специальном обосновании, так как частная производная есть нормальная производная функции одной переменной (при условии, что все остальные переменные зафиксированы и им приданы значения $x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0$).

Функция $y = f(M)$, определенная в A и непрерывная в M_0, называется **дифференцируемой** в точке M_0, если полное приращение $\Delta f(M)$ в некоторой окрестности точки M_0 можно представить в виде

$$\Delta f(M) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (M) \Delta x_i, \tag{5.10}$$

где A_i – постоянные; $\alpha_i(M)$ – бесконечно малые, стремящиеся к нулю при $\rho(M, M_0) \to 0$.

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ (если не все $A_i = 0$) является малой первого порядка, а $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (M) \Delta x_i$ – малой высшего порядка. Поэтому первое слагаемое (5.10) именуют *главной частью приращения* дифференцируемой функции или *полным дифференциалом* и обозначают $\mathrm{d}f$. С учетом сказанного полное приращение дифференцируемой функции

$$\Delta f(M) = \mathrm{d}f + o(\rho(M, M_0)). \tag{5.11}$$

Если $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$, то из формулы (5.10) вытекает, что

$$\Delta_i f = A_i \Delta x_i + \alpha_i (M) \Delta x_i.$$

Разделим обе части на Δx_i:

$$\frac{\Delta_i f}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i (M),$$

где $\alpha_i \to 0$ при $\Delta x_i \to 0$.

Это равенство говорит о том, что отношение $\dfrac{\Delta_i f}{\Delta x_i}$ имеет предел при $\Delta x_i \to 0$, равный A_i.

Следовательно, из дифференцируемости $f(M)$ непосредственно вытекает существование конечных частных производных функции $f(M)$ и равенство этих производных коэффициентам главной части разложения полного приращения

$$f'_{x_i}(M_0) = A_i.$$

Таким образом, выражение для полного дифференциала df можно записать так:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(M_0)\Delta x_i.$$

Далее примем, что приращение независимой переменной Δx_i совпадает с ее дифференциалом: $\Delta x_i = \mathrm{d}x_i$. Тогда получим окончательное представление для полного дифференциала:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(M_0)\,\mathrm{d}x_i. \tag{5.12}$$

Совокупность всех частных производных функции будем рассматривать как координаты вектора, который назовем *вектор-градиентом* ∇f или grad f:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Если теперь принять, что величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ (или $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$) также являются координатами некоторого вектора, который будем называть *вектором приращения* $\Delta\bar{x}$ (или $\mathrm{d}\bar{x}$), где

$$\Delta\bar{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

то формулу для полного дифференциала можно записать так:

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \Delta\bar{x}. \tag{5.15}$$

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции

В главе 4 было установлено, что условия дифференцируемости и существования производной для функции одной переменной совпадают. Поэтому наличие конечной производной является необходимым и достаточным условием для дифференцируемости функции одной переменной. Ранее мы убедились, что существование конечных частных производных для любого номера i ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. существование вектор-градиента ∇f в точке M_0, – *необходимое условие дифференцируемости* функции. Однако это условие не является достаточным для дифференцируемости функции многих переменных.

❑ В этом можно убедиться, если рассмотреть функцию:

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ при } M(x, y) \neq M_0(0, 0) \text{ и } z = f(0, 0) = 0.$$

Эта функция непрерывна при всех $M \neq M_0$, так как числитель и знаменатель непрерывны ($x^2 + y^2 \neq 0$).

Далее покажем непрерывность $f(M)$ в точке M_0. С этой целью используем широко известное неравенство $2|x||y| \leqslant x^2 + y^2$. Отсюда

$\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} = |x|\dfrac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{1}{2}|x|$ при любых $M \neq M_0$.

Следовательно, $|f| = |x|\dfrac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \to 0$ при $M \to M_0$, т. е. $f(M)$ непрерывна в M_0.

Покажем, что в точке M_0 функция $f(M)$ имеет конечные частные производные. Действительно,

$$f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

В остальных точках области $\mathbf{R}^2$ также существуют частные производные, вычисляемые непосредственно:

$$f'_x = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \text{ и } f'_y = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Нетрудно показать, что эти частные производные не являются непрерывными при $M \to M_0$. Так, например, f'_x при $x = y = \dfrac{1}{n}$ равна $\dfrac{1}{2}$ ($f'_x \neq 0$) и при $x = y = \dfrac{1}{n} \to 0$ имеем $\lim f'_x = \dfrac{1}{2}$ $(\lim f'_x \neq 0)$.

Нарушение непрерывности частных производных приводит к недифференцируемости $f(M)$ в точке M_0, полное приращение которой в окрестности M_0 имеет вид

$$\Delta f(M) = f(M) - f(M_0) = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{5.16}$$

В противном случае по формуле разложения полного приращения дифференцируемой функции в точке M_0 должно выполняться равенство:

$$\Delta f(M) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \alpha_x\Delta x + \alpha_y\Delta y,$$

где α_x и α_y – бесконечно малые при $M \to M_0$.

Так как $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$, получим

$$\Delta f(M) = \alpha_x\Delta x + \alpha_y\Delta y. \tag{5.17}$$

Данное представление невозможно, поскольку при $\Delta x = \Delta y$ выражения (5.16) и (5.17) приводят к равенству

$$\frac{1}{2}\Delta x = (\alpha_x + \alpha_y)\Delta x \text{ или } \alpha_x + \alpha_y = \frac{1}{2} \text{ при } \Delta x \neq 0.$$

Последнее соотношение указывает на противоречие, так как α_x и α_y – бесконечно малые величины.

Приведенный пример убедительно показывает, что наличие конечных частных производных не является достаточным условием для дифференцируемости функций. ■

Сформулируем *достаточное условие дифференцируемости* без проведения доказательства.

❑ **Теорема 5.6.** Для того чтобы $y = f(M)$, определенная в A и непрерывная в точке M_0, была дифференцируема в этой точке, достаточно, чтобы эта функция имела конечные частные производные f_{x_i} в некоторой окрестности M_0 для любого $i = 1, 2, ..., n$ и эти частные производные были непрерывны в точке M_0. ■

Следствием теоремы 5.6 является существование в некоторой окрестности точки M_0 ограниченного вектор-градиента ∇f, непрерывного в M_0. В силу этого для любой дифференцируемой функции вектор-градиент приобретает вполне определенный геометрический смысл, который можно раскрыть, записав следствие из неравенства Коши–Буняковского (5.4):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\theta, \tag{5.18}$$

где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные векторы пространства $\mathbf{R}^n$; θ – условный угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Тогда в формуле (5.15) для полного дифференциала

$$df = \nabla f \cdot \Delta\bar{x} = |\nabla f| \cdot |\Delta\bar{x}| \cos\theta.$$

Будем считать, что вектор $\Delta\bar{x}$ соединяет точки, лежащие на границе n-мерной сферы с радиусом δ, и центр этой сферы (точку M_0).

В случае если вектор $\Delta\bar{x}$ коллинеарен вектор-градиенту ∇f, функция $\cos\theta$ примет одно из двух возможных значений: $+1$ (направления совпадают) и -1 (направления противоположны). При этом $|\Delta\bar{x}|$ всегда равен δ. Таким образом, $|df|_{\Delta x \in S_\delta(M_0)}$ имеет наибольшее значение при выборе $\Delta\bar{x}$, параллельным вектору ∇f:

$$\max |df|_{\Delta\bar{x} \in S_\delta(M_0)} = |\nabla f|\,\delta. \tag{5.19}$$

Это свойство полного дифференциала формулируется так: вектор-градиент дифференцируемой функции указывает направление наибольшего изменения этой функции при условии, что конец вектора приращения $\Delta\bar{x}$ принимает различные положения на сфере $S_\delta(M_0)$.

Формула (5.11) раскрывает прикладной смысл полного дифференциала функции, так как в любой достаточно малой окрестности полное приращение дифференцируемой функции можно выразить (с точностью до малых высшего порядка) через полный дифференциал:

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} f'_\alpha(M_0)\Delta x_i. \qquad (5.20)$$

Во многих задачах проще найти полный дифференциал, чем значение полного приращения.

○ **Пример.** Пусть $f = \sqrt{100 + 2x + y}$.

Тогда $f'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{100+2x+y}}2 = \dfrac{1}{\sqrt{100+2x+y}}$, $f'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{100+2x+y}}$.

Если $x_0 = y_0 = 0$ и $\Delta x = \Delta y = 0{,}2$, то

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{20}(2\Delta x + \Delta y) = \frac{0{,}6}{20} = 0{,}03.$$

Истинное значение приращения

$$\Delta f = \sqrt{100{,}6} - 10 = 10{,}02996 - 10 = 0{,}02996.$$

Абсолютная погрешность составляет $4 \cdot 10^{-5}$, а относительная имеет порядок 10^{-3}. ●

Производная сложной функции

❑ **Теорема 5.7.** Пусть даны функция $y = f(u_1, u_2, ..., u_n)$, определенная в A, и совокупность функций $u_i = \varphi_i(M)$: $u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m)$, ..., $u_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_m)$, определенных в B. При этом $\varphi_i(M_0) = u_i^0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ и $f(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = F(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Если f имеет непрерывные частные производные в $N_0(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$, а φ_i – непрерывные частные производные в $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ по соответствующим переменным, то сложная функция $f(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ также имеет непрерывные частные производные по $x_1, x_2, ..., x_m$ в M_0, равные

$$F'_{x_j} = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i}(\varphi_i)'_{x_j}. \qquad (5.21)$$

Доказательство. Функция f имеет непрерывные частные производные по u_i в N_0, поэтому полное приращение

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} \Delta u_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(N) \Delta u_i, \tag{5.22}$$

где $\alpha_i(N) \to 0$ при $N \to N_0$.

Здесь Δu_i – произвольные приращения.

По аналогии вследствие непрерывности частных производных φ_i по переменным x_j в точке M_0 полное приращение

$$\Delta \varphi_i = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_i)'_{x_j} \Delta x_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(M) \Delta x_j, \tag{5.23}$$

где $\beta_i(M) \to 0$ при $M \to M_0$.

В выражении (5.22) разделим обе части на Δx_j и примем, что $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \ldots = \Delta x_n = 0$ и $u_i = \varphi_i(M)$. Тогда

$$\frac{\Delta_j F}{\Delta x_j} = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} \left(\frac{\Delta \varphi_i}{\Delta x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(N) \frac{\Delta_j \varphi_i}{\Delta x_j}, \quad \frac{\Delta_j \varphi_i}{\Delta x_j} = (\varphi_i)'_{x_j} + \beta_j(M).$$

Если $\Delta x_j \to 0$, то $M \to M_0$, $\dfrac{\Delta_j \varphi_i}{\Delta x_j} \to (\varphi_i)'_{x_j}$, $N \to N_0$ и $\alpha_i(N) \to 0$.

Далее получаем, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(N) \frac{\Delta_j \varphi_i}{\Delta x_j} \to 0$, так как сумма произведений ограниченных величин на бесконечно малые есть величина бесконечно малая. Поэтому

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_j F}{\Delta x_j} = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} (\varphi_i)'_{x_j}, \text{ т.е. } F'_{x_j} = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} (\varphi_i)'_{x_j}.$$

Непрерывность частных производных F'_{x_j} в точке M_0 вытекает из того, что по своей структуре они являются композициями сложной и непрерывной функции $f'_{u_i}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а также непрерывных функций $(\varphi_i)'_{x_j}$. ■

◇ **Следствие.** Если сложная функция имеет в точке M_0 непрерывные частные производные, она является дифференцируемой в M_0 и ее полный дифференциал

$$df(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = dF(M) = \sum_{j=1}^{m} F'_{x_j} dx_j = \sum_j (\sum_i f'_{u_i} (\varphi_i)'_{x_j}) dx_j =$$

$$= \sum_i f'_{u_i} (\sum_j (\varphi_i)'_{x_j}) dx_j = \sum_i f'_{u_i} d\varphi_i . ◆ \tag{5.24}$$

Это выражение можно переписать так:

$$\mathrm{d}f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_i f'_{u_i}\mathrm{d}u_i, \tag{5.25}$$

где $\mathrm{d}u_i = \mathrm{d}\varphi_i$ для $\forall\, i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Данная зависимость по форме идентична полному дифференциалу для простой функции $y = (u_1, u_2, \dots, u_n)$:

$$\mathrm{d}f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_i f'_{u_i}\mathrm{d}u_i,$$

где u_i – независимые переменные, заданные в $A \subset \mathbf{R}^n$; $\mathrm{d}u_i = \Delta u_i$.

Это свойство называют *законом инвариантности формы полного дифференциала*. Различие между полными дифференциалами простой и сложной функций заключается в том, что приращение $\Delta u_i = \mathrm{d}u_i$ в случае простой функции и $\Delta u_i \neq \mathrm{d}u_i = \mathrm{d}\varphi_i(M)$ в случае сложной функции.

Формула частной производной от сложной функции имеет большое количество приложений.

Например, пусть дана функция $y = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, где $u_1, u_2, \dots, u_n$ – переменные, заданные в области $A \subset \mathbf{R}^n$. При этом все переменные u_i выражаются функционально через независимую переменную t: $u_1 = \varphi_1(t)$, $u_2 = \varphi_2(t)$, ..., $u_n = \varphi_n(t)$, где $t \in B$ и $E_{\varphi_i} \subset A$ для $\forall\, i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Если, кроме того, существуют непрерывные частные производные функции f в точке N_0 и конечные производные функций $\varphi_i(t)$ (для $\forall\, i$, $i = 1, 2, \dots, n$) в точке t_0, то в точке t_0 существует конечная производная функции $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, равная

$$F'(t) = (f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n))' = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i}\varphi'_i(t). \tag{5.26}$$

Примечание. В данном условии изменены требования к производным $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$. Вместо условия непрерывности введено условие конечности, так как функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ зависят от одной переменной t и требование конечности производных эквивалентно условию дифференцируемости (а следовательно, и непрерывности) этих функций. С помощью указанных правил дифференцирования можно строить производную по одной переменной в пространстве любой конечной размерности.

❍ **Пример.** $y = \dfrac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2}$, где $u_1 = \sin t$, $\quad u_2 = \cos t$.

Вычислим производные f'_{u_1} и f'_{u_2}:

$$f'_{u_1} = \frac{u_1 - u_2 - (u_1 + u_2)}{(u_1 - u_2)^2} = -\frac{2u_2}{(u_1 - u_2)^2},$$

$$f'_{u_2} = \frac{2u_1}{(u_1 - u_2)^2}, \quad u'_1 = \cos t, \quad u'_2 = -\sin t.$$

Таким образом, $\frac{dy}{dt} = -\frac{2u_2}{(u_1 - u_2)^2}\cos t + \frac{2u_1}{(u_1 - u_2)^2}(-\sin t) =$

$$= -\frac{2}{(\sin t - \cos t)^2} = -\frac{2}{1 - \sin 2t} = -\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} = -\frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}. \bullet$$

Производная функции, заданной неявно

Функция вида $y = \varphi(x)$ называется **неявной** функцией, определенной в $[a, b]$, если для всех точек указанного промежутка выполняется тождество $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

Будем считать, что $f(x, y)$ определена и непрерывна в некотором прямоугольнике $[a, b; c, d] \subset \mathbf{R}^2$ или полосе $[a, b; -\infty, +\infty] \subset \mathbf{R}^2$. Пусть, кроме того, в этой области существуют непрерывные частные производные f'_x и f'_y.

Если искомая производная φ' существует и конечна в некоторой точке x_0, то согласно предыдущим утверждениям в точке x_0 существует конечная производная

$$[f(x, \varphi(x))]' = f'_x + f'_y\,\varphi' = 0. \qquad (5.27)$$

Действительно, если принять в качестве независимой переменной t переменную x и записать $\varphi_1(t) = x$ и $\varphi_2(t) = \varphi(x)$, то производная $\varphi'_1 = 1$, а производная $\varphi'_2 = \varphi'(x)$. Отсюда $F(x) = f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и $F' = f'_x + f'_y\,\varphi' = 0$, т.е.

$$\varphi' = -\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad (5.28)$$

○ **Пример.** Пусть неявная функция задана уравнением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5.5).

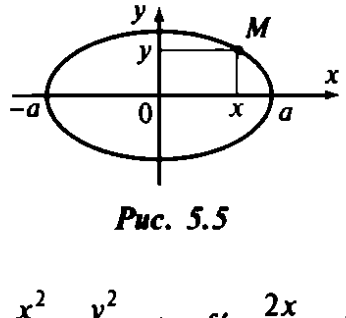


Рис. 5.5

В данном случае $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $f'_x = \frac{2x}{a^2}$, $f'_y = \frac{2y}{b^2}$, $\varphi'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, $A = [-a, a; 0, b]$. Область A выбрана таким образом, чтобы искомая функция при всех значениях x была однозначной. ●

5.3. Частные производные и полные дифференциалы высшего порядка

Частные производные функции $y = f(M)$ в том случае, если они существуют не в одной точке, а на некотором множестве A', являются функциями, определенными на этом множестве. Поэтому удобно ввести следующие обозначения:

$$f'_{x_1} = g_1(M),\ f'_{x_2} = g_2(M),\ \ldots, f'_{x_n} = g_n(M).$$

Полученные функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$, определенные в A', могут быть непрерывными и иметь частные производные в различных точках A'.

Назовем частные производные от функций $g_1, g_2, \ldots, g_n$ **частными производными высшего порядка** от функции $f(M)$ и примем для $\forall\, j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$(f'_{x_1})'_{x_j} = f''_{x_1x_j},\ (f'_{x_2})'_{x_j} = f''_{x_2x_j},\ \ldots,\ (f'_{x_n})'_{x_j} = f''_{x_nx_j},\ \text{или}\ (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_ix_j},$$

где i и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Эти производные разбиваются на две группы: *вторые частные производные* от f по переменным x_i

$$f''_{x_i^2} = (f'_{x_i})'_{x_i},\quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.29}$$

и *смешанные частные производные* от f по переменным x_i и x_j $(i \neq j)$

$$f''_{x_ix_j} = (f'_{x_i})'_{x_j},\quad i = 1, 2, \ldots, n,\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.30}$$

Число вторых частных производных функции $f(M)$ равно n, а число смешанных частных производных – разности $n^2 - n = n(n - 1)$. При этом величина n^2 определяет общее число всех старших производных и совпадает с числом элементов квадратной матрицы порядка n. Элементы такой матрицы имеют индексы i и j, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с координатными индексами x_i, x_j, определяющими порядок частной производной.

Примеры.

1. $y = x_1(x_2 - x_3 + 1) - x_3^2 = f(x_1, x_2, x_3)$; $f'_{x_1} = x_2 - x_3 + 1$; $f'_{x_2} = x_1$; $f'_{x_3} = -x_1 - 2x_3$. Далее, $f''_{x_1^2} = 0$; $f''_{x_2^2} = 0$; $f''_{x_3^2} = -2$; $f''_{x_1x_2} = 1$; $f''_{x_1x_3} = -1$; $f''_{x_2x_1} = 1$; $f''_{x_2x_3} = 0$; $f''_{x_3x_1} = -1$; $f''_{x_3x_2} = 0$.

2. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = f(x, y)$; $f'_x = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$; $f'_y = -\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{x}$; $f''_{x^2} = 2\dfrac{y}{x^3}$; $f''_{y^2} = 2\dfrac{x}{y^3}$; $f''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$; $f''_{yx} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$. ●

В этих примерах число различных смешанных производных составляет половину их полного числа $\frac{n(n-1)}{2}$.

Этот факт подтверждается следующей теоремой.

□ **Теорема 5.8.** Если функция $y = f(M)$, определенная и непрерывная в A, имеет непрерывные смешанные производные в области A, то значения смешанных частных производных во всех точках A не зависят от порядка их вычисления, т. е.

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i} \quad (\forall\ i, j, \quad i \neq j).$$

Эту теорему примем без доказательства. ■

Сформулируем задачу вычисления второго полного дифференциала (полного дифференциала второго порядка). Назовем полный дифференциал $df(M)$ ***первым полным дифференциалом*** функции $f(M)$ (или полным дифференциалом первого порядка). Тогда вторым полным дифференциалом функции $f(M)$ будем называть выражение

$$d^2f(M) = d(df(M)), \tag{5.31}$$

т. е. первый полный дифференциал от первого полного дифференциала $f(M)$.

Построим формульную зависимость для d^2f:

$$d^2f = d\left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\Delta x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} g'_{x_j}\Delta x_j,$$

где $g(M) = \sum\limits_{i} f'_{x_i}\Delta x_i$.

Вычислим частные производные g'_{x_j}:

$$g'_{x_j} = \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\Delta x_i\right)'_{x_j} = \sum_{i=1}^{n}(f'_{x_i}\Delta x_i)'_{x_j}.$$

Очевидно, что приращения независимых переменных Δx_i не зависят от значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. частные производные $(\Delta x_i)'_{x_j} = 0$ для $\forall\, j$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Тогда

$$g'_{x_j} = \sum_{i=1}^{n}(f'_{x_i})'_{x_j}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}\Delta x_i$$

и

$$d^2f = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}\Delta x_i\right)\Delta x_j = \sum_{i,j} f''_{x_i x_j}\Delta x_i \Delta x_j.$$

Если учесть, что смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования, и при этом принять, что приращения независимых переменных x_i и x_j совпадают с их дифференциалами, то получим

$$d^2f = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i^2} dx_i^2 + 2\sum_{i>j} f''_{x_i x_j} dx_i dx_j = (\Delta\bar{x}) A \Delta\bar{x} \text{ — квадратичная форма.}$$

Матрица квадратичной формы A равна

$$A = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} & & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2^2} & \dots & f''_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & & f''_{x_n^2} \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Пусть задана суперпозиция функций $y = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, определенной в A, и $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m)$, ..., $u_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$, определенных в B. При этом $y = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = F(M)$. Тогда если f и φ_i имеют непрерывные частные производные до второго порядка в точках $N_0(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$ и $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, то существует второй полный дифференциал $d^2F(M)$ сложной функции следующего вида:

$$d^2F = d(dF) = \sum_{i=1}^{n} f''_{u_i^2} d\varphi_i^2 + 2\sum_{i>j} f''_{u_i u_j} d\varphi_i d\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} d^2\varphi_i. \tag{5.33}$$

Действительно, первый полный дифференциал функции $F(M)$ в силу инвариантности формы имеет вид $dF(M) = \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} d\varphi_i$.

По условию dF дифференцируема в любой точке, где существуют непрерывные частные производные второго порядка f и φ_i.

Отсюда

$$d^2F(M) = d\left(\sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} d\varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} [d(f'_{u_i}) d\varphi_i + f'_{u_i} d(d\varphi_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} g'_{u_j} d\varphi_j\right) d\varphi_i + \sum_{i=1}^{n} g_i d^2\varphi_i, \text{ где } g_i = f'_{u_i}.$$

Далее, $d^2F(M) = \sum_{i,j} f''_{u_i u_j} d\varphi_i d\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} d^2\varphi_i = \sum_{i}^{n} f''_{u_i^2} d\varphi_i^2 +$

$$+ 2\sum_{i>j} f''_{u_i u_j} d\varphi_i d\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} d^2\varphi_i.$$

Из полученного соотношения следует, что второй полный дифференциал не обладает свойством инвариантности формы. Выражения, представляющие второй дифференциал для простой и сложной зависимости, отличаются друг от друга. В структуру второго полного дифференциала сложной функции входят члены вида $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathrm{d}^2 y_i$, отсутствующие в структуре второго полного дифференциала простой функции.

Продолжая построение частных производных функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получаем формулу, определяющую частную производную m-го порядка:

$$f^{m}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}} = (f^{(m-1)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m-1}}})'_{x_{i_m}}, \qquad (5.34)$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_m$ (которые могут совпадать) принимают значения $1, 2, \dots, n$.

Таким образом, частная производная m-го порядка рассматривается как частная производная первого порядка от частной производной $(m - 1)$-го порядка.

Аналогично можно ввести полный дифференциал m-го порядка:

$$\mathrm{d}^m f(u) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{m-1} f). \qquad (5.35)$$

Опираясь на формулы частных производных высшего порядка, а также на выражения для полных дифференциалов высшего порядка, можно построить многочлены Тейлора для функции многих переменных, обладающей непрерывными частными производными до m-го порядка включительно, в некоторой окрестности с центром в точке M_0 и радиусом R. Этот многочлен строится достаточно просто, если вначале записать формулу многочлена Тейлора для функции одной переменной в виде

$$P_m(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x_0), \qquad (5.36)$$

где $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2 f(x_0) = f''(x_0)\mathrm{d}x^2$, ..., $\mathrm{d}^m f(x_0) = f^{(m)}(x_0)\mathrm{d}x^m$, $\mathrm{d}x = \Delta x = x - x_0$.

Тогда многочлен Тейлора для функции n переменных вполне естественно представить следующим образом:

$$P_m(M) = f(M_0) + \frac{\mathrm{d}f(M_0)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{\mathrm{d}^m f(M_0)}{m!}, \qquad (5.37)$$

где $\mathrm{d}f(M_0)$, $\mathrm{d}^2 f(M_0)$, ..., $\mathrm{d}^m f(M_0)$ – значения полных дифференциалов с частными производными, заданными в точке M_0.

По аналогии с функциями одной переменной запишем формулу Тейлора с остаточным членом для функции n переменных, определенной и непрерывно дифференцируемой до $(m + 1)$-го порядка включительно в сфере с радиусом R и центром в точке M_0 $(S_R(M_0))$:

$$f(M)=P_m(M)+\frac{d^{m+1}f(M_\theta)}{(m+1)!},\quad M\in S_R(M_0),\tag{5.38}$$

где $d^{m+1}f(M_\theta)$ – значение $(m+1)$-го полного дифференциала функции $f(M)$ с частными производными, заданными в некоторой внутренней точке сферы $S_R(M_0)$.

Если в (5.38) подставить многочлен (5.37), то получим выражение

$$f(M)=f(M_0)+\frac{df(M_0)}{1!}+\frac{d^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^mf(M_0)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(M_\theta)}{(m+1)!}.\tag{5.39}$$

Если функция $f(M)$ удовлетворяет требованиям непрерывной дифференцируемости до $(m+1)$-го порядка в сфере $S_R(M_0)$, то абсолютное и относительное приращения этой функции

$$\Delta f=f(M)-f(M_0)=\frac{df(M_0)}{1!}+\frac{d^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^mf(M_0)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(M_\theta)}{(m+1)!}$$

и $$\Delta'f=\Delta f-df=\frac{d^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^mf(M_0)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(M_\theta)}{(m+1)!}.\tag{5.40}$$

5.4. Условия существования экстремума и выпуклости функции многих переменных

Пусть функция $y=f(M)$ определена и непрерывна в области A. Тогда M_0 называется точкой **локального экстремума** функции $f(M)$, если она является внутренней точкой A и в некоторой δ-окрестности этой точки выполняется условие: для $\forall\ M\in S_\delta(M_0)$ $(\rho(M, M_0)<\delta)$ полное приращение $\Delta f=f(M)-f(M_0)$ знакопостоянно.

Если $\Delta f\geqslant 0$ $(f(M)\geqslant f(M_0))$, точка M_0 называется точкой **локального минимума**. Если $\Delta f\leqslant 0$ $(f(M)\leqslant f(M_0))$, точка M_0 называется точкой **локального максимума**.

По аналогии с функциями одной переменной дадим определение **локальной выпуклости** в точке и на множестве.

Точка M_0 называется точкой локальной выпуклости функции $y=f(M)$, непрерывной и дифференцируемой в A, если она является внутренней точкой A и в некоторой окрестности этой точки выполняется условие: для $\forall\ M\in S_\delta(M_0)$ $(\rho(M, M_0)<\delta)$ полное относительное приращение $\Delta'f=\Delta f-df$ знакопостоянно.

Если $\Delta'f\geqslant 0$ $(\Delta f\geqslant df)$, точка M_0 называется точкой **выпуклости вниз**. Если $\Delta'f\leqslant 0$ $(\Delta f\leqslant df)$, точка M_0 называется точкой **выпуклости вверх**.

Если условие локальной выпуклости вверх или вниз выполняется во всех точках множества $A' \subset A$, то функция $f(M)$ называется **однообразно выпуклой** на множестве A.

Исходя из этих определений установим необходимые и достаточные признаки экстремальности и выпуклости функции $f(M)$ в области A. Ввиду сложности описания многомерных объектов, введем наиболее жесткие ограничения на характеристики функции. Предположим, что функция $y = f(M)$ не имеет точек разрыва и обладает дифференцируемостью в A до второго порядка.

При указанных ограничениях нетрудно установить необходимое условие существования локального экстремума в точке M_0, которое сводится к тому, что в указанной точке все частные производные функции $f(M)$ должны равняться нулю:

$$f'_{x_1}(M_0) = f'_{x_2}(M_0) = \ldots = f'_{x_n}(M_0) = 0. \tag{5.41}$$

Действительно, если принять противное, т.е. положить, что $\exists f'_{x_i}(M_0) \neq 0$, то полное приращение Δf в некоторой окрестности M_0

$$\Delta f = \mathrm{d}f(M_0) + o(\rho(M, M_0))$$

и $\mathrm{d}f(M_0) = \nabla f \cdot \Delta\bar{x}, \quad \nabla f \neq 0.$

Главный член разложения полного приращения является знакопеременным, так как линейно зависит от приращений Δx_i (Δx_i – координаты вектора $\Delta\bar{x}$). Поэтому функция $y = f(M)$ в точке M_0 не имеет экстремума, если хотя бы одна частная производная будет отлична от нуля.

Необходимое условие существования экстремума окончательно можно записать так: $\operatorname{grad} f = 0$.

Точки, удовлетворяющие условию (5.41), называют **критическими**.

При обосновании достаточного условия примем допущение, что функция $f(M)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в сфере $S_\delta(M_0)$. Тогда для того, чтобы точка M_0 являлась точкой экстремума функции $f(M)$, достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\operatorname{grad} f(M_0) = 0$; 2) для $\forall\ M \in S_\delta(M_0)$ $\mathrm{d}^2 f(M_0)$ знакопостоянен.

Докажем это утверждение. С учетом высказанных предположений запишем выражение для полного приращения функции по формуле Тейлора с остаточным членом, представленным малыми величинами третьего порядка:

$$\Delta f(M) = \frac{\mathrm{d}f(M_0)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(M_0)}{2!} + o(\rho^2(M, M_0)).$$

Так как $\nabla f(M_0) = 0$, первый член в правой части выражения обратится в нуль и формулу можно представить следующим образом:

$$\Delta f(M) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i^2}\Delta x_i^2 + \sum_{i>j} f''_{x_i x_j}\Delta x_i \Delta x_j + o(\rho^2(M, M_0)).$$

Если второй дифференциал в точке M_0 знакопостоянен, то полное приращение Δf в некоторой окрестности $S_\delta(M_0)$ также является знакопостоянным (влияние остаточного члена в этом случае будет пренебрежимо малым).

Достаточное условие существования экстремума свелось в конечном счете к требованию знакопостоянства $d^2 f(M_0)$ (положительной или отрицательной определенности матрицы квадратичной формы A (5.32) в критической точке M_0).

В случае если число переменных $n = 2$, критерий экстремальности сведется к простому требованию

$$(f''_{x_1x_2})^2 - f''_{x_1^2} f''_{x_2^2} < 0. \tag{5.42}$$

Действительно, если вынести множитель Δx_1^2 из главного члена разложения Δf и обозначить $\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \xi_1$, то

$$\frac{1}{2}d^2 f = \Delta x_1^2 \left(\frac{1}{2} f''_{x_1^2} + f''_{x_1x_2}\xi + \frac{1}{2} f''_{x_2^2}\xi^2 \right).$$

Первый множитель знакопостоянен, а второй, являясь квадратным трехчленом относительно ξ, обладает знакопостоянством в том случае, если дискриминант $(f''_{x_1x_2})^2 - f''_{x_1^2} f''_{x_2^2}$ отрицателен.

○ **Пример.** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; $z'_x = 2x - y + 9$; $z'_y = -x + 2y - 6$; $z''_{x^2} = 2$; $z''_{y^2} = 2$; $z''_{xy} = -1$.

Имеем систему, определяющую критическую точку:

$$\begin{cases} 2x - y = -9 \\ -x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x_0 = -4, \quad y_0 = 1.$$

Запишем достаточное условие

$(z''_{xy})^2 - z''_{x^2} z''_{y^2} = 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0.$

Следовательно, точка $M_0(-4, 1)$ является точкой экстремума.

Так как $d^2 f(M_0) \leqslant 0$, M_0 – точка локального максимума. ●

Запишем *достаточное условие существования локальной выпуклости* в точке M_0.

Для того чтобы точка M_0 являлась точкой локальной выпуклости, достаточно, чтобы в точке M_0 второй дифференциал был знакопостоянен.

Действительно, в этом случае можно воспользоваться представлением (5.40), предварительно перенеся член $df(M_0)$ в левую часть. Тогда получим

$$\Delta' f(M) = \Delta f - df = \frac{1}{2}d^2 f(M_0) + \frac{1}{6}d^3 f(M_\theta). \tag{5.43}$$

Здесь применимы те же рассуждения, которые проведены ранее. Таким образом, знакопостоянство полного относительного приращения функции $f(M)$ в некоторой δ-окрестности точки M_0 определяется знакопостоянством главного члена правой части (5.43), т. е. $d^2f(M_0)$.

Если $d^2f(M_0) \geqslant 0$, то функция имеет в точке M_0 локальную выпуклость вниз. Если $d^2f(M_0) \leqslant 0$, то функция имеет в точке M_0 локальную выпуклость вверх.

Достаточное условие существования локального экстремума включает в свой состав требования локальной выпуклости, дополняя его требованием $df(M_0) = 0$.

○ **Пример.** Определить области однородной выпуклости функции

$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (A = R^2/\{M\}|_{x<0})$:

$$z'_x = \frac{1 \cdot y}{2\sqrt{x}} - 1; \quad z'_y = \sqrt{x} - 2y + 6;$$

$$z''_{x^2} = -\frac{1}{4}\frac{y}{x\sqrt{x}}; \quad z''_{xy} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}; \quad z''_{y^2} = -2.$$

В случае двух переменных условие локальной выпуклости имеет вид (5.42):

$$(f''_{xy})^2 - f''_{x^2}f''_{y^2} < 0.$$

Подставив сюда f''_{xy}, f''_{x^2} и f''_{y^2}, получим

$$\frac{1}{4}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{y}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2y) < 0.$$

Отсюда $x > 0$, $y^2 > \frac{1}{4}x$.

Таким образом, функция $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ имеет выпуклость вверх в области $4y^2 > x$ (рис. 5.6).

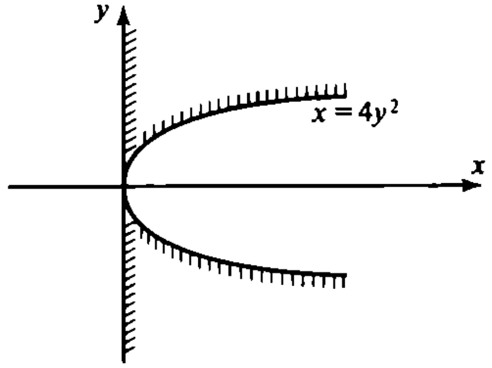


Рис. 5.6

Ориентация выпуклости определяется по знакам вторых частных производных:

$$f''_{x^2} = -\frac{1}{4}\frac{y}{x\sqrt{x}} < 0 \text{ и } f''_{y^2} = -2 < 0. \bullet$$

В заключение рассмотрим задачу об условном экстремуме функции $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с ограничениями вида $g_1(M) = 0$, $g_2(M) = 0$, ..., $g_l(M) = 0$, где f, g_1, g_2, ..., g_l – функции, определенные, непрерывные и непрерывно дифференцируемые в области $D \subset \mathbf{R}^n$.

Запишем необходимые условия экстремума. С этой целью введем вспомогательную функцию Лагранжа:

$$F(M, N) = f(M) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(M).$$

Функция F зависит от M и N: $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$.

В качестве необходимых условий существования экстремума примем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{l} \lambda_j \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2, ..., n \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., l. \end{cases} \tag{5.44}$$

Указанные решения образуют множество критических точек с переменными $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$; $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_l^*$.

В каждой указанной точке должно выполняться условие $d^2F \geqslant 0$ или $d^2F \leqslant 0$.

○ **Пример.** Найти условный экстремум $f(x, y) = xy$ при $x^2 + y^2 = 2$.

Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda g(x, y),$$

где $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$.

Необходимые условия имеют вид

$$F'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad F'_y = x + 2\lambda y = 0,$$

$$F'_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

Отсюда $y = -2\lambda x$ и $x(1 - 4\lambda^2) = 0$.

Значения $x = 0$ и $y = 0$ не являются решением задачи.

Остается $\lambda^2 = \dfrac{1}{4}$, т. е. $\lambda^* = \pm\dfrac{1}{2}$ и $x = \mp y$.

Подставляя это значение в функцию Лагранжа, получим $F(x, y, \lambda^*) = $
$= xy \pm \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2)$.

Ветвь со знаком «+» обеспечивает минимум, так как $F = \frac{1}{2}(x + y)^2 - 1$,

а ветвь со знаком «–» – максимум, так как $F = -\frac{1}{2}(x - y)^2 + 1$. ●

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Первообразная и ее связь с неопределенным интегралом. Свойства неопределенного интеграла

Рассмотрим две математические задачи. Прямой задачей, именуемой *дифференцированием* функции, будем называть отыскание производной $f'(x)$ для заданной функции $f(x)$. Обратная задача называется *интегрированием* функции и состоит в отыскании функции $F(x)$, производная которой равна заданной функции $f(x)$.

Первообразной для данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Обе указанные функции определены на множестве A.

Например, для функции $f(x) = \cos x$ функция $F(x) = \sin x$ является первообразной, так как $\sin' x = \cos x$. Однако очевидно, что $\sin x + C$, где C – постоянное слагаемое, также является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

❑ **Теорема 6.1.** Любые две первообразные для данной функции $f(x)$, определенной на множестве A, отличаются только постоянным слагаемым.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$, т. е. $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Тогда $[F_2(x) - F_1(x)]' = 0$. А это означает, что $F_2(x) - F_1(x) = C$ или $F_2(x) = F_1(x) + C$. Теорема доказана. ■

Из теоремы 6.1 следует, что все семейство первообразных для данной функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных, а C – произвольная постоянная.

Указанное семейство всех первообразных $F(x) + C$ для заданной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Здесь $f(x)\mathrm{d}x$ называется *подынтегральным выражением*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*.

Основные свойства неопределенного интеграла

1°. $(\int f(x)\mathrm{d}x)' = f(x)$, а $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, (6.1)

что следует из определения.

2°. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$, (6.2)

что подтверждается путем установления равенства производных от левой и правой части (6.2).

Свойства 1° и 2° означают, что интегрирование и дифференцирование – взаимно обратные операции.

3°. Если $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемые функции[1], то сумма функций $f(x) + g(x)$ также интегрируема и

$$\int(f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

Это свойство, так же как и свойство 2°, подтверждается сравнением производных от левой и правой части (6.3).

4°. Если $f(x)$ – интегрируемая функция, а K – постоянная величина, то $Kf(x)$ также интегрируемая функция и

$$\int Kf(x)\mathrm{d}x = K\int f(x)\mathrm{d}x, \tag{6.4}$$

что подтверждается путем сравнения производных от левой и правой части (6.4).

Из свойств 3° и 4° вытекает, что интегрирование – линейная операция, т. е. $\int(\sum\limits_{i=1}^{n} K_i f_i(x))\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} K_i \int f_i(x)\mathrm{d}x,$

где K_i – постоянные; $f_i(x)$ – интегрируемые функции.

5°. Если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ и $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция, то

$$\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\,\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C. \tag{6.5}$$

Это свойство также обосновывается путем сравнения производных от левой и правой части (6.5).

Последняя формула удобна для вычисления неопределенного интеграла от сложной функции, получаемой при замене переменных, о чем будет идти речь далее.

Основываясь на знании производных элементарных функций, выпишем **таблицу основных интегралов**:

I. *Степенная* функция $y = x^k$ $(k \in \mathbf{R})$:

$$\int x^k \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad \text{при } k \neq -1,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

II. *Показательная* функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$:

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Если $a = \mathrm{e}$, то

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

---

[1] Функция называется *интегрируемой* на множестве A, если она имеет первообразную на этом множестве.

III. *Тригонометрические* функции:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C, \tag{6.6}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{6.7}$$

IV. Простейшие *иррациональная* и *дробная* функции:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \tag{6.8}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C. \tag{6.9}$$

6.2. Методы вычисления неопределенного интеграла

Рассмотрим несколько методов вычисления неопределенного интеграла.

Метод разложения

Метод разложения опирается на формулы линейного разложения интегралов

$$\int \sum_{i=1}^{n} K_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n} K_i \int f_i(x) dx. \tag{6.10}$$

○ **Примеры.** 1. $\int (2x^2 + 1)^2 dx = \int (4x^4 + 4x^2 + 1) dx = 4\int x^4 dx + 4\int x^2 dx + \int dx = \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + C.$

2. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$ ●

Интегрирование методом замены переменной

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$. Введем новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, $dx = \varphi'(t)dt$. Подставим эти выражения в интеграл:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{6.11}$$

Формулу (6.11) будем называть *формулой замены переменной*. Указанный метод во многих случаях обеспечивает преобразование исходного интеграла к форме, заданной таблицей основных интегралов. Например,

1) $\int \frac{dx}{x-a}$. Примем $x - a = t$; $dx = dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-a| + C;$$

2) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$. Примем $x = at$; $dx = a\,dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Примем $x = at$; $dx = a\,dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Довольно часто замена переменной проводится в сочетании с методом разложения. Рассмотрим, например, $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$. Разложим подынтегральную функцию $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Присоединим полученные методом замены переменной интегралы к таблице основных интегралов.

V. $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

VI. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Кроме того, к таблице присоединим без вывода интеграл, получаемый путем замены переменной:

IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$ при $k \neq 0$.

Метод интегрирования по частям

Пусть даны произвольные дифференцируемые функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, тогда $d(uv) = u dv + v du$.

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int d(uv) = \int u\, dv + \int v\, du,$$

отсюда

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{6.12}$$

Формула (6.12) называется *формулой интегрирования по частям*. Данная схема интегрирования применяется при вычислении интегралов от функций следующего вида: $P_n(x)e^{ax}$, $P_n(x) \sin ax$, $P_n(x) \cos ax$, $P_n(x) \ln x$, $P_n(x) \arcsin x$, $P_n(x) \arccos x$ и др. Здесь $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

○ **Примеры.** 1. $\int xe^x dx$.

Полагаем $x = u$ и $e^x dx = dv$. Получим $du = dx$, $v = e^x$. Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

2. $\int x \sin x\, dx$.

Заменим $x = u$, $\sin x\, dx = dv$, тогда $du = dx$, $v = -\cos x$ и

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

3. $\int x^2 \ln x\, dx$.

Полагаем $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$. Получим $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$ и

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \; ●$$

6.3. Интегрирование рациональных (дробных), тригонометрических и иррациональных выражений

Интегрирование рациональных дробей

Выражение $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены m-й и n-й степени, называется **рациональной дробью**. Рациональная дробь называется **правильной**, если $m < n$, и **неправильной**, если $m \geqslant n$.

Если дробь неправильная, следует разделить числитель на знаменатель с выделением частного и остатка. Указанное деление проводят по схеме Горнера.

При интегрировании правильной дроби используется ее разложение на элементарные дроби, для чего необходимо предварительно разложить на элементарные множители многочлен $Q_n(x)$.

Приведем без доказательства *формулу разложения правильной дроби.*

Пусть знаменатель правильной дроби разлагается на множители $(x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta$, где a – действительный корень $Q_n(x)$ кратности α, x^2+px+q – квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, при этом множители со степенями $\beta+1$, $\beta+2$, ... отсутствуют. Тогда правильная дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}, \tag{6.13}$$

где коэффициенты уточняются в процессе разложения правильной дроби.

Очевидно, что при вычислении интеграла от правильной дроби разложение будет включать следующие выражения:

1) $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C;$

2) $\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}+C$, если $\alpha\neq 1$;

3) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\int\frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - (p/2)^2}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - (p/2)^2}} + C.$$

Вычислять интегралы $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\beta}}dx$ не будем, если $\beta \geqslant 2$.

❍ **Примеры.** 1. $I = \int \frac{x + 2}{x^2 + 5x - 6}dx.$

Имеем $\frac{x+2}{x^2 + 5x - 6} = \frac{x+2}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} =$

$= \frac{A(x+6) + B(x-1)}{(x-1)(x+6)}.$

Неопределенные коэффициенты можно найти, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x + 2 = A(x + 6) + B(x - 1) = (A + B)x + 6A - B.$

Откуда

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 6A - B = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $A = \frac{3}{7}$, $B = \frac{4}{7}$, $I = \frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6} =$

$= \frac{3}{7}\ln|x-1| + \frac{4}{7}\ln|x+6| + C.$

2. $\int \frac{7x^4 - 19x^3 + 8x^2 + 22x - 15}{(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)}dx.$

Имеем $\frac{7x^4 - 19x^3 + 8x^2 + 22x - 15}{(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} +$

$+ \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$

Приведя правую часть к общему знаменателю и отбросив знаменатель, получим $7x^4 - 19x^3 + 8x^2 + 22x - 15 = A(x-2)^2(x^2 + x + 1) + B_1(x-1)(x-2)(x^2 + x + 1) + B_2(x-1)(x^2 + x + 1) + Cx(x-1)(x-2)^2 + D(x-1)(x-2)^2.$

Раскрыв скобки, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, в результате решения системы получим $A = 1$, $B_1 = 2$, $B_2 = 3$, $C = 4$, $D = 5$.

Вычислим только интеграл $\int\frac{4x+5}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = 2\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x +$

$$+3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = 2\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + 3\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= 2\ln\left(x^2+x+1\right) + 3\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2\ln\left(x^2+x+1\right) +$$

$$+3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = 2\ln\left(x^2+x+1\right) + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. $\int\frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1}\mathrm{d}x.$

После деления многочлена на многочлен получим

$$\int\left(x^2+x+\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{\mathrm{d}(2x^2+3x+1)}{2x^2+3x+1} =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln\left|2x^2+3x+1\right|+C. \bullet$$

Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы от функций $f(x) = \operatorname{tg}^m x$, $g(x) = \sin^m x\cos^n x$, $\varphi(x) = \sin mx\cos nx$, $\psi(x) = R(\sin x)\cos x$ или $R(\cos x)\sin x$, где R – рациональная дробь (функция).

Интеграл $\int\operatorname{tg}^m x\mathrm{d}x$ вычисляется с помощью замены $\operatorname{tg} x = t$.

○ **Пример.** Найти $\int\operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}x$. Заменим $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда $x = \operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Получим $\int\operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}x = \int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t =$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \bullet$$

Интеграл вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, если $m = 2k + 1$ (или $n = 2k + 1$) – нечетное положительное число, вычисляется с помощью замены $\cos x = t$ ($\sin x = t$).

○ **Пример.** $\int \sin^{10}x \cos^3 x\, dx$. Положим $\sin x = t$, тогда

$$\int \sin^{10}x \cos^3 x\, dx = \int \sin^{10}x \cos^2 x \cos x\, dx = \int t^{10}(1 - t^2)dt =$$

$$= \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{(\sin x)^{11}}{11} - \frac{(\sin x)^{13}}{13} + C. \bullet$$

В случае если m и n – четные неотрицательные числа, производится понижение порядка с помощью следующих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x);$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{6.14}$$

○ **Пример.** $\int \cos^2 3x \sin^4 3x\, dx = \int \frac{\sin^2 6x}{4}\frac{1 - \cos 6x}{2}dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x)dx = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1 - \cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C. \bullet$$

Интегралы $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$ вычисляются с применением следующих формул:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin (m + n)x + \sin (m - n)x];$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos (m - n)x - \cos (m + n)x];$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos (m - n)x + \cos (m + n)x].$$

○ **Пример.** $\int \sin 9x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 10x)dx = \frac{1}{16}\sin 8x -$

$- \frac{1}{20}\sin 10x + C. \bullet$

Интеграл вида $\int R(\sin x) \cos x\, dx$, где R – рациональная функция, находится с помощью подстановки $\sin x = t$.

○ **Пример.** $\int \frac{\sin^4 x + \sin^2 x}{\sin x + 1} \cos x\, dx$. Заменим $\sin x = t$. Тогда

$$\int \frac{t^4 + t^2}{t+1} dt = \int \left(t^3 - t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1} \right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^3 x}{3} + \sin^2 x - 2\sin x + 2\ln(\sin x + 1) + C. \bullet$$

Аналогичная замена может быть применена при интегрировании тригонометрических выражений с иррациональностью.

○ **Пример.** $\int \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx$. Заменим $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$ и $\int \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx = \int \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C$. ●

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интеграл вида

$$\int R\left[x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}} \right] dx,$$

где R – рациональная функция и p_1, q_1, p_2, q_2 – целые числа, находится с помощью подстановки $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^n$, где n – общее наименьшее кратное q_1, q_2.

○ **Пример.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

($a = 2$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 1$, $p_1 = p_2 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 4$).

Сделаем подстановку $2x - 1 = t^4$. Тогда $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} =$

$$= \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2\int \left(t + 1 + \frac{t}{t^2 - t} \right) dt = t^2 + 2t + 2\ln|t - 1| = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} +$$

$$+ 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C. \bullet$$

Интеграл $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\mathrm{d}x$, где $R(x, y)$ – рациональная функция, находится подстановкой $x = a \sin t$; интеграл $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\mathrm{d}x$ находится подстановкой $x = a \operatorname{tg} t$; интеграл $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\mathrm{d}x$ находится подстановкой $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

○ **Примеры.** 1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Положим $x = a \sin t$. Тогда $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int a \cos t \; a \cos t \,\mathrm{d}t =$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{a}) + C.$$

2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

Сделаем замену $x = 2\operatorname{tg} t$. Получим $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} =$

$$= \int \frac{2}{\cos^2 t}\,\frac{\cos^2 t}{4}\,\frac{\cos t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

3. $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

Сделаем замену $x = \dfrac{1}{\sin t}$. Тогда

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t = -\int \sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \cos t + C = \sqrt{1 - \sin^2 t} + C = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + C. \; ●$$

7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

7.1. Интегральные суммы и их пределы

Для многих практических целей большое значение имеет вычисление площадей фигур, объемов тел общей конфигурации и т. д. Эти задачи тесно связаны с вычислением определенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – произвольное разбиение этого отрезка на n элементарных промежутков. Предположим, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выбрана точка ξ_i. Тогда сумма

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Если $f(x) \geqslant 0$, то интегральная сумма представляет собой площадь затененной ступенчатой фигуры (рис. 7.1).

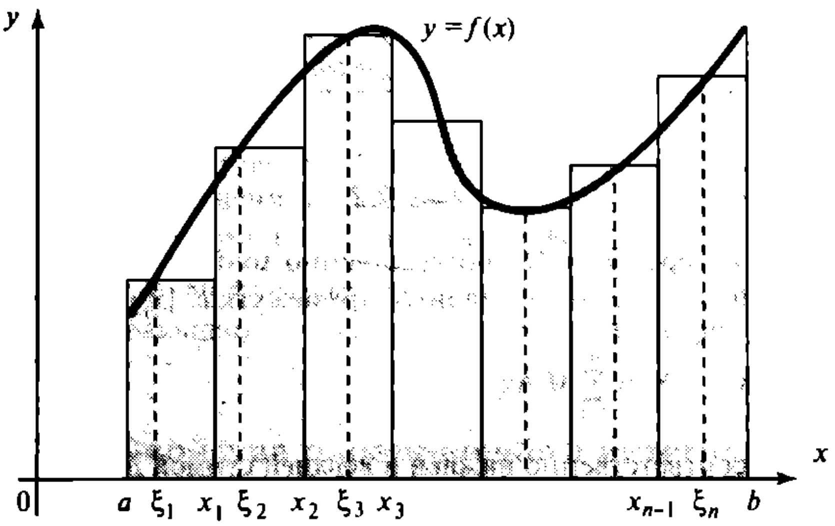


Рис. 7.1

Обозначим $\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i = \delta_n$.

Конечный предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и $\delta_n \to 0$ называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n \to 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad (7.1)$$

где $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, ***a*** и ***b*** – ***нижним*** и ***верхним пределом интегрирования***.

Предел (7.1) не должен зависеть от способа разбиения промежутка $[a, b]$ и выбора точек ξ_i в элементарных промежутках.

Если определенный интеграл существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

В случае $f(x) \geqslant 0$ определенный интеграл задает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, вертикальными отрезками $x = a$, $x = b$ и именуемой криволинейной трапецией (рис. 7.2).

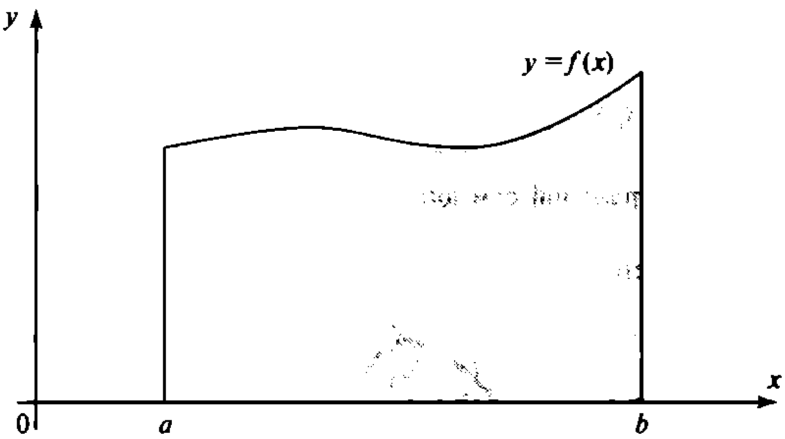


Рис. 7.2

Обозначим через m_i и M_i соответственно точные нижние и верхние грани функции $f(x)$ в элементарных промежутках $[x_{i-1}, x_i]$. Величины

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{7.2}$$

называются соответственно **нижней и верхней суммой Дарбу**. Очевидно, что

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n.$$

Известно, что для любой ограниченной функции нижние и верхние суммы Дарбу имеют конечные пределы при $n \to \infty$ и $\delta_n \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n \to 0}} s_n = \underline{I}, \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n \to 0}} S_n = \overline{I} \tag{7.3}$$

и при этом $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Без доказательства примем следующее утверждение. Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема в промежутке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \overline{I}$, т. е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}}(S_n - s_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0, \text{ где } \omega_i = M_i - m_i \geqslant 0.$$

Введем следующее определение. Функция $y = f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве A, если для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ (не зависящее от x, x'), такое, что при всех x, $x' \in A$ и $|x - x'| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Известно, что функция, определенная и непрерывная в замкнутом промежутке $[a, b]$, является равномерно непрерывной в этом промежутке (теорема Кантора).

Для непрерывной функции $y = f(x)$ $\exists\, \eta_i$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, такие, что $f(\eta_i) = M_i$, $f(\xi_i) = m_i$. Это следует из теоремы Вейерштрасса, так как в каждом элементарном промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ непрерывная функция достигает значений точных верхней и нижней граней.

Тогда для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$, такое, что при $\Delta x_i < \delta \Rightarrow f(\eta_i) - f(\xi_i) < \varepsilon$ для всех i. Тогда если $\Delta x_i < \delta$, то $\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\varepsilon\Delta x_i = \varepsilon(b-a)$.

Следовательно, для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции выполняется условие интегрируемости.

Дополнительно сформулируем две теоремы, определяющие класс интегрируемых функций.

❑ **Теорема 7.1.** Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ всюду за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке. ■

❑ **Теорема 7.2.** Если функция определена и является монотонно возрастающей (убывающей) на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке. ■

7.2. Свойства определенного интеграла

Сначала рассмотрим с в о й с т в а определенного интеграла, выраженные равенствами.

1°. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $Af(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$\sum_{i=1}^{n}(Af(\xi_i))\Delta x_i = A\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \to A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2°. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то их сумма также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x. \tag{7.5}$$

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{n}(f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Свойства 1° и 2° означают, что определенный интеграл обладает свойствами линейного оператора, т. е. если $f(x) = \sum_{j=1}^{k} A_j f_j(x)$, где $f_j(x)$ – интегрируемые функции в промежутке $[a, b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{k} A_j f_j(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{k} A_j \int_a^b f_j(x)\mathrm{d}x. \tag{7.6}$$

3°. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю (по определению):

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{7.7}$$

4°. При перемене мест верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.8}$$

Доказательство. Если для промежутков интегрирования $[a, b]$ и $[b, a]$ (где $a < b$) взять одни и те же точки разбиения и общие точки ξ_i, то соответствующие этим промежуткам интегральные суммы будут различаться ориентацией и, следовательно, знаком. Отсюда, переходя к пределам, получаем выражение (7.8).

5°. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в наибольшем из промежутков $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда она интегрируема в двух других и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{7.9}$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b, c.

Доказательство. Положим сначала, что $a < c < b$ и функция интегрируема в промежутке $[a, b]$.

Рассмотрим разбиение промежутка $[a, b]$ на части, причем точку c будем считать одной из точек деления. Тогда

$$\sum_{x_i\in[a,b]}\omega_i\Delta x_i = \sum_{x_i\in[a,c]}\omega_i\Delta x_i + \sum_{x_i\in[c,b]}\omega_i\Delta x_i,$$

где ω_i – колебание функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, и (так как все слагаемые положительны) из стремления к нулю суммы в левой части выражения следует, что и суммы в правой части также стремятся к нулю. Таким образом установлена интегрируемость функции $f(x)$ в промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Теперь очевидно, что

$$\sum_{x_i\in[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{x_i\in[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{x_i\in[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, $\delta_n \to 0$, получаем требуемое равенство (7.9).

При другом расположении точек a, b, c также получим соотношение (7.9).

Пусть, например, $b < a < c$ и функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[b, c]$. В этом случае

$$\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x,$$

откуда, перенеся первый и второй интегралы из одной части в другую и переставив пределы (на основании свойства 4°), придем опять к прежнему соотношению (7.9).

Теперь рассмотрим свойства определенного интеграла, выраженные неравенствами.

6°. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{7.10}$$

В этом случае $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0$. Тогда $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta_n\to 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$

7°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $a < b$ и $f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.11}$$

Доказательство. Так как $f(x) - g(x) \geqslant 0$, то по свойству 6° $\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \geqslant 0$ и по свойствам 1°, 2°

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0, \text{ или } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

8°. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $a < b$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{7.12}$$

Доказательство. Обозначим

$$M_i^* = \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f(x)|, \quad m_i^* = \inf_{[x_{i-1},x_i]} |f(x)|,$$

$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Покажем, что при одном и том же разбиении промежутка $[a, b]$

$$\omega_i^{(|f|)} \leqslant \omega_i^{(f)}, \tag{7.13}$$

где $\omega_i^{(|f|)} = M_i^* - m_i^*$, $\omega_i^{(f)} = M_i - m_i$.

Действительно, если M_i и m_i одного знака, то $\omega_i^{(|f|)} = \omega_i^{(f)}$. Если M_i и m_i разных знаков, то $\omega_i^{(f)} = M_i + |m_i|$, а $\omega_i^{(|f|)} \leqslant \max\{M_i, |m_i|\}$. Отсюда следует неравенство (7.13).

Из интегрируемости $f(x)$ в $[a, b]$ вытекает, что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{(f)}\Delta x_i \to 0.$$

Поэтому из (7.13) следует, что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{(|f|)}\Delta x_i \to 0,$$

т. е. функция $|f(x)|$ интегрируема в $[a, b]$.

Далее составим $\sigma_n^{(|f|)} = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$ и $\sigma_n^{(f)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$. Очевидно, что

$$\left|\sigma_n^{(f)}\right| = \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\,\Delta x_i = \sigma_n^{(|f|)}.$$

Переходя к пределу, получаем неравенство (7.12), что и требовалось доказать.

9°. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и для $\forall\, x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M. \tag{7.14}$$

Доказательство. Сначала отметим, что $m = \text{const}$ и $M = \text{const}$ – интегрируемые функции и $\int_a^b m\,\mathrm{d}x = m(b-a)$, $\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$.

Тогда из свойства 7° вытекает

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

Разделим все члены последнего неравенства на $b-a$:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \text{ или } \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in [m, M].$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \eta\,(b-a), \text{ где } \eta \in [m, M]. \tag{7.15}$$

Равенство (7.15) справедливо как при $a \geqslant b$, так и при $a \leqslant b$ и называется **теоремой о среднем**.

10°. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists\,\xi \in [a, b]$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{7.16}$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция достигает минимального и максимального значений на отрезке $[a, b]$. Тогда согласно свойству 9°

$$m = \min_{[a,b]} f(x) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \max_{[a,b]} f(x) = M.$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a), \text{ где } \xi \in [a, b].$$

7.3. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Возьмем точки $x \in [a, b]$ и составим $[a, x] \subset [a, b]$. Функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, x]$, так как интегрируема в $[a, b]$. Обозначим

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

и будем называть его **интегралом с переменным верхним пределом**.

Отметим несколько свойств $F(x)$.

1°. Если функция $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$, то $F(x)$ непрерывна при $\forall\, x \in [a, b]$.

Доказательство. Составим ΔF:

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t -$$

$$- \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.17}$$

По теореме о среднем (см. (7.15))

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \eta\,(x + \Delta x - x) = \eta\Delta x, \tag{7.18}$$

где $\eta \in [m, M]$, $m = \inf\limits_{[x, x+\Delta x]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[x, x+\Delta x]} f(x)$. Вследствие того, что $\Delta F = \eta\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$, функция $F(x)$ непрерывна в точке x.

2°. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ имеет производную в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{7.19}$$

Доказательство. Используем выражение ΔF (см. (7.18)) для промежутка $[x_0, x_0 + \Delta x]$, обе части которого разделим на Δx:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \eta,$$

где $\eta \in [m, M]$, $m = \inf\limits_{[x_0, x_0+\Delta x]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[x_0, x_0+\Delta x]} f(x)$.

Так как $f(x)$ непрерывна, величина η имеет предел $f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$ $(x \to x_0)$.

Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

Замечание. Из свойства 2° следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

3° (формула Ньютона–Лейбница). Если функция $F(x)$ – какая-нибудь первообразная от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7.20}$$

Доказательство. В силу того, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она имеет первообразную $F(x)$ во всех точках промежутка. Так как две первообразные отличаются на постоянное слагаемое, то существует C^*, такое, что

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^*. \tag{7.21}$$

Равенство верно при $\forall\, x \in [a, b]$. Подставим в (7.21) два значения: $x = a$ и $x = b$. При $x = a$ получим

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{ и } F(a) + C^* = 0, \text{ т. е. } C^* = -F(a),$$

при $x = b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C^* = F(b) - F(a),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Введем обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$.

Тогда формулу Ньютона–Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b. \tag{7.22}$$

○ **Примеры.** 1. $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

2. $\displaystyle\int_0^2 e^x\,dx = e^x\Big|_0^2 = e^2 - 1$.

3. $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$ ●

Особенности вычисления определенного интеграла

Замена переменных

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Введем новую переменную $x = \varphi(t)$.

Если $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, значения $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a, b]$, когда t изменяется в $[\alpha, \beta]$. Если $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx =$

$= \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

В отличие от неопределенного интеграла замена переменных в определенном интеграле предполагает изменение не только подынтегрального выражения, но и пределов интегрирования.

○ **Пример.** $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$

Сделаем замену $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$. Если $x = r$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cos t\,dt =$

$= r^2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = r^2\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}.$ ●

Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в $[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

Доказательство:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = uv|_a^b = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b u'v\,dx = \int_a^b u(x)dv(x) + \int_a^b v(x)du(x).$$

Отсюда легко получается нужное равенство.

○ **Пример.** $\int_0^\pi x \sin x\,dx$. Обозначим $x = u$, $\sin x\,dx = dv$. Отсюда получим $du = dx$, $v = -\cos x$,

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + 0 + \sin x|_0^\pi = \pi. \bullet$$

7.4. Приложение определенного интеграла

Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции. Кроме того, $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ при $\forall\, x \in [a, b]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{7.23}$$

Доказательство. Если функции $f_2 \geqslant 0$, $f_1 \geqslant 0$, то формула (7.23) является очевидным следствием того, что площадь фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций (рис. 7.3):

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

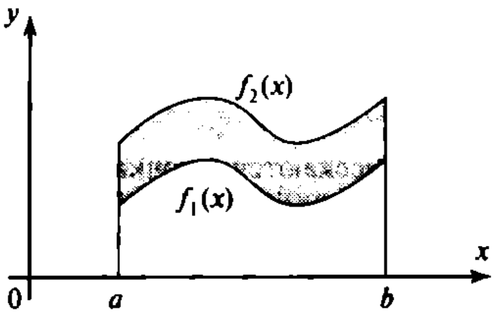


Рис. 7.3

Если графики $f_2(x)$ и $f_1(x)$ полностью (или частично) расположены ниже оси Ox (рис. 7.4, *а*), то $\exists$ константа C, такая, что $y = f_2(x) + C \geqslant 0$ и $y = f_1(x) + C \geqslant 0$.

Сделаем замену $\tilde{y} = y + C$ (рис. 7.4, *б*). Очевидно, что

$$S = \int_a^b (f_2(x) + C)\mathrm{d}x - \int_a^b (f_1(x) + C)\mathrm{d}x = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x.$$

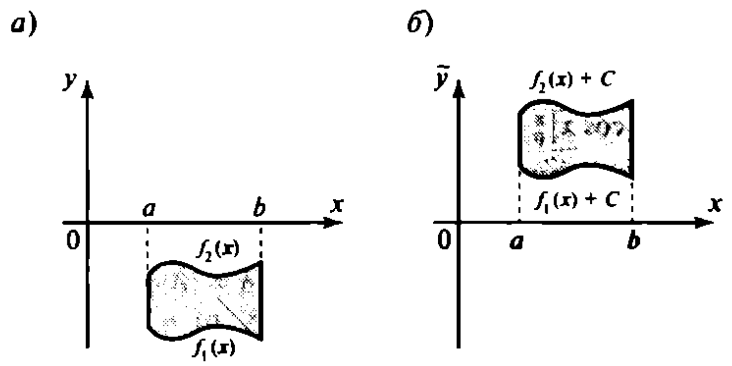


Рис. 7.4

❍ **Пример.** Вычислить площадь, ограниченную графиками кривых $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$ на отрезке [0, 1] (рис. 7.5).

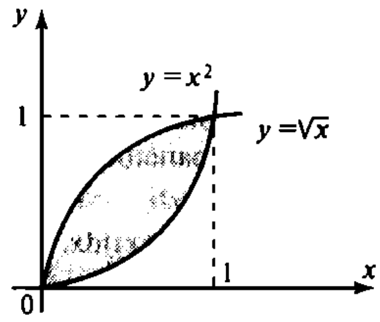


Рис. 7.5

Как видим, графики пересекаются в точках (0, 0) и (1, 1), поэтому

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \; \bullet$$

Вычисление объема тел вращения

Рассмотрим тело, которое образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной $y = f(x) \geqslant 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 7.6).

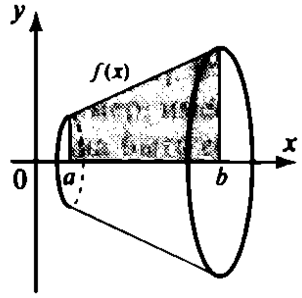


Рис. 7.6

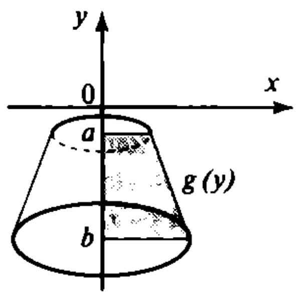


Рис. 7.7

Объем этого тела

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{7.24}$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная $x = g(y) \geqslant 0$, $y = a$, $y = b$, $x = 0$ (рис. 7.7), вращается вокруг оси Oy, то объем полученного тела вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y. \tag{7.25}$$

Докажем сформулированные утверждения. Заметим, что если $y = f(x)$ непрерывна, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то $V_n = \pi\sum\limits_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i$ будет представлять приближенно объем тела вращения. Это выражение можно рассматривать как интегральную сумму. Переходя к пределу, получаем

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} V_n = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Примечание. В случае вращения фигур вокруг оси Oy аналогичным образом доказывается формула (7.25).

○ **Примеры.** 1. Найти объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$ (рис. 7.8).

Решение:

$$V = \pi\int_0^1 (9x - 9x^2)\,dx = 9\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 9\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

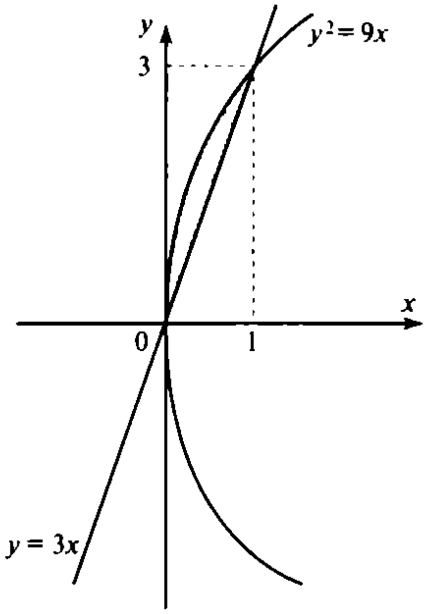


Рис. 7.8

2. Определить объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ (рис. 7.9).

Решение:

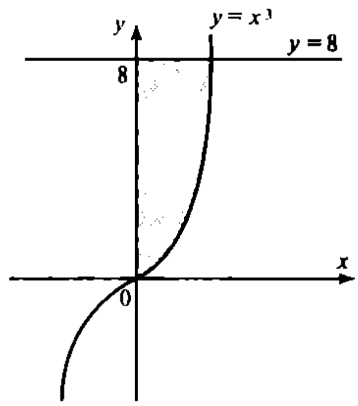


Рис. 7.9

$$V = \pi\int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\,dy = \frac{\pi\cdot 3y^{\frac{5}{3}}}{5}\Bigg|_0^8 = \frac{3}{5}\pi\cdot 32 = \frac{96}{5}\pi.\ \bullet$$

8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8.1. Интегрирование неограниченных функций

В главе 7 было показано, что класс интегрируемых функций включает в себя непрерывные функции или функции, имеющие точки разрыва первого рода. Очевидно, что все указанные функции являются ограниченными в $[a, b]$. В тех случаях, когда функция не является ограниченной (например, имеет точку разрыва второго рода), задача интегрирования должна быть сформулирована иначе.

Будем считать, что $f(x)$ определена и непрерывна в $[a, b-\varepsilon] \subset [a, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$ и стремится к бесконечности при $x \to b$. Составим интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = I(\varepsilon). \tag{8.1}$$

Очевидно, что в этом случае интеграл зависит от значений ε. Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и назовем этот предел **несобственным интегралом первого рода**:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

Если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)$ существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**. Если этот предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется **расходящимся**.

○ **Пример.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится. ●

Если функция $f(x)$ является неограниченной в точке a и непрерывной в промежутке $[a+\varepsilon, b] \subset [a, b]$, то задача о вычислении несобственного интеграла первого рода формулируется так:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x = I(\varepsilon)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.3}$$

Сходимость или расходимость интеграла (8.3) определяется так же, как и интеграла (8.2).

Наконец, если $f(x)$ неограниченна в точке $c \in (a, b)$, то несобственный интеграл первого рода

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (8.4)$$

При этом интеграл вида (8.4) сходится тогда и только тогда, когда оба предела $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ существуют и конечны. Расходимость интеграла (8.4) имеет место, когда хотя бы один из этих пределов не существует или бесконечен.

❍ **Примеры.**

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = +\infty.$

Интеграл расходится.

2. При $\alpha \neq 1$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Bigg|_\varepsilon^1 =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

Из примеров 1 и 2 следует, что $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2-1} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

Интеграл расходится. ●

8.2. Интегрирование по бесконечному промежутку

Предположим, что $f(x)$ непрерывна в любом конечном промежутке $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Тогда существует определенный интеграл $\Phi(b) =$

$= \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. В данном случае величина b задает верхний переменный предел интегрирования.

Устремим b к бесконечности и рассмотрим предел

$$\lim_{b\to+\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{8.5}$$

который назовем **несобственным интегралом второго рода**. Если этот предел существует и конечен, то интеграл называется **сходящимся**. Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется **расходящимся**.

○ **Примеры.** 1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

Интеграл сходится.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \sin x\big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$$

Последний предел не существует, поэтому интеграл расходится.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \ln x\,\mathrm{d}\ln x = \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln^2 b = +\infty.$$

Так как предел равен бесконечности, интеграл расходится.

4. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

Примем $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\big|_1^b =$

$= \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$

Интеграл расходится.

Пусть теперь $\alpha \neq 1$. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left. \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right|_1^b =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \right).$$

Ясно, что при $\alpha > 1$ предел существует и конечен, т. е. интеграл сходится. При $\alpha < 1$ получим бесконечный предел, т. е. интеграл расходится. ●

Следует отметить важное свойство несобственных интегралов, отличающее их от обычных определенных интегралов.

Известно, что для определенного интеграла справедливо утверждение: если существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то существует и интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. В случае несобственных интегралов получаем следующее утверждение: из сходимости несобственного интеграла от $|f(x)|$ следует сходимость несобственного интеграла от $f(x)$. Примем это утверждение без доказательства.

Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то говорят, что **интеграл** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **сходится абсолютно**. (Аналогично абсолютная сходимость определяется для несобственного интеграла первого рода.)

Следует заметить, что сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не влечет сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Такую сходимость будем называть **условной**.

8.3. Несобственные интегралы от положительных функций. Признаки сравнения

При вычислении несобственных интегралов значительное место занимает исследование их сходимости. Указанную задачу в ряде случаев можно решить, не вычисляя интеграл. Для исследования сходимости применяются сравнительные признаки, основанные на сопоставлении заданного интеграла с интегралом от некоторой эталонной функции.

Примем без доказательства следующее утверждение (признак сравнения).

❑ **Теорема 8.1.** Если $\varphi(x), f(x)$ – неотрицательные функции и $\varphi(x) \leqslant f(x)$ для $\forall\, x \in [a, +\infty)$, то:

1) из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$;

2) из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. ■

○ **Примеры.** 1. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Очевидно, что для $\forall\, x \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$e^{-x^2} \leqslant e^{-x}. \tag{8.6}$$

Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = e^{-1}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится.

В соответствии с признаком сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ также сходится.

2. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Так как $\sqrt{x} \geqslant 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Последний интеграл расходится (см. пример 4 в параграфе 8.2). По признаку сравнения данный интеграл также расходится.

3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

Обозначим $\frac{\sin x}{1+x^2} = f(x)$. Тогда

$$|f(x)|=\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant \frac{1}{x^2}=g(x),$$

т. е. $|f|\leqslant g(x)$. Так как $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ сходится (см. пример 4 в параграфе 8.2), то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ сходится абсолютно. ●

На практике удобно пользоваться также другим признаком сравнения.

❑ **Теорема 8.2.** Если $\varphi(x)$, $f(x)$ – неотрицательные функции и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A\neq 0$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ сходятся или расходятся одновременно. ■

❍ **Пример.** Несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}$ расходится, так как

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=1\neq 0$ и $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$ расходится. ●

9. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ИСЧИСЛЕНИЕ

В главе 7 было дано понятие определенного интеграла от ограниченной функции $f(x)$, заданной в промежутке $[a, b]$. Напомним, что указанный интеграл существует для трех типов функций: непрерывных, кусочно-непрерывных (имеющих конечное число точек разрыва первого рода) и монотонных. В настоящей главе сформулируем задачу интегрирования функции n переменных, заданной в ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^n$ с измеримым объемом V.

9.1. Постановка задачи интегрирования функции многих переменных

Пусть функция $y = f(M)$, где $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, определена и ограничена в замкнутой области $D \subset \mathbf{R}^n$. Разобьем эту область на N элементарных частей: $D_1, D_2, ..., D_n$, таких, что $\bigcup_{i=1}^{N} D_i = D$ и для $\forall\ i, j\,(i \neq j)$ $D_i \cap D_j = L_{ij}$, где L_{ij} – множество, размерность которого не превышает $n - 1$. В частности, если $n = 2$, то пересечение D_i и D_j будет одномерным множеством (кривой линией), если $n = 3$, то пересечение D_i и D_j будет иметь размерность не выше 2 (кривая поверхность).

В каждой элементарной части возьмем точку M_i и составим так называемую **интегральную сумму**:

$$G_N = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\Delta V_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = V, \tag{9.1}$$

где ΔV_i – «объемная» мера области D_i; V – «объемная» мера области D.

Для того чтобы вычислить интегральную сумму, нужно, чтобы элементарные части D_i допускали исчисление «объемной» меры в достаточно простой и редуктируемой (обеспечивающей понижение порядка) форме.

Так, например, для функции двух переменных разбиение области D, заданной на плоскости Oxy, можно выполнить с помощью элементарных прямоугольников (рис. 9.1, *а*), а также фигур с криволинейной границей (рис. 9.1, *б*).

а) *б*)

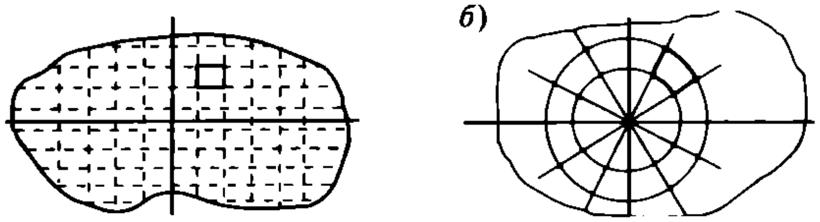


Рис. 9.1

Назовем **n-кратным интегралом** функции $f(M)$ **по области** D предел интегральной суммы σ_N при $N \to \infty$ и $\delta_N \to 0$. Здесь δ_N – наибольшая протяженность D_i для данного разбиения.

Этот предел не должен зависеть от способов разбиения D на части и от выбора точек M_i в каждой из них. Указанный интеграл обозначим I и представим так:

$$I = \int\limits_D f(M)\mathrm{d}V = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta_N \to 0}} \sigma_N. \tag{9.2}$$

По форме этот интеграл сходен с определенным интегралом $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, который также является пределом интегральной суммы:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta_N \to 0}} \sigma_N,$$

где $\sigma_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $x_0 = a$, $x_N = b$.

Очевидно, что и в n-кратном интеграле, как и в случае определенного интеграла, интегральные суммы ограничены снизу и сверху значениями сумм Дарбу s_N и S_N:

$$s_N = \sum_{i=1}^{N} k_i \Delta V_i \leqslant \sigma_N \leqslant \sum_{i=1}^{N} K_i \Delta V_i = S_N,$$

где $k_i = \inf\limits_{M \in D_i} f(M)$, $K_i = \sup\limits_{M \in D_i} f(M)$.

Свойствами одномерных сумм Дарбу обладают и n-мерные суммы. При этом для любой ограниченной функции $f(M)$

$$\exists \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta_N \to 0}} s_N = I^* \text{ и } \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta_N \to 0}} S_N = I^{**}, \quad I^{**} \geqslant I^*.$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции: $I^* = I^{**}$, что эквивалентно выражению

$$S_N - s_N = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} (K_i - k_i)\Delta V_i \to 0 \text{ при } N \to \infty \ (\delta_N \to 0). \tag{9.3}$$

Здесь $\omega_i = K_i - k_i$ и называется *колебанием* функции в элементарной области D_i ($\omega_i \geqslant 0$ при $\forall i$).

В результате можно установить, что к числу интегрируемых функций будут относиться функции, непрерывные в замкнутой области D.

Обоснование базируется на свойстве равномерной непрерывности функции, которое вытекает из теоремы Кантора [7].

По условию равномерная непрерывность означает, что для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ δ-окрестность точки M, такая, что $\rho(M', M) < \delta \Rightarrow |f(M') - f(M)| < \varepsilon$. При этом величина δ не зависит от расположения точки M в области D.

Из равномерной непрерывности функции $f(M)$, заданной в ограниченной замкнутой области, непосредственно следует, что критерий интегрируемости (9.3) выполняется. Действительно, для замкнутой области колебание непрерывной функции

$$\omega_i = \max_{D_i} f(M) - \min_{D_i} f(M) = f(M_i^*) - f(M_i^{**}),$$

где M_i^* и M_i^{**} — точки D_i, в которых достигается соответственно максимум и минимум.

Если принять $\delta_N < \delta$ (δ соответствует ранее выбранному $\varepsilon > 0$), то

$$\omega_i = f(M_i^*) - f(M_i^{**}) = |f(M_i^*) - f(M_i^{**})| < \varepsilon,$$

так как по условию равномерной непрерывности $|f(M') - f(M)| < \varepsilon$ для любых M' и M, удовлетворяющих неравенству $\rho(M', M) < \delta$.

Точки M_i^* и M_i^{**} принадлежат области D_i, поэтому расстояние между ними не превосходит δ_N и по условию

$$\rho(M_i^*, M_i^{**}) \leqslant \delta_N < \delta.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta V_i < \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \Delta V_i = \varepsilon V.$$

При $N \to \infty$ ($\delta_N \to 0$) величина $\varepsilon V \to 0$ и, следовательно,

$$S_N - s_N = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta V_i \to 0.$$

9.2. Свойства n-кратного интеграла

Сначала рассмотрим свойства, определяемые равенствами.

1°. Интеграл по области, имеющей нулевую «объемную» меру в $\mathbf{R}^n$ ($V \equiv 0$), равен нулю. (При этом к областям с нулевой «объемной» мерой в $\mathbf{R}^n$ относятся разнообразные множества, которые заданы в пространстве $\mathbf{R}^m$ ($m < n$).)

Свойство 1° следует из определения n-кратного интеграла, так как интегральная сумма для указанной области будет бесконечно малой величиной.

2°. Если две функции $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы в D, то сумма этих функций также интегрируема в D и

$$\int_D (f+g)\mathrm{d}V = \int_D f\mathrm{d}V + \int_D g\mathrm{d}V. \tag{9.4}$$

Свойство 2° также непосредственно вытекает из определения, так как $\sigma_N^h = \sigma_N^f + \sigma_N^g$ $(h = f + g)$ при одном и том же разбиении. Члены правой части σ_N^f и σ_N^g имеют пределы $\int_D f\mathrm{d}V$ и $\int_D g\mathrm{d}V$, поэтому $\sigma_N^h \to \int_D f\mathrm{d}V + \int_D g\mathrm{d}V$ при $N \to \infty$ $(\delta_N \to 0)$, и этот предел равен $\int_D h\mathrm{d}V$.

3°. Если функция $f(M)$ интегрируема в D, а C – постоянная величина, то функция $Cf(M)$ также интегрируема в D и

$$\int_D (Cf)\mathrm{d}V = C\int_D f\mathrm{d}V. \tag{9.5}$$

Свойство 3° также выводится из определения интегральной суммы:

$\sigma_N(Cf) = C\sigma_N(f)$,

так как при $N \to \infty$ $(\delta_N \to 0)$ правая часть стремится к пределу $C\int_D f\mathrm{d}V$.

Из свойства 2° и 3° следует, что линейная комбинация интегрируемых в D функций $f_i(M)$ $(i = 1, ..., m)$ с коэффициентами c_i, т. е. $g(M) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(M)$, интегрируема в D и $\int_D g(M)\mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_D f_i(M)\mathrm{d}V$.

4°. Пусть область D является объединением областей D_1 и D_2 и $D_1 \cap D_2 = S$, где S – множество, размерность которого меньше n. Если $f(M)$ интегрируема в D, то она интегрируема в D_1 и D_2 и при этом

$$\int_D f(M)\,\mathrm{d}V = \int_{D_1} f(M)\,\mathrm{d}V + \int_{D_2} f(M)\,\mathrm{d}V. \tag{9.6}$$

Обоснование аналогично доказательству разложимости определенного интеграла (см. свойство 5° в параграфе 7.2).

Вначале покажем, что разность $S_N - s_N$, составленная для всей области D, больше $S'_N - s'_N$ и $S''_N - s''_N$, составленных соответственно для D_1 и D_2:

$$\sum_{\substack{i=1\\(D)}}^{N} \omega_i \Delta V_i = \sum_{\substack{i=1\\(D_1)}}^{N} \omega_i' \Delta V_i' + \sum_{\substack{i=1\\(D_2)}}^{N} \omega_i'' \Delta V_i''.$$

Отметим, что $\Delta V_i'$ и $\Delta V_i''$ равны нулю, если элементарный участок не принадлежит соответствующей части. Разумеется, найдутся такие участки, которые расположены на стыке D_1 и D_2, но их конфигурация имеет размерность меньше n, поэтому при вычислении интегральных сумм ими можно пренебречь.

Так как при $N \to \infty$ $(\delta_N \to 0)$ $\sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i \Delta V_i \to 0$, а $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i' \Delta V_i' \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i \Delta V_i$ и $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i'' \Delta V_i'' \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i \Delta V_i$, то $\sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i' \Delta V_i' \to 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i'' \Delta V_i'' \to 0$. Поэтому $f(M)$ интегрируема в D_1 и D_2 и равенство (9.6) вытекает из соотношения

$$\sigma_N = \sum_{i=1}^{N} f(M_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} f(M_i') \Delta V_i' + \sum_{i=1}^{N} f(M_i'') \Delta V_i''.$$

Здесь $M_i' \in D_1$ и $M_i'' \in D_2$.

Переходя к пределу при $N \to \infty$ $(\delta_N \to 0)$, получаем

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_N = \int_D f(M) \mathrm{d}V = \lim_{N \to \infty} \sigma_N' + \lim_{N \to \infty} \sigma_N'' = \int_{D_1} f(M) \mathrm{d}V + \int_{D_2} f(M) \mathrm{d}V.$$

Далее рассмотрим свойства n-кратного интеграла, представленные неравенствами.

5°. Пусть функция $f(M)$ определена и интегрируема в области D. Если при этом $f(M) \geqslant 0$ для $\forall\ M \in D$ (за исключением, быть может, некоторой части D с размерностью меньше n), то

$$\int_D f(M) \mathrm{d}V \geqslant 0. \tag{9.7}$$

Свойство 5° вытекает из того, что при любом разбиении D

$$\sigma_N = \sum_{i=1}^{N} f(M_i) \mathrm{d}V_i \geqslant 0,$$

поэтому

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ \delta_N \to 0}} \sigma_N \geqslant 0.$$

6°. Пусть даны две функции $f(M)$ и $g(M)$, определенные и интегрируемые в D. Если для $\forall\ M \in D$ функция $f(M) \geqslant g(M)$, то

$$\int_D f(M) \mathrm{d}V \geqslant \int_D g(M) \mathrm{d}V. \tag{9.8}$$

Доказательство свойства 6° основано на том, что $\sigma_N^f \geqslant \sigma_N^g$ при любом разбиении D и выборе общих точек M_i на участках D_i.

7°. Пусть функция $f(M)$ определена и интегрируема в D. Тогда $|f(M)|$ также интегрируема в D и

$$\left| \int_D f(M) \mathrm{d}V \right| \leqslant \int_D |f(M)| \mathrm{d}V. \tag{9.9}$$

Обоснуем свойство 7° для непрерывной функции $f(M)$. Как известно, $|f(M)|$ также непрерывна в D и при любом разбиении $\omega_i(f) \geqslant \omega_i(|f|)$ на каждом элементарном участке. По условию $f(M)$ интегрируема, т. е. выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i(f)\Delta V_i \to 0$ при $N \to \infty$ $(\delta_N \to 0)$. Следовательно, при одном и том же разбиении $\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i(|f|)\Delta V_i \to 0$, что означает интегрируемость $|f|$ в D.

Кроме того,

$$|\sigma_N(f)| = \left|\sum_{i=1}^{N} f(M_i)\Delta V_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N}|f(M_i)|\,\Delta V_i = \sigma_N(|f|).$$

Тогда при переходе к пределу получим (9.9).

8°. Пусть функция $f(M)$ определена и интегрируема в D и ограничена снизу и сверху значениями k и K $(k = \inf\limits_D f(M),\ K = \sup\limits_D f(M))$:

$$k \leqslant f(M) \leqslant K \text{ для } \forall\ M \in D.$$

Тогда $kV \leqslant \int\limits_D f(M)\,\mathrm{d}V \leqslant KV$ (V — «объемная» мера D).

Предварительно отметим, что для постоянной величины C

$$\int\limits_D C\,\mathrm{d}V = CV,$$

так как $\sigma_N(C) = \sum\limits_{i=1}^{N} C\,\Delta V_i = C\sum\limits_{i=1}^{N}\Delta V_i = CV.$

Тогда из $k \leqslant f(M)$ и $f(M) \leqslant K$ следует, что

$$kV \leqslant \int\limits_D f(M)\,\mathrm{d}V \text{ и } \int\limits_D f(M)\,\mathrm{d}V \leqslant KV.$$

Разделив обе части на V, получим

$$k \leqslant \frac{1}{V}\int\limits_D f(M)\,\mathrm{d}V \leqslant K$$

или

$$\int\limits_D f(M)\,\mathrm{d}V = \theta V, \quad \theta \in [k,\ K]. \tag{9.10}$$

Примечание. Если $f(M)$ непрерывна в D, то $\exists\ M^* \in D\colon f(M^*) = \theta$ и

$$\int\limits_D f(M)\,\mathrm{d}V = f(M^*)V. \tag{9.11}$$

Соотношение (9.11) именуется **интегральной теоремой о среднем значении.**

Заметим, что необходимые ограничения в свойствах 1°–8° могут не выполняться для некоторой части D, совокупная размерность которой меньше n. Это условие распространяется и на классификационные требования интегрируемости в D. Так, например, свойство непрерывности $f(M)$ справедливо всюду в области D, за исключением той ее части, размерность которой меньше n.

9.3. Геометрический смысл и сведение двойного и n-кратного интеграла к повторному

Двумерный, или двойной, интеграл задается для функции двух переменных $z = f(x, y)$ (или $z = f(M)$, где точка M имеет координаты (x, y)), непрерывной в квадрируемой области D на плоскости Oxy. Под квадрируемостью области понимается наличие общей числовой грани для бесконечной последовательности площадей вписанных и описанных многоугольников.

Этот интеграл обозначается так:

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta_N \to 0}} \sigma_N, \tag{9.12}$$

где $\sigma_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$; ξ_i, η_i – координаты точки M_i, выбранной в элементарном прямоугольнике; $\Delta x_i \Delta y_i = \Delta S_i$ – площади элементарных прямоугольников, составляющих разбиение области D.

Двойной интеграл имеет простой геометрический смысл, он выражает объем криволинейного цилиндрического бруса, ограниченного плоскостью Oxy, вертикалями $\varphi(x, y) = 0$, исходящими из ограниченных точек области D на плоскости Oxy, и поверхностью $z = f(x, y)$ (рис. 9.2).

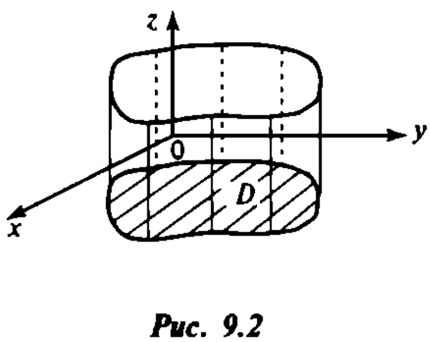


Рис. 9.2

Двойной интеграл вычисляется путем сведения его к повторному интегралу. Эта процедура, а также формулы повторного интегрирования изложены ниже.

Сначала рассмотрим задачу интегрирования $f(M)$ в области D, являющейся прямоугольником $[a, b; c, d]$ (рис. 9.3).

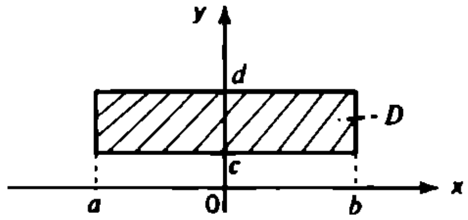


Рис. 9.3

Будем считать, что $f(M)$ непрерывна в D. Тогда для $\forall\ y \in [c, d]$ $\exists \int\limits_a^b f(x, y)\mathrm{d}x = I_x(y)$. Функция $I_x(y)$ является ограниченной, так как представляет собой определенный интеграл от ограниченной функции одной переменной x. Составим для нее интегральную сумму $\sigma_l = \sum\limits_{j=1}^{l} I_x(\eta_j)\Delta y_j$, где $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, а точки $y_0, y_1, \ldots, y_l$ образуют разбиение $[c, d]$ на элементарные промежутки. Нетрудно видеть, что

$$s_{m,l} \leqslant \sigma_l \leqslant S_{m,l}. \tag{9.13}$$

При этом $s_{m,l} = \sum\limits_{i=1,j=1}^{m,l} k_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$, $\quad S_{m,l} = \sum\limits_{i=1,j=1}^{m,l} K_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$,

где k_{ij}, K_{ij} – наименьшее и наибольшее значения $f(x, y)$ в $[x_{i-1}, x_i; y_{j-1}, y_j]$.

Действительно, в элементарном прямоугольнике

$$\sum_{i=1}^{m} k_{ij}\Delta x_i \leqslant \int\limits_0^b f(x, \eta_j)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{m} K_{ij}\Delta x_i, \tag{9.14}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $x_0, x_1, \ldots, x_m$ – точки разбиения $[a, b]$; $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$.

Умножая все члены последнего неравенства на Δy_j и суммируя по j, получим

$$\sum_{i=1,j=1}^{m,l} k_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^{l} I_x(\eta_j)\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1,j=1}^{m,l} K_{ij}\Delta x_i \Delta y_j.$$

Очевидно, что $\sigma_l = \sum_{j=1}^{l} I_x(\eta_j)\Delta y_j$, и неравенство (9.13) доказано.

По условию $f(M)$ интегрируема в D, поэтому крайние члены, являющиеся суммами Дарбу, имеют общий предел при $N = m\,l \to \infty$ $(\delta_N \to 0)$:

$s_N \to I, \quad S_N \to I.$

Интегральная сумма σ_l также будет иметь предел при $l \to \infty$, и этот предел, с одной стороны, совпадает со значением повторного интеграла (дважды вычисленного определенного интеграла), а с другой – равен значению двойного интеграла.

Таким образом,

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{l} I_x(\eta_j)\Delta y_j = \int_c^d I_x(y)\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{9.15}$$

Подставляя в (9.15) значения определенного интеграла $I_x(y)$, получаем следующую зависимость:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{9.16}$$

Если для $\forall\ x \in [a, b]\ \exists \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = I_y(x)$ и одновременно $I_y(x)$ интегрируема в $[a, b]$ так, что

$$\int_a^b I_y(x)\,\mathrm{d}x = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

то

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{9.17}$$

Итак, существуют две эквивалентные схемы повторного интегрирования, которые отличаются только порядком повторного интегрирования, что обусловлено примитивной конфигурацией прямоугольной области D.

Без доказательства примем формулировки теорем, которые обеспечивают сведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной конфигурации области D. Рассмотрим два варианта задания границы области D:

1) прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = g(x)$ – нижняя граница, $y = h(x)$ – верхняя граница (рис. 9.4, *а*);

2) прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \varphi(y)$ – левая граница, $x = \psi(y)$ – правая граница (рис. 9.4, *б*).

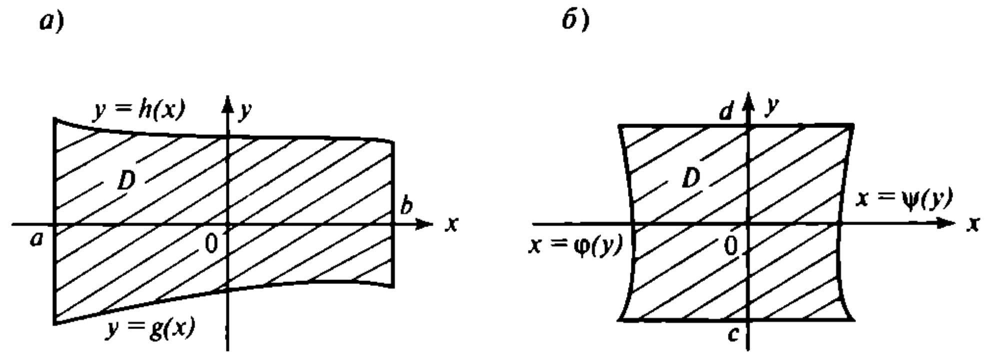


Рис. 9.4

❑ **Теорема 9.1.** Если функция $f(M)$ определена и непрерывна в D: $[a, b; g(x), h(x)]$, где $g(x)$ и $h(x)$ – непрерывные в $[a, b]$ функции x, то для $\forall\, x \in [a, b]$ $\exists \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\mathrm{d}y = I_y(x)$, где $I_y(x)$ – непрерывная в $[a, b]$ функция и

$$\int\limits_a^b I_y(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \ \blacksquare \tag{9.18}$$

❑ **Теорема 9.2.** Если функция $f(M)$ определена и непрерывна в области D: $[\varphi(y), \psi(y); c, d]$, где $\varphi(y)$, $\psi(y)$ – непрерывные в $[c, d]$ функции y, то для $\forall\, y \in [c, d]$ $\exists \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\mathrm{d}x = I_x(y)$, где $I_x(y)$ – непрерывная в $[c, d]$ функция и

$$\int\limits_c^d I_x(y)\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \ \blacksquare \tag{9.19}$$

Примечание. В теоремах 9.1 и 9.2 наличие одного варианта повторного интегрирования не обусловливает существование другого варианта повторного интегрирования (хотя и не исключает последнего, что требует соответствующего разбиения области D на участки, допускающие изменение порядка интегрирования).

❍ **Примеры.** 1. Пусть $f = \dfrac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$ и $D = [0, 1; 0, 1]$.

Требуется вычислить

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

В данном случае порядок повторного интегрирования несущественен и удобно I вычислять в форме

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2+2})\right]\Big|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

При другом порядке повторного интегрирования вычисления будут более громоздкими.

2. Пусть $f(x)=\sqrt{4x^2-y^2}$ и $D=[0,\ 1;\ 0,\ x]$, т. е. $g(x)=0$, $h(x)=x$ (рис. 9.5).

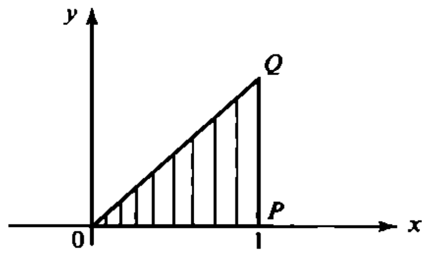


Рис. 9.5

В данном случае область D – прямоугольный треугольник OPQ. Интеграл

$$I_y(x)=\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\left(\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\left(\frac{y}{2x}\right)\right)\Bigg|_0^x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2$$

Поэтому двойной интеграл $\iint\limits_D f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ вычисляется следующим образом:

$$\iint\limits_D f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).\ \bullet$$

Переходя к пространству $\mathbf{R}^n$, отметим два возможных случая наиболее простого повторного n-кратного интегрирования.

I. Область D – n-мерный прямоугольник $[a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ \ldots;\ a_n,\ b_n]$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функция, непрерывная в D. Тогда $\exists\ \int\limits_D f(M)\mathrm{d}V$, численно равный повторному интегралу:

$$\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\left(\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\left(\ldots\left(\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n\right)\ldots\right)\right). \qquad (9.20)$$

Примечание. В данной конфигурации допустимо произвольное изменение порядка повторного интегрирования.

II. Область D – n-мерная трапеция $[a_1, b_1; a_2, b_2; ...; g(x_1, x_2, ..., x_{n-1}), h(x_1, x_2, ..., x_{n-1})]$, где g и h – непрерывные функции в прямоугольнике $[a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_{n-1}, b_{n-1}]$. Если $f(M)$ непрерывна в D, то $\exists \int\limits_D f(M)\mathrm{d}V$, численно равный

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\left(...\left(\int\limits_{g(x_1,x_2,...,x_{n-1})}^{h(x_1,x_2,...,x_{n-1})} f(x_1, x_2, ..., x_n)\mathrm{d}x_n\right)...\right)\right). \tag{9.21}$$

Во всех остальных случаях область D разбивается на составные части в виде n-мерных «прямоугольников» и «трапеций» и используется аддитивное свойство интеграла, т. е. интегралы суммируются по составным частям.

○ **Примеры.** 1. Даны область $D = [0, a; 0, a; ...; 0, a; x_{n-1}, 2x_{n-1}]$ и $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 2x_n$.

Тогда $\int\limits_D f(x_1, x_2, ..., x_n)\mathrm{d}V = \int\limits_0^a \mathrm{d}x_1 \int\limits_0^a \mathrm{d}x_2 ... \int\limits_0^a \mathrm{d}x_{n-1} \int\limits_{x_{n-1}}^{2x_{n-1}} (2x_n)\mathrm{d}x_n =$

$$= \int\limits_0^a \mathrm{d}x_1 \int\limits_0^a \mathrm{d}x_2 ... \int\limits_0^a (4x_{n-1}^2 - x_{n-1}^2)\mathrm{d}x_{n-1} = \frac{3}{3}a^{n-2}a^3 = a^{n+1}.$$

2. Найти интегралы от $f(x_1, ..., x_n) = \sin(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ и $g(x_1, ..., x_n) = \cos(x_1 + x_2 + ... + x_n)$, если $D = [a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_n, b_n]$.

Тогда

$$\int\int...\int f(x_1, x_2, ..., x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n = \int\limits_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int\limits_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2 ... \int\limits_{a_n}^{b_n}\sin\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\mathrm{d}x_n =$$

$$= 2^n\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)\sin\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)\right] \tag{9.22}$$

и

$$\int\int\limits_D...\int g(x_1, x_2, ..., x_n)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n = \int\limits_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int\limits_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2 ... \int\limits_{a_n}^{b_n}\cos\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\mathrm{d}x_n =$$

$$= 2^n\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)\cos\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)\right]. \tag{9.23}$$

Формула (9.23) получена методом индукции. При $n = 1$ функции $f = \sin x$, $g = \cos x$ и

$$\int_{a_1}^{b_1} \sin x_1 dx_1 = -\cos x_1 \Big|_{a_1}^{b_1} = 2\sin\frac{b_1 - a_1}{2}\sin\frac{a_1 + b_1}{2},$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \cos x_1 dx_1 = \sin x_1 \Big|_{a_1}^{b_1} = 2\sin\frac{b_1 - a_1}{2}\cos\frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Далее, полагая, что формулы (9.22) и (9.23) верны для $n - 1$, без особого труда покажем, что введение еще одной переменной сохраняет структуру выражения неизменной. ●

10. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

10.1. Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов

Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$, где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — частичные суммы. Если число слагаемых устремить к бесконечности, то получим бесконечную сумму

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (10.1)$$

Назовем эту сумму **числовым рядом**, а a_n — ***членами ряда***.

Выражение (10.1) является пока чисто формальным, так как сумма бесконечного числа слагаемых требует соответствующего определения.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**, а число S называют *суммой ряда*. Именно этот смысл имеет запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S. Рассмотрим разность между величиной S и частичной суммой S_n этого ряда: $S - S_n = R_n$. Величина R_n называется *остатком ряда*. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S - S_n) = 0$.

○ **Примеры.** 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с первым членом $a \neq 0$ и знаменателем q:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \qquad (10.2)$$

Если $q \neq 1$, то частичная сумма этого ряда имеет вид (сумма n первых членов геометрической прогрессии)

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Пусть $|q| < 1$. Тогда $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{a}{1-q}.$$

Если $|q| > 1$, то $|q^n| \to +\infty$ при $n \to \infty$ и, следовательно, последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела.

При $q = 1$ ряд (10.2) принимает вид

$$a + a + \ldots + a + \ldots,$$

а его частичная сумма $S_n = an$ является бесконечно большой при $n \to \infty$.

Пусть $q = -1$. Тогда ряд (10.2) и его частичные суммы будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(-1)^{n-1} = a - a + a - a + \ldots + a - a + \ldots,$$

$$S_n = \begin{cases} a, \text{ если } n \text{ — нечетное}, \\ 0, \text{ если } n \text{ — четное}. \end{cases}$$

Последовательность $\{S_n\}$ в этом случае не имеет предела.

Таким образом, ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, сходится при $|q| < 1$ и его сумма $S = a/(1-q)$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

2. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Покажем, что данный ряд расходится. Для этого из последовательности его частичных сумм выделим неограниченную сверху подпоследовательность. Рассмотрим частичные суммы с номерами $n = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и построим следующие оценки снизу:

$$S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} > 2\cdot\frac{1}{2} = 1,\ S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = S_{2^1} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

$$S_{2^3} = S_{2^2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{8} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Для любого k

$$S_{2^k} = S_{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) > \frac{k}{2} + \frac{2^{k-1}}{2^k} = (k+1)\frac{1}{2}.$$

Отсюда видно, что $S_{2^k} \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Поэтому последовательность S_n не имеет конечного предела.

3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Преобразуем его частичные суммы к следующему виду:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},\ldots,$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Теперь легко можно найти сумму ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-1/(n+1))=1.●$$

Сформулируем общие признаки сходимости ряда.

Критерий Коши сходимости числового ряда. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашелся номер N, такой, что для любых $m>n>N$ выполнялось условие

$$|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m|<\varepsilon.$$

Сформулированное условие получается из признака сходимости последовательности частичных сумм (признак Больцано–Коши, см. теорему 2.5).

Следующее утверждение является следствием критерия Коши.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Для доказательства достаточно положить в условиях признака Коши $m=n$.

Следует отметить, что это необходимое, но не достаточное условие. Например, гармонический ряд в примере 2 расходится, но его общий член $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Однако невыполнение необходимого условия указывает на расходимость данного ряда.

Перечислим свойства сходящихся рядов.

1°. На сходимость ряда не влияет отбрасывание, добавление или изменение конечного числа его членов.

Действительно, если в критерии Коши выбрать номер N так, чтобы он превышал максимальный номер отброшенных, добавленных или измененных членов, то его условия будут одинаковыми для всех полученных рядов.

2°. Пусть даны два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^a$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^b$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S^a + S^b$.

Действительно, найдем предел последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = S^a + S^b.$$

Заметим, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ не следует сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, где $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, сходится, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$ расходятся (последний ряд аналогичен ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ и отличается только знаком всех членов).

3°. Пусть даны сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^a$ и постоянная C. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = CS^a$.

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ca_k = C \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = CS^a.$$

10.2. Признаки сходимости положительных рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором все $a_n \geqslant 0$, называется **положительным**.

Отметим, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ этого ряда является неубывающей. Отсюда вытекает следующий признак сходимости положительных рядов.

1. ***Общий признак сходимости положительных рядов***. Для того чтобы положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, сходился, необходимо и достаточ-

но, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Необходимость следует из определения сходимости ряда и ограниченности сходящейся последовательности. Достаточность вытекает из существования предела неубывающей, ограниченной сверху последовательности.

2. *Признаки сравнения положительных рядов.* Пусть даны два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда:

1) если $a_n \leqslant b_n$ при всех n, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

2) если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = A \neq 0$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно;

3) если $(a_{n+1}/a_n) \leqslant (b_{n+1}/b_n)$ при всех n, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

❑ Докажем сначала первое утверждение. Обозначим частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ через S^a и S^b соответственно. Тогда из условий $a_n \leqslant b_n$, $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ вытекает, что

$$S_n^a \leqslant S_n^b \text{ при всех } n. \tag{10.3}$$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда последовательность его частичных сумм ограничена сверху: $S_n^b < M$ для всех n. Но тогда и $S_n^a < M$ (для всех n). Следовательно, по общему признаку сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда $\{S_n^a\}$ неограниченна. Отсюда в силу неравенства (10.3) последовательность $\{S_n^b\}$ также неограниченна и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Докажем теперь второе утверждение. По определению предела последовательности для $\varepsilon > 0 \ \ \exists N$: $n > N \Rightarrow |a_n/b_n - A| < \varepsilon$. Откуда следует, что

$$(A - \varepsilon)b_n < a_n < (A + \varepsilon)b_n. \qquad (10.4)$$

Так как изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, то можно считать, что неравенство (10.4) выполнятся при всех n. Тогда, суммируя неравенства (10.4), получим

$$(A - \varepsilon)S_n^b < S_n^a < (A + \varepsilon)S_n^b.$$

Из этого неравенства следует, что последовательности частичных сумм $\{S_n^b\}$ и $\{S_n^a\}$ либо вместе ограничены сверху, либо неограниченны. Следовательно, соответствующие им ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ по общему признаку сходимости сходятся или расходятся одновременно.

И наконец, докажем третье утверждение. По условию

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим: $(a_n/a_1) \leqslant (b_n/b_1)$ или $a_n \leqslant (a_1/b_1)b_n$ для всех n.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1/b_1)b_n$, полученный умножением его членов на постоянный множитель. Следовательно, по первому признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то по первому признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1/b_1)b_n$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится. ■

Если в качестве ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ взять ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, то, используя признаки сравнения, можно получить следующие признаки сходимости положительных рядов, которыми удобно пользоваться на практике.

3. *Признак Коши.* Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

а) если $q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

б) если $q > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Примечание. Если $q = 1$, то признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости.

4. *Признак Даламбера.* Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = q$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

б) если $q > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Примечание. Как и в случае признака Коши, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости, если $q = 1$. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

В тех случаях, когда указанные выше признаки не дают ответа на вопрос о сходимости ряда, приходится прибегать к другим признакам, основанным на сравнении исследуемого ряда с более сложными стандартными рядами.

Здесь приведем признак, который основан на сравнении данного ряда с соответствующим несобственным интегралом.

5. *Интегральный признак Коши.* Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и не возрастают, т. е. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$, и пусть $f(x)$ – непрерывная невозрастающая функция, определенная при $x > 0$, такая,

что $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$. Тогда интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

❑ Для доказательства рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, частичная сумма которого равна $\int\limits_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^{3} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x.$

Так как функция $f(x)$ невозрастающая, то $a_{n+1} \leqslant f(x) \leqslant a_n$. Интегрируя это неравенство, получаем

$$a_{n+1} \leqslant \int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant a_n.$$

По признаку сравнения отсюда следует, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ сходятся или расходятся одновременно.

Так как $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл сходятся или расходятся одновременно. ■

○ **Пример.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, при $\alpha \leqslant 1$ расходится.

Действительно, применяя интегральный признак Коши, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b, \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_1^b, \ \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1. \\ +\infty, \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases} \ \bullet$$

10.3. Знакопеременные ряды

Ряд называется **знакопеременным**, если он имеет бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Кроме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ будем рассматривать абсолютный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, т. е. ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда.

Поскольку $|a_n + \ldots + a_m| < |a_n| + \ldots + |a_m|$, из признака Коши следует, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Обратное утверждение не верно.

Например, рассмотрим ряд

$$1 - 1 + {}^1/_2 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_3 + \dots .$$

Его частичные суммы

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится. Вместе с тем абсолютный ряд

$$1 + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_3 + \dots$$

расходится. Это следует, например, из критерия Коши:

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n}\right| = 2\left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}\right) > 2n\frac{1}{n+n} = 1.$$

Таким образом, можно ввести понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда и на основе этих понятий классифицировать ряды.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится абсолютный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Как было показано выше, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ влечет за собой сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если абсолютный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Приведем без доказательства две теоремы, отражающие важные свойства абсолютной и условной сходимости.

❑ **Теорема 10.1** (теорема Дирихле). Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся и имеет одну и ту же сумму при любой перестановке его членов. ■

❑ **Теорема 10.2** (теорема Римана). Если ряд сходится условно, то, какое бы ни взять наперед заданное число C, можно так переставить члены этого ряда, чтобы сумма получившегося после перестановки ряда оказалась равной C. Более того, можно переставить члены условно сходящегося ряда так, чтобы ряд, полученный после перестановки членов, оказался расходящимся. ■

Другими словами, с абсолютно сходящимися рядами можно обращаться как с конечными суммами, в которых любая перестановка сохраняет сумму неизменной, в то время как с условно сходящимися рядами такие преобразования приводят к существенным изменениям предельных величин.

Рассмотрим особый вид знакопеременных рядов — знакочередующийся ряд.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знакочередующимся**, если члены ряда a_n и a_{n+1} для любого n имеют разные знаки.

Знакочередующийся ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n, \text{ где } c_n > 0.$$

Сформулируем признак сходимости для знакочередующихся рядов.

❑ **Теорема 10.3** (признак Лейбница). Пусть для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ выполнены условия:

1) последовательность $\{c_n\}$ является невозрастающей, т. е. $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_n \geqslant \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда с четными номерами $\{S_{2n}\}$. Представим ее в виде

$$S_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n}.$$

Отсюда следует, что последовательность ограничена сверху числом c_1: $S_{2n} < c_1$.

С другой стороны, S_{2n} может быть представлена в виде

$$S_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2n-1} - c_{2n}),$$

откуда следует, что подпоследовательность $\{S_{2n}\}$ не убывает.

Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, так как $\{S_{2n}\}$ не убывает и ограничена сверху.

Рассмотрим теперь подпоследовательность с нечетными номерами $\{S_{2n-1}\}$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + c_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} c_{2n} = S + 0 = S.$$

Так как подпоследовательности S_{2n} и S_{2n-1} сходятся к одному и тому же пределу S, то вся последовательность частичных сумм S_n также имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ сходится. ■

Заметим, что признак Лейбница иногда называют *признаком условной сходимости.*

○ **Пример.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$. В этом случае $c_n = \dfrac{1}{n}$ и все условия признака Лейбница выполнены. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ сходится. Однако соответствующий абсолютный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится. Следовательно, ряд сходится условно. ●

11. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

11.1. Равномерная сходимость функционального ряда

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{11.1}$$

где $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – функции, определенные на некотором множестве A. Придавая x определенные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости* ряда B $(B \subset A)$.

Очевидно, что в области сходимости B сумма ряда является некоторой функцией от x: $S(x)$.

Точно так же, как для числовых рядов, составим частичные суммы $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$. Тогда сходимость ряда (11.1) определяется как сходимость последовательности частичных сумм $\{S_n(x)\}$ для каждого $x \in B$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N (зависящий от значения x), такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Из определения следует, что для разных значений $x \in B$ при одном и том же ε найдутся разные значения N. В общем случае N зависит как от ε, так и от x: $N = N(\varepsilon, x)$. При этом интерес представляют ряды, у которых при выбранном ε номер N не зависит от x.

Говорят, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ **сходится равномерно** к $f(x)$ на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, зависящее только от ε, что для любого $n > N$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E к сумме $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно на множестве E к функции $S(x)$.

Используя критерий Коши сходимости числового ряда, можно получить условие равномерной сходимости.

❑ **Теорема 11.1** (критерий Коши равномерной сходимости). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n > N$ и любом $p > 0$ для всех $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon. \qquad (11.2)$$

Доказательство. *Необходимость.* Обозначим сумму ряда через $S(x)$, а через $S_n(x)$ его частичные суммы. Тогда из определения равномерной сходимости следует, что для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N$, такое, что при $n > N$ и любом p для всех $x \in E$ справедливо неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |S_{n+p}(x) - S(x) +$$
$$+ S(x) - S_n(x)| < |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| < 2\varepsilon.$$

А это и есть условие (11.2).

Достаточность. Пусть теперь выполнено условие (11.2), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N$, такое, что при $n > N$ и любом p

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \qquad (11.3)$$

для всех $x \in E$.

Таким образом, при любом фиксированном x получаем условие Коши для числового ряда. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ при любом $x \in E$.

Теперь осталось показать равномерную сходимость. Зафиксируем $n > N$ и $x \in E$ и перейдем в неравенстве (11.3) к пределу при $p \to \infty$:

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Так как для всех $x \in E$ номер N не менялся, то это доказывает равномерную сходимость. ■

Отсутствие равномерной сходимости влияет на свойства суммы функционального ряда.

○ **Пример 1.** Ряд

$$1 + (x - 1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots \qquad (11.4)$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, но неравномерно.

В самом деле, n-я частичная сумма данного ряда $S_n(x) = x^n$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 1, \\ 0 \text{ при } 0 < x < 1. \end{cases}$$

В этом случае невыполнимость неравенства $|S_n(x) - S(x)| = x^n < \varepsilon < {}^1/_2$ одновременно для всех $x < 1$ видна хотя бы из того, что $x^n \to 1$ (при любом фиксированном n), если $x \to 1$.

Очевидно, что сумма ряда (11.4) является разрывной функцией на множестве E, в то время как все члены ряда $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$ непрерывны на E. ●

Для установления на практике равномерной сходимости рядов пользуются *достаточными признаками*. Приведем важный признак равномерной сходимости, основанный на сравнении функционального ряда со сходящимся числовым.

❑ **Теорема 11.2** (признак Вейерштрасса). Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$| u_n(x) | < a_n,$$

где $x \in E$, а a_n – числа (не зависящие от x), и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве E равномерно.

Доказательство. В самом деле, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N$, такое, что при любых $n > N$, $p > 0$ и произвольном $x \in E$

$$\varepsilon > a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} > | u_{n+1}(x) | + \ldots + | u_{n+p}(x) | > | u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) |.$$

А это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E. ■

❍ **Пример 2.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, так как $| x |^n \leqslant q^n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$. ●

11.2. Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассмотренный в параграфе 11.1 пример 1 показывает, что сумма ряда не всегда является непрерывной функцией, даже если его члены – непрерывные функции. Следующая теорема дает *достаточные условия* непрерывности суммы ряда и отражает важное свойство равномерно сходящихся рядов.

❑ **Теорема 11.3.** Если функции $u_n(x)$ определены и непрерывны на множестве E и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к сумме $S(x)$ на множестве E, то эта сумма будет непрерывна на множестве E.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in E$ и установим непрерывность $S(x)$ в этой точке.

Пусть $S_n(x)$ – частичные суммы ряда. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости существует такое N, что для $n > N$

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon/3$$

для всех $x \in E$.

Так как $S_n(x)$ для фиксированного n является непрерывной функцией (как сумма конечного числа непрерывных функций), то для заданного $\varepsilon > 0$ существует δ, такое, что при $|x - x_0| < \delta$

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Тогда для $x \in E$, $|x - x_0| < \delta$ справедливы следующие соотношения:

$$|S(x) - S(x_0)| < |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| +$$
$$+ |S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Откуда следует, что $S(x)$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in E$, т. е. на всем множестве E. ■

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании и дифференцировании равномерно сходящихся рядов.

❑ **Теорема 11.4.** Если функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны на $[a, b]$ и составленный из них ряд сходится равномерно на $[a, b]$ к сумме $S(x)$, то его можно почленно интегрировать на $[a, b]$:

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u_1(x)\mathrm{d}x + \dots + \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство. По определению равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое, что для $n > N$ выполнено условие

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$ (где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$).

По теореме 11.3 функция $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Частичная сумма $S_n(x)$ также непрерывна на $[a, b]$, так как является конечной суммой непрерывных функций. Поэтому эти функции интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и

$$\left|\int_a^b S(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))\mathrm{d}x\right| < \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\mathrm{d}x < (b - a)\varepsilon.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$ сходится к сумме $\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. ■

◇ **Следствие.** Если выполнены условия теоремы 11.4, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$ сходится равномерно на $[a, b]$ к сумме, равной $\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$. ◆

❑ **Теорема 11.5.** Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) определены на $[a, b]$ и существуют непрерывные производные $u_n'(x)$ на (a, b). Если на отрезке $[a, b]$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ и равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) = u_1'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \tag{11.5}$$

то и сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ имеет на (a, b) производную, причем

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{S}(x)$ сумму ряда (11.5). Так как этот ряд сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, то он сходится на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$. Поэтому его можно почленно интегрировать на этом отрезке:

$$\int_a^x \tilde{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)\mathrm{d}t.$$

Однако

$$\int_a^x u_n'(t)\mathrm{d}t = u_n(x) - u_n(a).$$

Следовательно,

$$\int_a^x \tilde{S}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x) - u_n(a)) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty}u_n(a) = S(x) - S(a).$$

Отсюда получаем

$$\tilde{S}(x) = \left(\int_a^x \tilde{S}(t)\mathrm{d}t\right)' = (S(x) - S(a))' = S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

А это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ можно почленно дифференцировать. ■

◇ **Следствие.** Из теоремы 11.5 следует, что ряд $\sum_{n=1} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. ◆

Отметим, что условие теоремы 11.5 (равномерная сходимость ряда, составленного из производных) является весьма строгим требованием, предъявляемым к функциональному ряду, и во многих случаях равномерно сходящийся ряд не допускает почленного дифференцирования.

Приведем пример непрерывной функции, которая представляет собой сумму равномерно сходящегося функционального ряда, но ни в одной точке не имеет производной.

◌ **Пример Ван-дер-Вардена.** Построим ряд, членами которого являются колеблющиеся ломаные.

Пусть $u_0(x)$ – абсолютная величина разности между числом x и ближайшим к нему целым числом. Эта функция линейна в каждом промежутке вида $[s/2, (s+1)/2]$, где s – целое, она непрерывна и имеет период, равный единице. Ее график представляет собой ломаную, отдельные звенья которой имеют угловой коэффициент ± 1 (рис. 11.1).

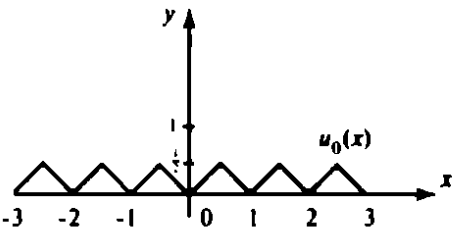


Рис. 11.1

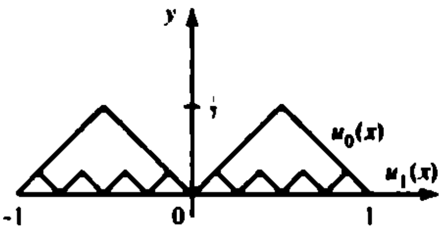


Рис. 11.2

Положим для $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Эти функции также линейны в промежутках вида $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$, непрерывны и имеют период, равный $(1/4)^k$. Их графики представляют собой ломаные с уменьшающимися «зубчиками» (рис. 11.2). Во всех случаях угловые коэффициенты отдельных звеньев и здесь равны ± 1.

Определим для всех вещественных значений x функцию $f(x)$ равенством

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Так как

$$0 < u_k(x) < 1/(2 \cdot 4^k) \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ сходится, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно и функция $f(x)$ всюду непрерывна.

Остановимся теперь на любом значении $x = x_0$ и рассмотрим последовательность таких точек $x_n \to x_0$, что $|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}$.

Составим отношение приращений:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Однако

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \begin{cases} \pm 1, & k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1).$$

Следовательно, при $n \to \infty$ ($x_n \to x_0$) отношение приращений ни к какому пределу стремиться не может. Значит, не существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, т. е. наша функция в любой точке производной не имеет. ●

11.3. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда

Ряд вида

$$c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n, \tag{11.6}$$

где c_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — постоянные, называется **степенным**.

При изучении свойств степенного ряда будем рассматривать ряд

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{11.7}$$

так как ряд (11.6) сводится к ряду (11.7) путем линейной замены переменной.

Прежде всего рассмотрим вопрос об области сходимости степенного ряда. Ответ на этот вопрос дает теорема Абеля.

❑ **Теорема 11.6** (теорема Абеля). 1. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом значении $|x| < |x_0|$.

2. Если ряд расходится при некотором значении x_0', то он расходится при любом $|x| > |x_0'|$.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Согласно необходимому условию сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ существует такое M, что $|c_n x_0^n| < M$. Поэтому

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leqslant |c_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leqslant M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

При $|x| < |x_0|$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем меньше единицы, поэтому он сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ сходится по признаку сравнения.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Предположим противное. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в некоторой точке x': $|x'| > |x_0'|$. Тогда согласно первому утверждению ряд сходится для всех $|x| < |x'|$, в том числе и в точке x_0'. А это противоречит условию. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится при всех $|x| > |x_0'|$. ■

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Из нее следует, что существует такое число R (оно может быть и 0, и $+\infty$), что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ (если $R \neq 0$) и расходится при $|x| > R$ (если $R < +\infty$).

Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда, а интервал $(-R; R)$ – **интервалом сходимости**.

На концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и $x = -R$) ряд может как расходиться, так и сходиться.

Укажем способы определения радиуса сходимости степенного ряда, использующие признаки Даламбера и Коши сходимости положительного ряда.

Для этого рассмотрим абсолютный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n x^n|$. Для каждого фиксированного x применим к абсолютному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||x|^{n+1}}{|c_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=L$. Тогда по признаку Даламбера абсолютный ряд сходится, если $|x|\,L<1$, и расходится при $|x|\,L>1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно при $|x|<1/L$ и расходится при $|x|>1/L$ (так как в этом случае общий член ряда не стремится к нулю).

Таким образом, число $1/L$ является радиусом сходимости, т. е.

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Аналогично, применяя признак Коши сходимости положительного ряда, получаем, что $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

11.4. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Сначала рассмотрим вопрос о равномерной сходимости степенного ряда.

Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, где $r<R$, R – его радиус сходимости.

Действительно, так как $r<R$, то при $x=r$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n$. Так как при $x\in[-r, r]$

$$|c_n x^n|\leqslant|c_n r^n|,$$

то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ сходится равномерно на $[-r, r]$.

Хотя число r и может быть взято сколь угодно близким к R, но из доказанного все же не следует равномерная сходимость на всем промежутке $(-R, R)$.

Из доказанного утверждения вытекает непрерывность суммы степенного ряда на $[-r, r]$ и возможность почленного интегрирования ряда на любом отрезке $[0, x]$, $-R < x < R$ (так как он равномерно сходится на этом отрезке):

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + \ldots .$$

Выясним теперь возможность почленного дифференцирования степенного ряда. Для этого рассмотрим ряд, составленный из производных его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots .$$

Выберем произвольное $x \in (-R, R)$. Всегда можно найти такие r_0 и r, чтобы $|x| < r_0 < r < R$.

При $x = r$ степенной ряд сходится, поэтому его общий член ограничен: $|c_n| r^n \leqslant L$.

Тогда при $|x| < r$ справедливы следующие соотношения:

$$n|c_n x^{n-1}| < n|c_n| r_0^{n-1} = n|c_n| r^{n-1} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} \leqslant n \frac{L}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{L}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1}$ сходится (по признаку Даламбера). Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n x^{n-1}|$ сходится равномерно на $[-r, r]$.

Таким образом, для степенного ряда выполнены все условия теоремы 11.5 о почленном дифференцировании функционального ряда. Поэтому для всех $x \in (-R, R)$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} .$$

11.5. Ряды Тейлора и Маклорена

В параграфе 4.7 было показано, что для функции $f(x)$, имеющей производные до n-го порядка включительно, в окрестности точки $x = a$ справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где остаточный член

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в окрестности точки $x = a$, то получим бесконечный ряд, который называется **рядом Тейлора**:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \,. \qquad (11.8)$$

Естественно возникает вопрос, при каких условиях этот ряд сходится к функции $f(x)$. Используя формулу Тейлора, представим

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x)$ – отрезок ряда Тейлора (11.8); $R_n(x)$ – остаточный член в формуле Тейлора. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд не представляет данной функции, хотя и может сходиться (к другой функции).

Нетрудно видеть, что если все производные ограничены ($f^{(i)}(x) \leqslant K$, $i = 1, 2, \ldots$), то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

При $a = 0$ получим частный случай ряда Тейлора, который называют **рядом Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \,.$$

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена элементарных функций.

1. Пусть $f(x) = e^x$. По формуле Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $\quad R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta}.$

Так как при фиксированном x величина e^x ограничена (а значит, ограничены все производные), то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Следовательно, при всех x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \,.$$

2. Аналогичным образом получаем разложение в ряд функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ (здесь также $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех x):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

3. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1 + x)^m$, где m – произвольное постоянное число. Найдя $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots$, получим ряд (называемый биномиальным)

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots .$$

Определим радиус сходимости этого ряда $R = \lim\limits_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$. Так как

$$c_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!},$$

$$c_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!},$$

то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1.$$

Таким образом, биномиальный ряд сходится при $x \in (-1, 1)$ и расходится при $x < -1$ и $x > 1$. Сходится ли этот ряд при $x = 1$ и $x = -1$, необходимо исследовать в каждом случае отдельно.

Осталось показать, что сумма этого ряда при $x \in (-1, 1)$ действительно равна $(1 + x)^m$. Оценка остаточного члена в этом случае довольно сложна, поэтому доказательство опустим.

Итак, при $x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots . \tag{11.9}$$

4. В частности, при $m = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots . \tag{11.10}$$

Интегрируя это равенство от 0 до x, где $|x| < 1$, получим

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + ...)dt.$$

Откуда легко получить разложение функции $f(x) = \ln(1 + x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + ... \qquad (11.11)$$

Это равенство справедливо в интервале $(-1, 1)$. Можно показать, что оно справедливо также и при $x = 1$.

5. Положив в разложении (11.10) $x = t^2$, после интегрирования получим разложение в ряд функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$, справедливое при $|x| < 1$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$$

Можно показать, что оно верно и при $x = 1$.

6. Пусть теперь в формуле (11.9) $m = -1/2$, $x = -t^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}t^6 + ... + \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}t^{2n} + ...$$

Интегрируя это равенство, получаем при $x \in [-1, 1]$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7} + ... +$$

$$+ \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Разложение функций в ряд Тейлора является инструментом различных приближенных вычислений. Используя разложение в ряд Маклорена элементарных функций, можно получить значения этих функций с любой точностью. Для этого надо взять достаточное количество членов ряда. Точность вычисления определяется остаточным членом формулы Тейлора. Например, для функции $f(x) = e^x$ погрешность оценивается так:

$$|R_n(x)| < e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Рассмотрим вычисление логарифмов. С помощью формулы (11.11) можно вычислить логарифмы чисел от нуля до двух. Для остальных аргументов пользуются равенством

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right). \qquad (11.12)$$

Например, положив $x = \dfrac{1}{2N+1}$, можно вычислить логарифмы всех целых чисел. Так как $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{N+1}{N}$, то из равенства (11.12) получаем

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right).$$

В частности, при $N = 1$

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right).$$

Оценим погрешность R_n, где n представляет собой число взятых членов ряда:

$$R_n = 2\left(\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5)3^{2n+5}} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right) = \frac{2}{2n+1} \frac{\frac{1}{3^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

С помощью рядов Тейлора вычисляют значения так называемых неберущихся интегралов.

Например, пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt$. Сначала разложим подынтегральную функцию в ряд, заменяя x на $-x^2$ в разложении функции e^x:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots .$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots . \quad (11.13)$$

Таким образом, с помощью (11.13) можно вычислить значение данного интеграла для любого x с любой степенью точности.

11.6. Ряды Фурье

Рассмотрим функциональные ряды, суммы которых в отличие от степенных рядов имеют непустое множество точек разрыва в области задания.

Функция называется **кусочно-непрерывной**, если она непрерывна всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода. Функция $f(x)$ называется **кусочно-дифференцируемой** на $[a, b]$, если производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ — кусочно-непрерывны на отрезке $[a, b]$. Определим скалярное произведение таких функций:

$$(u, v) = \int_a^b uv\,dx, \quad \|u\|^2 = (u, u) = \int_a^b u^2\,dx, \quad \|v\|^2 = (v, v) = \int_a^b v^2\,dx.$$

Очевидны свойства скалярного произведения:

1) $(u, v) = (v, u)$ (свойство симметрии);

2) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ (свойство сочетательности);

3) $(u, u) = \int_a^b u^2\,dx = \|u\|^2 \geqslant 0.$

Кроме того, если $\|u\| = 0$, то $u \equiv 0$.

Функции u и v называются **ортогональными**, если $(u, v) = 0$, при этом $u \neq 0$, $v \neq 0$.

Рассмотрим систему функций

$$\{1, \cos nx, \sin nx\},\ n \in N. \tag{11.14}$$

Покажем, что эти функции взаимно ортогональны, если разность пределов интегрирования $b - a = 2\pi$:

$$(1, \cos nx) = \int_a^b 1\cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_a^b = \frac{1}{n}(\sin nb - \sin na) = 0;$$

$$(1, \sin nx) = \int_a^b 1\cdot \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}(\cos nb - \cos na) = 0;$$

при $n \neq m$ $\quad(\cos nx, \cos mx) = \int_a^b \cos nx \cos mx\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \cos(m - n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b \cos(m + n)x\,dx = 0;$$

при $n \neq m$ $\quad(\sin nx, \sin mx) = \int_a^b \sin nx \sin mx\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \cos(m - n)x\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b \cos(m + n)x\,dx = 0;$$

при $n \neq m$ $\quad (\sin nx, \cos mx) = \int\limits_a^b \sin nx \cos mx \,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \sin(n - m)x \,dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \sin(m + n)x \,dx = 0.$$

Допустим теперь, что $a = -\pi$, $b = \pi$, функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Составим из функций (11.14) ряд, предполагая, что его сумма равна $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{11.15}$$

Осуществим формально почленное интегрирование, предварительно умножив все члены ряда (11.15) на функции (11.14). С учетом ортогональности получаем следующие выражения для коэффициентов a_0, a_n, b_n:

$$(f(x), 1) = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot 1 dx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot 1 dx\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}(f(x), 1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \tag{11.16}$$

$$(f(x), \cos nx) = a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,dx = a_n \cdot \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2nx)dx =$$

$$= a_n\pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}(f(x), \cos nx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,dx; \tag{11.17}$$

$$(f(x), \sin nx) = b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,dx = b_n \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 - \cos 2nx)dx =$$

$$= b_n\pi \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}(f(x), \sin nx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,dx. \tag{11.18}$$

Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{11.19}$$

где a_0, a_n, b_n вычисляются соответственно по формулам (11.16)–(11.18), называется **рядом Фурье** функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Коэффициенты a_0, a_n, b_n называются *коэффициентами ряда Фурье*.

Выясним теперь, при каких условиях ряд (11.19) сходится, как он сходится и какова его сумма. Сначала рассмотрим *необходимые условия сходимости* ряда Фурье.

❑ **Теорема 11.7.** Для кусочно-непрерывной функции $f(x)$ коэффициенты ряда Фурье $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\left|\int_a^b \sin nx\, dx\right| = \left|-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_a^b\right| \leqslant 2/n.$$

Поэтому, разбив отрезок $[-\pi, \pi]$ на промежутки $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = \pi$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin nx\, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-m_i)\sin nx\, dx + \sum_{i=0}^{k-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx\, dx,$$

где m_i — нижняя грань $f(x)$ в i-м промежутке.

Обозначим через ω_i колебание функции $f(x)$ в i-м промежутке, т. е. $0 \leqslant f(x) - m_i \leqslant \omega_i$. Тогда

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-m_i|\,|\sin nx|\, dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} |m_i| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\sin nx|\, dx \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\omega_i \Delta x_i + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{k-1}|m_i|.$$

Так как функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода, то для $\forall\, \varepsilon > 0$ можно взять такое разбиение, чтобы

$$\sum_{i=0}^{k-1}\omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

и такое N, чтобы при $n > N$

$$n > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{k-1}|m_i|.$$

Тогда

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогично доказывается, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как при всех $x \in [-\pi, \pi]$ общие члены ряда Фурье $a_n \cos nx$, $b_n \sin nx$ при $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$ являются величинами бесконечно малыми, то для ряда Фурье выполнено *необходимое условие сходимости*.

Примем без доказательства следующее утверждение.

❑ **Теорема 11.8.** Если $f(x)$ обладает кусочной дифференцируемостью на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке ряд Фурье сходится и имеет сумму

$$S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

где $f(x-0), f(x+0)$ – односторонние конечные пределы слева и справа. ■

Примечание. Во всех точках непрерывности $f(x)$ ряд Фурье сходится к этой функции.

Теорема 11.8 формулирует *достаточные условия сходимости* ряда, а именно: в точках непрерывности сумма ряда равна $f(x)$, а в точках разрыва – полусумме односторонних пределов функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи ряда Фурье.

1. Предположим, что функция $f(x)$ – четная. Тогда $f(x)\sin nx$ – нечетная функция, поэтому

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

○ **Пример.** Пусть $f(x) = x^2$. Разложим ее в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Функция x – четная, поэтому $b_n = 0$. Вычислим остальные коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Следовательно,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4\cos nx}{n^2}.$$

На рис. 11.3 представлены графики функции $f(x) = x^2$ и ее ряда Фурье. ●

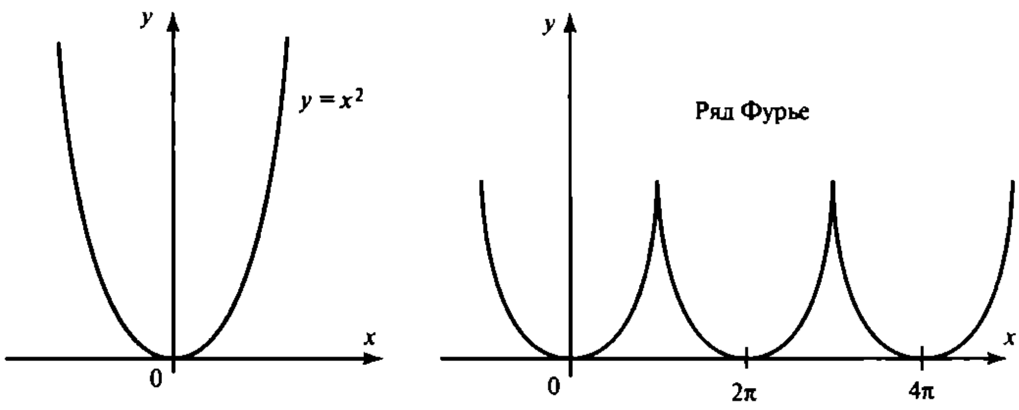


Рис. 11.3

2. Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$a_0 = 0, \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

❍ **Пример.** Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$a_0 = 0$, $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi}\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx \, dx = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Отсюда $x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin nx}{n}$.

Графики $f(x) = x$ и ее ряда Фурье даны на рис. 11.4. ●

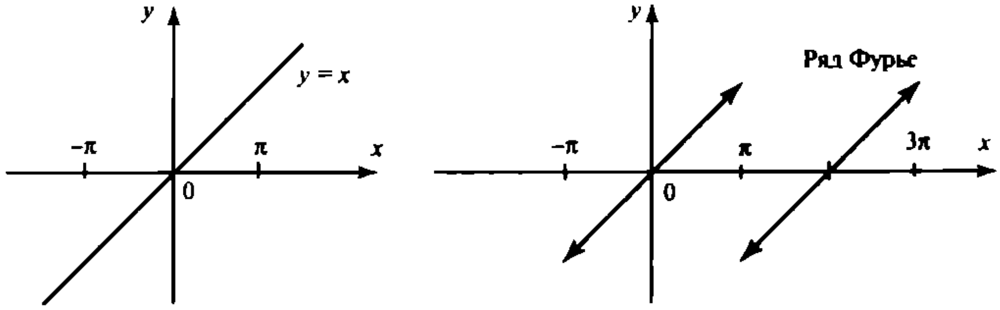


Рис. 11.4

3. Предположим, что функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим $l = a - b$, $x_0 = (b + a)/2$ и сделаем замену $x = x_0 + \frac{l}{2\pi}t$. Отсюда $t = \frac{2\pi}{l}(x - x_0)$. Легко видеть, что при $x = a$ переменная $t = -\pi$, а при $x = b$ имеем $t = \pi$. Поэтому функция $f\left(x_0 + \frac{l}{2\pi}t\right)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ для переменной величины t. Тогда

$$f\left(x_0 + \frac{l}{2\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Легко получить

$$a_n = \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cos\left[n\frac{2\pi}{l}(x - x_0)\right]dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\sin\left[n\frac{2\pi}{l}(x - x_0)\right]dx$$

и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left[n\frac{2\pi}{l}(x - x_0)\right] + b_n \sin\left[n\frac{2\pi}{l}(x - x_0)\right]\right).$$

○ **Пример.** Разложим функцию $f(x) = e^x$ в ряд Фурье на отрезке $[5, 15]$. Вычисляя интегралы 2 раза по частям, находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15} e^x \cos\left[n\frac{\pi}{5}(x - 10)\right]dx = \frac{5\cos(n\pi)(e^{15} - e^5)}{25 + n^2\pi^2},$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15} e^x \sin\left[n\frac{\pi}{5}(x - 10)\right]dx = -\frac{5n\pi\cos(n\pi)(e^{15} - e^5)}{25 + n^2\pi^2}.$$

Поэтому

$$e^x=(e^{15}-e^5)\left\{\frac{1}{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5\cos n\pi}{25+n^2\pi^2}\cos\left[n\frac{2\pi}{10}(x-10)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(-5n\pi)\cos n\pi}{25+n^2\pi^2}\sin\left[n\frac{2\pi}{10}(x-10)\right]\right)\right\}. \bullet$$

Если продолжить изучение свойств рядов Фурье, то можно установить, что он сходится равномерно и имеет непрерывную сумму, если $f(x)$ дважды кусочно-дифференцируема. В этом случае будут выполняться условия почленного интегрирования ряда Фурье.

В заключение отметим, что в силу своих особенностей ряды Фурье применяются в задачах аппроксимации, т. е. приближения функций.

12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

12.1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{12.1}$$

которое связывает независимый аргумент x, неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$. Например, $\sin(xy^{(4)}) + \cos(y') = 0$, где $y = y(x)$.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок производной, входящей в уравнение. Так, порядок указанного дифференциального уравнения равен 4.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение (12.1) превращает его в тождество.

При исследовании уравнений необходимо выяснить, существуют ли решения, а также описать совокупность решений данного дифференциального уравнения. Для этого сформулируем так называемую **задачу Коши**.

1. Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x, y). \tag{12.2}$$

В этом случае постановка задачи Коши такова: для данной точки $M_0(x_0, y_0)$ найти такую функцию $y = \varphi(x)$, чтобы она была решением уравнения (12.2) и ее график проходил через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

2. Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{cases} \tag{12.3}$$

которую коротко можно записать в векторной форме

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}).$$

Задача Коши для такой системы формулируется следующим образом: для заданной точки $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ найти вектор-функцию $\bar{y} = \bar{\varphi}(x)$, которая является решением (12.3) и $\bar{y}^0 = \bar{\varphi}(x_0)$.

3. Рассмотрим разрешенное относительно $y^{(n)}$ дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{12.4}$$

Введя следующие обозначения:

$$y = y_1;\ y' = y'_1 = y_2;\ y'' = y'_2 = y_3;\ y''' = y'_3 = y_4;\ \ldots;\ y^{(n-1)} = y_n;$$

$$y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

получим эквивалентную систему n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Задача Коши для уравнения n-го порядка формулируется следующим образом: для заданных значений

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) = y_1^0, \\ y'_0 = y'(x_0) = y_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases} \tag{12.5}$$

найти решение уравнения (12.4), удовлетворяющее (12.5).

Точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ называются ***начальными условиями***, их можно записать также в виде $y^0 = y(x_0)$ и $\bar{y}^0 = \bar{y}(x_0)$.

Следующие теоремы утверждают существование и единственность решения поставленной выше задачи Коши.

❑ **Теорема 12.1.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y). \tag{12.6}$$

Пусть в некоторой области D функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны. Тогда через каждую точку $M_0(x_0, y^0) \in D$ проходит единственное решение дифференциального уравнения (12.6). ■

Рисунок 12.1 иллюстрирует теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения. Вся область D заполнена графиками решений, при этом они не могут ни пересекаться, ни касаться друг друга.

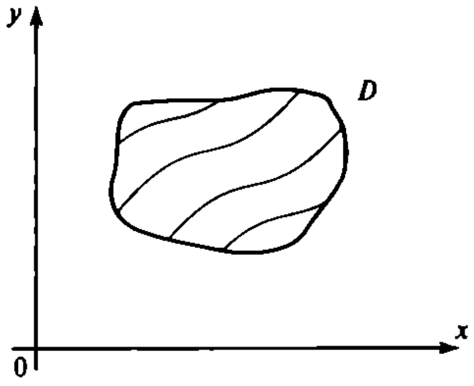


Рис. 12.1

❑ **Теорема 12.2.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (12.7)$$

Если функции f_1, f_2, ..., f_n и их частные производные по y_1, y_2, ..., y_n непрерывны в (n + 1)-мерной области D, то через каждую точку $M_0(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D$ проходит единственное в области D решение $\bar{y} = \bar{\varphi}(x)$ системы уравнений (12.7). ■

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши позволяют описать множество решений дифференциального уравнения в виде общего решения.

Общим решением для любого дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (12.8)$$

называется функция

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \qquad (12.9)$$

если выполняются следующие два условия:

1) для любых значений C_1, C_2, ..., C_n функция (12.9) является решением дифференциального уравнения (12.8);

2) для любой точки

$$M_0(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \qquad (12.10)$$

(n + 1)-мерного пространства существуют такие константы C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0, при которых график решения (12.9) проходит через точку (12.10), т. е.

$$\begin{cases} y_0 = \psi(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0), \\ y_0' = \psi'(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0). \end{cases}$$

Общее решение, записанное в неявном виде, называется **общим интегралом**.

Если в общем решении (12.9) зафиксированы константы C_1, C_2, ..., C_n, то (12.9) называется **частным решением**. Частное решение, представленное в неявном виде, называется **частным интегралом**.

Величины C_1, C_2, ..., C_n называются произвольными постоянными.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти его общее решение или общий интеграл.

12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение $y' = \frac{y}{x}$. Известно, что производная является отношением дифференциалов $y' = \frac{dy}{dx}$. Значит, данное уравнение эквивалентно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \qquad (12.11)$$

Умножив обе части на dx и разделив на y, получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}. \qquad (12.12)$$

Если равны дифференциалы, то равны и неопределенные интегралы $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$. Отсюда $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$ – общий интеграл и $y = Cx$ – общее решение.

Любое дифференциальное уравнение вида

$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy \qquad (12.13)$$

называется **уравнением с разделенными переменными**. Уравнение, которое приводится к виду (12.13), называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Уравнение (12.11) является уравнением с разделяющимися переменными, а (12.12) с разделенными.

○ **Пример.** Решить дифференциальное уравнение $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$(x^2 - 1)dy = -2xy^2\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{2x\,dx}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x\,dx}{x^2 - 1} \Rightarrow \ \frac{1}{y} = \ln|x^2 - 1| + C.$$

Таким образом, получим общий интеграл

$$y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1.$$

Подставим начальные условия $y(0) = 1$:

$$1(0 + C) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Отсюда получим частный интеграл

$$y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1. \ \bullet$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $f(x, y)$ называется **однородной** функцией m-го измерения, если

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Например, функция $z = x^2 + y^2$ является однородной функцией 2-го измерения, а функция $z = \frac{x}{y}$ – нулевого измерения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y), \qquad (12.14)$$

где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Данное уравнение можно решить следующим образом. Сначала преобразуем правую часть уравнения:

$$y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f(1, \frac{y}{x}) \qquad (\text{если } \lambda = \frac{1}{x}).$$

Сделаем замену $u = \frac{y}{x}$, отсюда $y = ux$ и $y' = u'x + u$, и подставим в уравнение. Тогда для u имеем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}x = f(1, u) - u.$$

Отсюда

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$\Phi(u) = \ln|x| + C,$$

где $\Phi(u)$ – первообразная для функции $\dfrac{1}{f(1, u) - u}$.

Подставив вместо u его выражение через y, получим общий интеграл уравнения (12.14).

○ **Пример.** Решить уравнение $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

Р е ш е н и е. Ясно, что $\dfrac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \dfrac{x + y}{x - y}$. Поэтому делаем замену $\dfrac{y}{x} = u$.

Подставив u в уравнение, получим

$$\int \frac{du}{\frac{1 + u}{1 - u} - u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1 - u}{u^2 + 1}\, du = \ln|x| + C.$$

Отсюда получаем общий интеграл

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|x| + C, \quad u = \frac{y}{x}. \; ●$$

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

или

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (12.15)$$

Предположим сначала, что правая часть уравнения (12.15) равна нулю. Тогда $v' + p(x)v = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx + \tilde{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \pm e^{\tilde{C}} e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow v = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{12.16}$$

З а м е ч а н и е. Под неопределенным интегралом часто будем понимать только одну первообразную.

Для решения исходного уравнения (12.15) применяется так называемый *метод вариации произвольных постоянных*. Предположим, что C в (12.16) есть некоторая функция от x, и решение (12.15) будем искать в виде

$$y = u(x)\, e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив это выражение в (12.15), найдем $u(x)$:

$$[u'(x) - u(x)\,p(x) + p(x)\,u(x)]\, e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$u'(x)\, e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C.$$

Отсюда общее решение (12.15)

$$y = \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right) e^{-\int p(x)dx}.$$

○ **Пример.** Решить уравнение

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3 \quad \left(p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = 2x^3\right). \tag{12.17}$$

Р е ш е н и е. Сначала решаем $v' - \dfrac{2}{x}v = 0$:

$$v = Cx^2.$$

Полагаем

$$y = u(x)x^2 \tag{12.18}$$

и подставляем в (12.17). Отсюда

$$u = x^2 + C.$$

Подставим полученную функцию в (12.18), тогда общее решение исходного уравнения

$$y = (x^2 + C)x^2. \bullet$$

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$y' + p(x)y = y^n q(x)$, где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Уравнение Бернулли можно решить указанным выше методом вариации произвольных постоянных, но здесь будет рассмотрен так называемый *метод Бернулли*, который можно применять для любого $n \neq 1$.

○ **Пример.** Решить уравнение $y' + \dfrac{2y}{x} = y^2 x.$

Р е ш е н и е. Сделав замену $y = u(x)\,v(x) = uv$, получим

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = (uv)^2 x.$$

Сгруппируем второе (или первое) слагаемое с третьим:

$$u'v + u\left[v' + \frac{2v}{x}\right] = (uv)^2 x. \qquad (12.19)$$

Приравниваем к нулю выражение в квадратных скобках:

$$v' + \frac{2v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}.$$

Находим функцию v:

$$\ln v = \ln|x|^{-2}; \quad v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставив v в (12.19), находим u:

$$\frac{u'}{x^2} = u^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 x, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u} = \ln|Cx|; \quad u = -\frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Отсюда

$$y = uv = \frac{-1}{x^2 \ln|Cx|}. \bullet$$

Уравнения в полных дифференциалах

Пусть $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ – непрерывные функции. Уравнение

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \qquad (12.20)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (12.20) тогда и только тогда является уравнением в полных дифференциалах, когда существует функция $u = u(x, y)$, такая, что

$$du = P\,dx + Q\,dy, \tag{12.21}$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

○ **Пример.** Решить уравнение

$$2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0.$$

Решение. Здесь $P = 2x\cos^2 y$, $Q = 2y - x^2\sin 2y$, и мы имеем уравнение в полных дифференциалах (проверьте). Значит, существует функция u, такая, что

$$du = 2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy.$$

Поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y$. Отсюда $u = \int 2x\cos^2 y\,dx = x^2\cos^2 y + f(y)$, где функция $f(y)$ зависит только от y (постоянна по отношению к x).

Дифференцируя найденную функцию по y, получаем выражение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin 2y + f'(y),$$

которое, согласно (12.21), можно приравнять к Q:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin 2y + f'(y) = 2y - x^2\sin 2y.$$

Отсюда $f'(y) = 2y$. Если данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то последнее выражение не будет зависеть от x (докажите это). Легко находим

$$f(y) = y^2 - C, \quad u = x^2\cos^2 y + y^2 - C.$$

Из (12.21), (12.20) получим ответ

$$x^2\cos^2 y + y^2 = C. \; \bullet$$

12.3. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнения, не содержащие явно функцию y

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(x, y').$$

Положим $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Тогда получим уравнение первого порядка относительно функции $z(x)$:

$$z' = f(x, z).$$

Проинтегрируем его в общем виде:

$$z = \varphi(x, C_1),$$

и вернемся к исходным переменным:

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Отсюда получим общее решение исходного уравнения

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2.$$

○ **Пример.** Уравнение $x^2y'' + xy' = 1$ не содержит явно функцию y. Сделав замену $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$, получим

$$x^2z' + xz = 1. \tag{12.22}$$

Уравнение второго порядка перешло в линейное уравнение первого порядка, которое можно решить путем замены $z = uv$. Подставляя это выражение в (12.22), получаем

$$x^2u'v + xu(xv' + v) = 1. \tag{12.23}$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю:

$$xv' + v = 0,$$

и находим v:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя его в (12.23), находим u:

$$xu' = 1, \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad u = \ln|C_1x|.$$

Отсюда

$$z = (\ln|C_1x|)\frac{1}{x}$$

и, следовательно,

$$y' = (\ln|C_1x|)\frac{1}{x}.$$

Находим y:

$$y = \int(\ln|C_1x|)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int(\ln|C_1x|)\mathrm{d}\ln|C_1x| = \frac{1}{2}\ln^2|C_1x| + C_2. \; \bullet$$

Уравнения, не содержащие явно x

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(y, y'). \qquad (12.24)$$

Сделав замену

$$\frac{dy}{dx} = p(y); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p, \qquad (12.25)$$

получим

$$p' = \frac{1}{p} f(y, p).$$

Пусть общее решение этого уравнения имеет вид

$$p = g(y, C_1).$$

Тогда

$$y' = g(y, C_1)$$

и общий интеграл (12.24) имеет вид

$$\int \frac{dy}{g(y, C_1)} = x + C_2.$$

○ **Пример.** Решить задачу Коши

$$y'' + 2yy' = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4. \qquad (12.26)$$

Решение. После замены (12.25) получим уравнение первого порядка относительно $p(y)$:

$$pp' + 2yp = 0 \text{ или } p' = -2y.$$

Отсюда находим p:

$$\frac{dp}{dy} = -2y, \quad \int dp = -\int 2y\, dy, \quad p = -y^2 + C_1.$$

Следовательно,

$$y' = -y^2 + C_1. \qquad (12.27)$$

Подставив в (12.27) начальные данные (12.26), получим:

$$-4 = -4 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Отсюда

$$y' = -y^2, \quad \frac{dy}{-y^2} = dx, \quad \frac{1}{y} = x + C_2, \quad y = \frac{1}{x + C_2}.$$

Подставляем начальные данные:

$$2=\frac{1}{0+C_2}\quad\Rightarrow C_2=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y=\frac{2}{2x+1}.\ \bullet$$

12.4. Решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$

Для решения дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$ сделаем замену

$$y^{(n-1)}(x) = z(x),\quad y^{(n)}(x) = z'(x).$$

Тогда

$$z'(x)=f(x),\quad \frac{dz}{dx}=f(x),\quad z(x)=\int f(x)\,dx+C_1.$$

Но $z(x) = y^{(n-1)}(x)$. Следовательно,

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)dx+C_1.$$

Повторяя эту операцию еще $(n-1)$ раз, получим

$$y(x) = \int\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\ \ldots\ dx + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

○ **Пример.** Решить уравнение $y^{(4)}(x) = \sin x$.

Решение. Следуя указанной выше схеме, проинтегрируем данное уравнение 4 раза:

$$\int(y'''(x))'dx=\int\sin x\,dx,$$

$$y'''(x)=-\cos x+C_1,$$

$$\int(y''(x))'dx=\int(-\cos x+C_1)dx,$$

$$y''(x)=-\sin x+C_1x+C_2,$$

$$y'(x)=\cos x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3,$$

$$y(x)=\sin x+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4.\ \bullet$$

12.5. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = q(x),$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, $q(x)$ – непрерывные функции.

Левую часть такого уравнения будем обозначать

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \qquad (12.28)$$

Уравнение $L(y) = 0$ называется **однородным** ($q(x) = 0$), а уравнение $L(y) = q(x)$ – **неоднородным**.

Рассмотрим свойства решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

1°. Для любых функций $v_1(x)$, $v_2(x)$

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2).$$

2°. Для любого числа k и функции $v(x)$

$$L(kv) = kL(v).$$

3°. Если v_1, ..., v_k – решения однородного уравнения, а y^* – частное решение неоднородного уравнения, то для любых чисел C_1, ..., C_k функция $y = C_1v_1 + \ldots + C_kv_k + y^*$ является решением неоднородного уравнения.

Первые два свойства очевидны. Докажем третье.

❑ По условию

$$L(v_i) = 0,\ i = 1, \ldots, k; \qquad L(y^*) = q(x).$$

Из свойств 1° и 2° получаем

$$L\left(\sum_1^k C_i v_i + y^*\right) = \sum_1^k C_i L(v_i) + L(y^*) = \sum_1^k C_i \cdot 0 + q(x) = q(x). \ ■$$

Построим теперь общее решение линейного дифференциального уравнения. Для этого необходимо ввести понятие линейной зависимости и независимости решений дифференциального уравнения.

Система функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ называется **линейно независимой** на множестве A, если тождественное равенство

$$k_1v_1(x) + k_2v_2(x) + \ldots + k_nv_n(x) = 0 \qquad (12.29)$$

имеет единственное возможное решение $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Если существует какое-нибудь ненулевое решение (12.29), то такая система называется **линейно зависимой**.

Предположим, что функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно на множестве A, тогда определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) & & v_n(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) & & v_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n-1)}(x) & v_2^{(n-1)}(x) & \dots & v_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Вронского.***

Известно, что определитель Вронского, составленный из решений линейного однородного дифференциального уравнения, обладает следующим важным свойством.

❑ **Теорема 12.3.** Определитель Вронского $W(x)$ для решений линейного однородного дифференциального уравнения $l(v) = 0$ тождественно равен нулю, когда решения линейно зависимы, и не равен нулю ни в одной точке, если решения линейно независимы на множестве A. ■

❑ **Теорема 12.4.** Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ}} = \sum_1^n C_i v_i(x) + y_{\text{част}}, \tag{12.30}$$

где $v_i(x)$, $i = 1, ..., n$ – линейно независимая система решений, соответствующая линейному однородному уравнению; $y_{\text{част}}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Доказательство. 1. Сначала докажем, что существуют такие решения $v_i(x)$. Для этого достаточно взять отличный от нуля определитель, составленный из начальных условий:

$$W(0) = \begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) & \dots & v_n(0) \\ v_1'(0) & v_2'(0) & \dots & v_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n-1)}(0) & v_2^{(n-1)}(0) & \dots & v_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix}.$$

По теореме 12.1 существуют единственные решения v_1, ..., v_n, удовлетворяющие поставленным начальным условиям. По теореме 12.3 определитель Вронского $W(x)$ не равен нулю ни в одной точке и, следовательно, v_1, ..., v_n линейно независимы.

Таким образом, по свойству 3° для любых C_1, C_2, ..., C_n решение (12.30) является решением линейного неоднородного уравнения.

2. Возьмем теперь некоторую точку $M_0(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ и найдем $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, такие, что

$$y_0 = \sum_1^n C_i^0 v_i(0) + y_{\text{част}}(0),$$

$$y'_0 = \sum_1^n C_i^0 v'_i(0) + y'_{\text{част}}(0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_0^{(n-1)} = \sum_1^n C_i^0 v_i^{(n-1)}(0) + y_{\text{част}}^{(n-1)}(0).$$

Определитель этой системы уравнений $W(0) \neq 0$, поэтому она имеет единственное решение.

Следовательно, по теореме 12.1 решение

$$y(x) = \sum_1^n C_i^0 v_i(x) + y_{\text{част}}$$

проходит через точку M_0.

Таким образом, для любой точки $M_0(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ существуют $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, такие, что решение, проходящее через точку M_0, можно представить в виде (12.30).

Обобщая выводы, полученные в пунктах 1 и 2, получаем, что (12.30) удовлетворяет определению общего решения. Теорема доказана. ■

Линейно независимая система решений $v_1, ..., v_n$ линейного однородного уравнения называется **фундаментальной системой решений**.

12.6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x), \tag{12.31}$$

где $p_1, p_2, ..., p_n$ – некоторые постоянные, и соответствующее ему однородное уравнение

$$L(v) = v^{(n)} + p_1 v^{(n-1)} + p_2 v^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} v' + p_n v = 0. \tag{12.32}$$

Согласно теореме об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка (см. теорему 12.4) достаточно найти n линейно независимых решений линейного однородного уравнения (12.32) и какое-либо частное решение неоднородного уравнения (12.31).

Решение уравнения (12.32) будем искать в виде $v = e^{\lambda x}$. Получим

$$(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n)e^{\lambda x} = 0,$$

или

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \qquad (12.33)$$

Уравнение (12.33) называется **характеристическим**.

Далее рассмотрим различные случаи для корней характеристического уравнения.

1. Пусть корни (12.33) действительны и различны. Тогда

$$v_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad v_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad v_n = e^{\lambda_n x}$$

– линейно независимые решения уравнения (12.32). Следовательно, общее решение уравнения (12.32)

$$v_{\text{общ}} = \sum_1^n C_i e^{\lambda_i x}.$$

○ **Пример.** Решить уравнение

$$v''' - 2v'' \ldots v' + 2v = 0.$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$v_{\text{общ}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \bullet$$

2. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных: $\lambda_1 = h + i\omega$, $\lambda_2 = h - i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$. Тогда им соответствуют два комплексных решения:

$$\tilde{v}_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{hx}(\cos \omega x + i \sin \omega x), \quad \tilde{v}_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{hx}(\cos \omega x - i \sin \omega x).$$

Из них можно составить два линейно независимых действительных решения:

$$v_1 = \frac{\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2}{2} = e^{hx}\cos \omega x, \quad v_2 = \frac{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2}{2i} = e^{hx}\sin \omega x.$$

○ **Пример.** Решить уравнение $v''' - 4v'' + 6v' - 4v = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$.

Общее решение имеет вид

$$v_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x). \bullet$$

3. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется корень $\lambda = a$ кратности $k > 1$.

Можно показать, что

$$v_s = x^s e^{ax}, \quad s = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{12.34}$$

являются решениями уравнения (12.32). Причем если $s \geqslant k$, то такие функции не будут решениями. Очевидно, что (12.34) – линейно независимые решения.

Если $a = h \pm i\omega$ – комплексные корни кратности k, то по аналогии с пунктом 2 получим линейно независимые действительные решения:

$$x^s e^{hx} \cos \omega x, \quad x^s e^{hx} \sin \omega x, \quad s = 0, 1, \ldots, k-1.$$

○ **Пример.** Решить уравнение $v''' - 5v'' + 8v' - 4v = 0$.

Решение. Так как корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, то общее решение имеет вид

$$v = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}. \; ●$$

○ **Пример.** Решить уравнение $v'''' + 4v''' + 8v'' + 8v' + 4v = 0$.

Решение. Раскладывая характеристический многочлен на множители

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

получаем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i.$$

Следовательно, общее решение

$$v = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x). \; ●$$

II. Теперь вернемся к исходному линейному неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x). \tag{12.35}$$

Его частное решение можно получить методом вариации произвольных постоянных, аналогичным рассмотренному в параграфе 12.2 для линейного уравнения первого порядка.

Укажем способы нахождения частного решения в случае, когда правая часть (12.35) имеет специальный вид.

А. Если $q(x) = e^{\gamma x} P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен m-й степени, то частное решение можно искать в виде

$$y_{\text{част}} = x^s e^{\gamma x} Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ – многочлен m-й степени с неопределенными коэффициентами; $s = 0$, если γ не является корнем характеристического уравнения, в противном случае s равно кратности этого корня.

○ **Пример.** Решить уравнение $y'' + 3y' = 18x + 9$.

Р е ш е н и е. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$. Так как $\gamma = 0$ – корень характеристического уравнения, кратность которого равна единице, то частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{част}} = x(Ax + B).$$

Подставим его в уравнение

$$2A + 3(2Ax + B) = 18x + 9.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 6A = 18, \\ 2A + 3B = 9. \end{cases}$$

Отсюда $A = 3$, $B = 1$ и

$$y_{\text{част}} = 3x^2 + x, \quad y_{\text{общ}} = C_1 e^{-3x} + C_2 + 3x^2 + x. \; \bullet$$

○ **Пример.** Решить уравнение $y''' - 6y'' + 9y' = x e^{3x}$.

Р е ш е н и е. Так как $\gamma = 3$ – корень кратности два, то

$$y_{\text{част}} = x^2 (Ax + B) e^{3x}.$$

Подставляя его в уравнение, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 27A - 54A + 27A = 0, \\ 27B + 81A - 54B - 108A + 27B + 27A = 0, \\ 54B + 54A - 72B - 36A + 18B = 1, \\ 18B + 6A - 12B = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18A = 1, \\ 6A + 6B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = \dfrac{1}{18}$, $B = -\dfrac{1}{18}$ и

$$y_{\text{част}} = \frac{1}{18}(x^3 - x^2) e^{3x},$$

$$y_{\text{общ}} = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{3x} + \frac{1}{18}(x^3 - x^2) e^{3x}. \; \bullet$$

Б. Пусть $q(x) = e^{\gamma x}(P_{m_1}(x)\cos\beta x + \tilde{P}_{m_2}(x)\sin\beta x)$, где $P_{m_1}(x)$, $\tilde{P}_{m_2}(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

В этом случае частное решение можно искать в виде

$$y_{\text{част}} = x^s e^{\gamma x}(Q_m(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_m(x)\sin\beta x),$$

где $m = \max\{m_1, m_2\}$; $s = 0$, если $\gamma + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения; в противном случае, если $\gamma + i\beta$ – корень характеристического уравнения, то s – его кратность.

○ **Пример.** Решить уравнение $y'' + 2y' + y = \cos x$.

Р е ш е н и е. Частное решение находим в виде

$$y_{\text{част}} = x^0 e^{0 \cdot x}(A \cos x + B \sin x).$$

Подставим его в уравнение, получим

$$\begin{cases}(-A + 2B + A)\cos x = \cos x,\\(-13 - 2A + B)\sin x = 0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2B = 1,\\-2A = 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = 0,\\B = \dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Найдя общее решение однородного уравнения, получим общее решение исходного уравнения:

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x. \bullet$$

13. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

13.1. Задача численного интерполирования. Многочлены Лагранжа и Ньютона

Интерполяционная задача состоит в построении обобщенного многочлена, принимающего значения исследуемой функции $f(x)$ на конечном множестве $B \in A$ (область задания функции). В частности, если $A = [a, b]$, а множество $B = \{x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$, искомый многочлен имеет линейную структуру и может быть представлен в виде

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x), \tag{13.1}$$

где c_i – коэффициенты разложения; $\varphi_i(x)$ – базисные функции, обладающие линейной независимостью на $[a, b]$.

Указанный многочлен должен удовлетворять условиям:

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ P_n(x_n) = f(x_n),$$

или

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{13.2}$$

Точки x_i называются *узлами интерполирования*. Можно показать, что условия (13.2) однозначно удовлетворяются с помощью выбора коэффициентов c_i, если семейство функций $\{\varphi_i(x)\}$ составляет базис на $[a, b]$.

Рассмотрим наипростейшую базисную систему функций $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$, ..., $\varphi_n = x^n$. В этом случае $P_n(x)$ – обычный многочлен n-го порядка, а условия (13.2) таковы:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + \ldots + c_n x_0^n = f(x_0), \\ c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_1^n = f(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 + c_1 x_n + \ldots + c_n x_n^n = f(x_n). \end{cases} \tag{13.3}$$

Системе можно придать векторно-матричный вид, обозначив

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $A\bar{c} = \bar{y}$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.

Определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{(i>j) \\ i,j=1}}^{n} (x_i - x_j). \qquad (13.4)$$

Очевидно, что если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, то A – невырожденная матрица и решение системы (13.3) имеет вид $\bar{c} = A^{-1}\bar{y}$.

Многочлен $P_n(x)$ в случае произвольной системы узлов $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ именуется **интерполяционным многочленом Лагранжа**. Структура данного многочлена может быть представлена в форме

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)}; \qquad (13.5)$$

где $\omega_i(x) = \prod_{\substack{(j \neq i) \\ j=0}}^{n} (x - x_j) = \dfrac{\omega(x)}{x - x_i}$,

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Откуда $P_n(x) = \omega(x) \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{y_i}{(x - x_i)\omega_i(x_i)}$.

Можно несколько изменить это выражение, если учесть, что $\omega'(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \omega_i(x)$ и $\omega'(x_i) = \omega_i(x_i)$, т. е.

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'(x_i)}. \qquad (13.6)$$

❍ **Пример.** Пусть функция $f(x)$ представлена значениями $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1$ в узлах $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Тогда $\omega(x) = x(x - 0{,}5)(x - 2)(x - 3)$, $\omega_0(0) = -0{,}5(-2)(-3) = -3$, $\omega_1(0{,}5) = 0{,}5(-1{,}5)(-2{,}5) = 1{,}875$, $\omega_2(2) = 2 \cdot 1{,}5(-1) = -3$, $\omega_3(3) = 3 \cdot 2{,}5 \cdot 1 = 7{,}5$ и

$$P_3(x) = x(x - 0{,}5)(x - 2)(x - 3) \times$$
$$\times \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{2}{1{,}875}\frac{1}{x - 0{,}5} - \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{7{,}5}\frac{1}{x - 3} \right). \bullet$$

Если число узлов не соответствует степени многочлена $P_m(x)$ ($n < m$), то решение задачи интерполирования неоднозначно. Возникающую при этом неопределенность можно устранить путем введения дополнительных условий, налагаемых на значения коэффициентов. В частности, в узлах интерполяции можно задать не только значения функции, но и значения ее производной. В противоположном случае ($n > m$) задача интерполирования не имеет решения в общем виде, так как система условий может оказаться несовместной. Однако если задачу точного интерполирования заменить задачей общей аппроксимации, которая заключается в построении многочлена низшей степени, наименее отклоняющегося от заданной функции, то ее решение обеспечивается алгоритмами, рассмотренными в параграфе 13.5.

Особой разновидностью интерполяционного многочлена является **многочлен Ньютона**, который строится в предположении, что узлы x_i и x_{i+1} для любого i равно отстоят друг от друга: $x_i = x_0 + ih$, где h – шаг интерполяции.

В качестве базисных функций φ_i возьмем функции:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = x - x_0, \quad \varphi_2 = (x - x_0)(x - x_1), \ldots,$$
$$\varphi_n = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Если ввести оператор разности

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in [a, b - h], \tag{13.7}$$

можно записать следующие свойства:

1) $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$;
2) $\Delta(kf) = k\Delta f$ (k – постоянная);
3) $\Delta\varphi_l(x) = (x + h - x_0)(x + h - x_1)\cdots(x + h - x_{l-1}) - (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{l-1}) = [x + h - x_0 - (x - x_{l-1})] \times (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{l-2}) = lh\,\varphi_{l-1}(x)$.

Таким образом, оператор разности преобразует многочлены $\varphi_l(x)$ в многочлены того же вида, имеющие степень на единицу меньше.

Если теперь разложить многочлен $P_n(x)$ по базису $\{1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$:

$$P_n(x) = b_0 \cdot 1 + b_1\varphi_1(x) + \ldots + b_n\varphi_n(x),$$

то для нахождения коэффициентов b_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) можно использовать операторы разности высших порядков:

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f),\ \Delta^3 f = \Delta(\Delta^2 f),\ \ldots,\ \Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f). \tag{13.8}$$

Тогда получим систему

$$\begin{cases} P_n(x) = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n, \\ \Delta P_n(x) = b_1 \cdot 1 \cdot h\varphi_0 + b_2 \cdot 2 \cdot h\varphi_1 + \ldots + b_n nh\varphi_{n-1}, \\ \Delta^2 P_n(x) = b_2 \cdot 2 \cdot h^2\varphi_0 + b_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot h^2\varphi_1 + \ldots + b_n n(n-1)h^2\varphi_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^n P_n(x) = b_n n! h^n\varphi_0, \quad \varphi_0 = 1. \end{cases} \tag{13.9}$$

Подставим в обе части системы (13.9) значения $x = x_0$, $P_n(x_0) = f(x_0)$, $\Delta P_n(x_0) = \Delta f(x_0)$, ..., $\Delta^n P_n(x_0) = \Delta^n f(x_0)$ и запишем

$$b_0 = f(x_0),\ b_1 = \frac{\Delta f(x_0)}{1!h},\ b_2 = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}, \dots, b_n = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}. \qquad (13.10)$$

Отсюда

$$P_n(x) = f(x_0)\varphi_0 + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}\varphi_1(x) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}\varphi_2(x) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\varphi_n(x).$$

Эта формула представляет собой *интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования вперед* (от узла x_0 по системе возрастающих узлов x_1, x_2, ..., x_{n-1}).

Приведем без вывода *интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования назад*:

$$P_n(x) = f(x_n)\psi_0 + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!h}\psi_1(x) + \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!h^2}\psi_2(x) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\psi_n(x),$$

где $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = x - x_n$, $\psi_2 = (x - x_n)(x - x_{n-1})$, ...,
$\psi_n = (x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1)$.

○ **Пример.** Пусть дана система равноотстоящих узлов с шагом $h = 0{,}2$ и конечными точками $x_0 = 1$, $x_n = 2$ ($n = 5$). Значения $f(x)$ в этих точках приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

i	x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0	1,0	2,6000	0,0350	0,0360	–0,0680	0,1206	–0,1692
1	1,2	2,6350	0,0710	–0,0320	0,0526	–0,0486	
2	1,4	2,7060	0,0390	0,0206	0,0040		
3	1,6	2,7450	0,0596	0,0240			
4	1,8	2,8046	0,0842				
5	2,0	2,8888					

Нетрудно убедиться, что значения разностей, используемых для интерполирования вперед, располагаются вдоль горизонтальной строки (сверху), а значения разностей, используемых для интерполирования назад, – вдоль наклонной линии, окаймляющей таблицу. ●

Если принять, что функция $f(x)$ в промежутке (a, b) имеет производные до $(n + 1)$-го порядка включительно, можно получить выражение для остаточного члена $R_n(x)$ разложения

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \qquad (13.11)$$

Функция $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ в силу сказанного дифференцируема в (a, b) до $(n + 1)$-го порядка и имеет $n + 1$ корень в узлах x_i $(i = 0, 1, ..., n)$. Если составить новую функцию $\lambda(x) = R_n(x) - k\omega(x)$, то $\lambda(x)$ также имеет производные до $(n + 1)$-го порядка и обращается в нуль в узлах x_i. Подберем k таким образом, чтобы $\lambda(x)$ имела еще один корень в точке $x^* \in (a, b)$ и $x^* \neq x_i$. Тогда по теореме Ролля найдется $n + 1$ точка $x_{1,i}$, такая, что $x_{1,i} \in (x_{i-1}, x_i)$ и $\lambda'(x_{1,i}) = 0$.

Рассматривая промежутки $[x_{1,i}, x_{1,i+1}]$, на концах которых $\lambda' = 0$, найдем по теореме Ролля n точек $x_{2,i} \in (x_{1,i}, x_{1,i+1})$, таких, что $\lambda''(x_{2,i}) = (\lambda')' = 0$. Продолжая этот процесс далее, найдем хотя бы одну точку, в которой $(n + 1)$-я производная λ равна нулю: $\lambda^{(n+1)}(\theta) = 0$.

Отсюда

$$\lambda^{(n+1)} = f^{(n+1)} - P_n^{(n+1)} - k(n + 1)!,$$

и так как

$$P_n^{(n+1)} = 0 \text{ и } k = \frac{R_n(x^*)}{\omega(x^*)},$$

то

$$f^{(n+1)}(\theta) - \frac{R_n(x^*)}{\omega(x^*)}(n + 1)! = 0.$$

Таким образом,

$$R_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\omega(x^*).$$

Заменив в этой формуле x^* на x $(x \neq x_i)$, окончательно получим для (13.11)

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\omega(x). \tag{13.12}$$

○ **Пример.** $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$.

Зададим равноотстоящие узлы с шагом $h = \frac{\pi}{4}$. Составим $\omega(x)$:

$$\omega = x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})(x - \frac{3\pi}{4})(x - \pi), \quad n = 4.$$

Для простоты заменим x на $t = \dfrac{x - \frac{\pi}{2}}{\pi/4}$. Тогда $t_0 = -2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$ и $\omega(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 t(t^2 - 1)(t^2 - 4) = a(t^5 - 5t^3 + 4t)$, где $a = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \approx 0{,}298 \approx 0{,}3$.

Производная $f^{(5)}(x) = \cos x$, поэтому

$$|R_4| \leqslant \frac{a}{5!}\max_{[a,b]}|\cos x| \max_{t\in[-2,2]}|t^5 - 5t^3 + 4t|.$$

Очевидно, что $\max\limits_{[a,b]} |\cos x| = 1$, а $\max\limits_{t\in[-2,2]}|t^5 - 5t^3 + 4t|$ достигается в точке экстремума $h(t) = t^5 - 5t^3 + 4t$.

Производная $h' = 5t^4 - 15t^2 + 4 = 0$ в точках

$$t_{1,2}^2 = \frac{15 \pm \sqrt{145}}{10} \approx \frac{15 \pm 12}{10} \Rightarrow t_1^2 = 2{,}7, \quad t_2^2 = 0{,}3.$$

Сравнивая значения $|h|$ в точках $\sqrt{0{,}3}, \sqrt{2{,}7}$ и 2, получим $\max\limits_{[-2,2]} |h| = 3{,}63$. Поэтому $|R_4| < 0{,}01$.

Многочлен Ньютона $P_4(x)$ опирается на значения $y(0) = 0$, $\Delta y(0) = 0{,}707$, $\Delta^2 y(0) = -0{,}414$, $\Delta^3 y(0) = -0{,}172$, $\Delta^4 y(0) = 0{,}344$ и записывается так:

$$P_4(x) = = \frac{0{,}707}{\pi/4}x - \frac{0{,}207}{(\pi/4)^2}x(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{0{,}172}{6(\pi/4)^3}x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2}) +$$

$$+ \frac{0{,}344}{24(\pi/4)^4}x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})(x - \frac{3\pi}{4}). \bullet$$

13.2. Численное интегрирование дифференциальных уравнений методом Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка в форме

$$y' = f(x, y), \tag{13.13}$$

где $f(x, y)$ – функция, определенная и непрерывная вместе с $f_y'(x, y)$ в прямоугольнике $[a, b; c, d]$. Тогда по теореме существования решения (см. теорему 12.1) в указанном прямоугольнике существует единственное решение задачи Коши для любой точки M_0, определяющей начальные координаты (x_0, y_0).

Примем для простоты, что прямоугольник $[a, b; c, d]$ является полосой $[a, b; -\infty, +\infty]$, т. е. решение $y = \varphi(x)$ определено при любом $x \in [a, b]$.

Проинтегрируем неявно данное уравнение по x в пределах от x_0 до x^*:

$$y(x^*) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x^*} f(x, y)\mathrm{d}x. \tag{13.14}$$

Интеграл, стоящий в правой части выражения (13.14), существует и задает непрерывную и дифференцируемую функцию, если переменная y совпадает с $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна в $[a, b]$.

Переменную x^* примем равной $x_1 = x_0 + h$, где h – шаг интегрирования, и построим приближенное значение $y(x_1) = y_1$, заменив сложную зависимость $f(x, y) = f(x, \varphi)$ на $f(x_0, y_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = F(x_0)$:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Подобное выражение получается при замене точной производной y' в точке x_0 значением разделенной разности $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ и фиксировании начальных условий:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad y'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{\Delta x},$$

т. е.

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \approx f(x_0, y_0).$$

Отсюда

$$\frac{y_1 - y_0}{h} \approx f(x_0, y_0).$$

Указанную процедуру приближенного вычисления можно распространить на промежутки $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ ($x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, ..., n$) и получить

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\mathrm{d}x \approx y_1 + hf(x_1, y_1), \ldots,$$

$$y_n = y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y)\mathrm{d}x \approx y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \tag{13.15}$$

или в общем случае

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{13.16}$$

определяющие приближенные значения функции $y = \varphi(x)$ в узловых точках $x_1, x_2, ..., x_n$.

Зависимости (13.16) составляют алгоритм, именуемый **методом Эйлера** приближенного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Суть метода Эйлера – замена точной интегральной кривой $y = \varphi(x)$ (рис. 13.1), представленной дугами $M_{i-1}M_i$, на отрезки $M^*_{i-1}M^*_i$, угловые коэффициенты которых равны значениям $f(x^*_{i-1}, y^*_{i-1}) =$

$= f(M^*_{i-1})$. При этом в исходной точке $M_0(x_0, y_0)$ графики точного и приближенного решения совпадают и имеют равные углы наклона.

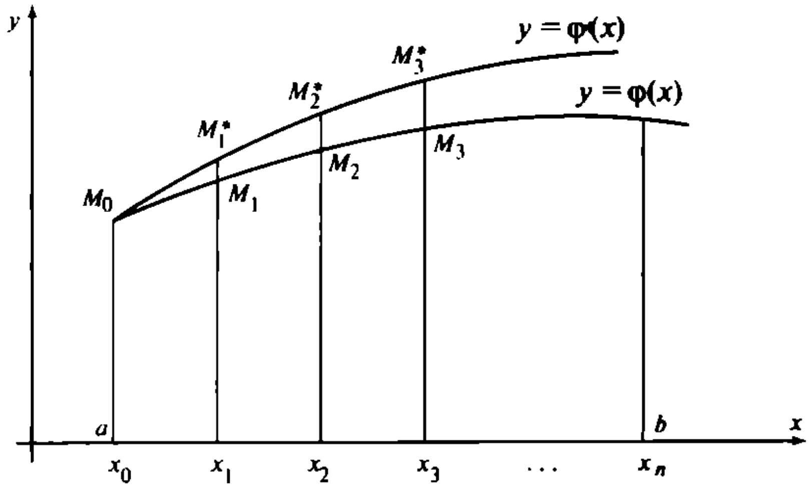


Рис. 13.1

В остальных узловых точках $(x_1, x_2, ..., x_n)$ значения точного решения $\varphi(x_i)$ и решения, полученного по методу Эйлера, отличаются друг от друга.

Для того чтобы уменьшить погрешность вычисления, введем на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ вместо одной переменной две переменные, обозначаемые y_i и v_i:

$$\begin{cases} v_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \\ y_i = y_{i-1} + \dfrac{h}{2}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, v_i)]. \end{cases} \tag{13.17}$$

Первое соотношение задает изменение v_i по ординарной схеме Эйлера, а второе представляет изменение y_i, вычисленное по модифицированной схеме. В последней предполагается замена интеграла $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y)dx$ в формуле (13.15) приближенным выражением

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, v_i)]dx = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, v_i)].$$

Этот метод получил наименование ***метода Эйлера с выравниванием.*** Он основан на идее наложения двусторонних процессов, один из которых берет начало в узле x_{i-1}, а второй – в узле x_i. С помощью приведенной схемы выравнивания ослабляется влияние разнознаковых ошибок, генерируемых в узловых точках, что способствует увеличению точности вычислений. Если ошибки однознаковые, учитывается их суммарное действие и задается среднее смещение интегральной величины.

○ **Пример.** $y' = x - y = f(x, y)$, $y = 2$ при $x = 0$.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Частное решение

$$\varphi(x) = 3e^{-x} + x - 1.$$

Сравним результаты приближенного интегрирования данного уравнения в [0, 1] с шагом $h = 0{,}2$, выполненного по простой схеме Эйлера и схеме с выравниванием (табл. 13.2).

Здесь y_n – значение по схеме с выравниванием; y_n^* – значение по простой схеме; $y_n^{\text{точн}}$ – значение точного решения.

Таблица 13.2

n	x_n	y_n	v_{n+1}	y_{n+1}	y^*_n	$y_n^{\text{точн}}$
0	0,00	2,0000	1,6000	1,6600	2,0000	2,0000
1	0,20	1,6600	1,3680	1,4100	1,6000	1,6561
2	0,40	1,4100	1,2080	1,2482	1,3200	1,4109
3	0,60	1,2482	1,1186	1,1515	1,1360	1,2464
4	0,80	1,1515	1,0812	1,1082	1,0290	1,1479
5	1,00	1,1082	–	–	0,9830	1,1037

Таблица 13.2 полностью подтверждает, что схема Эйлера с выравниванием дает значительно лучшее приближение, чем простой алгоритм Эйлера. Ошибка метода с выравниванием в [0, 1] имеет порядок 10^{-3}, а простой схемы 10^{-2}. ●

13.3. Вычисление определенных интегралов методом трапеций и парабол

Задача вычисления определенного интеграла далеко не всегда может быть решена сведением к первообразной, поэтому разработаны численные методы, которые позволяют найти значение интеграла с достаточно высокой точностью. Суть этих методов – в замене подынтегральной функции интерполяционным многочленом. При этом возникает альтернативный выбор: осуществить замену подынтегральной функции одним интерполяционным многочленом высокой степени, описывающим изменение функции $f(x)$ на всем промежутке $[a, b]$, или семейством интерполяционных многочленов невысокой степени, представляющих функцию $f(x)$ на локальном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, ..., n$).

В последнем случае искомый интеграл получают в виде суммы интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx,$$

каждый из которых вычисляется путем замены $f(x)$ интерполяционным многочленом невысокой степени.

Первая постановка не получила заметного распространения в силу ее громоздкости и малой эффективности, что обусловлено значительным влиянием ошибок вычисления. Вторая постановка оказалась наиболее рациональной, так как позволила создать алгоритмические структуры с высокой степенью защиты от ошибок вычислений.

Рассмотрим две модели приближенного интегрирования: с помощью интерполяционных многочленов первой и второй степени. Первая модель именуется *методом трапеций*, вторая — *методом парабол* (*Симпсона*).

Метод трапеций

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n равных частей: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, где $x_i = x_0 + ih$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx. \tag{13.18}$$

В каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ заменим $f(x)$ на $P_{1,i}$:

$$P_{1,i} = f(x_i) + \frac{\Delta f_i}{h}(x - x_i)$$

и

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{1,i}(x)dx = y_i h + \frac{\Delta y_i}{h}\frac{1}{2}(x - x_i)^2\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}h.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i + y_{i+1}}{2} = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right), \quad h = \frac{b-a}{n}. \tag{13.19}$$

Метод парабол

По аналогии построим аппроксимацию интеграла методом парабол, предварительно разбив промежуток $[a, b]$ на $2m$ частей $(n = 2m)$. Тогда получим m промежутков $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{2m-2}, x_{2m}]$, каждый из которых содержит три узловые точки. Так, промежуток $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, где $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, содержит точки x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}.

Особенности аппроксимационных представлений по методу трапеций и парабол приведены на рис. 13.2.

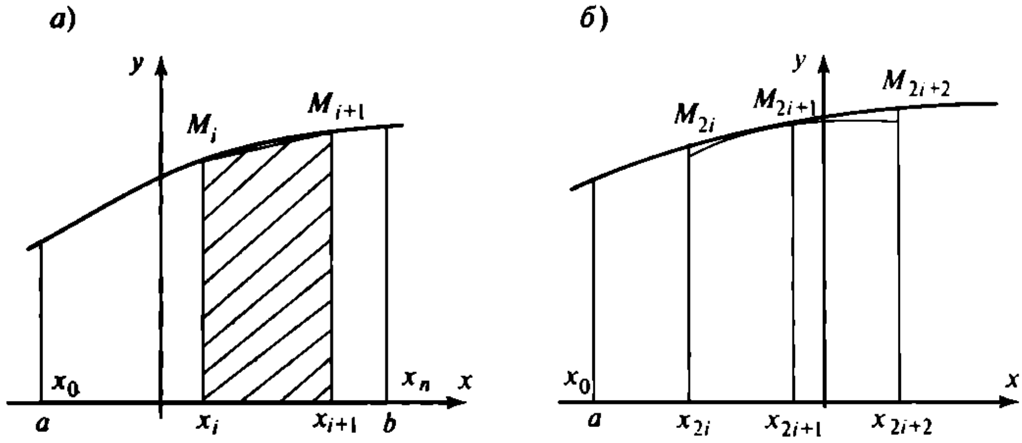


Рис. 13.2

В методе трапеций (рис. 13.2, *а*) на каждом элементарном промежутке значение интеграла заменяется площадью трапеции, а в методе парабол (рис. 13.2, *б*) площадью криволинейной трапеции с дугой в форме параболы.

В последнем случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_{2,i}\,dx,$$

где

$$P_{2,i} = y_{2i} + \frac{\Delta y_{2i}}{1!h}(x - x_{2i}) + \frac{\Delta^2 y_{2i}}{2!h^2}(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}).$$

Величины интегралов от $P_{2,i}$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_{2,i}\,dx = y_{2i}\cdot 2h + \frac{\Delta y_{2i}}{h}\frac{1}{2}(x - x_{2i})^2\Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y_{2i}}{h^2}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}(x - x_{2i})(x - x_{2i} - h)\,dx =$$

$$= y_{2i}\cdot 2h + \Delta y_{2i}\cdot 2h + \frac{1}{3}\Delta^2 y_{2i}h = h[2y_{2i+1} + \frac{1}{3}(y_{2i+2} - 2y_{2i+1} + y_{2i})] =$$

$$= \frac{h}{3}(y_{2i+2} + 4y_{2i+1} + y_{2i}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + 4\sum_{i=0}^{m-1} y_{2i+1}\right), \qquad (13.20)$$

где $h = \dfrac{b-a}{2m}$.

Эта формула называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона.*

Погрешность методов трапеций и парабол

Оценим погрешность полученных выражений. Величину погрешности можно представить в формульном виде, если предположить, что функция $f(x)$ имеет производные второго или четвертого порядка в промежутке $[a, b]$. Запишем эти выражения, опуская промежуточные выкладки:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) - \frac{n}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 f''(\theta), \theta \in (a, b); \qquad (13.21)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + 4\sum_{i=0}^{m-1} y_{2i+1}\right) -$$

$$-\frac{n}{90}\left(\frac{b-a}{2m}\right)^5 f^{IV}(\eta), \quad \eta \in (a, b). \qquad (13.22)$$

Нетрудно видеть, что остаточный член формулы парабол (см. формулу (13.22)) при возрастании m убывает с большей скоростью, чем остаточный член формулы трапеций (см. формулу (13.21)), если соответствующие производные функции $f(x)$ являются ограниченными.

○ Действительно, если принять $f(x) = e^{-2x}$ и $[a, b] = [0; 1{,}2]$, то

$$I = \int_0^{1,2} e^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2,4}) = 0{,}454601.$$

Положим $n = 6$ и $h = \dfrac{b-a}{n} = 0{,}2$.

Приведем таблицу узловых значений функции e^{-2x} (табл. 13.3).

Таблица 13.3

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20
y_i	1,000	0,6703	0,4493	0,3012	0,2019	0,1353	0,0907

Значение интеграла по формулам трапеций $I_{тр}$ и парабол $I_{пар}$ таково:

$$I_{тр} = 0{,}460687, \qquad I_{пар} = 0{,}454704.$$

Следовательно, реальные ошибки составляют:

$$I - I_{тр} = 0{,}006086; \quad I - I_{пар} = -0{,}000103.$$

С другой стороны, оценочные величины ошибок, вычисленные по формулам (13.21) и (13.22), имеют вид

$$\left|\frac{6}{12}0{,}2^3 f''(\theta)\right| \leqslant 0{,}004 \max_{[0;\,1,2]}|f''(x)| \approx 0{,}016$$

и

$$\left|\frac{6}{90}0{,}2^5 f^{IV}(\eta)\right| \leqslant \frac{0{,}00032}{15}\max_{[0;\,1,2]}|f^{IV}(x)| \approx 0{,}00032.$$

Оценочные погрешности примерно в 3 раза превосходят реальные погрешности, что вполне удовлетворительно с точки зрения практики. Отметим также, что погрешность интегрирования по формуле парабол на два порядка, т. е. почти в 100 раз, меньше, чем по формуле трапеций. ●

13.4. Итерационные методы решения функциональных уравнений

Рассмотрим задачу численного решения *функционального уравнения* $f(x) = 0$, где $f(x)$ – определенная и непрерывная в $[a, b]$ функция.

Будем полагать, что выполнены условия существования единственного корня функции в $[a, b]$. Для этого достаточно, чтобы произведение $f(a) \cdot f(b)$ было отрицательным и в промежутке (a, b) существовала производная постоянного знака. Кроме того, примем, что в (a, b) существует знакопостоянная вторая производная $f''(x)$, т. е. график функции $f(x)$ имеет однородную выпуклость в указанном промежутке. Тогда искомый корень x^* будет соответствовать одной из четырех реализаций, приведенных на рис. 13.3.

Далее покажем, что условие однородной выпуклости позволяет построить монотонные алгоритмы последовательного приближения к x^* с двух сторон (слева и справа).

Эта процедура носит название *итерационного метода хорд и касательных.*

Рассмотрим итерационную схему приближений с помощью хорд. Возьмем за основу вариант I (см. рис. 13.3, *а*) и соединим концевые точки M_a и M_b графика хордой (рис. 13.4).

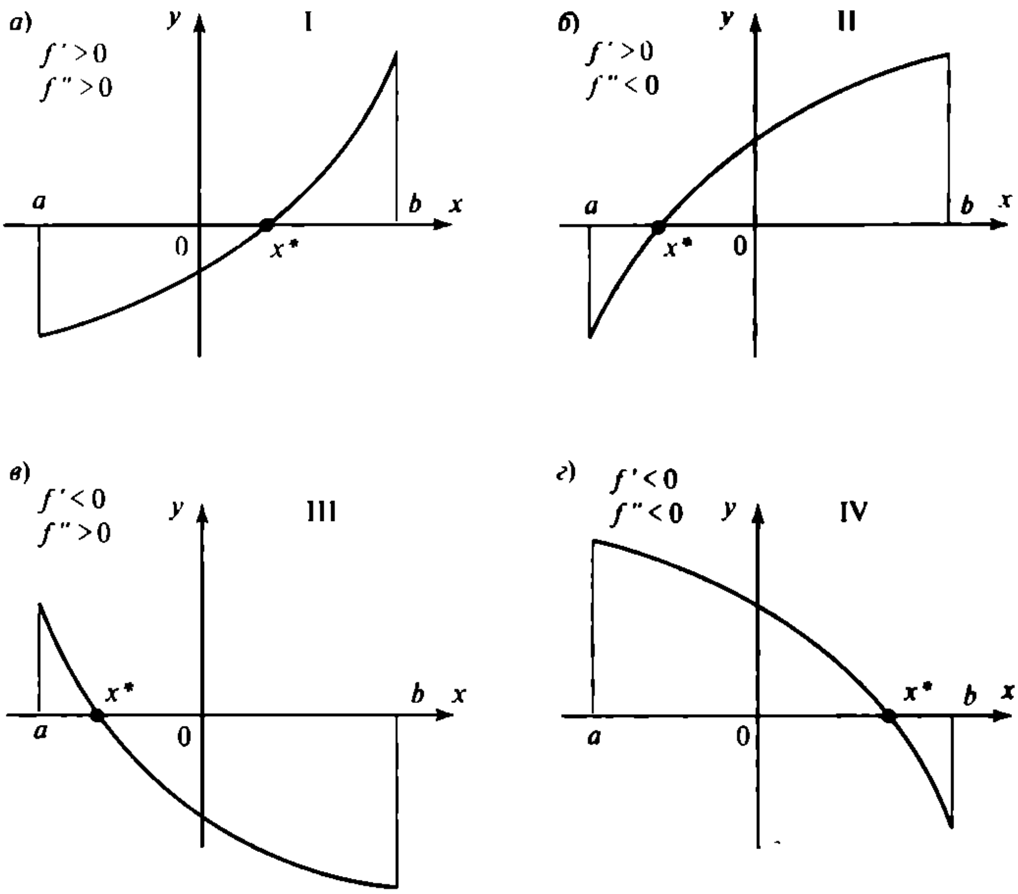


Рис. 13.3

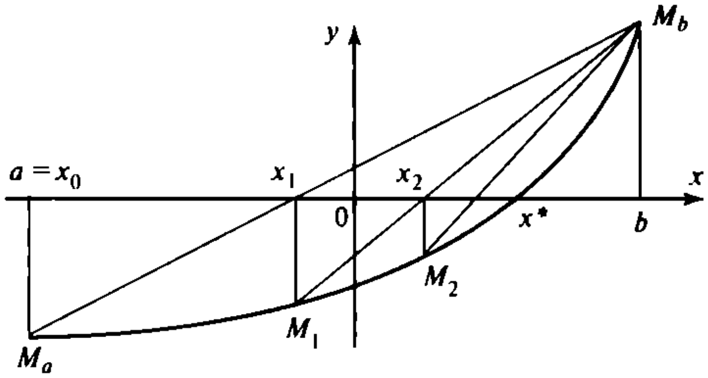


Рис. 13.4

Составим уравнение хорды M_aM_b:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-y_a}{y_b-y_a}$$

и определим точку пересечения с осью Ox, т. е. точку x_1:

$$x_1 = a - \frac{b-a}{y_b-y_a}y_a.$$

Если обозначить $a = x_0$ и $y_a = f(x_0) = y_0$,
то получим

$$x_1 = x_0 - \frac{b-x_0}{y_b-y_0}y_0.$$

Далее, зафиксировав M_b, построим хорду M_1M_b и определим ее точку пересечения с осью Ox. Эта точка x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{y_b-y_1}y_1.$$

Этот процесс можно продолжить, и на n-м шаге получим точку x_n – точку пересечения n-й хорды с осью Ox:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b-x_{n-1}}{y_b-y_{n-1}}y_{n-1}, \tag{13.23}$$

где $y_{n-1} = f(x_{n-1})$.

Процедура приближения к точке x^* с помощью касательных изображена на рис. 13.5.

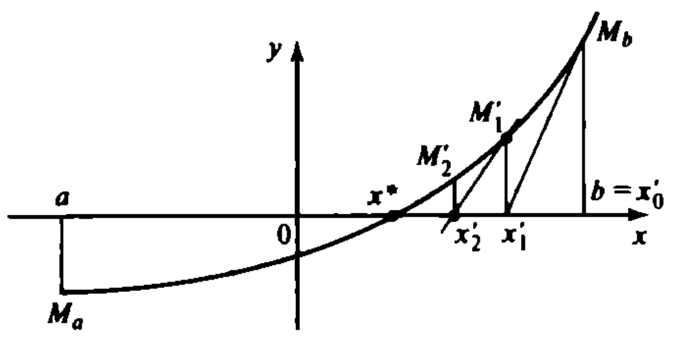


Рис. 13.5

Последовательность точек x'_n начинается с точки $x'_0 = b$. Через точку M_b проведем касательную

$$y - y_b = f'(b)(x - b)$$

и найдем точку пересечения касательной с осью Ox. Это точка x'_1:

$$x'_1 = x'_0 - \frac{1}{f'(x'_0)} f(x'_0).$$

Через точку M'_1 графика проведем новую касательную и найдем ее пересечение с осью Ox – точку x'_2:

$$x'_2 = x'_1 - \frac{1}{f'(x'_1)} f(x'_1).$$

Этот процесс можно продолжить, и на n-м шаге получим точку

$$x'_n = x'_{n-1} - \frac{1}{f'(x'_{n-1})} f(x'_{n-1}). \qquad (13.24)$$

Из построения следует, что при соблюдении знакопостоянства f'' (однородная выпуклость графика) точки последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ будут располагаться по разные стороны от искомого значения x^*. В частности, для рассматриваемого варианта (см. рис. 13.5)

$x_n < x^* < x'_n$.

При этом для $\forall n$

$x_{n+1} > x_n, \quad x'_{n+1} < x'_n$.

❑ Покажем, что все $x_n < x^*$.

Действительно, если $x_n < x^*$ и $b > x^*$ ($f(x_n) < 0$, $f(b) > 0$), то из условия выпуклости вниз функции $f(x)$ ($f'' > 0$) следует, что

$$f(\tilde{x}) = f(\lambda x_n + \mu b) \leqslant \lambda y_n + \mu y_b = \tilde{y}, \quad \lambda x_n + \mu b = \tilde{x},$$

где $\lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \lambda + \mu = 1.$

Точка $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ лежит на хорде $M_n M_b$. В случае если $\tilde{y} = 0$, значение $\tilde{x}$ совпадает с точкой последовательности x_{n+1}. Поэтому

$f(x_{n+1}) < 0 = f(x^*)$.

С учетом монотонности $f(x)$: $x_{n+1} < x^*$. ■

❑ Аналогично, если $x'_n > x^*$ ($f(x'_n) \geqslant 0$),

то $x'_{n-1} - x^* = x'_n - x^* - \dfrac{1}{f'(x'_n)}[f(x'_n) - f(x^*)]$.

Применяя теорему Лагранжа к $f(x'_n) - f(x^*)$, получим

$$x'_{n-1} - x^* = \frac{(x'_n - x^*)\, f'(x'_n) - (x'_n - x^*) f'(\xi)}{f'(x'_n)} =$$

$$= (x'_n - x^*)\frac{f'(x'_n) - f'(\xi)}{f'(x'_n)},$$

где $\xi \in (x^*, x'_n)$.

Далее применим теорему Лагранжа к $f'(x)$:

$$f'(x'_n) - f'(\xi) = (x'_n - \xi) f''(\eta),$$

где $\eta \in (\xi, x'_n)$. Поэтому $x'_{n+1} - x^* = (x'_n - x^*)(x_n - \xi) f''(\eta)$. Очевидно, что все множители правой части равенства положительны, т. е.

$$x'_{n+1} > x^*. \blacksquare$$

Примечания: 1. В рассмотренном варианте последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и приближается к x^* слева, а $\{x'_n\}$ монотонно убывает и приближается к x^* справа.

2. Нетрудно видеть, что в случае $f'f'' > 0$ (см. рис. 13.3, *а* и *г*) последовательности $\{x_n\}$ движутся к x^* слева, а $\{x'_n\}$ — справа; в случае $f'f'' < 0$ (см. рис. 13.3, *б* и *в*) движение к x^* происходит с противоположной стороны.

Рассмотренные модели итерационных приближений являются конкретными воплощениями итерационной процедуры приближения решения уравнения $x = \varphi(x)$ с помощью последовательности $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Уравнение $x = \varphi(x)$ получается из равенства $f(x) = 0$ эквивалентным преобразованием

$$\varphi(x) = x - \gamma(x) f(x). \tag{13.25}$$

Функциональные уравнения $f(x) = 0$ и $x = \varphi(x)$ имеют одни и те же решения в $[a, b]$, если $\gamma(x)$ непрерывна и не обращается в нуль на $[a, b]$.

Переход от одной формы уравнений к другой обусловлен тем, что уравнение вида $x = \varphi(x)$ при определенных условиях генерирует сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, пределом которых является x^*:

$$x^* = \varphi(x^*) \ (\text{и } f(x^*) = 0).$$

Легко показать, что модели хорд и касательных также можно свести к алгоритмам вида

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_{\text{хорд}} f(x_n), \tag{13.26}$$

$$x'_{n+1} = x'_n - \gamma_{\text{кас}} f(x'_n),$$

где

$$\gamma_{\text{хорд}} = \frac{b - x_n}{b - f(x_n)}, \quad \gamma_{\text{кас}} = \frac{1}{f'(x'_n)}.$$

Заметим, что формула, задающая хорду, включает неподвижный параметр b в вариантах I и IV (см. рис. 13.3, *а* и *г*) или неподвижный параметр a в вариантах II и III ($\gamma_{\text{хорд}} = \dfrac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)}$) (см. рис. 13.3, *б* и *в*).

Рассмотренная модель итерационного приближения к решению функционального уравнения может быть распространена на *системы функциональных уравнений* вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \qquad (13.27)$$

Здесь $f_i(\bar{x})$ определены и непрерывны в области $D \subset \mathbf{R}^n$. Кроме того, в области D выполняются условия существования непрерывных частных производных функций $f_i(\bar{x})$ по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Представим систему в векторной форме: $\bar{f}(\bar{x}) = 0$, где $\bar{f}$ – вектор-функция с компонентами $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Затем преобразуем векторное уравнение к эквивалентной форме:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}), \quad \bar{\varphi} = \bar{x} - \Gamma(\bar{x})\,\bar{f}(\bar{x}). \qquad (13.28)$$

Здесь $\Gamma(\bar{x})$ – функциональная квадратная матрица, определенная, непрерывно дифференцируемая в области D и невырожденная. Тогда исходное векторное и преобразованное уравнения эквивалентны, т. е. имеют общий набор решений.

Решения преобразованного уравнения будем строить путем приближения с помощью последовательности векторов $\{\bar{x}^{(k)}\}$:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{\varphi}(\bar{x}^{(k)}).$$

Обосновать сходимость $\{\bar{x}^{(k)}\}$ к вектору $\bar{x}^*$ (решение уравнения $\bar{f}(\bar{x}^*) = 0$ и $\bar{x}^* = \bar{\varphi}(\bar{x}^*)$) в общем случае достаточно сложно, однако в одном важном с точки зрения приложений случае эта сходимость может быть установлена на основе простых критериев.

Эта задача связана с решением линейной системы вида

$$A\bar{x} = \bar{b}, \text{ или } \bar{f} = A\bar{x} - \bar{b} = 0,$$

где A – постоянная квадратная матрица; $\bar{b}$ – постоянный вектор.

Преобразуем эту систему к эквивалентной форме

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}), \quad \bar{\varphi} = \bar{x} - B(A\bar{x} - \bar{b}),$$

где B – постоянная невырожденная матрица.

Преобразованная система запишется в виде

$$\bar{x} = \bar{c} + C\bar{x}, \quad \bar{c} = B\bar{b}, \; C = E - BA.$$

В главе 14 показано, что если $\|C\| < 1$ ($\|\cdot\|$ – норма матрицы, о ней речь пойдет ниже), то процесс последовательных приближений

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{c} + C\bar{x}^{(k)}$$

сходится к решению $\bar{x}^*$:

$$\bar{x}^* = \bar{c} + C\bar{x}^*. \tag{13.29}$$

В качестве $\|C\|$ можно выбрать одно из возможных выражений:

$$\| C \| = \begin{cases} \max\limits_{i} \sum\limits_{j} | c_{ij} |, \\ \max\limits_{j} \sum\limits_{i} | c_{ij} |, \\ \left(\sum\limits_{i,j} c_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{13.30}$$

○ **Пример.** Рассмотрим задачу решения уравнения

$$f(x) = \sqrt{x} - 1{,}25\cos(1{,}75x) = 0.$$

Вначале найдем промежуток, на котором имеется единственный корень $f(x)$. Для этого представим $f = g - h$, где $g = \sqrt{x}$, $h = 1{,}25\cos(1{,}75x)$.

Кривые $y = g(x)$ и $y = h(x)$ определены при $x > 0$ и пересекаются в точке $x^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ (рис. 13.6).

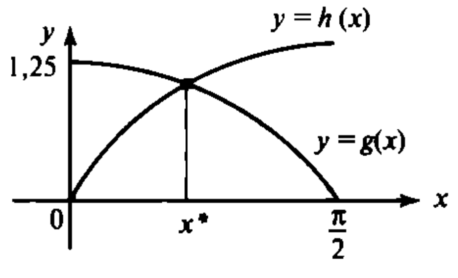


Рис. 13.6

Далее построим f' и f'':

$$f' = \frac{0{,}5}{\sqrt{x}} + 2{,}188\sin(1{,}75x), \quad f'' = \frac{0{,}25}{x\sqrt{x}} + 3{,}828\cos(1{,}75x).$$

Производная f' на $[0, \frac{\pi}{2}]$ положительна, а вторая производная f'' меняет знак. Поэтому выберем промежуток $[a, b] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, на котором $f(a)f(b) < 0$ и $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. Пусть $a = 0{,}3$; $b = 0{,}8$. Так как $f'f'' > 0$,

$$x_{n-1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n), \quad x_0 = 0{,}3,$$

$$x'_{n-1} = x'_n - \frac{1}{f'(x'_n)} f(x'_n), \quad x'_0 = 0{,}8.$$

В результате расчетов по итерационной схеме получим последовательности

$x_0 = 0{,}3$,	$x_1 = 0{,}52$,	$x_2 = 0{,}538$,	$x_3 = 0{,}5388$;
$f(x_0) = -0{,}543$,	$f(x_1) = -0{,}046$,	$f(x_2) = -0{,}0022$,	$f(x_3) = -0{,}0002$;
$x'_0 = 0{,}8$,	$x'_1 = 0{,}549$,	$x'_2 = 0{,}539$,	$x'_3 = 0{,}5389$;
$f(x'_0) = 0{,}682$,	$f(x'_1) = 0{,}096$,	$f(x'_2) = 0{,}0002$,	$f(x'_3) = 0{,}0000$.●

13.5. Построение многочлена наилучшего приближения

Пусть в промежутке $[a, b]$ определена непрерывная функция $f(x)$ и совокупность базисных функций $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$), составляющих линейно независимую систему. Построим с помощью этих функций обобщенный многочлен вида

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x).$$

Определим отклонение функции $f(x)$ от многочлена $P_m(x)$ в промежутке $[a, b]$ следующим образом:

1) $\rho_0(f, P_m) = \max\limits_{[a,b]} |f(x) - P_m(x)|$;

2) $\rho_2(f, P_m) = \left[\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \left(f(x) - P_m(x)\right)^2 dx\right]^{1/2}$

Назовем отклонение первого вида **равномерным**, а второго — **интегрально средним**. Понятие равномерности отклонения обусловлено тем, что в любой точке x

$$|f - P_m| \leqslant \rho_0(f, P_m) = |f(\tilde{x}) - P_m(\tilde{x})|, \quad \text{где } \tilde{x} \in [a, b]\,. \qquad (13.31)$$

Величина ρ_2 именуется также **отклонением в среднем**, так как по известной теореме о среднем (см. (7.15))

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (f-P_m)^2 \mathrm{d}x = [f(\xi) - P_m(\xi)]^2, \quad \text{где } \xi \in [a, b],$$

так как $(f - P_m)^2$ непрерывно в $[a, b]$.

Поэтому отклонение

$$\rho_2\,(f, P_m) = |f(\xi) - P_m(\xi)|,$$

т. е. совпадает с величиной $|f(x) - P_m(x)|$ в некоторой средней точке.

Многочлен $P_m(x)$ называется **многочленом наилучшего приближения**, если коэффициенты c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$) выбраны так, что величина $\rho\,(f, P_m)$, где ρ равно ρ_0 или ρ_2, имеет наименьшее значение.

Указанные коэффициенты обозначим c_i^*, тогда построенный с их помощью многочлен

$$P_m^*(x) = P_m(x)\big|_{c_i = c_i^*}.$$

Задача определения c_i^* в случае равномерного приближения решается с помощью многочленов Бернштейна [7]. Проблема конструктивного построения этих многочленов осложняется тем, что нет общих формул, связывающих значения c_i^* с заданной функцией и соответственно с выбором точки $\tilde{x}$, в которой величина $|f - P_m|$ принимает наибольшее значение. Однако на современном этапе, когда вычислительные процедуры могут осуществляться поисковым образом, задача отыскания c_i^* может получить решение с помощью аппроксимационных, а не формульных алгоритмов.

В случае приближения в среднем c_i^* можно найти, используя традиционный, т. е. классический, путь. С этой целью построим выражение для ρ_2^2:

$$(b-a)\rho_2^2 = \int_a^b (f-P_m)^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \left(f^2 - 2fP_m + P_m^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b f^2 \mathrm{d}x - 2\int_a^b fP_m \mathrm{d}x + \int_a^b P_m^2 \mathrm{d}x = \int_a^b f^2 \mathrm{d}x - 2\sum_{i=0}^m c_i \int_a^b f\varphi_i \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{i=0}^m c_i^2 \int_a^b \varphi_i^2 \mathrm{d}x + 2\sum_{(i>j)} c_i c_j \int_a^b \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}x. \tag{13.32}$$

Введем скалярное произведение функций $h(x)$ и $g(x)$, определенных и непрерывных на $[a, b]$:

$$(h, g) = \int_a^b h(x) g(x) \mathrm{d}x; \quad (h, h) = \int_a^b h^2(x) \mathrm{d}x = \| h \|^2.$$

Функции h и g называются **ортогональными** на $[a, b]$, если $(h, g) = 0$ и h и g отличны от нуля.

Тогда

$$\int_a^b \varphi_i^2 dx = (\varphi_i, \varphi_i) = \| \varphi_i \|^2$$

и

$$\int_a^b \varphi_i \varphi_j dx = (\varphi_i, \varphi_j) \quad (i \neq j). \tag{13.33}$$

Подставив выражения (13.33) в (13.32), получим

$$(b-a)\rho_2^2 = \| f \|^2 - 2\sum_{i=0}^{m} c_i (f, \varphi_i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} c_i^2 \| \varphi_i \|^2 + 2 \sum_{(i>j)} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j). \tag{13.34}$$

Величина ρ_2^2 достигает минимума, если $\nabla\rho_2^2 = 0$, т. е. $(\rho_2^2)'_{c_i} = 0$. Отсюда

$$\begin{cases} (\varphi_0, \varphi_0)c_0 + (\varphi_1, \varphi_0)c_1 + \ldots + (\varphi_m, \varphi_0)c_m = (f, \varphi_0), \\ (\varphi_0, \varphi_1)c_0 + (\varphi_1, \varphi_1)c_1 + \ldots + (\varphi_m, \varphi_1)c_m = (f, \varphi_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\varphi_0, \varphi_m)c_0 + (\varphi_1, \varphi_m)c_1 + \ldots + (\varphi_m, \varphi_m)c_m = (f, \varphi_m). \end{cases} \tag{13.35}$$

Эту систему удобно представить в векторно-матричной форме:

$$A_\varphi \cdot \bar{c} = \bar{b}_\varphi,$$

где A_φ – матрица (a_{ij}) с элементами $a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$,

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_\varphi = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_m) \end{pmatrix}.$$

Система (13.35) задает значения коэффициентов c_i, обеспечивающих минимизацию величины ρ_2^2, и является основополагающей в методе наименьших квадратов.

Справедливо утверждение, что для любой линейно независимой системы функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ матрица A_φ – невырожденная.

Тогда $\bar{c} = A_\varphi^{-1} \bar{b}_\varphi = \bar{c}\,*$.

Если базисные функции $\varphi_i(x)$ попарно ортогональны, система (13.35), определяющая коэффициенты c_i^*, получит наиболее простое решение:

для $\forall i$ $\quad (i = 0,\ 1,\ ...,\ m)$ $\qquad c_i^* = \dfrac{(f, \varphi_i)}{\| \varphi_i \|^2}$.

Подставим эти значения в формулу (13.34):

$$(b-a)(\rho_2^*)^2 = \| f \|^2 - 2\sum_{i=0}^{m} \frac{(f, \varphi_i)^2}{\| \varphi_i \|^2} + \sum_{i=0}^{m} \frac{(f, \varphi_i)^2}{\| \varphi_i \|^4} (\varphi_i, \varphi_i) =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(f, \varphi_i)^2}{\| \varphi_i \|^2}. \tag{13.36}$$

Перечислим свойства многочлена наилучшего ортогонального приближения в среднем.

1. Нетрудно установить, что

$$\| P_m^* \|^2 = \sum_{i=0}^{m} (c_i^*)^2 \| \varphi_i \|^2 \ \text{ и } \ (b-a)(\rho_2^*)^2 = \|f\|^2 - \| P_m^* \|^2 \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\| P_m^* \|^2 = \sum_{i=0}^{m} (c_i^*)^2 \| \varphi_i \|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{13.37}$$

Следовательно, ортогональный многочлен наилучшего приближения при любых значениях m имеет норму, не превосходящую норму $f(x)$:

$$\| P_m^*(x) \| \leqslant \| f \|.$$

Это неравенство именуется **неравенством Бесселя**.

2. Очевидно, что при возрастании m (росте числа функций φ_i) $\sum_{i=0}^{m} (c_i^*)^2 \|\varphi_i\|^2$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Отсюда вытекает, что положительный числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (c_i^*)^2 \|\varphi_i\|^2$, составленный для любой ортогональной последовательности $\{\varphi_i\}$, сходится и его сумма S удовлетворяет условию: $S \leqslant \|f\|^2$.

При этом разность между частичной суммой $S_m = \sum_{i=0}^{m} (c_i^*)^2 \|\varphi_i\|^2$ и величиной $\|f\|^2$ монотонно уменьшается с ростом m, т. е. добавление новых ортогональных элементов φ_i в состав разложения приводит к уменьшению рассогласования между S_m и $\|f\|^2$.

3. Для того чтобы сумма ряда $\sum_{i=0}^{\infty}(c_i^*)^2\|\varphi_i\|^2$ была равной $\|f\|^2$, достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_i(x)\}$ была полной.

Равенство вида

$$\sum_{i=0}^{\infty}(c_i^*)^2\|\varphi_i\|^2 = \|f\|^2,$$

выполненное для любой кусочно-гладкой функции, называется условием полноты или замкнутости системы. Указанное соотношение называется **равенством Парсеваля**.

4. Для того чтобы ряд, составленный с помощью полной и ортогональной системы функций, сходился в любой точке $x \subset [a, b]$ к функции $f(x)$, достаточно, чтобы функция $f(x)$ была кусочно-дифференцируемой (см. параграф 11.6). Указанное представление, в частности, обеспечивается с помощью ряда Фурье, опирающегося на полную систему ортогональных тригонометрических функций

$\{1, \cos nx, \sin nx\}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.

Если продолжить процесс повышения требований к качеству приближения с помощью ряда $\sum_{i=0}^{\infty}c_i^*\varphi_i(x)$ и поставить задачу о равномерном приближении с помощью ортогональной системы, это приведет к тому, что функция $f(x)$ должна обладать кусочной дифференцируемостью до второй производной включительно.

14. МЕТРИЧЕСКОЕ И НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВА

14.1. Задание метрического пространства

Метрическим пространством называется множество A, в котором для любой пары элементов x и y существует неотрицательное число ρ, именуемое расстоянием между x и y и удовлетворяющее трем условиям:

1) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; (14.1)

3) для $\forall\ x, y, z \in A \quad \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Указанные условия именуют *аксиомами метрического пространства*. Первая аксиома выражает критичность метрической зависимости, вторая характеризует ее симметричность. Третья аксиома имеет особое значение, так как согласует метрические величины для трех пар сочетаний, выбираемых из любой тройки элементов. Эта аксиома получила название *неравенства треугольника*, условно изображаемого диаграммой (рис. 14.1).

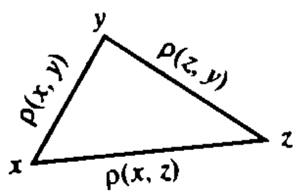


Рис. 14.1

Простейший пример метрического пространства дает множество $\mathbf{R}$. В качестве расстояния между x и y возьмем величину $|x - y|$: $\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}$.

Легко убедиться, что величина $|x - y|$ удовлетворяет трем аксиомам:

1) если $|x - y| = 0$, то $x - y = 0$, т. е. $x = y$;

2) $|x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1|\,|y - x| = |y - x|$;

3) $|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y|$. (14.2)

В последней аксиоме использовано свойство модуля суммы:

$|a + b| \leqslant |a| + |b|$

при любых $a, b \in \mathbf{R}$.

За a и b примем $x - z$ и $z - y$ в (14.2) и убедимся в справедливости этого неравенства.

Этот пример полезен при рассмотрении другой формы метрического пространства, составленного из действительных чисел. Множество **R** будет являться метрическим пространством, если в качестве расстояния между x и y взять значение функции $f(|x-y|)$. Здесь $f(s)$ определена для всех $s \geqslant 0$, непрерывна, дважды непрерывно дифференцируема и во всех точках $s \in (0, +\infty)$ производные $f' > 0, f'' \leqslant 0$, а $f(0) = 0$.

Таким образом, на одном и том же множестве **R** можно задавать различные метрические структуры.

Покажем, что $\mathbf{R}^{(f)}$ (так обозначим структуру метрического пространства с метрикой f) действительно является метрическим пространством.

Сначала отметим, что $f(s)$ – монотонно возрастающая функция и при $s > 0$ значения $f(s) > 0$. Кроме того, $f'(s)$ является невозрастающей функцией, так как $(f')' \leqslant 0$.

Первая аксиома для $f(s)$ выполняется автоматически, так как $f(s) = 0$ только в точке $s = 0$. Однако $s = |x-y|$ и $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Вторая аксиома выполняется в силу того, что $|x-y| = |y-x|$ и $f(|x-y|) = f(|y-x|)$.

Для обоснования третьей аксиомы используем монотонность $f(x)$:

$$f(|x-y|) \leqslant f(|x-z| + |z-y|), \tag{14.3}$$

так как $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$ (что показано выше).

Далее обозначим $|x-z| = c$, $|z-y| = d$ и примем для определенности, что $c \leqslant d$.

Составим конечные приращения $f(s)$ в промежутках $[0, c]$ и $[d, d+c]$ (рис. 14.2).

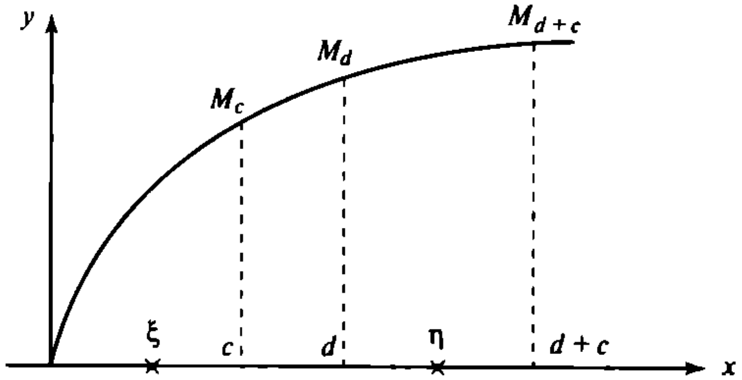


Рис. 14.2

Введем обозначение производной: $f'(x) = g(x)$.

По теореме Лагранжа

$f(c) - f(0) = f'(\xi)c$, где $\xi \in (0, c)$,

$f(d+c) - f(d) = f'(\eta)c$, где $\eta \in (d, d+c)$.

Вычтем первое равенство из второго и учтем, что $f(0) = 0$:

$$f(d + c) - f(c) - f(d) = [f'(\eta) - f'(\xi)]c = [g(\eta) - g(\xi)]c. \qquad (14.4)$$

В силу того, что $\eta > \xi$, по теореме Лагранжа

$$g(\eta) - g(\xi) = g'(\theta)(\eta - \xi), \text{ где } \theta \in (\xi, \eta) \qquad (14.5)$$

(g имеет производную, так как $g' = f''$).

Подставим выражение (14.5) в (14.4):

$$f(d + c) = f(d) + f(c) + f''(\theta)(\eta - \xi)c.$$

По условию $f'' \leqslant 0$ в любой точке $(0, +\infty)$, поэтому

$$f''(\theta)(\eta - \xi)\, c \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$f(d + c) \leqslant f(d) + f(c) \qquad (14.6)$$

при любых неотрицательных c и d.

Возвращаясь к исходным обозначениям, перепишем (14.3) в виде

$$f(|x - y|) \leqslant f(|x - z| + |z - y|) \leqslant f(|x - z|) + f(|z - y|). \qquad (14.7)$$

Таким образом, числовое множество **R** является общей основой для построения тривиального метрического пространства, которое обозначим как $\mathbf{R}_0$, с расстоянием, задаваемым модульным значением, и нетривиального метрического пространства с расстоянием, определяемым функцией $f(|x - y|)$.

○ **Примеры.** 1. $f(s) = s$.

Тогда имеем пространство $\mathbf{R}_0$ и $f(s) = s$ удовлетворяет требованиям: а) $f(0) = 0$; б) $f' = 1 > 0$; в) $f'' = 0$.

2. $f(s) = \dfrac{s}{1+s}$.

Убедимся, что $f(s)$ удовлетворяет поставленным требованиям. Для этого предварительно преобразуем функцию к виду

$$f(s) = \frac{1+s-1}{1+s} = 1 - \frac{1}{1+s} = 1 - (s+1)^{-1}.$$

Итак, $f(0) = 0$, $f' = (s + 1)^{-2} > 0$, $f'' = -2(s + 1)^{-3} < 0$. ●

14.2. Определение нормированного пространства. Связь нормированности и метричности

Далее будем изучать такие метрические пространства, у которых наряду с расстоянием между элементами, определяющим удаленность элементов друг от друга в пространстве, задана протяженность самих элементов, так называемая ***норма элемента.***

Однако такие пространства могут строиться только на множествах, имеющих линейную структуру.

Назовем множество A *линейным* (или *линейным пространством*), если в нем определены операции сложения элементов и умножения на действительное число, обладающие свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, т. е. для $\forall\ x$ и $y \in A$:

$$1)\ x + y = y + x, \quad 2)\ (x + y) + z = x + (y + z), \tag{14.8}$$

$$3)\ c\,(x + y) = (x + y)\,c = cx + cy, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Кроме того, в состав линейного пространства входит *нулевой элемент*, равный $0 \cdot x = 0$.

Примеры линейных пространств:

1) пространство векторов R^n с элементами $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

2) пространство матриц K_{mn} с элементами $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$;

3) пространство функций $C_{[a,\ b]}$, определенных и непрерывных в $[a,\ b]$, с элементами $f(x)$, где $x \in [a,\ b]$;

4) пространство функций $D_{[a,\ b]}$, определенных и непрерывных в $[a,\ b]$ и имеющих ограниченную производную в $(a,\ b)$.

Очевидно, что

$$D_{[a,\ b]} \subset C_{[a,\ b]}.$$

(Предлагаем читателю обосновать линейность каждой из перечисленных структур.)

Линейное пространство L называется **нормированным**, если для любого элемента этого пространства x существует неотрицательная величина, именуемая **нормой**, которая удовлетворяет условиям:

$$1)\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$2)\ \|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|, \quad \text{где } c \in \mathbf{R}; \tag{14.9}$$

$$3)\ \text{для } \forall\ x,\ y \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Эти условия называются *аксиомами*. Первое требование так же, как и первая аксиома метрики, выражает свойство критичности нормы, второе характеризует однородную масштабность операции умножения на число. Третье неравенство аналогично по смыслу неравенству треугольника в аксиоматике метрического пространства.

Установим одно важное свойство: нормированное пространство порождает метрику, задаваемую величиной $\|x - y\|$:

$$\forall x, y \in L \quad \rho(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0. \tag{14.10}$$

Проверим первую аксиому метрики:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = 0,$$

тогда $x - y = 0$, т. е. $x = y$.

Далее подтвердим выполнение второй аксиомы $\rho(x, y) = \rho(y, x)$:

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|.$$

Для проверки третьей аксиомы введем обозначения: $x - z = u$, $z - y = v$. Тогда

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Дальнейшее изучение метрических пространств будет проводиться с учетом нормируемости их элементов, что представляется наиболее продуктивным, так как выражает внутренние структурные свойства каждого объекта.

I. Сначала рассмотрим линейное множество n-мерных векторов. Элементы этого множества могут иметь три вида нормы:

$$1)\ \|\bar{x}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|; \quad 2)\ \|\bar{x}\| = \sum_{i=1}^{k} |x_i|; \quad 3)\ \|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{14.11}$$

Для каждого вида нормы существует определенное пространство; обозначим эти пространства соответственно R_0^n, R_1^n, R_2^n.

1. Возьмем сначала пространство R_0^n и покажем, что $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$ удовлетворяет трем аксиомам нормирования.

Пусть $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} |x_i| = 0$, тогда для $\forall i \quad |x_i| = 0$, т. е. $x_i = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$.

Далее, $\|c\bar{x}\| = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} (|cx_i|) = |c| \max\limits_{i=1,2,\dots,n} (|x_i|) = |c| \cdot \|\bar{x}\|$.

Наконец,

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i + y_i| = |x_{i'} + y_{i'}|,$$

где i' – номер координаты, которая определяет величину максимума, и $|x_{i'} + y_{i'}| \leqslant |x_{i'}| + |y_{i'}| \leqslant \max\limits_{i=1,2,\dots,n} |x_i| + \max\limits_{i=1,2,\dots,n} |y_i|$.

2. Теперь рассмотрим норму пространства R_1^n: $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

Если $\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, то для $\forall i$ (i = 1, 2, ..., n) x_i = 0, т. е. $\bar{x}$ = 0.

Далее, $\|c\bar{x}\| = \sum_{i=1}^{n}|cx_i| = \sum_{i=1}^{n}|c|\cdot|x_i| = |c|\sum_{i=1}^{n}|x_i| = |c|\cdot\|\bar{x}\|$.

Третья аксиома: $\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|) = \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i|$.

3. В случае пространства R_2^n получим следующие результаты.

Если $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=0$, то для $\forall i$ (i = 1, 2, ..., n) x_i = 0, т. е. $\bar{x}$ = 0.

Далее, $\|c\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(cx_i)^2} = \sqrt{c^2\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} = |c|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} = |c|\cdot\|\bar{x}\|$.

При обосновании третьей аксиомы рассмотрим эквивалентное неравенство, полученное из исходного путем возведения в квадрат обеих его частей:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2} + \sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Отбрасывая общие суммы в левой и правой части неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Это неравенство можно свести к следующему:

$(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$.

Оно является следствием неравенства Коши–Буняковского вида

$|(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$.

Здесь выражения $\|\bar{x}\|$ и $\|\bar{y}\|$ определяются через скалярное произведение:

$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$ и $\|\bar{y}\| = \sqrt{(\bar{y},\bar{y})}$.

Таким образом, все три вида нормы векторного пространства полностью согласуются с аксиомами (14.9).

○ **Пример.** Пусть даны векторы $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ на множестве R^4:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \bar{y}=\begin{pmatrix}2\\1{,}5\\-1\\4\end{pmatrix},\quad \bar{z}=\begin{pmatrix}3\\5\\-4\\2\end{pmatrix}.$$

Построим $\|\bar{x}\|$, $\|\bar{y}\|$ и $\|\bar{z}\|$ в R_0^4, R_1^4 и R_2^4:

$\|\bar{x}\| = 3;\ 6;\ \sqrt{14};$

$\|\bar{y}\| = 4;\ 8{,}5;\ \sqrt{23{,}25};$

$\|\bar{z}\| = 5;\ 14;\ \sqrt{54}.$ ●

II. Если рассмотреть линейное множество K^n всех квадратных матриц A с действительными элементами, то в нем, так же как и в пространстве R^n, можно ввести три вида нормы:

$$1)\ \|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \qquad 2)\ \|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

$$3)\ \|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2} \tag{14.12}$$

Первая и вторая нормы отличаются порядком суммирования элементов и выбора максимума. В первом случае суммирование проводится по столбцам, а максимум выбирается по строкам, а во втором суммирование – по строкам, а максимум – по столбцам. Поэтому первые две нормы называют **сопряженными**.

Пространства с указанными нормами обозначаются K_0^n (вид 1), K_1^n (вид 2) и K_2^n (вид 3).

1. Возьмем пространство K_0^n и проверим выполнение аксиом нормирования:

1) если $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| = 0$, то для $\forall i$ (i = 1, 2, ..., n) $\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| = 0$ и все $a_{ij} = 0$, т. е. $A = 0$;

2) $\|cA\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |ca_{ij}| = |c| \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| = |c| \cdot \|A\|;$

3) $\|A+B\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \left| a_{ij} + b_{ij} \right| = \sum\limits_{j=1}^{n} \left| a_{i'j} + b_{i'j} \right|.$

Это означает, что конечная сумма достигает максимума при некотором значении индекса i'.

Далее,

$$\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i'j} + b_{i'j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\left|a_{i'j}\right| + \left|b_{i'j}\right| \right) = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i'j}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|b_{i'j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| + \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| = \|A\| + \|B\|.$$

2. Теперь рассмотрим сопряженное пространство K_1^n:

1) если $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| = 0$, то для $\forall j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| = 0$, т. е. все $a_{ij} = 0$ и $A = 0$;

2) $\|cA\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \left|ca_{ij}\right| = |c| \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| = |c| \cdot \|A\|;$

3) $\|A+B\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \left| a_{ij} + b_{ij} \right| = \sum\limits_{i=1}^{n} \left| a_{ij'} + b_{ij'} \right|.$

Здесь j' соответствует индексу, при котором $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| a_{ij} + b_{ij} \right|$ достигает максимума.

Далее, $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| a_{ij'} + b_{ij'} \right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\left|a_{ij'}\right| + \left|b_{ij'}\right| \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{ij'}\right| + \sum\limits_{i=1}^{n} \left|b_{ij'}\right| \leqslant$

$$\leqslant \max_j \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| + \max_j \sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right| = \|A\| + \|B\|.$$

3. Наконец, возьмем пространство K_2^n:

1) $\|A\| = \left(\sum\limits_{ij} a_{ij}^2 \right)^{1/2} = 0$. Это означает, что для $\forall i, j$ $a_{ij} = 0$, т. е. $A = 0$;

2) $\|cA\| = \left(\sum\limits_{ij} c^2 a_{ij}^2 \right)^{1/2} = |c| \left(\sum\limits_{ij} a_{ij}^2 \right)^{1/2} = |c| \cdot \|A\|;$

3) в третьей аксиоме удобно записать неравенство

$\|A+B\|^2 \leqslant \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\|A\| \cdot \|B\|,$

которое получается из исходного путем возведения в квадрат обеих его частей. Тогда в левой части получим

$$\| A + B \|^2 = \sum_{ij}\left(a_{ij} + b_{ij}\right)^2 = \sum_{ij}\left(a_{ij}^2 + 2a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2\right) = \sum_{ij} a_{ij}^2 + \sum_{ij} b_{ij}^2 +$$

$$+ 2\sum_{ij} a_{ij}b_{ij} = \| A \|^2 + \| B \|^2 + 2\sum_{ij} a_{ij}b_{ij}.$$

С учетом того, что в правой и левой части есть общие члены, неравенство сведется к следующему:

$$\sum_{ij} a_{ij}b_{ij} \leqslant \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{ij} b_{ij}^2\right)^{1/2}$$

Искусственно введем два вектора $\bar{a}^{(n^2)}$ и $\bar{b}^{(n^2)}$ размерности n^2, координатами которых служат элементы матриц A и B. В эти векторы последовательно запишем элементы первого столбца, затем второго и так далее, вплоть до n-го столбца матриц A и B.

Например, для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ векторы $\bar{a}^{(2^2)}$ и $\bar{b}^{(2^2)}$

имеют вид $\bar{a}^{(2^2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{b}^{(2^2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Используя принятые обозначения, запишем исследуемое неравенство следующим образом:

$$(\bar{a}^{(n^2)}, \bar{b}^{(n^2)}) \leqslant \| \bar{a}^{(n^2)} \| \cdot \| \bar{b}^{(n^2)} \|,$$

где $\| \bar{a}^{(n^2)} \| = (\bar{a}^{(n^2)}, \bar{a}^{(n^2)})^{1/2}$, $\| \bar{b}^{(n^2)} \| = (\bar{b}^{(n^2)}, \bar{b}^{(n^2)})^{1/2}$.

Указанное неравенство является следствием более сильного неравенства Коши–Буняковского, справедливого для векторов любой размерности, в том числе и n^2:

$$|(\bar{a}^{(n^2)}, \bar{b}^{(n^2)})| \leqslant \| \bar{a}^{(n^2)} \| \cdot \| \bar{b}^{(n^2)} \|.$$

Итак, третья аксиома для K^n доказана.

○ **Пример.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ 1{,}5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 11 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

В пространстве K_0^n: $\|A\| = 8$, $\|B\| = 15$;
в пространстве K_1^n: $\|A\| = 8$, $\|B\| = 18$;
в пространстве K_2^n: $\|A\| = 85{,}25$, $\|B\| = 214$. ●

III. В линейном пространстве непрерывных функций $C_{[a,\,b]}$ также можно ввести три типа нормы и соответственно образовать пространства $C^0_{[a,b]}, C^1_{[a,b]}, C^2_{[a,b]}$:

1) $C^0_{[a,b]}$ с $\|f\| = \max\limits_{[a,b]}|f(x)|$;

$$2)\ C^1_{[a,b]} \text{ с } \|f\| = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f|\mathrm{d}x; \tag{14.13}$$

$$3)\ C^2_{[a,b]} \text{ с } \|f\| = \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

Очевидно, что все указанные выражения имеют смысл, так как $|f|$ и f^2 для непрерывной в $[a, b]$ функции также непрерывны и, следовательно, $\exists \max\limits_{[a,b]} |f|$ и $|f|$, f^2 интегрируемы в $[a, b]$.

1. Покажем выполнение аксиом для $C^0_{[a,b]}$:

1) если $\|f\| = 0$, то $\max\limits_{[a,b]}|f(x)| = 0$, т. е. для $\forall\, x \in [a, b]$ $|f| = 0$, или $f = 0$ при всех x;

2) $\|cf\| = \max\limits_{[a,b]}|cf| = |c| \max\limits_{[a,b]}|f| = |c| \cdot \|f\|$;

3) для $\forall f, g \in C_{[a,\,b]}$ $\|f + g\| = \max\limits_{[a,b]}|f + g| = |f(\xi) + g(\xi)|$.

Здесь указана точка $\xi \in [a, b]$, в которой достигается $\max\limits_{[a,b]}|f + g|$.

Далее,

$|f(\xi) + g(\xi)| \leqslant |f(\xi)| + |g(\xi)| \leqslant \max\limits_{[a,b]}|f| + \max\limits_{[a,b]}|g| = \|f\| + \|g\|$.

2. Рассмотрим выполнение аксиом для $C^1_{[a,\,b]}$. Предварительно отметим следующее свойство интеграла от непрерывной функции.

❑ Если $\int\limits_a^b |f|\mathrm{d}x = 0$ и $|f|$ непрерывна в $[a, b]$, то $|f| \equiv 0$.

Действительно, если принять противное, т. е. считать, что в некоторой точке x_0 функция $|f| \neq 0$, то можно окружить эту точку δ-окрестностью, такой, что всюду в этой окрестности $|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)|$. Это непосредственно следует из свойства непрерывности $|f|$.

Тогда $\int\limits_a^b |f| dx \geqslant \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f| dx \geqslant \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2}|f(x_0)| dx = |f(x_0)|\delta > 0,$

что противоречит условию. ■

Итак, рассмотрим аксиоматику для $C^1_{[a,b]}$:

1) если $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f| dx = 0$, то, как уже показано, $|f(x)| \equiv 0$, т. е. $f = 0$;

2) $\|cf\| = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |cf| dx = |c|\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f| dx = |c| \cdot \|f\|;$

3) для $\forall\, f, g \in C_{[a,b]}$ $\|f+g\| = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f+g| dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (|f| + |g|) dx =$

$= \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f| dx + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |g| dx = \|f\| + \|g\|.$

3. Наконец, рассмотрим аксиоматику для $C^2_{[a,b]}$:

1) если $\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^2 dx\right)^{1/2} = 0$, то $\int\limits_a^b f^2 dx = 0.$

Поскольку f^2 – непрерывная и неотрицательная функция, то $f^2 \equiv 0$, т. е. $f = 0$;

2) $\|cf\| = \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b c^2 f^2 dx\right)^{1/2} = |c|\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^2 dx\right)^{1/2} = |c| \cdot \|f\|;$

3) в третьей аксиоме осуществим переход к эквивалентному неравенству вида

$\|f+g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2.$

Выражение, стоящее в левой части неравенства, запишется так:

$$\|f+g\|^2 = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (f+g)^2 dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (f^2 + 2fg + g^2) dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^2 dx + \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g^2 dx + 2\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b fg\, dx =$$

$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b fg\, dx.$$

Учитывая, что в левой и правой части неравенства есть одинаковые члены, преобразуем его к виду

$$(f, g) \leqslant \|f\| \cdot \|g\|,$$

где (f, g) – скалярное произведение функций f и g, равное $\frac{1}{b-a}\int_a^b fg\,dx$, а нормы $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ и $\|g\| = (g, g)^{1/2}$.

Данное неравенство является следствием неравенства

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|,$$

которое также именуется неравенством Коши–Буняковского для $C^2_{[a,b]}$.

Обоснование полученного неравенства аналогично обоснованию, которое было приведено для векторного пространства.

Итак, пространство $C^2_{[a,b]}$ обладает нормой, удовлетворяющей всем аксиомам.

14.3. Пределы в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности

Если в метрическом пространстве A задана бесконечная последовательность точек $\{x_n\}$, то вполне естественно возникает вопрос о ее сходимости.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся** в A, если $\exists\, x_0 \in A$, такое, что $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Элемент x_0, к которому сходится последовательность $\{x_n\}$, называется ее **пределом**:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0. \tag{14.14}$$

Нетрудно показать единственность предела для любой сходящейся последовательности. Действительно, если принять, что существует два разных предела: x'_0 и x''_0, $\rho(x'_0, x''_0) = \Delta > 0$, то, взяв произвольный элемент последовательности x_n, получим

$$\rho(x'_0, x''_0) = \Delta \leqslant \rho(x'_0, x_n) + \rho(x_n, x''_0). \tag{14.15}$$

Далее, выбрав $\varepsilon = \frac{\Delta}{4}$, по определению предела найдем N' и N'':

$$n > N' \Rightarrow \rho(x'_0, x_n) < \varepsilon; \quad n > N'' \Rightarrow \rho(x_n, x''_0) < \varepsilon.$$

Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ неравенство (14.15) будет несовместным, так как

$$\Delta \leqslant \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4} = \frac{\Delta}{2},$$

что невозможно.

Введем понятие ограниченного множества. Множество B называется **ограниченным** в A, если $\exists\, x^* \in A$ и $K > 0$: для $\forall\, x \in B \rightarrow \rho(x, x^*) \leqslant K$.

Любая сходящаяся последовательность – это ограниченное множество, так как в качестве элемента x^* можно взять предел x_0. При этом $\rho(x_n, x_0)$, будучи сходящейся числовой последовательностью, является ограниченной.

Понятие метрического пространства охватывает математические структуры самой разнообразной природы, поэтому целесообразно установить некий принцип, позволяющий классифицировать существование или отсутствие предела любой последовательности в составе пространства. Речь идет о критерии, эквивалентном критерию Больцано–Коши для числовых последовательностей пространства **R**.

I. Введем понятие фундаментальной последовательности.

Последовательность $\{x_n\} \subset A$ называется **фундаментальной**, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N$, такое, что $n > N$ и $n' > N \Rightarrow \rho(x_n, x'_n) < \varepsilon$.

Практически фундаментальной будет любая последовательность $\{x_n\}$, для которой числовая величина $\rho(x_n, x_{n'})$ удовлетворяет критерию Больцано–Коши.

Покажем, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Для этого рассмотрим три элемента x_n, $x_{n'}$ и x_0 (x_0 – предел последовательности) и оценим величину $\rho(x_n, x_{n'})$:

$$\rho(x_n, x_{n'}) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_{n'}).$$

По определению предела для $\forall \frac{\varepsilon}{2} \;\; \exists\, N$, такое, что при $n > N$ и $n' > N$

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \rho(x_n, x_0) = \rho(x_0, x_{n'}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n > N$ и $n' > N$ расстояние $\rho(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$.

Таким образом, категория фундаментальности последовательности шире, чем категория сходящейся последовательности. Поэтому вполне конструктивным будет следующее определение.

Метрическое пространство A называется **полным** или **Банаховым**, если любая фундаментальная последовательность, принадлежащая A, является сходящейся и ее предел принадлежит A. Если же в A существуют фундаментальные последовательности, которые либо расходятся, либо сходятся к пределу, не принадлежащему A, то такое метрическое пространство называется **неполным**.

Наша дальнейшая задача такова: выделить полные и неполные структуры среди всех рассматриваемых метрических пространств.

1. Начнем с *числового* пространства **R**. Как следует из теоремы Больцано–Коши (см. теорему 2.5) для существования предела последовательности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия фун-

даментальности. Поэтому любая фундаментальная последовательность в **R** является сходящейся. Таким образом, пространство **R** – полное.

Аналогично можно доказать полноту пространства чисел **R** с метрикой, задаваемой функцией $f(s)$, где $s = |x - y|$ (f – монотонная функция, $f(0) = 0, f'(s) > 0$ и $f'' \leqslant 0$). Для этого достаточно задаться некоторым конечным промежутком $[0, r]$, в котором изменяется величина s, и построить неравенство:

$$\text{для } \forall\, s \quad f(s) - f(0) = f'(\xi)s \geqslant f'(r)s, \text{ т. е. } s \leqslant \frac{f(s)}{f'(r)}. \qquad (14.16)$$

Здесь использована теорема Лагранжа и учтено, что функция $f'(s)$ не возрастает на отрезке $[0, r]$.

Если последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной с точки зрения метрики $f(|x_n - x_{n'}|)$, то в силу (14.16) величина $|x_n - x_{n'}| = s$ будет стремиться к нулю при $n > N$ и $n' > N$, так как $f(s)$ – величина бесконечно малая при $s \to 0$. Поэтому $\{x_n\}$ будет сходящейся в пространстве **R**.

2. Полноту *векторных* пространств R_0^n, R_1^n и R_2^n нетрудно доказать, если воспользоваться следующим соотношением:

для $\forall i \quad (i = 1, 2, ..., n)$

$$|x_i| \leqslant \begin{cases} \max\limits_i |x_i| = \|\bar{x}\| \text{ в } R_0^n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = \|\bar{x}\| \text{ в } R_1^n, \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} = \|\bar{x}\| \text{ в } R_2^n, \end{cases} \qquad (14.17)$$

т. е. $|x_i| \leqslant \|\ \bar{x}\ \|$ в любом из R^n.

Поэтому если последовательность векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k, ...$ является фундаментальной, т. е. $\rho(\bar{x}_l, \bar{x}_m) < \varepsilon$ при $l > N$ и $m > N$, то

$$\text{для } \forall i \quad |x_{il} - x_{im}| \leqslant \|\bar{x}_l - \bar{x}_m\| < \varepsilon.$$

Таким образом, числовые последовательности, составленные из одноименных координат векторов $\bar{x}_l$ и $\bar{x}_m$, при всех значениях i фундаментальны. В силу того, что числовые координаты принадлежат полным пространствам, каждая из последовательностей $\{x_{il}\}$ имеет предел при $l \to \infty$: $\lim\limits_{l\to\infty} x_{il} = x_{i0}$.

Взяв эти пределы за основу, легко установить, что вектор $\bar{x}_0$ с координатами $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ – предельный вектор последовательности $\{\bar{x}_l\}$.

3. Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении *метрических* пространств матриц K_0^n, K_1^n, K_2^n. Действительно, для $\forall i, j$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$

$$|a_{ij}| \leqslant \begin{cases} \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\| \text{ в } K_0^n, \\ \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\| \text{ в } K_1^n, \\ (\sum\limits_{i,j}^{n} a_{ij}^2)^{1/2} = \|A\| \text{ в } K_2^n. \end{cases} \qquad (14.18)$$

Следовательно, для $\forall i, j$

$$|a_{ij}| \leqslant \|A\|.$$

Далее, если последовательность матриц $\{A_l\}$ является фундаментальной, то при $l > N$ и $m > N$

$$\rho(A_l, A_m) = \|A_l - A_m\| < \varepsilon.$$

Отсюда при этих же значениях l и m

$$|a_{ij}^{(l)} - a_{ij}^{(m)}| < \varepsilon.$$

Поэтому все элементы последовательности матриц, рассматриваемые в отдельности, являются фундаментальными и имеют числовые пределы $a_{ij}^{(0)}$. Составив из этих величин матрицу A_0, легко убедиться, что A_0 – предел последовательности $\{A_l\}$:

$$\lim_{l \to \infty} A_l = A_0.$$

4. Из трех *функциональных* пространств $C^0_{[a,b]}$, $C^1_{[a,b]}$ и $C^2_{[a,b]}$ первое имеет норму, которая называется равномерной, а второе и третье обладают интегральной нормой, которая оценивает величину нормы в среднем.

Покажем, что $C^0_{[a,b]}$ – полное пространство, в то время как пространства $C^1_{[a,b]}$ и $C^2_{[a,b]}$ – неполные.

Для установления полноты пространства $C^0_{[a,b]}$ используем признак Больцано–Коши равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ (см. теорему 2.5), где $u_i(x)$ – определенные и непрерывные на $[a, b]$ функции.

Для того чтобы $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ равномерно сходился в промежутке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ (не зависящее от x), такое, что если $n > N$ и $n' > N$, то $|f_n(x) - f_{n'}(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$. Здесь f_n и $f_{n'}$ – конечные суммы ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ (см. параграф 11.2).

Из свойств равномерно сходящихся рядов следует, что если члены ряда непрерывны в $[a, b]$ и ряд равномерно сходится на всем промежутке, то сумма ряда $f(x)$ является непрерывной функцией на $[a, b]$.

Покажем, что условие фундаментальности последовательности непрерывных функций в $C^0_{[a,b]}$ обеспечивает равномерную сходимость некоторого функционального ряда. С этой целью составим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ так, чтобы его конечные суммы совпали с членами фундаментальной последовательности $\{f_n(x)\}$:

$$u_1 = f_1(x),\ u_2 = f_2(x) - f_1(x),\ \ldots,\ u_n = f_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Просуммировав $u_1, u_2, \ldots, u_n$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x) = f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_n - f_{n-1}) = f_n(x).$$

В силу фундаментальности последовательности $\{f_n(x)\}$ выполняется условие:

для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad n$ и $n' > N \Rightarrow \rho(f_n, f_{n'}) = \max\limits_{[a,b]}|f_n - f_{n'}| < \varepsilon$.

Оценим величину $|f_n - f_{n'}|$ при произвольных x:

$$|f_n(x) - f_{n'}(x)| \leqslant \max_{[a,b]}|f_n(x) - f_{n'}(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что последовательность частичных сумм $\{f_n(x)\}$ функционального ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ удовлетворяет критерию Больцано–Коши равномерной сходимости этого ряда. Члены ряда $u_i(x)$ ($i = 2, 3, \ldots$) являются разностями непрерывных функций $f_i(x)$ и $f_{i-1}(x)$, а u_1 равен непрерывной функции $f_1(x)$. Поэтому все члены ряда непрерывны и по теореме о сумме ряда с непрерывными функциями, обладающего равномерной сходимостью, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f(x)$ является непрерывной функцией на всем промежутке $[a, b]$. Поэтому $f(x) \in C^0_{[a,b]}$.

К числу неполных пространств, как уже было сказано, относятся пространства с интегральной нормой $C^1_{[a,b]}$ и $C^2_{[a,b]}$.

Покажем теперь, что $C^1_{[a,b]}$ является неполным. С этой целью зададим такую фундаментальную последовательность $\{f_n(x)\}$, которая сходится к функции $f(x)$, не принадлежащей $C^1_{[a,b]}$. Пространство $C^1_{[a,b]}$ определим на промежутке $[-1, 1]$, т. е. $a = -1$, $b = 1$. Фундаментальную последовательность представим в виде

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (\frac{1}{n}, 1], \\ nx, & \text{если } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ -1, & \text{если } x \in [-1, -\frac{1}{n}). \end{cases} \qquad (14.19)$$

Графики непрерывных функций (14.19) для значений n и m ($m > n$) представлены на рис. 14.3.

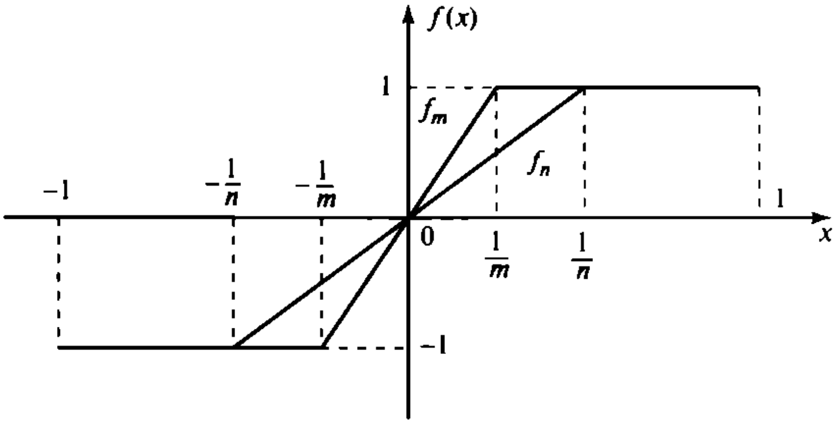


Рис. 14.3

Функции $f_n(x)$ при всех значениях n являются нечетными: $f_n(-x) = -f_n(x)$. Поэтому $\|f_n\| = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x)|\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} f_n(x)\,dx$ и также $\rho(f_n, f_m) = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} (f_m(x) - f_n(x))\,dx$, так как $f_m(x) \geqslant f_n(x)$ в промежутке $[0, 1]$ и $m > n$.

Вычислим последний интеграл:

$$\int\limits_0^1 (f_m(x) - f_n(x))\,dx = \int\limits_0^{1/n} (f_m(x) - f_n(x))\,dx = \int\limits_0^{1/m} (mx - nx)dx + \int\limits_{1/m}^{1/n} (1 - nx)\,dx =$$

$$= (m-n)\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{1/m} + \left(x - \frac{n}{2}x^2\right)\bigg|_{1/m}^{1/n} = \frac{(m-n)^2}{n}\frac{1}{2m^2} + (m-n)\frac{1}{2m^2} =$$

$$= \frac{m-n}{2nm} = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{n}{m}\right) < \frac{1}{2n} \quad \text{при } m > n. \tag{14.20}$$

Из полученного неравенства следует, что $\rho(f_n, f_m) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n}{m}\right) < \frac{1}{n}$ при $m > n$ и является величиной бесконечно малой при $n \to \infty$. Поэтому последовательность $\{f_n\}$ — фундаментальная. Однако при $n \to \infty$

последовательность $\{f_n(x)\}$ приближается к функции $f(x)$, заданной в виде

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (0,\ 1], \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x \in [-1,\ 0). \end{cases}$$

График указанной функции $f(x)$ приведен на рис. 14.4.

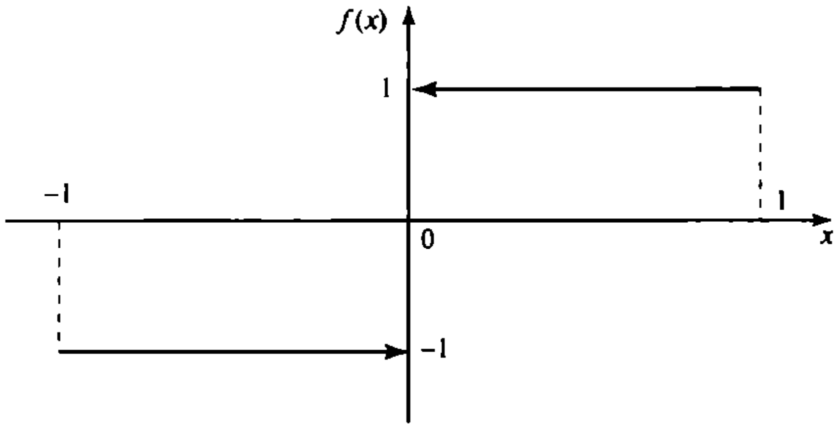


Рис. 14.4

Предельная функция $f(x)$ совпадает с sign (x) (знак числа) и имеет точку разрыва первого рода $x_0 = 0$.

По аналогии можно показать, что пространство $C^2_{[a,b]}$ также неполное. При этом можно использовать последовательность $f_n(x)$, приведенную выше, так как она обладает свойством фундаментальности и в $C^2_{[a,b]}$.

II. Следующий шаг в изучении метрических пространств связан с заданиями преобразований и отображений, являющихся аналогами функциональных зависимостей. Поэтому необходимо ввести классификацию различных областей, заданных в метрическом пространстве.

Назовем **сферой** (открытой сферой) в метрическом пространстве множество

$$S(x) = \{x \,|_{\rho(x,\ x_0)\ <\ r}\}. \tag{14.21}$$

При этом точка x_0 называется ***центром*** сферы, а r – ее ***радиусом.***

Сферы в векторных пространствах сохраняют геометрическую определенность даже при $n > 3$. Однако при этом говорят не о геометрических многообразиях (поверхность, кривая или прямая), а о гипергеометрических (гиперповерхность, гиперкривая или гиперпрямая).

Сферы в функциональных пространствах имеют более сложный характер. Например, в $C^0_{[a,b]}$ сферой с радиусом r и центром в точке $f_0(x)$

будет множество всевозможных графиков непрерывных функций, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - f_0(x)| < r \quad \text{или} \quad f_0(x) - r < f(x) < f_0(x) + r.$$

Это множество изображается полосой с криволинейной границей, полученной путем смещения графика $f_0(x)$ по вертикали на величину r (верхняя граница) и на величину $-r$ (нижняя граница) (рис. 14.5).

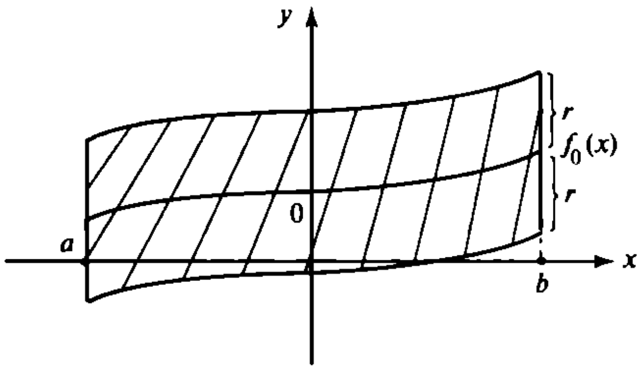


Рис. 14.5

δ-окрестностью точки x_0 называют сферу с радиусом δ и центром в этой точке.

Предельной точкой или **точкой сгущения** множества B, принадлежащего пространству A, называют точку, в любой окрестности которой найдутся точки множества B, отличные от нее. Очевидно, что всякая предельная точка множества порождает последовательности (по крайней мере одну), сходящиеся к этой точке. Частным случаем предельной точки является **внутренняя точка** множества B, которая принадлежит B вместе с некоторой окрестностью. **Изолированная точка** принадлежит множеству, но не является предельной.

Множество, содержащее все свои предельные точки, называется **замкнутым**, а множество, составленное из одних внутренних точек, — **открытым**.

Определим преобразование пространства A в пространство B как однозначное соответствие вида $A \to B$:

для $\forall x \in A \;\; \exists\, y \in B$.

Точки пространства A называются ***прообразами***, а точки пространства B, соответствующие x, — ***образами***. Разумеется, указанное соответствие должно быть однозначным. Связь между x и y обозначается так:

$y = F(x)$.

В общем случае для задания преобразования нужно указать и соотношение между метриками ρ_A и ρ_B, что может вызвать определенные трудности.

Простейший вариант соответствия $F(x)$ – **преобразование пространства** A в числовое пространство **R**. Указанное соответствие в случае $A = \mathbf{R}^n$ приводит к функциям многих переменных.

Если $A = C_{[a,b]}$, то преобразование связывает функции с числами. Такое соответствие в случае $A = C^1_{[a,b]}$ и $A = C^2_{[a,b]}$ называется *функционалом*.

Мы рассмотрим один важный тип преобразования, именуемый *отображением*, с помощью которого устанавливается соответствие $A \to A$. В этом случае прообраз x и образ y принадлежат пространству A, т.е. проблема соотношений двух различных метрик снимается.

Введем понятия предела отображения и непрерывного отображения.

Точка y_0 называется **пределом отображения** $F(x)$ в предельной точке x_0, если для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(y, y_0) < \varepsilon$.

Предел отображения может принадлежать A или не принадлежать A. Если предел y_0 принадлежит A и при этом $F(x_0) = y_0$, то отображение $F(x)$ называется **непрерывным в точке** x_0. В этом случае

$$\rho(x, x_0) \to 0 \Rightarrow \rho(F(x), F(x_0)) \to 0.$$

Если отображение непрерывно в каждой точке множества $B \subset A$, то оно называется **непрерывным на множестве** B.

14.4. Сжимающее отображение. Теорема Банаха о неподвижной точке

Отображение $F(x)$ пространства A называется **сжимающим**, если для $\forall x, x' \in A$ выполняется условие

$$\rho(F(x), F(x')) \leqslant K\rho(x, x'), \tag{14.22}$$

где K – постоянная ($K \in (0, 1)$).

Точка x_0 называется **неподвижной точкой отображения**, если $F(x_0) = x_0$.

Покажем, что любое сжимающее отображение непрерывно во всех точках пространства A. С этой целью выберем произвольную точку $x_0 \in A$ и рассмотрим ее δ-окрестность. Тогда если $F(x)$ – сжимающее отображение и $\rho(x, x_0) < \delta$, то

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leqslant K\rho(x, x_0) < K\delta < \delta. \tag{14.23}$$

Очевидно, что при $\rho(x, x_0) \to 0$ расстояние $\rho(F(x), F(x_0)) \to 0$ и, следовательно, $F(x)$ непрерывна в точке x_0.

❑ **Теорема 14.1** (теорема Банаха). Если в полном метрическом пространстве A задано сжимающее отображение $F(x)$, то оно имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство. Составим последовательность $\{x_n\}$, которая начинается с произвольной точки x_0 и для которой

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Оценим расстояние между двумя соседними элементами x_n и x_{n+1}:

$$\begin{aligned}
&\rho(x_n,\ x_{n+1}) = \rho(F(x_{n-1}),\ F(x_n)) \leqslant \\
&\leqslant K\rho(x_{n-1},\ x_n) = K\rho(F(x_{n-2}),\ F(x_{n-1})) \leqslant \\
&\leqslant K^2\rho(x_{n-2},\ x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant K^n\rho(x_0,\ x_1).
\end{aligned} \tag{14.24}$$

Величину $\rho(x_0,\ x_1)$ примем за исходную и обозначим C.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Для этого оценим расстояние между парой элементов x_n и x_m, где n и m – произвольные и $m = n + l \quad (l \geqslant 1)$.

Расстояние $\rho(x_n,\ x_m) = \rho(x_n,\ x_{n+l})$.

По неравенству треугольника

$$\begin{aligned}
&\rho(x_n,\ x_{n+l}) \leqslant \rho(x_n,\ x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},\ x_{n+l}) \leqslant \\
&\leqslant \rho(x_n,\ x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},\ x_{n+2}) + \rho(x_{n+2},\ x_{n+l}) \leqslant \ldots \leqslant \\
&\leqslant \rho(x_n,\ x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},\ x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+l-1},\ x_{n+l}).
\end{aligned}$$

Все пары $x_n,\ x_{n+1};\ x_{n+1},\ x_{n+2};\ \ldots;\ x_{n+l-1},\ x_{n+l}$ являются соседними, и по (14.24)

$$\begin{aligned}
&\rho(x_n,\ x_{n+l}) \leqslant (K^n + K^{n+1} + \ldots + K^{n+l-1})C = \\
&= (1 + K + \ldots + K^{l-1})\,K^n C = \frac{1-K^l}{1-K}K^n C.
\end{aligned} \tag{14.25}$$

В силу того, что $0 < K^l < 1$ при любом $l \in N$:

$$\rho(x_n,\ x_{n+l}) < \frac{C}{1-K}K^n.$$

Если $n \to \infty$, то $\dfrac{C}{1-K}K^n \to 0$, поэтому $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность и имеет предел, так как A – полное пространство.

Обозначим предел последовательности $\{x_n\}$ как x^*:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Покажем, что точка x^* неподвижна. Переходя к пределу в левой и правой части равенства $x_{n+1} = F(x_n)$, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*, \qquad \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x^*). \tag{14.26}$$

Последнее равенство учитывает непрерывность $F(x)$ в любой точке A.

Итак, $x^* = F(x^*)$.

Осталось доказать единственность неподвижной точки. Предположим противное: отображение $F(x)$ имеет несколько неподвижных точек. Выберем две неподвижные точки x^* и $\tilde{x}^*$, $x^* \neq \tilde{x}^*$.

Тогда

$$\rho(F(x^*), F(\tilde{x}^*)) \leqslant K\rho(x^*, \tilde{x}^*),$$

и так как $F(x^*) = x^*$ и $F(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*$, то

$$(1 - K)\,\rho(x^*, \tilde{x}^*) \leqslant 0.$$

Это неравенство невозможно, так как $1 - K > 0$ и $\rho(x^*, \tilde{x}^*) > 0$ по допущению.

Поэтому необходимо принять, что $x^* = \tilde{x}^*$, и тогда $(1 - K)\cdot 0 = 0$. ■

Рассмотрим важное свойство полных метрических пространств.

❑ Любое замкнутое подмножество полного метрического пространства является полным метрическим пространством.

Доказательство. Пусть $B \subset A$ – замкнутое множество. Тогда любая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset B$ является сходящейся, так как $B \subset A$. Обозначим этот предел x_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Точка $x_0 \in B$, так как B содержит все свои предельные точки. Следовательно, полнота B доказана. ■

○ **Примеры.** 1. В $\mathbf{R}$ любой отрезок $[a, b]$ является полным метрическим пространством.

2. Множество является полным пространством, если оно охватывает все непрерывные функции, графики которых располагаются в прямоугольнике $[a, b; c, d]$: $C^*_{[a,b]} = \{\underset{\substack{c \leqslant f \leqslant d,\\ x \in [a,b]}}{f(x)}\} \subset C^0_{[a,b]}$ (рис. 14.6). ●

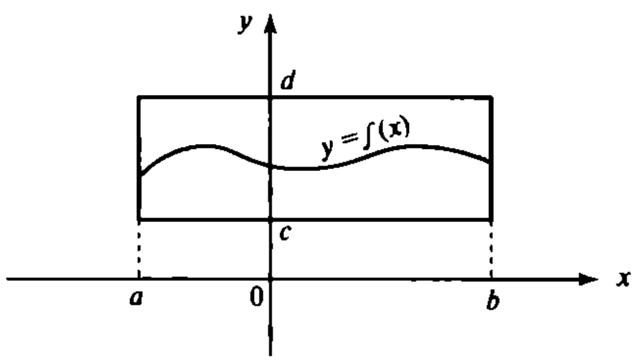


Рис. 14.6

14.5. Приложения теоремы Банаха

Рассмотрим различные приложения теоремы Банаха (см. теорему 14.1).

1. Пусть задана функция $\varphi(x)$ – определенная и непрерывная на $[a, b]$ и, кроме того, $E_\varphi \subset [a, b]$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ задает отображение полного метрического пространства $[a, b]$ в $[a, b]$. Условия задания такого отображения рассмотрены в параграфе 13.4.

Для того чтобы $\varphi(x)$ было сжимающим отображением в пространстве $[a, b]$, достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была дифференцируемой в (a, b) и для любого x

$$|\varphi'(x)| \leqslant K < 1.$$

Действительно, взяв две произвольные точки x и x' $(x < x')$, принадлежащие $[a, b]$, по теореме Лагранжа получим

$$\varphi(x') - \varphi(x) = \varphi'(\xi)(x' - x).$$

Тогда

$$\rho(\varphi(x'), \varphi(x)) = |\varphi(x') - \varphi(x)| \leqslant K|x' - x| = K\rho(x', x).$$

Это неравенство подтверждает, что $y = \varphi(x)$ – сжимающее отображение в пространстве $[a, b]$. Поэтому существует неподвижная точка $\varphi(x^*) = x^*$. Движение к этой точке определяется итерационным алгоритмом

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \text{ для } \forall n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\text{и } \lim_{n\to\infty} x_n = x^*. \tag{14.27}$$

Уравнение вида $x = \varphi(x)$ (см. параграф 13.4) является эквивалентом уравнения $f(x) = 0$, если $\varphi(x) = x - \gamma(x) f(x)$, где $f(x)$, $\gamma(x)$ – непрерывные функции и $\gamma(x) \neq 0$ при $\forall x \in [a, b]$.

Примечание. Условие, накладываемое на изменение функции $\varphi(x)$ теоремой о сжимающих отображениях, несколько отличается от требований, предъявляемых при использовании метода хорд и касательных. Напомним, что требования сводились к знакопеременности $f(x)$, монотонности и однородной выпуклости: 1) $f(a)f(b) < 0$; 2) f' и f'' сохраняют постоянный знак в (a, b).

Так, если это условие применить к решению уравнения по методу касательных, то функция $\varphi(x)$ примет вид

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(x)} f(x)$$

и производная

$$\varphi' = 1 - \frac{f'}{f'} + \frac{f \cdot f''}{(f')^2} = \frac{f \cdot f''}{(f')^2}.$$

Достаточное условие сходимости запишется так:

$$|\varphi'| = \frac{|f \cdot f''|}{(f')^2} \leqslant K < 1$$

для всех $x \in (a, b)$.

Это условие может выполняться и в том случае, когда $f''(x)$ знакопеременна в (a, b), т. е. график $f(x)$ имеет точку перегиба в $[a, b]$, что недопустимо в случае метода хорд и касательных.

2. Теперь рассмотрим задачу решения системы

$A\bar{x} = \bar{b}$, где $A \in K^n$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $\bar{b} \in \mathbf{R}^n$.

Приведем эту систему к виду

$$\bar{x} = \bar{x} - B(A\bar{x} - \bar{b}) = \bar{c} + C\bar{x},$$

где $\bar{c} = B\bar{b}$, $C = E - BA$, $B \in K^n$.

Матрица B выбирается произвольно с учетом некоторых требований, предъявляемых к матрице C, о которых пойдет речь ниже. Будем исходить из того, что решение поставленной задачи одновременно является неподвижной точкой преобразования $\bar{y} = \bar{c} + C\bar{x}$.

Очевидно, что указанное преобразование отображает $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Нужно установить условие, при котором отображение является сжимающим. Это условие формулируется альтернативно:

а) если $\bar{x} \in R_0^n$, а $C \in K_0^n$, то для того, чтобы отображение было сжимающим, достаточно, чтобы

$$\|C\| = \max_i \sum_j |c_{ij}| < 1;$$

б) если $\bar{x} \in R_1^n$, а $C \in K_1^n$, то для сжимаемости достаточно, чтобы

$$\|C\| = \max_j \sum_i |c_{ij}| < 1;$$

в) если $\bar{x} \in R_2^n$, а $C \in K_2^n$, то для сжимаемости достаточно, чтобы

$$\|C\| = \left(\sum_{ij} c_{ij}^2\right)^{1/2} < 1.$$

Итак, во всех трех вариантах единое требование:

$\|C\| < 1$.

Сначала рассмотрим случай R_0^n и K_0^n:

$$\rho(\bar{y}, \bar{y}') = \|\bar{y} - \bar{y}'\| = \|\bar{c} + C\bar{x} - (\bar{c} + C\bar{x}')\| = \|C(\bar{x} - \bar{x}')\| =$$

$$= \max_i \left|\sum_j c_{ij}(x_j - x_j')\right| \leqslant \max_i \sum_j |c_{ij}| \cdot |x_j - x_j'|.$$

Но $\sum_j |c_{ij}| \cdot |x_j - x'_j| \leqslant \sum_j |c_{ij}| (\max_j |x_j - x'_j|) = (\sum_j |c_{ij}|) \max_j |x_j - x'_j| =$
$= \sum_j |c_{ij}| \rho(\bar{x}, \bar{x}')$.

Следовательно,

$$\rho(\bar{y}, \bar{y}') \leqslant (\max_i \sum_j |c_{ij}|) \rho(\bar{x}, \bar{x}') = \|C\| \rho(\bar{x}, \bar{x}'). \quad (14.28)$$

При $\|C\| < 1$ отображение является сжимающим.

Теперь рассмотрим случай R_1^n и K_1^n:

$$\rho(\bar{y}, \bar{y}') = \|\bar{y} - \bar{y}'\| = \|C(\bar{x} - \bar{x}')\| =$$
$$= \sum_i |\sum_j c_{ij}(x_j - x'_j)| \leqslant \sum_i \sum_j |c_{ij}| \cdot |x_j - x'_j| = \sum_j (\sum_i |c_{ij}| \cdot |x_j - x'_j|) =$$
$$= \sum_j |x_j - x'_j| \sum_i |c_{ij}| \leqslant \sum_j |x_j - x'_j| (\max_j \sum_i |c_{ij}|) =$$
$$= \sum_j |x_j - x'_j| \cdot \|C\| = \|C\| \rho(\bar{x}, \bar{x}'). \quad (14.29)$$

При $\|C\| < 1$ отображение является сжимающим.

Наконец, проанализируем случай R_2^n и K_2^n.

Удобно рассмотреть ограничения для $\rho^2(\bar{y}, \bar{y}')$:

$$\rho^2(\bar{y}, \bar{y}') = \|\bar{y} - \bar{y}'\|^2 = \sum_i (\sum_j c_{ij} (x_j - x'_j))^2.$$

Обозначим $\sum_j c_{ij}(x_j - x'_j) = \bar{c}_i \cdot (\bar{x} - \bar{x}')$, где $\bar{c}_i$ — вектор, составленный из элементов i-й строки C.

По неравенству Коши–Буняковского

$$[\bar{c}_i \cdot (\bar{x} - \bar{x}')]^2 \leqslant \|\bar{c}_i\|^2 \|\bar{x} - \bar{x}'\|^2.$$

Поэтому

$$\rho^2(\bar{y}, \bar{y}') = \sum_i [\bar{c}_i \cdot (\bar{x} - \bar{x}')]^2 \leqslant \sum_i (\|\bar{c}_i\|^2 \|\bar{x} - \bar{x}'\|^2) =$$
$$= (\sum_i \|\bar{c}_i\|^2) \|\bar{x} - \bar{x}'\|^2 = \sum_i (\sum_j c_{ij}^2) \rho^2(\bar{x}, \bar{x}') = \|C\|^2 \rho^2(\bar{x}, \bar{x}').$$

Отсюда $\rho(\bar{y}, \bar{y}') \leqslant \|C\| \rho(\bar{x}, \bar{x}')$. (14.30)

При $\|C\| < 1$ отображение является сжимающим.

Приведем пример сжимающего отображения.

Пусть $C = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Матрица C в K_0^n имеет норму $\|C\| = 0{,}9 < 1$, в K_1^n – норму $\|C\| = 0{,}9 < 1$ и в K_2^n – норму $\|C\| = \sqrt{0{,}8} < 1$.

Поэтому преобразование $\bar{y} = \bar{c} + C\bar{x}$ будет сжимающим в любом пространстве $\mathbf{R}^n$, если в качестве C выбрать данную матрицу.

3. На основе теоремы Банаха покажем, что дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по y в области D, имеет в этой области единственное решение задачи Коши: $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x_0) = y_0$ и $M_0(x_0, y_0) \in D$. Точнее, покажем, что единственное решение существует в прямоугольнике $[x_0 - h, x_0 + h; y_0 - H, y_0 + H] \subset D$, при этом постоянные h и H подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы Банаха.

Приведем исходное уравнение к эквивалентной интегральной форме:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x. \tag{14.31}$$

Это уравнение становится тождеством, если на место y подставить $\varphi(x)$ – частное решение уравнения.

Рассмотрим оператор преобразования

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x. \tag{14.32}$$

Этот оператор для любой непрерывной функции прообраза $y(x)$ создает непрерывный образ, так как сложная подынтегральная функция $f(x, y(x))$ в силу непрерывности $f(x, y)$ является непрерывной функцией переменной x. Следовательно, преобразование задает отображение $C_{[a,b]}$ в $C_{[a,b]}$. Выберем на множестве $C_{[a,b]}$ метрическое пространство $C^0_{[a,b]}$ и установим условия, при которых отображение $z(x)$ является сжимающим в некотором замкнутом подмножестве $\tilde{C}^0_{[a,b]} \subset C^0_{[a,b]}$. Тогда по теореме Банаха существует единственная неподвижная точка отображения $y^* = \varphi(x)$, являющаяся решением

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x. \tag{14.33}$$

Очевидно, что функция $\varphi(x)$ определяет некоторое решение задачи Коши.

Исходное пространство $C^0_{[a,b]}$ представляет множество всех непрерывных линий, заключенных в полосе $[a, b; -\infty, +\infty)$. Область D имеет с полосой общее пересечение, в котором построим прямоугольник $[x_0 - h, x_0 + h; y_0 - H, y_0 + H]$ (рис. 14.7), границы которого определим следующим образом: $H = Mh$, где $M = \max\limits_{D}|f(x, y)|$.

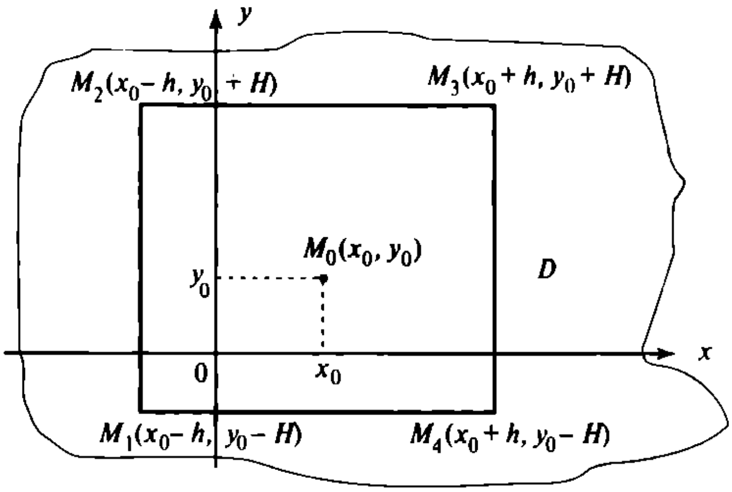


Рис. 14.7

Очевидно, что в $[x_0 - h, x_0 + h]$

$$|z - y_0| \leqslant |\int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x, y)|\mathrm{d}x \leqslant Mh, \tag{14.34}$$

или

$$-Mh \leqslant z - y_0 \leqslant Mh = H,$$

где $M = \max\limits_{D}|f(x, y)|$.

Тогда любая кривая, проходящая через точку M_0 и принадлежащая $[x_0 - h, x_0 + h; y_0 - H, y_0 + H]$, будет преобразована в кривую, принадлежащую этому прямоугольнику. Поэтому оператор преобразования (14.32) задает отображение замкнутого подмножества $\{|x - x_0| \leqslant h, |y - y_0| \leqslant H\} \subset C^0_{[a,b]}$.

Оценим расстояние между образами:

$$\rho(z, \tilde{z}) = \max_{[x_0-h, x_0+h]} |\int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{y})\mathrm{d}x| =$$

$$= \max_{[x_0-h, x_0+h]} |\int_{x_0}^{x} [f(x, y) - f(x, \tilde{y})]\mathrm{d}x| =$$

$$= \max_{[x_0-h, x_0+h]} |\int_{x_0}^{x} f'_y(x, \theta_y)(y - \tilde{y})\mathrm{d}x|,$$

где $\theta_y \in (y, \tilde{y})$.

Далее,

$$\rho(z,\ \tilde{z}) \leqslant \max_{[x_0-h,\ x_0+h]} \int_{x_0}^{x} |f'_y(x,\ \theta_y)| \cdot |y - \tilde{y}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0-h}^{x_0+h} \max_D |f'_y(x,\ y)| \max_{[x_0-h,\ x_0+h]} |y - \tilde{y}|\, dx = 2hL\rho(y,\ \tilde{y}), \qquad (14.35)$$

где $L = \max\limits_D |f'_y(x,\ y)|$.

Если принять, что $2hL = K < 1$, то отображение

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y(x))\, dx$$

будет сжимающим в полном метрическом пространстве $[x_0 - h,\ x_0 + h;\ y_0 - H,\ y_0 + H]$.

Примечание. Построенное решение ограничено.

Список литературы

1. *Демидович Б.П.* Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: Наука, 1964.
2. *Ермаков В.И. и др.* Справочник по математике для экономистов. – М.: Выс. шк., 1997.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.
4. *Кудрявцев В.П., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.
5. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1964.
6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. – М.: Наука, 1964.
7. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1968.

С. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

1.1. Случайные события

В экономике, так же как и в других областях человеческой деятельности или в природе, постоянно приходится иметь дело с событиями, которые невозможно точно предсказать. Так, объем продаж товара зависит от спроса, который может существенно изменяться, и от ряда других факторов, учесть которые практически нереально. Поэтому при организации производства и осуществлении продаж приходится прогнозировать исход такой деятельности либо на основе собственного или чужого опыта, либо на основе интуиции, которая в значительной степени тоже опирается на опытные данные.

Чтобы каким-то образом оценить событие, необходимо учесть или специально организовать условия, в которых оно происходит. Выполнение определенных условий или действий для выявления рассматриваемого события носит название **опыта** или **эксперимента**.

Событие называется **случайным**, если в результате опыта оно может либо произойти, либо не произойти.

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно появляется в результате данного опыта, и **невозможным**, если оно не может появиться в этом опыте.

Например, выпадение снега в Москве 30 ноября является случайным событием. Ежедневный восход Солнца можно считать достоверным событием, а выпадение снега на экваторе – невозможным событием.

Одной из главных задач в теории вероятностей является задача определения количественной меры возможности появления события.

1.2. Алгебра событий

События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте. Так, продажа двух и трех автомашин в одном магазине одновременно — это два несовместных события.

Суммой событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

В качестве примера суммы событий можно назвать продажу в магазине хотя бы одного из двух товаров.

Произведением событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий:

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Событие, состоящее в одновременной продаже в магазине двух товаров, является произведением событий A_1 и A_2, где A_1 — продажа одного товара, A_2 — продажа другого товара.

События $B_1, B_2, \ldots, B_k$ образуют *полную группу* событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

○ **Пример.** В порту имеется два причала для приема судов. Можно рассмотреть три события: B_1 — отсутствие судов у причалов, B_2 — присутствие одного судна у одного из причалов, B_3 — присутствие двух судов у двух причалов. Эти три события образуют полную группу. ●

Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из двух противоположных событий обозначить через A, то другое обычно обозначают через $\bar{A}$.

1.3. Классическое и статистическое определения вероятности события

Каждый из равновозможных результатов испытаний (опытов) называется **элементарным исходом**. Их обычно обозначают буквами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Например, подбрасывая игральную кость, можно получить шесть элементарных исходов (по числу очков на гранях). Из элементарных исходов можно составить более сложное событие. Так, событие выпадения четного числа очков определяется тремя исходами: 2, 4, 6.

Количественной **мерой** возможности появления рассматриваемого события является вероятность. Наиболее широкое распространение получили два определения вероятности события: классическое и статистическое.

Классическое определение вероятности связано с понятием благоприятствующего исхода. Исход называется **благоприятствующим** данному событию, если его появление влечет за собой наступление этого события.

Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m – число благоприятствующих событию A исходов; n – общее число возможных исходов.

Рассматриваемое событие – четное число очков на выпавшей грани имеет три благоприятствующих исхода. В данном случае известно и общее количество возможных исходов. Значит, здесь можно использовать классическое определение вероятности события.

В рассмотренном примере

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Статистическое определение вероятности связано с понятием относительной частоты появления события A в опытах. **Относительная частота появления** события A вычисляется по формуле

$$P^*(A) = \frac{m_1}{n_1}, \tag{1.2}$$

где m_1 – число появлений события A в серии из n_1 опытов (испытаний).

Вероятностью события A называется число, относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота $P^*(A)$ при неограниченном увеличении числа опытов.

В практических задачах за вероятность события A принимается относительная частота $P^*(A)$ при достаточно большом числе испытаний.

Из определений вероятности события A следует, что всегда выполняются неравенства

$$0 < P(A) < 1.$$

Для того чтобы вычислить вероятность события на основе формулы (1.1), часто используют формулы комбинаторики (см. Приложение 1), по которым находят число благоприятствующих исходов и общее число возможных исходов.

○ **Пример.** Известно, что в поступившей партии из 30 швейных машинок 10 имеют внутренний дефект. Определить вероятность того, что из пяти наудачу взятых машинок три окажутся бездефектными.

Решение. Введем следующие обозначения: N – общее число машинок, n – число бездефектных машинок, m – число отобранных в партию машинок, k – число бездефектных машинок в отобранной партии.

Общее число комбинаций по m машинок, т. е. общее число возможных исходов, будет равно числу сочетаний из N элементов по m, т. е. C_N^m. Но в каждой отобранной комбинации должно содержаться по три бездефектные машинки. Число таких комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k.

Оставшиеся дефектные машинки (элементы) тоже образуют множество комбинаций, число которых равно числу сочетаний из $N - n$ элементов по $m - k$, т. е. C_{N-n}^{m-k}.

Это значит, что общее число благоприятствующих исходов определяется произведением $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$. Откуда

$$P(A) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Подставив в эту формулу численные значения данного примера, получим

$$P(A) = \frac{C_{20}^3 C_{10}^2}{C_{30}^5} = 0{,}36. \bullet$$

2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

❑ **Теорема 2.1.** Вероятность суммы конечного числа несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{2.1}$$

Доказательство. Докажем эту теорему для случая суммы двух несовместных событий A_1 и A_2.

Пусть событию A_1 благоприятствуют m_1 элементарных исходов, а событию A_2 – соответственно m_2 исходов. Так как события A_1 и A_2 по условию теоремы несовместны, то событию $A_1 + A_2$ благоприятствуют $m_1 + m_2$ элементарных исходов из общего числа n исходов. Следовательно,

$$P(A_1 + A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2),$$

где $P(A_1)$ – вероятность события A_1; $P(A_2)$ – вероятность события A_2. ■

❍ **Пример.** Для отправки груза со склада может быть выделена одна из двух машин различного вида. Известны вероятности выделения каждой машины: $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}4$. Тогда вероятность того, что к складу будет подана хотя бы одна из этих машин

$P(A_1 + A_2) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$. ●

2.2. Условная вероятность

Во многих случаях вероятности появления одних событий зависят от того, произошло другое событие или нет. Например, вероятность своевременного выпуска машины зависит от поставки комплектующих изделий. Если эти изделия уже поставлены, то значение искомой вероятности будет одним. Если же она определяется до поставки комплектующих, то ее значение, очевидно, будет другим.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P(A/B)$.

В тех случаях, когда вероятность события A рассматривается при условии, что произошли два других события B и C, используется условная вероятность относительно произведения событий B и C:

$P(A/BC)$.

2.3. Теорема умножения вероятностей

❑ **Теорема 2.2.** Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \quad (2.2)$$

Доказательство. Предположим, что из n возможных элементарных исходов событию A благоприятствуют m исходов, из которых k исходов благоприятствуют событию B. Тогда вероятность события A будет $P(A) = \frac{m}{n}$, условная вероятность события B относительно события A будет $P(B/A) = \frac{k}{m}$.

Произведению событий A и B благоприятствуют только те исходы, которые благоприятствуют и событию A, и событию B одновременно, т. е. k исходов. Поэтому вероятность произведения событий A и B

$$P(AB) = \frac{k}{n}.$$

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на m, получим

$$P(AB) = \frac{mk}{mn} = \frac{m}{n}\frac{k}{m} = P(A)P(B/A).$$

Аналогично доказывается и формула $P(AB) = P(B)P(A/B)$. ■

○ **Пример.** На склад поступило 35 холодильников. Известно, что пять холодильников с дефектами, но неизвестно – какие. Найти вероятность того, что два взятых наугад холодильника будут с дефектами.

Решение. Вероятность того, что первый выбранный холодильник будет с дефектом, находится как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов:

$$P(A) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Если первый холодильник оказался с дефектом, условная вероятность того, что и второй будет с дефектом, определяется на основе соотношения

$$P(B/A) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}.$$

Искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{7}\frac{2}{17} = 0{,}02. \; \bullet$$

Если при наступлении события A вероятность события B не меняется, то события A и B называются **независимыми**.

В случае независимых событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{2.3}$$

Теорему умножения вероятностей легко обобщить на любое конечное число событий.

❑ **Теорема 2.3.** Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению их условных вероятностей относительно произведения предшествующих событий, т. е.

$$P(ABC \cdots LM) = P(A)P(B/A)P(C/AB) \cdots P(M/AB \cdots L). \tag{2.4}$$

Для доказательства этой теоремы можно использовать метод математической индукции. ■

2.4. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же опыте.

❍ **Пример.** Поступление в магазин одного вида товара – событие A, поступление второго вида товара – событие B. Поступить эти товары могут и одновременно. Поэтому A и B – совместные события. ●

❑ **Теорема 2.4.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{2.5}$$

Доказательство. Событие $A + B$ наступит, если наступит одно из трех несовместных событий $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий (см. теорему 2.1)

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB). \qquad (2.6)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\bar{B}$, AB. Вновь применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$. Откуда

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \qquad (2.7)$$

Аналогично для события B получаем $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$. Откуда

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB). \qquad (2.8)$$

Подставив формулы (2.7) и (2.8) в (2.6), находим

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. ■

○ **Пример.** Если вероятность поступления в магазин одного вида товара $P(A) = 0{,}4$, а второго вида $P(B) = 0{,}5$ и если допустить, что эти события независимы, но совместны, то вероятность суммы событий

$P(A+B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}7$. ●

3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

3.1. Формула полной вероятности

Предположим, что событие B может произойти только с одним из несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Например, в магазин поступает одна и та же продукция от трех предприятий и в разном количестве. Вероятность выпуска некачественной продукции на этих предприятиях различна. Случайным образом отбирается одно из изделий. Требуется определить вероятность того, что это изделие некачественное (событие B). Здесь события A_1, A_2, A_3 – это выбор изделия из продукции соответствующего предприятия.

В этом случае вероятность события B можно рассматривать как сумму произведений событий

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий (см. теорему 2.1) получаем

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i).$$

Используя теорему умножения вероятностей, находим

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i). \tag{3.1}$$

Формула (3.1) носит название **формулы полной вероятности**.

○ **Пример.** Для рассмотренного выше случая с поступлением товара в магазин от трех предприятий зададим численные значения. Пусть от первого предприятия поступило 20 изделий, от второго – 10 и от третьего – 70. Вероятности некачественного изготовления изделия на предприятиях соответственно равны 0,02; 0,03 и 0,05.

Определить вероятность получения некачественного изделия.

Решение. Вероятности событий A_1, A_2, A_3 будут соответственно $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}1$; $P(A_3) = 0{,}7$. Используя формулу (3.1), находим

$$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}03 + 0{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}042. \bullet$$

3.2. Формула Байеса

Пусть событие B происходит одновременно с одним из n несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n. Требуется найти вероятность события A_i, если известно, что событие B произошло.

На основании теоремы о вероятности произведения двух событий (см. теорему 2.2)

$$P(A_iB) = P(B)P(A_i/B) = P(A_i)P(B/A_i),$$

откуда

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

или

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}. \quad (3.2)$$

Формула (3.2) носит название **формулы Байеса.**

○ **Пример.** Три организации представили в контрольное управление счета для выборочной проверки: первая – 15 счетов, вторая – 10, третья – 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций соответственно таковы: 0,9; 0,8; 0,85. Был выбран один счет, и он оказался правильным. Определить вероятность того, что этот счет принадлежит второй организации.

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3 – события выбора счета соответственно у первой, второй и третьей организации. Вероятности этих событий таковы:

$$P(A_1) = \frac{15}{50}, \quad P(A_2) = \frac{10}{50}, \quad P(A_3) = \frac{25}{50}.$$

По формуле полной вероятности (см. формулу (3.1)) определяем вероятность выбора правильно оформленного счета:

$$P(B) = 0{,}9\frac{15}{50} + 0{,}8\frac{10}{50} + 0{,}85\frac{25}{50} = 0{,}855.$$

По формуле Байеса находим искомую вероятность:

$$P(A_2/B) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}855} = 0{,}19. \quad \bullet$$

3.3. Формула Бернулли

Предположим, что несколько одинаковых машин в одних и тех же условиях перевозят груз. При этом любая машина может выйти из строя. Пусть вероятность выхода из строя одной машины не зависит от выхода из строя других машин. Это значит, что рассматриваются независимые события (испытания). Вероятности выхода из строя каждой из этих машин примем одинаковыми (p).

Пусть в общем случае проводится n независимых испытаний. Задача такова: определить вероятность того, что в m испытаниях наступит событие A, если вероятность его наступления в каждом испытании равна p. В нашем примере это может быть вероятность выхода из строя одной машины, двух машин и т. д.

Определим вначале вероятность того, что в первых m испытаниях событие A наступит, а в остальных $n - m$ испытаниях не наступит. Вероятность такого события можно получить по формуле вероятности произведения независимых событий

$$P = p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Заметим, что это лишь одна из возможных комбинаций, когда событие A произошло только в первых m испытаниях. Для определения искомой вероятности нужно перебрать все возможные комбинации. Их число равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е. C_n^m.

Таким образом, вероятность того, что событие A наступит в любых m испытаниях, определяется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{3.3}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$.

Формула (3.3) носит название **формулы Бернулли**.

○ **Пример.** В четырех попытках разыгрываются некоторые предметы. Вероятность выигрыша в каждой попытке равна 0,5. Какова вероятность выигрыша трех предметов?

Решение. По формуле Бернулли находим

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = \frac{4!}{3!} 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}25. \bullet$$

3.4. Формула Пуассона

Формула Бернулли удобна для вычислений лишь при сравнительно небольшом числе испытаний n. При больших значениях n пользоваться этой формулой неудобно. **Чаще всего в этих случаях используют формулу Пуассона**. Эта формула определяется теоремой Пуассона.

❑ **Теорема 3.1.** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит m раз, приближенно равна

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \tag{3.4}$$

где $\lambda = np$.

Доказательство. Пусть даны вероятность наступления события A в одном испытании p и число независимых испытаний n. Обозначим $\lambda = np$. Откуда $p = \frac{\lambda}{n}$. Подставим это выражение в формулу Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{n^m}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

При достаточно большом n и сравнительно небольшом m все выражения в скобках, за исключением предпоследнего, можно принять равными единице, т. е.

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n. \tag{3.5}$$

Учитывая то, что n достаточно велико, правую часть выражения (3.5) можно рассмотреть при $n \to \infty$, т. е. найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Тогда получим

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \blacksquare \tag{3.6}$$

○ **Пример.** Предприятие изготовило и отправило заказчику 100 000 бутылок пива. Вероятность того, что бутылка может оказаться битой, равна 0,0001. Найти вероятности того, что в отправленной партии будет три и пять битых бутылок.

Решение. Дано: $n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$, $m = 3$ ($m = 5$).

Находим $\lambda = np = 10$.

Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_{100\,000}(3) = 10^3 \frac{e^{-10}}{3!} = 10^3 \frac{0{,}000045}{6} = 0{,}0075,$$

$$P_{100\,000}(5) = 10^5 \frac{e^{-10}}{5!} = 10^5 \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375. \bullet$$

4. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Виды случайных величин

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие случайной величины.

Величина называется **случайной**, если в результате опыта она может принимать любые заранее неизвестные значения.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Величина называется **дискретной**, если она может принимать определенные, фиксированные значения. Например, число ежедневно продаваемых в магазине холодильников является дискретной случайной величиной.

Случайная величина называется **непрерывной**, если она может принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга. Примером непрерывной случайной величины является время заправки автомашины на автозаправочной станции.

Случайная величина обычно обозначается прописной буквой латинского алфавита (X, Y), ее конкретные значения – строчными буквами (x, y). Для дискретных случайных величин при решении конкретных задач указываются их возможные числовые значения. Например, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

4.2. Распределение дискретной случайной величины

Пусть дискретная случайная величина X может принимать n значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Для полной характеристики этой случайной величины должны быть заданы еще и вероятности появления указанных значений $p_1, p_2, ..., p_n$.

Дискретные значения случайной величины и вероятности их появления удобно записывать в следующем виде:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Для дискретной случайной величины, так же как и для непрерывной, вводится понятие *функции распределения*, которая представляет собой вероятность события $X < x$, где x – задаваемые непрерывно изменяющиеся значения, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Если дискретные значения случайной величины x_1, x_2, ..., x_n расположены в порядке возрастания, то каждому значению x_i этих величин ставится в соответствие сумма вероятностей всех предыдущих значений и вероятности p_i:

x_1	x_2	x_3	...
p_1	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_2 + p_3$	...

Так как до значения x_1 случайная величина X не встречалась, то и вероятность события $X < x_1$ равна нулю. Для всех значений $x_1 < x \leqslant x_2$ вероятность события $X < x$ совпадает с вероятностью значения x_1, т. е. p_1. Но при $x > x_2$ случайная величина уже может принимать два возможных значения x_1 и x_2, поэтому вероятность события $X < x$ для $x_2 < x \leqslant x_3$ будет равна сумме вероятностей p_1 и p_2 и т. д. Нанося на график возможные дискретные значения случайной величины x и соответствующие суммы вероятностей, получаем ступенчатую фигуру, которая и является графиком функции распределения вероятностей (рис. 4.1).

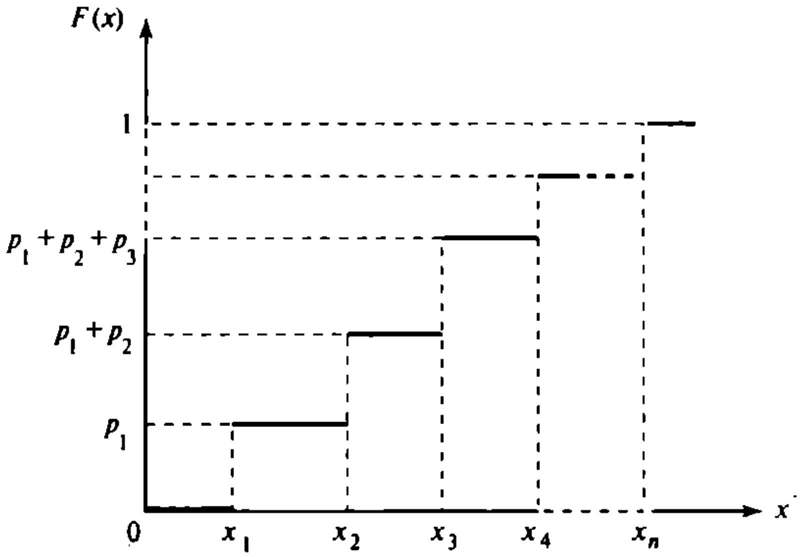


Рис. 4.1

4.3. Математическое ожидание и его свойства

В некоторых случаях целесообразно использовать не таблицу или функцию распределения для представления случайной величины, а так называемые числовые характеристики ее распределения, в частности математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = M_x = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \qquad (4.1)$$

Математическое ожидание называют также средним значением случайной величины, учитывая то, что каждое возможное значение x_i входит в выражение (4.1) с соответствующим «весом», которым и является вероятность p_i. В частном случае, когда все значения x_i равновероятны, т. е. $p_i = \frac{1}{n}$, математическое ожидание будет равно среднему арифметическому всех возможных значений:

$$M_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

○ **Пример.** В магазин ежедневно поступает не более пяти радиоприемников. Известны вероятности их поступления

$$p_0 = 0{,}1, \quad p_1 = 0{,}2, \quad p_2 = 0{,}1, \quad p_3 = 0{,}15, \quad p_4 = 0{,}2, \quad p_5 = 0{,}25.$$

Найти математическое ожидание числа поступлений радиоприемников.

Решение. Математическое ожидание

$$M_x = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}25 = 2{,}9. \ \bullet$$

Математическое ожидание случайной величины – это постоянная величина, которая показывает, какое значение случайной величины можно ожидать в среднем при проведении серии опытов.

Существует ряд свойств математического ожидания, которые формулируются в виде теорем.

❑ **Теорема 4.1.** Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной.

Доказательство. Постоянную величину C можно рассматривать как случайную величину, которая принимает лишь одно значение C с вероятностью, равной единице. Поэтому

$$M(C) = C \cdot 1 = C. \ \blacksquare$$

❑ **Теорема 4.2.** Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Доказательство. Если X – случайная величина, то kX – тоже случайная величина, которая принимает значения kx_i с вероятностями p_i, т. е. вероятностями значений x_i. Тогда математическое ожидание величины kX

$$M(kX) = kx_1p_1 + kx_2p_2 + \ldots + kx_np_n = k\sum_{i=1}^{n} x_ip_i = kM(X). \blacksquare$$

Прежде чем формулировать следующую теорему, дадим определение суммы случайных величин.

Суммой случайных величин X и Y называется новая случайная величина, обозначаемая $X + Y$, которая принимает все значения вида $x_i + y_j$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) с вероятностями p_{ij}, выражающими вероятность того, что случайная величина X принимает значение x_i, а случайная величина Y – значение y_j, т. е.

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j/X = x_i).$$

Для удобства записи будем обозначать

$$P(X = x_i) = p_i; \quad P(X = x_i/Y = y_j) = p_{i/j};$$

$$P(Y = y_j) = p_j; \quad P(Y = y_j/X = x_i) = p_{j/i}.$$

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_ip_j$.

❑ **Теорема 4.3.** Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Доказательство. Докажем теорему для суммы двух случайных величин. Математическое ожидание суммы случайных величин X и Y

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)p_{ij}.$$

Разобьем это выражение на две части:

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_ip_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_jp_{ij} = \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij} + \sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_ip_{j/i} + \sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}p_jp_{i/j} = \sum_{i=1}^{n}x_ip_i\sum_{j=1}^{m}p_{j/i} + \sum_{j=1}^{m}y_jp_j\sum_{i=1}^{n}p_{i/j}. \quad (4.2)$$

Так как при любом значении x_i рассматривается появление всех возможных значений y_j, то эти события образуют полную группу событий, сумма вероятностей которых равна единице:

$$\sum_{j=1}^{m}p_{j/i} = 1.$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{n}p_{i/j} = 1.$$

Подставляя эти значения в выражение (4.2), находим

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+\sum_{j=1}^{m}y_jp_j=M(X)+M(Y). \ \blacksquare$$

✧ **Следствие.** Математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания равно нулю.

Действительно,

$$M(X-M_x)=M_x-M_x=0. \ ✦$$

❑ **Теорема 4.4.** Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Доказательство. Рассмотрим произведение двух случайных величин X и Y. Это такая случайная величина XY, которая принимает все значения x_iy_j ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$) с вероятностями p_{ij}. Так как величины X и Y независимы, то $p_{ij}=p_ip_j$. Тогда

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\sum_{j=1}^{m}y_jp_j=M(X)M(Y). \ \blacksquare$$

❍ **Пример.** Пусть X и Y – независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M(X)=3$, $M(Y)=4$. Найти математическое ожидание случайной величины $2X+3Y-2XY$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, находим

$$M(2X+3Y-2XY)=M(2X)+M(3Y)-M(2XY)=$$
$$=2M(X)+3M(Y)-2M(X)M(Y)=$$
$$=2\cdot3+3\cdot4-2\cdot3\cdot4=-6. \ \bullet$$

4.4. Дисперсия и ее свойства

Рассмотрим две дискретные случайные величины X и Y. Первая принимает значения -1 и 1 с вероятностями 0,5. Вторая принимает значения -5 и 5 с теми же вероятностями 0,5. Математические ожидания этих величин одинаковы и равны нулю:

$$M(X)=-1\cdot0{,}5+1\cdot0{,}5=0,$$

$$M(Y)=-5\cdot0{,}5+5\cdot0{,}5=0.$$

Однако очевидно, что вторая величина сильнее отклоняется от своего математического ожидания в конкретных реализациях, чем первая. Чтобы учесть и оценить эти отклонения, можно в качестве меры разброса

взять математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания самой величины:

$$D(X) = D_x = M(X - M_x)^2.$$

В рассмотренном выше случае

$$D_x = (-1)^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5 = 1,$$

$$D_y = (-5)^2 \cdot 0{,}5 + 5^2 \cdot 0{,}5 = 25.$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Так же как и для математического ожидания, с в о й с т в а дисперсий обычно формулируются в виде теорем.

❑ **Теорема 4.5.** Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая постоянную как случайную величину, замечаем, что отклонение ее от математического ожидания всегда равно нулю. Значит, и дисперсия равна нулю. ■

❑ **Теорема 4.6.** Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если X — случайная величина, то kX — тоже случайная величина, математическое ожидание которой $kM(X)$.

Применяя к случайной величине kX определение дисперсии, получаем

$$D(kX) = M(kX - M(kX))^2 = M(kX - kM(X))^2 =$$
$$= M(k^2(X - M_x)^2) = k^2 M(X - M_x)^2 = k^2 D_x. \ ■$$

❑ **Теорема 4.7.** Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания ее квадрата и квадрата математического ожидания самой величины:

$$D_x = M(X^2) - M_x^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению дисперсии и с учетом свойств математического ожидания получаем

$$D_x = M(X - M_x)^2 = M(X^2 - 2XM_x + M_x^2) =$$
$$= M(X^2) - 2M_x M_x + M_x^2 = M(X^2) - M_x^2. \ ■$$

❑ **Теорема 4.8.** Дисперсия суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Доказательство. Докажем теорему для суммы двух случайных величин X и Y.

На основании определения дисперсии

$$D(X+Y) = M((X+Y) - M(X+Y))^2 =$$
$$= M(X + Y - M_x - M_y)^2 = M((X - M_x) + (Y - M_y))^2 =$$
$$= M((X - M_x)^2 + 2(X - M_x)(Y - M_y) + (Y - M_y)^2) =$$
$$= M(X - M_x)^2 + 2M(X - M_x)M(Y - M_y) + M(Y - M_y)^2.$$

Так как $M(X - M_x) = 0$ и $M(Y - M_y) = 0$, окончательно получаем $D(X+Y) = D_x + D_y$. ■

❍ **Пример.** Дано следующее распределение дискретной случайной величины:

X	1	2	4	5
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение. Находим сначала математические ожидания M_x и $M(X^2)$:

$$M_x = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}3 = 3{,}5,$$

$$M(X^2) = 1^2\cdot 0{,}2 + 2^2\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}4 + 5^2\cdot 0{,}3 = 14{,}5.$$

Теперь определяем дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$D_x = M(X^2) - M_x^2 = 14{,}5 - 3{,}5^2 = 2{,}25,$$

$$\sigma_x = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5. \;●$$

4.5. Математическое ожидание и дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются *независимыми*. Пусть эти вероятности одинаковы и равны p. Тогда вероятность ненаступления события A в испытании $q = 1 - p$.

❑ **Теорема 4.9.** Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в каждом испытании.

Доказательство. Пусть X – число появлений события A в n испытаниях. Это число равно сумме появлений события A в каждом испытании:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Но в каждом испытании событие A может либо появиться, либо не появиться. Поэтому $M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, откуда $M(X) = np$. ■

❑ **Теорема 4.10.** Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D_x = npq.$$

Доказательство. Пусть X – число появлений события A в n независимых испытаниях. Оно равно сумме появлений события A в каждом испытании

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Так как испытания независимы, то и случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы. Поэтому

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Но $D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Как уже было показано выше, $M(X_i) = p$, а $M(X^2_i) = 1^2 \cdot p - 0 \cdot q = p$. Тогда

$$D(X_i) = p - p^2 = p(1 - p) = pq, \quad D(X) = D_x = npq. \ ■$$

○ **Пример.** В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

Решение. Дано: $n = 5$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$.
Тогда

$$M_x = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5,$$

$$D_x = 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}05. \ ●$$

4.6. Начальные и центральные моменты

Кроме математического ожидания и дисперсии, для оценки случайной величины используются и другие числовые характеристики. Все эти числовые характеристики носят общее название **моментов случайной величины**. Различают начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M_x)^k$:

$$\mu_k = M(X - M_x)^k.$$

Начальный момент первого порядка

$$\nu_1 = M(X)$$

представляет математическое ожидание самой случайной величины X.

Центральный момент первого порядка, как уже было отмечено (см. следствие в параграфе 4.3), равен нулю:

$$\mu_1 = M(X - M_x) = 0.$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию случайной величины:

$$\mu_2 = M(X - M_x)^2 = D_x.$$

Для дискретных случайных величин

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i; \quad \mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^k p_i.$$

5. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1. Функция и плотность распределения вероятностей. Квантиль

Непрерывная случайная величина в отличие от дискретной не может характеризоваться вероятностью ее конкретного значения, так как таких значений бесконечное множество.

Для характеристики непрерывной случайной величины используется **функция распределения вероятностей**, которая, так же как и для дискретной случайной величины, представляет собой вероятность события $X < x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Однако в отличие от дискретной случайной величины в данном случае X пробегает все непрерывное множество значений, а сама функция $F(x)$ возрастает монотонно. График такой функции часто имеет вид, представленный на рис. 5.1. Здесь предполагается, что x меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

В некоторых случаях на значения случайной величины могут быть наложены ограничения. Например, если случайная величина представляет собой время выполнения некоторой операции (T), то с учетом неравенства $T > 0$ функция распределения вероятностей будет располагаться лишь в правой полуплоскости.

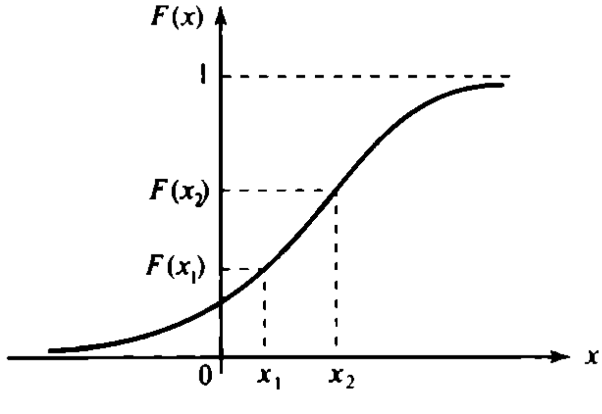


Рис. 5.1

Из рис. 5.1 видно, что вероятность события $X < x_1$ равна $F(x_1)$, а вероятность события $X < x_2$ равна $F(x_2)$. Значит, вероятность того, что случайная величина X заключена между x_1 и x_2, равна разности соответствующих значений функции распределения:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Кроме функции распределения для непрерывных случайных величин вводится понятие плотности распределения вероятностей, или плотности вероятности.

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная от ее функции распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x).$$

Значит, можно найти функцию распределения вероятностей, интегрируя плотность вероятности в общем случае от $-\infty$ до рассматриваемого значения x, т. е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Аналитические выражения для функций распределения вероятностей или плотности вероятности носят название *законов распределения*.

Для любого значения x на основании функции распределения

$$F(x) = P(X < x)$$

можно определить вероятность события $X < x$.

В некоторых случаях по заданной вероятности p требуется найти такие значения x_p, для которых выполняется равенство

$$F(x_p) = p. \qquad (5.1)$$

Значение x_p, для которого равенство (5.1) выполняется, называется **квантилью**, отвечающей заданному уровню вероятности. Ее иногда называют $100p$-процентной квантилью.

5.2. Математическое ожидание и дисперсия. Мода и медиана. Моменты

Для непрерывных случайных величин, так же как и для дискретных, используются понятия математического ожидания и дисперсии.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$M(X) = M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x, \qquad (5.2)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(X) = D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 f(x)\mathrm{d}x. \qquad (5.3)$$

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X вычисляется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Модой Мо непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которому соответствует максимальное значение ее плотности вероятности.

Медианой Ме непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которое определяется равенством

$$P(X < \mathrm{Me}(X)) = P(X > \mathrm{Me}(X)).$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии для непрерывных случайных величин остаются такими же, как и для дискретных случайных величин.

Начальные и центральные моменты (см. параграф 4.6) для непрерывной случайной величины находятся по формулам

$$\nu_k = M(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x, \qquad (5.4)$$

$$\mu_k = M(X - M_x)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^k f(x)\mathrm{d}x. \qquad (5.5)$$

○ **Пример.** Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = 2x$ в интервале $(0, 1)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Подставим в выражение математического ожидания

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

выражение плотности:

$$M_x = \int_0^1 x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсию найдем по формуле $D_x = M(X^2) - M_x^2$ или для непрерывных величин

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - M_x^2.$$

Вычислим интеграл с учетом заданной плотности вероятности:

$$\int_0^1 x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Откуда получим значение дисперсии

$$D_x = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}. \ \bullet$$

5.3. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина считается **равномерно распределенной**, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant x_1, \\ \dfrac{1}{x_2 - x_1}, & \text{если } x_1 < x \leqslant x_2, \\ 0, & \text{если } x > x_2. \end{cases} \qquad (5.6)$$

График плотности вероятности равномерного распределения изображен на рис. 5.2.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей равномерное распределение,

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{x_2 - x_1}\mathrm{d}x = \frac{1}{x_2 - x_1}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}\frac{1}{2} = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

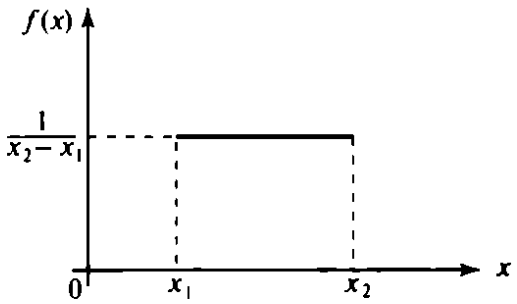


Рис. 5.2

Дисперсия может быть вычислена следующим образом:

$$D_x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{x_2 - x_1} dx - M_x^2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{x_1}^{x_2} - M_x^2 = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \frac{1}{3} - M_x^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - \frac{(x_2 + x_1)^2}{4} = \frac{4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2}{12} =$$

$$= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{12} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}.$$

Среднее квадратичное отклонение будет иметь вид

$$\sigma_x = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}.$$

○ **Пример.** Случайная величина X распределена равномерно в интервале (2, 8). Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Используя формулы математического ожидания и дисперсии равномерно распределенной случайной величины, получаем

$$M_x = \frac{2 + 8}{2} = 5, \quad D_x = \frac{(8 - 2)^2}{12} = 3. \bullet$$

5.4. Экспоненциальное распределение

Экспоненциальным (показательным) распределением непрерывной случайной величины X называется такое распределение, которое описывается следующим выражением для плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{5.7}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения вероятностей в этом случае имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

График функции плотности вероятности для экспоненциального распределения представлен на рис. 5.3.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение, получаем на основании общей формулы с учетом того, что $f(x) = 0$ при $x < 0$:

$$M_x = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx.$$

Интегрируя это выражение по частям, находим $M_x = \frac{1}{\lambda}$.

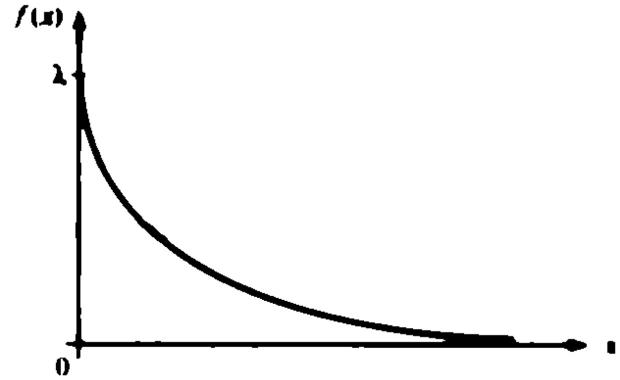


Рис. 5.3

Дисперсию для экспоненциального распределения можно получить, используя выражение

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - M_x^2.$$

Подставляя выражение для плотности вероятности, находим

$$D_x = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx - M_x^2.$$

Вычисляя интеграл по частям, получаем

$$D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5.5. Нормальное распределение. Функция Лапласа

Нормальным называется такое распределение случайной величины X, плотность вероятности которого описывается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma_x^2} \right). \qquad (5.9)$$

где σ_x и M_x – среднее квадратичное отклонение и математическое ожидание случайной величины.

Нормальный закон распределения называют также *законом Гаусса*. График функции плотности вероятности нормального распределения представлен на рис. 5.4.

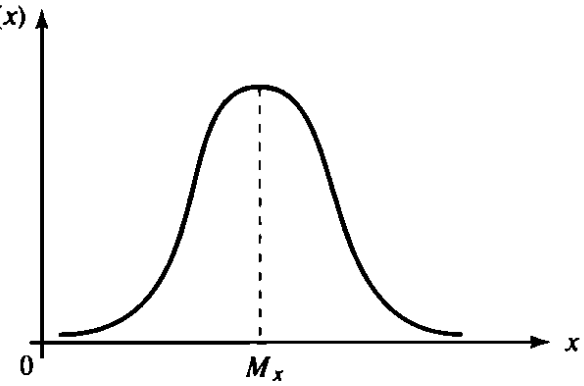


Рис. 5.4

В некоторых случаях приходится рассматривать распределения случайной величины, имеющие определенные отличия от нормального. Для оценки этого отличия введены специальные характеристики. К ним относятся, в частности, асимметрия и эксцесс.

Асимметрией распределения случайной величины называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратичного отклонения:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Графики функций плотности вероятности представлены на рис. 5.5, *а* (с положительной асимметрией) и на рис. 5.5, *б* (с отрицательной асимметрией).

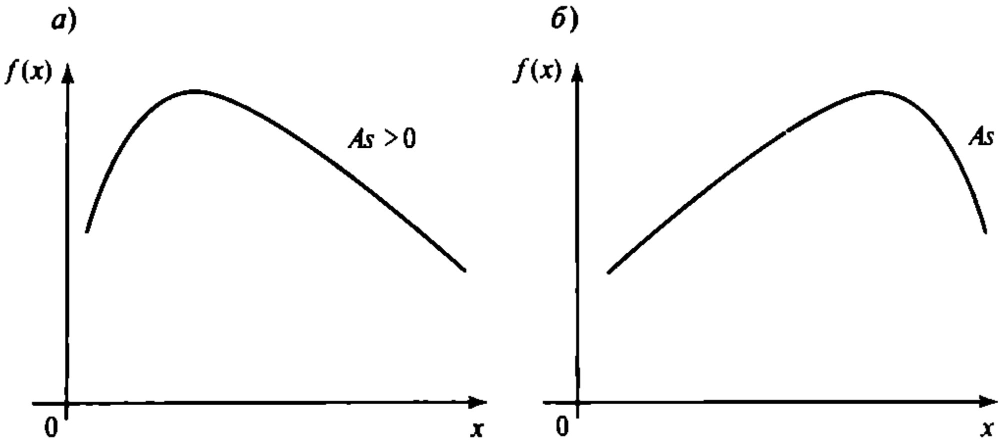


Рис. 5.5

Эксцессом распределения случайной величины называют число, определяемое выражением

$$Ek = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3$, поэтому эксцесс равен нулю.

Графики функций плотности вероятности с положительным и отрицательным эксцессом представлены на рис. 5.6. Для сравнения на рис. 5.6 изображены также кривые нормального распределения (штриховыми линиями).

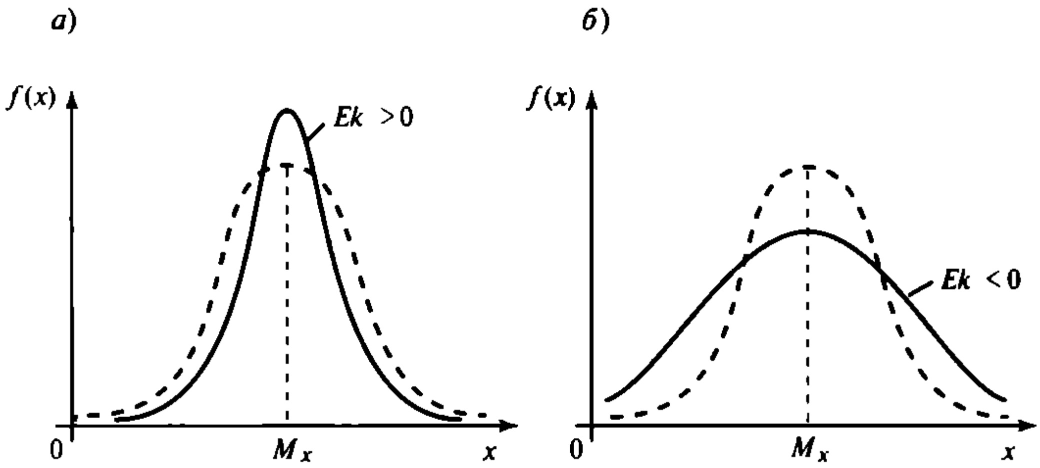


Рис. 5.6

Во многих практических задачах требуется определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Эта вероятность может быть выражена в виде разности значений функции распределения вероятности в граничных точках этого интервала:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

В случае нормального распределения

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Сделаем замену переменной

$$t = \frac{x - M_x}{\sigma_x}, \quad x = t\sigma_x + M_x, \quad \mathrm{d}x = \sigma_x \mathrm{d}t.$$

Тогда

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $z_1 = \dfrac{x_1 - M_x}{\sigma_x}$, $\quad z_2 = \dfrac{x_2 - M_x}{\sigma_x}$.

Разобьем полученный интеграл на два:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{z_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{0}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{0}^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right].$$

Интегралы от функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$ нельзя выразить через элементарные функции, поэтому определяют их численные значения, которые помещают в специальные таблицы.

Интеграл вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{5.10}$$

носит название **нормированной функции Лапласа** или просто **функции Лапласа**.

Искомая вероятность через функцию Лапласа запишется в виде

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M_x}{\sigma_x}\right). \tag{5.11}$$

Функция Лапласа является нечетной функцией, для нее

$\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

❍ **Примеры.** 1. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 10, а среднее квадратичное отклонение равно 2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (9, 12).

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (5.11):

$$P(9 < X < 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(0{,}5).$$

По таблице функции Лапласа (см. Приложение 2) находим

$\Phi(1) = 0{,}3413, \quad \Phi(0{,}5) = 0{,}1915.$

Тогда $P(9 < X < 12) = 0{,}5328$.

2. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 18, а вероятность ее попадания в интервал (16, 20) равна 0,98. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Решение. Вероятность

$$P(16 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-18}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{16-18}{\sigma_x}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right).$$

Откуда $\Phi\left(\frac{2}{\sigma_x}\right) = 0{,}49.$

Найдем значение аргумента z функции Лапласа. В нашем примере $z = \frac{2}{\sigma_x}$. Из таблицы (см. Приложение 2) получаем $z = 2{,}33$. Значит, $\sigma_x = \frac{2}{2{,}33} = 0{,}86$. ●

6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1. Распределение двумерной случайной величины

При исследовании случайных явлений часто приходится рассматривать одновременно несколько случайных величин. Их совокупность можно представить как многомерную случайную величину.

○ **Пример.** На фабрике в конце рабочего дня ежедневно фиксируют количество изготовленных стиральных машин X и пылесосов Y. Очевидно, что каждое наименование является случайной величиной, а вместе они образуют двумерную случайную величину (X, Y). Законом распределения такой величины является перечень пар чисел (x_i, y_j), где x_i и y_j $(i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., m)$ – возможные значения величин X и Y, и вероятностей их совместного появления $P(x_i, y_j)$.

Эти значения можно внести в таблицу, которая носит название таблицы распределения двумерной случайной величины (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Y	X			
	x_1	x_2	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$
...	...	...	...	...
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

●

Для непрерывной двумерной случайной величины **функция распределения** записывается в виде интеграла:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (6.1)$$

где $f(x, y)$ – плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины.

Функция распределения $F(x, y)$ представляет собой вероятность события $(X < x,\ Y < y)$, т. е.

$$F(x, y) = P(X < x,\ Y < y). \qquad (6.2)$$

Как известно, вероятность совместного появления дискретных случайных величин x_i, y_j можно выразить в виде

$$p(x_i, y_i) = p(x_i)\,p(y_j/x_i), \qquad (6.3)$$

где $p(y_j/x_i)$ – условная вероятность.

Аналогично можно представить плотность распределения вероятностей для непрерывных величин:

$$f(x, y) = f(x)\, f(y/x). \qquad (6.4)$$

Практически важным при рассмотрении систем случайных величин является понятие условного математического ожидания.

Условным математическим ожиданием *дискретной* случайной величины Y при $X = x$ называют сумму произведений возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y/\ X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p\,(y_j/x). \qquad (6.5)$$

Условное математическое ожидание *непрерывной* случайной величины определяется интегралом

$$M(Y/\ X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y/x) \mathrm{d}y. \qquad (6.6)$$

Как видно из выражений для условных математических ожиданий, их значения являются функциями от x. Такую функцию называют **функцией регрессии** Y на X:

$$M(Y/\ X = x) = M(Y/x) = \varphi(x).$$

Аналогично определяется функция регрессии X на Y:

$$M(X/\ Y = y) = M(X/y) = \varphi(y). \qquad (6.7)$$

Если на плоскости в системе Oxy отметить значения случайного вектора (X, Y), то получим множество случайно расположенных точек (рис. 6.1).

Для каждого фиксированного значения $x = x_i$ величина Y является случайной. Ее математическое ожидание представляет собой условное математическое ожидание $M(Y/x_i)$. Задавая различные значения x, можно построить *кривую регрессии* Y на X.

Аналогично можно построить кривую регрессии X на Y.

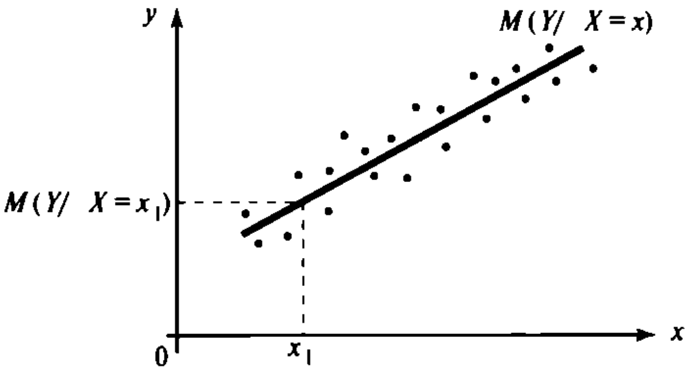


Рис. 6.1

6.2. Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариацией, или корреляционным моментом, случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий, т. е. смешанный центральный момент второго порядка

$$\mu_{xy} = M((X - M_x)(Y - M_y)). \tag{6.8}$$

Для *дискретных* случайных величин ковариация принимает вид

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M_x)(y_j - M_y)p(x_i, y_j). \tag{6.9}$$

Для *непрерывных* случайных величин она записывается через интеграл

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)(y - M_y) f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.10}$$

Ковариацию можно представить в виде

$$\mu_{xy} = M(XY - M_xY - M_yX + M_xM_y) =$$
$$= M(XY) - M_xM_y - M_yM_x + M_xM_y,$$

или

$$\mu_{xy} = M(XY) - M_xM_y. \tag{6.11}$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называют отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{6.12}$$

где $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$.

Две случайные величины называют **коррелированными**, если их ковариация или коэффициент корреляции отличны от нуля, и **некоррелированными**, если они равны нулю.

6.3. Линейная регрессия

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y). Предположим, что некоторая величина $\bar{Y}$ приближенно представляет величину Y и может быть записана как функция от X, чаще всего в виде линейной зависимости

$$\bar{Y} = g(X) = \alpha X + \beta, \tag{6.13}$$

где α и β — неизвестные пока параметры.

Требуется так подобрать параметры α и β, чтобы функция $g(X)$ была наилучшим приближением к случайным значениям Y.

В качестве меры отклонения множества случайных значений величины Y от значений $\overline{Y}$ можно взять математическое ожидание квадрата разности $Y - \overline{Y}$, т. е. $M(Y - g(X))^2$.

Минимизация этого выражения позволяет получить соотношения для определения параметров α и β. Полученную таким способом функцию $g(X) = \alpha X + \beta$ называют наилучшим приближением Y по методу наименьших квадратов, а функцию $y_x = M(Y/\ X = x) = \alpha x + \beta$ называют **линейной средней квадратической регрессией** Y на X.

❑ **Теорема 6.1.** Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид

$$y_x = r_{xy}\sigma_y \frac{x - m_x}{\sigma_x} + m_y, \tag{6.14}$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, $\quad \sigma_y = \sqrt{D_y}$, $\quad r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$, $\quad m_x = M(X)$, $\quad m_y = M(Y)$.

Доказательство. Пусть $\overline{Y} = g(x) = \alpha X + \beta$. Рассмотрим функцию

$F(\alpha, \beta) = M(Y - (\alpha X + \beta))^2$.

Заметим, что

$M(X - m_x) = M(Y - m_y) = 0, \quad M((X - m_x)(Y - m_y)) =$
$= \mu_{xy} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y$.

Тогда, раскрывая квадрат разности, получаем

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \beta) &= M(Y^2 - 2Y(\alpha X + \beta) + (\alpha X + \beta)^2) = \\
&= M(Y^2) - 2M(Y(\alpha X + \beta)) + M(\alpha X)^2 + 2M(\alpha X\beta) + M(\beta^2) = \\
&= M(Y^2) - 2\alpha M(YX) - 2\beta M(Y) + \alpha^2 M(X^2) + 2\alpha\beta M(X) + M(\beta^2).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Так как $\sigma_y^2 = M(Y^2) - m_y^2$, то $M(Y^2) = \sigma_y^2 + m_y^2$, а из равенства $\sigma_x^2 = M(X^2) - m_x^2$ следует $M(X^2) = \sigma_x^2 + m_x^2$.

Кроме того, $\mu_{xy} = M((X - m_x)(Y - m_y)) = M(XY) - m_x m_y$. Откуда

$M(XY) = \mu_{xy} + m_x m_y$.

Подставим полученные выражения в (6.15):

$F(\alpha, \beta) =$
$= \sigma_y^2 + m_y^2 - 2\alpha(\mu_{xy} + m_x m_y) - 2\beta m_y + \alpha^2(\sigma_x^2 + m_x^2) + 2\alpha\beta m_x + \beta^2$.

На основании необходимого условия экстремума функции двух переменных ее частные производные по соответствующим переменным должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2\mu_{xy} - 2m_x m_y + 2\alpha\sigma_x^2 + 2\alpha m_x^2 + 2\beta m_x = 0$$

или

$$\alpha(\sigma_x^2 + m_x^2) + \beta m_x = \mu_{xy} + m_x m_y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = -2m_y + 2\alpha m_x + 2\beta = 0$$

или

$$\alpha m_x + \beta = m_y.$$

Таким образом, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\sigma_x^2 + m_x^2) + \beta m_x = \mu_{xy} + m_x m_y, \\ \alpha m_x + \beta = m_y. \end{cases} \tag{6.16}$$

Из системы (6.16) находим параметры α и β. Для этого умножим второе уравнение системы на $-m_x$ и сложим с первым. Получим

$$\alpha\sigma_x^2 = \mu_{xy}, \quad \alpha = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2} = \frac{r_{xy}\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Подставив полученное выражение для α во второе уравнение системы (6.16), найдем

$$\beta = m_y - \frac{r_{xy}\sigma_y m_x}{\sigma_x}.$$

После подстановки α и β в выражение функции $g(X)$ имеем

$$g(X) = \frac{r_{xy}\sigma_y X}{\sigma_x} + m_y - \frac{r_{xy}\sigma_y m_x}{\sigma_x} = \frac{r_{xy}\sigma_y(X - m_x)}{\sigma_x} + m_y.$$

Условное математическое ожидание этого выражения при $X = x$ запишется в виде

$$y_x = M(Y/X = x) = \frac{r_{xy}\sigma_y(x - m_x)}{\sigma_x} + m_y. \blacksquare \tag{6.17}$$

○ **Пример.** Найти линейную среднюю квадратическую регрессию Y на X при следующих исходных данных: математические ожидания $m_x = 3$, $m_y = 6$, ковариация $\mu_{xy} = -10$, средние квадратичные отклонения $\sigma_x = 5$, $\sigma_y = 8$.

Решение. Находим коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = -\frac{10}{5\cdot 8} = -0{,}25.$$

Подставим все известные значения в выражение (6.17):

$$y_x = -\frac{0{,}25\cdot 8(x-3)}{5} + 6 = -0{,}4x + 7{,}2. \bullet$$

7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7.1. Закон больших чисел

Под законом больших чисел в теории вероятностей понимается ряд теорем, в каждой из которых устанавливается факт асимптотического приближения среднего значения большого числа опытных данных к математическому ожиданию случайной величины.

В основе доказательств этих теорем лежит неравенство, установленное известным русским математиком Чебышевым. Это неравенство можно получить, рассматривая дискретную случайную величину, имеющую n возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Дисперсия такой величины

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2 p_i. \tag{7.1}$$

Пусть α – любое положительное число. Исключим из суммы (7.1) все члены, для которых $|x_i - M_x| \leqslant \alpha$.

В этом случае сумма уменьшится:

$$D_x > \sum_{j=1}^{k} (x_j - M_x)^2 p_j, \tag{7.2}$$

где $k < n$.

Если теперь в правой части неравенства (7.2) все значения $(x_j - M_x)^2$ заменить на меньшее значение α^2, то неравенство усилится:

$$D_x > \alpha^2 \sum_{j=1}^{k} p_j. \tag{7.3}$$

В неравенстве (7.3) p_j – это вероятности таких значений x_j, для которых $|x_j - M_x| > \alpha$, а вся сумма $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j$ представляет собой вероятность того, что случайная величина $|X - M_x|$ больше α, т. е.

$$D_x > \alpha^2 P(|X - M_x| > \alpha).$$

Откуда

$$P(|X - M_x| > \alpha) < \frac{D_x}{\alpha^2}. \tag{7.4}$$

Неравенство (7.4) называется **неравенством Чебышева**. Это неравенство позволяет оценить вероятность того, что $|X - M_x| > \alpha$.

З а м е ч а н и е. Если рассмотреть противоположное событие $|X - M_x| < \alpha$, то вероятность такого события

$$P(|X - M_x| < \alpha) > 1 - \frac{D_x}{\alpha^2}. \tag{7.5}$$

Неравенство (7.5) используется, в частности, для доказательства теоремы Чебышева.

❑ **Теорема 7.1** (теорема Чебышева). Пусть имеется конечная последовательность $X_1, X_2, ..., X_n$ независимых случайных величин с одним и тем же математическим ожиданием m и дисперсиями, ограниченными одной и той же постоянной C:

$$M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = m,$$

$$D(X_1) \leqslant C, \quad D(X_2) \leqslant C, ..., D(X_n) \leqslant C.$$

Тогда, каково бы ни было положительное число α, вероятность события

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - m \right| < \alpha$$

стремится к единице при $n \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

Эта величина является случайным числом. Найдем ее математическое ожидание и дисперсию

$$M(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{nm}{n} = m.$$

Так как $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, то дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \leqslant \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Из неравенства Чебышева (7.5) с учетом сделанных обозначений, т. е.

$$P(|S_n - M(S_n)| < \alpha) > 1 - \frac{D(S_n)}{\alpha^2}, \tag{7.6}$$

получаем

$$P(|S_n - m| < \alpha) > 1 - \frac{C}{n\alpha^2}. \tag{7.7}$$

Из выражения (7.7) следует, что с ростом n вероятность события $|S_n - m| < \alpha$ стремится к единице. ■

Теорема Чебышева устанавливает связь между теорией вероятностей, которая рассматривает средние характеристики всего множества значений случайной величины, и математической статистикой, оперирующей ограниченным множеством значений этой величины. Она показывает, что при достаточно большом числе измерений некоторой случайной величины среднее арифметическое значений этих измерений приближается к математическому ожиданию.

7.2. Центральная предельная теорема

Многие непрерывные случайные величины имеют ***нормальное*** распределение. Это обстоятельство во многом определяется тем, что суммирование большого числа случайных величин с самыми разными законами распределения приводит к нормальному распределению этой суммы.

Указанное свойство подтверждается доказанной русским математиком Ляпуновым интегральной предельной теоремой. Приведем эту теорему без доказательства.

❑ **Теорема 7.2.** Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному. ■

Центральная предельная теорема имеет огромное значение для практики.

Допустим, определяется некоторый экономический показатель, например потребление электроэнергии в городе за год. Величина суммарного потребления складывается из потребления энергии отдельными потребителями, которое имеет случайные значения с разными распределениями. Теорема утверждает, что в этом случае, какое бы распределение ни имели отдельные составляющие, распределение результирующего потребления будет близко к нормальному.

Однако следует иметь в виду, что при усилении влияния отдельных факторов могут появляться отклонения от нормального распределения результирующего параметра, например может возникать асимметрия или эксцесс. Поэтому большое значение на практике уделяется экспериментальной проверке выдвинутых гипотез, в том числе и гипотезы о нормальном распределении.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8. ВЫБОРКА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

8.1. Выборочная и генеральная совокупности. Типы выборок

Математическая статистика занимается изучением закономерностей, которым подчиняются массовые явления, на основе результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики – это разработка методологии сбора и группировки статистического материала, полученного в результате наблюдений за случайными процессами.

Вторая задача состоит в разработке методов анализа полученных статистических данных. Этот анализ включает оценку вероятностей события, функции распределения вероятностей или плотности вероятности, оценку параметров известного распределения, а также связей между случайными величинами.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и, в свою очередь, служит основой для обработки и анализа статистических результатов в конкретных областях человеческой деятельности.

В математической статистике вводятся понятия генеральной и выборочной совокупностей.

Понятие **генеральной совокупности** связано с понятием полного поля элементарных событий. Это поле событий может быть конечным или бесконечным. Полное поле событий может меняться в зависимости от организации опытов.

Рассмотрим n объектов, каждый из которых имеет свое значение измеряемого параметра. Можно измерить указанный параметр на всех объектах и, обработав полученные результаты, вычислить некоторые обобщенные характеристики, например среднее значение параметра, вероятности появления того или иного значения в конкретном опыте и т. п. Общее количество объектов в данном случае и составляет генеральную совокупность.

В некоторых случаях неудобно или невозможно получить результаты измерений на всех объектах и поэтому выбирают определенную часть из этой генеральной совокупности (выборку), которую называют **выборочной совокупностью**. Обрабатывая результаты измерений выборки, получают ее обобщенные характеристики, с помощью которых оценивают параметры генеральной совокупности. В этом случае число объектов выборки не превышает общего числа объектов генеральной совокупности.

Однако ситуация меняется, если после проведения выборки и измерения объект вновь возвращается в генеральную совокупность. В этом случае число объектов выборки может быть сколь угодно велико.

Возможные значения случайной величины в генеральной совокупности также могут составлять бесконечное множество. Например, в некотором пункте измеряется температура воздуха. Это непрерывная случайная величина, так как она может меняться на сколь угодно малую величину. Такая генеральная совокупность представляет собой бесконечное множество значений. Выборку здесь также можно проводить сколь угодно раз.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число ее объектов.

Как уже было отмечено, при составлении выборки объект после проведенного над ним наблюдения может быть либо возвращен, либо не возвращен в генеральную совокупность.

Повторной называют выборку, при которой объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. **Бесповторной** называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

В некоторых случаях результаты выборки зависят не только от ее объема, но и от способа отбора объектов. Иногда такой отбор отражает, а иногда и не отражает соотношения в генеральной совокупности. Например, проводится социологический опрос населения. Очевидно, что результаты опроса будут зависеть от того, в каком месте он проводится, среди каких групп. Если выборка правильно отражает соотношения в генеральной совокупности, то ее называют **репрезентативной** (представительной).

8.2. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

Пусть из генеральной совокупности извлекается выборка. При этом значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз и т. д., x_k наблюдалось n_k раз. Общий объем выборки можно определить как

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Наблюдаемое значение x_i называется **вариантой**, а их последовательность, записанная в возрастающем порядке, – **вариационным рядом**. Число наблюдений n_i называется **частотой**, а значение его отношения к объему выборки – **относительной частотой**:

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}.$$

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Предположим, что получено статистическое распределение выборки. Обозначим через n_x число наблюдений, при которых значения вариант оказываются меньше, чем x. **Эмпирической функцией распределения** случайной величины (функцией распределения выборки) называют функцию F_x^* относительной частоты числа наблюдений n_x

$$F_x^* = \frac{n_x}{n}, \tag{8.1}$$

т. е. относительной частоты события $X < x$.

Эта функция служит для приближенного представления о теоретической функции распределения случайной величины.

○ **Пример.** Построить эмпирическую функцию распределения по данной выборке:

x_i	2	6	8	10
n_i	6	16	18	20

Решение. Объем выборки $n = 6 + 16 + 18 + 20 = 60$.

Составим функцию, используя формулу (8.1):

$$F_x^* = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{10} & \text{при } 2 < x \leqslant 6, \\ \dfrac{22}{60} = \dfrac{11}{30} & \text{при } 6 < x \leqslant 8, \\ \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3} & \text{при } 8 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

Построим график этой функции (рис. 8.1). ●

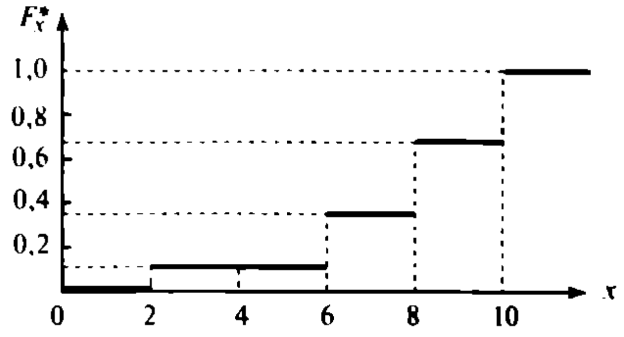


Рис. 8.1

8.3. Полигон частот и гистограмма

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i). По оси абсцисс откладывают точки x_i, а по оси ординат – соответствующие значения n_i (частоты). Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками прямых. Если вместо частот n_i брать относительные частоты

$$p_i^* = \frac{n_i}{n},$$

то можно построить полигон *относительных* частот, соединив точки (x_i, p_i) отрезками прямых. Например, полигон относительных частот может иметь вид, изображенный на рис. 8.2.

В тех случаях, когда рассматривается непрерывная случайная величина, которая может принимать любые, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга значения, строится не полигон, а гистограмма. Для этого интервал, в котором заключены все значения случайной величины, разбивается на несколько частичных интервалов длиной h каждый. На этих интервалах подсчитывается сумма частот вариант, попавших в i-й интервал, и составляется отношение $\frac{n_i}{h}$.

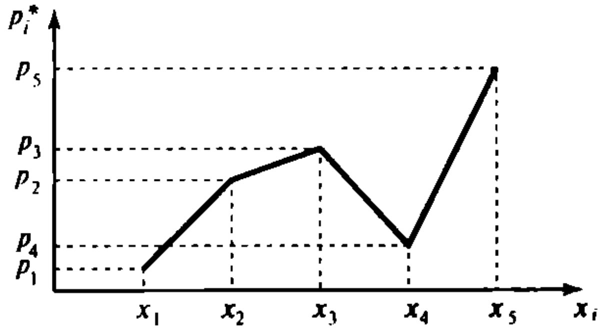


Рис. 8.2

Гистограммой называется ступенчатая фигура (рис. 8.3), состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки длиной h, а высоты равны $\frac{n_i}{h}$. Величина $\frac{n_i}{h}$ называется *плотностью частоты.*

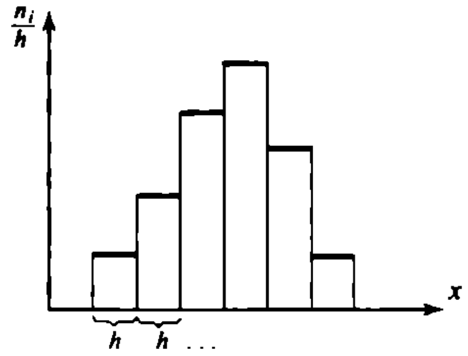


Рис. 8.3

Для того чтобы привести гистограмму, т. е. выборочную плотность частоты, в соответствие с функцией плотности вероятности $f(x)$ генеральной совокупности, по оси ординат откладывают величины $\frac{n_i}{hn}$. Тогда площадь под гистограммой

$$S = \frac{h}{nh}\sum_{i=1}^{k} n_i = 1.$$

9. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

9.1. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Одной из центральных задач математической статистики является задача оценки теоретического распределения случайной величины на основе выборочных данных. При этом предполагается, что закон распределения генеральной совокупности известен, но неизвестны его параметры, такие, например, как математическое ожидание и дисперсия. Требуется найти приближенные значения этих параметров, т. е. получить их статистические оценки.

Обозначим через θ^* оценку некоторого теоретического параметра θ закона распределения случайной величины X. Рассматривая выборочные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ как реализации случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, получивших конкретные значения в результате опытов, можно представить оценку θ^* как функцию этих случайных величин

$$\theta^* = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Это значит, что оценка тоже является случайной величиной.

Если для оценки некоторого параметра θ взять несколько (k) выборок, то в общем случае получим столько же разных случайных оценок $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$. Математическое ожидание случайной величины θ^*, имеющей отмеченные реализации, может как совпасть, так и не совпасть с оцениваемым параметром θ.

Несмещенной называется статистическая оценка θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру $M(\theta^*) = \theta$.

Смещенной называется оценка θ^*, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру. Так же как и для любой случайной величины, оценка θ^* может иметь большой или небольшой разброс (дисперсию) относительно математического ожидания.

Эффективной называется статистическая оценка, которая при одних и тех же объемах выборки имеет наименьшую дисперсию.

В некоторых случаях становится интересным поведение оценки при неограниченном увеличении объема выборки.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при увеличении объема выборки n стремится по вероятности к оцениваемому параметру, т. е.

$$P(\theta^* = \theta / n \to \infty) = 1.$$

В частности, если дисперсия оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка является состоятельной.

9.2. Выборочная средняя и выборочная дисперсия

Пусть проведена выборка объема n. **Выборочной средней** $\bar{x}_в$ называют среднее арифметическое значений выборки.

Если все значения выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, то

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если же варианты $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты n_1, $n_2, \ldots, n_k$, то

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}$$

или

$$\bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n}, \tag{9.1}$$

где $\quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$

В некоторых случаях выборочные значения случайной величины целесообразно разбивать на отдельные группы. В каждой группе можно найти ее среднюю.

Групповой средней $\bar{x}_{гi}$ называют среднее арифметическое значений выборки, принадлежащих группе.

По этим групповым средним можно найти среднее для всей выборки.

Общей средней $\bar{x}$ называют среднее арифметическое значение групповых средних.

○ **Пример.** Найти общую среднюю на основе выборки:

Группа	1		2	
Значение варианты	1	6	1	5
Частота	10	15	20	30
Объем	25		50	

Решение. Находим групповые средние:

$$\bar{x}_{г1} = \frac{1 \cdot 10 + 6 \cdot 15}{25} = \frac{100}{25} = 4,$$

$$\bar{x}_{г2} = \frac{1 \cdot 20 + 5 \cdot 30}{50} = \frac{170}{50} = 3{,}4.$$

Общая средняя $\bar{x} = \dfrac{4 \cdot 25 + 3{,}4 \cdot 50}{75} = \dfrac{270}{75} = 3{,}6.$ ●

Для характеристики рассеивания выборочных значений относительно выборочного среднего вводится понятие выборочной дисперсии.

Выборочной дисперсией $d_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений от выборочного среднего.

Если все значения выборки различны, то

$$d_в = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2}{n}.$$

Если значения выборки имеют соответствующие частоты, то

$$d_в = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2}{n}. \quad (9.2)$$

Выборочным средним квадратичным отклонением называется арифметический квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{d_в}. \quad (9.3)$$

9.3. Анализ смещенности выборочной средней и выборочной дисперсии

Выборочная средняя $\bar{x}_в$ является несмещенной оценкой, а выборочная дисперсия $d_в$ – смещенной оценкой. Покажем это.

Пусть дана выборка $x_1, x_2, ..., x_n$. Будем рассматривать выборочные значения как реализации случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, одинаково распределенных по закону распределения генеральной совокупности, т. е. случайной величины X. Это означает, что они имеют одно и то же математическое ожидание M_x и дисперсию σ_x^2.

Математическое ожидание среднего арифметического случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, т. е. математическое ожидание выборочного среднего ($\bar{X}_в$) как случайной величины, равно

$$M(\bar{X}_в) = \frac{M(X_1 + X_2 + ... + X_n)}{n} = \frac{nM_x}{n} = M_x.$$

Таким образом, выборочная средняя является несмещенной оценкой.

Теперь рассмотрим выборочную дисперсию

$$d_в = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2}{n}.$$

Математическое ожидание этой величины можно записать в виде

$$M(D_в) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - M_x) - (\bar{X}_в - M_x)\right)^2\right).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, конкретные реализации x_i заменены на случайные величины X_i, а конкретные значения $d_в$ — на случайное $D_в$, $\bar{x}_в$ — на случайное $\bar{X}_в$.

Раскрывая квадрат разности и учитывая то, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, получаем

$$M(D_в) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_x)^2\right) - M\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_x)(\bar{X}_в - M_x)\right) +$$

$$+ M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_в - M_x)^2\right). \qquad (9.4)$$

Рассмотрим каждое слагаемое этой суммы:

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_x)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i - M_x)^2 = \frac{n\sigma_x^2}{n} = \sigma_x^2; \qquad (9.5)$$

$$M\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_x)(\bar{X}_в - M_x)\right) = 2M\left((\bar{X}_в - M_x)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{nM_x}{n}\right)\right) =$$

$$= 2M((\bar{X}_в - M_x)(\bar{X}_в - M_x)) = 2M(\bar{X}_в - M_x)^2; \qquad (9.6)$$

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_в - M_x)^2\right) = M\left(\frac{n(\bar{X}_в - M_x)^2}{n}\right) = M(\bar{X}_в - M_x)^2. \qquad (9.7)$$

Так как

$$M(\bar{X}_в - M_x)^2 = D(\bar{X}_в) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{nD_x}{n^2} = \frac{D_x}{n} = \frac{\sigma_x^2}{n}, \qquad (9.8)$$

то, подставляя выражения (9.5)–(9.8) в (9.4), получаем

$$M(D_в) = \sigma_x^2 - \frac{2\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{n} = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{n} = (n-1)\frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Таким образом, математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой дисперсии генеральной совокупности σ_x^2. Чтобы «исправить» выборочную дисперсию, ее нужно умножить на дробь $\frac{n}{n-1}$.

В результате получим «исправленную» выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$$

или для конкретной выборки

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_в.$$

Соответственно, «исправленным» выборочным квадратичным отклонением называется арифметический квадратный корень из «исправленной» выборочной дисперсии.

Из выражения (9.8) следует, что среднее квадратичное отклонение выборочной средней

$$\sigma(\bar{X}_в) = \sqrt{\frac{D_x}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

❑ **Теорема 9.1.** Выборочная дисперсия равна среднему арифметическому квадратов значений выборки минус квадрат выборочной средней:

$$d_в = \overline{x^2} - \bar{x}_в^2. \tag{9.9}$$

Доказательство. Для сгруппированных по частотам выборочных значений

$$d_в = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(x_i - \bar{x}_в)^2}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x}_в + \bar{x}_в^2\right)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}_в}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \frac{n\bar{x}_в^2}{n} = \overline{x^2} - 2\bar{x}_в\bar{x}_в + \bar{x}_в^2 = \overline{x^2} - \bar{x}_в^2.$$

Итак, $d_в = \overline{x^2} - \bar{x}_в^2$. ■

9.4. Начальный и центральный эмпирические моменты

Эмпирическими моментами порядка k называют среднее значение k-х степеней разностей $x_i - C$:

$$M_k = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i(x_i - C)^k}{n}, \tag{9.10}$$

где n_i – частота варианты; $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ – объем выборки; C – произвольное постоянное число (ложный нуль).

Различают начальные и центральные эмпирические моменты.

Начальным эмпирическим моментом порядка k называется эмпирический момент порядка k при $C = 0$:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^k. \tag{9.11}$$

Для первого порядка

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \bar{x}_в \text{ (выборочная средняя).}$$

Центральным эмпирическим моментом порядка k называется эмпирический момент при $C = \bar{x}_в$

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_в)^k. \tag{9.12}$$

В частности, для второго порядка

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2 = d_в \text{ (выборочная дисперсия).}$$

9.5. Число степеней свободы

Статистические оценки параметров теоретического распределения являются случайными величинами, так как получаются они на основе случайной выборки. Для многих задач математической статистики (построение доверительных интервалов, проверка статистических гипотез и т. д.) оказывается необходимым рассмотрение законов распределения статистических оценок или их комбинаций. При этом широко используются такие законы распределения случайных величин, как хи-квадрат (χ^2), Фишера–Снедекора, Стьюдента и некоторые другие (см. параграф 9.10).

В выражения указанных законов распределения входят величины, называемые степенями свободы. Это понятие тесно связано с понятием степеней свободы тела или материальной точки, используемым в механике. Так, если в пространстве движется материальное тело, то его положение характеризуется шестью степенями свободы (координатами), три из которых определяют положение центра масс тела и три – служат для определения поворотов тела относительно центра масс.

По аналогии любая композиция k независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_k$, в частности сумма, имеет k степеней свободы, так как каждая составляющая может менять свое значение независимо от других значений. Различные независимые измерения одной и той же величины можно рассматривать как различные случайные величины с числом степеней свободы, равным числу измерений. Так, например, последовательность измерений $X_1, X_2, ..., X_k$ или их сумма имеет k степеней свободы. Точно так же и сумма квадратов этих величин имеет k степеней свободы.

Однако если для рассмотренной системы случайных величин задана некоторая связь, то количество степеней свободы уменьшается. В частности, если найти среднее значение полученных в результате выборки значений $x_1, x_2, ..., x_k$

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}$$

и зафиксировать это значение для соответствующих k случайных величин $X_1, X_2, ..., X_k$, т. е. признать верным выражение

$$\bar{x}_в = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_k}{k}$$

для всех значений этих величин, то одну из величин всегда можно выразить через остальные. Это значит, что она оказалась связанной и система случайных величин потеряла одну степень свободы.

Таким образом, рассматривая случайную величину выборочной средней как сумму независимых случайных измерений, ее число степеней свободы следует принять равным числу этих измерений. Если же рассматривать выборочную дисперсию как случайную величину

$$D_в = \frac{(X_1 - \bar{x}_в)^2 + (X_2 - \bar{x}_в)^2 + ... + (X_k - \bar{x}_в)^2}{k},$$

то она будет иметь уже на одну степень свободы меньше, так как $\bar{x}_в$ здесь фиксировано и связывает случайные величины $X_1, X_2, ..., X_k$.

Если после фиксации выборочной средней и выборочной дисперсии ($\bar{x}_в$, $d_в$) рассматривать случайную величину, зависящую от k независимых случайных величин и от $\bar{x}_в$, $d_в$, то ее число степеней свободы будет меньше еще на единицу.

В некоторых случаях фиксируются не только общая выборочная средняя и общая выборочная дисперсия, но и групповые средние и групповые дисперсии. Тогда число степеней свободы у системы случайных величин сокращается на число таких связей.

9.6. Точечная и интервальная оценки. Доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Рассмотренные выше оценки ($\bar{x}_в$, $d_в$) точечные.

При выборке малого объема точечная оценка может существенно отличаться от оцениваемого параметра. В этом случае целесообразно использовать интервальные оценки.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки величина θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. Оценка θ^* определяет θ тем точнее, чем меньше $|\theta - \theta^*|$, т. е. чем меньше δ в неравенстве $|\theta - \theta^*| < \delta, \quad \delta > 0$.

Так как θ^* — случайная величина, то и разность $|\theta - \theta^*|$ — случайная величина. Поэтому неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$ при заданном δ может выполняться только с некоторой вероятностью.

Доверительной вероятностью (надежностью) оценки θ^* параметра θ называется вероятность γ, с которой оценивается неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Обычно задается надежность γ и определяется δ. Чаще всего вероятность γ задается значениями от 0,95 и выше. Неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$ можно записать в виде

$$-\delta < \theta - \theta^* < \delta \text{ или } \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta.$$

Доверительным интервалом называется интервал $(\theta^* - \delta, \ \theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью.

Далее будут рассмотрены примеры определения доверительного интервала для параметров нормального закона распределения при заданной надежности (см. параграфы 9.9 и 9.11).

9.7. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения

Пусть известен вид функции плотности распределения вероятностей случайной величины, зависящей от одного неизвестного параметра θ.

Например, $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ — показательное распределение ($x \geqslant 0$). Требуется найти точечную оценку параметра θ. В случае показательного распределения $\theta = \lambda$.

Для получения оценки одного параметра можно использовать одно уравнение с одним неизвестным. В методе моментов в качестве такого уравнения предлагается равенство

$$\nu_1 = M_1,$$

где ν_1 — начальный теоретический момент первого порядка; M_1 — начальный эмпирический момент первого порядка.

Теоретический момент первого порядка, как известно, представляет собой математическое ожидание (см. параграф 4.6), а эмпирический момент первого порядка – это выборочная средняя (см. параграф 9.4). Таким образом,

$$M_x = \bar{x}_в. \qquad (9.13)$$

Математическое ожидание можно рассматривать как функцию параметра θ:

$$M_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \theta)\mathrm{d}x = \varphi(\theta).$$

Учитывая то, что из уравнения (9.13) можно получить не сам параметр θ, а только его оценку, так как $\bar{x}_в$ является реализацией случайной величины $\bar{X}_в$, получаем равенство

$$\varphi(\theta^*) = \bar{x}_в.$$

Решив это уравнение, найдем оценку θ*, которая является функцией от выборочной средней. Так, для экспоненциального распределения

$$M_x = \int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

Откуда $\dfrac{1}{\lambda^*} = \bar{x}_в$, $\lambda^* = \dfrac{1}{\bar{x}_в}$.

Если плотность распределения вероятностей зависит от двух параметров, θ следует рассматривать как двумерный вектор. Для оценки этих параметров требуется составлять не одно, а два уравнения. Такими уравнениями могут быть равенства

$M_x = \bar{x}_в$, $D_x = d_в$ или, что более точно, $D_x = s^2$.

9.8. Метод наибольшего правдоподобия для точечной оценки параметров распределения

Пусть X – дискретная случайная величина, которая при выборке объемом n получила значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что известен вид закона распределения вероятностей, но неизвестен параметр θ.

Обозначим через $p(x_i, \theta)$ вероятность того, что величина X принимает значения x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины называют функцию

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = p(x_1, \theta)\, p(x_2, \theta) \cdots p(x_n, \theta). \qquad (9.14)$$

Точечной оценкой параметра θ считается такое значение θ^*, при котором функция L принимает наибольшее значение. Эту оценку называют **оценкой наибольшего правдоподобия**.

Так как функции L и $\ln L$ обычно принимают наибольшее значение при одном и том же θ, то оценку θ^* определяют на основе максимизации функции $\ln L$. Для этого функцию исследуют на максимум с помощью необходимого (а иногда и достаточного) условия экстремума.

Этот метод эффективен в случае малых выборок, но часто требует довольно сложных вычислений.

○ **Пример.** Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ в распределении Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

на основе проведенных опытов.

Решение. Будем называть опытом группу из n испытаний. При этом в каждом опыте фиксируется число появлений рассматриваемого события. Пусть таких опытов будет k. Тогда число появлений события в i-м опыте будет m_i. Подставляя полученное значение m_i в формулу Пуассона, получаем

$$P_n(m_i) = \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!} e^{-\lambda}.$$

Эти вероятности для всех $i = 1, ..., k$ подставим в функцию правдоподобия

$$L = p_n(m_1, \lambda)\, p_n(m_2, \lambda) \cdots p_n(m_k, \lambda) =$$

$$= \frac{\lambda^{m_1}}{m_1!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m_2}}{m_2!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{m_k}}{m_k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{k} m_i}}{m_1!\, m_2! \cdots m_k!} e^{-k\lambda}.$$

Находим логарифм этой функции

$$\ln L = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) \ln \lambda - k\lambda - \ln (m_1! m_2! \cdots m_k!).$$

Возьмем первую производную по λ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{\lambda} - k = 0. \text{ Откуда } \lambda^* = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i = \overline{m}_в.$$

Итак, $\lambda^* = \overline{m}_в$.

Если взять вторую производную

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{\lambda^2},$$

то оказывается, что она отрицательна. Это значит, что полученное значение λ^* максимально. ●

9.9. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение и известно ее среднее квадратичное отклонение σ_x. Требуется найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание M_x с надежностью γ, с учетом полученного значения выборочного среднего $\bar{x}_в$.

Как уже отмечалось, выборочная средняя является случайной величиной, поэтому ее можно обозначить $\overline{X}_в$.

Математическое ожидание выборочной средней равно M_x (см. параграф 9.3):

$$M\left(\overline{X}_в\right) = M_x.$$

Среднее квадратичное отклонение выборочной средней

$$\sigma\left(\overline{X}_в\right) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

(см. параграф 9.3).

Будем считать, что вероятность попадания выборочного среднего в некоторую пока еще неизвестную δ-окрестность математического ожидания задана и равна γ:

$$P(|\overline{X}_в - M_x| < \delta) = \gamma.$$

Как известно (см. параграф 5.5), для нормально распределенной случайной величины X

$$P(|X - M_x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right), \qquad (9.15)$$

где $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right)$ – функция Лапласа в точке $\frac{\delta}{\sigma_x}$.

Учитывая то, что выборочное среднее, как среднее арифметическое нормально распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ распределено нормально, можно использовать формулу (9.15). Однако вместо σ_x нужно брать среднее квадратичное отклонение выборочного среднего

$$\sigma(\bar{X}_в) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Подставляя в выражение (9.15) вместо X величину $\bar{X}_в$, а вместо σ_x величину $\sigma(\bar{X}_в)$, получаем

$$P(|\bar{X}_в - M_x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = 2\Phi(z), \tag{9.16}$$

где $z = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_x}$.

Откуда $\delta = \dfrac{z\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Подставим выражение для δ в левую часть равенства (9.16):

$$P(|\bar{X}_в - M_x| < z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(z)$$

или

$$P(\bar{X}_в - z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < M_x < \bar{X}_в + z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}) = \gamma.$$

Доверительный интервал $(\bar{X}_в - z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_в + z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}})$ покрывает неизвестное M_x с надежностью γ. Число z определяем из выражения $2\Phi(z) = \gamma$, т. е. $\Phi(z) = \dfrac{\gamma}{2}$.

По таблице функции Лапласа находим z, соответствующее значению $\Phi(z) = \dfrac{\gamma}{2}$.

○ **Пример.** Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma_x = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания по выборочному среднему $\bar{x}_в$, если объем выборки $n = 36$, а надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Сначала находим z:

$$2\Phi(z) = 0{,}95, \quad \Phi(z) = 0{,}475,$$

по таблице функции Лапласа (см. Приложение 2) $z = 1{,}96$. Затем определяем δ:

$$\delta = z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}} = 0{,}98.$$

Доверительный интервал запишется в виде

$$(\bar{x}_в - 0{,}98;\ \bar{x}_в + 0{,}98).$$

При разных $\bar{x}_в$ границы интервала меняются. ●

9.10. Основные законы распределения статистических оценок

Распределение статистических оценок в большинстве случаев достаточно точно описывается такими законами распределения, как нормальный, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера–Снедекора. Нормальное распределение было рассмотрено ранее (см. параграф 5.5). Рассмотрим остальные виды распределения.

Распределение хи-квадрат

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением, равным единице. Тогда закон распределения суммы квадратов случайных величин

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

называется законом хи-квадрат с n степенями свободы.

Плотность распределения случайной величины χ^2 имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ – гамма-функция, для которой выполняется равенство $\Gamma(n + 1) = n!$.

Для случайной величины χ плотность распределения имеет вид

$$f(\chi)=\frac{e^{-\frac{\chi}{2}}\chi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad \chi \geqslant 0.$$

Распределение Стьюдента

Пусть X_0, X_1, X_2, ..., X_n – независимые нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и средними квадратичными отклонениями, равными единице. Тогда случайная величина

$$T=\frac{X_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n}}}$$

имеет распределение Стьюдента (T-распределение) с n степенями свободы.

В практических задачах используется также случайная величина

$$T=\frac{X_0-\bar{x}_\text{в}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{x}_\text{в})^2}{n}}},$$

имеющая распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

Плотность вероятности случайной величины T имеет вид

$$f(x)=b_n\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $b_n=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}$.

Распределение Фишера–Снедекора

Пусть X_1, X_2, ..., X_n и Y_1, Y_2, ..., Y_m – независимые нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и средними квадратичными отклонениями, равными единице. Тогда случайная величина

$$F_{nm}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{Y_j^2}{m}}$$

имеет распределение Фишера–Снедекора с n и m степенями свободы.

Плотность распределения случайной величины F_{nm} имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ C_0\dfrac{x^{\frac{n-2}{2}}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $C_0=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$.

Если случайные величины X и Y связаны, например, с помощью выборочных средних, то случайная величина

$$F_{kl}=\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x}_в)^2}{\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}(Y_j-\bar{y}_в)^2}$$

имеет распределение Фишера–Снедекора с числом степеней свободы $k=n-1$, $l=m-1$.

9.11. Доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения нормального распределения

Пусть известно, что случайная величина X имеет нормальное распределение. Во-первых, требуется оценить неизвестное среднее квадратичное отклонение σ_x по «исправленному» выборочному среднему квадратичному отклонению s. Во-вторых, необходимо найти доверительный интервал, в который попадает σ_x с заданной надежностью γ.

Будем считать, что вероятность попадания случайной оценки S в δ-окрестность среднего квадратичного отклонения σ_x задана и равна γ $(0 < \delta < \sigma_x)$:

$$P(|S - \sigma_x| < \delta) = \gamma$$

или

$$P(\sigma_x - \delta < S < \sigma_x + \delta) = \gamma.$$

Запишем неравенства

$$\sigma_x - \delta < S < \sigma_x + \delta$$

в виде

$$\sigma_x\left(1-\frac{\delta}{\sigma_x}\right) < S < \sigma_x\left(1+\frac{\delta}{\sigma_x}\right),$$

затем разделим на σ_x:

$$1-\frac{\delta}{\sigma_x} < \frac{S}{\sigma_x} < 1+\frac{\delta}{\sigma_x}. \tag{9.17}$$

Умножая на $\sqrt{n-1}$, получим

$$\left(1-\frac{\delta}{\sigma_x}\right)\sqrt{n-1} < \frac{S}{\sigma_x}\sqrt{n-1} < \left(1+\frac{\delta}{\sigma_x}\right)\sqrt{n-1}. \tag{9.18}$$

Обозначим

$$q = \frac{\delta}{\sigma_x}, \quad \chi = \frac{S}{\sigma_x}\sqrt{n-1}.$$

После этого неравенства (9.18) примут вид

$$(1 - q)\sqrt{n-1} < \chi < (1 + q)\sqrt{n-1}. \tag{9.19}$$

Как видно из неравенств (9.19), случайная величина χ имеет ограничения

$$\chi_1 = (1 - q)\sqrt{n-1}, \quad \chi_2 = (1 + q)\sqrt{n-1}.$$

Вероятность попадания χ в интервал (χ_1, χ_2) выражается через интеграл

$$P(\chi_1 < \chi < \chi_2) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} f(\chi, n)\,d\chi,$$

где $f(\chi, n)$ – плотность вероятности случайной величины χ (см. параграф 9.10).

Приравнивая этот интеграл к значению заданной надежности, получаем

$$\int\limits_{(1-q)\sqrt{n-1}}^{(1+q)\sqrt{n-1}} f(\chi, n)\,\mathrm{d}\chi = \gamma.$$

Значения этого интеграла рассчитываются для разных значений n, q, γ (см. Приложение 3).

Задавая значения n и γ, можно определить q.

Неравенства (9.17)

$$1 - q < \frac{S}{\sigma_x} < 1 + q$$

представим следующим образом:

$$\frac{1}{1-q} > \frac{\sigma_x}{S} > \frac{1}{1+q} \quad \text{или} \quad \frac{S}{1-q} > \sigma_x > \frac{S}{1+q}.$$

Запишем эти неравенства в виде

$$\frac{S}{1+q} < \sigma_x < \frac{S}{1-q}.$$

Подставляя вместо случайного значения S полученное по выборке s, находим требуемый интервал

$$\left(\frac{s}{1+q}, \frac{s}{1-q}\right).$$

○ **Пример.** Пусть величина X имеет нормальное распределение. Проведена выборка, объем которой $n = 25$, и найдено «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение $s = 0{,}8$. Найти доверительный интервал, покрывающий σ_x с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. По таблице зависимости n, q и γ (см. Приложение 3) находим значение величины $q = 0{,}32$. После этого определяем доверительный интервал $\left(\frac{0{,}8}{1+0{,}32}; \frac{0{,}8}{1-0{,}32}\right)$, т. е. (0,6; 1,18). ●

10. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

10.1. Статистическая гипотеза. Ошибки первого и второго рода

В некоторых случаях требуется знать закон распределения генеральной совокупности, который неизвестен, однако есть основания предполагать, что он имеет определенный вид (например, экспоненциальный). Тогда выдвигается гипотеза: генеральная совокупность распределена по экспоненциальному закону.

В других случаях закон распределения известен, но неизвестны его параметры. Если есть основания предполагать, что неизвестный параметр θ равен определенному значению θ_0, то выдвигается гипотеза: $\theta = \theta_0$.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Наряду с данной гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. В случае когда выдвинутая гипотеза отвергается, обычно принимается противоречащая ей гипотеза.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. **Конкурирующей (альтернативной)** называют гипотезу H_1, которая противоречит основной.

Например, если нулевая гипотеза H_0: $M_x = 10$ (т. е. математическое ожидание нормально распределенной величины равно 10), тогда гипотеза H_1 может иметь вид H_1: $M_x \neq 10$.

Проверку правильности или неправильности выдвинутой гипотезы проводят статистическими методами. В результате такой проверки может быть принято правильное или неправильное решение. Поэтому различают ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Например, основная гипотеза состоит в том, что предприятие получает прибыль. Если это правильная гипотеза, то ошибка первого рода состоит в том, что данная гипотеза отвергается. Если принимается решение о том, что прибыль предприятие не получает, то это ошибка второго рода.

Обычно ошибка первого рода влечет за собой ошибку второго рода: если отвергнута гипотеза о том, что предприятие получает прибыль, то, естественно, принимается решение о том, что оно не имеет прибыли.

Однако на практике возможны и другие ситуации. В большинстве случаев рассматриваются гипотезы о законах распределения. Если отвергается правильный закон распределения, то совершается ошибка первого рода. Но после этого может быть принято решение уточнить данные, т. е. другая гипотеза не принимается. Если же принимается другое распределение, то совершается ошибка второго рода.

Иногда ошибку первого рода называют «альфа-риск» (α-риск), а ошибку второго рода «бета-риск» (β-риск).

10.2. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы

В целях проверки нулевой гипотезы в рассмотрение вводят специально подобранную случайную величину, распределение которой известно. Ее обозначают U или Z, если она распределена нормально, F или v^2 – по закону Фишера–Снедекора, T – по закону Стьюдента, χ^2 – по закону хи-квадрат. Для общности ее можно обозначить K.

Случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы, называют **статистическим критерием**. Например, если проверяют гипотезу о равенстве двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимают отношение «исправленных» выборочных дисперсий

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Эта величина случайная, так как в различных выборках дисперсии принимают разные (случайные) значения. Известно также, что такое отношение распределено по закону Фишера–Снедекора.

Для проверки гипотезы сначала по данным выборок вычисляются значения входящих в критерий величин, а затем и сам критерий. Вычисленное по выборкам значение критерия называют наблюдаемым значением $k_{набл}$.

Область возможных значений критерия разбивают на две области: в одной находятся те значения, при которых гипотеза принимается, в другой – те, при которых она отвергается.

Критической областью называется область значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается. **Областью принятия гипотезы** называется совокупность значений критерия, при которых гипотеза принимается. **Критическими точками (границами)** $k_{кр}$ называются точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Области разделяются на правосторонние и левосторонние. *Правосторонняя* область определяется неравенством $K > k_{кр}$, *левосторонняя* – неравенством $K < k_{кр}$. Это односторонние области. Существуют и двусторонние области, определяемые неравенствами $K < k_{1кр}$, $K > k_{2кр}$, где $k_{2кр} > k_{1кр}$ ($k_{1кр}$, $k_{2кр}$ – критические точки).

Для отыскания односторонней критической области необходимо найти критическую точку исходя из условия

$P(K > k_{кр}) = \alpha$ (для правосторонней области).

Для каждого критерия, т. е. соответствующего распределения, обычно составлены таблицы, по которым находят $k_{кр}$ (см. Приложения 4–6). После того как критическая точка найдена, по данным выборки вычисляют наблюдаемое значение критерия. Если $k_{набл} > k_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают, если наоборот, то принимают.

10.3. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

На практике часто требуется сравнить точность измерения различными приборами или методами.

Пусть имеются две нормально распределенные совокупности X и Y. Так, например, если одну и ту же нормально распределенную случайную величину измеряют двумя приборами, то генеральные совокупности измеряемых значений будут разными: X и Y. Из этих генеральных совокупностей извлекают выборки объемом n_1 и n_2 и находят «исправленные» выборочные значения s_x^2 и s_y^2.

Зададим уровень значимости α. По данным значениям s_x^2, s_y^2, α проверим нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии равны:

H_0: $D(X) = D(Y)$.

«Исправленные» дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий, т. е.

$$M(S_x^2) = D(X), \quad M(S_y^2) = D(Y),$$

поэтому

H_0: $M(S_x^2) = M(S_y^2)$.

Таким образом, необходимо проверить равенство математических ожиданий «исправленных» выборочных дисперсий.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем отношение большей «исправленной» дисперсии к меньшей, т. е. случайную величину

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2}.$$

Величина F имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 – объем выборки для большей «исправленной» дисперсии, n_2 – для меньшей.

Предположим, что бóльшая дисперсия относится к измерениям X, а меньшая — Y. Тогда в качестве конкурирующей гипотезы можно принять H_1: $D(X) > D(Y)$. В этом случае критическую область находят из условия

$$P(F > f_{кр}(\alpha, k_1, k_2)) = \alpha \text{ (правосторонняя область).}$$

Критическую точку находят по таблице распределения Фишера–Снедекора (см. Приложение 5).

○ **Пример 1.** По двум независимым выборкам объемом $n_1 = 10$ и $n_2 = 15$ найдены «исправленные» выборочные дисперсии $s_x^2 = 12{,}5$, $s_y^2 = 7{,}3$. По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу

H_0: $D(X) = D(Y)$.

Решение. Находим $f_{набл}$:

$$f_{набл} = \frac{12{,}5}{7{,}3} = 1{,}71.$$

По таблице Фишера–Снедекора при $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 15 - 1 = 14$ находим $f_{кр} = 2{,}65$. Так как $f_{набл} < f_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. ●

В тех случаях, когда конкурирующая гипотеза может быть представлена в виде H_1: $D(X) \neq D(Y)$, нужно строить двустороннюю область и уровень значимости можно увеличить. При этом можно ограничиться нахождением правосторонней области для уровня значимости $\frac{\alpha}{2}$.

○ **Пример 2.** По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 10$ и $n_2 = 18$, извлеченным из нормальных совокупностей X и Y, найдены «исправленные» выборочные дисперсии $s_x^2 = 1{,}23$ и $s_y^2 = 0{,}41$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Решение. Находим $f_{набл}$:

$$f_{набл} = \frac{1{,}23}{0{,}41} = 3.$$

Здесь критическая область двусторонняя, поэтому уровень значимости принимаем $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, число степеней свободы $k_1 = 9$, $k_2 = 17$. По таблице распределения Фишера–Снедекора (см. Приложение 5) находим критическую точку $f_{кр}(0{,}05; 9; 17) = 2{,}5$. Так как $f_{набл} > f_{кр}$, нулевую гипотезу отвергаем. Если при этом рассматривать два метода или прибора измерения, то предпочтительнее тот, у которого выборочная дисперсия меньше (т. е. 0,41). ●

10.4. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности. Критерий Пирсона

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Пусть имеется выборка, объем которой n, для проверки определенного закона распределения $f(x, \theta)$ с неизвестными параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

Если рассматривается непрерывное распределение, то интервал возможных значений величины разбивается на m непересекающихся интервалов, в каждом из которых фиксируется число попаданий вариант выборки $n_1, n_2, ..., n_m$.

Зная границы каждого интервала и принятый закон распределения, можно найти вероятность попадания случайной величины в этот интервал p_i. После этого из формулы $p_i = \dfrac{n_i^*}{n}$ находится теоретическая частота появления события n_i^*:

$$n_i^* = np_i.$$

В качестве критерия выбирается случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*}. \qquad (10.1)$$

Эта случайная величина при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы.

Число степеней свободы определяется по формуле $k = m - 1 - r$, где m – число интервалов, r – число параметров предполагаемого распределения.

Так, для показательного распределения $k = m - 2$, для нормального распределения $k = m - 3$.

Далее, задавая уровень значимости α и учитывая k, из таблиц распределения χ^2 (см. Приложение 4) находят критическое значение $\chi^2_{кр}$, при котором выполняется условие

$$P(\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)) = \alpha.$$

Сравнивая вычисленное по формуле (10.1) значение $\chi^2_{набл}$ со значением $\chi^2_{кр}$, принимают решение о значимости допустимой гипотезы распределения случайной величины.

○ **Пример.** По полученным в результате измерений данным (табл. 10.1) проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

В табл. 10.1 указаны границы частичных интервалов и частоты попадания вариант в каждый интервал (n_i).

Решение. Вычисляем среднее значение интервала

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$$

и находим

$$\bar{x}_в^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^*.$$

После подстановки соответствующих значений получаем $\bar{x}_в^* = 12{,}63$.

Далее находим $\overline{\left(x_в^*\right)^2}$:

$$\overline{\left(x_в^*\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i^*\right)^2.$$

Таблица 10.1

Номер интервала	Границы интервала		Частота	Середина интервала	Квадрат	Разности		Границы	
i	x_i	x_{i+1}	n_i	x_i^*	$(x_i^*)^2$	$x_i - \bar{x}_в^*$	$x_{i+1} - \bar{x}_в^*$	z_i	z_{i+1}
1	4	6	15	5	25	–8,63	–6,63	–1,84	–1,41
2	6	8	26	7	49	–6,63	–4,63	–1,41	–0,99
3	8	10	25	9	81	–4,63	–2,63	–0,99	–0,56
4	10	12	30	11	121	–2,63	–0,63	–0,56	–0,13
5	12	14	26	13	169	–0,63	1,37	–0,13	0,29
6	14	16	21	15	225	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	24	17	289	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	20	19	361	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	13	21	441	7,37	9,37	1,57	1,99
Σ			$n = 200$						

Подставляя данные, получаем

$$\overline{\left(x_в^*\right)^2} = 181{,}56.$$

Используя для выборочной дисперсии формулу

$$d_в = \overline{\left(x_в^*\right)^2} - \left(\bar{x}_в^*\right)^2,$$

находим

$$d_в = 181{,}56 - 159{,}52 = 22{,}04.$$

Откуда $\sigma_в = 4{,}695$.

Для того чтобы вычислить теоретические вероятности попадания случайных величин в интервалы (x_i, x_{i+1}), на основании таблиц функции Лапласа необходимо найти значения

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}_в^*}{\sigma_в}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_в^*}{\sigma_в}.$$

В табл. 10.1 записываем вначале разности $x_i - \bar{x}_в^*$ и $x_{i+1} - \bar{x}_в^*$, а затем z_i и z_{i+1}.

После этого составляем еще одну таблицу для расчета теоретических частот (табл. 10.2). В этой таблице $\Phi(z_i)$ — значения функции Лапласа для соответствующего значения z_i.

Таблица 10.2

Номер интервала	Границы		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i^* = nP_i$
i	z_i	z_{i+1}				
1	–1,84	–1,41	–0,4671	–0,4207	0,0464	9,28
2	–1,41	–0,99	–0,4207	–0,3389	0,0818	16,36
3	–0,99	–0,56	–0,3389	–0,2123	0,1266	25,32
4	–0,56	–0,13	–0,2123	–0,0517	0,1606	32,12
5	–0,13	0,29	–0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	1,99	0,4418	0,4767	0,0349	6,98

Составляем теперь таблицу для определения $\chi^2_{набл}$ (табл. 10.3).

Таблица 10.3

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
1	15	9,28	5,72	32,7	3,52
2	26	16,36	9,64	92,9	5,68
3	25	25,32	–0,32	0,1	0
4	30	32,12	–2,12	4,5	0,14
5	26	33,16	–7,16	52,3	1,58
6	21	30,02	–9,02	81,4	2,75
7	24	21,74	2,26	5,1	0,23
8	20	13,78	6,22	38,7	2,8
9	13	6,98	6,02	36,2	5,2

По формуле (10.1) находим $\chi^2_{набл} = 21{,}9$.

Число степеней свободы $k = 9 - 3 = 6$. По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и $k = 6$ из таблицы распределения χ^2 (см. Приложение 4) находим $\chi^2_{кр} = 12{,}6$. Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, требуется либо изменить вид закона, либо повторить опыты. ●

11. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

11.1. Выборочные уравнения регрессии

Как известно из теории вероятностей, связь между разными случайными величинами заключается в том, что при изменении одной из них для другой величины, в общем случае, меняется функция распределения вероятностей. Такая связь называется *стохастической*.

На практике часто используется связь между изменениями одной случайной величины X и изменениями математического ожидания другой Y, т. е. регрессия Y на X (условное математическое ожидание) $M(Y/\ X = x) = f(x)$ или регрессия X на Y соответственно $M(X/\ Y = y) = f(y)$.

Так как в математической статистике имеют дело не с числовыми характеристиками законов распределения, а с их оценками, то в качестве оценки условного математического ожидания принимается условное среднее.

Условным средним $\bar{y}_x$ называется среднее арифметическое наблюдаемых значений Y, соответствующих $X = x$.

Например, если при $x = 2$ величина Y приняла значения $y_1 = 6$, $y_2 = 12$, $y_3 = 3$, то условное среднее

$$\bar{y}_x = \frac{6+12+3}{3} = 7.$$

Условные средние $\bar{y}_x$ или $\bar{x}_y$ являются функциями соответственно от x и y:

$$\bar{y}_x = f^*(x), \tag{11.1}$$

$$\bar{x}_y = \varphi^*(y). \tag{11.2}$$

Уравнение (11.1) называют выборочным уравнением регрессии Y на X, а уравнение (11.2) – выборочным уравнением регрессии X на Y.

Графики соответствующих функций $f^*(x)$ и $\varphi^*(y)$ называют выборочными линиями регрессии (рис. 11.1).

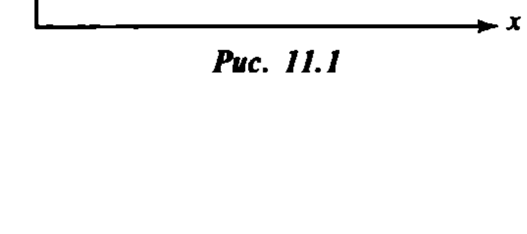


Рис. 11.1

Для данного значения $X = x$ наблюдается рассеивание Y около среднего значения $\bar{y}_x$. Мерой этого рассеивания служит *условная дисперсия* Y при данном x, обозначаемая $\sigma^2_{y/x}$.

11.2. Отыскание параметров выборочного уравнения линейной регрессии по несгруппированным данным

Пусть имеются две случайные величины X, Y и проводится их измерение. В результате n независимых опытов получены n пар независимых чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).

Будем искать линейное выборочное уравнение регрессии Y на X в виде

$$\bar{y}_x = kx + b. \tag{11.3}$$

Так как по выборочным данным можно получить только оценки параметров, то оценку коэффициента k обозначим через ρ, а оценку b – через β, т. е.

$$\bar{y}_x = \rho x + \beta. \tag{11.4}$$

Обозначим через y_i значение величины Y, соответствующее x_i, а через $\bar{y}_i$ – значение $\bar{y}_x$, которое можно получить из выражения (11.4) при $X = x_i$. Возьмем разности $\bar{y}_i - y_i$, возведем их в квадрат и просуммируем. Получим функцию

$$f(\rho, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + \beta - y_i)^2.$$

Приравнивая частные производные этой функции по ρ и β к нулю, т. е. используя необходимые условия экстремума функции, получаем два уравнения для определения этих параметров

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + \beta - y_i)x_i = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + \beta - y_i) = 0. \end{cases}$$

После элементарных преобразований эти уравнения приводятся к виду

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \rho + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\rho + n\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{11.5}$$

Откуда получаем

$$\rho = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Аналогично находится выборочное уравнение линейной регрессии X на Y

$$\bar{x}_y = \rho_1 y + \beta_1,$$

где

$$\rho_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2},$$

$$\beta_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}.$$

Для оценки связи между случайными величинами обычно используется выборочный коэффициент корреляции.

Введем в рассмотрение **выборочный эмпирический корреляционный момент**

$$\mu^*_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – выборочные средние.

Раскроем скобки и учтем, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}.$$

Тогда

$$\mu_{xy}^* = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}\,\bar{y}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}n\bar{y} - \bar{y}n\bar{x} + n\bar{x}\,\bar{y}\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}\right].$$

Выборочный коэффициент корреляции представляет собой отношение

$$r_{\text{в}} = \frac{\mu_{xy}^*}{\sigma_{x_{\text{в}}}\sigma_{y_{\text{в}}}}.$$

○ **Пример.** В магазине постельных принадлежностей в течение пяти дней подсчитывали число покупок простыней X и подушек Y:

x_i	10	20	25	28	30
y_i	4	8	7	12	14

(В данной таблице значения X расставлены в возрастающем порядке.) Найти выборочное уравнение линейной регрессии и выборочный коэффициент корреляции.

Решение. Составим таблицу подсчетов (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Номер опыта i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	10	4	100	40	16
2	20	8	400	160	64
3	25	7	625	175	49
4	28	12	784	336	144
5	30	14	900	420	196
Σ	113	45	2809	1131	469

Находим ρ и β:

$$\rho = \frac{5\cdot 1131 - 113\cdot 45}{5\cdot 2809 - 113^2} = 0{,}447,$$

$$\beta = \frac{2809\cdot 45 - 113\cdot 1131}{5\cdot 2809 - 113^2} = -1{,}1.$$

Уравнение регрессии запишется в виде

$$\bar{y}_x = 0{,}447x - 1{,}1.$$

Подсчитаем корреляционный момент:

$$\mu^*_{xy} = \frac{1131 - 5\frac{113}{5}\frac{45}{5}}{5} = 22{,}8.$$

Находим $\overline{y^2}$:

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{469}{5} = 93{,}8.$$

Определим выборочную дисперсию величин X и Y:

$$d_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{2809}{5} - \left(\frac{113}{5}\right)^2 = 51,$$

$$d_y = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{469}{5} - \left(\frac{45}{5}\right)^2 = 12{,}8.$$

Откуда $\sigma_{x_\text{в}} = 7{,}14$; $\sigma_{y_\text{в}} = 3{,}58$; $r_\text{в} = \dfrac{22{,}8}{7{,}14 \cdot 3{,}58} = 0{,}89$. ●

11.3. Отыскание параметров выборочного уравнения линейной регрессии по сгруппированным данным

При большом числе опытов одно и то же значение x_i может встретиться n_{x_i} раз, а одно и то же значение y_j соответственно n_{y_j} раз. Одна и та же пара значений (x_i, y_j) может наблюдаться $n_{x_i y_j} = n_{ij}$ раз. Поэтому наблюдаемые значения могут быть сгруппированы. Для этого подсчитывают частоты и все эти результаты заносят в таблицу, которая обычно называется *корреляционной*. Примером корреляционной таблицы является табл. 11.2.

Таблица 11.2

y_j	x_i				n_{y_j}
	10	20	30	40	
4	5	–	7	14	26
6	–	6	6	4	16
8	3	15	–	–	18
n_{x_i}	8	21	13	18	$n = 60$

На пересечении строк и столбцов, т. е. для пары (x_i, y_j), указывается частота n_{ij}. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{k_1} n_{x_i} = \sum_{j=1}^{k_2} n_{y_j} = n.$$

Пусть имеется корреляционная таблица наблюдаемых значений X и Y.

Так как

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n},$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\overline{x^2}. \qquad (11.6)$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} x_i y_j, \qquad (11.7)$$

где k_1 — число значений x_i; k_2 — число значений y_j.

Последнее выражение можно преобразовать:

$$\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{k_1} x_i \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{k_1} x_i U_i, \text{ где } U_i = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} y_j,$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{k_2} y_j \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij} x_i = \sum_{j=1}^{k_2} y_j V_j, \text{ где } V_j = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij} x_i.$$

Заменив в системе уравнений (11.5) для несгруппированных данных соответствующие суммы выражениями (11.6) и (11.7) и разделив второе уравнение на n, получим

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho + n\bar{x}\beta = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} x_i y_j, \\ \bar{x}\rho + \beta = \bar{y}. \end{cases} \qquad (11.8)$$

Решая эту систему, находим ρ и β и подставляем в уравнение регрессии (11.4).

Однако чаще уравнение регрессии записывают в другом виде с использованием выборочного коэффициента корреляции. Для этого из второго уравнения системы (11.8) найдем β

$$\beta = \bar{y} - \bar{x}\rho$$

и подставим в уравнение регрессии (11.4). Получим уравнение

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho(x - \bar{x}). \qquad (11.9)$$

Так как выборочная дисперсия

$$d_{x_в} = \sigma^2_{x_в} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2,$$

то после получения ρ из системы (11.8) и подстановки $\sigma^2_{x_в}$ находим

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}x_i y_j - \bar{x}n\bar{y}}{n\sigma^2_{x_в}}. \qquad (11.10)$$

Умножив обе части равенства на дробь $\frac{\sigma_{x_в}}{\sigma_{y_в}}$, получим

$$\rho\frac{\sigma_{x_в}}{\sigma_{y_в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}x_i y_j - \bar{x}n\bar{y}}{n\sigma_{x_в}\sigma_{y_в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} x_i U_i - \bar{x}n\bar{y}}{n\sigma_{x_в}\sigma_{y_в}}.$$

Правую часть последнего равенства обозначим через $r_в$:

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}x_i y_j - \bar{x}n\bar{y}}{n\sigma_{x_в}\sigma_{y_в}}. \qquad (11.11)$$

Заметим, что $r_в$ – это выборочный коэффициент корреляции.

Для сгруппированных данных он может быть получен по формуле (11.11).

Таким образом,

$$\rho = \frac{\sigma_{y_в}}{\sigma_{x_в}} r_в.$$

Подставив выражение для ρ в уравнение (11.9), получим

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\sigma_{y_в}}{\sigma_{x_в}} r_в(x - \bar{x}). \qquad (11.12)$$

❍ **Пример.** Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы (табл. 11.3).

Таблица 11.3

y_j	x_i						n_y
	10	20	30	40	50	60	
15	5	7	–	–	–	–	12
25	–	20	23	–	–	–	43
35	–	–	30	47	2	–	79
45	–	–	10	11	20	6	47
55	–	–	–	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Решение. Для упрощения расчетов целесообразно ввести условные варианты

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

или иначе,

$$x_i = h_1 u_i + C_1, \quad y_j = h_2 v_j + C_2,$$

где C_1, C_2 – ложные нули (выбираемые значения); h_1, h_2 – разности между двумя соседними значениями соответственно X и Y (в нашем примере $h_1 = h_2 = 10$).

В этом случае для $\bar{x}$ и $\bar{y}$ получаем выражения

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{h_1 \sum_{i=1}^{n} u_i + nC_1}{n} = h_1 \bar{u} + C_1,$$

соответственно

$$\bar{y} = h_2 \bar{v} + C_2.$$

Найдем выражения для $\sigma_{x_в}$ и $\sigma_{y_в}$ через новые переменные:

$$\sigma_{x_в}^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_1 u_i + C_1)^2 - (h_1 \bar{u} + C_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \left(h_1^2 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2h_1 C_1 \sum_{i=1}^{n} u_i + nC_1^2 \right) - \left(h_1 \bar{u} + C_1 \right)^2 =$$

$$= h_1^2 \overline{u^2} + 2h_1 C_1 \bar{u} + C_1^2 - h_1^2 (\bar{u})^2 - 2h_1 C_1 \bar{u} - C_1^2 =$$

$$= h_1^2 \left(\overline{u^2} - (\bar{u})^2 \right) = h_1^2 \sigma_u^2,$$

аналогично

$$\sigma_{y_в}^2 = h_2^2\sigma_v^2.$$

Теперь найдем выражение $\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}x_iy_j$. При этом заметим, что

$$\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}u_i = \bar{u}n, \quad \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}v_j = \bar{v}n, \quad \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} = n.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}x_iy_j = \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}(h_1u_i + C_1)(h_2v_j + C_2) =$$

$$= h_1h_2\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}v_ju_i + h_1C_2n\bar{u} + h_2C_1n\bar{v} + C_1C_2n.$$

Произведение $\bar{x}n\bar{y}$ примет вид

$$\bar{x}n\bar{y} = n(h_1\bar{u} + C_1)(h_2\bar{v} + C_2) = h_1h_2\bar{u}n\bar{v} + h_1C_2n\bar{u} + h_2C_1n\bar{v} + nC_1C_2.$$

Подставляя полученные значения в выражение для $r_в$, находим, что

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}u_iv_j - \bar{u}n\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Подсчитав $r_в$ и вычислив и $\sigma_{x_в}$, $\sigma_{y_в}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, можно записать уравнение регрессии.

Для подсчета $r_в$ можно использовать преобразованные корреляционные таблицы. Вначале составляют таблицу, в которую записывают условные варианты ($C_1 = 40$, $C_2 = 35$) (табл. 11.4).

Таблица 11.4

v_j	u_i						n_v
	–3	–2	–1	0	1	2	
–2	5	7	–	–	–	–	12
–1	–	20	23	–	–	–	43
0	–	–	30	47	2	–	79
1	–	–	10	11	20	6	47
2	–	–	–	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

После этого составляют таблицу, в которой подсчитывают произведения $n_{ij}u_i$ и $n_{ij}v_j$ (табл. 11.5). В правом верхнем углу заполненных клеток записывают произведения $n_{ij}u_i$, а в левом нижнем углу – произведения $n_{ij}v_j$. Рассчитывают суммы

$$V_j = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij}u_i, \qquad U_i = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}v_j.$$

Значения V_j записывают в отдельную колонку табл. 11.5 и умножают на v_j. Полученные значения V_jv_j записывают в последней колонке. Аналогично рассчитывают две последние строки этой таблицы.

Таблица 11.5

v_j	u_i						V_j	V_jv_j
	–3	–2	–1	0	1	2		
–2	–15 5 –10	–14 7 –14	–	–	–	–	–29	58
–1		–40 20 –20	–23 23 –23	–	–	–	–63	63
0	–	–	–30 30 0	0 47 0	2 2 0	–	–28	0
1	–	–	–10 10 10	0 11 11	20 20 20	12 6 6	22	22
2	–	–	–	0 9 18	7 7 14	5 3 6	13	26
U_i	–10	–34	–13	29	34	12	–	$\Sigma = 169$
u_iU_i	30	68	13	0	34	24	$\Sigma = 169$	–

Находим $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{n_i u_i}{n}, \quad \bar{v} = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{n_j v_j}{n},$$

где

$$n_i = n_u = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij},$$

$$n_j = n_v = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij}.$$

Таким образом,

$$\bar{u} = \frac{5\cdot(-3) + 27\cdot(-2) + 63\cdot(-1) + 29\cdot 1 + 9\cdot 2}{200} = -0,425,$$

$$\bar{v} = \frac{12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2}{200} = 0,09.$$

Находим также $\overline{u^2}$ и $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{n_i u_i^2}{n}, \quad \overline{v^2} = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{n_j v_j^2}{n}.$$

Таким образом,

$$\overline{u^2} = \frac{5\cdot 9 + 27\cdot 4 + 63\cdot 1 + 29\cdot 1 + 9\cdot 4}{200} = 1,405,$$

$$\overline{v^2} = \frac{12\cdot 4 + 43\cdot 1 + 47\cdot 1 + 19\cdot 4}{200} = 1,05.$$

По формулам

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}$$

определяем средние квадратичные отклонения:

$$\sigma_u = \sqrt{1,405 - (-0,425)^2} = 1,106, \quad \sigma_v = \sqrt{1,05 - 0,09^2} = 1,02.$$

Подставляем рассчитанные данные в формулу для $r_в$:

$$r_в = \frac{169 - 200\cdot(-0,425)\cdot 0,09}{200\cdot 1,106\cdot 1,02} = 0,7.$$

Затем рассчитываем $\sigma_{x_в}$, $\sigma_{y_в}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ по формулам

$$\sigma_{x_в} = h_1\sigma_u, \quad \sigma_{y_в} = h_2\sigma_v, \quad \bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1, \quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2,$$

получаем

$$\sigma_{x_в} = 10\cdot 1,106 = 11,06, \quad \sigma_{y_в} = 10\cdot 1,02 = 10,2,$$

$$\bar{x} = -0,425\cdot 10 + 40 = 35,75, \quad \bar{y} = 0,09\cdot 10 + 35 = 35,9.$$

Подставляем полученные значения в уравнение регрессии:

$$\bar{y}_x - 35,9 = 0,7\frac{10,2}{11,06}(x - 35,75),$$

окончательно получаем

$$\bar{y}_x = 0,645x + 12,6. \bullet$$

12. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

12.1. Понятие о дисперсионном анализе

Во многих экономических задачах требуется оценить влияние различных качественных факторов на изучаемую величину X. Например, разные формы организации производства могут оказывать существенное или несущественное влияние на прибыль фирмы или предприятия. Другим примером может служить задача оценки эффективности различных видов удобрений.

Данный фактор Φ можно разделить на ряд уровней, в качестве которых могут выступать, например, разные формы организации производства или разные виды удобрений.

Суть метода заключается в том, что дисперсия величины X разделяется на две части: одна часть – *факторная дисперсия* вызвана действием фактора Φ, вторая – *остаточная дисперсия* обусловлена случайными причинами. Если выясняется, что факторная дисперсия невелика по сравнению с остаточной, то фактор не оказывает существенного влияния на X.

Если рассматривается один фактор, дисперсионный анализ называется *однофакторным*, если более одного – *многофакторным*.

12.2. Факторная и остаточная дисперсии

Рассмотрим схему однофакторного дисперсионного анализа.

Пусть на рассматриваемую величину X влияет фактор Φ, который имеет p уровней. На каждом уровне, т. е. для одного из видов фактора Φ, проводятся измерения величины X. Число таких измерений для всех уровней одинаково и равно q.

Составим таблицу полученных измерений (табл. 12.1). В последней строке помещены средние значения измерений для каждого уровня.

Таблица 12.1

Номер измерения	Уровни фактора			
	Φ_1	Φ_2	...	Φ_p
1	x_{11}	x_{12}		x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}		x_{2p}
...	...	...		...
q	x_{q1}	x_{q2}	...	x_{qp}
Групповая средняя	$\bar{x}_{г1}$	$\bar{x}_{г2}$	...	$\bar{x}_{гp}$

Общей средней является величина, равная

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\bar{x}_{\text{г}j}}{p}.$$

Общей суммой квадратов отклонений измеренных значений x_{ij} от общей средней называется выражение

$$r_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2. \qquad (12.1)$$

Факторной суммой квадратов отклонений групповых средних от общей средней называется выражение

$$r_{\text{факт}} = q\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{\text{г}j} - \bar{x})^2. \qquad (12.2)$$

Остаточной суммой квадратов отклонений наблюдаемых значений от групповых средних служит сумма

$$r_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{q}(x_{i1} - \bar{x}_{\text{г}1})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q}(x_{ip} - \bar{x}_{\text{г}p})^2. \qquad (12.3)$$

Обычно остаточную сумму находят как разность

$$r_{\text{ост}} = r_{\text{общ}} - r_{\text{факт}}. \qquad (12.4)$$

Подсчитав $r_{\text{общ}}$, $r_{\text{факт}}$ по формулам (12.1), (12.2) и $r_{\text{ост}}$ по формуле (12.3) или (12.4), можно получить факторную и остаточную дисперсии. С учетом того, что факторная дисперсия зависит от p составляющих и является смещенной оценкой, формула для несмещенной оценки дисперсии принимает вид

$$s^2_{\text{факт}} = \frac{r_{\text{факт}}}{p-1}.$$

Остаточная дисперсия зависит от x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, q$; $j = 1, 2, \ldots, p$), т. е. от pq составляющих. Следовательно, для несмещенной остаточной дисперсии

$$s^2_{\text{ост}} = \frac{r_{\text{ост}}}{p(q-1)}.$$

Здесь число степеней свободы по сравнению с pq уменьшено на p, так как в каждой группе за счет групповой средней число степеней уменьшается на единицу.

❍ **Пример.** Проведены измерения для каждого из трех уровней некоторого фактора Φ. В качестве уровня значимости принимается величина $\alpha = 0{,}05$. Проверить нулевую гипотезу о незначительном влиянии фактора Φ.

Исходные данные помещены в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Номер измерения	Уровни фактора		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\bar{x}_{rj}$	35	25	27

Решение. Находим общую среднюю $\bar{x} = \dfrac{35+25+27}{3} = 29$.

Вычисляем разности $y_{ij} = x_{ij} - \bar{x}$ и квадраты этих разностей (табл. 12.3).

Таблица 12.3

Номер измерения	Уровни фактора					
	Φ_1		Φ_2		Φ_3	
	y_{11}	y_{11}^2	y_{12}	y_{12}^2	y_{13}	y_{13}^2
1	9	81	-9	81	-8	64
2	7	49	-5	25	-7	49
3	6	36	-3	9	2	4
4	2	4	1	1	5	25
Σ	–	170	–	116	–	142

Затем находим общую и факторную суммы:

$$r_{общ} = 170 + 116 + 142 = 428,$$

$$r_{факт} = q\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{rj} - \bar{x})^2 = 4[(35-29)^2 + (25-29)^2 + (27-29)^2] = 224.$$

Вычисляем остаточную сумму $r_{ост} = 428 - 224 = 204$.

Определяем факторную и остаточную дисперсии:

$$s^2_{факт} = \frac{224}{2} = 112,$$

$$s^2_{ост} = \frac{204}{3 \cdot 3} = 22{,}67.$$

Для проверки нулевой гипотезы используем критерий Фишера–Снедекора, т. е. случайную функцию

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2},$$

равную отношению выборочных дисперсий двух нормально распределенных случайных величин. В данном случае полагаем, что факторная и остаточная дисперсии распределены нормально.

Находим наблюдаемое значение критерия

$$f_{набл} = \frac{s_{факт}^2}{s_{ост}^2} = \frac{112}{22{,}67} = 4{,}96.$$

По таблице распределения Фишера–Снедекора для $\alpha = 0{,}05$ и степеней свободы $k_1 = p - 1 = 2$, $k_2 = (q - 1)p = 3 \cdot 3 = 9$ находим $f_{кр}$ (0,05; 2; 9) = 4,26 (см. Приложение 5).

Так как $f_{кр} < f_{набл}$, то заключаем, что фактор влияет существенно и нулевую гипотезу отвергаем. ●

В некоторых случаях для расчета $r_{общ}$ и $r_{факт}$ удобнее использовать другие соотношения.

Преобразуем выражение для $r_{общ}$:

$$r_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left[x_{ij}^2 - 2x_{ij}\bar{x} + (\bar{x})^2\right] = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}x_{ij}^2 - 2\bar{x}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}x_{ij} + pq(\bar{x})^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}x_{ij}^2 - 2\bar{x}\,\bar{x}pq + pq(\bar{x})^2,$$

откуда

$$r_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}x_{ij}{}^2 - pq(\bar{x})^2.$$

Преобразуем также выражение для $r_{факт}$:

$$r_{факт} = q\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{гj} - \bar{x})^2 = q\left(\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{гj})^2 - 2\bar{x}\sum_{j=1}^{p}\bar{x}_{гj} + p(\bar{x})^2\right),$$

откуда

$$r_{факт} = q\left(\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{гj})^2 - p(\bar{x})^2\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Формулы комбинаторики

В теории вероятностей встречается много задач, связанных с различными комбинациями элементов.

○ **Пример 1.** Трудовой коллектив из 30 человек должен выбрать руководителя и его заместителя. Сколько существует способов их выбора, если каждый член коллектива может быть либо руководителем, либо его заместителем?

Очевидно, что имеется 30 способов выбрать руководителя, так как в коллективе 30 человек. Но тогда каждый из оставшихся 29 человек может быть выбран заместителем. Значит, любой из 30 способов выбора руководителя может осуществляться вместе с 29 способами выбора его заместителя. Поэтому существует $30 \cdot 29 = 870$ способов выбора руководителя и заместителя. ●

○ **Пример 2.** Для проведения устного экзамена по математике создается комиссия из двух человек. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

Обозначим преподавателей буквами A, B, C, D, F и выпишем возможные варианты состава комиссий:

$$\left.\begin{array}{r} AB,\ AC,\ AD,\ AF \\ BC,\ BD,\ BF \\ CD,\ CF \\ DF \end{array}\right\} \text{ — всего 10 вариантов. } \bullet$$

○ **Пример 3.** К условиям предыдущего примера добавим требование, состоящее в том, что один из преподавателей должен быть назначен старшим. Сколько в таком случае будет вариантов комиссии?

Будем ставить старшего преподавателя на первое место. Тогда сформируются следующие множества:

$$\left.\begin{array}{l} AB,\ AC,\ AD,\ AF \\ BA,\ BC,\ BD,\ BF \\ CA,\ CB,\ CD,\ CF \\ DA,\ DB,\ DC,\ DF \\ FA,\ FB,\ FC,\ FD \end{array}\right\} \text{ — всего 20 вариантов. } \bullet$$

Пусть имеется множество A, состоящее из n элементов. **Размещением** из n элементов по k называется каждое упорядоченное подмножество множества A, состоящее из k элементов.

В примере 3 каждая пара элементов является размещением из пяти элементов по два. Размещения различаются составом элементов и порядком их следования.

Чтобы определить общее число **размещений** из n элементов по k, можно использовать следующую схему формирования подмножеств по k элементам.

Первый элемент подмножества может быть выбран n способами, так как всего n элементов. Тогда для второго элемента подмножества остается $n - 1$ элемент. Значит, всего способов выбора будет $n(n - 1)$. Для третьего элемента остается уже $n - 2$ способа выбора. А всего для трех элементов будет $n(n - 1)(n - 2)$ способов формирования.

Для k элементов будет $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 1)$ способ формирования. Таким образом, общее число размещений из n элементов по k определяется по формуле

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 1). \qquad (\text{П.1.1})$$

Умножим и разделим выражение (П.1.1) на $(n - k)!$, где $(n - k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - k)$.

Тогда получим

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdots 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Таким образом, число размещений из n элементов по k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (\text{П.1.2})$$

Если $k = n$, т. е. любое размещение включает все элементы данного множества, и размещения отличаются только порядком следования элементов, то такие размещения называют **перестановками**.

На основании формулы (П.1.1) при $k = n$ получается число перестановок из n элементов

$$P_n = n!. \qquad (\text{П.1.3})$$

○ **Пример 4.** Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Чтобы число, составленное из данных цифр, делилось на пять, необходимо, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять в любом порядке, и их комбинации — это перестановки из пяти цифр, т. е.

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$ ●

Пусть имеется множество A, состоящее из n элементов. Каждое подмножество множества A, состоящее из k элементов, называется **сочетанием** из n элементов по k, причем различными считаются только те подмножества, у которых состав элементов неодинаков. Это имело место в примере 2.

Пусть имеется число сочетаний из n элементов по k, обозначим его через C_n^k.

Из каждого подмножества перестановками его элементов можно получить упорядоченные подмножества. Этих упорядоченных подмножеств будет $k!$ (число перестановок P_k). Тогда число размещений из n элементов по k находится по формуле

$$A_n^k = k!C_n^k,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (\text{П}.1.4)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Нормированная функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	366650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49922	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значения чисел q в зависимости от объема выборки n и надежности γ для определения доверительного интервала среднего квадратичного отклонения σ

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
7	0,92	–	–	25	0,32	0,49	0,73
8	0,80	–	–	30	0,28	0,43	0,63
9	0,71	–	–	35	0,26	0,38	0,56
10	0,65	–	–	40	0,24	0,35	0,50
11	0,59	0,98	–	45	0,22	0,32	0,46
12	0,55	0,90	–	50	0,21	0,30	0,43
13	0,52	0,83	–	60	0,188	0,269	0,38
14	0,48	0,78	–	70	0,174	0,245	0,34
15	0,46	0,73	–	80	0,161	0,226	0,31
16	0,44	0,70	–	90	0,151	0,211	0,29
17	0,42	0,66	–	100	0,143	0,198	0,27
18	0,39	0,60	0,92	150	0,115	0,160	0,211
19	0,39	0,60	0,92	200	0,099	0,136	0,185
20	0,37	0,58	0,88	250	0,089	0,120	0,162

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения χ^2 (хи-квадрат)

Число степеней свободы	Уровень значимости α					
	0,01	0,05	0,1	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,5	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,98	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,6	14,0	1263	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Значения чисел $f_{кр}$, при которых с вероятностью не более 5% случайная величина F, распределенная по закону Фишера–Снедекора, превосходит величину $f_{кр}$

k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	9	12	∞
1	161	200	216	225	239	234	239	240	244	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,38	19,41	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,81	8,74	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	6,00	5,91	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,77	4,68	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,10	4,00	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,68	3,57	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,39	3,28	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,18	3,07	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	3,02	2,91	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,90	2,79	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,80	2,69	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,71	2,60	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,65	2,53	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,59	2,48	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,54	2,42	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,49	2,38	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,46	2,34	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,42	2,31	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,39	2,28	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,37	2,25	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,34	2,23	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,32	2,20	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,30	2,18	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,28	2,16	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,27	2,15	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,25	2,13	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,24	2,12	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,22	2,10	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,21	2,09	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,12	2,00	1,52
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,88	1,75	1,00

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Критические точки распределения Стьюдента
(значения $t_{кр}$, соответствующие вероятности
$\alpha = P(|T| > t_{кр})$ с k степенями свободы)

k	α				
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,48	2,02	2657	3,36	4,03
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,33	1,64	2,11	2,57	2,90
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,32	1,71	1,06	2,49	2,79
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,31	1,70	2,05	2,46	3,76
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

Список литературы

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962.
2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977.
3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969.
4. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1976.
5. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971.
6. *Карасев А.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1979.
7. *Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1991.
8. *Матвеев В.И.* Краткий курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 1996.
9. *Мацкевич И.П., Свирид Г.П.* Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. – Минск: Вышэйш. шк., 1993.
10. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979.
11. *Смирнов Н.Е., Дунин-Барковский И.Е.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1965.
12. *Четыркин Е.М., Калихман И.Л.* Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.
13. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.

D. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Задачи математического и линейного программирования

Исследование различных процессов, в том числе и экономических, обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математические соотношения. При этом составляются уравнения или неравенства, которые связывают различные показатели (переменные) исследуемого процесса, образуя систему ограничений. В этих соотношениях выделяются такие переменные, меняя которые можно получить оптимальное значение основного показателя данной системы (прибыль, доход, затраты и т.п.). Соответствующие методы, позволяющие решать указанные задачи, объединяются под общим названием «математическое программирование» или «математические методы исследования операций».

Математическое программирование включает в себя такие разделы математики, как линейное, нелинейное и динамическое программирование. Сюда же обычно относят стохастическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, теорию управления запасами и некоторые другие.

Итак, **математическое программирование** – это раздел высшей математики, посвященный решению задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные.

Методами математического программирования решаются задачи о распределении ресурсов, планировании выпуска продукции, ценообразовании, транспортные задачи и т.п.

Математическое программирование возникло в 30-е годы XX века. Венгерский математик Б. Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Кун обобщил этот метод, после чего он стал называться «венгерским» методом. В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического программирования внесли американские ученые. В 1947 году американский ученый Дж. Данциг описал один из основных методов решения задач линейного программирования, получивший название «симплексный».

Построение математической модели экономической задачи включает следующие этапы: 1) выбор переменных задачи; 2) составление системы ограничений; 3) выбор целевой функции.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, ..., x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Система ограничений включает в себя систему уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или физических условий, например положительности переменных и т.п.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти экстремум целевой функции

$$Z(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max (\min) \tag{1.1}$$

и соответствующие ему переменные при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, & i = 1, 2, ..., l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant (\geqslant)\ 0, & i = l+1, l+2, ..., m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если целевая функция (1.1) и система ограничений (1.2) линейны, то задача математического программирования называется задачей *линейного* программирования.

В общем случае задача линейного программирования может быть записана в таком виде:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max (\min), \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = b_l, \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + ... + a_{(l+1)n}x_n \leqslant b_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., t, \quad t \leqslant n. \tag{1.5}$$

Данная запись означает следующее: найти экстремум целевой функции задачи (1.3) и соответствующие ему переменные $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений (1.4) и условиям неотрицательности (1.5).

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений (планов) задачи образует **область допустимых решений** (ОДР).

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

Так как в данном случае решается задача на экстремум, то возникает вопрос: можно ли использовать классические методы исследования на экстремум функции многих переменных. Применим необходимое условие экстремума функции, которое состоит в том, что частные производные функции многих переменных или равны нулю, или не существуют. В данном случае

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = c_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Но если все $c_i = 0$, то и $Z = 0$, т.е. экстремум функции не обнаруживается. Связано это с тем, что производную можно использовать для определения экстремума только во внутренних точках области решений, а в данном случае экстремум, как будет показано далее, находится на границах области. Отсюда и возникает необходимость разработки специальных методов поиска экстремума.

1.2. Математические модели простейших экономических задач

Задача использования ресурсов

Для изготовления нескольких видов продукции $P_1, P_2, ..., P_n$ используют m видов ресурсов $S_1, S_2, ..., S_m$. Это могут быть различные материалы, электроэнергия, полуфабрикаты и т.п. Объем каждого вида ресурсов ограничен и известен ($b_1, b_2, ..., b_m$). Известно также a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$) – количество каждого i-го вида ресурса, расходуемого на производство единицы j-го вида продукции. Кроме того, известна прибыль, получаемая от реализации единицы каждого вида продукции ($c_1, c_2, ..., c_n$).

Условия задачи можно представить в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вид ресурсов	Объем ресурсов	a_{ij}			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1 S_2 ... S_m	b_1 b_2 ... b_m	a_{11} a_{21} ... a_{m1}	a_{12} a_{22} ... a_{m2}		a_{1n} a_{2n} ... a_{mn}
Прибыль		c_1	c_2	...	c_n

Пусть x_j ($j = 1, 2, ..., n$) – количество каждого вида продукции, которое необходимо произвести.

Для первого ресурса имеет место неравенство-ограничение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1.$$

Аналогичные неравенства будут и для остальных видов ресурсов. Следует учитывать также, что все значения $x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n$.

Общая прибыль, получаемая от реализации всей продукции, может быть представлена как функция

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Необходимо эту функцию максимизировать.

Таким образом, математическая модель задачи использования ресурсов запишется в виде

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

В более компактной форме целевую функцию и систему ограничений можно записать, используя знак суммирования,

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Задача о составлении рациона питания

Требуется составить ежедневный рацион питания животного на основе имеющихся видов кормов так, чтобы общая стоимость использованных кормов была минимальной. При этом животное не должно получать менее определенного количества питательных веществ, например, таких, как жиры, углеводы, белки, витамины и т.п.

Каждый вид корма содержит разную комбинацию этих веществ. Известна цена единицы веса каждого корма.

Пусть имеются n различных кормов (продуктов) $P_1, P_2, ..., P_n$ и перечень из m необходимых питательных веществ $S_1, S_2, ..., S_m$. Обозначим через a_{ij} содержание (в весовых единицах) i-го питательного вещества в единице j-го корма, а через b_i минимальную суточную потребность животного в i-м питательном веществе. Через x_j обозначим количество каждого вида корма в ежедневном рационе. Очевидно, что $x_j \geqslant 0$.

Условия задачи можно представить в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2

Питательное вещество	a_{ij}				Суточная потребность
	P_1	P_2	...	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Стоимость 1 кг корма	c_1	c_2	...	c_n	–

Для первого вида питательного вещества неравенство-ограничение примет вид

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geqslant b_1.$$

Аналогично запишутся неравенства и для остальных питательных веществ.

Общие затраты на весь рацион питания животного можно найти на основе линейной функции

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Эту функцию нужно минимизировать.

Итак, математическая модель задачи составления рациона питания имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

1.3. Каноническая форма задачи линейного программирования

В общем случае задача линейного программирования записывается так, что ограничениями являются как уравнения, так и неравенства, а переменные могут быть как неотрицательными, так и произвольно изменяющимися. В том случае, когда все ограничения являются уравнениями и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности, задачу линейного программирования называют **канонической**. Она может быть представлена в координатной, векторной или матричной форме записи.

1. Каноническая задача линейного программирования в *координатной* записи имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Данную задачу можно записать, используя знак суммирования:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max\ (\min), \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Каноническая задача линейного программирования в *векторной* записи имеет вид

$$Z(X) = C \cdot X \to \max\ (\min), \tag{1.8}$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0,$$

$$X \geqslant \theta.$$

В данном случае введены векторы

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad C = (c_1, c_2, ..., c_n),$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, ..., n, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \theta = (0, 0, ..., 0).$$

Здесь $C \cdot X$ – скалярное произведение векторов C и X.

3. Каноническая задача линейного программирования в *матричной* записи имеет вид

$$Z(X) = CX \to \max (\min), \tag{1.9}$$

$$AX = A_0, \quad X \geqslant \theta,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A – матрица коэффициентов системы уравнений, X – матрица-столбец переменных задачи, A_0 – матрица-столбец правых частей системы ограничений.

Нередко используются задачи линейного программирования, называемые **симметричными**, которые в *матричной* записи имеют вид

$$Z(X) = CX \to \max, \tag{1.10}$$

$$AX \leqslant A_0, \quad X \geqslant \theta$$

или

$$Z(X) = CX \to \min, \tag{1.11}$$

$$AX \geqslant A_0, \quad X \geqslant \theta.$$

1.4. Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме

В большинстве методов решения задач линейного программирования предполагается, что система ограничений состоит из уравнений и естественных условий неотрицательности переменных. Однако при составлении математических моделей экономических задач ограничения в основном формируются в системы неравенств, поэтому необходимо уметь переходить от системы неравенств к системе уравнений. Это может быть сделано следующим образом.

Возьмем, например, линейное неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$$

и прибавим к его левой части некоторую величину x_{n+1}, такую, чтобы неравенство превратилось в равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

где

$$x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n.$$

Неотрицательная переменная $x_{n+1} \geqslant 0$ называется **дополнительной переменной**.

Следующая теорема дает основание для возможности такого преобразования.

❑ **Теорема 1.1.** Каждому решению $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b \tag{1.12}$$

соответствует единственное решение $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b \tag{1.13}$$

и неравенства

$$x_{n+1} \geqslant 0, \tag{1.14}$$

и, наоборот, каждому решению $\bar{\beta}$ уравнения (1.13) и неравенства (1.14) соответствует единственное решение β неравенства (1.12).

Доказательство. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – решение неравенства (1.12). Тогда $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n \leqslant b$ или $0 \leqslant b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n) = \beta_{n+1}$.

Подставив в уравнение (1.13) вместо переменных значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$, получим

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} =$$
$$= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n + b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n) = b.$$

Таким образом, решение $\bar{\beta}$ удовлетворяет уравнению (1.13) и неравенству (1.14). Значит, доказана первая часть теоремы.

Пусть теперь $\bar{\beta}$ удовлетворяет уравнению (1.13) и неравенству (1.14), т. е.

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = b \quad \text{и} \quad \beta_{n+1} \geqslant 0.$$

Отбрасывая в левой части последнего равенства неотрицательную величину β_{n+1}, получаем

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leqslant b,$$

т.е. β удовлетворяет неравенству (1.12). Теорема доказана. ■

Например, если в задаче использования ресурсов (см. параграф 1.2) в левую часть каждого уравнения системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

добавить положительную переменную x_{n+1}, $i = 1, 2, \dots, m$, то получится система уравнений-ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В задаче составления рациона питания система ограничений-неравенств имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В этом случае система уравнений-ограничений получится, если в левой части каждого неравенства вычесть соответствующую неотрицательную дополнительную переменную

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Полученная таким образом система уравнений-ограничений вместе с условиями неотрицательности переменных, т.е. $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, и целевой функцией является канонической формой записи задачи линейного программирования.

Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами и поэтому не влияют на ее значение.

В случае когда задача имеет произвольно изменяющиеся переменные, любую такую переменную x_j заменяют разностью двух неотрицательных переменных, т.е. $x_j = x'_j - x''_j$, где $x'_j \geqslant 0$ и $x''_j \geqslant 0$.

Иногда возникает также необходимость перейти в задаче от нахождения минимума к нахождению максимума или наоборот. Для этого достаточно изменить знаки всех коэффициентов целевой функции на противоположные, а в остальном задачу оставить без изменения. Оптимальные решения полученных таким образом задач на максимум и минимум совпадают, а значения целевых функций при оптимальных решениях отличаются только знаком.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Задача с двумя переменными

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Допустим, что система ограничений (2.2) совместна, т.е. имеет решение, а многоугольник ее решений (ОДР) ограничен.

Каждое из неравенств (2.2) определяет полуплоскость с границей $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ или $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Представим этот многоугольник на плоскости Ox_1x_2 (рис. 2.1).

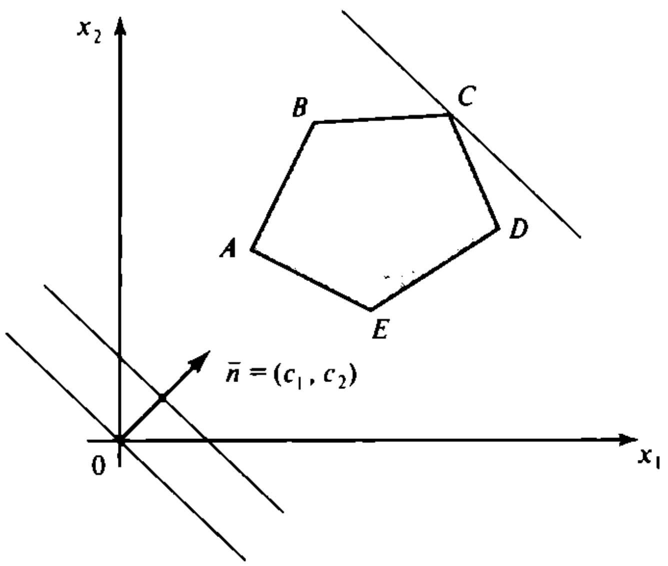


Рис. 2.1

Линейная функция (2.1) при фиксированных значениях $Z(X)$ является уравнением прямой линии

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}.$$

Изобразим прямую, соответствующую линейной функции, при $Z(X) = 0$. Эта прямая пройдет через начало координат. Другим значениям $Z(X)$ будут соответствовать прямые, параллельные друг другу.

Прямая, уравнение которой получено из целевой функции задачи при равенстве ее постоянной величине, называется **линией уровня**.

Известно, что коэффициенты при переменных в линейном уравнении являются координатами нормального вектора к соответствующей прямой или плоскости. Следовательно, нормальный вектор линий уровня n имеет координаты c_1 и c_2, т.е. $\bar{n} = (c_1, c_2)$.

Если перемещать линию уровня параллельно ее начальному положению в направлении вектора $\bar{n}$, то для данного случая (см. рис. 2.1) последней точкой, в которой линия уровня коснется ОДР, окажется точка C.

Линия уровня, имеющая общие точки с ОДР и расположенная так, что ОДР целиком находится в одной из полуплоскостей, называется **опорной прямой**.

❑ **Теорема 2.1.** Значения целевой функции в точках линии уровня увеличиваются, если линию уровня перемещать параллельно начальному положению в направлении нормали, и убывают при перемещении в противоположном направлении.

Доказательство. Пусть $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ – целевая функция. Изобразим систему координат Ox_1x_2 и нормаль $\bar{n} = (c_1, c_2)$, проведенную из начала координат (рис. 2.2).

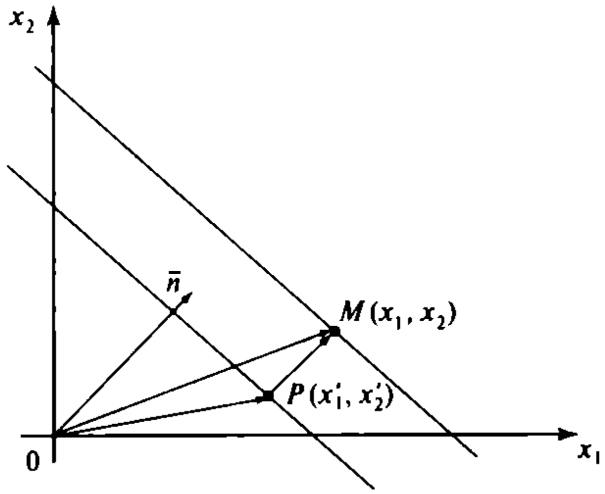


Рис. 2.2

Проведем две линии уровня перпендикулярно вектору $\bar{n}$. Возьмем на первой линии точку $P(x'_1, x'_2)$, а на второй линии точку $M(x_1, x_2)$ так, чтобы вектор $\overline{PM}$ был параллелен вектору $\bar{n}$. Проведем векторы

$\overline{OM}$ и $\overline{OP}$. Вектор $\overline{OM}$ имеет координаты x_1, x_2, т.е. координаты точки M, а вектор $\overline{OP}$ – координаты точки P.

Значение целевой функции в точке M

$$Z(M) = c_1x_1 + c_2x_2 = \bar{n} \cdot \overline{OM} = \bar{n}(\overline{OP} + \overline{PM}) = \bar{n} \cdot \overline{OP} + \bar{n} \cdot \overline{PM}.$$

Но $\bar{n} \cdot \overline{OP}$ равно значению целевой функции в точке P, т.е. $Z(P)$.

По определению скалярного произведения

$$\bar{n} \cdot \overline{PM} = |\bar{n}| \cdot |\overline{PM}| \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\bar{n}$ и $\overline{PM}$.

Если $\bar{n}$ и $\overline{PM}$ направлены в одну сторону, то $\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$. Тогда

$$Z(M) = Z(P) + |\bar{n}| \cdot |\overline{PM}| \Rightarrow Z(M) > Z(P).$$

Если $\bar{n}$ и $\overline{PM}$ направлены в противоположные стороны, то $\cos\varphi = -1$ и

$$Z(M) < Z(P). \blacksquare$$

Таким образом, **алгоритм** решения задачи линейного программирования с двумя переменными графическим методом таков:

1. Строится область допустимых решений.
2. Строится вектор $\bar{n} = (c_1, c_2)$ с точкой приложения в начале координат.
3. Перпендикулярно вектору $\bar{n}$ проводится одна из линий уровня, например линия уровня, соответствующая уравнению $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.
4. Линия уровня перемещается до положения опорной прямой. На этой прямой и будет находиться максимум или минимум функции.

В зависимости от вида ОДР и целевой функции $Z(X)$ задача может иметь единственное решение (рис. 2.3, *а*), бесконечное множество решений (рис. 2.3, *б*) или не иметь ни одного оптимального решения (рис. 2.3, *в*).

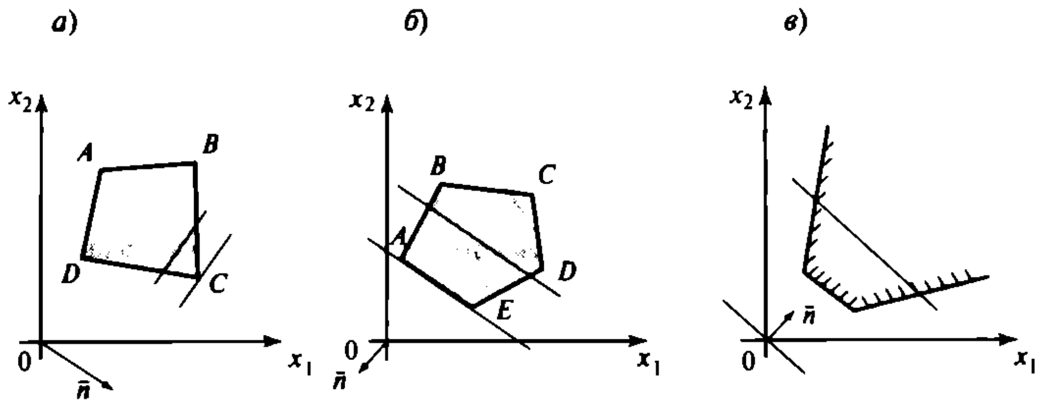


Рис. 2.3

На рис. 2.3, *а* линия уровня дважды становится опорной по отношению к многоугольнику решений. Минимальное значение целевой функции линия уровня обеспечивает в точке A, максимальное – в точке C. На рис. 2.3, *б* минимальное значение целевая функция принимает на опорной прямой, совпадающей с одной из сторон многоугольника. На рис. 2.3, *в* ОДР не ограничена в сторону увеличения значений целевой функции.

○ **Пример.** Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Изобразим на плоскости систему координат Ox_1x_2 и построим граничные прямые области допустимых решений (номера прямых соответствуют их порядковому номеру в системе).

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 = 12, \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

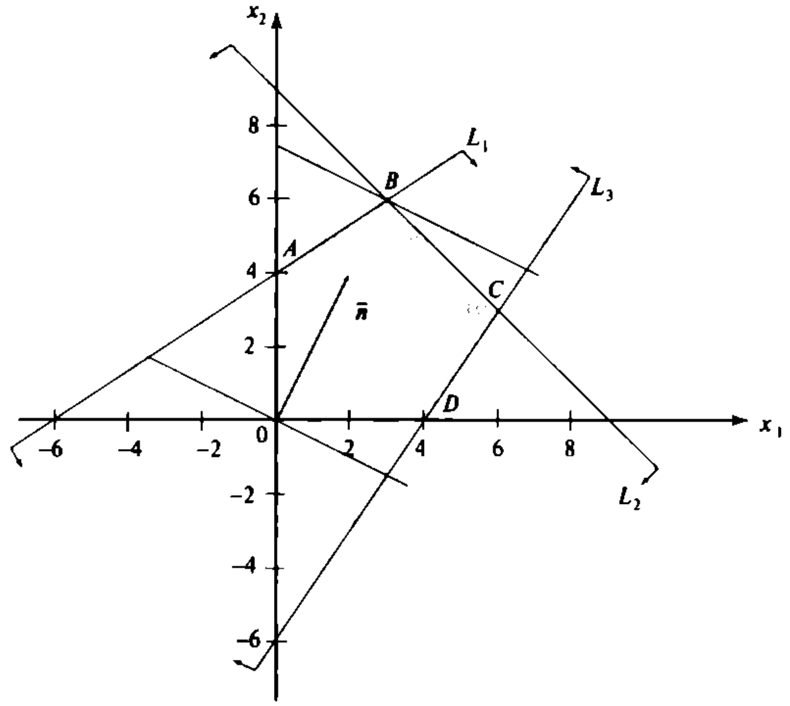


Рис. 2.4

Область допустимых решений определяется многоугольником $OABCD$ (рис. 2.4).

Для линий уровня $2x_1 + 4x_2 = c$ (c = const) строим нормальный вектор $\bar{n} = (2, 4)$. Перпендикулярно вектору $\bar{n}$ построим одну из линий уровня (на рис. 2.4 она проходит через начало координат). Так как задача на максимум, то перемещаем линию уровня в направлении вектора $\bar{n}$ до опорной прямой. В данном случае опорной прямой является прямая, проходящая через точку пересечения граничных прямых L_1 и L_2, т.е. через точку $B = L_1 \cap L_2$. Для определения координат точки B решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 6$. Это и будет оптимальное решение данной задачи, которому соответствует максимальное значение целевой функции $\max Z(X) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 30$. ●

2.2. Графический метод решения задач линейного программирования с n переменными

Графическим методом можно решить задачи линейного программирования, имеющие каноническую форму и удовлетворяющие условию

$$n - r \leqslant 2,$$

где n – число неизвестных системы; r – ранг системы векторов-условий (число линейно независимых уравнений системы).

Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то $r = m$, где m – число уравнений.

Рассмотрим алгоритм метода на конкретном примере.

○ **Пример.** Решить графическим методом задачу

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. 1. Проверяем, применим ли графический метод при решении данной задачи. Нетрудно видеть, что любые два из векторов-условий, например

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

линейно независимы, так как их координаты непропорциональны. Поэтому ранг системы векторов-условий $r = 2$. Находим $n - r = 4 - 2 = 2 \leqslant 2$. Следовательно, метод применим.

2. Приведем систему уравнений-ограничений к равносильной, разрешенной методом Жордана–Гаусса. Одновременно исключим разрешенные неизвестные из целевой функции. Для этого запишем коэффициенты целевой функции в последней (третьей) строке таблицы, под матрицей системы. Вычисления приведены в табл. 2.1.

После проведенных преобразований задача примет следующий вид:

Таблица 2.1

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	3	3	9
$\boxed{1}$	1	1	2	5
1	1	5	3	0
0	$\boxed{1}$	2	1	4
1	1	1	2	5
0	0	4	1	–5
0	1	2	1	4
1	0	–1	1	1
0	0	4	1	–5

$$Z(X) = 4x_3 + x_4 + 5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

3. Отбросим в уравнениях-ограничениях неотрицательные разрешенные неизвестные x_1 и x_2 и заменим знаки равенства знаками «$\leqslant$». В результате получим эквивалентную задачу линейного программирования с двумя переменными, которая решается графическим методом (рис. 2.5):

$$Z(X) = 4x_3 + x_4 + 5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 \leqslant 4, \\ -x_3 + x_4 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0.$$

Находим оптимальное решение эквивалентной задачи и соответствующее ему максимальное значение целевой функции:

$$X^* = L_1 \cap Ox_3; \quad X^* = (2, 0);$$

$$Z(X^*) = 4 \cdot 2 + 0 + 5 = 13.$$

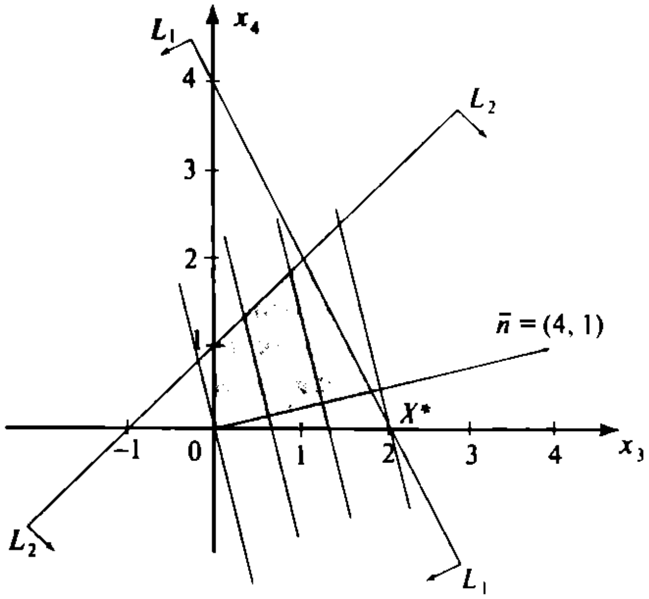


Рис. 2.5

4. Используем систему ограничений исходной задачи, приведенную к каноническому виду, и оптимальное решение задачи с двумя переменными для нахождения оптимального решения исходной задачи:

$x_1^* = 1 + x_3^* - x_4^* = 1 + 2 - 0 = 3;\quad x_2^* = 4 - 2x_3^* - x_4^* =$
$= 4 - 2 \cdot 2 - 0 = 0;$
$X^* = (3, 0, 2, 0);\quad Z(X^*) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 13.$

Ответ: $\max Z(X) = 13$ при $X^* = (3, 0, 2, 0)$. ●

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Многоугольники и многогранники

Одним из основных понятий теории математического программирования является многогранник в n-мерном пространстве.

Многогранником в n-мерном пространстве называется замкнутое, выпуклое, ограниченное множество точек n-мерного пространства с конечным числом угловых точек. В случае двух переменных он превращается в **многоугольник**.

Рассмотрим определение многогранника подробнее. Составим уравнение отрезка прямой на плоскости. Пусть $A(x_1^A, x_2^A)$ и $B(x_1^B, x_2^B)$ – граничные точки отрезка, $M(x_1, x_2)$ – текущая точка (рис. 3.1).

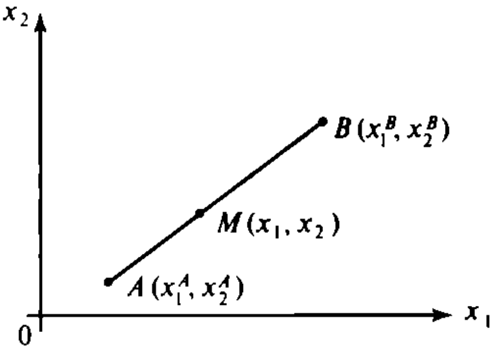


Рис. 3.1

Запишем векторное параметрическое уравнение отрезка AB:

$$\overline{AM} = \overline{AB} \cdot t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Так как $\overline{AM} = (x_1 - x_1^A, x_2 - x_2^A)$, $\overline{AB} = (x_1^B - x_1^A, x_2^B - x_2^A)$, то уравнение отрезка в *координатной* записи приобретает вид

$$\begin{cases} x_1 - x_1^A = (x_1^B - x_1^A) \cdot t, \\ x_2 - x_2^A = (x_2^B - x_2^A) \cdot t. \end{cases}$$

Преобразуем его:

$$\begin{cases} x_1 = (1 - t) \cdot x_1^A + t \cdot x_1^B, \\ x_2 = (1 - t) \cdot x_2^A + t \cdot x_2^B. \end{cases}$$

Кратко (условно) эту систему можно записать таким образом:

$$M = (1 - t) \cdot A + t \cdot B, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Для возможности обобщения на случай большей размерности координатного пространства вводят обозначения: $\lambda_1 = 1 - t$, $\lambda_2 = t$, при этом $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$.

Точка M называется выпуклой линейной комбинацией двух точек A и B, если

$$M = \lambda_1 A + \lambda_2 B, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

В общем случае точка M называется **выпуклой линейной комбинацией точек** $M_1, M_2, \ldots, M_k$, если

$$M = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j M_j, \quad \lambda_j \geqslant 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1. \tag{3.1}$$

Множество называется **выпуклым**, если оно содержит выпуклую линейную комбинацию любых своих точек. На рис. 3.2, *а* и *б* изображены примеры соответственно выпуклых и невыпуклых множеств.

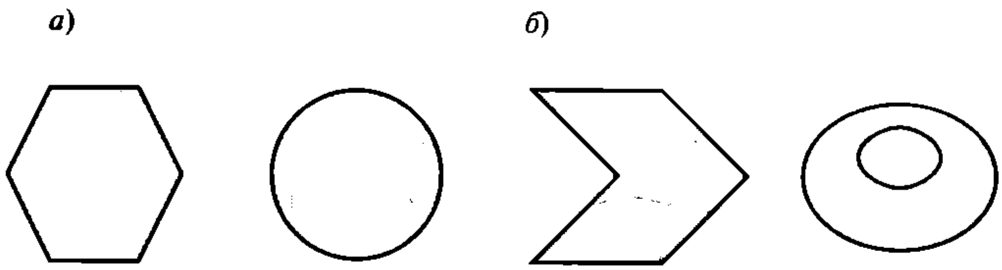


Рис. 3.2

Точка называется **граничной** для множества, если любая сколь угодно малая ее окрестность содержит точки как принадлежащие, так и не принадлежащие этому множеству.

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои граничные точки. Множество называется **ограниченным**, если можно построить сферу с конечным радиусом и центром в любой точке множества, полностью содержащую множество.

Угловой называется точка, которая не является выпуклой линейной комбинацией каких-либо различных точек этого множества. Множество может иметь любое число угловых точек: одну (рис. 3.3, *а*), две (рис. 3.3, *б*), три (рис. 3.3, *в*) и т. д., а также бесконечное число угловых точек (рис. 3.3, *г*).

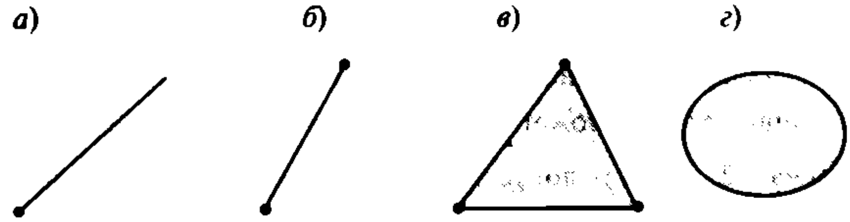


Рис. 3.3

❑ **Теорема 3.1.** Любая точка многоугольника является выпуклой линейной комбинацией его угловых точек.

Доказательство. Пусть точка M – внутренняя точка многоугольника с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 3.4).

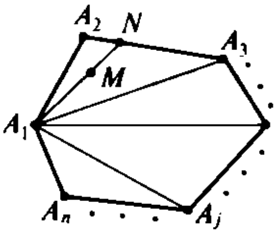


Рис. 3.4

Из точки A_1 проведем прямые, соединяющие ее с остальными угловыми точками, многоугольник будет разбит на ряд треугольников. Пусть точка M попадет в треугольник $A_1A_2A_3$. Проведем прямую A_1N так, что $M \in A_1N$, $N \in A_2A_3$. Точка M является выпуклой линейной комбинацией точек A_1 и N, т.е.

$$M = t_1A_1 + t_2N, \quad t_1 \geqslant 0, \quad t_2 \geqslant 0, \quad t_1 + t_2 = 1.$$

Для точки N также имеет место равенство

$$N = t_3A_2 + t_4A_3, \quad t_3 \geqslant 0, \quad t_4 \geqslant 0, \quad t_3 + t_4 = 1.$$

Подставив последнее выражение в выражение для точки M, получим

$$M = t_1A_1 + t_2(t_3A_2 + t_4A_3) = t_1A_1 + t_2t_3A_2 + t_2t_4A_3.$$

Обозначим $t_1 = \lambda_1, \quad t_2t_3 = \lambda_2, \quad t_2t_4 = \lambda_3$, запишем

$$M = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3.$$

Здесь $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = t_1 + t_2t_3 + t_2t_4 = t_1 + t_2(t_3 + t_4) = t_1 + t_2 = 1$.

Следовательно, точка M является выпуклой линейной комбинацией точек A_1, A_2, A_3. Представление точки M в виде выпуклой линейной комбинации точек A_1, A_2, A_3 может быть дополнено слагаемыми, равными нулю, и будет иметь вид

$$M = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j,$$

где $\lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0, \quad \lambda_j = 0 \quad \forall j > 3, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$

Если точка M – граничная точка, то она лежит между некоторыми двумя угловыми точками и является выпуклой линейной комбинацией этих точек, а следовательно, и всех угловых точек многоугольника. ■

Доказанная теорема может быть обобщена и на многогранники.

❑ **Теорема 3.2.** Область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Доказательство. Пусть имеется задача линейного программирования

$$Z(X) = CX \to \max (\min),$$

$$AX = A_0,$$

$$X \geqslant \theta.$$

Покажем, что если X_1^0, X_2^0 – некоторые допустимые решения задачи, то $X^0 = \lambda_1 X_1^0 + \lambda_2 X_2^0$, где $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, также является допустимым решением. Подставим X_1^0, X_2^0 в систему ограничений задачи, умножим полученные в результате этого равенства на λ_1, λ_2 и сложим их:

$$+\begin{cases} AX_1^0 = A_0, & \times \lambda_1 \\ AX_2^0 = A_0, & \times \lambda_2 \end{cases}$$

получим

$$A(\lambda_1 X_1^0 + \lambda_2 X_2^0) = A_0(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Учитывая, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, а $\lambda_1 X_1^0 + \lambda_2 X_2^0 = X^0$, получим $AX^0 = A_0$.

Кроме того, так как $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $X_1^0 \geqslant \theta$, $X_2^0 \geqslant \theta$, то

$X^0 = \lambda_1 X_1^0 + \lambda_2 X_2^0 \geqslant \theta$, т.е. X^0 – допустимое решение. ■

3.2. Экстремум целевой функции

❑ **Теорема 3.3.** Целевая функция задачи линейного программирования достигает экстремума в угловой точке области допустимых решений; причем, если целевая функция достигает экстремума в нескольких угловых точках области допустимых решений, она также достигает экстремума в любой выпуклой линейной комбинации этих точек.

Доказательство. Будем считать, что решается задача на максимум целевой функции, т.е.

$$Z(X) = CX \to \max,$$

$$AX = A_0,$$

$$X \geqslant \theta.$$

1. Докажем, что целевая функция достигает экстремума в угловой точке области допустимых решений G, от противного. Если X^* является оптимальным решением, то $Z(X^*) \geqslant Z(X)$ $\forall X \in G$. Предположим, что оптимальное решение задачи X^* не является угловой точкой (рис. 3.5).

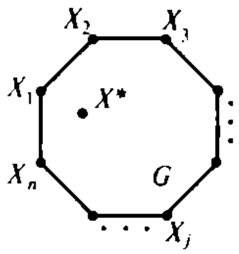


Рис. 3.5

Тогда по теореме 3.1

$$X^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \quad \lambda_j \geqslant 0 \ \forall j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

где X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – угловые точки G.

Найдем

$$Z(X^*) = CX^* = C\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j CX_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Z(X_j).$$

Среди значений $Z(X_j)$ выберем максимальное. Пусть это будет $Z(X_k)$, т.е. $\max\limits_j Z(X_j) = Z(X_k)$. Тогда

$$Z(X^*) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Z(X_k) = Z(X_k)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = Z(X_k).$$

Это противоречит тому, что X^* – оптимальное решение (в задаче на максимум $Z(X^*) \geqslant Z(X) \quad \forall X \in G$). Следовательно, X^* является угловой точкой области допустимых решений G.

2. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть угловые точки области допустимых решений $X_1, X_2, \ldots, X_k$ являются оптимальными решениями, т.е. $Z(X_1) = Z(X_2) = \ldots = Z(X_k)$ и $Z(X_1) \geqslant Z(X) \ \forall X \in G$. Найдем значение целевой функции для некоторой выпуклой линейной комбинации этих угловых точек:

$$X^* = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j X_j, \quad \lambda_j \geqslant 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

получим

$$Z(X^*) = CX^* = C\sum_{j=1}^{k} \lambda_j X_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j CX_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Z(X_j) = Z(X_1)\sum_{j=1}^{k} \lambda_j =$$
$$= Z(X_1),$$

т.е. решение X^* также является оптимальным. ■

3.3. Опорное решение задачи линейного программирования, его взаимосвязь с угловыми точками

Рассмотрим систему ограничений некоторой конкретной задачи

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ \quad\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

В *векторной* записи эта система имеет вид

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = A_0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix}7\\15\end{pmatrix}.$$

Векторы A_1, A_2, A_3, A_4 называются **векторами условий**.

Данная система имеет бесконечное множество допустимых решений, например $X_1 = (4, 8, 1, 1)$, $X_2 = (9, 12, 1, 0)$, $X_3 = (7, 15, 0, 0)$. Решение X_3 является *базисным*.

Положительным координатам допустимых решений ставят в соответствие векторы условий. Для решений X_1 и X_2 это векторы A_1, A_2, A_3, A_4 и A_1, A_2, A_3 соответственно. Эти системы векторов линейно зависимы, так как число входящих в них векторов (4 и 3) больше размерности векторов (2). Таких решений бесконечное множество. Для базисного решения X_3 единичные векторы A_1 и A_2, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Как известно, любая система уравнений имеет конечное число базисных решений, равное C_n^r, где n – число неизвестных, r – ранг системы векторов условий. Базисные решения, координаты которых удовлетворяют условию неотрицательности, являются так называемыми опорными. Далее будет показано, что они являются угловыми точками области допустимых решений задачи.

Опорным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение $X = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам A_1, A_2, ..., A_m, линейно независимы.

Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга r системы векторов условий (т.е. числа линейно независимых уравнений системы ограничений). В дальнейшем будем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т.е. $m = r$.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m, то оно (решение) называется ***невырожденным***, в противном случае (меньше m) – ***вырожденным***.

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, в состав которого входят векторы, соответствующие отличным от нуля координатам опорного решения.

Докажем две теоремы о взаимосвязи опорных решений и угловых точек области допустимых решений.

❑ **Теорема 3.4.** Любое опорное решение является угловой точкой области допустимых решений.

Доказательство (от противного). Пусть $X = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$ – опорное решение с базисом $Б = (A_1, A_2, ..., A_m)$ некоторой задачи с системой ограничений $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$. Предположим, что X не является угловой точкой, тогда решение представляет собой выпуклую линейную комбинацию каких-либо точек области допустимых решений, не совпадающих с X, например X' и X'', т.е.

$$X = \lambda_1 X' + \lambda_2 X'', \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Так как последние $n - m$ координат вектора X равны нулю, а λ_1 и λ_2 положительные, то последние $n - m$ координат векторов X' и X'' также равны нулю, т.е. $X' = (x'_1, x'_2, ..., x'_m, 0, ..., 0)$ и $X'' = (x''_1, x''_2, ..., x''_m, 0, ..., 0)$.

Подставим X', X'' в систему ограничений:

$$A_1x'_1 + A_2x'_2 + ... + A_mx'_m = A_0,$$

$$A_1x''_1 + A_2x''_2 + ... + A_mx''_m = A_0.$$

Вычтем из первого равенства второе. Получим

$$A_1(x'_1 - x''_1) + A_2(x'_2 - x''_2) + ... + A_m(x'_m - x''_m) = \theta.$$

Так как векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ образуют базис, то они линейно независимы, а потому данное равенство может выполняться только тогда, когда все коэффициенты при векторах равны нулю, т.е.

$$x'_1 - x''_1 = 0, \quad x'_2 - x''_2 = 0, ..., x'_m - x''_m = 0.$$

Отсюда получаем, что $x'_1 = x''_1$, $x'_2 = x''_2$, ..., $x'_m = x''_m$. Следовательно, $X' = X''$ и опорное решение X является не выпуклой линейной комбинацией каких-либо точек области допустимых решений, а угловой точкой этой области. ■

❑ **Теорема 3.5.** Любая угловая точка области допустимых решений является опорным решением.

Доказательство (от противного). Пусть $X = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0)$ – угловая точка области допустимых решений, а $x_j > 0 \ \ \forall j = 1, 2, ..., m$. Чтобы доказать, что это решение является опорным, достаточно показать, что векторы $A_1, A_2, ..., A_m$, соответствующие положительным координатам решения, линейно независимы.

Предположим, что эти векторы линейно зависимы. Тогда существует ненулевой набор чисел $l_1, l_2, ..., l_m$, такой, что

$$A_1l_1 + A_2l_2 + ... + A_ml_m = \theta. \tag{3.2}$$

Так как X – допустимое решение, то

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_mx_m = A_0. \tag{3.3}$$

Умножим соотношение (3.2) на некоторое число ε и прибавим к равенству (3.3), получим

$$A_1(x_1 + l_1\varepsilon) + A_2(x_2 + l_2\varepsilon) + ... + A_m(x_m + l_m\varepsilon) = A_0,$$

т.е. вектор $X' = (x_1 + l_1\varepsilon, x_2 + l_2\varepsilon, ..., x_m + l_m\varepsilon, 0, ..., 0)$ является решением системы ограничений задачи. Аналогично можно показать, что решением системы является также вектор

$$X'' = (x_1 - l_1\varepsilon, x_2 - l_2\varepsilon, ..., x_m - l_m\varepsilon, 0, ..., 0).$$

Для того чтобы векторы X' и X'' удовлетворяли условиям неотрицательности, выберем достаточно малое число ε так, что $x_j \pm l_j\varepsilon > 0 \ \forall j$. Это возможно, так как $x_j > 0 \quad \forall\, j = 1, 2, ..., m$. При таком выборе числа ε векторы X' и X'' являются допустимыми решениями. Нетрудно видеть, что $X = \frac{1}{2}X' + \frac{1}{2}X''$, т.е. X представляет собой выпуклую линейную комбинацию X' и X''. Это противоречит тому, что X является угловой точкой. Следовательно, векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно независимы и решение X является опорным. ■

4. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод – это метод целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов расчета либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимального решения не существует.

Основное содержание метода состоит в следующем:

1. Указать способ нахождения начального опорного решения.

2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному.

3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения.

Метод называется симплексным, так как области допустимых решений задач, которые рассматривались на начальном этапе развития метода, имели простейший (simple) вид (рис. 4.1).

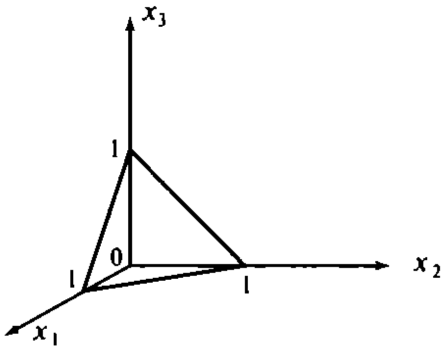


Рис. 4.1

4.1. Нахождение начального опорного решения и переход к новому опорному решению

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \geqslant 0\ \forall j, \quad b_i \geqslant 0\ \forall i. \tag{4.3}$$

Если в каком-либо уравнении правая часть отрицательна, то это уравнение нужно умножить на -1.

Для нахождения опорного решения воспользуемся тем, что любое допустимое базисное решение является опорным. Найдем базисное решение методом Жордана–Гаусса. При этом разрешающие элементы для всех преобразований Жордана будем выбирать так, чтобы правые части уравнений системы оставались неотрицательными. Тогда найденное базисное решение будет допустимым, т.е. опорным.

Получим правило выбора разрешающих элементов для преобразований Жордана, при котором правые части системы уравнений остаются неотрицательными.

Пусть разрешающим элементом для преобразования Жордана является коэффициент a_{lk} при неизвестной x_k в уравнении с номером l. В результате преобразования Жордана правые части уравнений, как известно, пересчитываются по следующим формулам:

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{lk}}, \quad b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; i \neq l.$$

1. Для того чтобы правая часть b'_l уравнения с разрешающим элементом a_{lk} оставалась неотрицательной, должно выполняться неравенство

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{lk}} \geqslant 0.$$

Так как $b_l \geqslant 0$, то первое условие для разрешающего элемента a_{lk} состоит в том, что он должен быть положительным, т.е.

$$a_{lk} > 0.$$

2. Неотрицательными также должны быть правые части остальных уравнений, т.е.

$$b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; i \neq l.$$

Для получения требований, налагаемых на разрешающий элемент a_{lk}, рассмотрим два случая:

а) если $a_{ik} \leqslant 0$, то в силу того, что $b_i \geqslant 0 \; \forall i, \quad b_l \geqslant 0, \quad a_{lk} > 0$, без дополнительных условий $b'_i \geqslant 0$;

б) если же $a_{ik} > 0$, то неравенство

$$b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \geqslant 0$$

поделим на a_{ik}, получим

$$\frac{b_i}{a_{ik}} \geqslant \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Данное неравенство должно выполняться для любого уравнения с номером i, в котором $a_{ik} > 0$. Для удобства вычислений вводят вспомогательный параметр θ_{0k}:

$$\theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \quad \text{при } a_{ik} > 0. \tag{4.4}$$

Здесь k – номер вектора условия A_k, вводимого в базис (выбираемого столбца матрицы системы ограничений), а l – номер вектора A_l, выводимого из базиса (номер строки матрицы, в которой следует выбирать разрешающий элемент для преобразования Жордана).

С помощью данного условия можно выбрать разрешающий элемент в любом столбце k матрицы системы ограничений, в котором имеется хотя бы один положительный элемент. Если нарушить это условие при выборе разрешающего элемента, в правой части системы уравнений появятся отрицательные величины.

Используя данное условие, можно найти начальное опорное решение.

Аналогичное условие может быть использовано при переходе от одного опорного решения к другому.

Пусть система уравнений-ограничений путем выбора разрешающих элементов приведена к равносильной разрешенной так, что правые части системы сохранились неотрицательными, и имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_{1\,(m+1)}x_{m+1} + \dots + x_{1k}x_k + \dots + x_{1n}x_n = x_{10}, \\ \quad x_2 \quad + x_{2\,(m+1)}x_{m+1} + \dots + x_{2k}x_k + \dots + x_{2n}x_n = x_{20}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad x_m + x_{m\,(m+1)}x_{m+1} + \dots + x_{mk}x_k + \dots + x_{mn}x_n = x_{m0}, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Тогда базисное решение $X_1 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$ является допустимым и опорным решением с базисом из единичных векторов $Б_1 = (A_1, A_2, \dots, A_m)$.

Для перехода от этого опорного решения к новому необходимо использовать соотношение

$$\theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \right\} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \quad \text{при } x_{ik} > 0, \tag{4.5}$$

где k – номер вектора, вводимого в базис; l – номер вектора, выводимого из базиса; x_{i0} – координаты опорного решения; x_{ik} – коэффициенты разложения вектора A_k по базису опорного решения.

○ **Пример.** **Найти начальное опорное решение и путем перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи**

$$Z(X) = 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 10x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Решение. Результаты нахождения начального опорного решения и дальнейшего перебора опорных решений приведены в табл. 4.1. Справа от таблицы на каждом шаге вычислений приведены значения параметра θ_k для выбранного столбца k (минимальные значения θ_{0k} выделены полужирным шрифтом), а также соответствующее опорное решение X_i и значение целевой функции $Z(X_i)$ на этом решении. Номера столбцов для выбора разрешающих элементов принимались произвольно.

Таблица 4.1

x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ_1			
$\boxed{1}$	1	1	1	10	**10**			
-1	1	3	-3	2	–	θ_2		
1	1	1	1	10		10		
0	$\boxed{2}$	4	-2	12		**6**	θ_3	
1	0	-1	2	4			–	
0	1	$\boxed{2}$	-1	6			**3**	θ_4
1	$^1/_2$	0	$\boxed{^3/_2}$	7				$^{14}/_3$
0	$^1/_2$	1	$-^1/_2$	3		θ_2		–
$^2/_3$	$^1/_3$	0	1	$^{14}/_3$		14		
$^1/_3$	$\boxed{^2/_3}$	1	0	$^{16}/_3$		**8**		
$^1/_2$	0	$-^1/_2$	1	2				
$^1/_2$	1	$^3/_2$	0	8				

$X_1 = (4, 6, 0, 0)$,
$Z(X_1) = 4 \cdot 4 - 6 \cdot 6 = -20$;
$X_2 = (7, 0, 3, 0)$,
$Z(X_2) = 4 \cdot 7 - 8 \cdot 3 = 4$;
$X_3 = (0, 0, {}^{16}/_3, {}^{14}/_3)$,
$Z(X_3) = 4$;
$X_4 = (0, 8, 0, 2)$,
$Z(X_4) = -28$.

Сравниваем значения целевой функции на полученных опорных решениях: $\min\{-20, 4, -28\} = -28$. Находим оптимальное опорное решение $X_4 = (0, 8, 0, 2)$.

Ответ: $\min Z(X) = -28$ при $X^* = (0, 8, 0, 2)$. ●

Данный способ нахождения оптимального решения может вызвать затруднения с перебором всех опорных решений и с завершением процесса решения задачи при отсутствии решения, поэтому его следует применять только для приобретения навыков в использовании параметра θ_k.

4.2. Преобразование целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому

Пусть имеется опорное решение задачи линейного программирования (4.1)–(4.3) $X_1 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$ с базисом $Б_1 = (A_1, A_2, ..., A_m)$. Значение целевой функции задачи на этом решении $Z(X_1) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0}$. Используя преобразование Жордана с разрешающим элементом a_{lk}, перейдем к другому опорному решению

$$X_2 = (x'_{10}, x'_{20}, ..., x'_{(l-1)0}, 0, x'_{(l+1)0}, ..., x'_{m0}, 0, ..., 0, x'_{l0}, 0, ..., 0)$$

с базисом $Б_2 = (A_1, A_2, ..., A_{l-1}, A_{l+1}, ..., A_m, A_k)$, т.е. введем в базис вектор A_k и исключим A_l. Значение целевой функции на этом решении

$$Z(X_2) = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x'_{i0} + c_k x'_{l0}.$$

Формулы пересчета правых частей уравнений системы при преобразовании Жордана имеют вид

$$x'_{l0} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}}; \quad x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i = 1, 2, ..., m, \ i \neq l.$$

Используя эти формулы, получаем

$$Z(X_2) = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x'_{i0} + c_k x'_{l0} = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \left(x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} x_{ik} \right) + c_k \frac{x_{l0}}{x_{lk}} =$$

$$= \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x_{ik} + c_k \frac{x_{l0}}{x_{lk}} + c_l x_{l0} - c_l \frac{x_{l0}}{x_{lk}} x_{lk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} - c_k \right) = Z(X_1) - \theta_{0k} \Delta_k,$$

т.е.

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \theta_{0k} \Delta_k.$$

Здесь через Δ_k обозначена величина, называемая *оценкой разложения вектора условий A_k по базису опорного решения* и вычисляемая по формуле

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} - c_k$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_б X_k - c_k, \tag{4.6}$$

где $C_б = (c_1, c_2, ..., c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{mk})$ – вектор коэффициентов разложения вектора A_k по базису опорного решения; c_k – коэффициент целевой функции при переменной x_k.

Находим приращение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому

$$\Delta Z_k = Z(X_2) - Z(X_1) = -\theta_{0k}\Delta_k.$$

○ **Пример.** Вычислить оценки Δ_k разложений векторов условий по базису опорного решения для следующей задачи:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_5 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 30, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Задача имеет начальное опорное решение $X_1 = (0, 0, 0, 10, 20, 30)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$. Для удобства расчета запишем исходные данные в таблицу, называемую симплексной (табл. 4.2).

Таблица 4.2

			2	3	–4	5	6	7
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	5	10	1	2	3	1	0	0
A_5	6	20	2	–1	–4	0	1	0
A_6	7	30	3	–2	5	0	0	1
Δ_k			36	–13	30	0	0	0

Оценки рассчитывают по формулам

$$\Delta_1 = C_б X_1 - c_1 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 - 2 = 36;$$

$$\Delta_2 = C_б X_2 - c_2 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} - 3 = 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) - 3 = -13;$$

$$\Delta_3 = C_6X_3 - c_3 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} - (-4) = 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) + 7 \cdot 5 - (-4) = 30.$$

Оценки для векторов, входящих в базис, всегда равны нулю. ●

4.3. Улучшение опорного решения

❑ **Теорема 4.1.** Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) хотя бы для одного вектора условий оценка разложения по базису невырожденного опорного решения отрицательная (положительная), то опорное решение может быть улучшено, т.е. можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше (меньше).

Доказательство. Пусть решается задача на максимум, которая имеет невырожденное опорное решение $X_1 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$, $x_{j0} > 0$, $j = 1, 2, ..., m$, и оценка разложения некоторого вектора условий A_k отрицательна ($\Delta_k < 0$).

Перейдем к новому опорному решению X_2, для чего введем в базис вектор A_k и исключим из базиса вектор A_r. В этом случае приращение целевой функции

$$\Delta Z_k = Z(X_2) - Z(X_1) = -\theta_{0k}\Delta_k.$$

Решение X_1 невырожденное, поэтому параметр θ_{0k}, вычисляемый по формуле (4.5), отличен от нуля ($\theta_{0k} > 0$). Так как $\theta_{0k} > 0$, $\Delta_k < 0$, то

$$Z(X_2) - Z(X_1) = -\theta_{0k}\Delta_k > 0 \Rightarrow Z(X_2) > Z(X_1).$$

Следовательно, значение целевой функции на новом опорном решении X_2 будет больше, чем на первом X_1.

Доказательство для задачи на минимум аналогично. ■

✧ **Следствие 1** (условие наискорейшего нахождения оптимального решения). Наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому обеспечивает выбор векторов, выводимого и вводимого в базис опорного решения, исходя из условий:

в задаче на максимум $\max\limits_k \{\Delta Z_k\} = \max\limits_k \{-\theta_{0k}\Delta_k\}$; (4.7)

в задаче на минимум $\min\limits_k \{\Delta Z_k\} = \min\limits_k \{-\theta_{0k}\Delta_k\}$. ✦ (4.8)

В упрощенном варианте вектор, вводимый в базис, можно выбрать, исходя из условий:

в задаче на максимум $\min_k \{\Delta_k\}$; (4.9)

в задаче на минимум $\max_k \{\Delta_k\}$. (4.10)

Этот вариант перехода к новому опорному решению обычно используется при расчетах на ЭВМ.

◇ **Следствие 2** (признак оптимальности опорного решения). Опорное решение задачи линейного программирования на максимум (минимум) является оптимальным, если для любого вектора условий оценка разложения по базису опорного решения неотрицательная (неположительная), т.е.:

в задаче на максимум $\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$; (4.11)

в задаче на минимум $\Delta_k \leqslant 0 \quad \forall k$. ◆ (4.12)

Действительно, если $Z(x) \to \max$, $\quad \Delta_k \geqslant 0 \; \forall k$, $\quad \theta_{0k} > 0$, то

$$\Delta Z_k = Z(X_2) - Z(X_1) = -\theta_{0k}\Delta_k \leqslant 0 \Rightarrow Z(X_2) < Z(X_1),$$

т.е. X_1 – оптимальное решение. Для задачи на минимум доказательство аналогично.

◇ **Следствие 3** (признак единственности оптимального решения). Оптимальное решение задачи линейного программирования является единственным, если для любого вектора условий, не входящего в базис, оценка отлична от нуля, т.е.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k = m + 1, m + 2, ..., n. \quad (4.13)$$

Здесь предполагается, что в базис оптимального решения входят первые m векторов. ◆

◇ **Следствие 4** (признак существования бесконечного множества оптимальных решений). Задача линейного программирования имеет бесконечное множество оптимальных решений, если оценка хотя бы одного вектора условий, не входящего в базис, равна нулю, т.е.

$$\exists\, k \in \{m + 1, m + 2, ..., n\}: \quad \Delta_k = 0. \; ◆ \quad (4.14)$$

◇ **Следствие 5** (признак отсутствия оптимального решения вследствие неограниченности целевой функции). Задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, если для какого-либо из векторов условий A_k с оценкой Δ_k, противоречащей признаку оптимальности, среди коэффициентов разложения по базису опорного решения нет положительного, т.е.:

в задаче на максимум $\exists\, A_k$: $\quad \Delta_k < 0 \quad$ и $x_{ik} \leqslant 0 \; \forall i$; (4.15)

в задаче на минимум $\exists\, A_k$: $\quad \Delta_k > 0 \quad$ и $x_{ik} \leqslant 0 \; \forall i$. ◆ (4.16)

4.4. Алгоритм симплексного метода

Для того чтобы решить задачу симплексным методом (методом последовательного улучшения плана), необходимо выполнить следующее:

1. Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

2. Найти начальное опорное решение с базисом из единичных векторов и коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения.

Если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решения в силу несовместности системы ограничений.

3. Вычислить оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и заполнить симплексную таблицу.

4. Если выполняется признак единственности оптимального решения (следствие 3 из теоремы 4.1), то решение задачи заканчивается.

5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений (следствие 4 из теоремы 4.1), то путем простого перебора находят все оптимальные решения.

6. Если выполняются условия следствия 5 теоремы об улучшении опорного решения (см. теорему 4.1), то задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.

7. Если пункты 4–6 алгоритма не выполняются, находят новое опорное решение с использованием условий следствия 1 (см. параграф 4.3) и возвращаются к пункту 3.

○ **Пример.** Решить симплексным методом задачу

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30, \end{array}\right| \begin{array}{l} Д \\ + x_6 \\ \\ \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть первого ограничения-неравенства типа «$\leqslant$» вводим дополнительную переменную x_6 с коэффициентом $+1$. В целевую функцию переменная x_6 входит с коэффициентом 0 (т.е. не входит). Получаем

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Находим начальное опорное решение. Для этого свободные (неразрешенные) переменные приравниваем к нулю $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Получаем опорное решение $X_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 24,\ 30,\ 6)$ с единичным базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

Вычисляем оценки разложений векторов условий по базису опорного решения, используя формулу (4.6):

$$\Delta_1 = C_б X_1 - c_1 = (0,\ 3,\ 2)\cdot(1,\ 1,\ 2) - 9 = 0 + 3 + 4 - 9 = -2;$$
$$\Delta_2 = C_б X_2 - c_2 = (0,\ 3,\ 2)\cdot(-2,\ 2,\ 1) - 5 = 0 + 6 + 2 - 5 = 3;$$
$$\Delta_3 = C_б X_3 - c_3 = (0,\ 3,\ 2)\cdot(2,\ 1,\ -4) - 4 = 0 + 3 - 8 - 4 = -9;$$
$$\Delta_4 = C_б X_4 - c_4 = (0,\ 3,\ 2)\cdot(0,\ 1,\ 0) - 3 = 0 + 3 + 0 - 3 = 0;$$
$$\Delta_5 = C_б X_5 - c_5 = (0,\ 3,\ 2)\cdot(0,\ 0,\ 1) - 2 = 0 + 0 + 2 - 2 = 0;$$
$$\Delta_6 = C_б X_6 - c_6 = (0,\ 3,\ 2)\cdot(1,\ 0,\ 0) - 0 = 0 + 0 + 0 - 0 = 0.$$

Оценки векторов, входящих в базис, всегда равны нулю. Обычно эти вычисления проводятся устно. Опорное решение, коэффициенты разложений и оценки разложений векторов условий по базису опорного решения записываются в симплексную таблицу (табл. 4.3). Сверху над таблицей для удобства вычислений оценок записываются коэффициенты целевой функции. В первом столбце «*Б*» записываются векторы, входящие в базис опорного решения. Порядок записи этих векторов в симплексной таблице соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях-ограничениях. Во втором столбце таблицы «$C_б$» записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных в том же порядке. При правильном расположении коэффициентов целевой функции в столбце «$C_б$» оценки единичных векторов, входящих в базис, всегда равны нулю.

В последней строке таблицы с оценками Δ_k в столбце «A_0» записывается значение целевой функции на опорном решении $Z(X_1)$.

Таблица 4.3

				9	5	↓4	3	2	0		
	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_3
←	A_6	0	6	1	–2	$\boxed{2}$	0	0	1	6	3
	A_4	3	24	1	2	1	1	0	0	24	24
	A_5	2	30	2	1	–4	0	1	0	15	–
	Δ_k		132	–2	3	–9	0	0	0		

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как оценки $\Delta_1 = -2$, $\Delta_3 = -9$ для векторов A_1 и A_3 противоречат признаку оптимальности. Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется неотрицательность оценок для всех векторов условий.

По теореме об улучшении опорного решения (см. теорему 4.1), если в задаче на максимум хотя бы один вектор имеет отрицательную оценку, то можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше.

Определим, введение какого из двух векторов приведет к большему приращению целевой функции. Приращения целевой функции найдем по формуле $\Delta Z_k = -\theta_{0k}\,\Delta_k$. Вычислим значения параметра θ_{0k} для первого и третьего столбцов по формуле (4.5), получим $\theta_{01} = 6$ при $l = 1$ (где l – номер строки) и $\theta_{03} = 3$ при $l = 1$ (см. табл. 4.3). Находим приращение целевой функции при введении в базис первого вектора $\Delta Z_1 = -6 \cdot (-2) = 12$ и третьего вектора $\Delta Z_3 = -3 \cdot (-9) = 27$. Следовательно, для наиболее быстрого нахождения оптимального решения необходимо ввести в базис опорного решения вектор A_3 вместо первого вектора базиса A_6, так как минимум параметра θ_{03} достигается в первой строке ($l = 1$).

Далее выполним преобразование Жордана с элементом $x_{13} = 2$, получим второе опорное решение $X_2 = (0, 0, 3, 21, 42, 0)$ с базисом $Б_2 = (A_3, A_4, A_5)$ (табл. 4.4). Это решение не является оптимальным, так как вектор A_2 имеет отрицательную оценку $\Delta_2 = -6$. Для улучшения решения необходимо ввести вектор A_2 в базис опорного решения.

Таблица 4.4

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_2
A_3	4	3	$^1/_2$	–1	1	0	0	$^1/_2$	–
A_4	3	21	$^1/_2$	$\boxed{3}$	0	1	0	$-^1/_2$	7
A_5	2	42	4	–3	0	0	1	2	–
Δ_k		159	$^5/_2$	–6	0	0	0	9	

Определим номер вектора, выводимого из базиса. Для этого вычислим параметр θ_{02} для второго столбца, он равен 7 при $l = 2$. Следовательно, из базиса выводим второй вектор базиса A_4. Выполним преобразование Жордана с элементом $x_{22} = 3$, получим третье опорное решение $X_3 = (0, 7, 10, 0, 63, 0)$ с базисом $Б_2 = (A_3, A_2, A_5)$ (табл. 4.5). Это единственное оптимальное решение, так как для всех векторов, не входящих в базис, оценки разложений по базису опорного решения положительны:

$\Delta_1 = {}^7/_2, \quad \Delta_4 = 2, \quad \Delta_6 = {}^7/_2.$

Таблица 4.5

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	4	10	$^2/_3$	0	1	$^1/_3$	0	$^1/_3$
A_2	5	7	$^1/_6$	1	0	$^1/_3$	0	$-^1/_6$
A_5	2	63	$^9/_2$	0	0	1	1	$^3/_2$
Δ_k		201	$^7/_2$	0	0	2	0	$^7/_2$

Ответ: $\max Z(X) = 201$ при $X^* = (0, 7, 10, 0, 63)$. ●

4.5. Метод искусственного базиса

Метод искусственного базиса применяется для решения задач линейного программирования в случае, когда задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Согласно данному методу для задачи линейного программирования составляется так называемая *расширенная* задача, которая решается симплексным методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается причина его отсутствия.

Пусть имеется каноническая задача линейного программирования

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4.17)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Без ограничения общности можно считать, что правые части уравнений системы ограничений неотрицательны, т.е. $b_i \geqslant 0\ \forall i$.

В дальнейшем для краткости записи при доказательствах используется компактная запись этой задачи:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max\ (\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad (4.18)$$

$$x_j \geqslant 0\ \forall j, \quad b_i \geqslant 0\ \forall i.$$

Для исходной задачи составляется расширенная задача. При этом используются искусственные переменные.

Искусственными переменными называются неотрицательные переменные, которые вводятся в ограничения-равенства для получения начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений системы ограничений с коэффициентом +1 и в целевую функцию в задаче на максимум с коэффициентом $-M$, а в задаче на минимум с коэффициентом $+M$. Число M сколь угодно большое по сравнению с единицей ($M >> 1$).

В общем случае расширенная задача на максимум имеет вид

$$\overline{Z}(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - ... - Mx_{n+m} \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n + m; \quad b_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (4.19)$$

или в компактной записи

$$\overline{Z}(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j - \sum_{i=1}^{m} Mx_{n+i} \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad (4.20)$$

$$x_j \geqslant 0 \ \forall j, \quad b_i \geqslant 0 \ \forall i.$$

Данная задача имеет начальное опорное решение $\overline{X}_1 = (0, 0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m)$ с базисом $\overline{Б}_1 = (A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m})$.

Здесь и в дальнейшем для расширенной задачи отмечаются чертой сверху следующие величины: целевая функция $\overline{Z}(\overline{X})$, допустимое решение $\overline{X}$, опорные решения $\overline{X}_i$, базисы опорных решений $\overline{Б}_i$, область допустимых решений $\overline{G}$.

Для обоснования метода докажем две леммы и три теоремы.

❑ **Лемма 4.1.** Любому допустимому решению $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$ исходной задачи линейного программирования соответствует допустимое решение расширенной задачи $\overline{X} = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$ и, наоборот, любому допустимому решению расширенной задачи $\overline{X} = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$ соответствует допустимое решение исходной задачи $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$. При этом значения целевых функций задач на соответствующих решениях совпадают, т.е. $Z(X) = \overline{Z}(\overline{X})$.

Доказательство. Пусть $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$ — допустимое решение. Тогда оно удовлетворяет системе ограничений и условиям неотрицательности задачи (4.18)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i \quad (i = 1, 2, ..., m), \qquad (4.21)$$

$$k_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Дополним данное решение равными нулю переменными $k_{n+1} = k_{n+2} = ... = k_{n+m} = 0$, тогда $\overline{X} = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$. Подставим $\overline{X}$ в систему ограничений расширенной задачи (4.20), получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + 0 = b_i \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Данное равенство выполняется, так как оно не отличается от тождества (4.21). Кроме того, $\overline{X}$ отрицательных координат не имеет и, следовательно, является допустимым решением.

Доказательство обратного утверждения теоремы аналогично.

Покажем, что значения целевых функций задач на соответствующих решениях совпадают. Подставим $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$ и $\overline{X} = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$ в целевые функции, получим

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j k_j,$$

$$\overline{Z}(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j k_j - \sum_{i=1}^{m} M \cdot 0 = \sum_{j=1}^{n} c_j k_j.$$

Отсюда $Z(X) = \overline{Z}(\overline{X})$. ■

❑ **Лемма 4.2.** Значение целевой функции расширенной задачи на максимум (минимум) на любом допустимом решении $\overline{X}_k = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, больше (меньше) значения целевой функции на любом допустимом решении $\overline{X}_l = (l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}, ..., l_{n+m})$, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля.

Доказательство. Подставим $\overline{X}_k = (k_1, k_2, ..., k_n, 0, ..., 0)$ и $\overline{X}_l = (l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}, ..., l_{n+m})$ в целевую функцию расширенной задачи на максимум, получим

$$\overline{Z}(\overline{X}_k) = \sum_{j=1}^{n} c_j k_j - \sum_{i=1}^{m} M \cdot 0 = \sum_{j=1}^{n} c_j k_j,$$

$$\overline{Z}(\overline{X}_l) = \sum_{j=1}^{n} c_j l_j - \sum_{i=1}^{m} M \cdot l_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} c_j l_j - M \sum_{i=1}^{m} l_{n+i}.$$

Так как допустимое решение $\overline{X}_l$ удовлетворяет условию неотрицательности $l_{n+i} \geqslant 0 \quad \forall i$ и по условию леммы хотя бы одна из координат $l_{n+i} > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} l_{n+i} > 0, \quad M \sum_{i=1}^{m} l_{n+i} >> 1$ и $\overline{Z}(\overline{X}_l) < \overline{Z}(\overline{X}_k)$.

Доказательство для задачи на минимум аналогично. ■

❑ **Теорема 4.2** (признак оптимальности решения). Если расширенная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, которое получается из $\overline{X}^*$ отбрасыванием этих нулевых искусственных переменных.

Доказательство (от противного). Пусть расширенная задача на максимум имеет оптимальное решение

$$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0),$$

т.е. $\overline{Z}(\overline{X}^*) > \overline{Z}(\overline{X}) \quad \forall \overline{X} \in \overline{G}$. По лемме 4.1 допустимому решению $\overline{X}^*$ соответствует допустимое решение исходной задачи $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$, такое, что $Z(X^*) = \overline{Z}(\overline{X}^*)$. Покажем, что $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$ – оптимальное решение исходной задачи, т.е. $Z(X^*) \geqslant Z(X) \quad \forall X \in G$.

Предположим, что оптимальным решением исходной задачи является допустимое решение $X^0 = (x^0_1, x^0_2, ..., x^0_n)$, т.е. $Z(X^0) > Z(X) \quad \forall X \in G$, в частности $Z(X^0) > Z(X^*)$. По лемме 4.1 существует допустимое решение расширенной задачи $\overline{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, 0, ..., 0)$, такое, что $Z(X^0) = \overline{Z}(\overline{X}^0)$. Тогда $\overline{Z}(\overline{X}^0) = Z(X^0) > Z(X^*) = \overline{Z}(\overline{X}^*)$, что противоречит оптимальности $\overline{X}^*$. ■

❑ **Теорема 4.3** (признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений). Если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Доказательство (от противного). Пусть расширенная задача на максимум имеет оптимальное решение

$$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*),$$

т.е. $\overline{Z}(\overline{X}^*) > \overline{Z}(\overline{X}) \quad \forall \overline{X} \in \overline{G}$; причем хотя бы одна из искусственных переменных больше нуля. Покажем, что система ограничений исходной задачи в этом случае несовместна.

Предположим, что исходная задача имеет некоторое допустимое решение $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. По лемме 4.1 ему соответствует допустимое решение расширенной задачи $\overline{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, 0, ..., 0)$ и $Z(X^0) = \overline{Z}(\overline{X}^0)$. На основании леммы 4.2 $\overline{Z}(\overline{X}^0) > \overline{Z}(\overline{X}^*)$, что противоречит условию оптимальности $\overline{X}^*$. Теорема доказана. ■

❑ **Теорема 4.4** (признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции). Если расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то исходная задача также не имеет решения по той же причине.

Доказательство (от противного). Пусть расширенная задача на максимум не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, т.е. $\bar{Z}(\bar{X}) \to +\infty$. Предположим, что исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. По лемме 4.1 ему соответствует допустимое решение расширенной задачи $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$ и $\bar{Z}(\bar{X}^*) = Z(X^*)$. Так как $\bar{Z}(\bar{X}) \to +\infty$, то найдется такое допустимое решение $\bar{X}_l = (l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}, ..., l_{n+m})$, что $\bar{Z}(\bar{X}_l) > \bar{Z}(\bar{X}^*)$.

Рассмотрим два случая: 1) $l_{n+1} = l_{n+2} = ... = l_{n+m} = 0$; 2) $\exists\, l_{n+i} \neq 0$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Если $l_{n+1} = l_{n+2} = ... = l_{n+m} = 0$, то допустимому решению $\bar{X}_l = (l_1, l_2, ..., l_n, 0, ..., 0)$ по лемме 4.1 соответствует допустимое решение исходной задачи $X_l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ и по лемме 4.2 $\bar{Z}(\bar{X}_l) > \bar{Z}(\bar{X}^*)$, т.е.

$$Z(X_l) = \bar{Z}(\bar{X}_l) > \bar{Z}(\bar{X}^*) = Z(X^*),$$

что противоречит предположению об оптимальности решения X^*.

Если $\exists\, l_{n+i} \neq 0$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, тогда по лемме 4.2 $\bar{Z}(\bar{X}_l) < \bar{Z}(\bar{X}^*)$, что противоречит неограниченности целевой функции ($\bar{Z}(\bar{X}) \to +\infty$) расширенной задачи. Следовательно, исходная задача также не имеет решения. ■

4.6. Особенности алгоритма метода искусственного базиса

Алгоритм метода искусственного базиса имеет следующие особенности.

1. Ввиду того, что начальное опорное решение расширенной задачи содержит искусственные переменные, входящие в целевую функцию с коэффициентом $-M$ (в задаче на максимум) или $+M$ (в задаче на минимум), оценки разложений векторов условий $\Delta_k = C_б X_k - c_k$ состоят из двух слагаемых Δ'_k и $\Delta''_k(M)$, одно из которых Δ'_k не зависит от M, а другое $\Delta''_k(M)$ зависит от M. Так как M сколь угодно велико по сравнению с единицей ($M >> 1$), то на первом этапе расчета для нахождения векторов, вводимых в базис, используются только слагаемые оценок $\Delta''_k(M)$.

2. Векторы, соответствующие искусственным переменным, которые выводятся из базиса опорного решения, исключаются из рассмотрения.

3. После того как все векторы, соответствующие искусственным переменным, исключаются из базиса, расчет продолжается обычным симплексным методом с использованием оценок Δ'_k, не зависящих от M.

4. Переход от решения расширенной задачи к решению исходной задачи осуществляется с использованием доказанных выше теорем 4.2–4.4.

○ **Пример.** Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \text{И} \\ + x_5 \\ + x_6 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Составляем расширенную задачу. В левые части уравнений системы ограничений вводим неотрицательные искусственные переменные с коэффициентом $+1$ (всегда). Удобно справа от уравнений записать вводимые искусственные переменные. В первое уравнение вводим переменную x_5, во второе – переменную x_6. Данная задача – задача на нахождение максимума, поэтому x_5 и x_6 в целевую функцию вводятся с коэффициентом $-M$. Получаем

$$\bar{Z}(\bar{X}) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 - Mx_5 - Mx_6 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 2, \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Задача имеет начальное опорное решение $\bar{X}_1 = (0, 0, 0, 0, 10, 2)$ с базисом $\bar{Б}_1 = (A_5, A_6)$. Вычисляем оценки векторов условий по базису опорного решения и значение целевой функции на опорном решении:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = -5M - 3, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -4M - 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -5M - 1, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} - (-8) = 9M + 8,$$

$$\Delta_5 = \Delta_6 = 0; \quad \bar{Z}(\bar{X}_1) = \begin{pmatrix} -M \\ -M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = -12M.$$

Записываем исходные данные в симплексную таблицу (табл. 4.6). При этом оценки Δ_k и $\bar{Z}(\bar{X}_1)$ для удобства вычислений записываем в две строки: в первую – слагаемые Δ'_k, не зависящие от M, во вторую – слагаемые $\Delta''_k(M)$, зависящие от M. Значения $\Delta''_k(M)$ удобно указывать без M, имея в виду, однако, что оно там присутствует.

Таблица 4.6

			3	2	↓1	−8	−M	−M			
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_2	θ_3
A_5	$-M$	10	3	3	4	−7	1	0	$^{10}/_3$	$^{10}/_3$	$^5/_2$
← A_6	$-M$	2	2	1	$\boxed{1}$	−2	0	1	1	2	2
Δ'_k		0	−3	−2	−1	8	0	0			
$\Delta''_k(M)$		−12	−5	−4	−5	9	0	0			

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на максимум имеются отрицательные оценки (см. теорему 4.1). Выбираем номер вектора A_k, вводимого в базис опорного решения, и вектора A_r, выводимого из базиса. Для этого вычисляем приращения целевой функции ΔZ_k при введении в базис каждого из векторов с отрицательной оценкой и находим максимум этого приращения. При этом слагаемыми оценок Δ'_k (без M) пренебрегаем до тех пор, пока хотя бы одно слагаемое $\Delta''_k(M)$ (с M) отлично от нуля. В связи с этим строка со слагаемыми оценок Δ'_k может отсутствовать в таблице до тех пор, пока присутствует строка $\Delta''_k(M)$. Находим

$$\max_{k=1,2,3}\{-1\cdot(-5),\ -2\cdot(-4),\ -2\cdot(-5)\} = \max_{k=1,2,3}\{5,\ 8,\ 10\} = 10 \text{ при } k = 3.$$

В столбце «A_3» (см. табл. 4.6) за разрешающий элемент выбираем коэффициент 1 во второй строке и выполняем преобразование Жордана.

Вектор A_6, выводимый из базиса, исключаем из рассмотрения (вычеркиваем). Получаем опорное решение $\bar{X}_2 = (0, 0\ , 2, 0, 2, 0)$ с базисом $\bar{Б}_2 = (A_3, A_5)$ (табл. 4.7). Решение не является оптимальным, так как имеется отрицательная оценка $\Delta''_4(M) = -1$.

Таблица 4.7

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	↓ A_4	A_5	A_6	θ_4
← A_5	$-M$	2	−5	−1	0	$\boxed{1}$	1		2
A_3	1	2	2	1	1	−2	0		–
Δ'_k		2	−1	−1	0	6	0		
$\Delta''_k(M)$		−2	5	1	0	−1	0		

В столбце «A_4» единственный положительный элемент принимаем за разрешающий и переходим к новому опорному решению $\bar{X}_3 = (0, 0, 6, 2, 0, 0)$ с базисом $\bar{Б}_3 = (A_3, A_4)$ (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	−8	2	−5	−1	0	1		
A_3	1	6	−8	−1	1	0		
Δ_k		−10	29	5	0	0		

Данное опорное решение является единственным оптимальным решением расширенной задачи, так как в задаче на максимум оценки для всех векторов, не входящих в базис, положительны. По теореме 4.2 исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения расширенной задачи отбрасыванием нулевых искусственных переменных, т.е. $X^* = (0, 0, 6, 2)$.

Ответ: $\max Z(X) = -10$ при $X^* = (0, 0, 6, 2)$. ●

○ **Пример.** Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования со смешанными ограничениями

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{array}{l|c|c} & Д & И \\ \left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 6, \end{array}\right. & \begin{array}{c} +x_4 \\ \\ -x_5 \end{array} & \begin{array}{c} \\ +x_6 \\ +x_7 \end{array} \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приводим задачу линейного программирования к каноническому виду. Для этого вводим дополнительные переменные x_4 и x_5 в первое и третье ограничения соответственно. Получаем

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6, \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Составляем расширенную задачу, для чего вводим искусственные переменные x_6 и x_7 во второе и третье уравнения соответственно. Получаем

$$\bar{Z}(\bar{X}) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 6, \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Данная расширенная задача имеет начальное опорное решение $\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 12, 0, 3, 6)$ с единичным базисом $\overline{Б}_1 = (A_4, A_6, A_7)$, $\overline{Z}(\overline{X}_1) = 9M$. Вычисляем оценки векторов условий по базису опорного решения и записываем в симплексную таблицу так же, как в предыдущем примере. Решение $\overline{X}_1$ не является оптимальным, так как в задаче на минимум векторы A_1 и A_2 имеют положительные оценки $\Delta''_1(M) = \Delta''_2(M) = M$. Улучшаем опорные решения. Каждому опорному решению соответствует своя таблица. Все таблицы можно записать друг под другом, объединив в единую таблицу (табл. 4.9).

Таблица 4.9

				↓3	↓2	↓−3	0	0	M	M		
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ_1	θ_2
	A_4	0	12	2	−1	1	1	0	0	0	6	–
	A_6	M	3	2	−1	−2	0	0	1	0	$^3/_2$	–
←	A_7	M	6	−1	$\boxed{2}$	1	0	−1	0	1	–	3
	Δ'_k		0	−3	−2	3	0	0	0	0		
	$\Delta''_k(M)$		9	1	1	−1	0	−1	0	0	θ_1	
	A_4	0	15	$^3/_2$	0	$^3/_2$	1	$-^1/_2$	0		10	
←	A_6	M	6	$\boxed{^3/_2}$	0	$-^3/_2$	0	$-^1/_2$	1		4	
	A_2	2	3	$-^1/_2$	1	$^1/_2$	0	$-^1/_2$	0		–	
	Δ'_k		0	−4	0	4	0	−1	0			
	$\Delta''_k(M)$		6	$^3/_2$	0	$-^3/_2$	0	$-^1/_2$	0			
←	A_4	0	9	0	0	$\boxed{3}$	1	0				
	A_1	3	4	1	0	−1	0	$-^1/_3$				
	A_2	2	5	0	1	0	0	$-^2/_3$				
	Δ_k		22	0	0	0	0	$-^7/_3$				
	A_3	−3	3	0	0	1	$^1/_3$	0				
	A_1	3	7	1	0	0	$^1/_3$	$-^1/_3$				
	A_2	2	5	0	1	0	0	$-^2/_3$				
	Δ_k		22	0	0	0	0	$-^7/_3$				

Определяем, введение какого из векторов A_1 или A_2 в базис начального опорного решения приведет к большему уменьшению целевой функции. Находим $\min\limits_{k=1,2}\{\Delta Z_k\} = \min\limits_{k=1,2}\left\{-\frac{3}{2}M, -3M\right\} = -3M$ при $k = 2$, т.е. лучше ввести в базис вектор A_2. Получаем второе опорное решение $\overline{X}_2 = (0, 3, 0, 15, 0, 6, 0)$ с базисом $\overline{Б}_2 = (A_4, A_6, A_2)$. Целевая функция $\overline{Z}(\overline{X}_2) = 6M + 6$. Это решение также не является оптимальным, так как вектор A_1 имеет положительную оценку $\Delta_1(M) = \frac{3}{2}M - 4$. Вводим вектор A_1 в базис, получаем третье опорное решение $\overline{X}_3 = (4, 5, 0, 9, 0, 0, 0)$ с базисом $\overline{Б}_3 = (A_1, A_2, A_4)$. Целевая функция $\overline{Z}(\overline{X}_3) = 22$. Это решение оптимальное, но не единственное, так как вектор A_3, не входящий в базис, имеет нулевую оценку. Поэтому необходимо перейти к новому опорному решению, которое также является оптимальным. Для этого требуется ввести в базис вектор A_3.

Переходим к четвертому опорному (оптимальному) решению $\overline{X}_4 = (7, 5, 3, 0, 0, 0, 0)$ с базисом $\overline{Б}_4 = (A_1, A_2, A_3)$, при этом $\overline{Z}(\overline{X}_4) = 22$.

Оптимальные решения расширенной задачи $\overline{X}_3 = (4, 5, 0, 9, 0, 0, 0)$ и $\overline{X}_4 = (7, 5, 3, 0, 0, 0, 0)$ имеют нулевые искусственные переменные. Поэтому (по теореме 4.2) исходная задача также имеет два оптимальных решения $X_1^* = (4, 5, 0)$ и $X_2^* = (7, 5, 3)$. Дополнительные переменные x_4, x_5 в оптимальном решении исходной задачи не записываем.

О т в е т: $\min Z(X^*) = 22$ при $X^* = (1 - t)X_1^* + tX_2^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_1^* = (4, 5, 0)$, $X_2^* = (7, 5, 3)$. ●

5. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

5.1. Виды математических моделей двойственных задач

Любой задаче линейного программирования (исходной, или прямой) можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется **двойственной** или **сопряженной**. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач линейного программирования. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

Составим двойственную задачу к задаче использования сырья (см. параграф 1.2).

Имеется m видов сырья в количестве $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$, которые используются для изготовления n видов продукции. Известно: a_{ij} – расход i-го вида сырья на единицу j-й продукции; c_j – прибыль при реализации единицы j-го вида продукции.

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{5.1}$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, & y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, & y_m \end{array}\right. \tag{5.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Здесь x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ – объем производства j-го вида продукции.

Предположим, что второй производитель хочет перекупить сырье. Составим двойственную задачу, решение которой позволит определить условия продажи сырья. Введем вектор оценок (цен) видов сырья $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Затраты на приобретение i-го вида сырья в количестве b_i равны b_iy_i. Второму производителю выгодно минимизировать суммарные затраты на приобретение всех видов сырья, поэтому целевая функция имеет вид

$$F(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min. \tag{5.4}$$

Первому производителю невыгодно продавать сырье, если суммарная стоимость всех видов сырья, расходуемых на каждое изделие j-й продукции, т.е.

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m,$$

меньше прибыли c_j, получаемой при реализации этого изделия. Система ограничений задачи имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n. \end{cases} \qquad (5.5)$$

Очевидно, что оценки видов сырья должны удовлетворять условиям неотрицательности

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5.6)$$

Таким образом, связь исходной и двойственной задач состоит в том, что коэффициенты c_j целевой функции исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи, свободные члены b_i системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами целевой функции двойственной задачи, а матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений исходной задачи.

Рассмотренная пара задач относится к симметричным парам двойственных задач. В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач (приведем их в *матричной* форме записи):

Исходная задача	***Двойственная задача***	
	Симметричные пары	
1. $Z(X) = CX \to \max$, $AX \leqslant A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \min$, $YA \geqslant C$, $Y \geqslant \theta$.	(5.7)
2. $Z(X) = CX \to \min$, $AX \geqslant A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \max$, $YA \leqslant C$, $Y \geqslant \theta$.	(5.8)
	Несимметричные пары	
3. $Z(X) = CX \to \max$, $AX = A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \min$, $YA \geqslant C$.	(5.9)
4. $Z(X) = CX \to \min$, $AX = A_0$, $X \geqslant \theta$;	$F(Y) = YA_0 \to \max$, $YA \leqslant C$.	(5.10)

Здесь

$C = (c_1, c_2, ..., c_n), \quad Y = (y_1, y_2, ..., y_m),$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

5.2. Общие правила составления двойственных задач

При составлении двойственных задач используют следующие правила.

Правило 1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой.

Правило 2. Ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

Правило 3. Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи «$\leqslant$», то целевая функция $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ должна максимизироваться, а если «$\geqslant$», то минимизироваться.

Правило 4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

Правило 5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$F(Y) = c_0 + b_1y_1 + ... + b_my_m,$$

где c_0 – свободный член целевой функции $Z(X)$ исходной задачи; $b_1, b_2, ..., b_m$ – свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i – свободный член именно того ограничения, которому соответствует неизвестная y_i; $y_1, y_2, ..., y_m$ – неизвестные в двойственной задаче.

Правило 6. Целевая функция $F(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если $Z(X) \to \max$, то $F(Y) \to \min$, и если $Z(X) \to \min$, то $F(Y) \to \max$.

Правило 7. Каждому неизвестному x_j, $j = 1, 2, ..., n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i, соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными $y_1, y_2, ..., y_m$ – в левых. Все знаки неравенств имеют вид «$\geqslant$», если $F(Y) \to \min$, и «$\leqslant$», если $F(Y) \to \max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные $y_1, y_2, ..., y_m$ входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j, совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j, с которым x_j входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i.

○ **Пример 1.** Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 12, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Умножим первое ограничение-неравенство на –1. Задача примет вид исходной задачи симметричной пары двойственных задач (5.8):

$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -10, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 12, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$F(Y) = -10y_1 + 6y_2 + 12y_3 \to \max.$$

Функция $F(Y)$ максимизируется, так как целевая функция исходной задачи минимизируется.

Умножаем коэффициенты при x_1 на соответствующие переменные двойственной задачи и складываем их: $-1y_1 + 2y_2 + 1y_3$. Данная сумма меньше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant 1.$$

Неравенство имеет вид «$\leqslant$», потому что целевая функция двойственной задачи максимизируется. Аналогично составляются еще два ограничения двойственной задачи (соответствуют переменным x_2, x_3):

$$-1y_1 - 1y_2 + 2y_3 \leqslant 4,$$

$$-1y_1 \qquad + 3y_3 \leqslant 3.$$

Все переменные двойственной задачи удовлетворяют условию неотрицательности, потому что все ограничения исходной задачи – неравенства.

Окончательно двойственная задача имеет вид

$$F(Y) = -10y_1 + 6y_2 + 12y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant 1, \\ -y_1 - y_2 + 2y_3 \leqslant 4, \\ -y_1 + 3y_3 \leqslant 3, \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \bullet$$

○ **Пример 2.** Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Данная задача имеет вид исходной задачи второй несимметричной пары двойственных задач (5.10). Запишем двойственную задачу

$$F(Y) = 7y_1 + 10y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \leqslant 1, \\ 2y_1 + 3y_2 \leqslant -1, \\ y_1 + 2y_2 \leqslant -2, \\ y_1 + y_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

Переменные y_1, y_2 могут не удовлетворять условию неотрицательности, так как они соответствуют ограничениям-равенствам исходной задачи. ●

○ **Пример 3.** Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 3 - 2x_1 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant -5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leqslant 8, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим ограничения-неравенства на -1, так как в задаче на минимум они должны иметь вид «$\geqslant$» (см. правило 3). Исходная задача запишется в виде

$$Z(X) = 3 - 2x_1 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 \geqslant -3, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 5, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant -8, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Составим двойственную задачу:

$$F(Y) = 3 - 3y_1 + 5y_2 - 8y_3 + 6y_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 - 4y_3 + y_4 \leqslant -2, \\ -3y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 5y_4 \leqslant 0, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \quad y_3 \geqslant 0.$$

Неизвестная y_4, соответствующая ограничению-равенству, может быть любого знака (см. правило 4). ●

5.3. Первая теорема двойственности

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие. Возможны следующие случаи: 1) обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения; 2) одна из задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, а другая – ввиду несовместности системы ограничений.

❑ **Теорема 5.1.** Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают. Если же одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Доказательство. Пусть дана несимметричная пара двойственных задач

$$Z(X) = CX \to \max, \qquad F(Y) = YA_0 \to \min,$$
$$AX = A_0, \qquad YA \geqslant C.$$
$$X \geqslant \theta.$$

Прежде чем приступить к доказательству, получим ряд соотношений. Предположим, что первая (прямая) из пары задач решена симплексным методом и получено оптимальное решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*, 0, ..., 0)$ с базисом $Б_1 = (A_1, A_2, ..., A_m)$. Запишем последнюю симплексную таблицу (табл. 5.1).

Таблица 5.1

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_k	...	A_n
A_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	$x_{1\,(m+1)}$	...	x_{1k}	...	x_{1n}
A_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	$x_{2\,(m+1)}$	...	x_{2k}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_m	x_m^*	0	0	...	1	$x_{m\,(m+1)}$	...	x_{mk}	...	x_{mn}
Δ_k		$Z(X^*)$	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

Запишем разложение вектора A_k по базису оптимального решения:

$$A_k = A_1 x_{1k} + A_2 x_{2k} + \ldots + A_m x_{mk}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Преобразуем данное разложение:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_{1k} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_{2k} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x_{mk} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_{1k} + a_{12}x_{2k} + \ldots + a_{1m}x_{mk} \\ a_{21}x_{1k} + a_{22}x_{2k} + \ldots + a_{2m}x_{mk} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_{1k} + a_{m2}x_{2k} + \ldots + a_{mm}x_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{pmatrix},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{pmatrix},$$

тогда

$$A_k = DX_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{5.11}$$

Умножим данное матричное равенство на обратную матрицу D^{-1} слева:

$$D^{-1}A_k = D^{-1}DX_k.$$

Так как $D^{-1}D = E$, $EX_k = X_k$, то

$$X_k = D^{-1}A_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{5.12}$$

Аналогично можно получить

$$A_0 = DX^*, \quad X^* = D^{-1}A_0. \tag{5.13}$$

Запишем с учетом полученных соотношений оценки Δ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. В общем случае формула для расчета оценок имеет вид

$$\Delta_k = C_б X_k - c_k$$

(см. параграф 4.2).

Обозначим через C^* матрицу-строку коэффициентов при базисных переменных в оптимальном решении. Тогда оценки разложений векторов-условий по базису оптимального решения

$$\Delta_k = C^*X_k - c_k = C^*D^{-1}A_k - c_k. \tag{5.14}$$

Обозначим матрицу, составленную из векторов X_k, через $\bar{X}$, т.е. $\bar{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$; матрицу-строку из оценок Δ_k через Δ, т.е. $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n)$, и матрицу-строку коэффициентов целевой функции через C, т.е. $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Кроме того, $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$.

Получим из формул (5.12) и (5.14) следующее:

$$\bar{X} = D^{-1}A, \tag{5.15}$$

$$\Delta = C^*D^{-1}A - C. \tag{5.16}$$

Теперь приступим к доказательству первого утверждения теоремы.

1. Сначала докажем, что допустимое решение двойственной задачи имеет вид

$$Y = C^*D^{-1}. \tag{5.17}$$

Действительно, так как решение X^* прямой задачи на максимум оптимальное, то его оценки неотрицательные:

$$\Delta = C^*D^{-1}A - C \geqslant \theta.$$

Отсюда

$$YA - C \geqslant \theta, \quad YA \geqslant C,$$

т.е. $Y = C^*D^{-1}$ удовлетворяет системе ограничений двойственной задачи.

2. Докажем, что при $X^* = D^{-1}A_0$ и $Y = C^*D^{-1}$

$$Z(X^*) = F(Y). \tag{5.18}$$

Получим

$$Z(X^*) = C^*X^* = C^*D^{-1}A_0 = YA_0 = F(Y).$$

3. Докажем, что

$$Z(X) \leqslant F(Y) \quad \forall X \in G_X, \quad \forall Y \in G_Y, \tag{5.19}$$

где G_X – область допустимых решений прямой задачи; G_Y – область допустимых решений двойственной задачи.

Для этого систему ограничений прямой задачи умножим слева на допустимое решение Y двойственной задачи, а систему ограничений двойственной задачи умножим справа на допустимое решение X исходной задачи, получим

$$YAX = YA_0, \quad YAX \geqslant CX.$$

Так как $YA_0 = F(Y)$, $CX = Z(X)$, то

$$F(Y) = YA_0 = YAX \geqslant CX = Z(X),$$

т.е. $Z(X) \leqslant F(Y)$.

4. Далее докажем, что $Y = C^*D^{-1}$ является оптимальным решением. Так как прямая задача на максимум, а X^* – оптимальное решение,

то $Z(X^*) \geqslant Z(X) \quad \forall X \in G_X$. Двойственная задача на минимум, поэтому значение ее целевой функции на оптимальном решении Y^* должно удовлетворять условию $F(Y^*) \leqslant F(Y) \quad \forall Y \in G_Y$. Как показано в пункте 3, $Z(X) \leqslant F(Y) \quad \forall X \in G_X, \forall Y \in G_Y$, поэтому значение $F(Y^*)$ не может быть меньше $Z(X^*)$, а может быть только равно $Z(X^*)$. Это равенство достигается при $Y^* = C^*D^{-1}$. Следовательно, оно является оптимальным решением двойственной задачи, т.е. первое утверждение теоремы доказано.

Запишем полезное для нахождения оптимального решения двойственной задачи соотношение. Матричное равенство $Y^* = C^*D^{-1}$ представим следующим образом:

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*) = C^*D^{-1} = C^* \cdot (X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_m}),$$

где D^{-1} – обратная матрица к матрице D, составленной из векторов-условий задачи, образующих базис оптимального решения. Матрица D^{-1} находится в последней симплексной таблице под единичными векторами первой симплексной таблицы.

Отсюда следует, что $y_k^* = C^*X_k$. Так как $\Delta_k^* = C^*X_k - c_k$, то $\Delta_k^* = y_k^* - c_k$

или

$$y_k^* = \Delta_k^* + c_k. \tag{5.20}$$

Данная формула позволяет, используя оценки последней симплексной таблицы решения прямой задачи, записать оптимальное решение двойственной задачи как сумму оценок и коэффициентов целевой функции.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть прямая задача не имеет оптимального решения ввиду неограниченности целевой функции $Z(X) \to +\infty$. Так как $Z(X) \leqslant F(Y) \quad \forall X \in G_X$ и $\forall Y \in G_Y$, то или G_Y является пустым множеством, или $F(Y) \to -\infty$. ■

○ **Пример 1.** Для данной задачи составить двойственную, решить ее симплексным методом и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geqslant 4, \end{cases} \quad \begin{array}{|l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Используя вторую симметричную пару двойственных задач (5.8), составляем задачу, двойственную к исходной:

$$F(Y) = 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 6, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leqslant 7, \\ 3y_1 + y_2 + 6y_3 \leqslant 9, \end{cases} \left| \begin{array}{l} Д \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{array} \right.$$

$$y_i \geqslant 0 \quad \forall i.$$

Вводим неотрицательные дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 для приведения задачи к каноническому виду:

$$F(Y) = 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 = 7, \\ 3y_1 + y_2 + 6y_3 + y_6 = 9, \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0 \quad \forall i.$$

Находим начальное опорное решение $Y_1 = (0, 0, 0, 6, 7, 9)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$. Решение задачи симплексным методом приведено в табл. 5.2.

Таблица 5.2

				↓5	↓2	4	0	0	0			
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_2	θ_3
	A_4	0	6	1	1	1	1	0	0	6	6	6
	A_5	0	7	2	1	2	0	1	0	$^7/_2$	7	$^7/_2$
←	A_6	0	9	$\boxed{3}$	1	6	0	0	1	3	9	$^3/_2$
	Δ_j		0	−5	−2	−4	0	0	0	θ_2		
	A_4	0	3	0	$^2/_3$	−1	1	0	$-^1/_3$	$^9/_2$		
←	A_5	0	1	0	$\boxed{^1/_3}$	−2	0	1	$-^2/_3$	3		
	A_1	5	3	1	$^1/_3$	2	0	0	$^1/_3$	9		
	Δ_j		15	0	$-^1/_3$	6	0	0	$^5/_3$			
	A_4	0	1	0	0	3	1	−2	1			
	A_2	2	3	0	1	−6	0	3	−2			
	A_1	5	2	1	0	4	0	−1	1			
	Δ_j		16	0	0	4	0	1	1			
	A_1	5	2	1	0	4	0	−1	1	$\max F(Y) = 16$,		
	A_2	2	3	0	1	−6	0	3	−2	$Y^* = (2, 3, 0)$,		
	A_4	0	1	0	0	3	1	−2	1	$Б^* = (A_1, A_2, A_4)$		
	Δ_j		16	0	0	4	0	1	1			

Оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = (2, 3, 0)$, его базис $Б^* = (A_1, A_2, A_4)$, значение целевой функции $\max F(Y) = F(Y^*) = 16$. Оптимальное решение исходной задачи, двойственной к решенной, находим по формуле (5.17)

$$X^* = C^*D^{-1}.$$

Матрица D состоит из координат векторов A_1, A_2, A_4, входящих в базис оптимального решения двойственной задачи:

$$D = (A_1, A_2, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица D^{-1} находится в последней симплексной таблице. Ее столбцы расположены под столбцами единичной матрицы, т.е. под единичными векторами A_4, A_5, A_6, образующими базис начального опорного решения:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора C^* являются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных оптимального решения y_4, y_2, y_1. Данные коэффициенты записываются в том же порядке, в каком векторы-условия входят в базис оптимального решения, т.е. $C^* = (5, 2, 0)$.

Вычисляем

$$X^* = C^*D^{-1} = (5, 2, 0)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1).$$

Оптимальное решение исходной задачи проще найти по формуле (5.20)

$$x_i^* = \Delta_i^* + c_i^*, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для этого необходимо к оценкам разложений векторов A_4, A_5, A_6, входящих в базис начального опорного решения, по базису оптимального решения, т.е. к оценкам этих векторов в последней симплексной таблице, прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции (в таблице они расположены в верхней строке над оценками)

$$x_1^* = 0 + 0 = 0, \quad x_2^* = 1 + 0 = 1, \quad x_3^* = 1 + 0 = 1.$$

Ответ: $\min Z(X) = 16$ при $X^* = (0, 1, 1)$. ●

○ **Пример 2.** Найти решение данной задачи и двойственной к ней:

$$Z(X) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, & \mid y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 11, & \mid y_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, & \mid y_3 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение. Задача, двойственная к данной, имеет вид

$$F(Y) = y_1 + 11y_2 + 2y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 1, \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geqslant -6, \\ y_1 \geqslant 2, \\ y_2 \geqslant -1, \\ y_3 \geqslant 3. \end{cases}$$

В данной паре двойственных задач легче решить исходную задачу, так как она имеет начальное опорное решение $X_1 = (0, 0, 1, 11, 2)$ с базисом $Б_1 = (A_3, A_4, A_5)$ и ее без дополнительных преобразований можно решить симплексным методом. Решение исходной задачи приведено в табл. 5.3.

Таблица 5.3

				↓1	↓−6	2	−1	3			
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_1	θ_2	
	A_3	2	1	−2	1	1	0	0	−	**1**	$\Delta Z_1 = 8$,
	A_4	−1	11	2	3	0	1	0	$^{11}/_2$	$^{11}/_3$	$\Delta Z_2 = 1$
←	A_5	3	2	$\boxed{1}$	−2	0	0	1	**2**	−	
	Δ_j		−3	−4	−1	0	0	0			
	A_3	2	5	0	−3	1	0	2			
←	A_4	−1	7	0	$\boxed{7}$	0	1	−2			
	A_1	1	2	1	−2	0	0	1			
	Δ_j		5	0	−9	0	0	4			
	A_3	2	8	0	0	1	$^3/_7$	$^8/_7$	max $Z(X) = 14$,		
	A_2	−6	1	0	1	0	$^1/_7$	$-^2/_7$	$X^* = (4, 1, 8)$,		
	A_1	1	4	1	0	0	$^2/_7$	$^3/_7$	$Б^* = (A_3, A_2, A_1)$		
	Δ_j		14	0	0	0	$^9/_7$	$^{10}/_7$			

Оптимальным решением исходной задачи является вектор $X^* = (4, 1, 8)$, базис оптимального решения $Б^* = (A_3, A_2, A_1)$, значение целевой функции $\max Z(X) = Z(X^*) = 14$. По формуле (5.17) находим оптимальное решение двойственной задачи

$$Y^* = C^* D^{-1} = (2, -6, 1)\begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 8/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \\ 0 & 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} = (2, {}^2/_7, {}^{31}/_7).$$

Данное решение можно найти также по формулам (5.20). Итак,

$y_i^* = \Delta_i^* + c_i^*$,

$y_1^* = 0 + 2 = 2, \quad y_2^* = {}^9/_7 - 1 = {}^2/_7, \quad y_3^* = {}^{10}/_7 + 3 = {}^{31}/_7.$

Таким образом, оптимальным решением двойственной задачи является вектор $Y^* = (2, {}^2/_7, {}^{31}/_7)$, $\min F(Y) = F(Y^*) = 14$.

Ответ: $\max Z(X) = 14$ при $X^* = (4, 1, 8)$; $\min F(Y) = 14$ при $Y^* = (2, {}^2/_7, {}^{31}/_7)$. ●

5.4. Вторая теорема двойственности

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j,\ j = 1, 2, ..., n, \quad (5.21)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \qquad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

❑ **Теорема 5.2.** Для того чтобы допустимые решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \qquad (5.22)$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (5.23)$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i-е ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i-я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i-я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – оптимальные решения пары двойственных задач (5.21).

1. Покажем, что в этом случае выполняются равенства (5.22).

Подставим оптимальные решения X, Y в системы ограничений соответствующих задач, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, ..., m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Затем каждое из тождеств умножим на соответствующую переменную двойственной задачи и после этого просуммируем их, получим

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = F(Y);$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Z(X).$$

Отсюда следует

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = F(Y).$$

Так как X, Y – оптимальные решения, то по первой теореме двойственности (см. теорему 5.1) $Z(X) = F(Y)$. Поэтому заменим в последнем соотношении знаки «$\leqslant$» на «=», получим

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = F(Y). \tag{5.24}$$

Отсюда можно записать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0.$$

Учитывая, что $x_j \geqslant 0 \quad \forall j$ и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, ..., n$, а следовательно, и $x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) \geqslant 0 \quad \forall j$, приходим к выводу, что каждое слагаемое суммы равно нулю, т.е. справедливы равенства (5.22)

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

2. Аналогично докажем справедливость равенств (5.23). Используя выражение (5.24), запишем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0.$$

Учитывая, что $y_i \geqslant 0 \quad \forall i$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$, делаем вывод, что каждое слагаемое суммы равно нулю, т.е.

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть равенства (5.22) и (5.23) выполняются. Докажем, что в этом случае $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ являются оптимальными решениями.

Просуммируем каждую группу данных равенств, получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Z(X);$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = F(Y).$$

Из данных равенств следует, что $Z(X) = F(Y)$. Из первой теоремы двойственности (см. теорему 5.1) следует, что значения целевых функций пары двойственных задач равны только на оптимальных решениях. Поэтому можно утверждать, что X и Y являются оптимальными решениями. Теорема доказана полностью. ■

○ **Пример 1.** Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 2, & \big| \; y_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, & \big| \; y_2 \end{cases}$$

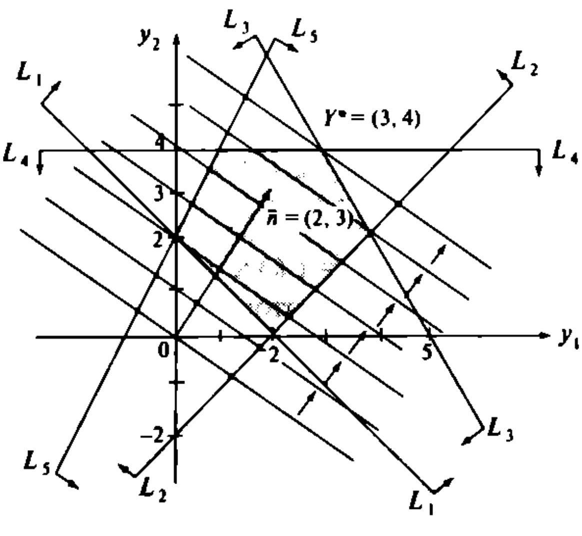
$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Решение. Составим двойственную задачу:

$$F(Y) = 2y_1 + 3y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \leqslant -2, \\ y_1 - y_2 \leqslant 2, \\ 2y_1 + y_2 \leqslant 10, \\ y_2 \leqslant 4, \\ -2y_1 + y_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

Решим эту задачу графическим методом. На рис. 5.1 изображены область допустимых решений задачи, нормаль $\bar{n} = (2, 3)$ линий уровня, линии уровня $2y_1 + 3y_2 = c$ и оптимальное решение задачи $Y^* = (3, 4)$.



$$Y^* = L_3 \cap L_4,$$

$$+\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 10 & \big| \times (1) \\ y_2 = 4 & \big| \times (-1) \end{cases}$$

$$2y_1 = 6 \Rightarrow y^*_1 = 3,\; y^*_2 = 4.$$

$$Y^* = (3, 4).$$

$$F(Y^*) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

Рис. 5.1

Подставим оптимальное решение $Y^* = (3, 4)$ в систему ограничений. Получим, что первое, второе и пятое ограничения выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} -3 - 4 < -2 \Rightarrow x_1^* = 0, \\ 3 - 4 < 2 \Rightarrow x_2^* = 0, \\ 2 \cdot 3 + 4 = 10, \\ 4 = 4, \\ -2 \cdot 3 + 4 < 2 \Rightarrow x_5^* = 0. \end{cases}$$

По второй теореме двойственности следует, что соответствующие координаты оптимального решения двойственной задачи, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1^* = x_2^* = x_5^* = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи получим

$$\begin{cases} 2x_3 = 2, \\ x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_3^* = 1$, $x_4^* = 2$. Окончательно записываем $X^* = (0, 0, 1, 2, 0)$.

Ответ: $\min Z(X) = 18$ при $X^* = (0, 0, 1, 2, 0)$. ●

○ **Пример 2.** Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases} \begin{array}{|l} y_1 \\ y_2 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

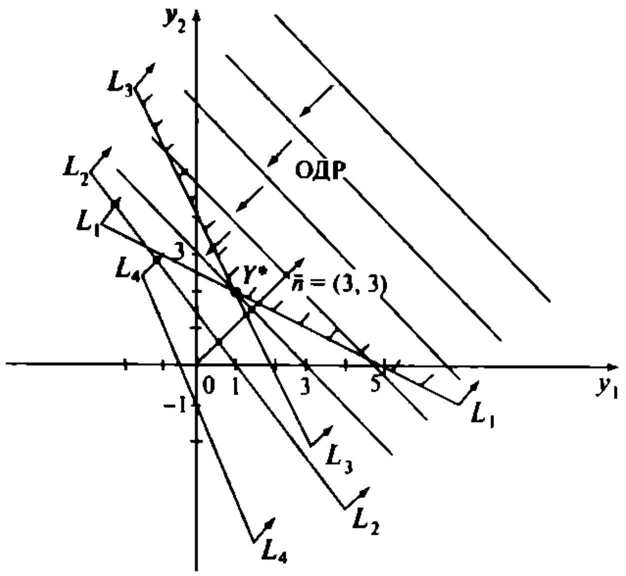
Решение. Составляем двойственную задачу

$$F(Y) = 3y_1 + 3y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 5, \\ 3y_1 + 2y_2 \geqslant 3, \\ 2y_1 + y_2 \geqslant 4, \\ 2y_1 + y_2 \geqslant -1. \end{cases}$$

Решаем ее графическим методом (рис. 5.2). Для этого строим область допустимых решений (ОДР), нормаль $\bar{n} = (3, 3)$, линии уровня $3y_1 + 3y_2 = c$. Перемещаем линии уровня до опорной прямой. Оптимальное решение (точку Y^*) найдем, решая совместно уравнения прямых L_1 и L_3, соответствующих первому и третьему неравенствам.

Таким образом, оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = (1, 2)$, при котором $\min F(Y) = 9$.



$Y^* = L_1 \cap L_3,$

$$+\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 & \times(-1) \\ 2y_1 + y_2 = 4 & \times(2) \end{cases}$$

$$3y_1 = 3,\ y_1^* = 1,\ y_2^* = 2.$$

$$Y^* = (1, 2).$$

Рис. 5.2

Используем вторую теорему двойственности. Подставляем координаты оптимального решения двойственной задачи $Y^* = (1, 2)$ в систему ограничений

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 5, \\ 3y_1 + 2y_2 \geqslant 3, \\ 2y_1 + y_2 \geqslant 4, \\ 2y_1 + y_2 \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\cdot 2 = 5, \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 2 > 3, \\ 2\cdot 1 + 2 = 4, \\ 2\cdot 1 + 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* - ? \\ x_2^* = 0, \\ x_3^* - ? \\ x_4^* = 0. \end{cases}$$

Второе и четвертое ограничения выполняются как строгие неравенства, следовательно, вторая и четвертая координаты оптимального решения исходной задачи равны нулю: $x_2^* = 0$, $x_4^* = 0$. Учитывая это, первую и третью координаты оптимального решения X^* находим при совместном решении уравнений-ограничений исходной задачи:

$$+\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3, & \times(-1) \\ 2x_1 + x_3 = 3, & \times(2) \end{cases}$$

$$3x_1 = 3 \Rightarrow x_1^* = 1,\ x_3^* = 1.$$

Ответ: $\max Z(X) = 9$ при $X^* = (1, 0, 1, 0)$. ●

5.5. Двойственный симплексный метод

Двойственный симплексный метод, или метод последовательного уточнения оценок, обязан своим возникновением теории двойственности, поэтому он и назван двойственным.

Двойственный симплексный метод, как и обычный симплексный метод, позволяет в результате последовательного улучшения так называемых *почти допустимых опорных решений* либо найти оптимальное решение, либо сделать заключение об его отсутствии.

Алгоритм двойственного симплексного метода таков, что, как только почти допустимое опорное решение становится допустимым, оно становится также оптимальным.

Порядок улучшения решений в симплексном и двойственном симплексном методах схематически изображен на рис. 5.3. В симплексном методе улучшаются опорные решения с неотрицательными координатами, а в двойственном симплексном методе – почти допустимые опорные решения с неположительными координатами.

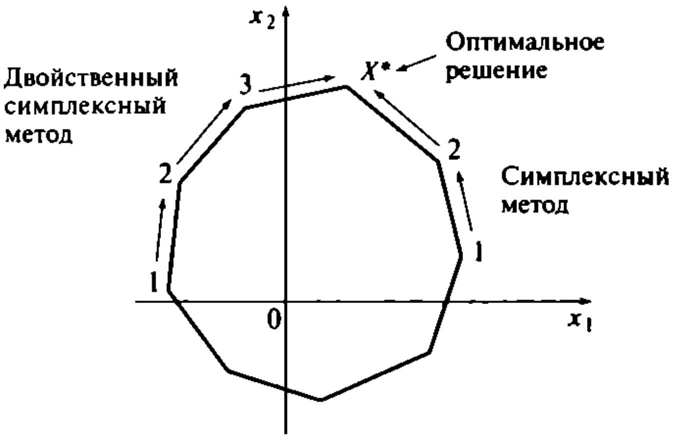


Рис. 5.3

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(X) = CX \to \max,$$
$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0,$$
$$X \geqslant \theta.$$

Почти допустимым опорным решением (ПДОР) задачи линейного программирования называется такой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$, который удовлетворяет системе ограничений задачи, не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных и для которого векторы-условия $A_1, A_2, \ldots, A_m$, соответствующие отличным от нуля координатам, линейно независимы.

В двойственном симплексном методе рассматриваются ПДОР, при которых оценки Δ_k разложений векторов-условий A_k по базису ПДОР соответствуют **признаку оптимальности**, т.е. в задаче на максимум $\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$, а в задаче на минимум $\Delta_k \leqslant 0 \quad \forall k$.

Для обоснования двойственного симплексного метода докажем три теоремы.

❑ **Теорема 5.3** (признак оптимальности ПДОР). Почти допустимое опорное решение оптимально, если оно является допустимым.

Доказательство. Пусть задача линейного программирования на максимум имеет начальное ПДОР, при котором оценки разложений векторов-условий неотрицательны ($\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$). Алгоритм двойственного симплексного метода построен так, что при переборе ПДОР оценки поддерживаются неотрицательными. Поэтому, если от ПДОР будет осуществлен переход к допустимому решению, оно становится оптимальным, так как это соответствует признаку оптимальности обычного симплексного метода. Аналогично можно провести рассуждения с задачей на минимум. ■

❑ **Теорема 5.4** (об улучшении ПДОР). Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) для заданного почти допустимого опорного решения с неотрицательными (неположительными) оценками хотя бы одна координата отрицательная $x_{l0} < 0$ и при этом среди коэффициентов x_{lj}, $j = 1, 2, ..., n$ разложений векторов-условий по базису данного решения существует хотя бы один отрицательный $x_{lk} < 0$, то решение может быть улучшено (приближено к оптимальному), т.е. можно построить новое почти допустимое опорное решение, для которого значение целевой функции будет меньше (больше), если из его базиса вывести вектор A_l и ввести вектор A_k, номер которого находится из условия

$$\theta_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{x_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{x_{lk}} \right|, \quad x_{lj} < 0.$$

Доказательство. Пусть задача линейного программирования на максимум имеет начальное ПДОР $X_1 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$ с базисом $Б_1 = (A_1, A_2, ..., A_m)$. Будем считать, что оценки разложений всех векторов-условий A_k по базису этого решения неотрицательны ($\Delta_k \geqslant 0 \; \forall k$) (табл. 5.4).

Таблица 5.4

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	...	A_l	...	A_m	...	A_j	...	A_k	...	A_n
A_1	c_1	x_{10}	1	...	0	...	0	...	x_{1j}	...	x_{1k}	...	x_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_l	c_l	x_{l0}	0	...	1	...	0	...	x_{lj}	...	$\boxed{x_{lk}}$	...	x_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_i	x_{i0}	0	...	0	...	0	...	x_{ij}	...	x_{ik}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_m	x_{m0}	0	...	0	...	1	...	x_{mj}	...	x_{mk}	...	x_{mn}
Δ_k		$Z(X_1)$	0	...	0	...	0	...	Δ_j	...	Δ_k	...	Δ_n

1. Сначала получим условие, которое при переходе к новому ПДОР обеспечивает неотрицательность оценок Δ_k, а затем условие для улучшения ПДОР (уменьшения значения целевой функции на этом решении).

Выведем формулы для пересчета оценок Δ_k при проведении преобразования Жордана с разрешающим элементом x_{lk}. Формулы для пересчета коэффициентов разложения векторов-условий A_k по базису опорного решения имеют вид

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, \quad j = 0, 1, 2, ..., n,$$

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad i \neq l, \quad j = 0, 1, 2, ..., n.$$

Оценки Δ_j для первого ПДОР рассчитывают по формулам

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

а при следующем ПДОР после вывода из базиса вектора A_l и введения в базис вектора A_k (разрешающий элемент преобразования Жордана x_{lk}) по формулам

$$\Delta'_j = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x'_{ij} + c_k x'_{lj} - c_j.$$

Подставив x'_{ij}, x'_{lj} в это выражение, получим

$$\Delta'_j = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \left(x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}\right) + c_k \frac{x_{lj}}{x_{lk}} - c_j.$$

Преобразуем данное выражение:

$$\Delta'_j = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x_{ik} + c_k \frac{x_{lj}}{x_{lk}} - c_j =$$

$$= \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x_{ij} + c_l x_{lj} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} c_l x_{lk} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i x_{ik} + c_k \frac{x_{lj}}{x_{lk}} - c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} - c_k\right) = \Delta_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \Delta_k.$$

Получим следующие формулы для пересчета оценок:

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \Delta_k, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{5.25}$$

Пусть $\Delta_j \geqslant 0 \quad \forall j$. Теперь необходимо получить ограничения на выбор разрешающего элемента x_{lk}, обеспечивающего неотрицательность оценок $\Delta'_j \geqslant 0 \quad \forall j$.

Первое условие следует из неотрицательности оценки Δ'_l для вектора A_l, выводимого из базиса (его оценка равна нулю). Так как

$$\Delta'_l = \Delta_l - \frac{x_{ll}}{x_{lk}}\Delta_k, \quad \Delta_l = 0, \quad x_{ll} = 1, \quad \Delta_k \geqslant 0,$$

то $\Delta'_l = -\dfrac{\Delta_k}{x_{lk}} \geqslant 0$ при $x_{lk} < 0$.

Следовательно, разрешающий элемент должен быть отрицательным, т.е.

$$x_{lk} < 0. \tag{5.26}$$

Оценки для всех остальных векторов должны оставаться неотрицательными.

Рассматриваем два случая:

а) если $x_{lj} > 0$, то $\Delta'_j = \Delta_j - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}\Delta_k \geqslant 0$ без дополнительных условий, так как $\Delta_j \geqslant 0 \quad \forall j, \quad x_{lk} < 0$;

б) если $x_{lj} < 0$, то, записав неравенства $\Delta'_j = \Delta_j - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}\Delta_k \geqslant 0$, $j = 1, 2, ..., n$ в виде $\Delta_j \geqslant \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}\Delta_k$ и умножив на $\dfrac{1}{x_{lj}}$, имеем $\dfrac{\Delta_j}{x_{lj}} \leqslant \dfrac{\Delta_k}{x_{lk}}$, $j = 1, 2, ..., n$. С учетом того, что $\dfrac{\Delta_k}{x_{lk}} \leqslant 0$, так как $\Delta_k \geqslant 0$, $x_{lk} < 0$, получим

$$\left|\frac{\Delta_j}{x_{lj}}\right| \geqslant \left|\frac{\Delta_k}{x_{lk}}\right|, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Следовательно, для того чтобы оценки Δ'_j, $j = 1, 2, ..., n$ были неотрицательными, номер вектора A_k, вводимого в базис, нужно выбирать из условия

$$\theta_{0l} = \min\left\{\left|\frac{\Delta_j}{x_{lj}}\right|\right\} = \left|\frac{\Delta_k}{x_{lk}}\right|, \quad x_{lk} < 0. \tag{5.27}$$

В задачах на минимум данное условие также позволяет сохранять оценки Δ_j, $j = 1, 2, ..., n$ неположительными.

2. Далее получим условие выбора номера l вектора A_l, выводимого из базиса. При обосновании симплексного метода (теорема 4.1 об улучшении опорного решения) была получена формула для приращения целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому (при введении в базис опорного решения вектора A_k)

$$\Delta Z_k = -\theta_{0k}\Delta_k = -\frac{x_{l0}}{x_{lk}}\Delta_k.$$

Преобразуем ее:

$$\Delta Z_k = -x_{l0}\frac{\Delta_k}{x_{lk}} = x_{l0}\left(-\frac{\Delta_k}{x_{lk}}\right).$$

Учитывая, что $\Delta_k \geqslant 0$, $x_{lk} < 0$, получим $-\frac{\Delta_k}{x_{lk}} \geqslant 0$. Обозначим $\theta_{0l} = -\frac{\Delta_k}{x_{lk}}$. Тогда формула для вычисления приращения целевой функции в случае выведения из базиса опорного решения вектора A_l примет вид

$$\Delta Z_l = x_{l0}\theta_{0l}. \tag{5.28}$$

Чтобы в задаче на максимум значение целевой функции убывало, приращение ΔZ_l должно быть отрицательным. Это можно обеспечить только выбором отрицательной координаты x_{l0} ПДОР.

Для скорейшего нахождения оптимального решения номер выводимого из базиса вектора A_l следует выбирать из условия

$$\min_l \{\Delta Z_l\} = \min_l \{x_{l0}\theta_{0l}\}, \quad x_{l0} < 0. \tag{5.29}$$

В задаче на минимум это условие имеет вид

$$\max_l \{\Delta Z_l\} = \max_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}, \quad x_{l0} < 0. \blacksquare \tag{5.30}$$

❑ **Теорема 5.5** (об отсутствии решения задачи ввиду несовместности системы ограничений). Если для ПДОР существует хотя бы одна отрицательная координата x_{l0} и при этом не существует ни одного отрицательного коэффициента x_{lj} разложений векторов-условий A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Доказательство. Пусть в результате эквивалентных преобразований системы уравнений-ограничений задачи некоторое уравнение приняло вид

$$x_{l0} = x_{l1}x_1 + x_{l2}x_2 + \ldots + x_{ln}x_n,$$

где $x_{l0} < 0$, а $x_{lj} \geqslant 0 \quad \forall j$.

Ввиду того, что оптимальное решение задачи является допустимым, его координаты должны быть неотрицательными, и оно не может удовлетворять данному уравнению, так как левая и правая части уравнения принимают значения разных знаков. ■

5.6. Алгоритм двойственного симплексного метода

Для того чтобы решить задачу линейного программирования двойственным симплексным методом, необходимо выполнить следующее.

1. Привести задачу к каноническому виду.

2. Найти ПДОР с базисом из единичных векторов, вычислить оценки векторов-условий по базису этого решения, и если они согласуются с признаком оптимальности, то задачу можно решить двойственным симплексным методом.

3. Если ПДОР не имеет отрицательных координат, то оно является допустимым и оптимальным (по теореме 5.3). Решение задачи заканчивается.

4. Если ПДОР имеет отрицательную координату $x_{i0} < 0$, для которой соответствующие коэффициенты разложений всех векторов-условий неотрицательны ($x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall j$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений. Решение задачи прекращается.

5. Если хотя бы одна координата ПДОР отрицательна, т.е. $x_{i0} < 0$, и при этом найдется хотя бы один отрицательный коэффициент x_{ij} разложений векторов-условий A_j по базису решения, то переходят к новому решению, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному. Номер вектора A_k, вводимого в базис, определяется с использованием параметра

$$\theta_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{x_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{x_{lk}} \right|, \qquad x_{lj} < 0.$$

Номер вектора A_r, выводимого из базиса, находится из условия $\min\limits_l \{x_{l0}\theta_{0l}\}$ в задаче на максимум или из условия $\max\limits_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}$ в задаче на минимум.

Далее возвращаются к пункту 3 данного алгоритма.

○ **Пример 1.** Решить двойственным симплексным методом задачу

$$Z(X) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} & Д \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3, & -x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 4, & -x_5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 4, & -x_6 \end{array}\right.$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду, для чего вводим в левые части ограничений-неравенств неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6:

$$Z(X) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Для нахождения ПДОР с базисом из единичных векторов умножаем каждое из ограничений на -1:

$$Z(X) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 = -4, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -4, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Находим начальное ПДОР $X_1 = (0, 0, 0, -3, -4, -4)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

Вычисляем оценки Δ_j разложений векторов-условий по базису ПДОР и заполняем первую симплексную таблицу (табл. 5.5).

Таблица 5.5

				↓-2	-3	-4	0	0	0
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
←	A_4	0	-3	$\boxed{-1}$	-1	-1	1	0	0
	A_5	0	-4	-1	-2	-2	0	1	0
	A_6	0	-4	-2	-1	-2	0	0	1
	Δ_j		0	2	3	4	0	0	0
	θ_1			**2**	3	4	–	–	–
	θ_2			2	$^3/_2$	2	–	–	–
	θ_3			**1**	3	2	–	–	–

Оценки для векторов-условий, не входящих в базис, положительные. Следовательно, условия применимости двойственного симплексного метода к задаче на отыскание максимума выполнены. Начальное ПДОР $X_1 = (0, 0, 0, -3, -4, -4)$ не является оптимальным, так как не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных задачи. Переходим к новому ПДОР с неотрицательными оценками для векторов-условий. Для того чтобы оценки остались неотрицательными, необходимо номер k вектора A_k, вводимого в базис, выбрать из условия

$$\theta_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{x_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{x_{lk}} \right|, \quad x_{lj} < 0.$$

При этом номер l вектора A_r, выводимого из базиса, должен соответствовать отрицательной координате x_l ПДОР. В данном случае отрицательными являются три координаты: $x_4 = -3$, $x_5 = -4$, $x_6 = -4$. Для соответствующих строк (1, 2 и 3-й) симплексной таблицы находим

$$\theta_{01} = \min_j\left\{\left|\frac{2}{-1}\right|, \left|\frac{3}{-1}\right|, \left|\frac{4}{-1}\right|\right\} = \min_j\{2, 3, 4\} = 2 \text{ при } j = 1;$$

$$\theta_{02} = \min_j\left\{\left|\frac{2}{-1}\right|, \left|\frac{3}{-2}\right|, \left|\frac{4}{-2}\right|\right\} = \min_j\{2, \frac{3}{2}, 2\} = \frac{3}{2} \text{ при } j = 2;$$

$$\theta_{03} = \min_j\left\{\left|\frac{2}{-2}\right|, \left|\frac{3}{-1}\right|, \left|\frac{4}{-2}\right|\right\} = \min_j\{1, 3, 2\} = 1 \text{ при } j = 1.$$

Отсюда следует, что оценки не входящих в базис векторов-условий останутся положительными, если при выведении первого вектора базиса A_4 ввести в базис вектор A_1, или при выведении второго вектора базиса A_5 ввести вектор A_2, или при выведении третьего вектора базиса A_6 ввести вектор A_1. Для обеспечения скорейшего достижения экстремума целевой функции задачи на отыскание максимума номер l вектора, выводимого из базиса, определим из условия (5.29)

$$\min_l\{\Delta Z_l\} = \min_l\{x_l\theta_{0l}\}, \quad x_l < 0,$$

где ΔZ_l – приращение целевой функции при введении в базис ПДОР вектора A_r.

Вычисляем

$$\min_l\{\Delta Z_l\} = \min_l\left\{-3\cdot 2, -4\frac{3}{2}, -4\cdot 1\right\} = -6 \quad \text{при } l = 1, 2.$$

Номер вектора A_l определяется неоднозначно. По своему усмотрению выбираем $l = 1$, так как с разрешающим элементом $x_{11} = -1$ легче проводить дальнейшие вычисления, чем с разрешающим элементом $x_{22} = -2$. Приходим ко второму ПДОР (табл. 5.6).

Таблица 5.6

	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2 ↓	A_3	A_4	A_5	A_6
	A_1	–2	3	1	1	1	–1	0	0
←	A_5	0	–1	0	$\boxed{-1}$	–1	–1	1	0
	A_6	0	2	0	1	0	–2	0	1
	Δ_j		–6	0	1	2	2	0	0
	θ_2			–	1	2	2	–	–

Второе ПДОР $X_2 = (3, 0, 0, 0, -1, 2)$ не является оптимальным, так как не удовлетворяет условию неотрицательности. Для второй строки симплексной таблицы (см. табл. 5.6), в которой расположена отрицательная координата $x_5 = -1$ решения X_2, находим

$$\theta_{02} = \min_j \left\{ \left| \frac{1}{-1} \right|, \left| \frac{2}{-1} \right|, \left| \frac{2}{-1} \right| \right\} = \min_j \{1, 2, 2\} = 1 \text{ при } j = 2.$$

Таким образом, из базиса ПДОР выводим вектор A_5 и вводим вектор A_2, соответствующий минимуму отношения $\left| \dfrac{\Delta_j}{x_{2j}} \right|$. Приходим к третьему ПДОР (табл. 5.7).

Таблица 5.7

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	–2	2	1	0	0	–2	1	0
A_2	–3	1	0	1	1	1	–1	0
A_6	0	1	0	0	–1	–3	1	1
Δ_j		–7	0	0	1	1	1	0

Полученное решение $X_3 = (2, 1, 0, 0, 0, 1)$ является оптимальным, так как удовлетворяет признаку оптимальности, т.е. не имеет отрицательных координат.

Ответ: $\max Z(X) = -7$ при $X^* = (2, 1, 0)$. ●

○ **Пример 2.** Решить двойственным симплексным методом задачу

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \end{cases} \quad \begin{array}{|l} Д \\ -x_4 \\ +x_5 \\ -x_6 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Для нахождения ПДОР с базисом из единичных векторов умножим первое и третье ограничения на –1:

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Задача имеет начальное ПДОР $X_1 = (0, 0, 0, -4, 4, -6)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$. Оценки Δ_j разложений векторов-условий A_1, A_2, A_3, не входящих в базис $Б_1$, отрицательны (см. табл. 5.8). Следовательно, данную задачу на отыскание минимума можно решить двойственным симплексным методом. Решение задачи приведено в табл. 5.8.

Таблица 5.8

				2	↓4	↓9	0	0	0
	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	A_4	0	−4	−2	−3	−1	1	0	0
	A_5	0	4	−3	1	1	0	1	0
←	A_6	0	−6	1	$\boxed{-1}$	−2	0	0	1
	Δ_j		0	−2	−4	−9	0	0	0
	θ_1			1	$^4/_3$	9	–	–	–
	θ_3			–	4	$^9/_2$	–	–	–
	A_4	0	14	−5	0	5	1	0	−3
←	A_5	0	−2	−2	0	$\boxed{-1}$	0	1	1
	A_2	4	6	−1	1	2	0	0	−1
	Δ_j		24	−6	0	−1	0	0	−4
	θ_2			3	–	1	–	–	–
	A_4	0	4	−15	0	0	1	5	2
	A_3	9	2	2	0	1	0	−1	−1
	A_2	4	2	−5	1	0	0	2	1
	Δ_j		26	−4	0	0	0	−1	−5

Начальное ПДОР X_1 не является оптимальным, так как не удовлетворяет условиям неотрицательности. Переходим к следующему ПДОР. Необходимо один из векторов A_4 или A_6, которые соответствуют отрицательным координатам $x_4 = -4$, $x_6 = -6$ решения X_1, заменить одним из векторов A_1 или A_2. Номер k вектора A_k, вводимого в базис, выбираем, используя условие (5.27). Находим

$$\theta_{01} = \min_j\left\{\left|\frac{-2}{-2}\right|, \left|\frac{-4}{-3}\right|, \left|\frac{-9}{-1}\right|\right\} = \min_j\left\{1, \frac{4}{3}, 9\right\} = 1 \text{ при } j = 1;$$

$$\theta_{03} = \min_j\left\{\left|\frac{-4}{-1}\right|, \left|\frac{-9}{-2}\right|\right\} = \min_j\left\{4, \frac{9}{2}\right\} = 4 \text{ при } j = 2.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы оценки Δ_j при переходе к новому решению оставались неположительными, необходимо либо вектор A_4 заменить на A_1, либо вектор A_6 на A_2. Для обеспечения скорейшего достижения экстремума целевой функции в задаче на отыскание минимума номер l выводимого из базиса вектора A_l определяется из условия (5.30)

$$\max_l \{\Delta Z_l\} = \max_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}, \quad x_l < 0.$$

Вычисляем

$$\max_l \{\Delta Z_l\} = \max_l \{-(-4)\cdot 1, -(-6)\cdot 4\} = \max_l \{4, 24\} = 24 \text{ при } l = 3.$$

Третий ($l = 3$) вектор базиса A_6 заменяем вектором A_2 ($\theta_{03} = 4$ при $j = 2$). Выполняем преобразование Жордана с разрешающим элементом $a_{32} = -1$, получаем ПДОР $X_2 = (0, 6, 0, 14, -2, 0)$, которое не является оптимальным. Для второй строки второй симплексной таблицы, содержащей отрицательную координату $x_5 = -2$ решения X_2, находим

$$\theta_{02} = \min_j\left\{\left|\frac{-6}{-2}\right|, \left|\frac{-1}{-1}\right|\right\} = \min_j \{3, 1\} = 1 \quad \text{при } j = 3.$$

Выводим из базиса $Б_2 = (A_4, A_5, A_2)$ решения X_2 вектор A_5, вводим вектор A_3 и переходим к ПДОР $X_3 = (0, 2, 2, 4, 0, 0)$, которое является оптимальным, так как удовлетворяет условиям неотрицательности.

Ответ: $\min Z(X) = 26$ при $X^* = (0, 2, 2)$. ●

5.7. Постоптимальный анализ

Оптимальные значения переменных двойственной задачи линейного программирования как объективно обусловленные оценки позволяют сопоставлять затраты на выпуск продукции и доход от ее реализации. Кроме того, благодаря тесной связи между решениями пары двойственных задач характер изменения оптимизируемой функции $Z(X)$ можно определить с помощью компонент оптимального решения двойственной задачи. Они позволяют оценить влияние правых частей системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение линейной функции $Z(X)$, т.е. с помощью оптимальных оценок y_i^* можно исследовать, как «реагирует» $Z(X)$ на изменение ресурсов b_i.

Рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \qquad (5.31)$$

$$G^I_{\text{и.з}} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \qquad G^I_{\text{дв.з}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \right.$$

где $G^I_{\text{и.з}}$ и $G^I_{\text{дв.з}}$ – множества допустимых решений (планов) соответственно исходной и двойственной задачи.

Введем вектор-функцию $M(B) = \max\limits_{x \in G^I_{\text{и.з}},\, B \in B^m} \{Z(X)\}$, где $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Установим зависимость изменений $M(B)$ от изменений компонент вектора B.

❑ **Теорема 5.6.** Если невырожденная задача линейного программирования разрешима, то

$$\frac{\partial M(B)}{\partial b_i} = y_i^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где y_i^* – компоненты оптимального плана $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ двойственной задачи.

Доказательство. Так как задача разрешима и невырожденна, то для фиксированного $B^0 = (b_1^0, b_2^0, \ldots, b_m^0)$ существует решение задачи $X^{0*} = (x_1^{0*}, x_2^{0*}, \ldots, x_m^{0*})$, такое, что для $x_{s_i}^{0*} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ соответствующие векторы $A^*_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ образуют базис оптимального плана, и если обозначить через $A_{X^*} = (A^*_{s_i})$ базисную матрицу, то

$$X^{0*} = A^{-1}_{X^*} B^0 \Rightarrow x^{0*}_{s_i} = \sum_{t=1}^{m} q_{it} b^0_t, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где q_{it} – элементы обратной матрицы.

Теперь покажем, что можно определить вектор B', незначительно отличающийся от B^0, такой, что вектор $X' = A^{-1}_{X^*} B'$ будет являться допустимым планом из множества допустимых решений исходной задачи $G^I_{\text{и.з}}$ и с тем же базисным набором $A^*_{s_i}$.

Рассмотрим разность

$$|X' - X^{0*}| = |A^{-1}_{X^*}(B' - B^0)| \Rightarrow |x'_{s_i} - x^{0*}_{s_i}| = \sum_{t=1}^{m} |q_{it}| \cdot |b'_t - b^0_t|.$$

Выберем $k = \max\limits_{i,t}\{|q_{it}|\}$, $\varepsilon = \min\limits_{s_i}\{x^{0*}_{s_i}\}$ и $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{km}$.

Тогда очевидно, что если B' выбрать из условия $|B' - B^0| < \delta(\varepsilon)$, то вектор X' будет допустимым вектором из множества планов исходной задачи $G^I_{\text{и.з}}$ с тем же базисным набором. Действительно, с одной стороны, $X' = A^{-1}_{X^*}B'$ удовлетворяет условиям-равенствам, а с другой стороны,

$$|x'_{s_i} - x^{0*}_{s_i}| = \sum_{t=1}^{m}|q_{it}|\cdot|b'_t - b^0_t| \leqslant \sum_{t=1}^{m}k\frac{\varepsilon}{km} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\varepsilon = \frac{m\varepsilon}{m} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{0*}_{s_i} - \varepsilon \leqslant x'_{s_i} \leqslant x^{0*}_{s_i} + \varepsilon \Rightarrow x'_{s_i} \geqslant x^{0*}_{s_i} - \min\{x^{0*}_{s_i}\} \geqslant 0,$$

т.е. условие неотрицательности компонент вектора X' тоже выполняется.

Теперь рассмотрим пару двойственных задач

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b'_i y_i \to \min,$$

$$G^{II}_{\text{и.з}}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b'_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n;\end{cases} \qquad G^{II}_{\text{дв.з}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.\right.$$

Очевидно, что первое множество планов исходной задачи $G^I_{\text{и.з}}$ и второе множество $G^{II}_{\text{и.з}}$ не совпадают, а множества планов двойственных задач совпадают, т.е. $G^I_{\text{дв.з}} = G^{II}_{\text{дв.з}}$, так как планы X^{0*} и X' имеют один и тот же базис $(A^*_{s_i})$.

Поэтому, если для получения вектора X' сохранен базис плана X^{0*}, вектору X' соответствует тот же вектор $Y^* \in G^{II}_{\text{дв.з}}$. Для векторов X' и Y^* сохраняются условия второй теоремы двойственности (см. теорему 5.2), и, следовательно, вектор X' является оптимальным планом исходной задачи, но тогда

$$M(B') = F(Y^*) = Z(X') = \max_{x \in G^{II}_{\text{и.з}}}\{Z(X)\}.$$

Таким образом, если выполняются условия $|B' - B^0| < \delta(\varepsilon)$, то максимальное значение линейной формы может быть представлено в виде функции

$$M(B) = \max_{x \in G_{\text{и.з}}}\{Z(X)\} = \sum_{i=1}^{m} b_i y^*_i,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial M(B)}{\partial b_i} = y^*_i. \blacksquare$$

Полученный при доказательстве теоремы результат означает, что оптимальные относительные оценки y^*_i выступают как оценки влияния изменений i-го ресурса на максимальное значение целевой функции.

Если величина b_i представляет собой объем i-го ресурса, то относительная оценка y^*_i показывает, на сколько изменится значение функционала $Z(X^*)$, если объем i-го ресурса изменить на единицу. Эти относительные оценки сохраняют свои значения, пока ресурсы b_i изменяются в тех пределах, при которых сохраняется оптимальный базисный набор векторов. Диапазон изменения компонент вектора B, в котором сохраняется оптимальный базис, называют обычно **областью устойчивости оптимальных оценок.**

Постоптимальный анализ – одна из важных сторон линейного программирования, потому что часто на практике экономическая информация, составляющая большую часть параметров задач линейного программирования, точно не известна, известны лишь пределы, в которых значения параметров могут изменяться. Поэтому очень важен анализ поведения оптимального решения в пределах изменения параметров задачи. Обычно исследуют влияние изменения коэффициентов линейной формы c_j и компонент вектора ограничений b_i.

Для иллюстрации методов постоптимального анализа рассмотрим конкретный пример.

○ **Пример.** Для увеличения содержания витаминов в питании детей для детского сада решено закупить на рынке не менее 25 кг яблок, апельсинов и персиков. Суммарная потребность в витамине A составляет не менее 90 мг, в витамине C – не менее 70 мг. Содержание витаминов в 1 кг соответствующих фруктов приведено в табл. 5.9. Там же указана цена 1 кг соответствующего фрукта.

Сколько фруктов следует закупить, чтобы суммарная стоимость покупки была минимальной?

Таблица 5.9

	Яблоки	Апельсины	Персики
Витамин A, мг/кг	1	6	20
Витамин C, мг/кг	3	3	1
Цена за 1 кг, руб.	8	9	13

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 – количество (масса в кг) закупаемых яблок, апельсинов и персиков соответственно. Тогда математическая модель исходной задачи и двойственной к ней примет вид

$$Z(X) = 8x_1 + 9x_2 + 13x_3 \to \min, \qquad F(Y) = 90y_1 + 70y_2 + 25y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 20x_3 \geqslant 90, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 70, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 25, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ x_3 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 \geqslant 0, \\ y_2 \geqslant 0, \\ y_3 \geqslant 0, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leqslant 8, \\ 6y_1 + 3y_2 + y_3 \leqslant 9, \\ 20y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 13. \end{cases} \quad (5.32)$$

Решая симплексным методом двойственную задачу, получаем оптимальный план исходной задачи $X^* = (12, 13, 0)$, $Z(X^*) = 213$ руб. и оптимальный план двойственной задачи $Y^* = (^1/_5, 0, ^{39}/_5)$ и $F(Y^*) = 213$. ●

Для постоптимального анализа бывает целесообразным иметь последнюю симплексную таблицу. Для нашего примера она приведена в табл. 5.10.

Таблица 5.10

			90	70	25	0	0	0
Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	25	$^{39}/_5$	0	3	1	$^6/_5$	$-^1/_5$	0
A_1	90	$^1/_5$	1	0	0	$-^1/_5$	$^1/_5$	0
A_6	0	$^6/_5$	0	−2	0	$^{14}/_5$	$-^{19}/_5$	1
Δ_j		213	0	5	0	12	13	0

Тогда решение двойственной задачи можно записать в виде: максимизировать $F(Y) = 213 - 5y_2 - 12y_4 - 13y_5$ при условиях

$$\begin{aligned} y_1^* &= {^1/_5} - 0 \cdot y_2 + {^1/_5}y_4 - {^1/_5}y_5, \\ y_3^* &= {^{39}/_5} - 3y_2 - {^6/_5}y_4 + {^1/_5}y_5, \\ y_6^* &= {^6/_5} + 2y_2 - {^{14}/_5}y_4 + {^{19}/_5}y_5. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Соответственно решение исходной задачи запишется в виде: минимизировать $Z(X) = 213 + {^6/_5}x_3 + {^1/_5}x_4 + {^{39}/_5}x_6$ при условиях

$$\begin{aligned} x_1^* &= 12 + {^{14}/_5}x_3 - {^1/_5}x_4 + {^6/_5}x_6, \\ x_2^* &= 13 - {^{19}/_5}x_3 + {^1/_5}x_4 - {^1/_5}x_6, \\ x_5^* &= 5 - 2x_3 + 3x_6. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Заметим, что в результате получено: первое, третье и шестое условия в исходной задаче – закрепленные (активные), т.е. удовлетворяются как равенство, а второе, четвертое и пятое – свободные (не активные), т.е. удовлетворяются как неравенство; соответствующие условия в двойственной задаче – первое, третье и шестое – свободные, а второе, четвертое и пятое – закрепленные.

Рассмотрим методы, позволяющие определить диапазоны устойчивости параметров оптимального решения.

1. Изменение коэффициентов целевой функции. Влияние изменения коэффициентов целевой функции изучают обычно с двух позиций: с позиции сбыта продукции (в этом случае важно знать равновесную цену) и с позиции производства (в этом случае важно знать диапазон возможных изменений коэффициентов целевой функции, в котором полученный оптимальный план сохраняется).

При анализе устойчивости оптимального решения обычно рассматривают изменение коэффициентов при базисных и небазисных переменных.

Если переменная *небазисная*, то изменение коэффициента целевой функции при ней влияет на относительную оценку только этой переменной. Действительно, пусть небазисная переменная x_j $(j \neq s_i)$ и коэффициенты линейной формы изменятся на величину δ, т.е. $\bar{c}_j = c_j + \delta$, тогда

$$\tilde{\Delta}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_{s_i} - \bar{c}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_{s_i} - c_j - \delta = \Delta_j^* - \delta, \tag{5.35}$$

где α_{ij} – коэффициенты разложения вектора A_j по базису оптимального плана $A_X = (A_{s_i})$; Δ_j^* – относительная оценка небазисной переменной x_j на оптимальном плане.

Диапазон устойчивости для коэффициента целевой функции небазисной переменной может быть получен из условия

$$\tilde{\Delta}_j \geqslant 0 \ \Rightarrow \ \Delta_j^* - \delta \geqslant 0 \ \Rightarrow -\infty < \delta \leqslant \Delta_j^*. \tag{5.36}$$

Если переменная *базисная*, то изменение в целевой функции влияет на относительные оценки Δ_j всех небазисных переменных. Пусть базисная переменная $x_{s_i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и коэффициент линейной функции при ней изменится на величину δ, т.е. $\tilde{c}_{s_i} = c_{s_i} + \delta$, тогда относительная оценка j-й небазисной переменной запишется в виде

$$\tilde{\Delta}_j = \sum_{i=1}^{m} (c_{s_i} + e_i\delta)\alpha_{ij} - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}\alpha_{ij} - c_j\right) + \delta\alpha_{ij} = \Delta_j^* + \delta\alpha_{ij}, \tag{5.37}$$

где e_i – единичный вектор.

Диапазон устойчивости для коэффициента целевой функции базисной переменной $x_{s_i} > 0$ может быть получен из условия

$$\tilde{\Delta}_j \geqslant 0 \Rightarrow \Delta_j^* + \delta\alpha_{ij} \geqslant 0.$$

Тогда

$$\max_{j(\alpha_{ij}>0)}\left\{\frac{\Delta_j^*}{-\alpha_{ij}}\right\} \leqslant \delta \leqslant \min_{j(\alpha_{ij}<0)}\left\{\frac{\Delta_j^*}{-\alpha_{ij}}\right\}. \qquad (5.38)$$

Если все $\alpha_{ij} > 0$, то $\delta < \infty$, если все $\alpha_{ij} < 0$, то $\delta > -\infty$.

Заметим, что изменение коэффициентов линейной формы при базисных переменных приводит к изменению величины целевой функции

$$\tilde{Z}(X) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{s_i} x_{s_i} = \sum_{i=1}^{m} (c_{s_i} + \delta) x_{s_i} = Z(X^*) + \delta x_{s_i}.$$

В рассмотренном примере базисными переменными являются переменные x_1, x_2 и дополнительная переменная x_5, а небазисными переменные x_3, x_4 и x_6. Найдем диапазон устойчивости для небазисных и базисных переменных.

Для небазисной переменной x_3

$-\infty < \delta_3 \leqslant \Delta_3 = {}^6/_5.$

Для вычисления диапазона устойчивости базисных переменных исходной задачи рассмотрим оптимальное решение (5.34).

Если рассмотреть коэффициент линейной формы, например, при базисной переменной x_2, то диапазон устойчивости для δ_2 получим следующим образом:

$x_2^* = 13 - {}^{19}/_5 x_3 + {}^1/_5 x_4 - {}^1/_5 x_6,$

$\tilde{\Delta}_3 = {}^6/_5 + \delta_2(-{}^{19}/_5) \geqslant 0,$

$\tilde{\Delta}_4 = {}^1/_5 + \delta_2({}^1/_5) \geqslant 0,$

$\tilde{\Delta}_6 = {}^{39}/_5 + \delta_2(-{}^1/_5) \geqslant 0$

и по формуле (5.38)

$$\max_{j(\alpha_{ij}>0)}\left\{\frac{1/5}{-1/5}\right\} \leqslant \delta_2 \leqslant \min_{j(\alpha_{ij}<0)}\left\{\frac{6/5}{-(-19/5)}, \frac{39/5}{-(-1/5)}\right\},$$

$-1 \leqslant \delta_2 \leqslant {}^6/_{19}.$

Если рассмотреть коэффициент линейной формы для базисной переменной x_1, то диапазон устойчивости для коэффицента δ_1 можно вычислить из условий

$x_1^* = 12 + {}^{14}/_5 x_3 - {}^1/_5 x_4 + {}^6/_5 x_6,$

$\tilde{\Delta}_3 = {}^6/_5 + \delta_1({}^{14}/_5) \geqslant 0,$

$\tilde{\Delta}_4 = {}^1/_5 + \delta_1(-{}^1/_5) \geqslant 0,$

$\tilde{\Delta}_6 = {}^{39}/_5 + \delta_1({}^6/_5) \geqslant 0,$

тогда

$$\max_{j(\alpha_{ij}>0)}\left\{\frac{6/5}{-14/5},\frac{39/5}{-6/5}\right\}\leqslant\delta_1\leqslant\min_{j(\alpha_{ij}<0)}\left\{\frac{1/5}{-(-1/5)}\right\},$$

$$-3/7\leqslant\delta_1\leqslant 1.$$

Это означает, что если цена яблок увеличится на 1 руб. ($\delta_1 = 1$), то оптимальный план $X^* = (12, 13, 0)$ сохранится, но при этом значение целевой функции возрастет на величину $\delta_1 x_1^* = 1 \cdot 12$ руб. Если цена апельсинов уменьшится на 1 руб. ($\delta_2 = -1$), то оптимальный план тоже сохранится, а целевая функция уменьшится на $1 \cdot 13$ руб. Однако если изменить и c_1, и c_2 на величины $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = -1$ одновременно, то оптимальный план не сохранится.

2. Изменение компонент вектора ограничений. Влияние изменения компонент вектора ограничений анализируют обычно с позиций «узких мест» по ресурсам. В этом случае принято рассматривать задачу линейного программирования с системой ограничений, состоящей из условий-неравенств, в каждое из которых введена дополнительная переменная.

Рассмотрим вектор $\bar{B}^{\mathrm{T}} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m)$, где каждая компонента представлена в виде $\bar{b}_i = b_i + \delta_i$. Тогда m-мерная область устойчивости оптимального решения может быть получена из условий

$$A_{X^*}^{-1}\bar{B} \geqslant 0 \Rightarrow A_{X^*}^{-1}(B + \Delta) = X^* + A_{X^*}^{-1}\Delta \geqslant 0,$$

где $A_{X^*}^{-1}$ – обратная матрица оптимального базиса; $\Delta^{\mathrm{T}} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$.

Для нашего примера эта область устойчивости примет вид

$$\begin{pmatrix}-1/5 & 0 & 6/5\\ 1/5 & 0 & -1/5\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}90\\70\\25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/5 & 0 & 6/5\\ 1/5 & 0 & -1/5\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}\geqslant 0;$$

$$\begin{pmatrix}12\\13\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/5 & 0 & 6/5\\ 1/5 & 0 & -1/5\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}\geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases}(1/5)\delta_1 & & -(6/5)\delta_3 \leqslant 12,\\ -(1/5)\delta_1 & & +(1/5)\delta_3 \leqslant 13,\\ & \delta_2 & -3\delta_3 \leqslant 5.\end{cases}$$

В случае когда в системе ограничений более двух условий-неравенств, определение значения δ_i из системы неравенств бывает соизмеримо по трудоемкости с решением задачи линейного программирования с новыми значениями компонент вектора ограничений.

Если необходимо определить оценку диапазона для одной фиксированной компоненты вектора ограничений, достаточно найти оценку диапазона устойчивости для случаев, когда дополнительная переменная базисная или небазисная.

Рассмотрим i-е условие и оценим влияние изменения

$$\bar{b}_i = b_i + \delta.$$

Предположим, что дополнительная переменная i-го ограничения *базисная* (в нашем примере переменная x_5). В этом случае условие, в которое она введена, т.е. второе условие исходной задачи, не является активным (удовлетворяется на оптимальном плане как неравенство).

Решение остается активным в диапазоне $b_i + \delta$, где

$-x^*_{s_i} \leqslant \delta < \infty$, если ограничение типа «$\leqslant$»;

$-\infty < \delta \leqslant x^*_{s_i}$, если ограничение типа «$\geqslant$».

В нашем примере второе условие имеет вид

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 70,$$

его приводят к равенству, вводя дополнительную переменную:

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 70.$$

В оптимальном решении $x^*_5 = 5$, тогда диапазон изменения для δ_2, при котором оптимальное решение сохраняется, таков:

$$-\infty < \delta_2 \leqslant 5.$$

Если дополнительная переменная *небазисная* и равна нулю, то соответствующее ограничение превращается на оптимальном плане в равенство (закрепленное условие), и если изменяется i-я компонента вектора ограничения, то диапазон для δ_i можно определить из условия

$$\max_{i(\alpha_{is}>0)} \left\{ \frac{x_{s_i}}{-\alpha_{is}} \right\} \leqslant \delta_i \leqslant \min_{i(\alpha_{is}<0)} \left\{ \frac{x_{s_i}}{-\alpha_{is}} \right\}.$$

Если все $\alpha_{is} \leqslant 0$, то $\delta > -\infty$, если все $\alpha_{is} > 0$, то $\delta < \infty$.

В нашем примере переменная x_4 небазисная; условие, в которое она входит, имеет вид

$$x_1 + 6x_2 + 20x_3 - x_4 = 90, \quad x_4 = 0.$$

Если $\bar{b}_1 = 90 + \delta_1$, то диапазон для δ_1 определим из условия

$$\max_{i(\alpha_{is}>0)} \left\{ \frac{13}{-(1/5)} \right\} \leqslant \delta_1 \leqslant \min_{i(\alpha_{is}<0)} \left\{ \frac{12}{-(-1/5)} \right\},$$

$$-65 \leqslant \delta_1 \leqslant 60.$$

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Под названием «транспортная задача» объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

6.1. Формулировка транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, ..., a_m. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, ..., b_n. Известны c_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ – стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице (табл. 6.1).

Таблица 6.1

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$, вектора запросов потребителей $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ и матрицы стоимостей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

6.2. Математическая модель транспортной задачи

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij}, $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$ – объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные можно записать в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как произведение $c_{ij}x_{ij}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат. Следовательно, целевая функция имеет вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2,..., n.$$

Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок, математическую модель задачи можно записать так:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{6.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{6.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{6.4}$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.5}$$

Такая задача называется **задачей с правильным балансом**, а ее модель – **закрытой**. Если же это равенство не выполняется, то задача называется **задачей с неправильным балансом**, а ее модель – **открытой**.

Математическая формулировка транспортной задачи такова: найти переменные задачи

$$X = (x_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

удовлетворяющие системе ограничений (6.2), (6.3), условиям неотрицательности (6.4) и обеспечивающие минимум целевой функции (6.1).

Математическая модель транспортной задачи может быть записана в *векторном* виде. Для этого рассмотрим матрицу A системы уравнений-ограничений задачи (6.2), (6.3):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{array} \\ A = & \left(\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right). \end{array} \tag{6.6}$$

Сверху над каждым столбцом матрицы указана переменная задачи, коэффициентами при которой являются элементы соответствующего столбца в уравнениях системы ограничений. Каждый столбец матрицы A, соответствующий переменной x_{ij}, является вектором-условием задачи и обозначается через A_{ij}. Каждый вектор имеет всего $m + n$ координат, и только две из них, отличные от нуля, равны единице. Первая единица вектора A_{ij} стоит на i-м месте, а вторая – на $(m + j)$-м месте, т.е.

$$A_{ij} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Номер координаты} \\ 1 \\ \dots \\ i \\ \dots \\ m \\ m+1 \\ \dots \\ m+j \\ \dots \\ m+n \end{array}; \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A_0 вектор ограничений (правых частей уравнений (6.2), (6.3)) и представим систему ограничений задачи в векторном виде. Тогда математическая модель транспортной задачи запишется следующим образом:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{6.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_{ij} = A_0, \tag{6.8}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{6.9}$$

❍ **Пример.** Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

a_i \ b_j	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

Решение. Введем переменные задачи (матрицу перевозок)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу стоимостей

$$C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 4 & 6 & 10\end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи равна сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X:

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам 1-го поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X – запасам 2-го поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50.$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 20,$$
$$x_{12} + x_{22} = 30,$$
$$x_{13} + x_{23} = 40.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, математическая модель рассматриваемой задачи такова: найти переменные задачи, обеспечивающие минимум функции

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50,\\
x_{11} + x_{21} = 20,\\
x_{12} + x_{22} = 30,\\
x_{13} + x_{23} = 40
\end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \ \bullet$$

6.3. Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи

❑ **Теорема 6.1.** Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

т.е. задача должна быть с правильным балансом.

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть задача имеет допустимое решение

$$X^0 = (x^0_{ij}), \quad x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Докажем, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Подставив X^0 в уравнения системы ограничений (6.2), (6.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m; \qquad \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Просуммируем первую и вторую группы тождеств по отдельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x^0_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Отсюда следует, что задача имеет правильный баланс $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Достаточность. Пусть задача имеет правильный баланс

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M.$$

Докажем, что в этом случае задача имеет оптимальное решение.

Сначала убедимся в том, что область допустимых решений задачи – непустое множество. Проверим, что $X^0 = (x^0_{ij}) = \dfrac{a_i b_j}{M}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ является допустимым решением. Подставив X^0 в левые части уравнений системы ограничений (6.2), (6.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M}\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i, \qquad i = 1, 2, ..., m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{M} M = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. уравнения обращаются в тождества. Очевидно, что X^0 удовлетворяет и условиям неотрицательности.

Далее покажем, что существует оптимальное решение. Учитывая, что стоимости перевозок единиц груза ограничены сверху и снизу $C \leqslant c_{ij} \leqslant D$ $\forall(i, j)$, где C и D – конечные постоянные, можно записать

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cx_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Dx_{ij} \Rightarrow C\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant Z(X) \leqslant D\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM \leqslant Z(X) \leqslant DM.$$

Следовательно, целевая функция ограничена на множестве допустимых решений и, как всякая непрерывная функция, достигает своего наименьшего (а также и наибольшего) значения. Теорема доказана полностью. ■

6.4. Свойство системы ограничений транспортной задачи

❑ **Теорема 6.2.** Ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $N = m + n - 1$.

Доказательство. Как известно из линейной алгебры, для нахождения базиса системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ необходимо составить однородную систему уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \theta.$$

Эту систему с помощью преобразований Жордана приводят к равносильной разрешенной; в базис включают векторы, соответствующие разрешенным неизвестным. Ранг системы векторов равен числу векторов, входящих в базис, т.е. числу разрешенных неизвестных этой системы.

Системе векторов-условий транспортной задачи A_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ соответствует однородная система уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_{ij} = \theta,$$

где $\theta = (0, 0, \ldots, 0)^{\text{т}}$ – нулевой вектор (транспонированный).

Запишем матрицу этой системы (она является также матрицей системы ограничений транспортной задачи):

$$
\begin{array}{c||ccccccccccccc||}
 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \\
\hline
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
m & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
n & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}.
$$

Если к последней строке (уравнению) прибавить $(n - 1)$ строку (уравнение), начиная с $(m + 1)$-й, и вычесть первые m строк, то получится строка, состоящая из нулей. Это значит, что число разрешенных неизвестных в этой системе и ранг r системы векторов-условий не могут быть равны числу $m + n$ уравнений. Следовательно, $r \leqslant m + n - 1$.

Покажем, что найдутся $N = m + n - 1$ линейно независимых векторов-условий. Из векторов-условий задачи выберем следующие: $A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{mn}, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1(n-1)}$ – и убедимся, что они линейно независимы. Для этого составим систему уравнений

$$A_{1n}x_{1n} + A_{2n}x_{2n} + \dots + A_{mn}x_{mn} + A_{11}x_{11} + A_{12}x_{12} + \dots + A_{1(n-1)}x_{1(n-1)} = \theta.$$

Матрица этой системы имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{c||cccccccc||}
 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1(n-1)} \\
\hline
 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}
$$

С помощью элементарных преобразований можно привести ее к единичной. Для этого строки с $(m + 1)$-й до $(m + n - 1)$-й умножим на (-1) и прибавим к первой строке, тогда в ней останется только одна единица, остальные элементы будут нулевыми. После этого первые m строк умножим на (-1) и прибавим к последней строке. В результате в матрице останутся единицы только по диагонали, а последняя строка будет состоять из нулей. Следовательно, система уравнений имеет единственное нулевое решение $x_{1n} = x_{2n} = \dots = x_{mn} = x_{11} = x_{12} = \dots = x_{1(n-1)} = 0$, а система векторов линейно независима. Теорема доказана. ■

6.5. Опорное решение транспортной задачи

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого векторы-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того, что ранг системы векторов условий транспортной задачи равен $m + n - 1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более $m + n - 1$. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно $m + n - 1$, а для вырожденного опорного решения меньше $m + n - 1$.

Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находятся отличные от нуля или базисные нулевые перевозки, называются *занятыми*, остальные – *незанятыми* или *свободными*. Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij}, т.е. стоящая в i-й строке и j-м столбце, имеет номер (i, j). Каждой клетке с номером (i, j) соответствует переменная x_{ij}, которой соответствует вектор-условие A_{ij}.

Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости векторов-условий, соответствующих положительным координатам допустимого решения, вводят понятие цикла. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), ..., (i_k, j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90°. Простейшие циклы изображены на рис. 6.1, где звездочкой отмечены клетки таблицы, включенные в состав цикла.

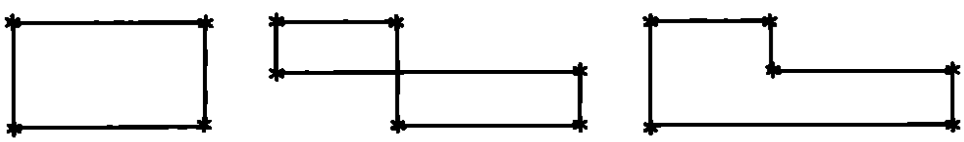


Рис 6.1

❑ **Теорема 6.3** (о взаимосвязи линейной зависимости векторов-условий и возможности образования цикла). **Для того чтобы система векторов-условий транспортной задачи была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы из соответствующих клеток таблицы можно было выделить часть, которая образует цикл.**

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система, состоящая из n векторов

$$A_{i_1 j_1},\ A_{i_1 j_2},\ A_{i_2 j_2},\ \ldots,\ A_{i_k j_1},$$

линейно зависима. Тогда существует такой ненулевой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что справедливо равенство

$$\lambda_1 A_{i_1 j_1} + \lambda_2 A_{i_1 j_2} + \lambda_3 A_{i_2 j_2} + \ldots + \lambda_n A_{i_k j_1} = \theta. \tag{6.10}$$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Вектор $A_{i_1 j_1}$ имеет две равные единице координаты с номерами i_1 и $m + j_1$, остальные координаты равны нулю. В равенство (6.10) должен также входить вектор, у которого одна из этих координат равна единице и который следует умножить на коэффициент $-\lambda_1$, чтобы обеспечить равенство нулю этой координаты в линейной комбинации векторов. Пусть таким вектором будет вектор $A_{i_1 j_2}$. Однако он имеет, кроме того, координату с номером $m + j_2$, равную единице. Следовательно, в равенство (6.10) должен также входить вектор с такой же единичной координатой и т.д.

В выбранной подобным образом последовательности векторов должен найтись вектор $A_{i_k j_1}$, у которого второй индекс совпадает со вторым индексом первого вектора. Данной последовательности векторов соответствует совокупность клеток таблицы транспортной задачи

$$(i_1, j_1),\ (i_1, j_2),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_k, j_1),$$

которая образует цикл.

Достаточность. Пусть из соответствующих векторам A_{ij} клеток (i, j) выбрана последовательность клеток, образующих цикл (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), ..., (i_k, j_1). Нетрудно видеть, что

$$A_{i_1 j_1} - A_{i_1 j_2} + A_{i_2 j_2} - \ldots - A_{i_k j_1} = \theta.$$

Отсюда следует линейная зависимость рассматриваемой системы векторов. Теорема доказана полностью. ■

◇ **Следствие**. Допустимое решение транспортной задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ является опорным тогда и только тогда, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла. ◆

Метод вычеркивания

Метод вычеркивания позволяет проверить, является ли данное решение транспортной задачи опорным.

Пусть допустимое решение транспортной задачи, которое имеет $m + n - 1$ отличную от нуля координату, записано в таблицу. Чтобы данное решение было опорным, векторы-условия, соответствующие положительным координатам, должны быть линейно независимыми. Для этого занятые решением клетки таблицы должны быть расположены так, чтобы из них нельзя было образовать цикл.

Строка или столбец таблицы с одной занятой клеткой не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждой строке или в столбце. Следовательно, можно вычеркнуть сначала либо все строки таблицы, содержащие по одной занятой клетке, либо все столбцы, содержащие по одной занятой клетке, далее вернуться к столбцам (строкам) и продолжить их вычеркивание. Если в результате вычеркиваний все строки и столбцы будут вычеркнуты, значит, из занятых клеток таблицы нельзя выделить часть, образующую цикл, и система соответствующих векторов-условий линейно независима, а решение является опорным. Если же после вычеркиваний останется часть клеток, то эти клетки образуют цикл, система соответствующих векторов-условий линейно зависима, а решение не является опорным.

Ниже приведены примеры «вычеркиваемого» (опорного) и «невычеркиваемого» (неопорного) решений:

$$X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

«вычеркиваемое» «невычеркиваемое»

6.6. Методы построения начального опорного решения

Метод северо-западного угла

Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла. В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1) если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i, $x_{ik} = 0$, $k = 1, 2, ..., n$, $k \neq j$, $b_j' = b_j - a_i$;

2) если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и исключается потребитель с номером j, $x_{kj} = 0$, $k = 1, 2, ..., m$, $k \neq i$, $a_i' = a_i - b_j$;

3) если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ и исключается либо i-й поставщик, $x_{ik} = 0$, $k = 1, 2, ..., n$, $k \neq j$, $b_j' = 0$, либо j-й потребитель, $x_{kj} = 0$, $k = 1, 2, ... m$, $k \neq i$, $a_i' = 0$.

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i, j), подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i, j) требуется поставить перевозку, а i-й поставщик или j-й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно $m + n - 1$ и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

❑ **Теорема 6.4.** Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

Доказательство. Число занятых опорным решением клеток таблицы должно быть равно $N = m + n - 1$. На каждом шаге построения решения по методу северо-западного угла заполняется одна клетка и исключается из рассмотрения одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель) таблицы задачи. Через $m + n - 2$ шага в таблице будет занято $m + n - 2$ клетки. В то же время останутся невычеркнутыми одна строка и один столбец, при этом незанятая клетка одна. При заполнении этой последней клетки число занятых клеток составит

$$m + n - 2 + 1 = m + n - 1.$$

Проверим, что векторы, соответствующие занятым опорным решением клеткам, линейно независимы. Применим метод вычеркивания. Все занятые клетки можно вычеркнуть, если проделать это в порядке их заполнения. ■

Необходимо иметь в виду, что метод северо-западного угла не учитывает стоимость перевозок, поэтому опорное решение, построенное данным методом, может быть далеко от оптимального.

○ **Пример.** Составить начальное опорное решение, используя метод северо-западного угла, для транспортной задачи, исходные данные которой представлены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

a_i \ b_j	150	200	100	100
100	1	3	4	2
250	4	5	8	3
200	2	3	6	7

Решение. Распределяем запасы 1-го поставщика. Так как его запасы $a_1 = 100$ меньше запросов 1-го потребителя $b_1 = 150$, то в клетку (1, 1) записываем перевозку $x_{11} = 100$ и исключаем из рассмотрения поставщика. Определяем оставшиеся неудовлетворенными запросы 1-го потребителя $b'_1 = b_1 - a_1 = 150 - 100 = 50$.

Распределяем запасы 2-го поставщика. Так как его запасы $a_2 = 250$ больше оставшихся неудовлетворенными запросов 1-го потребителя $b'_1 = 50$, то в клетку (2, 1) записываем перевозку $x_{21} = 50$ и исключаем из рассмотрения 1-го потребителя. Определяем оставшиеся запасы 2-го поставщика $a'_2 = a_2 - b'_1 = 250 - 50 = 200$. Так как $a'_2 = b_2 = 200$, то в клетку (2, 2) записываем $x_{22} = 200$ и исключаем по своему усмотрению либо 2-го поставщика, либо 2-го потребителя. Пусть исключили 2-го поставщика. Вычисляем оставшиеся неудовлетворенными запросы 2-го потребителя $b'_2 = b_2 - a'_2 = 200 - 200 = 0$.

Распределяем запасы 3-го поставщика. Так как $a_3 > b'_2$ $(200 > 0)$, то в клетку (3, 2) записываем $x_{32} = 0$ и исключаем 2-го потребителя. Запасы 3-го поставщика не изменились $a'_3 = a_3 - b'_2 = 200 - 0 = 200$. Сравниваем a'_3 и b_3 $(200 > 100)$, в клетку (3, 3) записываем $x_{33} = 100$, исключаем 3-го потребителя и вычисляем $a''_3 = a'_3 - b_3 = 200 - 100 = 100$. Так как $a''_3 = b_4$, то в клетку (3, 4) записываем $x_{34} = 100$. Ввиду того, что задача с правильным балансом, запасы всех поставщиков исчерпаны и запросы всех потребителей удовлетворены полностью и одновременно.

Результаты построения опорного решения приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

a_i \ b_j	150	200	100	100
100	100 ^{1}	^{3}	^{4}	^{2}
250	50 ^{4}	200 ^{5}	^{8}	^{3}
200	^{2}	0 ^{3}	100 ^{6}	100 ^{7}

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток должно быть равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. В табл. 6.4 занято шесть клеток. Применяя метод вычеркивания, убеждаемся, что найденное решение является «вычеркиваемым»:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0^* & 100 & 100 \end{pmatrix}$$

(звездочкой отмечен базисный нуль).

Следовательно, векторы-условия, соответствующие занятым клеткам, линейно независимы и построенное решение является опорным. ●

Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min_{i,j}\{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую $\min_{i,j}\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

❑ **Теорема 6.5.** Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным. ■

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.4.

○ **Пример.** Используя метод минимальной стоимости, построить начальное опорное решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

a_i \ b_j	40	60	80	60
60	1	3	4	2
80	4	5	8	3
100	2	3	6	7

Решение. Запишем отдельно матрицу стоимостей для того, чтобы удобнее было выбирать минимальные стоимости, вычеркивать строки и столбцы:

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

Среди элементов матрицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость $c_{11} = 1$, отмечаем ее кружочком. Это стоимость перевозки груза от 1-го поставщика 1-му потребителю. В соответствующую клетку (1, 1) записываем максимально возможный объем перевозки $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{60, 40\} = 40$ (табл. 6.6).

Таблица 6.6

a_i \ b_j	40	60	80	60
60	40 [1]	[3]	[4]	20 [2]
80	[4]	[5]	40 [8]	40 [3]
100	[2]	60 [3]	40 [6]	[7]

Запасы 1-го поставщика уменьшаем на 40, т.е. $a'_1 = a_1 - b_1 = 60 - 40 = 20$. Исключаем из рассмотрения 1-го потребителя, так как его запросы удовлетворены. В матрице C вычеркиваем 1-й столбец.

В оставшейся части матрицы C минимальной является стоимость $c_{14} = 2$. Максимально возможная перевозка, которую можно осуществить от 1-го поставщика 4-му потребителю, равна $x_{14} = \min\{a'_1, b_4\} = \min\{20, 60\} = 20$. В соответствующую клетку таблицы записываем перевозку $x_{14} = 20$. Запасы 1-го поставщика исчерпаны, исключаем его из рассмотрения. В матрице C вычеркиваем первую строку. Запросы 4-го потребителя уменьшаем на 20, т.е. $b'_4 = b_4 - a'_1 = 60 - 20 = 40$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $c_{24} = c_{32} = 3$. Заполняем одну из двух клеток таблицы (2, 4) или (3, 2). Пусть в клетку (2, 4) записываем $x_{24} = \min\{a_2, b_4\} = \min\{80, 40\} = 40$. Запросы 4-го потребителя удовлетворены, исключаем его из рассмотрения, вычеркиваем четвертый столбец в матрице C. Уменьшаем запасы 2-го поставщика $a'_2 = a_2 - b_4 = 80 - 40 = 40$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $\min\{c_{ij}\} = c_{32} = 3$. Записываем в клетку таблицы (3, 2) перевозку $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{100, 60\} = 60$. Исключаем из рассмотрения 2-го потребителя, а из матрицы C второй столбец. Вычисляем $a'_3 = a_3 - b_2 = 100 - 60 = 40$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $\min\{c_{ij}\} = c_{33} = 6$. Записываем в клетку таблицы (3, 3) перевозку $x_{33} = \min\{a'_3, b_3\} = \min\{40, 80\} = 40$. Исключаем из рассмотрения 3-го поставщика, а из матрицы C третью строку. Определяем $b'_3 = b_3 - a'_3 = 80 - 40 = 40$.

В матрице C остается единственный элемент $c_{23} = 8$. Записываем в клетку таблицы (2, 3) перевозку $x_{23} = 40$.

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток таблицы равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ (см. табл. 6.6). Методом вычеркивания проверяем линейную независимость векторов-условий, соответствующих положительным координатам решения. Порядок вычеркивания показан на матрице X:

$$X = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 40 & 40 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} & \end{array}$$

Решение является «вычеркиваемым» и, следовательно, опорным. ●

6.7. Переход от одного опорного решения к другому

В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решением. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок. Перевозка загружается в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

❑ **Теорема 6.6** (о существовании и единственности цикла). Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Доказательство. Опорное решение занимает $N = m + n - 1$ клеток таблицы, которым соответствуют линейно независимые векторы-условия. Согласно теореме 6.3 ни одна часть занятых клеток не образует цикл. Если же к занятым клеткам присоединить одну свободную, то соответствующие им $m + n$ векторов линейно зависимы, и по той же теореме существует цикл, содержащий эту клетку. Предположим, что таких циклов два $(i_1, j_1), (i_1, j_2), \ldots, (i_k, j_1)$ и $(i_1, j_1), (i_2, j_1), \ldots, (i_1, j_l)$. Тогда, объединив клетки обоих циклов без свободной клетки (i_1, j_1), получим последовательность клеток

$$(i_1, j_2), \ldots, (i_k, j_1), (i_2, j_1), \ldots, (i_1, j_l),$$

которые образуют цикл. Это противоречит линейной независимости векторов-условий, образующих базис опорного решения. Следовательно, такой цикл единственный. ■

Означенный цикл

Цикл называется **означенным**, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным — знак «–» (рис. 6.2).

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «–», на θ.

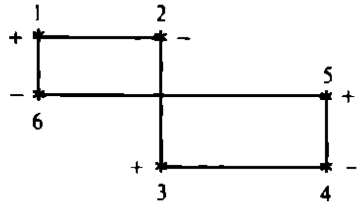


Рис. 6.2

❑ **Теорема 6.7**. Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$ получится опорное решение.

Доказательство. В таблице транспортной задачи, содержащей опорное решение, выберем свободную клетку и отметим ее знаком «+». По теореме 6.6 для этой клетки существует единственный цикл, который содержит часть клеток, занятых опорным решением. Пронумеруем клетки цикла, начиная с клетки, отмеченной знаком «+». Найдем $\theta = \min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$ и осуществим сдвиг по циклу на эту величину.

В каждой строке и в каждом столбце таблицы, входящих в цикл, две и только две клетки, одна из которых отмечена знаком «+», а другая – знаком «–». Поэтому в одной клетке объем перевозки увеличивается на θ, а в другой уменьшается на θ, при этом сумма всех перевозок в строке (или столбце) таблицы остается неизменной. Следовательно, после сдвига по циклу по-прежнему и запасы всех поставщиков вывозятся полностью, и запросы всех потребителей удовлетворяются полностью. Так как сдвиг по циклу осуществляется на величину $\theta = \min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$, то все объемы перевозок будут неотрицательными. Следовательно, новое решение является допустимым.

Если оставить свободной одну из клеток с нулевым объемом перевозки, соответствующих $\min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$, то число занятых клеток будет равно $N = m + n - 1$. Одна клетка загружается (отмеченная знаком «+»), одна – освобождается. Так как цикл единственный, то удаление из него одной клетки разрывает его. Цикл из оставшихся занятых клеток образовать нельзя, соответствующие векторы-условия линейно независимы, а решение является опорным. ■

6.8. Распределительный метод

Один из наиболее простых методов решения транспортных задач – распределительный метод.

Пусть для транспортной задачи найдено начальное опорное решение X_1 и вычислено значение целевой функции на этом решении $Z(X_1)$. По теореме 6.6 для каждой свободной клетки таблицы задачи можно построить единственный цикл, который содержит эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением. Означив этот цикл и осуществив сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min\limits_{\leftarrow\rightarrow}\{x_{ij}\}$, можно получить новое опорное решение X_2.

Определим, как изменится целевая функция при переходе к новому опорному решению. При сдвиге на единицу груза по циклу, соответствующему клетке (l, k), приращение целевой функции Δ_{lk} равно разности двух сумм:

$$\Delta_{lk} = \sum_{«+»} c_{ij} - \sum_{«-»} c_{ij},$$

где $\sum\limits_{«+»} c_{ij}$ – сумма стоимостей перевозок единиц груза в нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+»; $\sum\limits_{«-»} c_{ij}$ – сумма стоимостей перевозок единиц груза в четных клетках цикла, отмеченных знаком «–».

В клетках, отмеченных знаком «+», величины груза прибавляются, что приводит к увеличению значения целевой функции $Z(X)$, а в клетках, отмеченных знаком «–», величины груза уменьшаются, что приводит к уменьшению значения целевой функции.

Если разность сумм для свободной клетки (l, k) меньше нуля, т.е. $\Delta_{lk} < 0$, то перераспределение величины θ по соответствующему циклу приведет к уменьшению значения $Z(X)$ на величину $\theta \cdot \Delta_{lk}$, т.е. опорное решение можно улучшить. Если же величины Δ_{lk}, называемые *оценками*, для всех свободных клеток таблицы транспортной задачи неотрицательны, то значение целевой функции нельзя уменьшить и опорное решение оптимально. Следовательно, **признаком оптимальности** распределительного метода является условие

$$\Delta_{lk} \geqslant 0 \quad \forall\, x_{lk} = 0. \tag{6.11}$$

Для решения транспортной задачи распределительным методом необходимо найти начальное опорное решение. Затем для очередной опорной клетки (l, k) построить цикл и вычислить оценку Δ_{lk}. Если оценка неотрицательная, переходят к следующей свободной клетке. Если же оценка отрицательная, следует осуществить сдвиг по циклу на величину $\theta = \min\limits_{\leftarrow\rightarrow}\{x_{ij}\}$. В результате получится новое опорное решение.

Для каждого нового опорного решения вычисление оценок начинается с первой свободной клетки таблицы. Очередность проверяемых свободных клеток целесообразно устанавливать в порядке возрастания стоимости перевозок c_{ij}, так как решается задача на нахождение минимума.

○ **Пример.** Решить распределительным методом транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 6.7.

Таблица 6.7

a_i \ b_j	20	40	40
20	1	3	2
30	4	5	7
50	6	8	15

Решение. Строим начальное опорное решение методом минимальной стоимости (табл. 6.8):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{3} & 2 \\ \cancel{4} & 5 & \cancel{7} \\ \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{15} \end{pmatrix}.$$

Затем вычисляем значение целевой функции на нем:

$$Z(X_1) = 20 \cdot 1 + 30 \cdot 5 + 10 \cdot 8 + 40 \cdot 15 = 850.$$

Таблица 6.8

a_i \ b_j	20	40	40
20	1; 20 −	3	2; 0 +
30	4; +	5; 30 −	7
50	6	8; 10 +	15; 40 −

Находим цикл для свободной клетки (1, 2) таблицы, он включает клетки (1, 2), (1, 3), (3, 3), (3, 2). Вычисляем оценку $\Delta_{12} = (3 + 15) - (2 + 8) = 8$. Так как $\Delta_{12} = 8 > 0$, переходим к следующей свободной клетке (2, 1). Для нее цикл таков: (2, 1), (1, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 2) (см. табл. 6.8). Оценка $\Delta_{21} = (4 + 2 + 8) - (1 + 15 + 5) = 14 - 21 = -7$. Так как $\Delta_{21} = -7 < 0$, определяем величину груза, перераспределяемого по циклу, $\theta = \underset{«-»}{\min}\{20, 40, 30\} = 20$. Приращение целевой функции $\Delta Z = -7 \cdot 20 = -140$. Получаем новое опорное решение X_2 (табл. 6.9). Значение целевой функции на нем

$$Z(X_2) = 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 8 + 20 \cdot 15 = 710.$$

Таблица 6.9

a_i \ b_j	20	40	40
20	^{1}	^{3}	20 ^{2}
30	20 ^{4}	− 10 ^{5}	+ ^{7}
50	^{6}	+ 30 ^{8}	− 20 ^{15}

Вычисляем $\Delta_{11} = (1 + 15 + 5) - (2 + 8 + 4) = 7 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 15) - (2 + 8) = 8 > 0$, $\Delta_{23} = (7 + 8) - (5 + 15) = -5 < 0$, $\Delta_{31} = (6 + 5) - (4 + 8) = -1 < 0$. Оценки можно вычислять до первой отрицательной. Так как $\Delta_{23} = -5 < 0$, осуществляем сдвиг по циклу (2, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 2) на величину $\theta = \underset{«-»}{\min}\{10, 20\} = 10$. Приращение целевой функции $\Delta Z = -5 \cdot 10 = -50$. Получаем третье опорное решение X_3 (табл. 6.10).

Значение целевой функции на нем

$$Z(X_3) = 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 15 = 660.$$

Таблица 6.10

a_i \ b_j	20	40	40
20	^{1}	^{3}	20 ^{2}
30	20 − ^{4}	^{5}	10 + ^{7}
50	+ ^{6}	40 ^{8}	10 − ^{15}

Вычисляем оценки для свободных клеток: $\Delta_{11} = (1 + 7) - (2 + 4) = 2 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 15) - (2 + 8) = 8 > 0$, $\Delta_{22} = (5 + 15) - (7 + 8) = 5 > 0$, $\Delta_{31} = (6 + 7) - (4 + 15) = -6 < 0$. Так как $\Delta_{31} = -6 < 0$, осуществляем сдвиг по циклу (3, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 3) на величину $\theta = \underset{«-»}{\min}\{20, 10\} = 10$. Приращение целевой функции $\Delta Z = -6 \cdot 10 = -60$. Получаем четвертое опорное решение X_4 (табл. 6.11). Значение целевой функции на нем

$$Z(X_4) = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 40 \cdot 8 = 600.$$

Таблица 6.11

a_i \ b_j	20	40	40
20	^{1}	^{3}	20 ^{2}
30	− 10 ^{4}	^{5} +	20 ^{7}
50	+ 10 ^{6}	40 ^{8} −	^{15}

Вычисляем оценки для свободных клеток $\Delta_{11} = (1 + 7) - (2 + 4) = 2 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 7 + 6) - (2 + 4 + 8) = 2 > 0$, $\Delta_{22} = (5 + 6) - (4 + 8) = -1 < 0$. Так как $\Delta_{22} = -1 < 0$, осуществляем сдвиг по циклу (2, 2), (3, 2), (3, 1), (2, 1) на величину $\theta = \min\limits_{«-»}\{10, 40\} = 10$. Приращение целевой функции $\Delta Z = -1 \cdot 10 = -10$. Получаем пятое опорное решение X_5 (табл. 6.12).

Таблица 6.12

a_i \ b_j	20	40	40
20	^{1}	^{3}	20 ^{2}
30	0 ^{4}	10 ^{5}	20 ^{7}
50	20 ^{6}	30 ^{8}	^{15}

Значение целевой функции на нем

$$Z(X_5) = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 8 = 590.$$

Вычисляем оценки для свободных клеток: $\Delta_{11} = (1 + 7) - (2 + 4) = 2 > 0$, $\Delta_{12} = (3 + 7) - (2 + 5) = 3 > 0$, $\Delta_{33} = (15 + 5) - (7 + 8) = 5 > 0$. Все оценки для свободных клеток положительные, следовательно, решение оптимально.

Ответ: $\min Z(X) = 590$ при $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 20 \\ 20 & 30 & 0 \end{pmatrix}$. ●

6.9. Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений — нахождение оценок свободных клеток.

❑ **Теорема 6.8** (признак оптимальности опорного решения). Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i, $i = 1, 2, ..., m$ и потребителей v_j, $j = 1, 2, ..., n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{6.12}$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0. \tag{6.13}$$

Доказательство. Используем вторую теорему двойственности (см. теорему 5.2). Запишем математическую модель транспортной задачи

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{lll|l} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, 2, ..., m, & & u_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, ..., n, & & v_j \end{array}\right.$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Составим математическую модель двойственной задачи. Обозначим через u_i, $i = 1, 2, ..., m$ переменные (оценки), соответствующие первым m уравнениям системы ограничений, и через v_j, $j = 1, 2, ..., n$ переменные, соответствующие последним n уравнениям. Записываем

$$F(U, V) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max,$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Каждое ограничение двойственной задачи содержит только две переменные, так как каждый вектор-условие A_{ij} системы ограничений исходной задачи имеет только две отличные от нуля (равные единице) координаты, i-ю и $(m + j)$-ю. Условий неотрицательности двойственная задача не имеет, так как все ограничения в исходной задаче – равенства. По второй теореме двойственности (см. теорему 5.2), если при подстановке в систему ограничений двойственной задачи некоторое ограничение выполняется как строгое неравенство $u_i + v_j < c_{ij}$, то соответствующая координата оптимального решения исходной задачи равна нулю, т.е. $x_{ij} = 0$. Если же оптимальным решением ограничение удовлетворяется как равенство $u_i + v_j = c_{ij}$, то соответствующая координата оптимального решения отлична от нуля, т.е. $x_{ij} > 0$. ■

Группа равенств (6.12)

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0$$

используется как система уравнений для нахождения потенциалов. Нетрудно видеть, что эта система могла иметь несколько другой вид, например $-u_i + v_j = c_{ij}$ или $u_i - v_j = c_{ij}$, если перед тем, как записать двойственную задачу, все уравнения одной из групп уравнений исходной задачи умножить на (−1).

Данная система уравнений имеет $m + n$ неизвестных u_i, $i = 1, 2, ..., m$ и v_j, $j = 1, 2, ..., n$. Число уравнений системы, как и число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения, равно $m + n - 1$. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одной из них можно задать значение произвольно, а остальные найти из системы.

Группа неравенств (6.13)

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0$$

используется для проверки оптимальности опорного решения. Эти неравенства удобно записать в виде

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leqslant 0 \quad \text{при } x_{ij} = 0. \qquad (6.14)$$

Числа Δ_{ij} называются *оценками* свободных клеток таблицы или векторов-условий транспортной задачи, не входящих в базис опорного решения. В этом случае **признак оптимальности** можно сформулировать так же, как в симплексном методе (для задачи на минимум): *опорное решение является оптимальным, если для всех векторов-условий (клеток таблицы) оценки неположительные.*

Оценки для свободных клеток транспортной таблицы используются для улучшения опорного решения. С этой целью находят клетку (l, k) таблицы, соответствующую $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Если $\Delta_{lk} \leqslant 0$, то решение оптимальное. Если же $\Delta_{lk} > 0$, то для соответствующей клетки (l, k) строят цикл и улучшают решение, перераспределяя груз $\theta = \min\limits_{\leftrightarrow}\{x_{ij}\}$ по этому циклу.

6.10. Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом

До сих пор рассматривались транспортные задачи с правильным балансом. Однако на практике чаще встречаются задачи с неправильным балансом. Каковы особенности их решения?

1. Пусть суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Очевидно, что в этом случае при составлении оптимального плана перевозок часть запасов поставщиков, равная

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

останется не вывезенной. Поэтому в системе ограничений транспортной задачи первую группу уравнений (6.2) следует заменить неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{6.15}$$

Вторая группа уравнений остается без изменения, так как запросы всех потребителей удовлетворяются полностью. Для приведения к канонической форме в неравенства (6.15) вводят дополнительные переменные $x_{1(n+1)}, x_{2(n+1)}, ..., x_{m(n+1)}$. В результате первые m ограничений задачи принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i(n+1)} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

В целевую функцию дополнительные переменные не входят (входят с нулевыми коэффициентами). Математическая модель задачи принимает вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{i(n+1)} \to \min, \tag{6.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i(n+1)} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{6.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{6.18}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n + 1. \tag{6.19}$$

Запишем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (см. теорему 6.1):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(a_i - x_{i(n+1)}) = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} x_{i(n+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{i(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}.$$

Следовательно, чтобы задача в рассматриваемом случае имела решение, необходимо ввести фиктивного потребителя с запросами b_{n+1}, равными разности суммарных запасов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{i(n+1)} = 0 \ \forall i$.

2. Аналогично в случае, когда суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

часть запросов потребителей, равная

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

останется не удовлетворенной. Поэтому вторая группа уравнений системы ограничений (6.3) транспортной задачи заменяется неравенствами

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

После введения дополнительных переменных $x_{(m+1)1}, x_{(m+1)2}, \ldots, x_{(m+1)n}$ в эти неравенства математическая модель задачи примет вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot x_{(m+1)j} \to \min, \tag{6.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{(m+1)j} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.22}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.23}$$

Для того чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (b_j - x_{(m+1)j}) = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} x_{(m+1)j} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{(m+1)j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}.$$

Следовательно, чтобы в этом случае задача имела решение, необходимо ввести фиктивного поставщика с запасами a_{m+1}, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{(m+1)j} = 0 \quad \forall j$.

Необходимо отметить, что при составлении начального опорного решения в последнюю очередь следует распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запросы фиктивного потребителя, несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

6.11. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортных задач методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть $m + n - 1$) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).

3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0.$$

Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам

$$u_i = c_{ij} - v_j \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{6.24}$$

если известен потенциал v_j, и

$$v_j = c_{ij} - u_i \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{6.25}$$

если известен потенциал u_i.

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

и те оценки, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leqslant 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.

5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}.$$

Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min\limits_{\leftarrow - \rightarrow}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «–», в которой достигается $\min\limits_{\leftarrow - \rightarrow}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$. Далее возвращаются к пункту 3 алгоритма.

○ **Пример.** Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 6.13.

Таблица 6.13

a_i \ b_j	100	100	300	300
100	1	2	3	1
200	2	3	4	6
300	3	4	7	12

Решение. 1. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100 + 200 + 300 = 600, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 100 + 100 + 300 + 300 = 800.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим четвертого, фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 800 - 600 = 200$ и нулевыми стоимостями перевозки единиц груза (табл. 6.14).

2. Составляем начальное опорное решение методом минимальной стоимости (табл. 6.14). Записываем матрицу стоимостей C:

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 2 & 3 & 4 & \cancel{6} \\ \cancel{3} & \cancel{4} & 7 & \cancel{12} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & \;3 & \;5 & \;7 \end{matrix} & \end{array}.$$

Находим в этой матрице наименьшие на каждом шаге стоимости и направляем в клетку, которая соответствует этим стоимостям, максимально допустимые объемы перевозок грузов. При этом исключаем на каждом шаге одного поставщика или одного потребителя. Кружочками в матрице C указаны минимальные элементы, а цифрами рядом со строками и столбцами – порядок исключения из рассмотрения поставщиков и потребителей. Напомним, что запасы фиктивного поставщика вывозятся в последнюю очередь.

Таблица 6.14

a_i \ b_j	100	100	300	300
100	100 [1]	[2]	[3]	[1]
200	0 [2]	100 [3]	100 [4]	[6]
300	[3]	[4]	200 [7]	100 [12]
200	[0]	[0]	[0]	200 [0]

Полученное решение X_1 имеет $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ базисных переменных. Опорное решение является вырожденным, так как одна из его координат равна нулю. Вычислим значение целевой функции на этом опорном решении $Z(X_1) = 100 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 200 \cdot 7 + 100 \cdot 12 + 200 \cdot 0 = 3400$.

3. Для проверки оптимальности опорного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке таблицы транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости ($u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$). Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_3 = 4, \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_3 + v_4 = 12, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Система неопределенная. Одному из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $u_2 = 0$. Остальные потенциалы находятся однозначно:

$u_2 = 0;$

$v_1 = 2 - u_2 = 2 - 0 = 2;$

$v_2 = 3 - u_2 = 3 - 0 = 3;$

$v_3 = 4 - u_2 = 4 - 0 = 4;$
$u_1 = 1 - v_1 = 1 - 2 = -1;$
$u_3 = 7 - v_3 = 7 - 4 = 3;$
$v_4 = 12 - u_3 = 12 - 3 = 9;$
$u_4 = 0 - v_4 = 0 - 9 = -9.$

Значения потенциалов записываем рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей в таблицу (табл. 6.15).

Система уравнений для нахождения потенциалов достаточно проста, обычно ее решают устно, глядя на таблицу задачи, ее занятые клетки и известные потенциалы. Любой неизвестный потенциал, соответствующий занятой клетке, равен находящейся в этой клетке стоимости минус известный потенциал, соответствующий этой же клетке (см. формулы (6.24), (6.25)).

Таблица 6.15

X_1

	a_i \ b_j	$v_1 = 2$: 100	$v_2 = 3$: 100	$v_3 = 4$: 300	$v_4 = 9$: 300
$u_1 = -1$	100	1; − 100	2; $\boxed{0}$	3; $\boxed{0}$	1; + $\boxed{7}$
$u_2 = 0$	200	2; + 0	3; 100	4; − 100	6; $\boxed{3}$
$u_3 = 3$	300	3; $\boxed{2}$	4; $\boxed{2}$	7; + 200	12; − 100
$u_4 = -9$	200	0; −	0; −	0; −	0; 200

4. Проверяем опорное решение X_1 на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки Δ_{ij} для всех незаполненных клеток таблицы (для всех занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$):

$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -1 + 3 - 2 = 0;$ $\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -1 + 4 - 3 = 0;$
$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = -1 + 9 - 1 = 7;$ $\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 9 - 6 = 3;$
$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 2 - 3 = 2;$ $\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 3 - 4 = 2;$
$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -9 + 2 - 0 = -7;$ $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -9 + 3 - 0 = -6;$
$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -9 + 4 - 0 = -5.$

Положительные оценки записываем в левые нижние углы соответствующих клеток таблицы, вместо отрицательных ставим знак «—».

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеются положительные оценки.

5. Переходим к новому опорному решению. Находим клетку таблицы, которой соответствует наибольшая положительная оценка: $\max\limits_{\Delta_{ij}} \{\Delta_{ij}\} = \max\{7, 3, 2, 2\} = 7$ для клетки (1, 4). Для этой клетки строим цикл. Ставим в нее знак «+», присоединяем ее к занятым клеткам и применяем метод вычеркивания. После проведения вычеркиваний в таблице остаются только образующие цикл клетки. Цикл изображен в табл. 6.15. На основании теоремы 6.6 такой цикл единственный. В угловых точках цикла расставляем поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке (1, 4). В клетки, отмеченные знаком «+», прибавляется груз θ, а из клеток, отмеченных знаком «–», вычитается такой же по величине груз. Определяем величину груза θ, перераспределяемого по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–», $\theta = \min\limits_{«-»}\{100, 100, 100\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем второе опорное решение X_2 (табл. 6.16).

Таблица 6.16

X_2		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 2$
	a_i \ b_j	100	100	300	300
$u_1 = 1$	100	1 0	2 $\boxed{0}$	3 $\boxed{0}$	1 100
$u_2 = 0$	200	2 100	3 – 100	4 – +	6 –
$u_3 = 3$	300	3 $\boxed{2}$	4 0 $\boxed{2}$ +	7 300 –	12 –
$u_4 = -2$	200	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{2}$	0 200

В данном случае минимум перевозок в клетках, отмеченных знаком «–», достигался сразу в трех клетках, поэтому для того, чтобы число занятых клеток опорного решения было по-прежнему равно $m + n - 1 = 7$, в клетки с номерами (1, 1) и (2, 3) поставлены нулевые базисные перевозки. Следует освобождать клетку с большей стоимостью перевозки, т.е. клетку (3, 4).

Вычисляем значение целевой функции на втором опорном решении:

$$Z(X_2) = 0 \cdot 1 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 300 \cdot 7 + 200 \cdot 0 = 2700.$$

6. Проверяем второе опорное решение X_2 на оптимальность. Находим потенциалы и оценки. Они приведены в табл. 6.16. Решение не является оптимальным, так как имеются положительные оценки $\Delta_{31} = 2$, $\Delta_{32} = 2$, $\Delta_{42} = 1$ и $\Delta_{43} = 2$. Наибольшая из них равна 2 одновременно для трех клеток (3, 1), (3, 2) и (4, 3). В одну из них, пусть в клетку (3, 2), ставим знак «+». Для этой клетки строим цикл (см. табл. 6.16) и находим величину груза для перераспределения по циклу: $\theta = \underset{\leftrightarrow}{\min}\{100, 300\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем третье опорное решение X_3 (табл. 6.17).

Таблица 6.17

X_3		$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$
	a_i \ b_j	100	100	300	300
$u_1 = 0$	100	^{1} 0	^{2} –	^{3} $\boxed{0}$	^{1} 100
$u_2 = 1$	200	^{2} 100 –	^{3} –	^{4} 100 +	^{6} –
$u_3 = 4$	300	^{3} + $\boxed{2}$	^{4} 100	^{7} – 200	^{12} –
$u_4 = -1$	200	^{0} $\boxed{0}$	^{0} –	^{0} $\boxed{2}$	^{0} 200

Вычисляем значение целевой функции на третьем опорном решении:

$$Z(X_3) = 0 \cdot 1 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 4 + 100 \cdot 4 + 200 \cdot 7 + 200 \cdot 0 = 2500.$$

7. Проверяем третье опорное решение на оптимальность. Находим потенциалы и оценки. Они приведены в табл. 6.17. Решение не является оптимальным, так как имеются положительные оценки $\Delta_{31} = 2$ и $\Delta_{43} = 2$. В одну из клеток с положительной оценкой, пусть в клетку (3, 1), ставим знак «+». Для этой клетки строим цикл (см. табл. 6.17) и находим величину груза для перераспределения по циклу: $\theta = \underset{\leftrightarrow}{\min}\{100, 200\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем четвертое опорное решение X_4 (табл. 6.18).

Таблица 6.18

X_4		$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 7$	$v_4 = 3$
	a_i \ b_j	100	100	300	300
$u_1 = -2$	100	1 0 −	2 $\boxed{0}$	3 $\boxed{2}$	1 100 +
$u_2 = -3$	200	2 –	3 –	4 200	6 –
$u_3 = 0$	300	3 100 +	4 100	7 100 −	12 –
$u_4 = -3$	200	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{1}$	0 + $\boxed{4}$	0 200 −

Вычисляем значение целевой функции на четвертом опорном решении:

$Z(X_4) = 0 \cdot 1 + 100 \cdot 1 + 200 \cdot 4 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 100 \cdot 7 + 200 \cdot 0 = 2300.$

8. Проверяем решение X_4 на оптимальность. Находим потенциалы и оценки. Они приведены в табл. 6.18. Положительными являются оценки $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{42} = 1$ и $\Delta_{43} = 4$. Для клетки (4, 3), которой соответствует наибольшая оценка, строим цикл (см. табл. 6.18) и находим величину груза для перераспределения по циклу: $\theta = \min\limits_{«-»}\{200, 0, 100\} = 0$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 0$. Получаем пятое опорное решение X_5 (табл. 6.19).

Таблица 6.19

X_5		$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 7$	$v_4 = 7$
	a_i \ b_j	100	100	300	300
$u_1 = -6$	100	1 –	2 –	3 –	1 100
$u_2 = -3$	200	2 –	3 –	4 200	6 –
$u_3 = 0$	300	3 100	4 100	7 100	12 –
$u_4 = -7$	200	0 –	0 –	0 0	0 200

Решение X_5 является оптимальным, так как все оценки отрицательные. Значение целевой функции $Z(X_5) = Z(X_4) = 2300$.

Ответ: $\min Z(X) = 2300$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 200 & 0 \\ 100 & 100 & 100 & 0 \end{pmatrix}$. ●

6.12. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером l к потребителю с номером k. Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geqslant a$; 2) $x_{lk} \leqslant b$, где a и b – постоянные величины.

1. Если $x_{lk} \geqslant a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы l-го поставщика и запросы k-го потребителя на величину a (зарезервировать перевозку $x_{lk} = a$). После решения задачи в оптимальном решении следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a.

2. Если $x_{lk} \leqslant b$, то необходимо вместо k-го потребителя с запросами b_k ввести двух других потребителей. Один из них с номером k должен иметь запросы $b_k' = b$, а другой с номером $n + 1$ – запросы $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M ($M >> 1$). После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n + 1)$-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок k-го потребителя. Так как $c_{l(n+1)} = M$ – самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l, n + 1)$ останется пустой, $x_{l(n+1)} = 0$ и объем перевозки x_{lk} не превзойдет b.

○ **Пример.** Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 6.20, при дополнительных условиях: объем перевозки груза от 1-го поставщика 2-му потребителю должен быть не менее 100 единиц ($x_{12} \geqslant 100$), а от 3-го 1-му не более 200 единиц ($x_{31} \leqslant 200$).

Таблица 6.20

a_i \ b_j	500	400	300
200	1	5	6
300	2	6	7
500	3	7	8

Р е ш е н и е. Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки x_{12} был не менее 100 единиц, при решении задачи будем предполагать, что запасы 1-го поставщика a_1 и запросы 2-го потребителя b_2 меньше фактических на 100 единиц. После получения оптимального решения объем перевозки x_{12} увеличим на 100 единиц.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{31} \leqslant 200$, вместо 1-го потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запросы $b_1 = 200$ единиц и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны $b_4 = 500 - 200 = 300$ единиц и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у 1-го потребителя, за исключением c_{34}, которую примем равной сколь угодно большому числу M, т.е. $c_{34} = M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для 4-го потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для 1-го потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь вид, представленный в табл. 6.21.

Таблица 6.21

a_i \ b_j	200	300	300	300
100	1	5	6	1
300	2	6	7	2
500	3	7	8	M

Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия существования решения задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 100 + 300 + 500 = 900;$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 200 + 300 + 300 + 300 = 1100.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 900 = 200$ (табл. 6.22).

Составляем начальное опорное решение X_1 методом минимальной стоимости. Записываем матрицу стоимостей C:

$$C = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{6} & \cancel{7} & 2 \\ \cancel{3} & 7 & 8 & \cancel{M} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & \end{matrix} & \end{array}.$$

Кружочками в матрице C отмечены минимальные элементы, а цифрами рядом со строками и столбцами – порядок исключения из рассмотрения поставщиков и потребителей.

Таблица 6.22

X_1		$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$
	a_i \ b_j	200	300	300	300
$u_1 = 0$	100	1 100	5 –	6 –	1 $\boxed{0}$
$u_2 = 1$	300	2 100 –	6 –	7 –	2 200 +
$u_3 = 7$	500	3 $\boxed{5}$ +	7 300	8 200 –	M –
$u_4 = -1$	200	0 $\boxed{0}$	0 –	0 100 +	0 100 –

Полученное решение X_1 имеет $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении:

$$Z(X_1) = 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 200 \cdot 2 + 300 \cdot 7 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 4400.$$

Для проверки оптимальности опорного решения находим потенциалы. Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 7, \\ u_3 + v_3 = 8, \\ u_4 + v_3 = 0, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Так как число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то одному из потенциалов можно задать значение произвольно: пусть $u_1 = 0$. Остальные потенциалы однозначно находятся из системы уравнений:

$u_1 = 0;$

$v_1 = 1 - u_1 = 1 - 0 = 1;$

$u_2 = 2 - v_1 = 2 - 1 = 1;$
$v_4 = 2 - u_2 = 2 - 1 = 1;$
$u_4 = 0 - v_4 = 0 - 1 = -1;$
$v_3 = 0 - u_4 = 0 - (-1) = 1;$
$u_3 = 8 - v_3 = 8 - 1 = 7;$
$v_2 = 7 - u_3 = 7 - 7 = 0.$

Значения потенциалов приведены в табл. 6.22. Находим оценки для свободных клеток таблицы:

$\Delta_{12} = 0 + 0 - 5 = -5 < 0;$ $\Delta_{13} = 0 + 1 - 6 = -5 < 0;$ $\Delta_{14} = 0 + 1 - 1 = 0;$
$\Delta_{22} = 1 + 0 - 6 = -5 < 0;$ $\Delta_{23} = 1 + 1 - 7 = -5 < 0;$ $\Delta_{31} = 7 + 1 - 3 = 5 > 0;$
$\Delta_{34} = 7 + 1 - M < 0;$ $\Delta_{41} = -1 + 1 - 0 = 0;$ $\Delta_{42} = -1 + 0 - 0 = -1 < 0.$

Опорное решение неоптимальное, так как имеется положительная оценка $\Delta_{31} = 5$ для клетки (3, 1). Отмечаем эту клетку знаком «+». Находим цикл для улучшения опорного решения (см. табл. 6.22). Определяем величину груза для перераспределения по циклу $\theta = \min\limits_{«-»}\{100, 200, 100\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем второе опорное решение X_2 (табл. 6.23).

Таблица 6.23

X_2	$a_i \backslash b_j$	$v_1 = 1$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$
		200	300	300	300
$u_1 = 0$	100	100 (1)	(5) $\boxed{0}$	(6) $\boxed{0}$	(1) $\boxed{0}$
$u_2 = 1$	300	0 (2)	(6) $\boxed{0}$	(7) $\boxed{0}$	300 (2)
$u_3 = 2$	500	100 (3)	300 (7)	100 (8)	(M) –
$u_4 = -6$	200	(0) –	(0) –	200 (0)	(0) –

В табл. 6.23 также записаны потенциалы и оценки для свободных клеток. Решение X_2 оптимальное, так как все оценки неположительные. Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки x_{12} на 100 единиц и объединим объемы перевозок 4-го потребителя с объемами перевозок 1-го потребителя.

Получим

$$X^* = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}.$$

Вычислим значение целевой функции на этом решении:

$Z(X^*) = 100 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 7 + 100 \cdot 8 = 4400.$

Ответ: $\min Z(X) = 4400$ при $X^* = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}$. ●

В некоторых задачах требуется запретить перевозки от отдельных поставщиков отдельным потребителям. В таких случаях либо зачеркивают клетку таблицы транспортной задачи, либо назначают соответствующую этой клетке стоимость перевозки единицы груза сколь угодно большой, равной $M >> 1$. В остальном задача решается обычным способом. Для разрешимости данной задачи необходимо существование начального опорного решения.

6.13. Транспортная задача по критерию времени

Задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной транспортной задаче, имеется m поставщиков с запасами однородного груза в количестве $a_1, a_2, ..., a_m$ и n потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объеме $b_1, b_2, ..., b_n$. Известно t_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ – время, за которое груз доставляется от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и наибольшее время доставки всех грузов является минимальным.

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим x_{ij} – объем перевозимого груза от i-го поставщика j-му потребителю. Система ограничений задачи не отличается от системы ограничений обычной транспортной задачи. Пусть $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ – некоторое опорное решение задачи. Запишем целевую функцию задачи. Обозначим через $T(X)$ наибольшее значение элементов матрицы $T = (t_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, соответствующих клеткам таблицы, занятым опорным решением: $T(X) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}$. Таким образом, за время $T(X)$ план перевозок будет выполнен полностью. Математическая модель имеет вид

$$T(X) = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} \to \min, \tag{6.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.27}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.28}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.29}$$

Задача решается в следующем порядке. Находится начальное опорное решение X_1. Определяется значение целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_1k_1}$. Все свободные клетки, которым соответствуют значения $t_{ij} > T(X_1)$, исключаются из рассмотрения (перечеркиваются). Занимать эти клетки нецелесообразно, так как повысится значение целевой функции. Чтобы понизить ее значение, необходимо освободить клетку (l_1, k_1), в которой t_{ij} достигает максимума. Для этого строят так называемые *разгрузочные циклы*, которые могут включать в свой состав несколько свободных клеток. В каждом разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой клетки (l_1, k_1), расставляются поочередно знаки «–» и «+» и осуществляется сдвиг на величину $\theta = \min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$. Если удается эту клетку разгрузить, то она исключается из рассмотрения (зачеркивается). Получается новое опорное решение X_2, на котором значение целевой функции меньше, чем на X_1. Далее снова пытаются разгрузить клетку, соответствующую $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{l_2k_2}$. Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую клетку не исчезнет.

○ **Пример.** Найти минимальное время на осуществление всех перевозок для задачи, исходные данные которой приведены в табл. 6.24.

Таблица 6.24

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	10 20	6	3	2
30	5	– 8 30	7	+ 4
50	2	+ 4	5 40	– 12 10
50	~~15~~	5	9	4 50

Таблица 6.25

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	– 10 20	6 +	3	2
30	+ 5	8 20 –	7	4 10
50	2	4 10	5 40	~~12~~
50	~~15~~	5	9	4 50

Р е ш е н и е. Составим начальное опорное решение X_1 по методу северо-западного угла (см. табл. 6.24). Базисные нули не записываем. Максимум целевой функции $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{10, 8, 5, 12, 4\} = 12$ достигается в клетке (3, 4). Перечеркнем клетку (4, 1), в которой время доставки груза $t_{41} = 15$ больше $T(X_1) = 12$.

Для улучшения решения разгрузим клетку (3, 4) с помощью цикла (3, 4), (2, 4), (2, 2), (3, 2) (см. табл. 6.24). Означим цикл, найдем $\theta = \min\limits_{\leftarrow-\rightarrow}\{10, 30\} = 10$. Осуществив сдвиг по циклу, получим второе опорное решение X_2 (табл. 6.25). Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{10, 8, 4, 5, 4\} = 10$ достигается в клетке (1, 1). Перечеркнем клетку (3, 4), так как время $t_{34} = 12$ больше, чем $T(X_2) = 10$. Разгрузим клетку (1, 1) с помощью цикла (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1). Означим цикл, найдем $\theta = \min\limits_{\leftarrow-\rightarrow}\{20, 20\} = 20$. Осуществив сдвиг по циклу, получим третье опорное решение X_3 (табл. 6.26).

Т а б л и ц а 6.26

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	$\cancel{10}$	6 20 −	3 +	2
30	5 20	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	4 10
50	2	4 + 10	5 40 −	$\cancel{12}$
50	$\cancel{15}$	5	$\cancel{9}$	4 50

Т а б л и ц а 6.27

a_i \ b_j	20	30	40	60
20	$\cancel{10}$	$\cancel{6}$	3 20	2
30	5 20	$\cancel{8}$	$\cancel{7}$	4 10
50	2	4 30	5 20	$\cancel{12}$
50	$\cancel{15}$	$\cancel{5}$	$\cancel{9}$	4 50

Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_3) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{6, 5, 4, 4, 5, 4\} = 6$ и достигается в клетке (1, 2). Перечеркнем клетки (1, 1), (2, 2), (2, 3) и (4, 3): в них время $t_{11} = 10$, $t_{22} = 8$, $t_{23} = 7$ и $t_{43} = 9$ больше, чем $T(X_3) = 6$. Разгрузим клетку (1, 2) с помощью цикла (1, 2), (1, 3), (3, 3), (3, 2). Означим цикл, найдем $\theta = \min\limits_{\leftarrow-\rightarrow}\{20, 20\} = 20$. Осуществив сдвиг по циклу, получим четвертое опорное решение X_4 (табл. 6.27). Максимум целевой функции на этом опорном решении $T(X_4) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{5, 4, 4, 5, 4\} = 5$ и достигается в клетках (2, 1) и (3, 3). Перечеркнем клетки (1, 2) и (4, 2), в которых время перевозок не менее $t_{21} = 5$. С помощью оставшихся невычеркнутых клеток разгрузить клетки (2, 1) и (3, 3) не удается, поэтому X_4 является оптимальным решением.

Ответ: $\min T(X) = 5$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$. ●

6.14. Применение транспортной задачи для решения экономических задач

Задача о размещении производства с учетом транспортных затрат

Имеется (проектируется) m пунктов производства с объемами производства $a_1, a_2, ..., a_m$ и n пунктов потребления с объемами потребления $b_1, b_2, ..., b_n$. Затраты на производство единицы продукции в каждом i-м пункте производства известны и равны c_i', $i = 1, 2, ..., m$. Стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го производителя каждому j-му потребителю известны и равны c_{ij}'', $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$. Суммарные объемы производства превосходят суммарные объемы потребления. Требуется составить план сокращения (размещения) производства, обеспечивающий минимальные производственно-транспортные затраты.

Задача решается как транспортная задача, матрица стоимостей которой составляется как сумма матриц:

$$C = (c_{ij}) = (c_i' + c_{ij}''), \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Вводится фиктивный потребитель. Затем задача решается обычным способом. Далее сокращается производство в пунктах, продукция которых в оптимальном плане перевозок поставляется фиктивному потребителю.

Задача о назначениях, или проблема выбора

Имеется m групп людей (станков) численностью $a_1, a_2, ..., a_m$, которые должны выполнять n видов работ (операций) объемом $b_1, b_2, ..., b_n$. Известна производительность каждой i-й группы людей (станков) при выполнении каждого j-го вида работ (операций) c_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Требуется так распределить людей (станки) для выполнения работ (операций), чтобы суммарный объем производства работ (операций) был максимальным.

Составим математическую модель данной задачи по аналогии с транспортной задачей. Обозначим x_{ij} – число людей (станков) i-й группы, занятых j-м видом работ (операций). Запишем математическую модель

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max, \tag{6.30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{6.31}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{6.32}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{6.33}$$

Для использования алгоритмов, разработанных для транспортной задачи, можно перейти от нахождения максимума к нахождению минимума. Для этого нужно умножить коэффициенты целевой функции на (–1), тогда целевая функция будет иметь вид

$$Z(X) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Можно также изменить критерий оптимальности. Например, вместо $\Delta_{ij} \leqslant 0 \quad \forall(i, j)$ использовать новый критерий оптимальности $\Delta_{ij} \geqslant 0$ $\forall(i, j)$.

7. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

При рассмотрении целого ряда задач финансового менеджмента и бизнеса необходимо учитывать требование целочисленности используемых переменных. Такие задачи называются *задачами целочисленного программирования*.

Задача целочисленного программирования может быть сформулирована следующим образом: найти максимум или минимум функции

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.3}$$

а также при дополнительном условии

$$x_j \text{ – целые числа.} \tag{7.4}$$

В некоторых случаях условие (7.4) распространяется только на часть переменных, такие задачи называются *частично целочисленными*.

Для решения задач целочисленного программирования разработаны специальные методы. К ним относятся метод отсечений (метод Гомори) и метод ветвей и границ.

7.1. Метод Гомори

В основе метода Гомори заложена идея, состоящая в том, что сначала решается задача линейного программирования (7.1)–(7.3) без учета условий целочисленности. Если полученное таким образом решение целочисленное, то оно принимается за оптимальный план задачи (7.1)–(7.4). Если решение нецелочисленное, то система ограничений дополняется условием, которое отсекает от множества планов задачи нецелочисленный оптимальный план, но при этом сохраняет целочисленные вершины множества планов. Затем решается задача линейного программирования с дополнительным условием. Если полученное таким образом решение целочисленное, то оно оптимально и для задачи (7.1)–(7.4). Если же и после этого не для всех переменных выполняется условие целочисленности, то вводится новое условие-отсечение. Условия-отсечения выбираются таким образом, чтобы за конечное число шагов прийти к целочисленному решению, если оно у данной задачи существует. Один из алгоритмов построения таких условий-отсечений был предложен Гомори.

Рассмотрим указанный алгоритм. Пусть получено решение задачи (7.1)–(7.3) без учета целочисленности и пусть в строке r симплексной таблицы с оптимальным решением содержится нецелочисленная компонента опорного плана x_{r0}. В этом случае к условиям (7.1)–(7.3) добавляют условие, порожденное строкой r.

Для составления этого условия-отсечения используем r-е уравнение из последней симплексной таблицы, содержащей оптимальное решение,

$$a_{r0} = x_r + \sum_{j=m+1}^{n} a_{rj} x_j. \tag{7.5}$$

Далее введем понятие целой и дробной частей чисел a_{r0} и a_{rj}, для чего запишем эти числа в виде

$$a_{r0} = [a_{r0}] + q_r, \quad 0 < q_r < 1,$$

$$a_{rj} = [a_{rj}] + q_{rj}, \quad 0 < q_{rj} < 1, \quad j = m + 1, \ldots, n.$$

Здесь $[a_{r0}]$ и $[a_{rj}]$ – целые части, а q_r, q_{rj} – дробные части чисел a_{r0} и a_{rj}.

Например, $^{37}/_3 = 12 + {}^1/_3$, так как $[^{37}/_3] = 12$, а $-^8/_3 = -3 + {}^1/_3$, так как $[-^8/_3] = -3$.

Из уравнения (7.5) найдем x_r:

$$x_r = a_{r0} - \sum_{j=m+1}^{n} a_{rj} x_j.$$

Теперь числа a_{r0} и a_{rj} заменим суммами целых и дробных частей:

$$x_r = [a_{r0}] - \sum_{j=m+1}^{n} [a_{rj}] x_j + q_r - \sum_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j.$$

Предположим, что все x_j – целые числа. Тогда разность

$$[a_{r0}] - \sum_{j=m+1}^{n} [a_{rj}] x_j$$

является целым числом.

Чтобы оказалось целым числом и x_r, необходима целочисленность разности

$$q_r - \sum_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j. \tag{7.6}$$

Но $0 < q_r < 1$, $\quad 0 < q_{rj} < 1$, $\quad$ а $\sum\limits_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j > 0$.

Если допустить, что разность (7.6) больше нуля, то

$$q_r > \sum_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j.$$

Однако в этом случае разность (7.6) не может быть целым числом. Следовательно, условие целочисленности разности может быть обеспечено только неравенством

$$q_r - \sum_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j \leqslant 0. \tag{7.7}$$

Условие (7.7) и является добавочным ограничением в задаче линейного программирования. Для использования его в симплексном методе требуется ввести дополнительную переменную $x_{n+1} \geqslant 0$, после чего неравенство превращается в уравнение

$$q_r - \sum_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j + x_{n+1} = 0.$$

Обычно это ограничение записывают в следующем виде:

$$-\sum_{j=m+1}^{n} q_{rj} x_j + x_{n+1} = -q_r. \tag{7.8}$$

Последовательно добавляя новые ограничения к решению очередных задач, получаем целочисленные координаты оптимального плана задачи (7.1)–(7.4), если только не выясняется в какой-либо момент, что текущая задача не имеет решения. Это означало бы отсутствие целочисленного решения задачи (7.1)–(7.4).

○ **Пример 1.** Найти оптимальный целочисленный план задачи

$$Z(X) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0, \quad x_j$ – целые числа, $j = 1, 2, 3, 4.$

Решение. Пошаговое решение задачи приведено в табл. 7.1.

Таблица 7.1

				1	−3	5	2	
Шаг	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	
0	A_2	−3	15	1	1	1	0	
	A_4	2	8	2	0	$\boxed{3}$	1	
	Δ_j		−29	0	0	−2	0	A_5
1	A_2	−3	$^{37}/_3$	$^1/_3$	1	0	$-^1/_3$	0
	A_3	5	$^8/_3$	$^2/_3$	0	1	$^1/_3$	0
	Δ_j		$-^{71}/_3$	$^4/_3$	0	0	$^2/_3$	0
	A_5	0	$-^2/_3$	$-^2/_3$	0	0	$\boxed{-^1/_3}$	1

Окончание табл. 7.1

Шаг	*Б*	$C_б$	A_0	A_1 (1)	A_2 (−3)	A_3 (5)	A_4 (2)	A_5
2	A_2	−3	13	1	1	0	0	−1
	A_3	5	2	0	0	1	0	1
	A_4	2	2	2	0	0	1	−3
	Δ_j		−25	0	0	0	0	2

Оптимальный план задачи без условия целочисленности $\bar{X} = (0,\ ^{37}/_3,\ ^{8}/_3,\ 0)$. Для дальнейшего решения задачи к таблице оптимального плана добавлено условие

$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \leqslant -\frac{2}{3}.$$

Номер индекса *r* выбран из условия большей дробной части компоненты a_{i0}. Имеем $r = 2$; $j = 0$: $[^8/_3] = 2$, $2 - {}^8/_3 = -{}^2/_3$; $j = 1$: $[^2/_3] = 0$, $0 - {}^2/_3 = -{}^2/_3$; $j = 2$: $[0] = 0$, $0 - 0 = 0$; $j = 3$: $[0] = 0$, $0 - 0 = 0$; $j = 4$: $[^1/_3] = 0$, $0 - {}^1/_3 = -{}^1/_3$. Сделав один шаг (в общем случае для получения целочисленного решения одной итерации, конечно, недостаточно) метода последовательного уточнения оценок (см. параграф 5.5), получили оптимальный план целочисленной задачи $X^* = (0, 13, 2, 2)$. ●

Трудоемкость решения целочисленной задачи обусловлена вводом новых добавочных ограничений и новых переменных. В связи с этим необходимо придерживаться следующего правила, позволяющего при определенных условиях сокращать текущие таблицы. Дополнительная переменная x_{n+1} вводится в процессе решения с добавочным ограничением как базисная переменная очередного псевдоплана и сразу, на этой же итерации, переводится в число небазисных компонент. Если на дальнейших итерациях, согласно правилу преобразования таблицы, переменная x_{n+1} снова окажется базисной, ее значение станет несущественным для основных переменных задачи, так что строка и столбец текущей таблицы, отвечающие x_{n+1}, вычеркиваются. Правило сокращения таблиц ограничивает их размеры: не более *n* строк и не более $(2n - m)$ столбцов.

Рассматриваемый алгоритм целочисленного программирования сводится к методу последовательного уточнения оценок с дополнительными правилами расширения и сокращения текущей таблицы решения задачи.

○ **Пример 2.** Получить целочисленный оптимальный план задачи

$$Z(X) = x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 35, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 \leqslant 6, \end{cases}$$

$x_j \geqslant 0$, x_j – целые числа, $j = 1, 2, 3, 4$.

Решение. Пошаговое решение задачи приведено в табл. 7.2.

Таблица 7.2

				1	−4	−2	3	0				
Шаг	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5				
0	A_2	−4	35	3	1	8	1	0				
	A_5	0	6	1	0	1	$\boxed{1}$	1				
	Δ_j		−140	−13	0	−30	−7	0				
1	A_2	−4	29	2	1	$\boxed{7}$	0	−1				
	A_4	3	6	1	0	1	1	1				
	Δ_j		−98	−6	0	−23	0	7	A_6			
2	A_3	−2	$29/7$	$2/7$	$1/7$	1	0	$-1/7$	0			
	A_4	3	$13/7$	$5/7$	$-1/7$	0	1	$8/7$	0			
	Δ_j		$-19/7$	$4/7$	$23/7$	0	0	$26/7$	0			
	A_6	0	$-6/7$	$\boxed{-5/7}$	$-6/7$	0	0	$-1/7$	1	A_7		
3	A_3	−2	$19/5$	0	$-1/5$	1	0	$-1/5$	$2/5$	0		
	A_4	3	1	0	−1	0	1	1	1	0		
	A_1	1	$6/5$	1	$6/5$	0	0	$1/5$	$7/5$	0		
	Δ_j		$-17/5$	0	$13/5$	0	0	$18/5$	$4/5$	0		
	A_7	0	$-1/5$	0	$-1/5$	0	0	$-1/5$	$\boxed{-3/5}$	1	A_8	
4	A_3	−2	$11/3$	0	$-1/3$	1	0	$-1/3$	0	$2/3$	0	
	A_4	3	$2/3$	0	$-4/3$	0	1	$2/3$	0	$5/3$	0	
	A_1	1	$5/3$	1	$5/3$	0	0	$2/3$	0	$-7/3$	0	
	A_6	0	$1/3$	0	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-5/3$	0	
	Δ_j		$-11/3$	0	$7/3$	0	0	$10/3$	0	$4/3$	0	
	A_8	0	$-2/3$	0	$-2/3$	0	0	$-2/3$	0	1	1	
5	A_3	−2	3	0	−1	1	0	−1	0		1	
	A_4	3	−1	0	$\boxed{-3}$	0	1	−1	0		$5/2$	
	A_1	1	4	1	4	0	0	3	0		$-7/2$	
	A_6	0	1	0	1	0	0	1	1		$-3/2$	
	Δ_j		−5	0	1	0	0	2	0		2	A_9
6	A_3	−2	$10/3$	0	0	1	$-1/3$	$-2/3$			$1/6$	0
	A_2	−4	$1/3$	0	1	0	$-1/3$	$1/3$			$-5/6$	0
	A_1	1	$8/3$	1	0	0	$4/3$	$5/3$			$-1/6$	0
	Δ_j		$-16/3$	0	0	0	$1/3$	$5/3$			$17/6$	0
	A_9	0	$-2/3$	0	0	0	$\boxed{-1/3}$	$-2/3$			$-5/6$	1
7	A_3	−2	4	0	0	1	0	0			1	−1
	A_2	−4	1	0	1	0	0	1			0	−1
	A_1	1	0	1	0	0	0	−1			$-7/2$	4
	A_4	3	2	0	0	0	1	2			$5/2$	0
	Δ_j		−6	0	0	0	0	1			2	1

На шаге 2 решения задачи без ограничения целочисленности получаем оптимальный нецелочисленный план

$$\bar{X} = (0,\ 0,\ {}^{29}/_{7},\ {}^{13}/_{7}).$$

Поскольку обе базисные координаты $\bar{X}$ нецелочисленны, выбираем любую – первую или вторую – строку таблицы на шаге 2, а именно вторую, и строим добавочное ограничение

$$-\frac{5}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_5 + x_6 = -\frac{6}{7}.$$

Вводя ограничение добавочной строкой на шаге 2, находим направляющий элемент в этой строке:

$$\min_{x_{ij}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{x_{ij}}\right\} = \min\left\{\frac{4/7}{5/7},\ \frac{23/7}{6/7},\ \frac{26/7}{1/7}\right\} = \frac{4}{5}.$$

Осуществляя преобразование табл. 7.2 с направляющим элементом $\left(-\frac{5}{7}\right)$, получаем на шаге 3 оптимальный план новой задачи, снова нецелочисленный. На шаге 3 добавляем очередное условие, получаем четыре строки ограничений. Поскольку на шаге 3 $\min\limits_{x_{ij}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{x_{ij}}\right\}$ достигается в столбце A_6, то x_6 становится базисной переменной на шаге 4. В соответствии с правилом сокращения таблицы на шаге 4 вычеркиваем строку и столбец, соответствующие x_6, добавляем новую строку, а на шаге 5 получаем псевдоплан $\tilde{X} = (4,\ 0,\ 3,\ -1)$. Методом последовательного уточнения оценок на шаге 6 получаем план, но нецелочисленный. Оптимальный целочисленный план получаем лишь на шаге 7: $X^* = (0,\ 1,\ 4,\ 2)$, $\max Z(X) = -6$. ●

7.2. Метод ветвей и границ

Одним из широко распространенных методов решения целочисленных задач является метод ветвей и границ, который может быть использован как для задач линейного программирования, так и для задач, не сводимых к задачам линейного программирования. Рассмотрим идею метода ветвей и границ на примере общей задачи дискретного программирования

$$f(X) \to \max, \tag{7.9}$$

$$X \in D, \tag{7.10}$$

где D – конечное множество.

Сначала найдем оценку $\xi(D)$ (границу) функции $f(X)$, $X \in D$: $f(X) \leqslant \xi(D)$ для $\forall\ X \in D$. Если для некоторого плана X^0 задачи (7.9)–(7.10) справедливо равенство $f(X^0) = \xi(D)$, то $X^0 = X^*$ является решением задачи. Если указанное условие не выполняется, то возможно разбиение (ветвление) множества D на конечное число непересекающихся подмножеств D^1_i: $\bigcup\limits_i D^1_i = D$, $\bigcap\limits_i D^1_i = \varnothing$, и вычисление оценки $\xi(D^1_i)$ (границ), $1 \leqslant i \leqslant m$ (рис. 7.1).

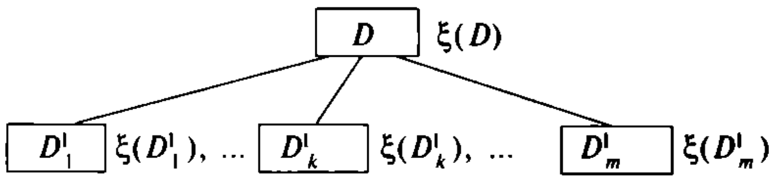


Рис. 7.1

Если для некоторого плана $X_i^1 \in D_i^1$, $1 \leqslant i \leqslant m$ выполняется условие $f(X_k^1) = \xi(D_k^1) \geqslant \xi(D_i^1)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то $X_k^1 = X^*$ является оптимальным планом (решением) задачи (7.9)–(7.10).

Если такого плана нет, то выбирается подмножество D_k^1 с наибольшей оценкой $\xi(D_i^1)$:

$$\xi(D_k^1) = \max_{1 \le i \le m} \xi(D_i^1),$$

и разбивается на конечное число непересекающихся подмножеств D^2_{kj}: $\bigcup\limits_j D^2_{kj} = D^1_k$, $\bigcap\limits_j D^2_{kj} = \varnothing$. Для каждого подмножества находится оценка $\xi(D^2_{kj})$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (рис. 7.2).

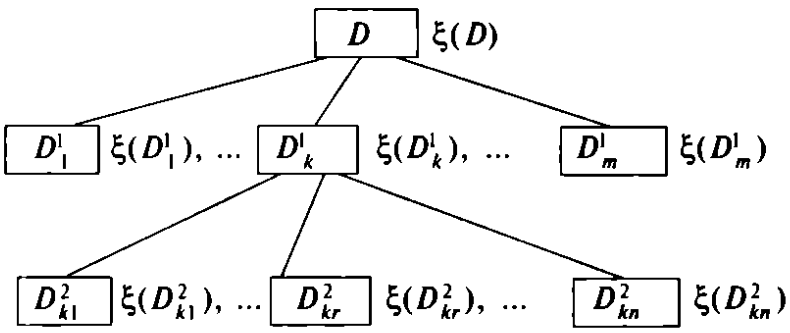


Рис. 7.2

Если при этом найдется план $X^2_j \in D^2_{kj}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, такой, что $f(X^2_r) = \xi(D^2_{kr}) \geqslant \xi(D^2_{kj})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то $X^2_r = X^*$ является решением задачи (7.9)–(7.10). Если такого плана нет, то процедуру ветвления осуществляют для множества D^2_{kj} с наибольшей оценкой $\xi(D^2_{kj})$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Способ ветвления определяется спецификой конкретной задачи.

Рассмотрим задачу, которую можно свести к задаче целочисленного линейного программирования.

○ **Пример.** Контейнер объемом 5 м^3 помещен на контейнеровоз грузоподъемностью 12 т. Контейнер требуется заполнить грузом двух наименований. Масса единицы груза m_j (в тоннах), объем единицы груза V_j (в м^3), стоимости c_j (в условных денежных единицах) приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Вид груза j	m_j	V_j	c_j
1	3	1	10
2	1	2	12

Требуется загрузить контейнер таким образом, чтобы стоимость перевозимого груза была максимальной.

Решение. Математическая модель задачи имеет вид

$$Z(X) = 10x_1 + 12x_2 \to \max, \tag{7.11}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{7.12}$$

$$x_1, x_2 \text{ — целые числа,} \tag{7.13}$$

где x_1, x_2 — число единиц соответственно первого и второго груза.

Множество планов этой задачи обозначим через D — это множество целых точек многогранника $OABC$ (рис. 7.3).

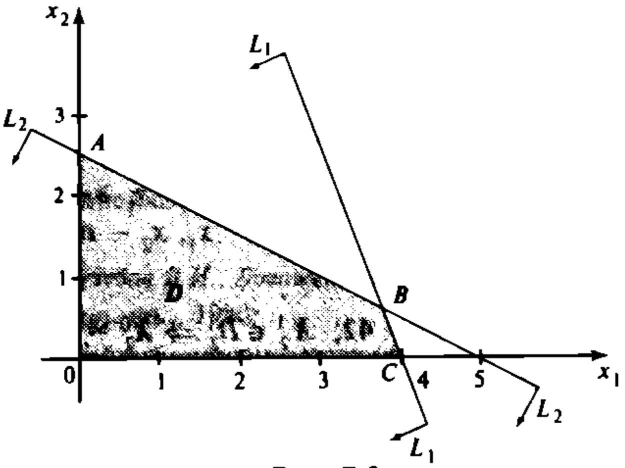


Рис. 7.3

Сначала решаем задачу (7.11)–(7.13) без условия целочисленности, получим оценку множества D – значение функции $Z(X)$ на оптимальном плане $X^0 = (^{19}/_5, {}^3/_5)$:

$\xi(D) = f(X^0) = 45^1/_5$.

Точка X^0 не является оптимальным планом задачи (7.11)–(7.13). Поэтому в соответствии с методом ветвей и границ требуется разбить множество D на непересекающиеся подмножества. Выберем первую нецелочисленную переменную $x_1 = {}^{19}/_5 = 3^4/_5$ и разобьем множество D на два непересекающихся подмножества D_1^1 и D_2^1: $D = D_1^1 \cup D_2^1$ (рис. 7.4), где $D_1^1 = \{x \in D\colon x_1 \leqslant [3^4/_5] = 3\}$, $D_2^1 = \{x \in D\colon x_1 \geqslant [3^4/_5] + 1 = 3 + 1 = 4\}$. Линии $x_1 = 3$ (L_3) и $x_1 = 4$ (L'_3) являются линиями разбиения.

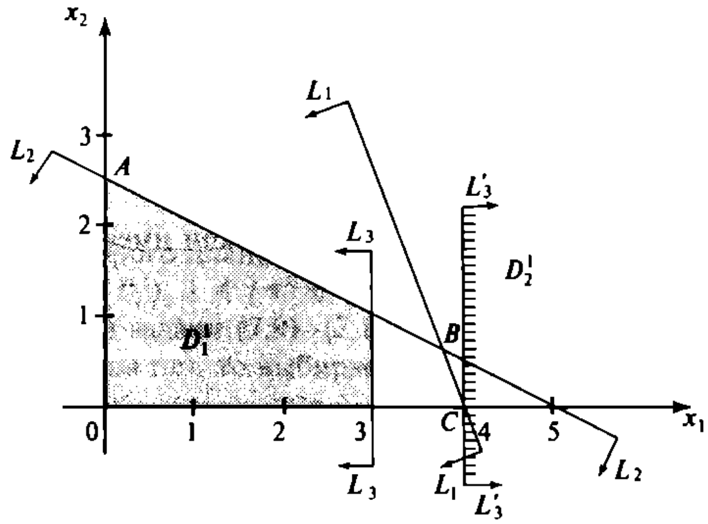


Рис. 7.4

Найдем оценки $\xi(D_1^1)$ и $\xi(D_2^1)$, для чего решим задачи линейного программирования

$$Z(X) = 10x_1 + 12x_2 \to \max, \qquad Z(X) = 10x_1 + 12x_2 \to \max,$$

$$D_1^1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \leqslant 3, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad D_2^1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

x_1, x_2 — целые числа; $\qquad$ x_1, x_2 — целые числа,

например, графическим методом:

$X_1^1 \in D_1^1 \Rightarrow X_1^0 = (3,\ 1)$; $\xi(D_1^1) = 42$; $X_2^1 \in D_2^1 \Rightarrow X_2^0 = (4,\ 0)$; $\xi(D_2^1) = 40$.

Результат ветвления приведен на рис. 7.5.

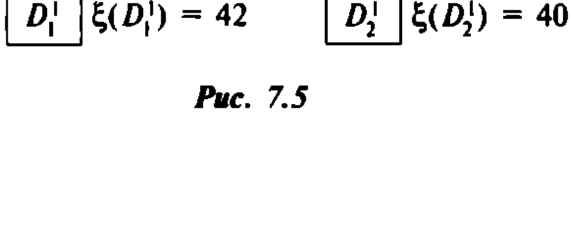


Рис. 7.5

План X_1^0 удовлетворяет условиям задачи (7.11)–(7.13), и для него выполняется условие: $Z(X_1^1) = \xi(D_1^1) = 42 > \xi(D_2^1) = 40$. Следовательно, план $X_1^0 = (3, 1)$ является решением задачи (7.11)–(7.13), т.е. надо взять три единицы первого груза и одну единицу второго груза.

В табл. 7.4 приведено решение этой задачи методом Гомори.

Таблица 7.4

			10	12	0	0	
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	
A_3	0	12	$\boxed{3}$	1	1	0	
A_4	0	5	1	2	0	1	
Δ_j		0	−10	−12	0	0	
A_1	10	4	1	$^1/_3$	$^1/_3$	0	
A_4	0	1	0	$\boxed{^5/_3}$	$-^1/_3$	1	
Δ_j		40	0	$-^{26}/_3$	$^{10}/_3$	0	A_5
A_1	10	$^{19}/_5$	1	0	$^2/_5$	$-^1/_5$	0
A_2	12	$^3/_5$	0	1	$-^1/_5$	$^3/_5$	0
Δ_j		$45^1/_5$	0	0	$^8/_5$	$^{26}/_5$	0
A_5	0	$-^4/_5$	0	0	$\boxed{-^2/_5}$	$-^4/_5$	1
A_1	10	3	1	0	0	−1	1
A_2	12	1	0	1	0	1	$-^1/_2$
A_3	0	2	0	0	1	2	$-^5/_2$
Δ_j		42	0	0	0	2	4

Ответ: $\max Z(X_п) = 42$ при $X_ц^* = (3, 1)$. ●

Список литературы

1. *Калихман И.Л.* Линейная алгебра и программирование. – М.: Высш. шк., 1967.
2. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1980.
3. Линейное и нелинейное программирование/Под ред. проф. И.Н. Ляшенко. – Киев: Выща шк., 1975.
4. *Матвеев В.И., Сагитов Р.В., Шершнев В.Г.* Курс линейного программирования для экономистов: Учеб. пособие. – М.: Менеджер, 1998.
5. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. – М.: Мир, 1984.
6. *Gal T.* Postoptimal Analises, Parametric Programming and Related Topics. – N.Y.: McGraw-Hill, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

По вопросам приобретения книг обращайтесь:

Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, тел.: (495) 380-4260; факс: (495) 363-9212
E-mail: books@infra-m.ru

•

Магазин «Библиосфера» (розничная продажа):
109147, Москва, ул. Марксистская, д. 9, тел. (495) 670-5218, 670-5219

•

Отдел «Книга–почтой»:
тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

•

Центр комплектования библиотек:
119019, Москва, ул. Моховая, д. 16 (Российская государственная библиотека, кор. К)
тел. (495) 695-9315

Учебное издание

Общий курс высшей математики для экономистов

Учебник

Редактор *И.В. Мартынова*
Корректор *М.В. Литвинова*
Компьютерная верстка *В.А. Кораблевой*
Художественное оформление *К.В. Пономарев*

Подписано в печать 16.07.1999.
Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Newton». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 41,0. Уч.-изд. л. 46,54.
Тираж 150 000 экз. (65 001 – 68 000 экз.)
Заказ № 1840

Цена свободная.

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в.
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43.
Факс: (495) 363-92-12.
E-mail: books@infra-m.ru http://www.infra-m.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО "Тверской полиграфический комбинат". 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс: (4822)44-42-15
Home page - www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru

ОБЩИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

ISBN 978-5-16-003986-2

9 785160 039862