ВУЗОВСКИЙ УЧЕБНИК

А.П. Киреев
П.А. Киреев

МИКРОЭКОНОМИКА ДЛЯ ПРОДВИНУТЫХ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Advanced Microeconomics: Problems and Solutions

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

А.П. КИРЕЕВ, П.А. КИРЕЕВ

МИКРОЭКОНОМИКА ДЛЯ ПРОДВИНУТЫХ
ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Advanced Microeconomics: Problems and Solutions

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва
ВУЗОВСКИЙ УЧЕБНИК
ИНФРА-М
2014

УДК 330.101.542(075.8)
ББК 65.012.1я73
К43

Рецензенты:
кафедра исследования операций в экономике им. проф. Ю.А. Львова СПбГИЭУ (зав. кафедрой — д-р экон. наук, проф. В.Н. Соколов);
д-р экон. наук, канд. физ.-мат. наук *Е.В. Лукоянова*;
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Д. Матвеенко*;
канд. экон. наук, доц. *Ю.В. Паниковская*

Киреев А.П., Киреев П.А.

К43 Микроэкономика для продвинутых: задачи и решения: Учеб. пособие. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2014. — 160 с.

ISBN 978-5-9558-0151-3 (Вузовский учебник)
ISBN 978-5-16-004042-4 (ИНФРА-М)

Сборник содержит задачи по основным разделам микроэкономики: теории потребителя, теории производителя, теории рынков (свободная конкуренция, монополия), общему экономическому равновесию, стратегическому поведению (дуополия и олигополия) и выбору в условиях риска и асимметричной информации. В основном это типовые задачи, на примере которых отрабатываются навыки анализа базовых моделей курса микроэкономики. Приводится подробное решение всех задач.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, факультетов и специальностей. Может быть полезно продвинутым студентам бакалавриата, специализирующимся в различных областях микроэкономического анализа, а также студентам магистратуры с базовым образованием по неэкономическим специальностям.

ББК 65.012.1я73

ISBN 978-5-9558-0151-3 (Вузовский учебник)
ISBN 978-5-16-004042-4 (ИНФРА-М)

Редактор *И.В. Мартынова*
Корректор *М.В. Литвинова*
Компьютерная верстка *Г.А. Волковой*

Подписано в печать 20.07.2013.
Формат 60 × 90/16. Гарнитура Newton. Бумага офсетная
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,8. Уч.-изд. л. 10,08.
Тираж 1500 экз. (2-й завод – 1000 экз.). Заказ № 3438

Издательский Дом «Вузовский учебник»
127247, Москва, ул. С. Ковалевской, д. 1, стр. 52
www.vuzbook.ru

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru http://www.infra-m.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО ордена «Знак Почета»
«Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова».
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот сборник задач по микроэкономике предназначен для продвинутых студентов. Под продвинутым уровнем мы понимаем уровень преподавания, выходящий за пределы вводного курса микроэкономики. В России этот уровень называется микроэкономикой 2 и 3, на Западе — микроэкономикой промежуточного уровня (*intermediate microeconomics*) и микроэкономикой продвинутого уровня (*advanced microeconomics*). Такие продвинутые курсы обычно преподаются на уровне бакалавриата, магистратуры и аспирантуры экономических факультетов университетов и экономических вузов.

Различие между микроэкономикой трех уровней весьма существенно.

На вводном уровне обычно рассматривается ограниченный набор тем, связанных в основном с поведением рационального потребителя и производителя и различными формами рыночных структур, провалов рынка и экстерналий. Материал подается преимущественно в описательной форме, с большим количеством примеров из жизни и графическими иллюстрациями. Задачи по микроэкономике вводного уровня обычно сводятся к числовым упражнениям на основе изученных моделей. Задача учащегося заключается в применении известных из учебника формул, подстановке в них числовых данных для получения искомого результата. Элементы микроэкономики вводного уровня всегда включены в курсы основ экономической теории.

На промежуточном уровне темы обычно выходят за пределы поведения потребителя, производителя и рыночных структур и включают теорию общего равновесия, благосостояния и информации. Изложение ведется с бóльшим применением математического аппарата. Обычно предполагается, что конкретные формы функций спроса и предложения известны. Количество благ (товаров), между которыми выбирает потребитель, и количество факторов производства, которые может использовать производитель, обычно составляет не более двух. Это позволяет выводить основные теоремы и изображать их графики в двухмерном пространстве. Знания основ математического анализа и теории игр в целом достаточно, чтобы понять экономические модели этого уровня и решать соответствующие задачи. Это примерно тот уровень, с которого начинается изложение материала в данном пособии.

Наконец, *на продвинутом уровне* набор тем значительно расширяется: сюда включены обычно все темы вводного и промежуточного уровней, а также асимметричная информация, поведение в условиях неопределенности, нерациональность поведения, риск и др. Далее микроэкономика делится на подпредметы, такие как теории отраслевых рынков, фирмы, принятия решений, контрактов, механизмов и пр. Математический аппарат, требуемый для понимания моделей и решения задач на этом уровне, становится значительно сложнее и включает, помимо математического анализа и теории игр, также и матричное исчисление, элементы линейного и выпуклого программирования. На продвинутом уровне обычно предполагается, что количество товаров и факторов производства не ограничено, а вид функций спроса и предложения неизвестен. Соответственно, задачи решаются в общем виде, и графическая иллюстрация в большинстве случаев невозможна.

Одна из задач этого пособия — перебросить «мостик» от вводного курса микроэкономики к продвинутому. В учебной литературе в России и на Западе весьма заметен резкий переход от вводного, преимущественно описательного курса микроэкономики к продвинутому, преимущественно аналитическому уровню. Отчасти это объясняется отсутствием развернутых курсов промежуточной микроэкономики, отчасти — разной базовой подготовкой преподавателей. В результате возникает существенный разрыв как в сложности, так и в методах подачи материала между микроэкономикой вводного и продвинутого уровней. Первую можно рассматривать как *позитивную науку* (отвечающую на вопрос «что есть?»), имеющую прямое отношение к решению задач производства, распределения и потребления товаров и услуг, изучению поведения потребителей и фирм. Вторая является в основном *нормативной наукой* (отвечающей на вопрос «что должно быть?»), которая показывает с использованием математического аппарата, как должна функционировать некоторая экономическая модель, и зачастую не имеет прямой связи с экономической реальностью. Разумеется, позитивные и нормативные аспекты присутствуют в микроэкономике как на вводном, так и на продвинутом уровне.

Может создаться ощущение, что микроэкономика на продвинутом уровне — раздел математики. Это не так. Микроэкономика продолжает оставаться частью экономики — фундаментальной науки об оптимальном использовании ограниченных ресурсов в процессе производства, распределения, обмена и потребления товаров и услуг. Математика — наука формальная — выступает не более чем одним из инструментов изучения микроэкономики. Это важный инструмент, но далеко не единственный. В числе других — логика, история, география, лингвистика, философия и, самое главное, экономический способ мышления.

Роль математики в экономике подчиненная. Экономисты активно используют математику (например, метод Лагранжа, теорему Эйлера, теорему об огибающей), но не развивают ее. Если существующую проблему (например, рациональное максимизирующее поведение) можно описать и решить с помощью математики, ее применяют. Если же то или иное экономическое явление (например, нерациональное поведение потребителей и производителей) удовлетворительно описать математически не удается, математика просто не используется.

Задача модели в экономике — дать возможность, с использованием математических методов, получить принципиально новые для экономистов результаты. Поэтому неверно представлять некоторые методы, разработанные математиками (например, анализ функции), как часть экономической теории. Математические методы полезны в экономике постольку, поскольку они дают возможность взглянуть на ее проблемы под новым углом, чаще всего через некоторую функциональную зависимость. Иногда функции четко ухватывают суть процесса, и результаты можно использовать при принятии конкретных потребительских, производственных и государственных решений. Однако зачастую математическая модель дает лишь некоторое идеализированное представление о реальности, но вовсе не совпадает с ней, и может быть использована для понимания только того, что, как нам кажется, должно быть в принципе, а не того, что есть на самом деле.

Микроэкономика оперирует функциями (полезности, спроса, предложения, расходов и пр.), которые призваны показать только то, что некоторая переменная, например спрос на товар, зависит от некоторых других переменных, например уровня дохода потребителя, цены товара, цен на товары-заменители и пр. Чтобы проиллюстрировать это математически, необходимо, чтобы функция полезности отвечала некоторым свойствам — была монотонной, выпуклой, непрерывной, однородной и пр. Всё это понятия из математики, не имеющие к экономике прямого отношения. Однако для того, чтобы вывести экономические функции, эти условия должны соблюдаться, поэтому требуется проверять рассматриваемую функцию на соответствие этим условиям.

Значительная часть задач, включенных в пособие, посвящена анализу свойств экономических функций. Экономисты не раз использовали достижения теории функций, и знание приемов анализа функций нужно каждому экономисту. Однако теоретическая микроэкономика пока еще развита весьма слабо по сравнению, например, с теоретической физикой и не позволяет применять более сложную математику. Например, для математика, занимающегося теорией функций, анализ функций потребления, приводимый в данном пособии, покажется по меньшей мере неполным. Математикам известно, что даже у элементарных функций существует множество свойств, которые необходимо подтвердить перед тем, как можно будет утверждать, что та или иная функция имеет определенную форму. Экономисты пропускают бóльшую часть из них и концентрируются только на важных для них свойствах, достаточных, чтобы проиллюстрировать идею примером или составить математическую модель некоторого экономического процесса.

Важная задача этого пособия — помочь студентам освоиться с основными приемами микроэкономического анализа. Такие приемы используются при решении прикладных экономических задач — от моделирования спроса потребителей, что абсолютно необходимо в любых маркетинговых исследованиях, до моделирования оптимального поведения производителей в определенной рыночной ситуации, что требуется любой фирме. Знание вариантов поведения в условиях неопределенности и риска нужно всем — и потребителям, и производителям, и государству. Таким образом, проблемы, которые рассматриваются в данном пособии, можно в той или иной форме встретить везде — начиная от семейных советов и заканчивая заседаниями советов директоров крупных фирм и встречами глав государств и правительств.

Основное внимание в пособии уделено поведению рационального экономического агента, максимизирующего полезность и минимизирующего издержки, — подходу, который доминирует в настоящее время в главном экономическом течении. Важно понимать, что этот подход далеко не единственный в экономической науке. Его широкое использование объясняется в основном тем, что рациональное поведение поддается сравнительно простому описанию математическими методами. Создается иллюзия возможности просчитать поведение экономических агентов. Частично это действительно так — люди работают для того, чтобы жить и потреблять, фирмы создаются с целью извлечения прибыли и обогащения владельцев. Государства нужны для того, что исправлять провалы рынка и производить за счет собираемых налогов нужные всем общественные блага вроде услуг милиции, начального образования или пожарной команды, которые никто на коммерческой основе иначе производить не будет. Все эти действия поддаются некоторой количественной оценке при допущении о рациональности поведения каждого экономического агента.

Однако, и микроэкономика это признает, поведение экономических агентов зачастую иррационально и не основано на простой дихотомии максимума прибыли или полезности путем минимальных издержек или затрат. Экономические агенты действуют в условиях неопределенности, недостатка или асимметричности информации, вынуждены стратегически отвечать на действия или бездействие других экономических агентов и зачастую ведут себя совершенно иррационально.

В пособие включены задачи и их решения только из некоторых областей микроэкономики продвинутого уровня, которые требуют применения количественных методов анализа. Материал ограничивается преимущественно рациональным поведением потребителя и фирмы с небольшими дополнениями из области общего экономического равновесия, неопределенности и риска, стратегического поведения и теории информации. Однако того, что представлено в этом пособии, должно быть достаточно, чтобы перекинуть «мостик» от конкретных проблем потребления, производства и благосостояния, с которыми сталкивается каждый из нас и которые изучаются в микроэкономике на вводном уровне, к более абстрактному и формализованному моделированию экономических проблем на продвинутом (третьем) уровне.

Мы представили задачи, которые по степени сложности условно можно разбить на две основные группы. *В задачах промежуточного уровня* функциональная форма полагается известной и предполагается существование не более двух благ или факторов производства. Большинство задач этого уровня направлено на отработку операций с наиболее традиционными функциями, которые используются в теоретической микроэкономике. *В задачах продвинутого уровня* проблема решается в общем, и количество благ и факторов производства может быть любым. В большинстве задач читателю предлагается изучить обобщенную модель того или иного экономического явления, содержащую некоторые параметры. Учащиеся должны проанализировать модель и выяснить, при каких значениях параметров или их комбинации модель имеет те или иные свойства.

Университетские курсы микроэкономики продвинутого уровня могут охватывать очень широкий круг тем, поскольку основаны на последних исследовательских достижениях и опираются на материалы опубликованных научных статей в этой области. Практически всегда набор тем отражает предпочтения ведущего профессора. В этот сборник мы сознательно включили только те темы, которые в подавляющем большинстве случаев изучаются на продвинутом уровне микроэкономики в университетах.

При подготовке пособия мы ориентировались на уровень изложения в ведущих российских и зарубежных учебниках микроэкономики продвинутого уровня, которые широко используются в преподавательской практике в России (см. список рекомендуемой литературы). Были также приняты во внимание программы курсов по микроэкономике в бакалавриате и магистратуре экономического факультета ГУ-ВШЭ и МГУ. Набор тем, включенных в пособие, соответствует разделу по микроэкономике Федерального государственного образовательного стандарта нового поколения по специальности «Экономика».

Авторы глубоко признательны нашим российским рецензентам — П.А. Ватнику, Е.В. Лукояновой, В.Д. Матвеенко, Ю.В. Паниковской и кафедре исследования операций в экономике им. Ю.А. Львова Санкт-Петербургского инженерно-экономического университета под руководством В.Н. Соколова за высказанные замечания. Мы благодарны также Ф. Коуэллу (*F. Cowell*), профессору Лондонской школы экономики в Великобритании, и С. Джоши (*S. Joshi*), профессору Университета Джорджа Вашингтона в США — нашим основным учителям микроэкономики.

1. ПРЕДПОЧТЕНИЯ И ПОЛЕЗНОСТЬ

1.1. ПРЕДПОЧТЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

◆ **Задача 1.1.** Докажите, что если предпочтения ($\succeq$) отвечают аксиомам рациональности, то:

а) строгие предпочтения ($\succ$) нерефлексивны для любого потребительского набора A, т.е. $A \succ A$ невозможно;

б) строгие предпочтения ($\succ$) транзитивны, т.е. если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$.

Решение.

Напомним **основные аксиомы рационального потребления**:

- *полнота*: для двух потребительских наборов A и B

  $A \succeq B$ или $B \succeq A$;

- *рефлексивность*: для любого потребительского набора справедливо, что

  $A \succeq A$;

- *транзитивность*: для трех потребительских наборов A, B и C,

  если $A \succeq B$ и $B \succeq C$, то $A \succeq C$.

А. По **определению строгих предпочтений** ($\succ$) из двух потребительских наборов A и B

$A \succ B$ тогда и только тогда, когда $A \succeq B$, но $B \not\succeq A$.

Доказательство от противного: допустим, что для некоторого набора A соблюдается $A \succ A$. Тогда по определению строгих предпочтений $A \succ A$ тогда и только тогда, когда $A \succeq A$, но $A \not\succeq A$. Однако условие $A \not\succeq A$ противоречит аксиоме рефлексивности, по которому $A \succeq A$. Следовательно, $A \succ A$ невозможно.

Б. Допустим обратное: существуют потребительские наборы A, B и C, такие, что $A \succ B$ и $B \succ C$, но $A \not\succ C$. По аксиоме полноты предпочтений, если существуют два потребительских набора A и B, то либо $A \succeq B$, либо $B \succeq A$. Если предпочтения полные, то $A \not\succ C$ эквивалентно $C \succeq A$. Из определения строгих предпочтений $A \succ B$ следует, что это возможно тогда и только тогда, когда $A \succeq B$, но $B \not\succeq A$. По аксиоме транзитивности предпочтений $C \succeq A$ и $A \succeq B$, следовательно, $C \succeq B$. Но это противоречит начальной гипотезе о том, что $B \succ C$. Следовательно, строгие предпочтения ($\succ$) транзитивны.

◆ **Задача 1.2.** Докажите, что если предпочтения ($\succeq$) отвечают аксиомам рациональности, то в случае безразличия предпочтений ($\sim$):

а) для любого потребительского набора A всегда $A \sim A$;

б) если $A \sim B$, то $B \sim A$;

в) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Решение.

А. По **определению безразличия предпочтений** ($\sim$) из двух потребительских наборов A и B

$A \sim B$ тогда и только тогда, когда $A \succeq B$ и $B \succeq A$.

Заменив набор B на A, получаем, что $A \sim A$ тогда и только тогда, когда $A \succeq A$. Но $A \succeq A$ — это аксиома рефлексивности предпочтений, которая всегда справедлива. Следовательно, рефлексивность безразличия предпочтений $A \sim A$ также справедлива.

Б. По определению безразличия предпочтений ($\sim$) $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $A \succeq B$ и $B \succeq A$. Следовательно, $B \succeq A$ и $A \succeq B$, откуда $B \sim A$, т.е. безразличия предпочтений симметричны.

В. По определению безразличия предпочтений ($\sim$):

если $A \sim B$, то $A \succeq B$ и $B \succeq A$;

если $B \sim C$, то $B \succeq C$ и $C \succeq B$.

Если $A \succeq B$ и $B \succeq C$, то по аксиоме транзитивности $A \succeq C$.
Если $B \succeq A$ и $C \succeq B$, то по аксиоме транзитивности $C \succeq A$.

Откуда, если $A \succeq C$ и $C \succeq A$, получается определение безразличия предпочтений. Следовательно, если предпочтения транзитивны, то и безразличия также транзитивны, т.е. $A \sim C$.

◆ **Задача 1.3.** Докажите, что если множество $S_{\succeq}(A)$ состоит из потребительских наборов, которые не хуже A, и:

а) предпочтения $\succeq$ слабо выпуклые, то множество $S_{\succeq}(A)$ выпуклое;

б) множество $S_{\succeq}(A)$ выпуклое, то предпочтения $\succeq$ слабо выпуклые.

Решение.

А. Допустим, предпочтения $\succeq$ слабо выпуклые. Рассмотрим любой потребительский набор A и выберем два других потребительских набора B и C на множестве $S_{\succeq}(A)$. По аксиоме полноты либо $B \succeq C$, либо $C \succeq B$. Пусть $B \succeq C$. По **определению слабой выпуклости предпочтений**

$$\lambda B + (1 - \lambda)C \succeq C \quad \text{для всех} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Поскольку $C \in S_{\succeq}(A)$, то $C \succeq A$. По условиям задачи множество $S_{\succeq}(A)$ состоит из потребительских наборов, которые не хуже A. Тогда $\lambda B + (1 - \lambda)C \in S_{\succeq}(A)$, т.е. множество $S_{\succeq}(A)$ выпуклое.

Б. Это обратная задача. Допустим, что множество $S_{\succeq}(A)$ выпуклое для любого потребительского набора A. Рассмотрим наборы A и B, где $B \succeq A$. Поскольку по условию множество $S_{\succeq}(A)$ выпуклое, оно должно содержать выпуклую комбинацию B и A, т.е. $\lambda B + (1-\lambda)A \in S_{\succeq}(A)$. По определению $S_{\succeq}(A)$ — выпуклое множество, если выпуклая комбинация любых двух входящих в него наборов также принадлежит этому множеству:

если $A, B \in S_{\succeq}(A)$, то $\lambda B + (1-\lambda)A \in S_{\succeq}(A)$

для любых $\lambda \in [0, 1]$.

Следовательно, $\lambda B + (1-\lambda)A \succeq A$, т.е. предпочтения $\succeq$ слабо выпуклые.

◆ **Задача 1.4.** Докажите, что строгая монотонность предпочтений означает их ненасыщаемость.

Решение.

По **аксиоме о локальной ненасыщаемости** для любого потребительского набора A существует набор B в ε-окрестности A, который строго предпочтителен A, т.е.

в окружности $N_{\varepsilon}(A)$ с центром в A и радиусом ε существует $B \succ A$.

Необходимо показать, что при строгой монотонности предпочтений можно найти набор $B \succ A$ в окружности $N_{\varepsilon}(A)$.

По **аксиоме строгой монотонности** для любых наборов A и B,

если количество всех благ в наборе B не меньше,
а хотя бы одного блага больше, чем в наборе A,
то $B \succ A$.

Заметим, что поскольку радиус $\varepsilon > 0$, для любого значения ε можно составить набор B так, чтобы он находился в окружности $N_\varepsilon(A)$, немного увеличив количество одного из благ в наборе A. Отсюда можно сделать вывод, что из монотонности предпочтений следует их ненасыщаемость, поскольку в ε-окрестности A обязательно есть набор B, который строго предпочтителен A (рис. 1.1).

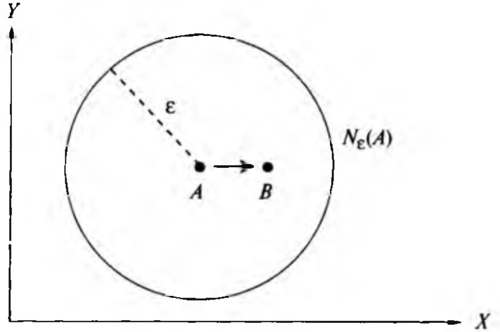


Рис. 1.1

1.2. ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

◆ **Задача 1.5.** Для следующих функций полезности:

а) $U(x, y) = xy$;

б) $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

выведите уравнение кривой безразличия как функцию y от x, найдите предельную полезность благ X и Y, определите, монотонны ли предпочтения, MRS, наклон и выпуклость функции.

Решение.

А. Для $U(x, y) = xy$

Уравнение кривой безразличия: поскольку полезность вдоль кривой безразличия постоянна, $U(x, y) = xy = K$, отсюда $y = \dfrac{K}{x}$.

Предельная полезность: $U_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} = y$ и $U_y = \dfrac{\partial U}{\partial y} = x$ — это первые частные производные функции полезности.

Монотонность: поскольку первые частные производные неотрицательны ($U_x = y \geq 0$ и $U_y = x \geq 0$), предпочтения строго монотонны.

MRS (*предельная норма замещения*) *функции полезности* (отношение предельных полезностей каждого из благ, взятое с отрицательным знаком, и одновременно наклон этой функции): полностью дифференцируя функцию, получаем $dU = U_x dx + U_y dy = dK$. На кривой безразличия $dU = 0$. Также $dK = 0$. Следовательно, $U_x dx + U_y dy = 0$, поэтому $U_x dx = -U_y dy$. Откуда $MRS_{XY} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{dU=0} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{y}{x}$, т.е. наклон функции полезности отрицательный.

Наклон: альтернативно $U(x, y) = xy = K$, $y = \frac{K}{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{0 \cdot x - K \cdot 1}{x^2} = -\frac{K}{x^2} < 0$; поскольку первая производная отрицательная, наклон функции полезности отрицательный.

Выпуклость: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0 \cdot x^2 + K \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2Kx}{x^4} = \frac{2K}{x^3} > 0$; поскольку вторая производная положительна, функция полезности выпукла к началу координат.

Б. Для $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$

Уравнение кривой безразличия: $x^{\alpha}y^{\beta} = K$, откуда $y = (Kx^{-\alpha})^{\frac{1}{\beta}}$.

Предельная полезность: $U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}$; $U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1}$.

Монотонность: $U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} > 0$, $U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} > 0$, предпочтения строго монотонны.

MRS функции полезности: $MRS_{XY} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{dU=0} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}$.

Наклон: $\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)K^{\frac{1}{\beta}}x^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)} < 0$, наклон отрицательный.

Выпуклость: $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)K^{\frac{1}{\beta}}x^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+2\right)} > 0$, функция выпукла к началу координат.

◆ **Задача 1.6.** Проверьте на строгую вогнутость и квазивогнутость следующие функции полезности:

а) $U(x, y) = \ln x + \ln y$;

б) $U(x, y) = xy$.

Решение.

Напомним **условие строгой вогнутости**:

$$U_{xx} < 0, \quad U_{yy} < 0 \quad \text{и} \quad U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 > 0$$

и **условие строгой квазивогнутости**:

$$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 < 0.$$

А. Для $U(x, y) = \ln x + \ln y$

Рассчитаем первые и вторые производные, а также вторую перекрестную производную:

$$U_x = \frac{1}{x}, \quad U_y = \frac{1}{y}, \quad U_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad U_{yy} = -\frac{1}{y^2}, \quad U_{xy} = 0.$$

Вогнутость: $U_{xx} = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \quad U_{yy} = -\dfrac{1}{y^2} < 0,$

$$U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right) - 0 = \frac{1}{x^2y^2} > 0.$$

Поскольку все три условия соблюдаются, функция полезности строго вогнутая.

Квазивогнутость: $-\dfrac{1}{x^2y^2} - 0 - \dfrac{1}{y^2x^2} < 0$. Условие соблюдается, следовательно, функция квазивогнутая.

Б. Для $U(x, y) = xy$

$$U_x = y, \quad U_y = x, \quad U_{xx} = 0, \quad U_{yy} = 0, \quad U_{xy} = 1.$$

Вогнутость: U_{xx} и U_{yy} не меньше нуля, $U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0 \cdot 0 - (1)^2 < 0$, условия строгой вогнутости не соблюдаются, следовательно, функция невогнутая.

Квазивогнутость: $0 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 \cdot yx + 0 \cdot y^2 < 0$. Поскольку количество благ X и Y положительно, $-2yx < 0$, условие соблюдается, и функция полезности квазивогнутая.

◆ **Задача 1.7.** Покажите, что:

а) следующие трансформации F_i, $i = 1, 2, 3, 4$ функции полезности $U(x, y) = xy$ представляют те же предпочтения, что и $U(x, y)$:

- $F_1(x, y) = F_1\big(U(x, y)\big) = \sqrt{xy}$;
- $F_2(x, y) = F_2\big(U(x, y)\big) = x^2y^2$;
- $F_3(x, y) = F_3\big(U(x, y)\big) = \ln x + \ln y$;
- $F_4(x, y) = F_4\big(U(x, y)\big) = e^{xy}$;

б) каждая из перечисленных выше трансформаций функции полезности $U(x, y)$ ведет к строгой монотонности предпочтений;

в) каждая из указанных трансформаций функции полезности $U(x, y)$ имеет одинаковую MRS;

г) каждая из перечисленных трансформаций функции полезности $U(x, y)$ квазивогнута.

Решение.

А. Трансформации функции полезности $U(x, y)$ представляют те же предпочтения, что и $U(x, y)$, только если они являются монотонными. По определению функция $V(x, y)$ является ***монотонной трансформацией*** функции $U(x, y)$, если $V(x, y) = F\big(U(x, y)\big)$ и $F'(U) > 0$, т.е. функция монотонно возрастает.

Для каждой F_i имеем $z = U(x, y) = xy$. Следовательно,

$$F_1(z) = \sqrt{z}, \qquad \frac{dF_1}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} > 0 \quad \text{для} \quad z > 0;$$

$$F_2(z) = z^2, \qquad \frac{dF_2}{dz} = 2z > 0 \quad \text{для} \quad z > 0;$$

$$F_3(z) = \ln z, \qquad \frac{dF_3}{dz} = \frac{1}{z} > 0 \quad \text{для} \quad z > 0;$$

$$F_4(z) = e^z, \qquad \frac{dF_4}{dz} = e^z > 0 \quad \text{для} \quad z > 0.$$

Поскольку все трансформации F_i монотонны, они представляют те же предпочтения, что и $U(x, y)$.

Б. *Строгая монотонность предпочтений*: для исходной функции $U(x, y) = xy$, $U_x = y > 0$, $U_y = x > 0$ для всех $x, y > 0$, т.е. предпочтения строго монотонны. Для доказательства того, что предпочтения монотонных трансформаций исходной функции также строго монотонны, находим их первые частные производные, они должны быть положительны для всех $x, y > 0$. Это действительно так:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} > 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} > 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy^2 > 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2x^2y > 0;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{x} > 0, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{1}{y} > 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = ye^{xy} > 0, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial y} = xe^{xy} > 0.$$

В. *MRS* (ее наклон): $MRS_{XY} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{dU=0} = -\frac{U_x}{U_y}$. Для исходной функции $U(x, y) = xy$, $U_x = y$, $U_y = x$ и $MRS_{XY} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{y}{x}$.

У монотонных трансформаций этой функции MRS та же. Это действительно так:

$$MRS_{F_1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot 2\sqrt{\frac{y}{x}} = -\frac{y}{x}, \qquad MRS_{F_2} = -\frac{2xy^2}{2x^2y} = -\frac{y}{x},$$

$$MRS_{F_3} = -\frac{y}{x}, \qquad MRS_{F_4} = -\frac{e^{xy}y}{e^{xy}x} = -\frac{y}{x}.$$

Г. Для $F_1(x, y) = F_1\big(U(x, y)\big) = \sqrt{xy}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{y}\,x^{-\frac{3}{2}}, \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{x}\,y^{-\frac{3}{2}}, \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Условие квазивогнутости $U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = -\frac{1}{4\sqrt{xy}} < 0$ соблюдается, следовательно, монотонно трансформированная функция исходной функции полезности также квазивогнута.

Аналогично для $F_2(x, y) = F_2(U(x, y)) = x^2y^2$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 2y^2, \qquad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 2x^2, \qquad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = 4xy;$$

$$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = -16x^4y^4 < 0.$$

Для $F_3(x, y) = F_3(U(x, y)) = \ln x + \ln y$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = -\frac{2}{x^2y^2} < 0.$$

Наконец, для $F_4(x, y) = F_4(U(x, y)) = e^{xy}$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial y} = xe^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} = y^2e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 F_4}{\partial y^2} = x^2e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 F_4}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy};$$

$$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = -2xye^{3xy} < 0.$$

Следовательно, монотонные трансформации F_1, F_2, F_3 и F_4 квазивогнуты.

◆ **Задача 1.8.** Для следующих функций полезности выведите уравнение кривой безразличия как функцию y от x, покажите, что она имеет отрицательный наклон и выпукла, и докажите строгую монотонность и строгую выпуклость предпочтений:

а) $U(x, y) = (x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$ и $x > a$, $y > b$;

б) $U(x, y) = \alpha x + \beta \ln y$, где $\alpha, \beta > 0$;

в) $U(x, y) = \left(x^{\sigma} + y^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$, где $0 < \sigma < 1$.

Решение.

А. Для $U(x, y) = (x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}$

Прежде всего заметим, что $U(x, y) = (x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}$ — это стандартная ***функция полезности Стоуна — Гири*** (*Stone-Geary*).

Уравнение кривой безразличия: возьмем логарифмическую трансформацию

$$V(x, y) = \ln U(x, y) = \alpha \ln(x-a) + \beta \ln(y-b),$$

приравняем к константе: $\alpha \ln(x-a) + \beta \ln(y-b) = K$. Отсюда

$$\beta \ln(y-b) = K - \alpha \ln(x-a), \qquad \ln(y-b) = \frac{K - \alpha \ln(x-a)}{\beta},$$

$$y - b = \exp\left\{\frac{K - \alpha \ln(x-a)}{\beta}\right\}, \qquad y = b + \exp\left\{\frac{K - \alpha \ln(x-a)}{\beta}\right\}.$$

Наклон: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\alpha}{\beta(x-a)} \exp\left\{\dfrac{K - \alpha \ln(x-a)}{\beta}\right\} < 0$, кривая безразличия имеет отрицательный наклон.

Выпуклость: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta^2(x-a)^2} \exp\left\{\dfrac{K - \alpha \ln(x-a)}{\beta}\right\} > 0$, кривая безразличия выпукла к началу координат.

Монотонность: используя логарифмическую трансформацию $V = \ln U(x, y) = \alpha \ln(x-a) + \beta \ln(y-b)$, получаем $V_x = \dfrac{\alpha}{x-a} > 0$, $V_y = \dfrac{\beta}{y-b} > 0$, следовательно, предпочтения строго монотонны.

Квазивогнутость: $V_{xx} = -\dfrac{\alpha}{(x-a)^2} < 0,\ V_{yy} = -\dfrac{\beta}{(y-b)^2} < 0,\ V_{xy} = 0;$

$$\underset{-}{V_{xx}}\underset{+}{V_y^2} - 2\underset{0}{V_{xy}}\underset{+}{V_x}\underset{+}{V_y} + \underset{-}{V_{yy}}\underset{+}{V_x^2} < 0,$$

следовательно, предпочтения квазивогнуты и, значит, строго выпуклы.

Б. Для $U(x, y) = \alpha x + \beta \ln y$

Уравнение кривой безразличия: приравняем к константе $\alpha x + \beta \ln y = K$, откуда $\ln y = \dfrac{K - \alpha x}{\beta}$,

$$y = \exp\left\{\frac{K - \alpha x}{\beta}\right\}.$$

Наклон: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\exp\left\{\dfrac{K - \alpha x}{\beta}\right\} < 0$, кривая безразличия имеет отрицательный наклон.

Выпуклость: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\exp\left\{\dfrac{K - \alpha x}{\beta}\right\} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2\exp\left\{\dfrac{K - \alpha x}{\beta}\right\} > 0,$ кривая безразличия выпукла к началу координат.

Монотонность: $U_x = \alpha > 0$ и $U_y = \dfrac{\beta}{y} > 0$, следовательно, предпочтения строго монотонны.

Квазивогнутость: $U_{xx} = 0,\quad U_{yy} = -\dfrac{\beta}{y^2},\quad U_{xy} = 0;$

$$\underset{0}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{+}{U_x}\underset{+}{U_y} + \underset{-}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} < 0,$$

следовательно, предпочтения квазивогнуты и, значит, строго выпуклы.

В. Для $U(x, y) = \left(x^\sigma + y^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}}$

Заметим прежде всего, что $U(x, y) = \left(x^\sigma + y^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ — это стандартная ***CES-функция*** (функция полезности с постоянной эластичностью замещения).

Уравнение кривой безразличия: возьмем монотонную трансформацию, возведя в степень σ,

$$V(x, y) = \left(U(x, y)\right)^{\sigma} = x^{\sigma} + y^{\sigma}.$$

Приравняем к константе: $x^{\sigma} + y^{\sigma} = K$. Откуда $y = (K - x^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}}$.

Наклон: $\frac{dy}{dx} = \underset{+}{\frac{1}{\sigma}}\underset{+}{(K - x^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}-1}}\underset{-}{(-\sigma)}\underset{+}{x^{\sigma-1}} < 0$, кривая безразличия имеет отрицательный наклон.

Выпуклость: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, кривая безразличия выпукла к началу координат.

Монотонность: $V_x = \sigma x^{\sigma-1} > 0$, $V_y = \sigma y^{\sigma-1} > 0$, следовательно, предпочтения строго монотонны.

Квазивогнутость: $V_{xx} = \sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2} < 0$, $V_{yy} = \sigma(\sigma-1)y^{\sigma-2} < 0$, $V_{xy} = 0$;

$$\underset{-}{V_{xx}}\underset{+}{V_y^2} - 2\underset{0}{V_{xy}}\underset{+}{V_x}\underset{+}{V_y} + \underset{-}{V_{yy}}\underset{+}{V_x^2} < 0,$$

следовательно, предпочтения квазивогнуты и, значит, строго выпуклы.

◆ **Задача 1.9.** Для следующих функций полезности определите степень их монотонности (сильная или слабая) и выпуклости (сильная или слабая), нарисуйте соответствующие кривые безразличия:

а) $U(x, y) = x$;
б) $U(x, y) = x + y$;
в) $U(x, y) = x^2 + y^2$;
г) $U(x, y) = y - x^2$;
д) $U(x, y) = \min\{x, y\}$.

Решение.

А. Для $U(x, y) = x$

Заметим прежде всего, что X — ***нейтральное благо*** по отношению к благу Y, поскольку потребитель не извлекает никакой полезности из потребления блага Y.

Монотонность: $U_x = 1 > 0$, $U_y = 0$, следовательно, предпочтения слабо монотонны.

Выпуклость (проверим ее по условию квазивогнутости): условие квазивогнутости не соблюдается, так как

$$\underset{0}{U_{xx}}\underset{0}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{+}{U_x}\underset{0}{U_y} + \underset{0}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} = 0 - 0 + 0 \cdot 1^2 = 0.$$

Следовательно, предпочтения слабо выпуклые.

Уравнение кривой безразличия: $x = K$ (рис. 1.2).

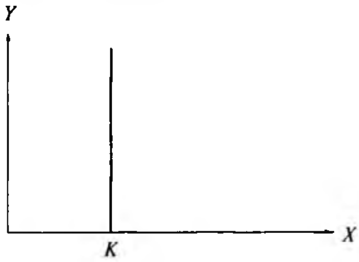


Рис. 1.2

Б. Для $U(x, y) = x + y$

Заметим, что блага X и Y — ***совершенные субституты***.

Монотонность: $U_x = 1 > 0$, $U_y = 1 > 0 \Rightarrow$ предпочтения строго монотонны (при фиксированном X и растущем Y полезность возрастает, следовательно, потребитель строго предпочитает большее количество блага меньшему).

Выпуклость (проверим ее по условию квазивогнутости):

$$U_{xx} = 0, \qquad U_{yy} = 0, \qquad U_{xy} = 0;$$

$$\underset{0}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{+}{U_x}\underset{+}{U_y} + \underset{0}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} = 0 \cdot 1^2 - 0 + 0 \cdot 1^2 = 0.$$

Условие соблюдается $\Rightarrow$ функция полезности слабо квазивогнутая $\Rightarrow$ кривая безразличия слабо выпукла.

Уравнение кривой безразличия: $x + y = K \Rightarrow y = K - x$ (рис. 1.3).

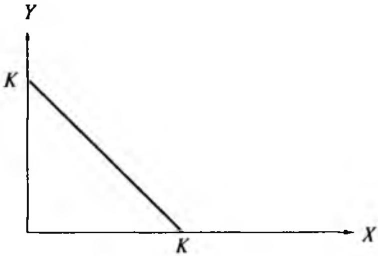


Рис. 1.3

В. Для $U(x, y) = x^2 + y^2$

Заметим, что X и Y — ***блага, вызывающие привыкание*** (*addictive goods*).

Монотонность: $U_x = 2x > 0$, $U_y = 2y > 0 \Rightarrow$ предпочтения строго монотонны.

Выпуклость (проверим ее по условию квазивогнутости):

$$U_{xx}=2, \quad U_{yy}=2, \quad U_{xy}=0;$$

$$\underset{+}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{+}{U_x}\underset{+}{U_y} + \underset{+}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} = 2 \cdot 4y^2 - 0 + 2 \cdot 4x^2 > 0.$$

Следовательно, функция полезности не квазивогнутая $\Rightarrow$ кривая безразличия и предпочтения невыпуклы.

Уравнение кривой безразличия: $x^2 + y^2 = K$. Следовательно, $y = \sqrt{K - x^2}$:

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{K - x^2}} < 0 \Rightarrow$ кривая безразличия имеет отрицательный наклон;

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{K}{(K - x^2)^{3/2}} < 0 \Rightarrow$ кривая безразличия вогнута (рис. 1.4).

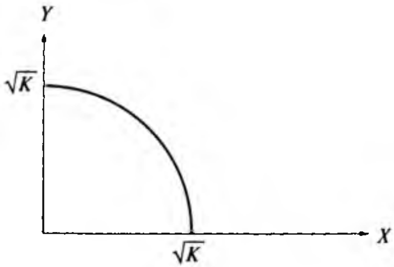


Рис. 1.4

Г. Для $U(x, y) = y - x^2$

Заметим, что X — ***«плохое» благо*** (*inferior good*), поскольку рост его потребления снижает полезность.

Монотонность: $U_x = -2x < 0$, $U_y = 1 > 0 \Rightarrow$ предпочтения слабо монотонны.

Выпуклость (проверим ее по условию квазивогнутости):

$$U_{xx} = -2, \qquad U_{yy} = 0, \qquad U_{xy} = 0;$$

$$\underset{-}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{-}{U_x}\underset{+}{U_y} + \underset{0}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} = -2\cdot 1^2 - 0 + 0\cdot 4x^2 < 0.$$

Следовательно, функция полезности квазивогнутая $\Rightarrow$ кривые безразличия и предпочтения строго выпуклы.

Уравнение кривой безразличия: $y - x^2 = K$. Следовательно, $y = K + x^2$:

$\dfrac{dy}{dx} = 2x > 0 \Rightarrow$ кривая безразличия имеет положительный наклон;

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ кривая безразличия выпукла (рис. 1.5).

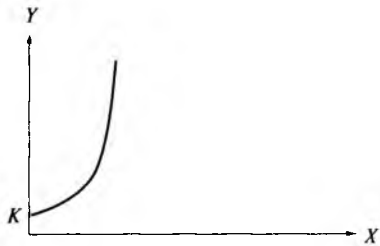


Рис. 1.5

Д. Для $U(x, y) = \min\{x, y\}$

Заметим, что X и Y — ***блага-комплементы*** (***блага Леонтьева***). Функция недифференцируема, поэтому традиционные методы проверки монотонности и выпуклости предпочтений, а также наклона кривой безразличия использовать нельзя.

График: $\min\{x, y\} = K$. Пусть $x = y = K$ — это точка A. Теперь допустим, что $x > K$ (это горизонтальная ветвь на кривой безразличия), а $y > K$ (вертикальная ветвь) (рис. 1.6).

Предпочтения слабо монотонны, поскольку в потребительском наборе B блага Y больше, чем в наборе A, а в наборе C блага X больше, чем в наборе A. Но оба набора (B и C) безразличны к набору A, поскольку находятся на одной с ним кривой безразличия.

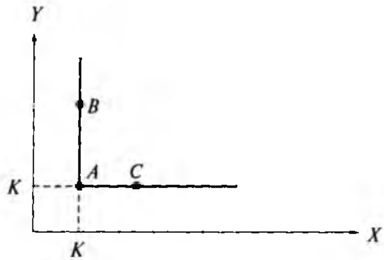


Рис. 1.6

Кривая безразличия слабо выпукла, поскольку, с одной стороны, выпукла комбинация благ A и B, а с другой стороны, блага A и C находятся на самой кривой безразличия, а не выше ее.

◆ **Задача 1.10.** Проверьте следующие функции полезности на строгую вогнутость, а не строго вогнутые из этих функций проверьте на строгую квазивогнутость:

а) $U(x, y) = xy + y$;

б) $U(x, y) = x^{\alpha} + y^{\beta}$, где $\alpha > 1$ и $\beta > 1$;

в) $U(x, y) = x \ln y$;

г) $U(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Решение.

А. Для $U(x, y) = xy + y$

$U_x = y$, $U_{xx} = 0$ (условие $U_{xx} < 0$ не соблюдается), следовательно, функция не строго вогнута. Дальнейшие вычисления для проверки строгой вогнутости не нужны;

$U_y = x + 1$, $U_{yy} = 0$, $U_{xy} = 1$;

$\underset{0}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{1}{U_{xy}}\underset{y}{U_x}\underset{x+1}{U_y} + \underset{0}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} = -2y(x+1) < 0$ (условие соблюдается), функция строго квазивогнута.

Б. Для $U(x, y) = x^{\alpha} + y^{\beta}$

$U_x = \alpha x^{\alpha-1}$, $U_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0$ (условие не соблюдается), функция не строго вогнута;

$$U_y = \beta y^{\beta-1}, \quad U_{yy} = \beta(\beta-1)y^{\beta-2} > 0, \quad U_{xy} = 0;$$

$$\underset{+}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{+}{U_x}\underset{+}{U_y} + \underset{+}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} > 0$$ (условие не соблюдается),

функция не строго квазивогнутая.

В. Для $U(x, y) = x\ln y$

$U_x = \ln y, \quad U_{xx} = 0$ (условие не соблюдается),

функция не строго вогнута;

$$U_y = \frac{x}{y}, \quad U_{yy} = -\frac{x}{y^2}, \quad U_{xy} = \frac{1}{y};$$

$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = 0 - 2\frac{1}{y}\ln y\frac{x}{y} - \frac{x}{y^2}(\ln y)^2 < 0$ (условие соблюдается), функция строго квазивогнута.

Г. Для $U(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

$U_x = -x^{-2}, \quad U_{xx} = -(-2x^{-3}) > 0$ (условие не соблюдается),

функция не строго вогнута;

$$U_y = -y^{-2}, \quad U_{yy} = -(-2y^{-3}) > 0, \quad U_{xy} = 0;$$

$$\underset{+}{U_{xx}}\underset{+}{U_y^2} - 2\underset{0}{U_{xy}}\underset{-}{U_x}\underset{-}{U_y} + \underset{+}{U_{yy}}\underset{+}{U_x^2} > 0$$ (условие не соблюдается),

функция не строго квазивогнутая.

◆ **Задача 1.11.** Проверьте, однородны ли следующие функции полезности, и определите, являются ли неоднородные функции гомотетичными:

а) $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$;

б) $U(x, y) = xy + x$;

в) $U(x, y) = x^{\sigma} + y^{\sigma}$;

г) $U(x, y) = e^{\sqrt{x+y}}$;

д) $U(x, y) = \ln x + \ln y$;

е) $U(x, y) = x + \ln y$.

Решение.

Напомним, что функция считается ***однородной***, если

$$U(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha}U(x, y),$$

где α — порядок однородности.

А. Для $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$$U(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x \lambda y}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{xy}} = \lambda^{-1}\frac{1}{\sqrt{xy}},$$

функция однородная порядка -1.

Б. Для $U(x, y) = xy + x$

$$U(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y + \lambda x = \lambda(\lambda xy + x) \neq \lambda^{\alpha} U(x, y),$$

функция неоднородна. Поскольку не существует монотонной трансформации однородной функции, которая равна $U(x, y)$, функция негомотетична.

В. Для $U(x, y) = x^{\sigma} + y^{\sigma}$

$$U(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\sigma} x^{\sigma} + \lambda^{\sigma} y^{\sigma} = \lambda^{\sigma}(x^{\sigma} + y^{\sigma}),$$

функция однородная порядка σ.

Г. Для $U(x, y) = e^{\sqrt{x+y}}$

$$U(\lambda x, \lambda y) = e^{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = e^{\sqrt{\lambda(x+y)}} = e^{\sqrt{\lambda}\sqrt{x+y}},$$

функция неоднородна. Однако

$$\sqrt{x + y} = \sqrt{\lambda x + \lambda y} = \sqrt{\lambda}\sqrt{x + y} = \lambda^{\frac{1}{2}}\sqrt{x + y}$$

является однородной функцией порядка $\dfrac{1}{2}$, следовательно, исходная функция $U(x, y) = e^{\sqrt{x+y}}$ гомотетична.

Д. Для $U(x, y) = \ln x + \ln y$

$$U(\lambda x, \lambda y) = \ln\lambda x + \ln\lambda y = \ln\lambda + \ln x + \ln\lambda + \ln y = 2\ln\lambda + \ln x + \ln y,$$

функция неоднородна. Однако монотонная трансформация этой функции $V(x, y) = xy$

$$V(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y = \lambda^2 xy$$

является однородной функцией второго порядка. Следовательно, исходная функция $U(x, y) = \ln x + \ln y$ гомотетична.

Е. Для $U(x, y) = x + \ln y$

$$U(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \ln\lambda y = \lambda x + \ln\lambda + \ln y,$$

функция неоднородна и негомотетична.

◆ **Задача 1.12.** Покажите, что если функция полезности $U(x, y)$ однородная порядка ρ, то частные производные первого порядка однородны порядка $\rho - 1$.

Решение.

По определению однородности $U(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\rho} U(x, y)$. Продифференцировав по x, получаем $\frac{\partial U}{\partial(\lambda x)} \frac{\partial(\lambda x)}{\partial x} = \lambda^{\rho} \frac{\partial U}{\partial x}$. Заметим, что $\frac{\partial(\lambda x)}{\partial x} = \lambda$. Разделив обе стороны равенства на $\frac{\partial(\lambda x)}{\partial x} = \lambda$, получаем $\frac{\partial U}{\partial(\lambda x)} = \lambda^{\rho-1} \frac{\partial U}{\partial x}$. Следовательно, частная производная первого порядка однородна степени $\rho - 1$. Решение для частной производной по y аналогично.

1.3. МАКСИМИЗАЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

◆ **Задача 1.13.** Проверьте следующие функции полезности на возможность углового решения:

а) $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$;

б) $U(x, y) = \ln x + \ln y$;

в) $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;

г) $U(x, y) = x + y^{\frac{1}{3}}$;

д) $U(x, y) = xy + y^2$.

Решение.

Напомним, что в теории максимизации полезности неотрицательность количества потребляемых благ X и Y описывается условием Куна — Таккера. Задача потребителя заключается в максимизации полезности при существующем бюджетном ограничении:

$$\max_{x \geq 0,\, y \geq 0} U(x, y) \quad \text{при} \quad xP_x + yP_y \leq M,$$

где P_x, P_y — цены благ X и Y; M — доход потребителя.

Лагранжиан для этой задачи имеет вид

$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda[\mathrm{M} - xP_x - yP_y]$.

Условие Куна — Таккера для x^* может быть записано так:

$L_x(x^*, y^*, \lambda) = U_x(x^*, y^*) - \lambda P_x \leq 0$,

$x^* L_x = x^*[U_x(x^*, y^*) - \lambda P_x] = 0$,

$x^* \geq 0$.

Аналогично для y^*.

Один из способов **проверки на неотрицательность функции полезности** заключается в следующем: последовательно принимаются допущения, что $X = 0$ и $Y > 0$, а затем, что $X > 0$ и $Y = 0$, и проверяется справедливость равенств $U(x, y) = 0$ и $U(x, y) = -\infty$. Если они справедливы, углового решения быть не может и применять условие Куна — Таккера не требуется. Если равенства соблюдаются только для одного из благ, то требуется использовать условие Куна — Таккера только для этого блага.

А. Для $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ по условию Куна — Таккера:

- если $x = 0$ и $y > 0$, возможно ли, что $U(x, y) = 0$? Да. Поскольку $U(x, y) = 0^{\alpha} y^{\beta} = 0$, то X должен быть положительным, и условие Куна — Таккера не используется для X;
- если $y = 0$ и $x > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = 0$? Да. Поскольку $U(x, y) = x^{\alpha} 0^{\beta} = 0$, то Y должен быть положительным, и условие Куна — Таккера не используется для Y. Угловых решений не существует.

Б. Для $U(x, y) = \ln x + \ln y$:

- если $x = 0$ и $y > 0$, возможно ли, что $U(x, y) = -\infty$? Да. Поскольку $U(x, y) = \ln 0 + \ln y = -\infty + \ln y = -\infty$, то X должен быть положительным, и условие Куна — Таккера не используется для X;
- если $y = 0$ и $x > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = -\infty$? Да. Поскольку $U(x, y) = \ln x + \ln 0 = \ln x + (-\infty) = -\infty$, то Y должен быть положительным, и условие Куна — Таккера не используется для Y.

  Угловых решений не существует.

В. Для $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$:

- если $x = 0$ и $y > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = 0$? Нет. Поскольку $U(x, y) = \sqrt{0} + \sqrt{y} > 0$, то X может равняться нулю, и условие Куна — Таккера должно использоваться для X;
- если $y = 0$ и $x > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = 0$? Нет. Поскольку $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{0} > 0$, то Y может равняться нулю, и условие Куна — Таккера должно использоваться для Y.

  Угловые решения существуют.

Г. Для $U(x, y) = x + y^{\frac{1}{3}}$:

- если $x = 0$ и $y > 0$, возможно ли, что $U(x, y) = 0$? Нет. Поскольку $U(x, y) = 0 + y^{\frac{1}{3}} > 0$, то X может равняться нулю, и условие Куна — Таккера должно использоваться для X;
- если $x = 0$ и $y > 0$, возможно ли, что $U(x, y) = -\infty$? Нет. Поскольку $U(x, y) = 0 + y^{\frac{1}{3}} > 0$, то X может равняться нулю, и условие Куна — Таккера должно использоваться для X;
- если $y = 0$ и $x > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = 0$? Нет. Поскольку $U(x, y) = x + 0^{\frac{1}{3}} \neq 0$, то Y может равняться нулю, и условие Куна — Таккера должно использоваться для Y;
- если $y = 0$ и $x > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = -\infty$? Да. Поскольку $U(x, y) = x + 0^{\frac{1}{3}} \neq -\infty$, то Y не может равняться нулю, и условие Куна — Таккера не должно использоваться для Y.

Угловые решения невозможны.

Д. Для $U(x, y) = xy + y^2$:

- если $x = 0$ и $y > 0$, возможно ли, что $U(x, y) = 0$? Нет. Поскольку $U(x, y) = 0 \cdot y + y^2 > 0$, то X может равняться нулю, и условие Куна — Таккера должно использоваться для X;
- если $y = 0$ и $x > 0$, справедливо ли, что $U(x, y) = 0$? Да. Поскольку $U(x, y) = x \cdot 0 + 0^2 = 0$, то Y не может равняться нулю, и условие Куна — Таккера не должно использоваться для Y.

Угловых решений не существует.

◆ **Задача 1.14.** Рассчитайте величину маршаллианского спроса, максимизирующую полезность потребления при бюджетном ограничении $xP_x + yP_y \leq M$:

а) $U(x, y) = xy$;

б) $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta < 1$;

в) $U(x, y) = \ln x + \ln y$;

г) $U(x, y) = \sqrt{xy}$;

д) $U(x, y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y$.

Решение.

Напомним, что ***маршаллианская функция спроса*** является решением задачи максимизации полезности потребителя при условии, что расходы не превышают доход потребителя, т.е.

$$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0} U(x, y) \quad \text{при условии} \quad xP_x + yP_y \leq M.$$

А. Для $U(x, y) = xy$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений, рассчитав первые частные производные функции полезности (если предпочтения монотонны, бюджетное ограничение может быть записано как равенство, т.е. потребитель израсходует весь свой доход):

$$U_x = y > 0, \qquad U_y = x > 0.$$

Следовательно, предпочтения строго монотонны и бюджетное ограничение можно переписать как $xP_x + yP_y = M$.

Шаг 2. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка (это позволит превратить исходную задачу условной оптимизации выбора потребителя в задачу безусловной оптимизации):

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda[M - xP_x - yP_y];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda P_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (3)$$

Шаг 3. Проверить условие второго порядка через проверку функции полезности на строгую квазивогнутость, что эквивалентно выпуклости кривой безразличия (это позволит подтвердить, что условия первого порядка указывают именно на максимум функции полезности. Вспомним, что строго квазивогнутые функции также строго вогнуты):

$$U_x = y, \qquad U_{xx} = 0,$$
$$U_y = x, \qquad U_{yy} = 0,$$
$$U_{xy} = 1;$$
$$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = -2yx < 0.$$

Условие выполняется.

Шаг 4. Решить задачу максимизации полезности:

(i) из (1) и (2) выразить x и y и исключить λ:

$$y = \lambda P_x, \qquad x = \lambda P_y, \qquad \frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y};$$

(ii) выразить одну из переменных через другую:

$$y = \frac{xP_x}{P_y}, \qquad x = \frac{yP_y}{P_x};$$

(iii) подставить уравнения из (ii) в бюджетное ограничение или уравнение (3):

$$xP_x + yP_y = M;$$

$$xP_x + \frac{xP_x}{P_y}P_y = M, \qquad 2xP_x = M, \qquad \text{откуда} \qquad x^m = \frac{M}{2P_x};$$

$$\frac{yP_y}{P_x}P_x + yP_y = M, \qquad 2yP_y = M, \qquad \text{откуда} \qquad y^m = \frac{M}{2P_y}.$$

Здесь x^m и y^m — размеры маршаллианского спроса, т.е. размеры потребления товаров X и Y, которые максимизируют полезность потребления.

Б. Для $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$$U_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta > 0, \qquad U_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1} > 0.$$

Следовательно, предпочтения строго монотонны, и бюджетное ограничение можно переписать как равенство: $xP_x + yP_y = M$.

Шаг 2. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda) = x^\alpha y^\beta + \lambda[M - xP_x - yP_y];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta - \lambda P_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \beta x^\alpha y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (3)$$

Шаг 3. Проверить условие второго порядка:

$$U_x = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} > 0, \quad U_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} < 0, \quad \text{если} \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$U_y = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} > 0, \quad U_{yy} = \beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2} < 0, \quad \text{если} \quad 0 < \beta < 1,$$

$$U_{xy} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1};$$

$U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 > 0$ выполняется, если $\alpha + \beta < 1$. Следовательно, функция полезности строго вогнута и имеет одну точку максимума для $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta < 1$.

Шаг 4. Решить задачу максимизации полезности:

(i) из (1) и (2) исключить λ:

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{P_x}{P_y};$$

(ii) выразить одну из переменных через другую:

$$x = \frac{y\alpha P_y}{\beta P_x}, \qquad y = \frac{x\beta P_x}{\alpha P_y};$$

(iii) подставить уравнения из (ii) в бюджетное ограничение или уравнение (3):

$$xP_x + \frac{x\beta P_x}{\alpha P_y}P_y = M, \qquad xP_x\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = M;$$

$$\frac{y\alpha P_y}{\beta P_x}P_x + yP_y = M, \qquad yP_y\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = M.$$

Откуда $x^m = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\dfrac{M}{P_x}, \qquad y^m = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\dfrac{M}{P_y}.$

В. Для $U(x, y) = \ln x + \ln y$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$$U_x = \frac{1}{x} > 0, \qquad U_y = \frac{1}{y} > 0.$$

Следовательно, задача заключается в следующем:

$$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0} U(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{при условии, что} \quad xP_x + yP_y = M.$$

Шаг 2. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda) = \ln x + \ln y + \lambda[M - xP_x - yP_y];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda P_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (3)$$

Шаг 3. Проверить условие второго порядка:

$$U_x = \frac{1}{x}, \qquad U_{xx} = -\frac{1}{x^2},$$

$$U_y = \frac{1}{y}, \qquad U_{yy} = -\frac{1}{y^2},$$

$$U_{xy} = 0;$$

$$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{y^2} - 0 \cdot \frac{1}{x}\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\frac{1}{x^2} < 0.$$

Условие квазивогнутости выполняется, следовательно, условия первого порядка указывают на максимум функции полезности.

Шаг 4. Решить задачу максимизации полезности:

(i) из (1) и (2) исключить λ:

$$\frac{1}{x} = \lambda P_x, \qquad \frac{1}{y} = \lambda P_y, \qquad \frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y};$$

(ii) выразить одну из переменных через другую:

$$y = \frac{xP_x}{P_y}, \qquad x = \frac{yP_y}{P_x};$$

(iii) подставить уравнения из (ii) в бюджетное ограничение или уравнение (3):

$$xP_x + yP_y = M;$$

$$xP_x + \frac{xP_x}{P_y}P_y = M, \qquad 2xP_x = M, \qquad \text{откуда} \qquad x^m = \frac{M}{2P_x};$$

$$\frac{yP_y}{P_x}P_x + yP_y = M, \qquad 2yP_y = M, \qquad \text{откуда} \qquad y^m = \frac{M}{2P_y}.$$

Заметим, что x^m и y^m эквивалентны спросу, полученному в п. А, поскольку исходные функции полезности — монотонные трансформации друг друга.

Г. Для $U(x, y) = \sqrt{xy}$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$$U_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}} > 0, \qquad U_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}} > 0.$$

Предпочтения монотонны. Следовательно, задача заключается в следующем:

$$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0} U(x, y) = \sqrt{xy} \text{ при условии, что } xP_x + yP_y = M.$$

Шаг 2. Проверить необходимость использования условия Куна — Таккера.

Если $x = 0$, то $U(x, y) = \sqrt{0 \cdot y} = 0$, следовательно, условие Куна — Таккера не используется для X.

Если $y = 0$, то $U(x, y) = \sqrt{x \cdot 0} = 0$, следовательно, условие Куна — Таккера не используется для Y.

Шаг 3. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{xy} + \lambda[M - xP_x - yP_y];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \lambda P_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (3)$$

Шаг 4. Проверить условие второго порядка

$U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 < 0.$

Для этого можно взять монотонную трансформацию исходной функции полезности:

$$V = \ln U(x, y) = \ln\sqrt{xy} = \ln x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y;$$

$$V_x = \frac{1}{2x}, \qquad V_{xx} = -\frac{1}{2x^2},$$

$$V_y = \frac{1}{2y}, \qquad V_{yy} = -\frac{1}{2y^2},$$

$$V_{xy} = 0.$$

Условие строгой квазивогнутости монотонной трансформации исходной функции полезности

$$V_{xx}V_y^2 - 2V_{xy}V_xV_y + V_{yy}V_x^2 = -\frac{1}{2x^2}\frac{1}{4y^2} - 0\cdot\frac{1}{2x}\frac{1}{2y} - \frac{1}{2y^2}\frac{1}{4x^2} < 0$$

выполняется. Следовательно, исходная функция тоже строго квазивогнута и, как результат, строго выпукла, и условия первого порядка указывают на максимум функции полезности.

Шаг 5. Решить задачу максимизации полезности:

(i) из (1) и (2) исключить λ:

$$\frac{y}{2\sqrt{xy}} = \lambda P_x, \qquad \frac{x}{2\sqrt{xy}} = \lambda P_y, \qquad \frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y};$$

(ii) выразить одну из переменных через другую:

$$y = \frac{xP_x}{P_y}, \qquad x = \frac{yP_y}{P_x};$$

(iii) подставить уравнения из (ii) в бюджетное ограничение или уравнение (3):

$$xP_x + yP_y = M;$$

$$xP_x + \frac{xP_x}{P_y}P_y = M, \qquad 2xP_x = M, \qquad \text{откуда} \qquad x^m = \frac{M}{2P_x};$$

$$\frac{yP_y}{P_x}P_x + yP_y = M, \qquad 2yP_y = M, \qquad \text{откуда} \qquad y^m = \frac{M}{2P_y}.$$

Заметим, что x^m и y^m эквивалентны спросу, полученному в п. А, поскольку исходные функции полезности — монотонные трансформации друг друга.

Д. Для $U(x, y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y$.

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$$U_x = \frac{1}{2x} > 0, \qquad U_y = \frac{1}{2y} > 0.$$

Предпочтения монотонны. Следовательно, бюджетное ограничение можно переписать как равенство и задача будет заключаться в следующем:

$$\max_{x \geq 0,\, y \geq 0} U(x, y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y \text{ при условии, что } xP_x + yP_y = M.$$

Шаг 2. Проверить необходимость использования условия Куна — Таккера.

Если $x = 0$ и $y > 0$, то $U(x, y) = \frac{1}{2}\ln 0 + \frac{1}{2}\ln y = -\infty$, следовательно, условие Куна — Таккера не используется для X.

Если $y = 0$ и $x > 0$, то $U(x, y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 0 = -\infty$, следовательно, условие Куна — Таккера не используется для Y.

Угловых решений не существует.

Шаг 3. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y + \lambda[M - xP_x - yP_y];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2x} - \lambda P_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2y} - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (3)$$

Шаг 4. Проверить условие второго порядка. Так как условие $U_{xx}U_y^2 - 2U_{xy}U_xU_y + U_{yy}U_x^2 < 0$ соблюдается (см. п. Г, шаг 4), исходная функция тоже строго квазивогнута и, как результат, строго выпукла. Условия первого порядка указывают на максимум функции полезности.

Шаг 5. Решить задачу максимизации полезности:

(i) из (1) и (2) исключить λ:

$$\frac{1}{2x} = \lambda P_x, \qquad \frac{1}{2y} = \lambda P_y, \qquad \frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y};$$

(ii) выразить одну из переменных через другую:

$$y = \frac{xP_x}{P_y}, \qquad x = \frac{yP_y}{P_x};$$

(iii) подставить уравнения из (ii) в бюджетное ограничение или уравнение (3):

$$xP_x + yP_y = M;$$

$$xP_x + \frac{xP_x}{P_y}P_y = M, \qquad 2xP_x = M, \qquad \text{откуда} \qquad x^m = \frac{M}{2P_x};$$

$$\frac{yP_y}{P_x}P_x + yP_y = M, \qquad 2yP_y = M, \qquad \text{откуда} \qquad y^m = \frac{M}{2P_y}.$$

Заметим, что x^m и y^m эквивалентны спросу, полученному в п. А, поскольку исходные функции полезности — монотонные трансформации друг друга.

◆ **Задача 1.15.** Для следующих функций полезности рассчитайте маршаллианский спрос, максимизирующий полезность потребления при $xP_x + yP_y \le M$:

а) $U(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$, где $\alpha, \beta > 0$ и $x \le k$ (при условии нормирования потребления блага X, которое не может превышать некоторого уровня $k > 0$);

б) $U(x, y) = x + y$. Нарисуйте кривые безразличия, соответствующие этой функции полезности;

в) $U(x, y) = \alpha x + \ln y$, где $\alpha > 0$. Нарисуйте кривые безразличия, соответствующие этой функции полезности;

г) $U(x, y) = -(k - x)^2 - (k - y)^2$, где (k, k) — уровни насыщения благами X и Y. Нарисуйте кривые безразличия, соответствующие этой функции полезности.

Решение.

А. Для $U(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$, где $\alpha, \beta > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x \leq k$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$$U_x = \frac{\alpha}{x} > 0, \qquad U_y = \frac{\beta}{y} > 0.$$

Предпочтения монотонны. Заметим, что $x \leq k$ можно переписать как $k - x \geq 0$. Если бы оба ограничения были неравенствами, то ни одно из них нельзя было бы переписать как равенство. Следовательно, задача заключается в следующем:

$$\max_{x \geq 0,\, y \geq 0} U(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

при условии, что $xP_x + yP_y = M$ и $k - x \geq 0$.

Шаг 2. Проверить необходимость использования условия Куна — Таккера. Заметим, что варианты $x = 0$ или $y = 0$ невозможны.

Если $x = 0$, то $U(x, y) = -\infty$.

Если $y = 0$, то $U(x, y) = -\infty$.

Углового решения нет, использовать условие Куна — Таккера для X и Y не требуется. Однако его нужно применить для третьего ограничения в виде неравенства $(k - x \geq 0)$.

Шаг 3. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda, \mu) = \alpha \ln x + \beta \ln y + \lambda[M - xP_x - yP_y] + \mu[k - x];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\alpha}{x} - \lambda P_x - \mu = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\beta}{y} - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = k - x \geq 0, \qquad (4)$$

$$\mu \frac{\partial L}{\partial \mu} = \mu[k - x] = 0, \qquad (5)$$

$$\mu \geq 0. \qquad (6)$$

Шаг 4. Допустим, что $k - x = 0$. Это означает, что:

- маршаллианский спрос на благо X в этом случае $x^m = k$;
- подставив $x^m = k$ в (3) и выразив y^m, можно получить маршаллианский спрос на благо Y: $M - kP_x - yP_y = 0$, $yP_y = M - kP_x$,

$$y^m = \frac{M}{P_y} - k\frac{P_x}{P_y};$$

- подставив полученное y^m в (2), можно определить

$$\lambda = \frac{\beta}{M - kP_x};$$

- подставив полученную λ и $x^m = k$ в (1), можно определить

$$\mu = \frac{\alpha}{k} - \frac{\beta P_x}{M - kP_x};$$

- учитывая, что по (6) $\mu \geq 0$, $\dfrac{\alpha}{k} - \dfrac{\beta P_x}{M - kP_x} \geq 0$. Следовательно,

$$M \geq \frac{\alpha + \beta}{\alpha} kP_x \quad \left(\begin{array}{c} \text{ограничение на параметр } M \\ \text{в случае жесткого ограничения} \end{array} \right).$$

Шаг 5. Допустим теперь, что $k - x > 0$. Это означает, что:

- маршаллианский спрос на благо X в этом случае $x^m < k$;
- из (5) следует, что $\mu = 0$;
- если из (1) и (2) исключить λ: $\dfrac{\alpha y}{\beta x} = \dfrac{P_x}{P_y}$, выразить одну из переменных через другую и подставить результат в уравнение (3), получим маршаллианский спрос

$$x^m = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{M}{P_x}, \qquad y^m = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{M}{P_y};$$

- поскольку ограничение нежесткое, $x^m < k$, $\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} \dfrac{M}{P_x} < k$, откуда

$$M < \frac{\alpha + \beta}{\alpha} kP_x \quad \left(\begin{array}{c} \text{ограничение на параметр } M \\ \text{в случае нежесткого ограничения} \end{array} \right).$$

Шаг 6. Выводы:

1. В случае жесткого ограничения $x^m = k$ на потребление блага X:

- спрос на благо X составляет $x^m = k$;

• спрос на благо Y составляет $y^m = \frac{M}{P_y} - k\frac{P_x}{P_y}$;

• доход потребителя должен быть больше определенной величины $M \geq \frac{\alpha + \beta}{\alpha} kP_x$.

Следовательно, даже если потребитель имеет доход, превышающий определенную выше величину, он не сможет покупать больше блага X, поскольку потребление этого блага нормировано.

2. В случае нежесткого ограничения $x^m < k$ на потребление блага X:

• спрос на благо X составляет $x^m = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\frac{M}{P_x}$;

• спрос на благо Y составляет $y^m = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\frac{M}{P_y}$;

• доход потребителя может быть меньше определенной величины $M < \frac{\alpha + \beta}{\alpha} kP_x$.

Следовательно, если доход потребителя меньше, чем определенная выше величина, потребление блага X этого потребителя можно не нормировать, поскольку он все равно не достигнет уровня потребления k, у него просто нет на это денег.

Б. Для $U(x, y) = x + y$

Заметим прежде всего, что блага X и Y — ***совершенные субституты.***

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$U_x = 1 > 0, \qquad U_y = 1 > 0.$

Предпочтения монотонны. Задача потребителя заключается в следующем:

$$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0} U(x, y) = x + y \quad \text{при условии, что} \quad xP_x + yP_y \leq M.$$

Шаг 2. Проверить необходимость использования условия Куна — Таккера.

Если $x = 0$, верно ли, что $U(x, y) = 0$? Нет.
Если $y = 0$, верно ли, что $U(x, y) = 0$? Нет.
Если $x = 0$, верно ли, что $U(x, y) = -\infty$? Нет.
Если $y = 0$, верно ли, что $U(x, y) = -\infty$? Нет.

Следовательно, возможно, что $x = 0$ или $y = 0$, угловые решения существуют и требуется использовать условие Куна — Таккера для X и Y.

Шаг 3. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda[M - xP_x - yP_y];$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda P_x \le 0, \qquad (1)$$

$$x\frac{\partial L}{\partial x} = x(1 - \lambda P_x) = 0, \qquad (2)$$

$$x \ge 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda P_y \le 0, \qquad (4)$$

$$y\frac{\partial L}{\partial y} = y(1 - \lambda P_y) = 0, \qquad (5)$$

$$y \ge 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (7)$$

Шаг 4. Допустим, что $x = 0$ и $y > 0$, т.е. потребитель тратит весь свой доход на благо Y. В этом случае:

- маршаллианский спрос $x^m = 0$, $y^m = \dfrac{M}{P_y}$;
- из (1) следует, что $1 \le \lambda P_x$;
- из (5), поскольку $y > 0$, следует, что $1 - \lambda P_y = 0$, или $1 = \lambda P_y$;
- разделив левые стороны полученных выражений из двух предыдущих пунктов друг на друга, получим $\dfrac{1}{1} \le \dfrac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$. Следовательно, $\dfrac{P_x}{P_y} \ge 1$, или $P_x \ge P_y$.

Таким образом, потребитель истратит весь свой доход на благо Y при условии, что оно дешевле блага X ($P_x \ge P_y$). Графически это означает, что наклон кривых безразличия (U_i) круче наклона бюджетной линии (рис. 1.7).

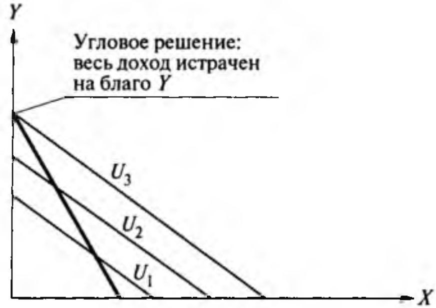


Рис. 1.7

Шаг 5. Допустим теперь, что $x > 0$ и $y = 0$, т.е. потребитель тратит весь свой доход на благо X. В этом случае:

- маршаллианский спрос $x^m = \dfrac{M}{P_x}$, $y^m = 0$;
- из (4) следует, что $1 \le \lambda P_y$;
- из (2), поскольку $x > 0$, следует, что $1 - \lambda P_x = 0$, или $1 = \lambda P_x$;
- разделив левые стороны полученных выражений из двух предыдущих пунктов друг на друга, получим $\dfrac{1}{1} \le \dfrac{\lambda P_y}{\lambda P_x}$. Следовательно, $\dfrac{P_y}{P_x} \ge 1$, или $P_y \ge P_x$.

Таким образом, потребитель истратит весь свой доход на благо X при условии, что оно дешевле блага Y ($P_y \ge P_x$). Графически это означает, что наклон кривых безразличия круче наклона бюджетной линии (рис. 1.8).

Рис. 1.8

Шаг 6. Наконец, допустим, что $x > 0$ и $y > 0$, т.е. потребитель тратит весь свой доход на оба блага. В этом случае:

- маршаллианский спрос $x^m = \dfrac{M - y^m P_y}{P_x}$, $y^m = \dfrac{M - x^m P_x}{P_y}$;
- из (2), поскольку $x > 0$, следует, что $1 - \lambda P_x = 0$, или $1 = \lambda P_x$;
- из (5), поскольку $y > 0$, следует, что $1 - \lambda P_y = 0$, или $1 = \lambda P_y$;
- разделив результаты двух предыдущих вычислений друг на друга, получим $\dfrac{1}{1} = \dfrac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$. Следовательно, $\dfrac{P_x}{P_y} = 1$, или $P_x = P_y$.

Таким образом, потребитель истратит свой доход в равных пропорциях на благо X и благо Y, если цены их равны ($P_x = P_y$). Графически это означает, что наклон кривых безразличия и бюджетной линии совпадает (рис. 1.9).

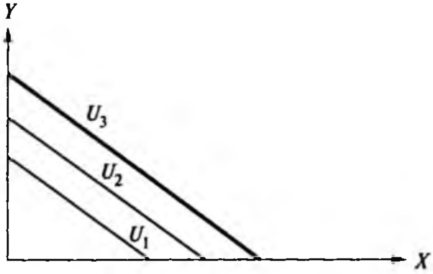


Рис. 1.9

Шаг 7. Выводы:

- если $P_x > P_y$, маршаллианский спрос составляет

$$x^m = 0, \quad y^m = \frac{M}{P_y};$$

- если $P_x = P_y$, маршаллианский спрос составляет

$$x^m = \frac{M}{P_x} - y^m, \qquad y^m = \frac{M}{P_x} - x^m;$$

- если $P_x < P_y$, маршаллианский спрос составляет

$$x^m = \frac{M}{P_x}, \quad y^m = 0.$$

В. Для $U(x, y) = \alpha x + \ln y$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$$U_x = \alpha > 0, \qquad U_y = \frac{1}{y} > 0.$$

Предпочтения монотонны. Задача потребителя заключается в следующем:

$$\max_{x \ge 0, y \ge 0} U(x, y) = \alpha x + \ln y$$

при условии, что $xP_x + yP_y \le M$ и $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Шаг 2. Проверить необходимость использования условия Куна — Таккера.

Если $x = 0$, верно ли, что $U(x, y) = 0$? Нет.
Если $y = 0$, верно ли, что $U(x, y) = 0$? Нет.
Если $x = 0$, верно ли, что $U(x, y) = -\infty$? Нет.
Если $y = 0$, верно ли, что $U(x, y) = -\infty$? Да.

Следовательно, для X угловое решение возможно и требуется применить условие Куна — Таккера, а для Y углового решения нет и использовать условие Куна — Таккера не требуется.

Шаг 3. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$$L(x, y, \lambda) = \alpha x + \ln y + \lambda[M - xP_x - yP_y] \text{ при } x \ge 0, \; y \ge 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha - \lambda P_x \le 0, \qquad (1)$$

$$x\frac{\partial L}{\partial x} = x(\alpha - \lambda P_x) = 0, \qquad (2)$$

$$x \ge 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda P_y = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (5)$$

Шаг 4. Допустим, что $x > 0$ и $y = 0$. Это невозможно, поскольку углового решения для Y не существует.

Шаг 5. Допустим, что $x = 0$ и $y > 0$, т.е. потребитель тратит весь свой доход на благо Y (угловое решение).

В этом случае:

- маршаллианский спрос $x^m = 0$ и $y^m = \frac{M}{P_y}$;
- из (1) следует, что $\alpha \le \lambda P_x$;
- из (4) следует, что $\frac{1}{y} = \lambda P_y$;
- разделив левые стороны двух предыдущих выражений друг на друга, получим $\alpha y \le \frac{P_x}{P_y}$. Однако $y^m = \frac{M}{P_y}$. Следовательно, $\alpha \frac{M}{P_y} \le \frac{P_x}{P_y}$, или $M \le \frac{P_x}{\alpha}$, откуда $P_x \ge \alpha M$.

Шаг 6. Наконец, допустим, что $x > 0$ и $y > 0$, т.е. потребитель тратит весь свой доход на оба блага (касательное решение).

В этом случае:

- маршаллианский спрос $x^m = \frac{M - y^m P_y}{P_x}$, $y^m = \frac{M - x^m P_x}{P_y}$;
- из (2), поскольку $x > 0$, следует, что $\alpha - \lambda P_x = 0$, или $\alpha = \lambda P_x$;
- из (4) следует, что $\frac{1}{y} = \lambda P_y$;
- разделив левые стороны двух предыдущих выражений друг на друга, получим $\frac{\alpha}{1/y} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$. Следовательно,

$$y^m(P_x, P_y, M) = \frac{P_x}{\alpha P_y};$$

- подставив это в (5), получим $M = xP_x + yP_y = xP_x + \frac{P_x}{\alpha P_y} P_y$.

Откуда $M - \frac{P_x}{\alpha} = xP_x$. Следовательно,

$$x^m(P_x, P_y, M) = \frac{M}{P_x} - \frac{1}{\alpha};$$

- учитывая, что маршаллианский спрос всегда положителен, $x^m(P_x, P_y, M) = \frac{M}{P_x} - \frac{1}{\alpha} > 0$, получим $\frac{M}{P_x} > \frac{1}{\alpha}$, или $M > \frac{P_x}{\alpha}$.

Шаг 7. Выводы:

- если $M > \dfrac{P_x}{\alpha}$, маршаллианский спрос составляет

$$x^m = \frac{M}{P_x} - \frac{1}{\alpha}, \qquad y^m = \frac{P_x}{\alpha P_y} \quad \text{(рис. 1.10);}$$

Рис. 1.10

- если $M \le \dfrac{P_x}{\alpha}$, маршаллианский спрос составляет

$$x^m = 0, \qquad y^m = \frac{M}{P_y} \quad \text{(рис. 1.11).}$$

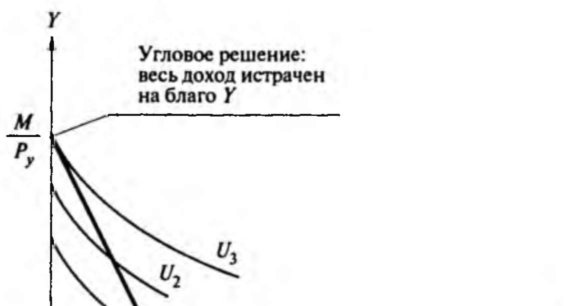


Рис. 1.11

Г. Для $U(x, y) = -(k-x)^2 - (k-y)^2$

Шаг 1. Проверить монотонность предпочтений:

$U_x = 2(k-x) > 0$, если $x < k$;

$U_y = 2(k-y) > 0$, если $y < k$.

Поскольку предпочтения монотонны не для всех значений $x, y \geq 0$, необходимо учитывать случай, когда потребитель не будет использовать весь свой доход на потребление благ. Задача потребителя заключается в следующем:

$$\max_{x\geq 0,\, y\geq 0} U(x, y) = -(k-x)^2 - (k-y)^2 \quad \text{при} \quad xP_x + yP_y \leq M.$$

Шаг 2. Проверить необходимость использования условия Куна — Таккера.

Для X и Y использовать условия Куна — Таккера не требуется, но требуется для λ, поскольку бюджетное ограничение нежесткое.

Шаг 3. Составить лагранжиан и вывести условия первого порядка:

$L(x, y, \lambda) = -(k-x)^2 - (k-y)^2 + \lambda[M - xP_x - yP_y]$ при $x, y \geq 0$;

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(k-x) - \lambda P_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(k-y) - \lambda P_y = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y \geq 0, \qquad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda[M - xP_x - yP_y] = 0, \qquad (4)$$

$$\lambda \geq 0. \qquad (5)$$

Шаг 4. Допустим, что бюджетное ограничение жесткое, т.е. $xP_x + yP_y < M$.

Из (4) следует, что $\lambda = 0$; из (1), поскольку $\lambda = 0$, следует, что $x^m = k$; из (2), поскольку $\lambda = 0$, следует, что $y^m = k$. Оператор сужения равен $x^m = y^m = k$. Подставляя его в бюджетное ограничение, получаем $kP_x + kP_y < M$, или $k(P_x + P_y) < M$. При этом условии точка насыщения будет находиться ниже бюджетной линии, а потребительский набор — внутри бюджетного ограничения (рис. 1.12). Потребитель будет потреблять каждое благо в размере k.

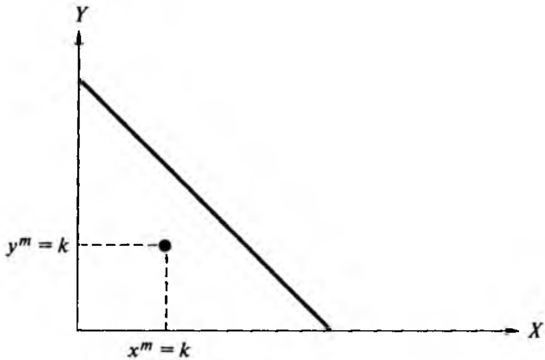


Рис. 1.12

Шаг 5. Допустим, что бюджетное ограничение жесткое, но является равенством:

$xP_x + yP_y = M.$

Из (4) следует, что $\lambda \geq 0$, поскольку $M - xP_x - yP_y = 0$.

Если $\lambda = 0$, из (1) и (2) следует, что оператор сужения $x^m = y^m = k$. Подставляя оператор сужения в бюджетное ограничение, получаем $kP_x + kP_y = M$, или $k(P_x + P_y) = M$. Это ситуация, когда точка насыщения потребительского набора находится на границе бюджетного ограничения (рис. 1.13). Потребитель будет потреблять каждое благо в размере k.

Если $\lambda > 0$, точка насыщения потребительского набора находится на границе бюджетного ограничения, так как из (4) следует, что $M - x^mP_x - y^mP_y = 0$. В этой ситуации набор насыщения находится за пределами бюджетного ограничения: $kP_x + kP_y > M$, поскольку из (1) и (2) следует, что $(k - x)P_x + (k - y)P_y = kP_x + kP_y - M > 0$ (рис. 1.14).

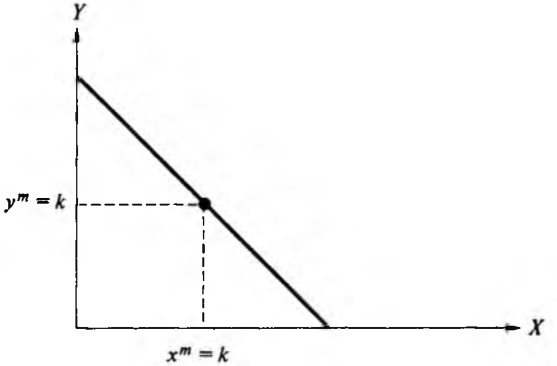


Рис. 1.13

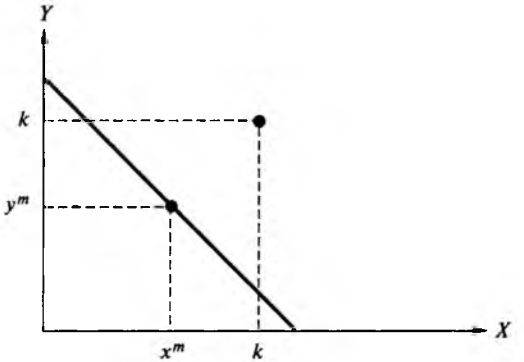


Рис. 1.14

2. ПОТРЕБЛЕНИЕ И СПРОС

2.1. МАРШАЛЛИАНСКАЯ ФУНКЦИЯ СПРОСА

◆ **Задача 2.1.** Вычислите эластичность спроса по цене, перекрестную эластичность спроса и эластичность спроса по доходу для следующих функций полезности:

а) $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ при $xP_x + yP_y \le M$ (предположить, что $\alpha = \beta = 1$);

б) $U(x, y) = x + y$.

Решение.

А. Для $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$

Заметим, что $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ — это ***функция Кобба — Дугласа***. Для нее маршаллианские функции спроса составляют (см. задачу 1.14, п. Б):

$$x^m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{M}{P_x}, \qquad y^m = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{M}{P_y}.$$

Предположим, что $\alpha = \beta = 1$. Тогда функции спроса упрощаются до

$$x^m = \frac{M}{2P_x}, \qquad y^m = \frac{M}{2P_y}.$$

Следовательно, для блага X (для блага Y вычисления аналогичны):

- *эластичность по цене* $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial x^m}{\partial P_x}\dfrac{P_x}{x^m} = -\dfrac{M}{2P_x^2}\dfrac{2P_x}{M}P_x = -1$,

  т.е. маршаллианские функции спроса для функции полезности Кобба — Дугласа имеют единичную эластичность по цене;

- *перекрестная эластичность* $\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial x^m}{\partial P_y}\dfrac{P_y}{x^m} = 0$, т.е. в функции

  полезности Кобба — Дугласа изменение цены одного блага не влияет на спрос на другое благо;

• *эластичность по доходу* $\eta_{xM} = \dfrac{\partial x^m}{\partial M}\dfrac{M}{x^m} = \dfrac{1}{2P_x}\dfrac{2P_x}{M}M = 1$,

т.е. в функции полезности Кобба — Дугласа каждое из благ нормальное.

Б. Для $U(x, y) = x + y$

Заметим, что маршаллианские функции спроса составляют (см. задачу 1.15, п. Б):

$$x^m = \frac{M}{P_x}, \qquad y^m = \frac{M}{P_y}.$$

Следовательно, для блага X (для блага Y вычисления аналогичны):

• *эластичность по цене* $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial x^m}{\partial P_x}\dfrac{P_x}{x^m} = -\dfrac{M}{P_x^2}\dfrac{P_x}{M}P_x = -1$,

т.е. маршаллианские функции спроса имеют унитарную эластичность по цене;

• *перекрестная эластичность* $\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial x^m}{\partial P_y}\dfrac{P_y}{x^m} = 0$, т.е. изменение цены одного блага не влияет на спрос на другое благо;

• *эластичность по доходу* $\eta_{xM} = \dfrac{\partial x^m}{\partial M}\dfrac{M}{x^m} = \dfrac{1}{P_x}\dfrac{P_x}{M}M = 1$, т.е. спрос на благо изменяется пропорционально изменению дохода.

◆ **Задача 2.2.** Докажите следующие свойства маршаллианских функций спроса $x^m(P_x, P_y, M)$ и $y^m(P_x, P_y, M)$:

а) они являются однородными функциями нулевого порядка по цене и доходу, т.е. изменение цен и дохода в одинаковой пропорции не влияет на бюджетное ограничение и на оптимальный выбор потребителя;

б) они соответствуют **правилу эластичности**
$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \eta_{xM} = 0$;

в) они соответствуют **условию агрегирования Энгеля**
$v_x\eta_{xM} + v_y\eta_{yM} = 1$,
т.е. сумма средневзвешенных эластичностей по доходу в маршаллианской функции спроса равна единице;

г) они соответствуют **условию агрегирования Курно**
$v_x(1 + \varepsilon_{xx}) + v_y\varepsilon_{xy} = 0$.

Решение.

А. Для вычисления маршаллианских функций спроса увеличим все компоненты лагранжиана в γ раз, т.е. имеем $\gamma P_x, \gamma P_y$ и γM. Пусть $U(x, y)$ — функция полезности. Составим лагранжиан:

$$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda[\gamma M - \gamma x P_x - \gamma y P_y].$$

Условия первого порядка для этого лагранжиана имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = U_x - \lambda\gamma P_x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = U_y - \lambda\gamma P_y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \gamma(M - xP_x - yP_y) = 0.$$

Следовательно, $U_x/U_y = P_x/P_y$ и $M - xP_x - yP_y = 0$. Заметим, что эти уравнения не зависят от значения γ. Условия первого порядка те же, что и в случае оптимизации полезности при параметрах P_x, P_y и M. Следовательно, $x^m(P_x, P_y, M)$ и $y^m(P_x, P_y, M)$ также являются решениями задачи максимизации полезности при параметрах γP_x, γP_y и γM.

Б. По теореме Эйлера $\dfrac{\partial x^m}{\partial P_x} P_x + \dfrac{\partial x^m}{\partial P_y} P_y + \dfrac{\partial x^m}{\partial M} M = 0.$

Разделим обе части равенства на x^m:

$$\frac{\partial x^m}{\partial P_x}\frac{P_x}{x^m} + \frac{\partial x^m}{\partial P_y}\frac{P_y}{x^m} + \frac{\partial x^m}{\partial M}\frac{M}{x^m} = 0.$$

Нетрудно заметить, что $\dfrac{\partial x^m}{\partial P_x}\dfrac{P_x}{x^m} = \varepsilon_{xx}$, $\dfrac{\partial x^m}{\partial P_y}\dfrac{P_y}{x^m} = \varepsilon_{xy}$, $\dfrac{\partial x^m}{\partial M}\dfrac{M}{x^m} = \eta_{xM}$. Следовательно, $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \eta_{xM} = 0.$

В. Продифференцируем по M бюджетное ограничение $x^m P_x + y^m P_y = M$:

$$P_x \frac{\partial x^m}{\partial M} + P_y \frac{\partial y^m}{\partial M} = 1.$$

Умножив P_x на $\dfrac{x^m}{M}\dfrac{M}{x^m}$ и P_y на $\dfrac{y^m}{M}\dfrac{M}{y^m}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{x^m P_x}{M}\frac{\partial x^m}{\partial M}\frac{M}{x^m}+\frac{y^m P_y}{M}\frac{\partial y^m}{\partial M}\frac{M}{y^m}=1.$$

Обозначим $\frac{x^m P_x}{M}=\nu_x$ и $\frac{y^m P_y}{M}=\nu_y$ доли расходов потребителя на блага X и Y соответственно. Заметим, что $\frac{\partial x^m}{\partial M}\frac{M}{x^m}=\eta_{xM}$ и $\frac{\partial y^m}{\partial M}\frac{M}{y^m}=\eta_{yM}$. Следовательно, получаем условие агрегирования Энгеля $\nu_x\eta_{xM}+\nu_y\eta_{yM}=1$.

г. Продифференцируем по P_x бюджетное ограничение $x^m P_x + y^m P_y = M$:

$$x^m + P_x\frac{\partial x^m}{\partial P_x}+P_y\frac{\partial y^m}{\partial P_x}=0.$$

Умножив P_x на $\frac{x^m}{x^m}$, P_y на $\frac{y^m}{y^m}$ и все выражение на $\frac{P_x}{M}$, получаем

$$\frac{P_x x^m}{M}+\frac{P_x}{M}\frac{x^m}{x^m}P_x\frac{\partial x^m}{\partial P_x}+\frac{P_x}{M}\frac{y^m}{y^m}P_y\frac{\partial y^m}{\partial P_x}=0,$$

или

$$\frac{P_x x^m}{M}+\frac{P_x x^m}{M}\frac{\partial x^m}{\partial P_x}\frac{P_x}{x^m}+\frac{P_y y^m}{M}\frac{\partial y^m}{\partial P_x}\frac{P_x}{y^m}=0.$$

Нетрудно заметить, что $\frac{P_x x^m}{M}=\nu_x$, $\frac{P_y y^m}{M}=\nu_y$, $\frac{\partial x^m}{\partial P_x}\frac{P_x}{x^m}=\varepsilon_{xx}$ и $\frac{\partial y^m}{\partial P_x}\frac{P_x}{y^m}=\varepsilon_{xy}$, откуда получаем условие агрегирования Курно $\nu_x(1+\varepsilon_{xx})+\nu_y\varepsilon_{xy}=0$.

◆ **Задача 2.3.** Покажите, что для маршаллианской функции спроса при существовании только двух благ, справедливы следующие утверждения:

а) оба блага не могут быть предметами роскоши и оба блага не могут быть товарами низшей категории;

б) если спрос на одно из благ имеет унитарную эластичность, то спрос на это благо не зависит от изменения цены другого блага;
в) если спрос на одно из благ имеет эластичность, превышающую -1, то блага являются комплементами;
г) если спрос на одно из благ имеет эластичность меньше чем -1, то блага являются субститутами.

Решение.

А. По условию агрегирования Энгеля $\nu_x\eta_{xM} + \nu_y\eta_{yM} = 1$, т.е. сумма средневзвешенных эластичностей по доходу равна единице. Поскольку $\nu_x + \nu_y = 1$, то либо $\eta_{xM} > 1$ и $\eta_{yM} < 1$, либо $\eta_{xM} < 1$ и $\eta_{yM} > 1$, т.е. спрос на один из товаров должен расти с ростом дохода (предмет роскоши), а на другой — падать (товар низшей категории).

Б. Если $\varepsilon_{xx} = -1$, по условию агрегирования Курно $\nu_x(1 + \varepsilon_{xx}) + \nu_y\varepsilon_{xy} = 0$ имеем $\varepsilon_{xy} = 0$, т.е. спрос на одно благо не зависит от изменения цены другого блага.

В. Если $\varepsilon_{xx} > -1$ и спрос на благо X неэластичный по цене, то $\varepsilon_{xy} < 0$ по условию агрегирования Курно. Следовательно, благо Y является дополняющим для блага X.

Г. Если $\varepsilon_{xx} < -1$ и спрос на благо X эластичный по цене, то $\varepsilon_{xy} > 0$ по условию агрегирования Курно. Следовательно, Y является благом-заменителем для блага X.

2.2. КОСВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

◆ **Задача 2.4.** Для следующих функций полезности выведите косвенную функцию полезности и подтвердите ее однородность нулевого порядка по ценам и по доходу, восстановите по полученной косвенной функции полезности маршаллианские функции спроса:

а) $U(x, y) = xy$;
б) $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$;
в) $U(x, y) = x + \ln y$;
г) $U(x, y) = \min\{x, y\}$.

Решение.

Напомним, что ***косвенная функция полезности*** — функция от цен благ и дохода потребителя — показывает максимальный уровень полезности, который может достичь потребитель при различных сочетаниях цен на блага и своего дохода, т.е.

$$U\left(x^m(P_x, P_y, M),\ y^m(P_x, P_y, M)\right) = V(P_x, P_y, M).$$

А. Для $U(x, y) = xy$

Шаг 1. Вычислить маршаллианские функции спроса.

Используя метод множителей Лагранжа (см. задачу 1.14, п. А), получим

$$x^m = \frac{M}{2P_x}, \qquad y^m = \frac{M}{2P_y}.$$

Шаг 2. Подставить маршаллианские функции спроса в целевую функцию полезности и получить косвенную функцию полезности:

$$V(P_x, P_y, M) = x^m y^m = \frac{M}{2P_x}\frac{M}{2P_y} = \frac{M^2}{4P_xP_y}.$$

Шаг 3. Подтвердить однородность нулевого порядка косвенной функции полезности по ценам и доходу:

$$V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = \frac{(\lambda M)^2}{4\lambda P_x \lambda P_y} = \frac{M^2}{4P_xP_y} = V(P_x, P_y, M).$$

Шаг 4. Восстановить маршаллианские функции спроса по косвенной функции полезности.

Напомним **тождество Роя**: $x^m = -\dfrac{\partial V/\partial P_x}{\partial V/\partial M}$, $y^m = -\dfrac{\partial V/\partial P_y}{\partial V/\partial M}$.

Для восстановления функции спроса на благо X:

• рассчитываем частную производную $V(P_x, P_y, M) = \dfrac{M^2}{4P_xP_y}$ по P_x:

$$\frac{\partial V}{\partial P_x} = -\frac{1}{4}\frac{M^2}{P_y}P_x^{-2} = -\frac{M^2}{4P_x^2P_y}; \qquad (1)$$

• рассчитываем частную производную V по M:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{1}{4}\frac{2M}{P_xP_y} = \frac{M}{2P_xP_y}; \qquad (2)$$

• делим (1) на (2) и добавляем знак «минус»:

$$x^m = -\frac{\partial V/\partial P_x}{\partial V/\partial M} = -\left(-\frac{M^2}{4P_x^2 P_y}\right)\frac{2P_x P_y}{M} = \frac{M}{2P_x}.$$

Аналогично для восстановления функции спроса на благо Y:

• рассчитываем частную производную $V(P_x, P_y, M) = \dfrac{M^2}{4P_x P_y}$ по P_y:

$$\frac{\partial V}{\partial P_y} = -\frac{1}{4}\frac{M^2}{P_x}P_y^{-2} = -\frac{M^2}{4P_x P_y^2}; \qquad (3)$$

• рассчитываем частную производную V по M:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{1}{4}\frac{2M}{P_x P_y} = \frac{M}{2P_x P_y}; \qquad (4)$$

• делим (3) на (4) и добавляем знак «минус»:

$$y^m = -\frac{\partial V/\partial P_y}{\partial V/\partial M} = -\left(-\frac{M^2}{4P_x P_y^2}\right)\frac{2P_x P_y}{M} = \frac{M}{2P_y}.$$

Б. Для $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$

Шаг 1. Вычислить маршаллианские функции спроса (см. задачу 1.14, п. Б, шаг 1):

$$x^m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{M}{P_x}, \quad y^m = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{M}{P_y}.$$

Шаг 2. Подставить их в целевую функцию полезности и получить косвенную функцию полезности:

$$V(P_x, P_y, M) = (x^m)^\alpha (y^m)^\beta =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{M}{P_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{M}{P_y}\right)^\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{1}{P_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta \left(\frac{1}{P_y}\right)^\beta M^{\alpha+\beta}.$$

Заменяем константу: $A = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta.$

Шаг 3. Подтвердить однородность нулевого порядка косвенной функции полезности по ценам и доходу:

$$V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = A\left(\frac{1}{\lambda P_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda P_y}\right)^{\beta}(\lambda M)^{\alpha+\beta} =$$

$$= A\,\frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\lambda^{\alpha+\beta}}\left(\frac{1}{P_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{P_y}\right)^{\beta} M^{\alpha+\beta} = V(P_x, P_y, M).$$

Шаг 4. Восстановить маршаллианские функции спроса по косвенной функции полезности.

Для восстановления функции спроса на благо X:

- рассчитываем частную производную $V(P_x, P_y, M)$ по P_x:

$$\frac{\partial V}{\partial P_x} = -\alpha\left(\frac{1}{P_x}\right)^{1+\alpha} A\left(\frac{1}{P_y}\right)^{\beta} M^{\alpha+\beta}; \qquad (1)$$

- рассчитываем частную производную $V(P_x, P_y, M)$ по M:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = (\alpha+\beta)\left(\frac{1}{P_x}\right)^{\alpha} A\left(\frac{1}{P_y}\right)^{\beta} M^{\alpha+\beta-1}; \qquad (2)$$

- делим (1) на (2) и добавляем знак «минус»:

$$x^m = -\frac{\partial V/\partial P_x}{\partial V/\partial M} = -\left(-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{1}{P_x}\right)^{1+\alpha} P_x^{\alpha} M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{M}{P_x}.$$

Аналогично для блага Y:

$$y^m = -\frac{\partial V/\partial P_y}{\partial V/\partial M} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{M}{P_y}.$$

В. Для $U(x, y) = x + \ln y$

Шаг 1. Вычислить маршаллианские функции спроса.

Лагранжиан задан: $L(x, y, \lambda) = x + \ln y + \lambda[M - xP_x - yP_y]$. Необходимо использовать условия Куна — Таккера только для блага X, поскольку возможно угловое решение. Имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda P_x \le 0, \qquad (1)$$

$$x\frac{\partial L}{\partial x} = x(1-\lambda P_x) = 0, \qquad (2)$$

$$x \ge 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda P_y = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - xP_x - yP_y = 0. \qquad (5)$$

Шаг 2. Найти угловое решение. Допустим, что $x = 0$ и $y > 0$. Тогда:

- маршаллианские функции спроса: $x^m = 0$ и, как следует из (5), $y^m = \frac{M}{P_y}$;
- подставляем y^m в (4) и выражаем λ: $\lambda P_y = \frac{1}{y}$, откуда $\lambda = \frac{1}{P_y y}$;
- подставляем маршаллианский спрос: $\lambda = \frac{1}{P_y y} = \frac{P_y}{P_y M} = \frac{1}{M}$;
- подставляем λ в (1): $1 - \frac{P_x}{M} \le 0$, откуда $1 \le \frac{P_x}{M}$, или $M \le P_x$.

Шаг 3. Найти касательное решение. Теперь допустим, что $x > 0$ и $y > 0$. Тогда:

- из (2) следует, что $1 - \lambda P_x = 0$, а согласно (4) $\frac{1}{y} - \lambda P_y = 0$;
- из (2) и (4) следует, что $\frac{1}{1/y} = \frac{P_x}{P_y}$, откуда $y^m = \frac{P_x}{P_y}$;
- подставляем значение y^m в (5) и выражаем x^m: $x^m = \frac{M}{P_x} - 1$;
- поскольку $x^m > 0$, $\frac{M}{P_x} - 1 > 0$, или $M > P_x$.

Шаг 4. Сформулировать решение задачи максимизации полезности потребителя при существующих ограничениях:

- угловое решение $x^m = 0$, $y^m = \frac{M}{P_y}$ при $M \le P_x$;
- касательное решение $x^m = \frac{M}{P_y} - 1$, $y^m = \frac{P_x}{P_y}$ при $M > P_x$.

Шаг 5. Подставить маршаллианские функции спроса в целевую функцию полезности, в результате чего получатся две косвенные функции полезности:

- для углового решения

$$V_1(P_x, P_y, M) = 0 + \ln\frac{M}{P_y} = \ln\frac{M}{P_y} = \ln M - \ln P_y;$$

- для касательного решения

$$V_2(P_x, P_y, M) = \frac{M}{P_x} - 1 + \ln\frac{P_x}{P_y} = \frac{M}{P_x} - 1 + \ln P_x - \ln P_y.$$

Шаг 6. Подтвердить однородность нулевого порядка косвенной функции полезности по ценам и доходу:

$$V_1(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = \ln\frac{\lambda M}{\lambda P_y} = \ln\frac{M}{P_y} = V_1(P_x, P_y, M);$$

$$\begin{aligned} V_2(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) &= \frac{\lambda M}{\lambda P_x} - 1 + \ln\lambda P_x - \ln\lambda P_y = \\ &= \frac{M}{P_x} - 1 + \ln\lambda + \ln P_x - \ln\lambda - \ln P_y = \\ &= \frac{M}{P_x} - 1 + \ln P_x - \ln P_y = V_2(P_x, P_y, M). \end{aligned}$$

Шаг 7. Восстановить маршаллианские функции спроса по косвенной функции полезности для углового решения.

Для восстановления функции спроса на благо X:

- рассчитываем частную производную $V_1(P_x, P_y, M) = \ln M - \ln P_y$ по P_x:

$$\frac{\partial V_1}{\partial P_x} = 0; \qquad (6)$$

- рассчитываем частную производную V_1 по M:

$$\frac{\partial V_1}{\partial M} = \frac{1}{M}; \qquad (7)$$

- делим (6) на (7) и добавляем знак «минус»:

$$x^m = -\frac{\partial V_1/\partial P_x}{\partial V_1/\partial M} = 0.$$

Аналогично для восстановления функции спроса на благо Y:

- рассчитываем частную производную $V_1(P_x, P_y, M) = \ln M - \ln P_y$ по P_y:

$$\frac{\partial V_1}{\partial P_y} = -\frac{1}{P_y}; \qquad (8)$$

- рассчитываем частную производную V_1 по M:

$$\frac{\partial V_1}{\partial M} = \frac{1}{M}; \qquad (9)$$

- делим (8) на (9) и добавляем знак «минус»:

$$y^m = -\frac{\partial V_1 / \partial P_y}{\partial V_1 / \partial M} = \frac{M}{P_y}.$$

Таким образом, восстановлены маршаллианские функции спроса для углового решения $x^m = 0, \quad y^m = \frac{M}{P_y}.$

Шаг 8. Восстановить маршаллианские функции спроса по косвенной функции полезности для касательного решения.

Для восстановления функции спроса на благо X:

- рассчитываем частную производную $V_2(P_x, P_y, M) = \frac{M}{P_x} - 1 + \ln P_x - \ln P_y$ по P_x:

$$\frac{\partial V_2}{\partial P_x} = -\frac{M}{P_x^2} + \frac{1}{P_x}; \qquad (10)$$

- рассчитываем частную производную V_2 по M:

$$\frac{\partial V_2}{M} = \frac{1}{P_x}; \qquad (11)$$

- делим (10) на (11) и добавляем знак «минус»:

$$x^m = -\frac{\partial V_2 / \partial P_x}{\partial V_2 / \partial M} = -\left(-\frac{M}{P_x^2} + \frac{1}{P_x}\right)P_x = \frac{M}{P_x} - 1.$$

Аналогично для восстановления функции спроса на благо Y:

- рассчитываем частную производную $V_2(P_x, P_y, M) = \frac{M}{P_x} - 1 + \ln P_x - \ln P_y$ по P_y:

$$\frac{\partial V_2}{\partial P_y} = -\frac{1}{P_y}; \qquad (12)$$

• рассчитываем частную производную V_2 по M:

$$\frac{\partial V_2}{\partial M} = \frac{1}{P_x}; \qquad (13)$$

• делим (12) на (13) и добавляем знак «минус»:

$$y^m = -\frac{\partial V_2/\partial P_y}{\partial V_2/\partial M} = \frac{P_x}{P_y}.$$

Таким образом, восстановлены маршаллианские функции спроса для касательного решения $x^m = \frac{M}{P_x} - 1, \quad y^m = \frac{P_x}{P_y}$.

Г. Функция $U(x, y) = \min\{x, y\}$ недифференцируема.

Шаг 1. Вычислить маршаллианские функции спроса. Используя условие $x = y$ при $xP_x + yP_y = M$, имеем $x^m = y^m = \frac{M}{P_x + P_y}$.

Шаг 2. Подставить маршаллианские функции спроса в целевую функцию полезности и получить косвенную функцию полезности:

$$V(P_x, P_y, M) = \min\left\{\frac{M}{P_x + P_y}, \frac{M}{P_x + P_y}\right\}.$$

Поскольку функции одинаковы, любая из них может быть минимумом:

$$V(P_x, P_y, M) = \frac{M}{P_x + P_y}.$$

Шаг 3. Подтвердить однородность нулевого порядка косвенной функции полезности по ценам и доходу:

$$V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = \frac{\lambda M}{\lambda P_x + \lambda P_y} = \frac{M}{P_x + P_y} = V(P_x, P_y, M).$$

Шаг 4. Восстановить маршаллианские функции спроса по косвенной функции полезности.

Для восстановления функции спроса на благо X:

- рассчитываем частную производную $V(P_x, P_y, M) = \dfrac{M}{P_x + P_y}$ по P_x:

$$\frac{\partial V}{\partial P_x} = -\frac{M}{(P_x + P_y)^2}; \qquad (1)$$

- рассчитываем частную производную V по M:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{1}{P_x + P_y}; \qquad (2)$$

- делим (1) на (2) и добавляем знак «минус»:

$$x^m = -\frac{\partial V/\partial P_x}{\partial V/\partial M} = -\left(-\frac{M}{(P_x + P_y)^2}\right)(P_x + P_y) = \frac{M}{P_x + P_y}.$$

Аналогично для блага Y: $y^m = -\dfrac{\partial V/\partial P_y}{\partial V/\partial M} = \dfrac{M}{P_x + P_y}$.

Таким образом, восстановлены маршаллианские функции спроса $x^m = y^m = \dfrac{M}{P_x + P_y}$.

◆ **Задача 2.5.** Докажите следующие свойства косвенных функций полезности:

а) они являются однородными функциями нулевого порядка по ценам и доходу;

б) они убывают при росте цены каждого блага;

в) они растут при росте денежного дохода потребителя.

Решение.

А. По определению косвенной функции полезности

$V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = U\big(x^m(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M), y^m(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M)\big)$.

Вследствие однородности нулевого порядка маршаллианских кривых спроса по ценам и доходу $V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = U\big(x^m(P_x, P_y, M), y^m(P_x, P_y, M)\big)$.

По определению однородной функции $V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda M) = V(P_x, P_y, M)$.

Следовательно, косвенные функции полезности являются однородными функциями нулевого порядка по ценам и доходу.

Б. По **теореме об огибающей** производная любой стоимостной функции по параметру α представляет собой производную лагранжиана по этому параметру в точке оптимального количества потребления благ, т.е.

$$F'(\alpha) = \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right|_{x^m,\, y^m}.$$

В отношении P_x: $L = U(x, y) + \lambda[M - xP_x - yP_y]$,

$$\frac{\partial V(P_x, P_y, M)}{\partial P_x} = \left.\frac{\partial L}{\partial P_x}\right|_{x^m,\, y^m} = -\lambda x\big|_{x^m,\, y^m} = -\lambda x^m < 0,$$

поскольку $\lambda \geq 0$ из условия Куна — Таккера и $x \geq 0$, так как количество спроса не может быть отрицательным.

В отношении P_y: $L = U(x, y) + \lambda[M - xP_x - yP_y]$,

$$\frac{\partial V(P_x, P_y, M)}{\partial P_y} = \left.\frac{\partial L}{\partial P_y}\right|_{x^m,\, y^m} = -\lambda y\big|_{x^m,\, y^m} = -\lambda y^m < 0,$$

поскольку $\lambda \geq 0$ из условия Куна — Таккера и $y \geq 0$, так как количество спроса не может быть отрицательным.

Следовательно, косвенные функции полезности убывают при росте цены каждого блага.

В. В отношении M: $L = U(x, y) + \lambda[M - xP_x - yP_y]$,

$$\frac{\partial V(P_x, P_y, M)}{\partial M} = \left.\frac{\partial L}{\partial M}\right|_{x^m,\, y^m} = \lambda\big|_{x^m,\, y^m} = \lambda > 0,$$

поскольку $\lambda > 0$ по причине строгой монотонности предпочтений.

Следовательно, косвенные функции полезности растут при росте денежного дохода потребителя.

2.3. ХИКСИАНСКАЯ ФУНКЦИЯ СПРОСА

◆ **Задача 2.6.** Для следующих функций полезности выпишите хиксианские функции спроса, проверьте их однородность нулевого порядка по ценам, подтвердите условие симметричности, выведите функции расходов, проверьте их однородность первого порядка по ценам и вогнутость, восстановите хиксианские функции спроса из функций расходов:

а) $U(x, y) = xy$;

б) $U(x, y) = x + \ln y$.

Решение.

Напомним, что ***хиксианская функция спроса*** является решением задачи минимизации расходов таким образом, чтобы полезность потребления осталась неизменной, т.е.

$\min xP_x + yP_y$ при условии $U(x, y) = u$, где $u = \overline{u} = \text{const}$.

А. Для $U(x, y) = xy$

Шаг 1. Вывести хиксианские функции спроса.

Составить лагранжиан и выписать условия первого порядка:

$$L = xP_x + yP_y + \lambda[u - xy];$$

$$L_x = P_x - \lambda y = 0, \qquad (1)$$

$$L_y = P_y - \lambda x = 0, \qquad (2)$$

$$L_\lambda = u - xy = 0. \qquad (3)$$

Из (1) и (2) следует, что $y = \frac{P_x}{P_y}x$. Поставляя значение y в (3), имеем $x^2\frac{P_x}{P_y} = u$, или $x^H = \sqrt{\frac{P_y}{P_x}u}$. Аналогично хиксианский спрос $y^H = \sqrt{\frac{P_x}{P_y}u}$. Условие второго порядка соблюдается, поскольку функция полезности строго квазивогнута (см. задачу 1.6, п. Б).

Шаг 2. Подтвердить однородность нулевого порядка по ценам:

$$x^H(\lambda P_x, \lambda P_y, u) = \sqrt{\frac{\lambda P_y}{\lambda P_x}u} = \sqrt{\frac{P_y}{P_x}u} = x^H(P_x, P_y, u);$$

$$y^H(\lambda P_x, \lambda P_y, u) = \sqrt{\frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}u} = \sqrt{\frac{P_x}{P_y}u} = y^H(P_x, P_y, u).$$

Шаг 3. Подтвердить условие симметричности.

Напомним **условие симметричности:**

$$\frac{\partial x^H}{\partial P_y} = \frac{\partial y^H}{\partial P_x}.$$

Продифференцировав хиксианские функции спроса по цене другого блага, получаем

$$\frac{\partial x^H}{\partial P_y} = \sqrt{\frac{u}{P_x}}\frac{1}{2\sqrt{P_y}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{P_x P_y}}, \qquad \frac{\partial y^H}{\partial P_x} = \sqrt{\frac{u}{P_y}}\frac{1}{2\sqrt{P_x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{P_y P_x}}.$$

Симметричность подтверждается.

Шаг 4. Вывести функцию расходов, подставив хиксианские функции спроса в выражение расходов потребителя:

$$e(P_x, P_y, u) = x^H P_x + y^H P_y = P_x\sqrt{\frac{P_y}{P_x}u} + P_y\sqrt{\frac{P_x}{P_y}u} =$$

$$= \sqrt{P_x}\,\sqrt{P_x}\,\sqrt{\frac{P_y}{P_x}u} + \sqrt{P_y}\,\sqrt{P_y}\,\sqrt{\frac{P_x}{P_y}u} =$$

$$= \sqrt{P_x P_y u} + \sqrt{P_y P_x u} = 2\sqrt{P_x P_y u}.$$

Функция расходов имеет вид $e(P_x, P_y, u) = 2\sqrt{P_x P_y u}$.

Шаг 5. Подтвердить однородность первого порядка функции расходов по ценам:

$$e(\lambda P_x, \lambda P_y, u) = 2\sqrt{\lambda P_x \lambda P_y u} = \lambda \cdot 2\sqrt{P_x P_y u} = \lambda e(P_x, P_y, u).$$

Шаг 6. Подтвердить вогнутость по ценам.

Напомним **условие слабой вогнутости** функции полезности:

$$U_{xx} \le 0, \quad U_{yy} \le 0 \quad \text{и} \quad U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 \ge 0.$$

Для $e(P_x, P_y, u) = 2\sqrt{P_x P_y u}$ имеем

$$e_{P_x P_x} \le 0, \qquad e_{P_y P_y} \le 0, \qquad e_{P_x P_x} e_{P_y P_y} - (e_{P_x P_y})^2 \ge 0;$$

$$e_{P_x} = \frac{\partial e}{\partial P_x}, \qquad e_{P_xP_x} = \frac{\partial^2 e}{\partial P_x^2},$$

$$e_{P_y} = \frac{\partial e}{\partial P_y}, \qquad e_{P_yP_y} = \frac{\partial^2 e}{\partial P_y^2},$$

$$e_{P_xP_y} = \frac{\partial}{\partial P_y}\left(\frac{\partial e}{\partial P_x}\right) = \frac{\partial^2 e}{\partial P_x \partial P_y} = \frac{\partial^2 e}{\partial P_y \partial P_x};$$

$$e_{P_xP_x} < 0, \quad e_{P_yP_y} < 0, \quad e_{P_xP_x}e_{P_yP_y} - (e_{P_xP_y})^2 = 0,$$

следовательно, косвенная функция полезности слабо вогнутая.

Шаг 7. Восстановить хиксианские функции спроса из функций расходов.

Напомним **лемму Шепарда**: производная функции расходов по цене каждого из благ дает хиксианскую функцию спроса $x^H = \dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial P_x}$, $\quad y^H = \dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial P_y}$.

Имеем

$$x^H = \frac{\partial e}{\partial P_x} = \frac{\partial\left(2\sqrt{P_xP_yu}\right)}{\partial P_x} = 2\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{P_yu}}{\sqrt{P_x}} = \sqrt{\frac{P_y}{P_x}u},$$

$$y^H = \frac{\partial e}{\partial P_y} = \frac{\partial\left(2\sqrt{P_xP_yu}\right)}{\partial P_y} = 2\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{P_xu}}{\sqrt{P_y}} = \sqrt{\frac{P_x}{P_y}u}.$$

Б. Для $U(x, y) = x + \ln y$

Шаг 1. Проверить возможность углового решения, составить лагранжиан и выписать условия первого порядка (находим, что условие Куна — Таккера необходимо использовать для блага X):

$$L = xP_x + yP_y + \lambda[u - x - \ln y];$$

$$L_x = P_x - \lambda \ge 0, \qquad (1)$$

$$xL_x = x(P_x - \lambda) = 0, \qquad (2)$$

$$x \ge 0, \qquad (3)$$

$$L_y = P_y - \lambda/y = 0, \qquad (4)$$

$$L_\lambda = u - x - \ln y = 0. \qquad (5)$$

Шаг 2. Найти угловое решение. Допустим, что $x = 0$ и $y > 0$.

Хиксианскую функцию спроса $x^H = 0$ подставить в уравнение (5): $\ln y = u$. Следовательно, $y^H = e^u$. Выписать ограничения: подставить y^H в (4) и выразить λ. Подставить λ в (1) и выразить ограничение $\frac{P_x}{P_y} \geq e^u$.

Шаг 3. Найти касательное решение. Допустим, что $x > 0$ и $y > 0$.

Из (2) $P_x = \lambda$, подставить λ в (4): $P_y - \frac{P_x}{y} = 0$. Следовательно, $y^H = \frac{P_x}{P_y}$. Подставить y^H в (5): $x^H = u - \ln\frac{P_x}{P_y}$. Преобразовав x^H и использовав условие $x^H > 0$, выписать ограничение: $\frac{P_x}{P_y} < e^u$.

Шаг 4. Выписать полученные решения:

- угловое решение: если $\frac{P_x}{P_y} \geq e^u$, то $x^H = 0$, $y^H = e^u$;
- касательное решение: если $\frac{P_x}{P_y} < e^u$, то $x^H = u - \ln\frac{P_x}{P_y}$, $y^H = \frac{P_x}{P_y}$.

Условие второго порядка соблюдается, поскольку функция полезности строго квазивогнута.

Шаг 5. Выписать функции расходов:

- для углового решения $e(P_x, P_y, u) = P_y e^u$;
- для касательного решения $e(P_x, P_y, u) = P_x(u - \ln P_x + \ln P_y) + P_x =$ $= P_x(1 + u - \ln P_x + \ln P_y)$.

Шаг 6. Проверить однородность первого порядка по ценам:

- для углового решения $e(\lambda P_x, \lambda P_y, u) = \lambda P_y e^u = \lambda e(P_x, P_y, u)$, функция однородна;
- для касательного решения $e(\lambda P_x, \lambda P_y, u) = \lambda P_x(1 + u - \ln\lambda P_x +$ $+ \ln\lambda P_y) \neq \lambda e(P_x, P_y, u)$, функция неоднородна.

Шаг 7. Проверить симметричность:

- $\dfrac{\partial x^H}{\partial P_y} = 0, \quad \dfrac{\partial y^H}{\partial P_x} = 0$, следовательно, симметричность подтверждается для углового решения;
- $\dfrac{\partial x^H}{\partial P_y} = \dfrac{1}{P_y}, \quad \dfrac{\partial y^H}{\partial P_x} = \dfrac{1}{P_y}$, следовательно, симметричность подтверждается для касательного решения.

Шаг 8. Восстановить хиксианские функции спроса из функций расходов:

- угловое решение

$$x^H = \frac{\partial e}{\partial P_x} = \frac{\partial(P_y e^u)}{\partial P_x} = 0, \qquad y^H = \frac{\partial e}{\partial P_y} = \frac{\partial(P_y e^u)}{\partial P_y} = e^u;$$

- касательное решение

$$x^H = \frac{\partial e}{\partial P_x} = \frac{\partial\left[P_x(1 + u - \ln P_x + \ln P_y)\right]}{\partial P_x} = u - \ln\frac{P_x}{P_y},$$

$$y^H = \frac{\partial e}{\partial P_y} = \frac{\partial\left[P_x(1 + u - \ln P_x + \ln P_y)\right]}{\partial P_y} = \frac{P_x}{P_y}.$$

◆ **Задача 2.7.** Для следующих функций полезности выпишите хиксианские функции спроса и функции расходов:

а) $U(x, y) = x^\sigma + y^\sigma$, где $0 < \sigma < 1$;

б) $U(x, y) = x + y$.

Решение.

А. Для $U(x, y) = x^\sigma + y^\sigma$

Шаг 1. Вывести хиксианские функции спроса. Функция Лангранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = xP_x + yP_y + \lambda[u - x^\sigma - y^\sigma].$$

По условию Куна — Таккера

$$L_x = P_x - \lambda\sigma x^{\sigma-1} \geq 0, \qquad (1)$$

$$xL_x = 0, \qquad (2)$$

$$L_y = P_y - \lambda\sigma y^{\sigma-1} \geq 0, \qquad (3)$$

$$yL_y = 0. \qquad (4)$$

Шаг 2. Проверить возможность угловых решений. Допустим, что $x = 0$ и $y > 0$. В этом случае из (1) $L_x \geq 0$, а из (4) $L_y = 0$. Из (1) и (3) получаем $\frac{P_x}{P_y} \geq \frac{x^{\sigma-1}}{y^{\sigma-1}} = \frac{y^{1-\sigma}}{x^{1-\sigma}}$ и $\frac{P_x}{P_y} \geq +\infty$, что невозможно. Следовательно, вариант $x = 0$ и $y > 0$ отпадает. Аналогично можно показать, что вариант $y = 0$ и $x > 0$ также отпадает. Следовательно, $x > 0$ и $y > 0$, и условия первого порядка можно записать в традиционной форме:

$$L_x = P_x - \lambda\sigma x^{\sigma-1} = 0, \qquad (5)$$

$$L_y = P_y - \lambda\sigma y^{\sigma-1} = 0, \qquad (6)$$

$$L_\lambda = u - x^\sigma - y^\sigma = 0. \qquad (7)$$

Шаг 3. Выписать хиксианские функции спроса. Из (5) и (6) получаем $\frac{P_x}{P_y} = \frac{x^{\sigma-1}}{y^{\sigma-1}}$. Отсюда $y = x\left(\frac{P_x}{P_y}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$. Подставляя в (7) и упрощая, получаем хиксианские функции спроса

$$x^H = \left(\frac{u}{1 + (P_x/P_y)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad y^H = \left(\frac{u}{1 + (P_y/P_x)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Шаг 4. Выписать функцию расходов, подставив хиксианские функции спроса в выражение расходов потребителя:

$$e(P_x, P_y, u) = P_x\left(\frac{u}{1 + (P_x/P_y)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + P_y\left(\frac{u}{1 + (P_y/P_x)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Б. Для $U(x, y) = x + y$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = xP_x + yP_y + \lambda[u - x - y].$$

Поскольку возможны угловые решения, когда $x = 0$ или $y = 0$ (см. задачу 1.15, п. Б, шаг 2), используем условия Куна — Таккера:

$$L_x = P_x - \lambda \geq 0, \qquad (1)$$

$$xL_x = 0, \quad x \geq 0, \qquad (2)$$

$$L_y = P_y - \lambda \geq 0, \qquad (3)$$

$$yL_y = 0, \quad y \geq 0, \qquad (4)$$

$$L_\lambda = u - x - y = 0. \qquad (5)$$

Случай 1. Предположим, что $x = 0$ и $y > 0$. Из (5) следует, что хиксианские функции спроса составляют $x^H = 0$, $y^H = u$.

Ограничение на параметры составляет $P_x \geq P_y$, поскольку в этом случае (1) остается неравенством, а (3) превращается в равенство.

Имеем функцию расходов $e(P_x, P_y, u) = P_y u = \min\{P_x, P_y\}u$.

Случай 2. Предположим, что $x > 0$ и $y = 0$. Из (5) следует, что хиксианские функции спроса составляют $x^H = u$, $y^H = 0$.

Ограничение на параметры составляет $P_x \leq P_y$, поскольку в этом случае (1) превращается в равенство, а (3) остается неравенством.

Имеем функцию расходов $e(P_x, P_y, u) = P_x u = \min\{P_x, P_y\}u$.

Случай 3. Предположим, что $P_x = P_y = \min\{P_x, P_y\}$. Следовательно, хиксианские функции спроса составляют $x^H = u - y^H$, $y^H \geq 0$.

Имеем функцию расходов $e(P_x, P_y, u) = P_x(u - y^H) + P_y y^H = P_x u = \min\{P_x, P_y\}u$.

◆ **Задача 2.8.** Подтвердите следующие свойства функций расходов:

а) они являются однородными функциями первого порядка по ценам;

б) они возрастают по ценам;

в) они строго возрастают по полезности.

Решение.

А. Из определения хиксианского спроса следует, что он минимизирует расходы потребителя при существующих ценах, оставляя полезность потребления неизменной. Следовательно, $x^H P_x + y^H P_y \leq xP_x + yP_y$ при условии, что $U(x, y) = u$.

Проверить однородность: $x^H\lambda P_x + y^H\lambda P_y \leq x\lambda P_x + y\lambda P_y$.

По определению функции расходов

$$e(\lambda P_x, \lambda P_y, u) = x^H \lambda P_x + y^H \lambda P_y = \lambda(x^H P_x + y^H P_y) = \lambda e(P_x, P_y, u).$$

Следовательно, функции расходов являются однородными функциями первого порядка по ценам.

Б. По теореме об огибающей $\dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial P_x} = \left.\dfrac{\partial L}{\partial P_x}\right|_{x^H, y^H}$.

Лагранжиан $L = xP_x + yP_y + \lambda[u - U(x, y)]$, откуда $\dfrac{\partial L}{\partial P_x} = x$.

Следовательно, $\dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial P_x} = \left.\dfrac{\partial L}{\partial P_x}\right|_{x^H, y^H} = x^H \geq 0.$

Аналогично $\dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial P_y} = \left.\dfrac{\partial L}{\partial P_y}\right|_{x^H, y^H} = y^H \geq 0.$

Следовательно, функции расходов возрастают по ценам.

В. По теореме об огибающей $\dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial u} = \left.\dfrac{\partial L}{\partial u}\right|_{x^H, y^H}$.

Лагранжиан $L = xP_x + yP_y + \lambda[u - U(x, y)]$, откуда $\dfrac{\partial L}{\partial u} = \lambda$.

Из условий первого порядка минимизации $\lambda = \dfrac{P_x}{U_x} = \dfrac{P_y}{U_y}$. Если $U_x > 0$, $U_y > 0$, т.е. предпочтения строго монотонны, то $\lambda > 0$.

Следовательно, $\dfrac{\partial e(P_x, P_y, u)}{\partial u} = \left.\dfrac{\partial L}{\partial u}\right|_{x^H, y^H} = \lambda > 0$.

Функции расходов строго возрастают по полезности.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

3.1. ЭФФЕКТЫ ЗАМЕЩЕНИЯ И ДОХОДА

◆ **Задача 3.1.** Определите графически эффекты дохода и замещения по Хиксу и по Слуцкому в случае снижения цены P_x блага X с 2 до 0,5 тыс. руб. при том, что доход потребителя M и цена P_y блага Y, равная 1 тыс. руб., неизменны:

а) $U(x, y) = x + y$;

б) $U(x, y) = x^2 + y^2$;

в) $U(x, y) = \min\{x, y\}$.

Решение.

Напомним, что **эффекты дохода и замещения по Хиксу** определяют изменение дохода потребителя, необходимое для того, чтобы *его потребление осталось на прежнем уровне полезности* при изменении относительных цен, тогда как **эффекты дохода и замещения по Слуцкому** определяют изменение дохода потребителя, необходимое для того, чтобы *он был в состоянии приобрести прежний потребительский набор* при изменении относительных цен.

А. Для $U(x, y) = x + y$ (рис. 3.1)

Б. Для $U(x, y) = x^2 + y^2$ (рис. 3.2)

В. Для $U(x, y) = \min\{x, y\}$ (рис. 3.3)

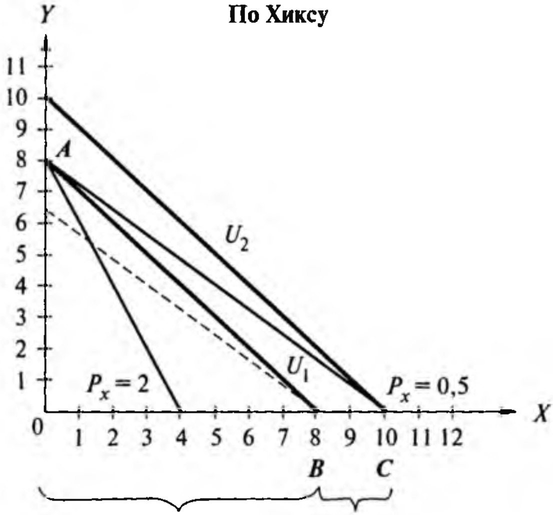
◆ **Задача 3.2.** Подтвердите следующие положения, используя уравнение Слуцкого:

а) если благо Y — чистый субститут блага X, то благо Y является также и валовым субститутом блага X, если это низшее благо;

б) благо Y может быть одновременно чистым субститутом и валовым комплементом блага X;

в) если благо Y — валовой комплемент блага X, то благо X также является валовым комплементом блага Y.

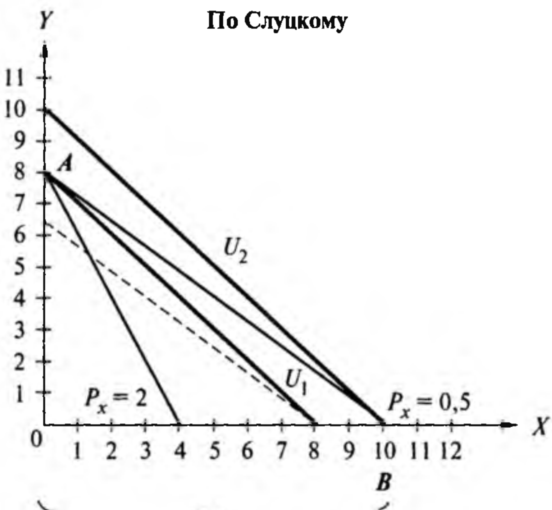
а)



Эффект замещения

Эффект дохода

б)

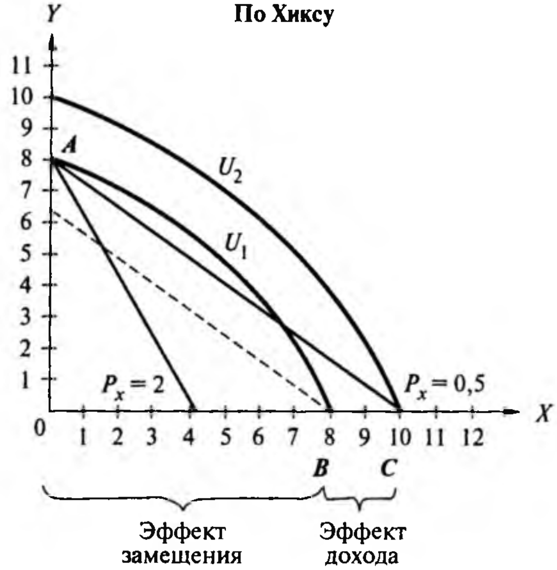


Эффект замещения

Эффект дохода = 0

Рис. 3.1

а)


По Хиксу
Y
X
A
U_2
U_1
$P_x = 2$
$P_x = 0,5$
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
B
C
Эффект замещения
Эффект дохода

б)

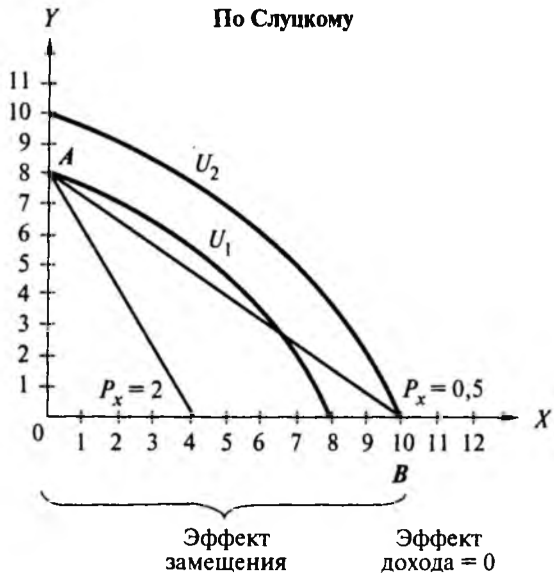

По Слуцкому
Y
X
A
U_2
U_1
$P_x = 2$
$P_x = 0,5$
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
B
Эффект замещения
Эффект дохода = 0

Рис. 3.2

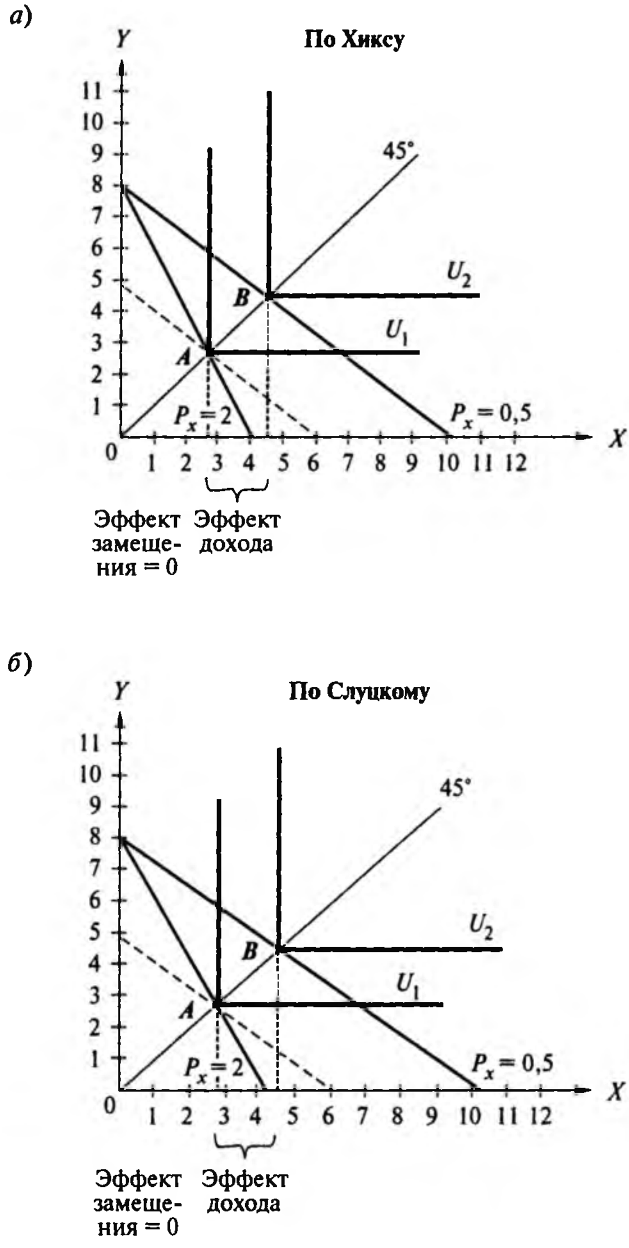

а)
По Хиксу
Y
X
45°
U_2
U_1
B
A
$P_x = 2$
$P_x = 0,5$
Эффект замещения = 0
Эффект дохода
б)
По Слуцкому
Y
X
45°
U_2
U_1
B
A
$P_x = 2$
$P_x = 0,5$
Эффект замещения = 0
Эффект дохода

Рис. 3.3

Решение.

Напомним, что если x^m — маршаллианский спрос на благо X, x^H — хиксианский спрос на благо X, а P_x — цена блага X и P_y — цена блага Y, то благо Y называется:

- ***валовым субститутом*** блага X, если $\dfrac{\partial x^m}{\partial P_y} > 0$;
- ***валовым комплементом*** блага X, если $\dfrac{\partial x^m}{\partial P_y} < 0$;
- ***чистым субститутом*** блага X, если $\dfrac{\partial x^H}{\partial P_y} > 0$;
- ***валовым комплементом*** блага X, если $\dfrac{\partial x^H}{\partial P_y} < 0$.

В обычных эластичностях **уравнение Слуцкого** может быть записано как

$$\varepsilon^m_{xx} = \varepsilon^H_{xx} - \nu_x \eta_{xM},$$

где ε^m_{xx} — обычная эластичность маршаллианского спроса по цене; ε^H_{xx} — обычная эластичность хиксианского спроса по цене; ν_x — доля расходов на благо X; η_{xM} — эластичность спроса по доходу.

В перекрестных эластичностях уравнение Слуцкого может быть записано как

$$\varepsilon^m_{xy} = \varepsilon^H_{xy} - \nu_y \eta_{xM}.$$

А. Если благо Y — чистый субститут блага X, то благо Y является также и валовым субститутом блага X, если это низшее благо.

Из уравнения Слуцкого в перекрестных эластичностях следует, что если $\varepsilon^H_{xy} > 0$ (благо Y — чистый субститут блага X) и $\eta_{xM} < 0$ (благо X — низшее), то $\varepsilon^m_{xy} > 0$ (благо Y является также и валовым субститутом блага X).

Б. Благо Y может быть одновременно чистым субститутом и валовым комплементом блага X.

Из уравнения Слуцкого в перекрестных эластичностях следует, что, если $\varepsilon^H_{xy} > 0$ (благо Y — чистый субститут блага X), возможно также, что $\varepsilon^m_{xy} < 0$, если эластичность по доходу маршаллианского спроса положительна и высока.

В. Если благо Y — валовой комплемент блага X, то благо X также является валовым комплементом блага Y.

В перекрестных эластичностях уравнение Слуцкого может быть записано как $\varepsilon^m_{xy} = \varepsilon^H_{xy} - \nu_y\eta_{xM}$ и как $\varepsilon^m_{yx} = \varepsilon^H_{yx} - \nu_x\eta_{yM}$.

Пусть благо X будет предметом роскоши, а Y — низшим благом. В экономике, состоящей из двух благ, они должны быть чистыми субститутами. Поэтому $\varepsilon^H_{xy} > 0$ и $\varepsilon^H_{yx} > 0$. Поскольку $\eta_{xM} > 0$ и является достаточно большим, а $\eta_{yM} < 0$, то $\varepsilon^m_{xy} < 0$ (благо Y — валовой комплемент блага X) и $\varepsilon^m_{xy} > 0$ (благо X — валовой субститут блага Y). Следовательно, благо Y не может быть одновременно чистым субститутом и валовым комплементом блага X.

3.2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ И КОМПЕНСИРУЮЩАЯ ВАРИАЦИИ

◆ **Задача 3.3.** Используя маршаллианскую и хиксианскую функции спроса, покажите графически, что для низшего блага X соблюдается неравенство

$CV > CS > EV.$

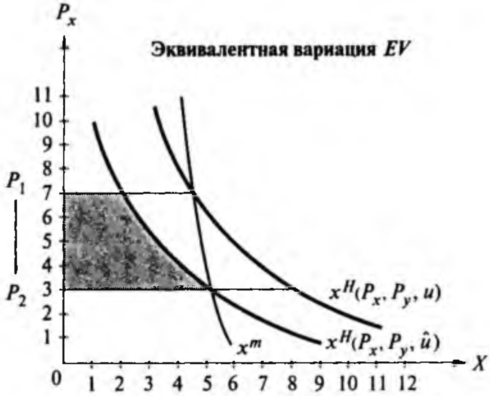
Решение.

Обозначим функцию расходов $e(P_x, P_y, u)$, где u — данный уровень полезности. Продифференцировав равенство $x^H(P_x, P_y, u) = x^m(P_x, P_y, e(P_x, P_y, u))$ по u, получаем

$$\frac{\partial x^H}{\partial u} = \frac{\partial x^m}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial u}.$$

Из свойств функции расходов следует, что $\frac{\partial e}{\partial u} > 0$. Поэтому $\frac{\partial x^H}{\partial u} < 0$, если $\frac{\partial x^m}{\partial e} < 0$ в случае низшего блага. Это значит, что для низшего блага кривая хиксианского спроса, показывающая наиболее высокий уровень полезности, располагается слева на системе координат (рис. 3.4). Пусть уровень полезности $\hat{u} > u$. Тогда кривая $x^H(P_x, P_y, \hat{u})$ расположена левее кривой $x^H(P_x, P_y, u)$. Для низшего блага маршаллианские кривые спроса менее эластичны, чем хиксианские кривые спроса. Из чего следует, что для низшего блага $CV > CS > EV$.

а)



б)

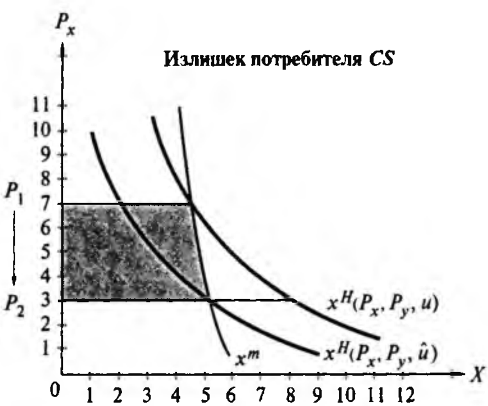


Рис. 3.4 (см. также с. 79)

в)

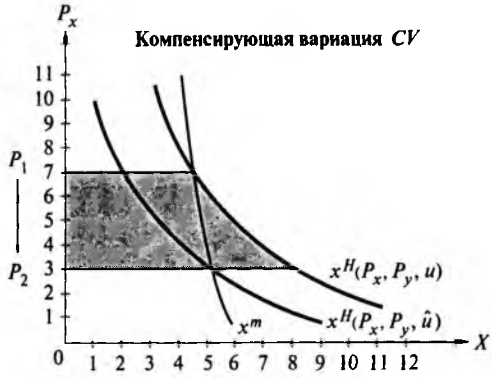


Рис. 3.4. Окончание

◆ **Задача 3.4.** Выпишите компенсирующую вариацию для следующих функций полезности:

а) $U(x, y) = x + y$; б) $U(x, y) = \min\{x, y\}$.

Решение.

Напомним **определение компенсирующей вариации**:

$CV = e(P_x^1, P_y, \bar{u}) - e(P_x^2, P_y, \bar{u})$,

т.е. при изменении цены блага X с P_x^1 до P_x^2, CV измеряет изменение реального дохода потребителя, который необходим, чтобы его потребление осталось на прежнем уровне полезности.

А. Для $U(x, y) = x + y$ функция расходов составляет $e(P_x, P_y, u) = \min\{P_x, P_y\}u$ (см. задачу 2.7, п. Б). Следовательно, по определению компенсирующей вариации

$CV = \min\{P_x^1, P_y\}\bar{u} - \min\{P_x^2, P_y\}\bar{u}$.

Б. Для $U(x, y) = \min\{x, y\}$ необходимо ввести функцию расходов. Зафиксировав полезность на уровне u, получаем, что $x^H = y^H$, поскольку потребитель всегда будет потреблять одинаковое количество каждого из товаров. Подставляя в ограничение $U(x, y) = u$, получаем хиксианские функции спроса $x^H = y^H = \min\{x^H, y^H\} = u$. Откуда функция расходов $e(P_x, P_y, u) = (P_x + P_y)u$ и по определению компенсирующей вариации

$CV = P_x^1\bar{u} - P_x^2\bar{u}$.

4. ПРОИЗВОДСТВО И РЫНКИ

4.1. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

◆ **Задача 4.1.** Определите, какие из следующих функций являются однородными и какова степень их однородности:

а) $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$;

б) $f(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1^3 + x_2^3}$;

в) $f(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$, где $\alpha, \beta > 0$;

г) $f(x_1, x_2) = 3x_1^{2/3} + x_2^{1/3}$.

Определите отдачу от масштаба каждой функции. Проверьте, являются ли неоднородные $f(x_1, x_2)$ гомотетичными, т.е. можно ли их представить в виде монотонной трансформации однородной функции.

Решение.

Умножим количество факторов производства на $t > 0$.

А. Для $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{\beta} = t^{\alpha}x_1^{\alpha}t^{\beta}x_2^{\beta} = t^{\alpha+\beta}x_1^{\alpha}x_2^{\beta} = t^{\alpha+\beta}f(x_1, x_2).$$

Функция является однородной степени $\alpha + \beta$.

Теперь допустим, что $t > 1$:

- если $\alpha + \beta > 1$, отдача от масштаба возрастающая;
- если $\alpha + \beta < 1$, отдача от масштаба убывающая;
- если $\alpha + \beta = 1$, отдача от масштаба постоянная.

Б. Для $f(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1^3 + x_2^3}$

$$f(tx_1, tx_2) = \sqrt{3(tx_1)^3 + (tx_2)^3} = \sqrt{t^3(3x_1^3 + x_2^3)} =$$

$$= t^{3/2}\sqrt{3x_1^3 + x_2^3} = t^{3/2}f(x_1, x_2).$$

Функция является однородной степени $3/2$.

Теперь допустим, что $t > 1$. Так как $3/2 > 1$, отдача от масштаба возрастающая.

В. Для $f(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$

$$f(tx_1, tx_2) = \alpha \ln(tx_1) + \beta \ln(tx_2) =$$
$$= \alpha(\ln t + \ln x_1) + \beta(\ln t + \ln x_2) =$$
$$= (\alpha + \beta)\ln t + f(x_1, x_2).$$

Функция не является однородной, но она гомотетична, так как

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1^\alpha x_2^\beta),$$

где $x_1^\alpha x_2^\beta$ — однородная функция.

Допустим, что $t > 1$. Чтобы определить отдачу от масштаба, найдем сначала объем выпуска y^* такой, что если $f(x_1, x_2) < y^*$, то $tf(x_1, x_2) < f(tx_1, tx_2)$.

Известно, что $f(tx_1, tx_2) = (\alpha + \beta)\ln t + f(x_1, x_2)$. Подставляя это выражение в неравенство, получаем

$$tf(x_1, x_2) < (\alpha + \beta)\ln t + f(x_1, x_2),$$

$$tf(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) < (\alpha + \beta)\ln t,$$

$$f(x_1, x_2)(t - 1) < (\alpha + \beta)\ln t,$$

$$f(x_1, x_2) < \frac{(\alpha + \beta)\ln t}{t - 1} = y^*.$$

Следовательно, если объем выпуска:

- меньше y^*, то $tf(x_1, x_2) < f(tx_1, tx_2)$ и отдача от масштаба возрастающая;
- больше y^*, то знаки неравенства меняются на противоположные, т.е. $tf(x_1, x_2) > f(tx_1, tx_2)$, и отдача от масштаба убывающая;
- равен y^*, то $tf(x_1, x_2) = f(tx_1, tx_2)$ и отдача от масштаба постоянная.

Г. Для $f(x_1, x_2) = 3x_1^{2/3} + x_2^{1/3}$

Функция не является однородной, так как

$$f(tx_1, tx_2) = 3t^{2/3}x_1^{2/3} + t^{1/3}x_2^{1/3} \neq 3t^r x_1^{2/3} + t^r x_2^{1/3} = t^r f(x_1, x_2)$$

при любом r.

Функция не является гомотетичной, так как ее невозможно представить в виде монотонной трансформации однородной функции.

Допустим, что $t > 1$. Заметим, что $tf(x_1, x_2) > f(tx_1, tx_2)$, так как

$$tf(x_1, x_2) - f(tx_1, tx_2) = 3tx_1^{2/3} + tx_2^{1/3} - (3t^{2/3}x_1^{2/3} + t^{1/3}x_2^{1/3}) =$$
$$= 3x_1^{2/3}(t - t^{2/3}) + x_2^{1/3}(t - t^{1/3}) > 0.$$

Следовательно, существует убывающая отдача от масштаба.

◆ **Задача 4.2.** Выпишите эластичность замещения для следующих производственных функций:

а) $Q = F(L, K) = L^{\alpha}K^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$;

б) $Q = F(L, K) = [\alpha L^{\sigma} + (1 - \alpha)K^{\sigma}]^{\frac{1}{\sigma}}$, где $0 < \alpha < 1$, $\sigma \le 1$.

Решение.

Напомним, что ***эластичность замещения*** ρ — это отношение процентного изменения используемой технологии (соотношения труда L и капитала K) к процентному изменению MRTS, т.е.

$$\rho = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln|MRTS|}, \quad \text{где} \quad MRTS = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = -\frac{F_L}{F_K}.$$

А. Для производственной функции Кобба — Дугласа $Q = L^{\alpha}K^{\beta}$ имеем $MRTS = -\frac{F_L}{F_K} = -\frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{L^{\alpha}\beta K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$, откуда $|MRTS| = \frac{\alpha K}{\beta L}$. Преображая, находим $\frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha}|MRTS|$.

Логарифмируя, получаем $\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln|MRTS|$. Следовательно, $\rho = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln|MRTS|} = 1$.

Б. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения $Q = [\alpha L^{\sigma} + (1 - \alpha)K^{\sigma}]^{\frac{1}{\sigma}}$ может быть записана после возведения обеих сторон в степень σ как $Q^{\sigma} = \alpha L^{\sigma} + (1 - \alpha)K^{\sigma}$. Продифференцировав обе стороны равенства по L и по K, получаем $\sigma Q^{\sigma-1}\dfrac{\partial Q}{\partial L}=\alpha\sigma L^{\sigma-1}$ и $\sigma Q^{\sigma-1}\dfrac{\partial Q}{\partial K}=(1-\alpha)\sigma K^{\sigma-1}$. Следовательно, $\dfrac{\partial Q}{\partial L}=\dfrac{\alpha L^{\sigma-1}}{Q^{\sigma-1}}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial K}=\dfrac{(1-\alpha)K^{\sigma-1}}{Q^{\sigma-1}}$. Имеем

$$MRTS=-\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{L}{K}\right)^{\sigma-1},$$

$$|MRTS|=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{L}{K}\right)^{\sigma-1}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\sigma},$$

$$\frac{K}{L}=\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}|MRTS|\right]^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{1}{1-\sigma}\left[\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)+\ln|MRTS|\right].$$

Откуда $\rho=\dfrac{d\ln(K/L)}{d\ln|MRTS|}=\dfrac{1}{1-\sigma}$.

4.2. ИЗДЕРЖКИ ПРОИЗВОДСТВА

◆ **Задача 4.3.** Пусть L, K — количество факторов производства, используемое фирмой. Предположите, что w — стоимость единицы L, а r — стоимость единицы K. Покажите, что при минимизации издержек предельные издержки равны мультипликатору Лагранжа.

Решение.

Задача минимизации издержек фирмы при существующем ограничении может быть записана как

$$\min_{L,K} wL+rK \quad \text{при условии, что} \quad F(L,K)=Q.$$

Лагранжиан для этой задачи имеет вид $H=wL+rK+\lambda[Q-F(L,K)]$. Из условий первого порядка получаем функции условного спроса на факторы производства — $L^*(w,r,Q)$

и $K^*(w, r, Q)$. Если подставить их в функцию издержек, получаем

$$C(w, r, Q) = wL^*(w, r, Q) + rK^*(w, r, Q).$$

Предельные издержки — это $MC = \dfrac{\partial C(w, r, Q)}{\partial Q}$.

Напомним **теорему об огибающей**: производная C по параметру Q равна частной производной лагранжиана H по Q при условии, что K и L зафиксированы на своем оптимальном уровне, т.е. $K = K^*$ и $L = L^*$.

Применяя теорему об огибающей, получаем

$$MC = \frac{\partial C(w, r, Q)}{\partial Q} = \left.\frac{\partial H}{\partial Q}\right|_{L^*, K^*} = \lambda\big|_{L^*, K^*} = \lambda.$$

Таким образом, при минимизации издержек предельные издержки равны мультипликатору Лагранжа.

◆ **Задача 4.4.** Некоторое благо производится с использованием производственной функции Кобба — Дугласа $F(L, K) = L^{\alpha}K^{\beta}$, где α, β — положительные параметры:

а) выведите функцию полных издержек в долгосрочной перспективе;

б) выясните, является ли функция издержек выпуклой, линейной или вогнутой по объему выпуска и как ее форма зависит от значения $\alpha + \beta$;

в) выясните, что означает величина $\alpha + \beta$.

Решение.

Напомним, что *функция издержек* в теории производства выводится тем же способом, что и *функция расходов* в теории потребления. *В долгосрочной перспективе* оба фактора производства переменные. Функция издержек $C(w, r, Q) = wL^* + rK^*$, где L^* и K^* — функции условного спроса на факторы производства — труд и капитал соответственно. Задача производителя заключается в следующем:

$$\min_{L,K} wL + rK \text{ при условии, что } L^{\alpha}K^{\beta} = Q.$$

А. **Шаг 1.** Проверить возможность углового решения.

Угловые решения невозможны, поскольку если $L = 0$, то $F(L, K) = 0$, и если $K = 0$, то $F(L, K) = 0$.

Шаг 2. Составить лагранжиан, вывести условия первого порядка и проверить условие второго порядка для минимума функции:

$$H = wL + rK + \lambda[Q - L^{\alpha}K^{\beta}];$$

$$H_L = w - \lambda\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} = 0, \qquad (1)$$

$$H_K = r - \lambda\beta K^{\beta-1}L^{\alpha} = 0, \qquad (2)$$

$$H_{\lambda} = Q - L^{\alpha}K^{\beta} = 0. \qquad (3)$$

Условие второго порядка для минимума (квазивогнутость) удовлетворено. Функция Кобба — Дугласа квазивогнута (см. задачу 1.14, п. Б, шаг 3).

Шаг 3. Вычислить функции условного спроса на факторы производства.

Выражаем K^{β} из (1), L^{α} из (2) и подставляем в (3). Преображая, получаем функции условного спроса на факторы производства:

$$L^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \qquad K^* = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Шаг 4. Вывести функцию издержек в долгосрочной перспективе:

$$C(w,r,Q) = wL^* + rK^* =$$

$$= w\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + r\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}(w^{\alpha}r^{\beta}Q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(w^{\alpha}r^{\beta}Q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} =$$

$$= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right](w^{\alpha}r^{\beta}Q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Заметим, что $\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right](w^{\alpha}r^{\beta})^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = A$ — это константа. Следовательно, функция издержек в долгосрочной перспективе $C(Q) = AQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$.

Б. Чтобы выяснить, является ли функция издержек выпуклой, линейной или вогнутой по объему выпуска и как ее форма зависит от значения $\alpha + \beta$, возьмем ее первую и вторую производные:

$$\frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = \frac{A}{\alpha+\beta} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1},$$

$$\frac{\partial^2 C(Q)}{\partial Q^2} = \frac{A}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\alpha+\beta} - 1\right) Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2} = \frac{A}{\alpha+\beta}\,\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\, Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2}.$$

Следовательно, если:

- $\alpha + \beta > 1$, то $\frac{\partial^2 C(Q)}{\partial Q^2} < 0$ и функция издержек вогнутая;
- $\alpha + \beta = 1$, то $\frac{\partial^2 C(Q)}{\partial Q^2} = 0$ и функция издержек линейная;
- $\alpha + \beta < 1$, то $\frac{\partial^2 C(Q)}{\partial Q^2} > 0$ и функция издержек выпуклая.

В. Величина $\alpha + \beta$ показывает отдачу от масштаба. Если:

- $\alpha + \beta > 1$, отдача от масштаба возрастающая;
- $\alpha + \beta = 1$, отдача от масштаба постоянная;
- $\alpha + \beta < 1$, отдача от масштаба снижающаяся.

◆ **Задача 4.5.** Для производственной функции Кобба — Дугласа $F(L, K) = L^{\alpha}K^{\beta}$:

а) выведите функцию средних издержек в долгосрочной перспективе;

б) объясните, как ее отдача от масштаба зависит от значения $\alpha + \beta$.

Решение.

А. Напомним, что ***средние издержки*** — это $LRAC = \dfrac{C(Q)}{Q}$.

Как известно из предыдущей задачи 4.4 (см. п. А, шаг 4), $C(Q) = AQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$. Следовательно, функция средних издержек в долгосрочной перспективе $LRAC = \dfrac{C(Q)}{Q} = AQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$.

Б. Чтобы объяснить, как отдача от масштаба функции зависит от значения $\alpha + \beta$, продифференцируем $LRAC$ по Q:

$$\frac{\partial LRAC}{\partial Q} = A\left[\frac{1}{\alpha+\beta} - 1\right]Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2} = A\,\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\,Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2}.$$

Если:

- $\alpha + \beta > 1$, производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от масштаба, $\dfrac{\partial LRAC}{\partial Q} < 0$, следовательно, $LRAC$ сокращается по Q;
- $\alpha + \beta = 1$, производственная функция характеризуется постоянной отдачей от масштаба, $\dfrac{\partial LRAC}{\partial Q} = 0$, следовательно, $LRAC$ постоянна по Q;
- $\alpha + \beta < 1$, производственная функция характеризуется снижающейся отдачей от масштаба, $\dfrac{\partial LRAC}{\partial Q} > 0$, следовательно, $LRAC$ возрастает по Q.

Интересно, что такая же логика применима и в обратном направлении:

- если $LRAC$ снижается, производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от масштаба;
- если $LRAC$ постоянна, производственная функция характеризуется постоянной отдачей от масштаба;
- если $LRAC$ растет, производственная функция характеризуется снижающейся отдачей от масштаба.

◆ **Задача 4.6.** Для производственной функции Кобба — Дугласа $F(L, K) = L^{\alpha}K^{\beta}$:

а) выведите функцию полных издержек в краткосрочной перспективе;

б) выясните, является ли функция издержек в краткосрочной перспективе выпуклой, линейной или вогнутой по объему выпуска и как ее форма зависит от значения α;

в) выясните, что показывает величина α?

Решение.

Напомним, что *в краткосрочной перспективе* величина капитала считается неизменной ($\overline{K}$). Поэтому задача производителя в этом случае заключается в следующем:

$$\min_{L,K} wL + r\overline{K} \quad \text{при условии, что} \quad L^{\alpha}\overline{K}^{\beta} = Q.$$

А. Шаг 1. Выписать условный спрос на труд напрямую из ограничения.

Поскольку $\overline{K}$ — величина фиксированная, использование метода множителей Лагранжа не требуется. Из ограничения следует, что $L^{\alpha} = Q/\overline{K}^{\beta}$, т.е. условный спрос на труд составляет $L^{*} = \left(Q/\overline{K}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Обозначим константу $\overline{K}^{-\frac{\beta}{\alpha}} = D$. Таким образом, $L^{*} = DQ^{\frac{1}{\alpha}}$.

Шаг 2. Выписать функцию издержек в краткосрочной перспективе:

$$C = wL^{*} + r\overline{K} = wDQ^{\frac{1}{\alpha}} + r\overline{K}.$$

Б. Чтобы выяснить, является ли функция издержек в краткосрочной перспективе выпуклой, линейной или вогнутой по объему выпуска и как ее форма зависит от значения α, дифференцируем ее дважды:

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{wD}{\alpha}Q^{\frac{1}{\alpha}-1}, \qquad \frac{\partial^{2} C}{\partial Q^{2}} = \frac{wD}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)Q^{\frac{1}{\alpha}-2} = wD\frac{1-\alpha}{\alpha^{2}}Q^{\frac{1}{\alpha}-2}.$$

Заметим, что $w > 0$, $D > 0$ и $Q^{\frac{1}{\alpha}-2} > 0$, следовательно, знак второй производной зависит от знака $\frac{1-\alpha}{\alpha^2}$. Если:

- $\alpha > 1$, $\frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} < 0$, т.е. функция издержек в краткосрочной перспективе вогнутая;
- $\alpha = 1$, $\frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} = 0$, т.е. функция издержек в краткосрочной перспективе линейная;
- $\alpha < 1$, $\frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} > 0$, т.е. функция издержек в краткосрочной перспективе выпуклая.

В. Величина α характеризует предельный продукт труда. Если:

- $\alpha > 1$, предельный продукт труда возрастает;
- $\alpha = 1$, предельный продукт труда постоянный;
- $\alpha < 1$, предельный продукт труда сокращается.

Таким образом, форма функции издержек в краткосрочной перспективе зависит от того, возрастает, сокращается или остается постоянным предельный продукт труда.

◆ **Задача 4.7.** Объем выпуска фирмы задан функцией

$y = (x_1 - k)^\alpha (x_2 - l)^\beta$,

где x_1, x_2 — количество факторов производства, $k, l \geq 0$ и $\alpha, \beta > 0$. Фирма не производит товар, если $x_1 < k$ или $x_2 < l$:

а) преобразовав производственную функцию, минимизируйте издержки фирмы и найдите функции условного спроса на факторы производства;

б) найдите функцию издержек фирмы;

в) вычислите MC и AC. Как изменятся эти величины при увеличении параметров k, l?

Решение.

А. Преобразованная функция ограничения имеет вид

$\ln y = \alpha \ln(x_1 - k) + \beta \ln(x_2 - l)$.

Задачу минимизации издержек можно решить, используя метод множителей Лагранжа. Из функции Лагранжа

$$L = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda[\ln y - \alpha \ln(x_1 - k) - \beta \ln(x_2 - l)]$$

получаем условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = w_1 - \frac{\lambda\alpha}{x_1 - k} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = w_2 - \frac{\lambda\beta}{x_2 - l} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \ln y - \alpha \ln(x_1 - k) - \beta \ln(x_2 - l) = 0.$$

Выражаем x_1 и x_2 из первых двух уравнений:

$$x_1 = \frac{\lambda\alpha}{w_1} + k, \qquad x_2 = \frac{\lambda\beta}{w_2} + l.$$

Условие $\partial L/\partial\lambda = 0$ эквивалентно приравниванию функции ограничения к нулю.

Подставляем значения x_1 и x_2 в функцию ограничения и находим значение λ:

$$\ln y - \alpha \ln\left(\frac{\lambda\alpha}{w_1}\right) - \beta \ln\left(\frac{\lambda\beta}{w_2}\right) =$$

$$= \ln y - (\alpha + \beta)\ln\lambda - \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{w_1}\right) - \beta \ln\left(\frac{\beta}{w_2}\right) = 0,$$

$$\lambda = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Подставляя найденное значение λ в выражения x_1 и x_2, получаем функции условного спроса на факторы производства:

$$x_1^* = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + k,$$

$$x_2^* = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1} + l.$$

Б. Функция издержек показывает необходимые денежные затраты для достижения объема выпуска y при данных ценах факторов производства:

$$C = w_1 x_1^* + w_2 x_2^* = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta) + kw_1 + lw_2.$$

В. Чтобы найти MC, вычисляем частную производную C по y:

$$MC = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{\alpha+\beta} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta).$$

Чтобы найти AC, делим C на y:

$$AC = \frac{C}{y} = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta) + \frac{kw_1}{y} + \frac{lw_2}{y}.$$

Заметим, что MC не зависит от параметров k, l. Увеличение значения одного или обоих параметров способствует росту AC, но не влияет на MC.

4.3. СОВЕРШЕННАЯ КОНКУРЕНЦИЯ И МОНОПОЛИЯ

◆ **Задача 4.8.** Объем выпуска фирмы, потребляющей n факторов производства, задан функцией

$$y = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}\right]^{-1},$$

где x_i — количество i-го фактора производства и $\alpha_i > 0$:

а) найдите функции условного спроса на факторы производства и функцию издержек фирмы в долгосрочном периоде (все факторы производства переменны);

б) найдите функцию издержек фирмы в краткосрочном периоде (только m из n факторов производства переменны);

в) рассчитайте MC и AC фирмы в краткосрочном периоде;

г) известно, что $MC = AC = \hat{P}$ при объеме выпуска $\hat{y}$. Выведите функцию кривой предложения фирмы $S(P)$ в краткосрочном периоде, если дано, что фирма конкурентная и рыночная цена товара $P > \hat{P}$.

Решение.

А. Решим задачу минимизации издержек методом множителей Лагранжа.

Преобразовав функцию ограничения, имеем

$$L = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i} - \frac{1}{y}\right].$$

Приравниваем к нулю все частные производные L, чтобы получить условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i - \frac{\lambda\alpha_i}{x_i^2} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i} - \frac{1}{y} = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $x_i = \sqrt{\lambda\alpha_i / w_i}$. Подставляя значение x_i во второе уравнение, имеем

$$\sqrt{\lambda} = y\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\alpha_j w_j}.$$

Подставляя значение $\sqrt{\lambda}$ обратно в уравнение $x_i = \sqrt{\lambda\alpha_i / w_i}$, получаем функции условного спроса на факторы производства

$$x_i^* = y\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{\alpha_i \alpha_j w_j}{w_i}}, \qquad \text{где } i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, функция издержек фирмы в долгосрочном периоде

$$C = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* = y\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\alpha_i \alpha_j w_i w_j}.$$

Б. Пусть фиксированные факторы производства будут обозначаться $\bar{x}_i$. В краткосрочном периоде функция Лагранжа имеет форму

$$L = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i + \lambda \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{x_i} - A \right], \qquad \text{где} \quad A = \frac{1}{y} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\alpha_i}{\bar{x}_i},$$

так как фирма может менять только количества $x_1, \ldots, x_m$, а количества $x_{m+1}, \ldots, x_n$ фиксированны. Получаем условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i - \frac{\lambda \alpha_i}{x_i^2} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{x_i} - A = 0.$$

Заметим, что данное задание подобно предыдущему. Заменив y из п. А на $1/A$, можно сразу написать функции условного спроса на факторы производства:

$$x_i^* = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\frac{\alpha_i \alpha_j w_j}{w_i}}, \qquad \text{где} \quad i = 1, \ldots, m,$$

из которых следует функция издержек в краткосрочном периоде

$$C = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^* + \sum_{i=m+1}^{n} w_i \bar{x}_i = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\alpha_i \alpha_j w_i w_j} + \sum_{i=m+1}^{n} w_i \bar{x}_i.$$

Выражение $\sum_{i=m+1}^{n} w_i \bar{x}_i$ представляет собой постоянные издержки фирмы, так как оно не зависит от объема выпуска y. Обозначим $FC = \sum_{i=m+1}^{n} w_i \bar{x}_i$.

В. Для компактности в дальнейших расчетах обозначим

$$B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\alpha_i \alpha_j w_i w_j}.$$

Так как вычисление MC и AC включает переменную y, выразим $1/A$ через y:

$$\frac{1}{A} = \frac{y}{1 - y \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\alpha_i}{\bar{x}_i}}.$$

Функцию издержек фирмы в краткосрочном периоде можно написать в следующем виде:

$$C = \frac{By}{1 - y\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha_i}{\overline{x}_i}} + FC.$$

Чтобы найти MC, вычисляем частную производную C по y:

$$MC = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{B}{\left[1 - y\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha_i}{\overline{x}_i}\right]^2}.$$

Чтобы найти AC, делим C на y:

$$AC = \frac{C}{y} = \frac{B}{1 - y\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha_i}{\overline{x}_i}} + \frac{FC}{y}.$$

г. Кривая MC пересекает кривую AC в точке минимума средних издержек $\hat{P}$, т.е. при $P = \hat{P}$ равенство $MC = AC$ соблюдается. Так как рыночная цена товара $P > \hat{P}$, объем выпуска фирмы положителен. Чтобы найти оптимальный объем выпуска y^*, используем условие максимизации прибыли фирмы $P = MC$. Подставляя значение MC в уравнение, имеем

$$P = \frac{B}{\left[1 - y\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha_i}{\overline{x}_i}\right]^2}.$$

Выражая y, находим функцию кривой предложения фирмы:

$$y^* = S(P) = \frac{1 - \sqrt{B/P}}{\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha_i}{\overline{x}_i}}.$$

◆ **Задача 4.9.** Издержки единственной фирмы на рынке заданы функцией $C = y^\alpha + F$, где y — объем выпуска; F — постоянные издержки; α — положительный параметр:

а) найдите объем выпуска $\hat{y}$ и цену $\hat{P}$, минимизирующие средние издержки фирмы. Предполагая, что цена P устанавливается рынком, выведите функцию кривой предложения фирмы $S(P)$ при условии, что $P > \hat{P}$. Выясните, каково предложение фирмы, если $P \le \hat{P}$;

б) пусть $D(P)$ — функция кривой спроса для рынка, обслуживаемого фирмой. Выпишите уравнение, характеризующее равновесную цену P^* на данном рынке. При каком условии существует равновесие? Чему равны значения цены и функции спроса в условиях равновесия, если рынок обслуживает большое количество фирм, имеющих такую же функцию издержек?

Решение.

А. Кривая MC пересекает кривую AC в точке $\hat{y}$. Выпишем уравнения AC и MC для данной функции издержек:

$$AC = \frac{C}{y} = y^{\alpha-1} + \frac{F}{y}, \qquad MC = \frac{dC}{dy} = \alpha y^{\alpha-1}.$$

Приравнивая AC и MC, получаем уравнение $y^{\alpha-1} + F/y = \alpha y^{\alpha-1}$. Выражая y и используя условие $P = MC$, находим объем выпуска и цену, минимизирующие AC:

$$\hat{y} = \left(\frac{F}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \hat{P} = \alpha\hat{y}^{\alpha-1} = \alpha\left(\frac{F}{\alpha-1}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Выражая y из уравнения $P = MC = \alpha y^{\alpha-1}$, получаем функцию кривой предложения

$$y^* = S(P) = (P/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

В соответствии с этой функцией фирма производит, только если $P > \hat{P}$. Если $P < \hat{P}$, фирма не будет заниматься производством вообще. Если $P = \hat{P}$, фирме безразлично, производить ли на уровне $\hat{y}$ или не производить вообще.

Б. Равновесие характеризуется равенством спроса и предложения. Значение P^* такое, что при нем соблюдается равенство $S(P^*) = (P^*/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}} = D(P^*)$. При цене $P = P^*$ необходимо, чтобы спрос превышал объем выпуска, минимизирующий AC, иначе кривая спроса не пересечет кривую предложения. Следовательно, равновесие существует, если $D(P^*) \geq \hat{y}$.

При наличии большого количества фирм в условиях совершенной конкуренции прибыль каждой фирмы без учета постоянных издержек нулевая. В этом случае цена $P^* = \hat{P}$ и спрос равен $D(\hat{P})$.

◆ **Задача 4.10.** Функция издержек монополиста, управляющего одним заводом, и обратная функция спроса заданы уравнениями

$$C_1 = \frac{1}{2}y_1^2 + 2y_1 + F_1, \qquad P = 20 - y,$$

где y_1 — объем выпуска завода; F_1 — постоянные издержки; y — объем спроса:

а) найдите объем выпуска y_1^* и цену P^*, максимизирующие прибыль монополиста, рассчитайте прибыль π^*;

б) у монополиста возникает возможность открыть второй завод, функция издержек при производстве на втором заводе имеет вид

$$C_2 = \beta y_2 + F_2,$$

где y_2 — объем выпуска завода; β — неизвестный параметр, причем $2 < \beta < 8$, и $F_2 = 12$. Предполагая, что монополист может производить на двух заводах, найдите сочетание y_1^*, y_2^* и P^*, максимизирующее прибыль монополиста, рассчитайте новую прибыль $\hat{\pi}^*$;

в) выясните, при каких значениях β монополисту выгодно открывать второй завод.

Решение.

А. Так как объем выпуска монополиста равен y_1, уравнение $P = 20 - y_1$ задает обратную функцию спроса. Рассчитаем MC, TR и MR:

$$MC = \frac{\partial C}{\partial y_1} = 2 + y_1,$$

$$TR = Py_1 = (20 - y_1)y_1 = 20y_1 - y_1^2, \qquad MR = \frac{dTR}{dy_1} = 20 - 2y_1.$$

Оптимальный объем выпуска возникает при условии $MR = MC$. Приравнивая эти величины, имеем $20 - 2y_1 = 2 + y_1$, откуда следует, что $y_1^* = 6$.

Подставляя значение y_1^* в обратную функцию спроса, находим цену: $P^* = 20 - y_1^* = 14$.

Чтобы найти прибыль, вычитаем издержки из общей выручки монополиста:

$$\pi^* = TR - C = P^* y_1^* - C = 54 - F_1.$$

Б. Так как монополист производит на двух заводах, общий объем выпуска равен сумме объемов выпуска каждого завода. Обратная функция спроса имеет вид

$$P = 20 - (y_1 + y_2).$$

Выведем уравнение прибыли монополиста:

$$\hat{\pi} = P(y_1 + y_2) - (C_1 + C_2) =$$

$$= \left[20 - (y_1 + y_2)\right](y_1 + y_2) - \left(\frac{1}{2}y_1^2 + 2y_1 + F_1 + \beta y_2 + F_2\right) =$$

$$= 18y_1 - \frac{3}{2}y_1^2 + (20 - \beta)y_2 - y_2^2 - 2y_1y_2 - F_1 - F_2.$$

Напишем условия первого порядка:

$$\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial y_1} = 18 - 3y_1 - 2y_2 = 0, \qquad \frac{\partial\hat{\pi}}{\partial y_2} = 20 - \beta - 2y_1 - 2y_2 = 0.$$

Решая систему уравнений, находим оптимальный объем выпуска на каждом заводе:

$$y_1^* = \beta - 2, \qquad y_2^* = 12 - \frac{3}{2}\beta.$$

Подставляя найденные значения y_1^* и y_2^* в обратную функцию спроса, получаем выражение цены:

$$P^* = 20 - (y_1^* + y_2^*) = 10 + \frac{1}{2}\beta.$$

Подставляя значения y_1^*, y_2^* и P^* в уравнение прибыли монополиста, имеем

$$\hat{\pi}^* = P^*(y_1^* + y_2^*) - (C_1 + C_2) =$$

$$= \left(10 + \frac{1}{2}\beta\right)\left(10 - \frac{1}{2}\beta\right) - \left(\frac{1}{2}(\beta-2)^2 + 2(\beta-2) + F_1 + \beta\left(12 - \frac{3}{2}\beta\right) + F_2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\beta^2 - 12\beta + 102 - F_1 - F_2.$$

Используя условие $F_2 = 12$, получаем выражение для максимально возможной прибыли монополиста:

$$\hat{\pi}^* = \frac{3}{4}\beta^2 - 12\beta + 90 - F_1.$$

В. Необходимо сравнить прибыль монополиста при производстве на двух заводах с прибылью при производстве только на первом заводе:

$$\hat{\pi}^* - \pi^* = \frac{3}{4}\beta^2 - 12\beta + 36 = \frac{3}{4}(\beta - 12)(\beta - 4).$$

Из этого уравнения следует, что если $\beta > 12$ или $\beta < 4$, то $\hat{\pi}^* > \pi^*$. Учитывая заданные на β ограничения $(2 < \beta < 8)$, отметим, что при $2 < \beta < 4$ монополисту выгодно открывать второй завод, так как при таких значениях β прибыль монополиста при производстве на двух заводах выше, чем прибыль при производстве только на первом заводе.

◆ **Задача 4.11.** Функция издержек монополиста, обслуживающего один рынок, и функция спроса заданы следующими уравнениями:

$$C = \beta y_1 + F, \qquad D_1(P_1) = y_1 = a_1 - b_1 P_1,$$

где y_1 — объем выпуска на данном рынке; F — постоянные издержки; a_1 и b_1 — положительные параметры; P_1 — цена товара на данном рынке:

а) найдите максимально возможный уровень прибыли монополиста π^*;

б) предположите теперь, что у монополиста есть доступ к n рынкам. Для рынка i функция спроса имеет вид

$$D_i(P_i) = y_i = a_i - b_i P_i,$$

где a_i и b_i — положительные параметры; P_i — цена товара на i-м рынке. Найдите максимально возможный уровень прибыли монополиста $\hat{\pi}^*$;

в) сравните π^* и $\hat{\pi}^*$.

Решение.

А. Выражаем P_1 из функции спроса, чтобы получить обратную функцию спроса:

$$P_1 = \frac{a_1 - y_1}{b_1}.$$

Прибыль равна разности общей выручки и издержек монополиста. Подставляя обратную функцию спроса в уравнение прибыли, имеем

$$\pi = P_1 y_1 - C = \left(\frac{a_1 - y_1}{b_1}\right) y_1 - \beta y_1 - F = \left(\frac{a_1}{b_1} - \beta\right) y_1 - \frac{1}{b_1} y_1^2 - F.$$

Задача заключается в максимизации прибыли по отношению к объему выпуска монополиста. Из условия первого порядка

$$\frac{d\pi}{dy_1} = \frac{a_1 - 2y_1}{b_1} - \beta = 0$$

следует, что объем выпуска, максимизирующий прибыль,

$$y_1^* = \frac{a_1 - \beta b_1}{2}.$$

Цену при таком объеме выпуска можно узнать, используя обратную функцию спроса:

$$P_1^* = \frac{a_1 - y_1^*}{b_1} = \frac{a_1 + \beta b_1}{2b_1}.$$

Подставляя найденные значения P_1^* и y_1^* в уравнение прибыли, получаем максимально возможный уровень прибыли монополиста:

$$\pi^* = P_1^* y_1^* - C = \left(\frac{a_1 + \beta b_1}{2b_1}\right)\left(\frac{a_1 - \beta b_1}{2}\right) - \beta\left(\frac{a_1 - \beta b_1}{2}\right) - F =$$

$$= \frac{a_1^2}{4b_1} + \frac{\beta^2 b_1}{4} - \frac{\beta a_1}{2} - F.$$

Б. Функция издержек монополиста, обслуживающего n рынков, имеет вид

$$C = \beta\sum_{i=1}^{n} y_i + F,$$

где y_i — объем выпуска, предложенного рынку i, $i = 1, ..., n$. Решая эту задачу тем же методом, что и в п. А, получаем подобные результаты. Обратная функция спроса для рынка i имеет вид

$$P_i = \frac{a_i - y_i}{b_i}.$$

Общая выручка монополиста равна сумме выручки со всех рынков. Следовательно, прибыль монополиста задана уравнением:

$$\hat{\pi} = \sum_{i=1}^{n} P_i y_i - C = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i - y_i}{b_i}\right) y_i - \beta\sum_{i=1}^{n} y_i - F =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} y_i - \beta\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i} y_i^2 - F.$$

Дифференцируя прибыль по каждому из y_i, получаем условия первого порядка:

$$\frac{\partial\hat{\pi}}{\partial y_i} = \frac{a_i - 2y_i}{b_i} - \beta = 0, \qquad \text{где} \quad i = 1, ..., n,$$

откуда следует уравнение оптимального выпуска для рынка i:

$$y_i^* = \frac{a_i - \beta b_i}{2}.$$

Подставляя значение y_i^* в обратную функцию спроса, находим цену товара на рынке i:

$$P_i^* = \frac{a_i - y_i^*}{b_i} = \frac{a_i + \beta b_i}{2b_i}.$$

Используя найденные значения P_i^* и y_i^*, рассчитываем прибыль монополиста:

$$\hat{\pi}^* = \sum_{i=1}^{n} P_i^* y_i^* - C = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^2}{4b_i} + \frac{\beta^2 b_i}{4} - \frac{\beta a_i}{2} \right) - F.$$

В. Вычитаем прибыль монополиста, обслуживающего один рынок, из прибыли монополиста, обслуживающего n рынков:

$$\hat{\pi}^* - \pi^* = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i^2}{4b_i} + \frac{\beta^2 b_i}{4} - \frac{\beta a_i}{2} \right) = \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i^2 - 2\beta a_i b_i + \beta^2 b_i^2}{4b_i} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \frac{(a_i - \beta b_i)^2}{4b_i} \geq 0.$$

Так как разность $\hat{\pi}^* - \pi^* \geq 0$, делаем вывод, что прибыль при обслуживании n рынков не меньше, чем при обслуживании одного рынка.

5. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ

5.1. ЭКОНОМИКА ОБМЕНА

◆ **Задача 5.1.** В экономике обмена единственный производитель может выпускать два товара — X и Y, используя два фактора производства — труд L и капитал K, по 10 единиц каждого. Производственные функции для каждого товара заданы формулами $X = 2K + L$ и $Y = K + 2L$. Предпочтения единственного потребителя заданы его функцией полезности $U(x, y) = \min\{x, y\}$, где x, y — количество потребляемых товаров X, Y. Выведите границу производственных возможностей и определите равновесное количество товаров X и Y. Предположите, что P_x — цена товара X, а P_y — цена товара Y.

Решение.

Заметим, что функция $U(x, y) = \min\{x, y\}$ недифференцируема. Вычислим маршаллианские функции спроса, используя условие $x = y$ при $xP_x + yP_y = M$. Имеем $x^m = y^m = \dfrac{M}{P_x + P_y}$.

Максимальное количество каждого из товаров, которое может произвести эта экономика, не выпуская другой товар, составляет $X = 2 \cdot 10 + 10 = 30$ и $Y = 10 + 2 \cdot 10 = 30$.

Граница производственных возможностей имеет наклон $MRT = \frac{1}{2}$ при производстве до 20 единиц товара X и наклон $MRT = 2$ при производстве от 20 до 30 единиц товара X (рис. 5.1). Уравнение линии бюджетного ограничения дано $Y = -\frac{1}{2}X + 30$ для $0 \le X \le 20$ и $Y = -2X + 60$ для $20 < X \le 30$.

Координата X точки, максимизирующей полезность потребителя, является решением уравнения $-\frac{1}{2}X + 30 = -2X + 60$, т.е. $X^* = 20$. Следовательно, $Y^* = -\frac{1}{2} \cdot 20 + 30 = 20$. *Равновесное количество* производства каждого из товаров по Вальрасу составляют $X^* = 20$ и $Y^* = 20$.

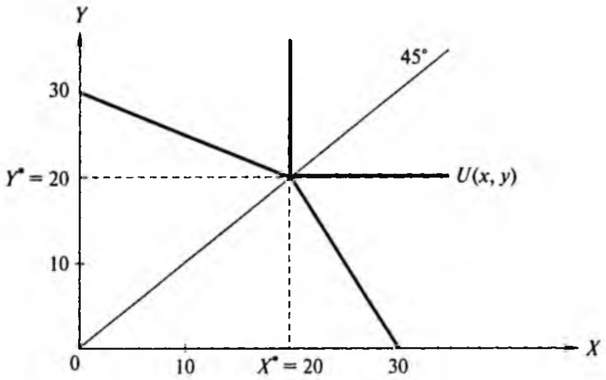


Рис. 5.1

◆ **Задача 5.2.** В экономике обмена действуют три агента A, B и C, которые производят три товара X, Y, Z и торгуют ими. Функции полезности экономических агентов и их исходная обеспеченность каждым товаром следующие:

$U^A(x, y, z) = \min\{x, y\}$, $\omega^A = (1, 0, 0)$;

$U^B(x, y, z) = \min\{y, z\}$, $\omega^B = (0, 1, 0)$;

$U^C(x, y, z) = \min\{x, z\}$, $\omega^C = (0, 0, 1)$.

Вычислите вальрасианские равновесные цены и количество товаров при обмене.

Решение.

Напомним **закон Вальраса**. В экономике обмена n товаров; если рынки товаров $1, ..., n-1$ находятся в равновесии, то и рынок товара n тоже должен находиться в равновесии. Следовательно, если E_i — функция избыточного спроса на товар $i = 1, ..., n$ и P_i — рыночная цена товара i, то $\sum_{i=1}^{n} P_i E_i = 0$.

Шаг 1. Выписать маршаллианские функции спроса.

Агент A максимизирует свою полезность, когда $x^A = y^A$. Пусть P_x, P_y и P_z — цена товара X, Y и Z соответственно.

Учитывая обеспеченность товарами этого агента, имеем $x^A P_x + y^A P_y + z^A P_z = 1 \cdot P_x + 0 + 0 = M^A$. Следовательно, спрос агента A задан уравнениями

$$x^A = \frac{M^A}{P_x + P_y} = \frac{P_x}{P_x + P_y}, \qquad y^A = \frac{P_x}{P_x + P_y}, \qquad z^A = 0.$$

Таким же образом находим спрос агента B. Используя условия $y^B = z^B$ и $x^B P_x + y^B P_y + z^B P_z = 0 + 1 \cdot P_y + 0 = M^B$, получаем выражения

$$x^B = 0, \qquad y^B = \frac{M^B}{P_y + P_z} = \frac{P_y}{P_y + P_z}, \qquad z^B = \frac{P_y}{P_y + P_z}.$$

Спрос агента C имеет вид

$$x^C = \frac{M^C}{P_x + P_z} = \frac{P_z}{P_x + P_z}, \qquad y^C = 0, \qquad z^C = \frac{P_z}{P_x + P_z}.$$

Шаг 2. Выписать функции избыточного спроса. По закону Вальраса достаточно рассмотреть два из трех рынков, допустим, рынки товаров X и Y. Приравняв спрос и предложение на каждом из этих рынков, имеем $y^A + y^B = 1$ и $x^A + x^C = 1$. Отсюда

$$\frac{P_x}{P_x + P_y} + \frac{P_y}{P_y + P_z} = 1, \qquad (1)$$

$$\frac{P_x}{P_x + P_y} + \frac{P_z}{P_x + P_z} = 1. \qquad (2)$$

Использовав нормализацию, получим

$$P_x + P_y + P_z = 1. \qquad (3)$$

Из (1) следует, что $\dfrac{P_x}{P_x + P_y} = 1 - \dfrac{P_y}{P_y + P_z} = \dfrac{P_z}{P_y + P_z}$.

Из (2) следует, что $\dfrac{P_x}{P_x + P_y} = 1 - \dfrac{P_z}{P_x + P_z} = \dfrac{P_x}{P_x + P_z}$.

Сравнив левую и правую сторону последнего уравнения, заметим, что $P_y = P_z$. Если подставить это в (1), получим $\frac{P_x}{P_x + P_y} = \frac{1}{2}$, откуда $P_x = P_y$. Следовательно, $P_x = P_y = P_z$, т.е. цены всех товаров равны. Подставив этот результат в (3), получим вальрасианские равновесные цены $P_x^* = P_y^* = P_z^* = 1/3$.

Шаг 3. Подставить равновесные цены в маршаллианские функции спроса.

Получаем вальрасианские равновесные количества товаров:

$$(x^A, y^A, z^A) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$(x^B, y^B, z^B) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$(x^C, y^C, z^C) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

◆ **Задача 5.3.** Рассмотрите экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями. Предпочтения потребителей заданы функциями полезности

$$U^A = \alpha \ln x_1^A + (1-\alpha)\ln x_2^A, \qquad U^B = \beta \ln x_1^B + (1-\beta)\ln x_2^B,$$

где x_i^A и x_i^B для $i = 1, 2$ — количество товара i, потребляемое участниками A и B соответственно; α, β — положительные параметры, причем $\alpha, \beta < 1$. Потребители владеют начальными запасами $\omega^A = (m, n)$ и $\omega^B = (R_1 - m, R_2 - n)$, где $0 < m < R_1$ и $0 < n < R_2$:

а) выведите уравнение кривой контрактов при условии, что общая сумма запасов равна (R_1, R_2);

б) пусть $p = p_1/p_2$, где p_1 — цена первого товара и p_2 — цена второго товара. Полагая, что $p_2 = 1$, найдите значение p, соответствующее равновесию рынков двух товаров;

в) предположите, что $\omega^A = (1, n)$ и $\omega^B = (1, 2 - n)$. Государство выбирает значение n, так что $1/2 \le n \le 3/2$, с целью максимизации суммы доходов A и B. Найдите значение n, при котором цель государства достигается, вычислите наибольшую сумму доходов потребителей.

Решение.

А. ***Кривая контрактов*** — это множество возможных эффективных распределений двух товаров между двумя потребителями. Уравнение кривой контрактов вычислим, приравнивая предельные нормы замещения двух потребителей:

$$MRS^A_{1\to 2} = \frac{\partial U^A/\partial x_2^A}{\partial U^A/\partial x_1^A} = \frac{\partial U^B/\partial x_2^B}{\partial U^B/\partial x_1^B} = MRS^B_{1\to 2}.$$

Рассчитаем значения всех частных производных функций полезности U^A и U^B:

$$\frac{\partial U^A}{\partial x_1^A} = \frac{\alpha}{x_1^A}, \qquad \frac{\partial U^A}{\partial x_2^A} = \frac{1-\alpha}{x_2^A}, \qquad \frac{\partial U^B}{\partial x_1^B} = \frac{\beta}{x_1^B}, \qquad \frac{\partial U^B}{\partial x_2^B} = \frac{1-\beta}{x_2^B}.$$

Используя условие, что при равновесии $x_1^B = R_1 - x_1^A$ и $x_2^B = R_2 - x_2^A$, и подставляя значения частных производных функций полезности в уравнение $MRS^A_{1\to 2} = MRS^B_{1\to 2}$, имеем

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x_1^A}{x_2^A} = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{R_1 - x_1^A}{R_2 - x_2^A}.$$

Выражая x_1^A, получаем уравнение кривой контрактов:

$$x_1^A = \frac{x_2^A R_1 \hat{\beta}}{R_2\hat{\alpha} - x_2^A(\hat{\alpha} - \hat{\beta})}, \quad \text{где} \quad \hat{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{и} \quad \hat{\beta} = \frac{1-\beta}{\beta}.$$

Б. Начнем с задачи максимизации благосостояния потребителя A. Так как начальные запасы A равны (m, n), доход потребителя A задан уравнением $M^A = pm + n$. Решим задачу методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи потребителя A имеет вид

$$L^A = \alpha \ln x_1^A + (1-\alpha)\ln x_2^A + \lambda\,[pm + n - px_1^A - x_2^A].$$

Выпишем условия первого порядка:

$$\frac{\partial L^A}{\partial x_1^A} = \frac{\alpha}{x_1^A} - \lambda p = 0, \qquad \frac{\partial L^A}{\partial x_2^A} = \frac{1-\alpha}{x_2^A} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L^A}{\partial \lambda} = pm + n - px_1^A - x_2^A = 0.$$

Решая систему трех уравнений, находим $\lambda = (pm + n)^{-1}$ и получаем выражения спроса потребителя A на товары 1 и 2:

$$x_1^A = \alpha \frac{pm + n}{p} = \alpha\left(m + \frac{n}{p}\right), \qquad x_2^A = (1 - \alpha)(pm + n).$$

Теперь решим задачу максимизации благосостояния потребителя B. Так как начальные запасы B равны $(R_1 - m, R_2 - n)$, доход потребителя B задан уравнением $M^B = p(R_1 - m) + (R_2 - n)$. Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$L^B = \beta \ln x_1^B + (1-\beta) \ln x_2^B + \mu[p(R_1 - m) + (R_2 - n) - px_1^B - x_2^B].$$

Выпишем условия первого порядка:

$$\frac{\partial L^B}{\partial x_1^B} = \frac{\beta}{x_1^B} - \mu p = 0, \qquad \frac{\partial L^B}{\partial x_2^B} = \frac{1-\beta}{x_2^B} - \mu = 0,$$

$$\frac{\partial L^B}{\partial \mu} = p(R_1 - m) + (R_2 - n) - px_1^B - x_2^B = 0.$$

Из этих уравнений вытекает, что $\mu = [p(R_1 - m) + R_2 - n]^{-1}$. Следовательно, уровень потребления товаров, максимизирующий благосостояние потребителя B, задан уравнениями

$$x_1^B = \beta\left(R_1 - m + \frac{R_2 - n}{p}\right), \qquad x_2^B = (1 - \beta)[p(R_1 - m) + R_2 - n].$$

В условиях равновесия общее потребление товара равно общему запасу этого товара в экономике. Приравниваем функцию избыточного спроса на первый товар к нулю:

$$E_1(p) = x_1^A + x_1^B - R_1 = \alpha\left(m + \frac{n}{p}\right) + \beta\left(R_1 - m + \frac{R_2 - n}{p}\right) - R_1 = 0.$$

Выражая p, находим цену, соответствующую равновесию рынков двух товаров:

$$p = \frac{n(\alpha - \beta) + \beta R_2}{m(\beta - \alpha) + R_1(1 - \beta)}.$$

Отметим, что это значение p является также корнем функции избыточного спроса на второй товар.

В. Предполагая, что $\omega^A = (1, n)$ и $\omega^B = (1, 2 - n)$, можно подставить значения $m = 1$ и $R_1 = R_2 = 2$ в выражение цены p. Новое выражение примет вид

$$p = \frac{n(\alpha - \beta) + 2\beta}{2 - \alpha - \beta}.$$

Задача государства — максимизировать $(M^A + M^B)$ — общую сумму доходов потребителей, участвующих в экономике обмена. При данных условиях $M^A = p + n$ и $M^B = p + 2 - n$. Следовательно,

$$M^A + M^B = 2p + 2 = \frac{2n(\alpha - \beta) + 4\beta}{2 - \alpha - \beta} + 2.$$

Если:

- $\alpha > \beta$, то $M^A + M^B$ растет при увеличении значения n. Чтобы достичь своей цели, государство должно выбрать наибольшее значение n, т.е. $n = 3/2$. Тогда общая сумма доходов

$$M^A + M^B = \frac{3\alpha + \beta}{2 - \alpha - \beta} + 2;$$

- $\alpha < \beta$, то $M^A + M^B$ убывает при увеличении значения n. В этом случае государство должно выбрать наименьшее значение n, т.е. $n = 1/2$. Общая сумма доходов задана уравнением

$$M^A + M^B = \frac{\alpha + 3\beta}{2 - \alpha - \beta} + 2;$$

- $\alpha = \beta$, то $M^A + M^B$ не зависит от значения n. Государство может выбрать любое значение n из $1/2 \le n \le 3/2$. Тогда общая сумма доходов

$$M^A + M^B = \frac{2\beta}{1 - \beta} + 2.$$

◆ **Задача 5.4.** Рассмотрите экономику обмена, состоящую из двух потребителей и трех благ. Предпочтения потребителей заданы функциями полезности

$$U^A = (x_1^A x_2^A x_3^A)^{\frac{1}{3}}, \qquad U^B = (x_1^B)^{\frac{1}{2}} (x_2^B x_3^B)^{\frac{1}{4}},$$

где x_i^A и x_i^B для $i = 1, 2, 3$ — количество блага i, потребляемое участниками A и B соответственно. Начальные запасы заданы векторами $\omega^A = (1, 0, 0)$ и $\omega^B = (0, 1, 1)$:

а) вычислите равновесие данной экономики;

б) к экономике присоединяется третий потребитель, предпочтения которого заданы функцией полезности

$$U^C = (x_1^C)^\alpha (x_2^C)^{1-\alpha},$$

где x_1^C и x_2^C — количество потребляемых благ; α — положительный параметр, причем $\alpha < 1$. Начальные запасы заданы вектором $\omega^C = (0, 0, R)$, где R — переменная положительная величина. Вычислите равновесие новой экономики обмена, состоящей из трех потребителей и трех благ;

в) выясните, как рост значения R влияет на распределение блага 2 при равновесии.

Решение.

А. Пусть p_1 и p_2 — цены благ 1 и 2, выраженные через цену блага 3, и пусть цена блага 3 равна единице: $p_3 = 1$. Тогда доход потребителя A равен p_1. Найдем сначала уровень потребления благ, максимизирующий благосостояние потребителя A, используя метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$L^A = \frac{1}{3}(\ln x_1^A + \ln x_2^A + \ln x_3^A) + \lambda[p_1 - p_1 x_1^A - p_2 x_2^A - x_3^A].$$

Отсюда следуют условия первого порядка:

$$\frac{\partial L^A}{\partial x_1^A} = \frac{1}{3x_1^A} - \lambda p_1 = 0, \qquad \frac{\partial L^A}{\partial x_2^A} = \frac{1}{3x_2^A} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L^A}{\partial x_3^A} = \frac{1}{3x_3^A} - \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L^A}{\partial \lambda} = p_1 - p_1 x_1^A - p_2 x_2^A - x_3^A = 0.$$

Решая систему этих четырех уравнений, находим $\lambda = 1/p_1$ и получаем выражения, описывающие спрос потребителя A:

$$x_1^A = \frac{1}{3}, \qquad x_2^A = \frac{p_1}{3p_2}, \qquad x_3^A = \frac{p_1}{3}.$$

Теперь таким же способом решим задачу максимизации благосостояния потребителя B. Так как начальный запас потребителя B задан вектором (0, 1, 1), его доход равен $p_2 + 1$. Функция Лагранжа для задачи потребителя B имеет вид

$$L^B = \frac{1}{2}\ln x_1^B + \frac{1}{4}(\ln x_2^B + \ln x_3^B) + \mu[p_2 + 1 - p_1x_1^B - p_2x_2^B - x_3^B].$$

Из условий первого порядка

$$\frac{\partial L^B}{\partial x_1^B} = \frac{1}{2x_1^B} - \mu p_1 = 0, \qquad \frac{\partial L^B}{\partial x_2^B} = \frac{1}{4x_2^B} - \mu p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L^B}{\partial x_3^B} = \frac{1}{4x_3^B} - \mu = 0, \qquad \frac{\partial L^B}{\partial \mu} = p_2 + 1 - p_1x_1^B - p_2x_2^B - x_3^B = 0,$$

находим уравнения, характеризующие оптимальный спрос потребителя B

$$x_1^B = \frac{p_2 + 1}{2p_1}, \qquad x_2^B = \frac{p_2 + 1}{4p_2}, \qquad x_3^B = \frac{p_2 + 1}{4}$$

при $\mu = 1/(p_2 + 1)$.

Найдя уравнения спроса обоих потребителей, выпишем функции избыточного спроса. В условиях равновесия избыточный спрос на каждое благо равен нулю:

$$E_1(p_1, p_2) = x_1^A + x_1^B - 1 = \frac{p_2 + 1}{2p_1} - \frac{2}{3} = 0,$$

$$E_2(p_1, p_2) = x_2^A + x_2^B - 1 = \frac{p_1}{3p_2} + \frac{p_2 + 1}{4p_2} - 1 = 0,$$

$$E_3(p_1, p_2) = x_3^A + x_3^B - 1 = \frac{p_1}{3} + \frac{p_2 + 1}{4} - 1 = 0.$$

Из $E_1 = 0$ следует, что $p_1 = (3p_2 + 3)/4$. Подставляя значение p_1 в уравнение $E_3 = 0$, узнаем, что в равновесии $p_2 = 1$ и $p_1 = 3/2$. Подставляя найденные значения p_1 и p_2 в уравнения спроса потребителей A и B, получаем векторы распределения запасов при равновесии:

$$(x_1^A, x_2^A, x_3^A) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (x_1^B, x_2^B, x_3^B) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Б. Решим задачу максимизации благосостояния присоединившегося потребителя. При данных начальных запасах ω^C доход потребителя C равен R. Выпишем функцию Лагранжа для потребителя C:

$$L^C = \alpha \ln x_1^C + (1-\alpha)\ln x_2^C + \nu[R - p_1 x_1^C - p_2 x_2^C].$$

Условия первого порядка заданы уравнениями

$$\frac{\partial L^C}{\partial x_1^C} = \frac{\alpha}{x_1^C} - \nu p_1 = 0, \qquad \frac{\partial L^C}{\partial x_2^C} = \frac{1-\alpha}{x_2^C} - \nu p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L^C}{\partial \nu} = R - p_1 x_1^C - p_2 x_2^C = 0,$$

откуда следует, что при $\nu = 1/R$ функции спроса потребителя C на блага 1 и 2 имеют вид

$$x_1^C = \frac{R\alpha}{p_1}, \qquad x_2^C = \frac{R(1-\alpha)}{p_2}.$$

Учитывая спрос потребителя C и увеличение в объеме запаса блага 3 на количество R, напишем заново функции избыточного спроса и приравняем их к нулю:

$$E_1(p_1, p_2) = x_1^A + x_1^B + x_1^C - 1 = \frac{p_2+1}{2p_1} + \frac{R\alpha}{p_1} - \frac{2}{3} = 0,$$

$$E_2(p_1, p_2) = x_2^A + x_2^B + x_2^C - 1 = \frac{p_1}{3p_2} + \frac{p_2+1}{4p_2} + \frac{R(1-\alpha)}{p_2} - 1 = 0,$$

$$E_3(p_1, p_2) = x_3^A + x_3^B - (1+R) = \frac{p_1}{3} + \frac{p_2+1}{4} - (1+R) = 0.$$

Из уравнения $E_1 = 0$ следует, что $p_2 = (4/3)p_1 - 1 - 2R\alpha$. Подставляя значение p_2 в уравнение $E_3 = 0$, находим цены благ при равновесии: $p_1 = (3/4)(R(\alpha+2)+2)$ и $p_2 = R(2-\alpha)+1$. Замещая p_1 и p_2 их значениями в каждой функции спроса потребителей, получаем следующее распределение запасов:

$$x_1^A = \frac{1}{3}, \qquad x_2^A = \frac{R(\alpha+2)+2}{4R(2-\alpha)+4}, \qquad x_3^A = \frac{R(\alpha+2)+2}{4},$$

$$x_1^B = \frac{2R(2-\alpha)+4}{3R(\alpha+2)+6}, \qquad x_2^B = \frac{R(2-\alpha)+2}{4R(2-\alpha)+4}, \qquad x_3^B = \frac{R(2-\alpha)+2}{4},$$

$$x_1^C = \frac{4R\alpha}{3R(\alpha+2)+6}, \qquad x_2^C = \frac{R(1-\alpha)}{R(2-\alpha)+1}.$$

В. Вычислим производные x_2^A, x_2^B и x_2^C по R:

$$\frac{dx_2^A}{dR} = \frac{3\alpha - 2}{(2R(2-\alpha)+2)^2},$$

$$\frac{dx_2^B}{dR} = \frac{\alpha - 2}{(2R(2-\alpha)+2)^2},$$

$$\frac{dx_2^C}{dR} = \frac{1 - \alpha}{(R(2-\alpha)+1)^2}.$$

Отсюда видно, что при увеличении R количество блага 2, потребляемое в условиях равновесия участником B, уменьшается, так как $dx_2^B/dR < 0$, а его количество, потребляемое участником C, увеличивается, так как $dx_2^C/dR > 0$. Если $\alpha < 2/3$, уровень потребления блага 2 участником A падает с ростом значения R, так как $dx_2^A/dR < 0$. Если $\alpha > 2/3$, уровень потребления участника A растет, так как $dx_2^A/dR > 0$. Если $\alpha = 2/3$, участник A в равновесии потребляет количество блага 2, равное 1/2 при любом значении R.

5.2. ИЗБЫТОЧНЫЙ СПРОС

◆ **Задача 5.5.** Определите, какие из следующих функций могут быть функциями избыточного спроса для некоторой экономики:

а) $E_1(\mathbf{p}) = \dfrac{p_2+p_3}{p_1+p_2} - \dfrac{p_1+p_3}{p_1}$, $\quad E_2(\mathbf{p}) = \dfrac{p_1+p_3}{p_2} - \dfrac{p_1}{p_1+p_2}$,

$E_3(\mathbf{p}) = -\dfrac{p_1}{p_1+p_2}$;

б) $E_1(\mathbf{p}) = \dfrac{1}{p_1+p_2} - \dfrac{p_1+1}{p_1}$, $\quad E_2(\mathbf{p}) = \dfrac{1}{p_1+p_2} + \dfrac{p_1}{p_2}$;

в) $E_1(\mathbf{p}) = \dfrac{p_2}{p_1} + \dfrac{p_3}{p_2}$, $\quad E_2(\mathbf{p}) = -1$, $\quad E_3(\mathbf{p}) = -\dfrac{p_1}{p_2} - \dfrac{p_2}{p_3}$.

Решение.

А. Функции избыточного спроса обладают свойством однородности нулевой степени. Для $t > 0$

$$E_1(t\mathbf{p}) = \frac{t(p_2+p_3)}{t(p_1+p_2)} - \frac{t(p_1+p_3)}{tp_1} = \frac{p_2+p_3}{p_1+p_2} - \frac{p_1+p_3}{p_1} = E_1(\mathbf{p}),$$

$$E_2(t\mathbf{p}) = \frac{t(p_1+p_3)}{tp_2} - \frac{tp_1}{t(p_1+p_2)} = \frac{p_1+p_3}{p_2} - \frac{p_1}{p_1+p_2} = E_2(\mathbf{p}),$$

$$E_3(t\mathbf{p}) = -\frac{tp_1}{t(p_1+p_2)} = -\frac{p_1}{p_1+p_2} = E_3(\mathbf{p}).$$

Все три функции являются однородными нулевой степени.

Функции избыточного спроса также должны удовлетворять закону Вальраса. Имеем

$$p_1E_1 + p_2E_2 + p_3E_3 =$$

$$= \frac{p_1(p_2+p_3)}{p_1+p_2} - p_1 - p_3 + p_1 + p_3 - \frac{p_1p_2}{p_1+p_2} - \frac{p_1p_3}{p_1+p_2} = 0.$$

Следовательно, данные функции могут быть функциями избыточного спроса, так как они являются однородными нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса.

Б. Пусть $t > 0$. Умножая цену каждого блага на t, имеем

$$E_1(t\mathbf{p}) = \frac{1}{tp_1+tp_2} - \frac{tp_1+1}{tp_1} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{p_1+p_2}\right) - \frac{p_1+(1/t)}{p_1} \neq E_1(\mathbf{p}),$$

$$E_2(t\mathbf{p}) = \frac{1}{tp_1+tp_2} + \frac{tp_1}{tp_2} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{p_1+p_2}\right) + \frac{p_1}{p_2} \neq E_2(\mathbf{p}).$$

Данные функции не могут быть функциями избыточного спроса, так как они не обладают свойством однородности нулевой степени.

В. Функции являются однородными нулевой степени, но они не могут быть функциями избыточного спроса, так как для них не выполняется закон Вальраса:

$$p_1E_1 + p_2E_2 + p_3E_3 = p_2 + \frac{p_1p_3}{p_2} - p_2 - \frac{p_1p_3}{p_2} - p_2 = -p_2 \neq 0.$$

◆ **Задача 5.6.** В экономике с тремя благами функции избыточного спроса на блага 1 и 2 имеют вид

$$E_1(\mathbf{p}) = \frac{p_1}{p_1 + p_3} + \frac{p_2}{p_1}, \qquad E_2(\mathbf{p}) = \frac{p_3 - p_1}{p_2} - 2.$$

Найдите функцию избыточного спроса на благо 3.

Решение.

Нужно найти однородную нулевой степени функцию E_3, при которой выполняется закон Вальраса. Выпишем условие закона Вальраса:

$$p_1E_1 + p_2E_2 + p_3E_3 = \frac{p_1^2}{p_1 + p_3} - p_2 + p_3 - p_1 + p_3E_3 = 0.$$

Выражая E_3 из этого уравнения, имеем

$$E_3 = \frac{p_1 + p_2}{p_3} - \frac{p_1^2}{p_3(p_1 + p_3)} - 1 = \frac{p_2(p_1 + p_3) - p_3^2}{p_3(p_1 + p_3)}.$$

Следовательно, функция избыточного спроса на благо 3 имеет вид

$$E_3(\mathbf{p}) = \frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_1 + p_3}.$$

Отметим, что все три функции обладают свойством однородности нулевой степени. Для $t > 0$

$$E_1(t\mathbf{p}) = \frac{tp_1}{t(p_1 + p_3)} + \frac{tp_2}{tp_1} = \frac{p_1}{p_1 + p_3} + \frac{p_2}{p_1} = E_1(\mathbf{p}),$$

$$E_2(t\mathbf{p}) = \frac{t(p_3 - p_1)}{tp_2} - 2 = \frac{p_3 - p_1}{p_2} - 2 = E_2(\mathbf{p}),$$

$$E_3(t\mathbf{p}) = \frac{tp_2}{tp_3} - \frac{tp_3}{t(p_1 + p_3)} = \frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_1 + p_3} = E_3(\mathbf{p}).$$

6. СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

6.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР

◆ **Задача 6.1.** Пусть a_1, a_2, a_3 — стратегии игрока A и b_1, b_2, b_3 — стратегии игрока B, а β и γ — параметры, причем $2 < \beta < 4$ и $2 < \gamma < 4$. Рассмотрите следующие игры в нормальной форме:

а) табл. 6.1;
б) табл. 6.2;
в) табл. 6.3.

Таблица 6.1

Игрок B / Игрок A	b_1	b_2
a_1	(1; 1)	(4; 2)
a_2	(2; 4)	(3; 3)

Таблица 6.2

Игрок B / Игрок A	b_1	b_2
a_1	$(8-\gamma;\ \gamma+1)$	$(\gamma-2;\ 3)$
a_2	$(4;\ \beta-2)$	$(\beta;\ 6-\beta)$

Таблица 6.3

Игрок B / Игрок A	b_1	b_2	b_3
a_1	(2; 6)	(1; 2)	(6; 3)
a_2	(1; 3)	(2; 1)	(2; 2)
a_3	(4; 3)	(0; 2)	(5; 4)

Для каждой из этих игр охарактеризуйте равновесия в чистых и смешанных стратегиях. Рассчитайте ожидаемый выигрыш (*payoff*) каждой стратегии при равновесии в смешанных стратегиях.

Решение.

А. В условиях ***равновесия при чистых стратегиях*** ни одному из игроков не выгодно отклоняться от равновесия. Наборы стратегий $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$ не могут быть равновесиями, так как в обоих случаях игрок B может увеличить свой выигрыш на одну единицу, выбрав альтернативную стратегию. Наборы стратегий $(a_2; b_1)$ и $(a_1; b_2)$ характеризуют равновесие игры, так как при самостоятельном отклонении от этих стратегий выигрыш любого игрока сократится на единицу.

Чтобы найти ***равновесие в смешанных стратегиях***, вычислим ожидаемый выигрыш от каждой стратегии при условии, что игрок A выбирает a_1 с вероятностью p и игрок B выбирает b_1 с вероятностью q. Пусть $\mathrm{E}^A(a_j)$ — ожидаемый выигрыш игрока A при выборе стратегии a_j и $\mathrm{E}^B(b_j)$ — ожидаемый выигрыш игрока B при выборе стратегии b_j, где $j = 1, 2$. Имеем уравнения

$$\mathrm{E}^A(a_1) = q + 4(1-q), \qquad \mathrm{E}^A(a_2) = 2q + 3(1-q),$$
$$\mathrm{E}^B(b_1) = p + 4(1-p), \qquad \mathrm{E}^B(b_2) = 2p + 3(1-p).$$

В условиях равновесия при смешанных стратегиях игроки безразличны к своим стратегиям. Используя это условие и решая уравнение $\mathrm{E}^A(a_1) = \mathrm{E}^A(a_2)$ и $\mathrm{E}^B(b_1) = \mathrm{E}^B(b_2)$, находим, что в условиях равновесия $p = 1/2$ и $q = 1/2$. Следовательно, при вычисленных значениях p и q ожидаемый выигрыш от каждой стратегии равен 5/2, т.е.

$$\mathrm{E}^A(a_1) = \mathrm{E}^A(a_2) = 5/2, \qquad \mathrm{E}^B(b_1) = \mathrm{E}^B(b_2) = 5/2.$$

Б. Заметим, что при данных ограничениях на β и γ наборы стратегий $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ характеризуют ***равновесия в чистых стратегиях***. Так как $8-\gamma > 4$ и $\gamma + 1 > 3$, ни одному из игроков не выгодно самостоятельно отклоняться от набора $(a_1; b_1)$. Так как $\beta > \gamma - 2$ и $6 - \beta > \beta - 2$, ни одному из игроков не выгодно самостоятельно отклоняться от набора $(a_2; b_2)$.

Чтобы найти ***равновесие в смешанных стратегиях***, предположим, что игрок A выбирает a_1 с вероятностью p и игрок B выбирает b_1 с вероятностью q. Вычисляя ожидаемый выигрыш от каждой стратегии, получаем уравнения

$$\mathrm{E}^A(a_1) = (8-\gamma)q + (\gamma-2)(1-q), \qquad \mathrm{E}^A(a_2) = 4q + \beta(1-q),$$
$$\mathrm{E}^B(b_1) = (\gamma+1)p + (\beta-2)(1-p), \qquad \mathrm{E}^B(b_2) = 3p + (6-\beta)(1-p).$$

Используя условие, что при равновесии в смешанных стратегиях игроки безразличны к своим стратегиям, получаем равенства $E^A(a_1) = E^A(a_2)$ и $E^B(b_1) = E^B(b_2)$. Решая их, находим значения вероятностей p и q при равновесии в смешанных стратегиях:

$$p = \frac{8 - 2\beta}{6 + \gamma - 2\beta}, \qquad q = \frac{2 + \beta - \gamma}{6 + \beta - 2\gamma}.$$

Подставляя значения p и q в уравнения $E^A(a_1)$ и $E^B(b_1)$, имеем

$$E^A(a_1) = E^A(a_2) = \frac{8(1 + \beta) - \gamma(4 + \beta)}{6 + \beta - 2\gamma},$$

$$E^B(b_1) = E^B(b_2) = \frac{4(3 - \beta) + \gamma(6 - \beta)}{6 + \gamma - 2\beta}.$$

В. Данную игру можно упростить, устранив доминируемые стратегии. Стратегия b_2 является сильно доминируемой, так как при любой стратегии игрока A игроку B более выгодно выбрать b_1 или b_3. Поэтому можно убрать колонку со стратегией b_2. Тогда игра имеет следующий вид (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Игрок B / Игрок A	b_1	b_3
a_1	(2; 6)	(6; 3)
a_2	(1; 3)	(2; 2)
a_3	(4; 3)	(5; 4)

При данном раскладе стратегия a_2 является сильно доминируемой, так как при любой стратегии игрока B игроку A более выгодно выбрать a_1 или a_3. Теперь можно убрать строку со стратегией a_2. В конечном итоге игра примет следующий вид (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Игрок B / Игрок A	b_1	b_3
a_1	(2; 6)	(6; 3)
a_3	(4; 3)	(5; 4)

Равновесия в чистых стратегиях не существует, так как при любом наборе стратегий игроки могут получить дополнительный выигрыш при самостоятельном использовании другой стратегии.

Чтобы найти *равновесие в смешанных стратегиях*, выпишем уравнения ожидаемого выигрыша каждой стратегии:

$$\mathrm{E}^A(a_1) = 2q + 6(1-q), \qquad \mathrm{E}^A(a_3) = 4q + 5(1-q),$$

$$\mathrm{E}^B(b_1) = 6p + 3(1-p), \qquad \mathrm{E}^B(b_3) = 3p + 4(1-p).$$

Приравнивая $\mathrm{E}^A(a_1)$ к $\mathrm{E}^A(a_3)$, а $\mathrm{E}^B(b_1)$ к $\mathrm{E}^B(b_3)$, получаем, что при равновесии $q = 1/3$ и $p = 1/4$. Подставляя значения p и q в уравнения ожидаемого выигрыша, находим, что при равновесии $\mathrm{E}^A(a_1) = \mathrm{E}^A(a_3) = 14/3$ и $\mathrm{E}^B(b_1) = \mathrm{E}^B(b_3) = 15/4$.

◆ **Задача 6.2.** Два магазина выбирают стратегию продаж на праздничные дни. Магазин A выбирает между стратегиями a_1 (ничего не делать) и a_2 (объявить скидки), магазин B — между стратегиями b_1 (ничего не делать), b_2 (объявить скидки) и b_3 (запустить дополнительную рекламу). Игру между магазинами можно представить в нормальной форме (табл. 6.6), где γ — параметр:

Таблица 6.6

Магазин B / Магазин A	b_1	b_2	b_3
a_1	(5; 3)	(4; 6)	$(5-\gamma;\ 3+\gamma)$
a_2	(6; 2)	(1; 0)	$(8-\gamma;\ \gamma)$

а) предположите, что $2 < \gamma < 3$. Охарактеризуйте равновесия в чистых и смешанных стратегиях для игры между магазинами. Определите: какой магазин получает больший ожидаемый выигрыш при равновесии в смешанных стратегиях;

б) пусть p — вероятность, что магазин A выбирает стратегию a_1, и q_1, q_2 — вероятности, что магазин B выбирает одну из стратегий b_1, b_2 соответственно. Предполагая, что $0 < \gamma < 2$, охарактеризуйте равновесия в чистых стратегиях. Покажите, что, если $\gamma = 6/5$, существует значение p, при котором ожидаемый выигрыш магазина B не зависит от значений q_1 и q_2.

ешение.

А. Стратегия b_1 является сильно доминируемой. При любой стратегии магазина A стратегия b_3 приносит магазину B более высокий выигрыш. Поэтому можно убрать колонку со стратегией b_1. Тогда игра приобретает следующий вид (табл. 6.7).

Таблица 6.7

Магазин A \ Магазин B	b_2	b_3
a_1	(4; 6)	$(5-\gamma;\ 3+\gamma)$
a_2	(1; 0)	$(8-\gamma;\ \gamma)$

Равновесиями в чистых стратегиях являются сочетания $(a_1;\ b_2)$ и $(a_2;\ b_3)$, так как при этих сочетаниях ни одному из игроков не выгодно выбирать другую стратегию.

Выпишем уравнения ожидаемого выигрыша от каждой стратегии, если магазин A выбирает a_1 с вероятностью p, а магазин B выбирает b_2 с вероятностью q:

$$\mathrm{E}^A(a_1) = 4q + (5-\gamma)(1-q), \qquad \mathrm{E}^A(a_2) = q + (8-\gamma)(1-q),$$

$$\mathrm{E}^B(b_2) = 6p, \qquad \mathrm{E}^B(b_3) = (3+\gamma)p + \gamma(1-p).$$

Используя условие, что в равновесии $\mathrm{E}^A(a_1) = \mathrm{E}^A(a_2)$ и $\mathrm{E}^B(b_2) = \mathrm{E}^B(b_3)$, находим, что *при равновесии в смешанных стратегиях* $q = 1/2$ и $p = \gamma/3$. Следовательно, получаем выражения ожидаемого выигрыша от стратегий:

$$\mathrm{E}^A(a_1) = \mathrm{E}^A(a_2) = \frac{9-\gamma}{2},$$

$$\mathrm{E}^B(b_2) = \mathrm{E}^B(b_3) = 2\gamma.$$

Ожидаемый выигрыш магазина B превышает ожидаемый выигрыш магазина A при любом выборе стратегии, так как из уравнения $\mathrm{E}^B > \mathrm{E}^A$ следует, что $\gamma > 9/5$, и известно, что $\gamma > 2 > 9/5$.

Б. *Равновесия в чистых стратегиях* заданы сочетаниями $(a_2;\ b_1)$ и $(a_1;\ b_2)$. При первом сочетании выигрыш магазина A сократится на единицу, если он склонится к стратегии a_1, а выигрыш магазина B сократится либо на 2 единицы, либо на $2-\gamma$, если он склонится к одной из стратегий b_2, b_3.

При сочетании $(a_1; b_2)$ выигрыш магазина A сократится на 3 единицы, если он решит следовать стратегии a_2, а выигрыш магазина B сократится либо на 3 единицы, либо на $3-\gamma$, если он решит перейти к одной из стратегий b_1, b_3.

Чтобы показать, что существует значение p, при котором ожидаемый выигрыш магазина B не зависит от значений q_1 и q_2, выпишем уравнение ожидаемого выигрыша магазина B:

$$\mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3) = [3q_1 + 6q_2 + (3+\gamma)(1-q_1-q_2)]p +$$
$$+ [2q_1 + \gamma(1-q_1-q_2)](1-p).$$

Задача заключается в нахождении значения p, при котором $\mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3)$ не зависит от q_1, q_2, если $\gamma = 6/5$. Определив частные производные $\mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3)$ по q_1 и q_2 и приравняв их к нулю, имеем уравнения

$$\frac{\partial \mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3)}{\partial q_1} = 2 - 2p - \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3)}{\partial q_2} = 3p - \gamma = 0.$$

Так как частные производные $\mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3)$ не зависят от q_1 и q_2, то, решая систему двух уравнений, находим те значения p и γ, при которых $\mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3)$ не зависит от q_1 и q_2. Получаем $\gamma = 6/5$ и $p = 2/5$. Действительно, если $p = 2/5$ и $\gamma = 6/5$, то $\mathrm{E}^B(b_1, b_2, b_3) = 12/5$.

◆ **Задача 6.3.** Рассмотрите следующую игру между покупателем (A) и онлайновым магазином (B), состоящую из четырех периодов. В периоде $T = 1$ магазин называет покупателю стоимость s доставки товара. В периоде $T = 2$ покупатель принимает или отвергает предложенное ему значение s. Если он не согласен принять стоимость доставки, игра заканчивается, и выигрыш каждого игрока равен нулю. Если же покупатель принимает стоимость доставки, то в периоде $T = 3$ магазин называет цену p единицы товара. В периоде $T = 4$ покупатель заказывает количество товара q. Игра заканчивается, и выигрыши покупателя A и магазина B заданы уравнениями

$\pi^A(p, q, s) = 6q - q^2 - pq - s,$

$\pi^B(p, q, s) = pq + s.$

Эта игра может быть представлена в развернутой форме (рис. 6.1):

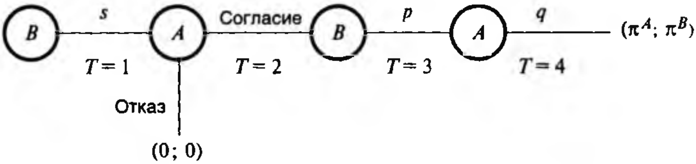


Рис. 6.1

а) используя метод обратной индукции, найдите значение цены p^*, количество товара q^* и стоимость доставки s^*, характеризующие совершенное в подыграх равновесие в данной игре. Вычислите выигрыш магазина и выигрыш покупателя в условиях равновесия;

б) рассчитайте объем заказа $\hat{q}$, при котором магазин и покупатель максимизируют совместный выигрыш. Покажите, что q^* не является Парето-эффективной величиной.

Решение.

А. В периоде $T = 4$ покупатель выбирает значение q, максимизирующее его выигрыш. Определим и приравняем к нулю частную производную по q функции $\pi^A(p, q, s)$:

$$\frac{\partial \pi^A(p, q, s)}{\partial q} = 6 - 2q - p = 0.$$

Решая это уравнение, определяем, что при любом совершенном в подыграх равновесии покупатель заказывает количество $q^* = (6 - p)/2$.

В периоде $T = 3$ магазин максимизирует свой выигрыш по p при условии $q = q^*$. Подставляя значение q^* в функцию выигрыша магазина, имеем

$$\pi^B(p, q^*, s) = pq^* + s = p\left(\frac{6 - p}{2}\right) + s,$$

откуда следует условие первого порядка $\partial\pi^B(p, q^*, s)/\partial p = 3 - p = 0$. При цене $p^* = 3$ магазин максимизирует свой выигрыш. Следовательно, при совершенном в подыграх равновесии магазин назовет цену $p = p^* = 3$. Подставляя найденное значение p в уравнение $q^* = (6 - p)/2$, находим $q^* = 3/2$.

В периоде $T = 2$ покупатель согласится со стоимостью доставки товара, если при такой стоимости доставки его выигрыш будет неотрицательным. Выигрыш покупателя задан уравнением

$$\pi^A(p^*, q^*, s) = 9/4 - s.$$

Покупатель согласится со стоимостью доставки, если она не больше 9/4.

В периоде $T = 1$ функция выигрыша магазина имеет вид

$$\pi^B(p^*, q^*, s) = 9/2 + s.$$

Так как $\pi^B(p^*, q^*, s)$ растет по s, магазин назовет самую большую стоимость доставки, при которой выигрыш покупателя неотрицателен, т.е. при условиях совершенного в подыграх равновесия $s^* = 9/4$.

Подставляя найденные значения p^*, q^* и s^* в функции выигрыша покупателя и магазина, имеем

$$\pi^A(p^*, q^*, s^*) = 0,$$

$$\pi^B(p^*, q^*, s^*) = 27/4.$$

Отметим, что при совершенном в подыграх равновесии выигрыш покупателя равен нулю.

Б. Задача заключается в максимизации суммы выигрыша покупателя и магазина, т.е. необходимо вычислить максимум функции

$$\pi^A(p, q, s) + \pi^B(p, q, s) = 6q - q^2.$$

Выпишем условие первого порядка:

$$\frac{\partial[\pi^A(p, q, s) + \pi^B(p, q, s)]}{\partial q} = 6 - 2q = 0.$$

Функция $\pi^A(p, q, s) + \pi^B(p, q, s)$ достигает своего максимума при $q = \hat{q} = 3$. Значение функции в этой точке равно 9. Так как

$$\pi^A(p, \hat{q}, s) + \pi^B(p, \hat{q}, s) = 9 > 27/4 = \pi^A(p^*, q^*, s^*) + \pi^B(p^*, q^*, s^*),$$

делаем вывод, что объем заказа q^* не может являться Парето-эффективным.

◆ **Задача 6.4.** Рассмотрите следующую игру между агентами A и B, состоящую из четырех периодов. Агенты должны поделить между собой 100 долл. В периоде $T = 1$ агент A предлагает B сумму α_1. В периоде $T = 2$ агент B может согласиться с предложением или отказаться от него. В случае согласия игра заканчивается: B получает α_1 долл., A получает $100 - \alpha_1$ долл. В случае отказа B предлагает A сумму β. В периоде $T = 3$ агент A решает принять или отклонить предложение B. Если A принимает предложение B, игра заканчивается: B получает $(100 - \beta)\tau$ долл., A получает $\beta\tau$ долл., где $0 < \tau < 1$. Если же A отклоняет предложение B, то A предлагает агенту B сумму α_2 и игра переходит в период $T = 4$. Если B отказывается от второго предложения A, игра заканчивается: оба агента получают по $50\tau^2$ долл. Если B соглашается со вторым предложением A, то B получает $\alpha_2\tau^2$ долл., A получает $(100 - \alpha_2)\tau^2$ долл.

Эта игра может быть представлена в развернутой форме (рис. 6.2).

Используя метод обратной индукции, найдите сумму денег, которая достанется A и B в условиях равновесия. Кому из агентов достанется бóльшая часть?

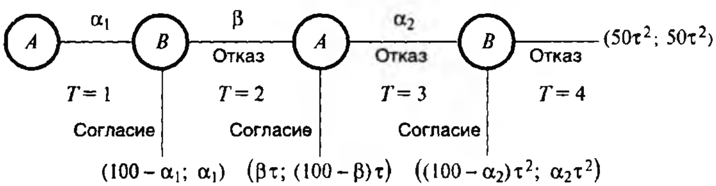


Рис. 6.2

Решение.

Начиная с периода $T = 4$ находим условие, при котором B согласится со вторым предложением A. Если $\alpha_2\tau^2 \geq 50\tau^2$ (или $\alpha_2 \geq 50$), выигрыш B в случае согласия будет не меньше, чем его выигрыш в случае отказа. Поэтому B примет предложение A, если $\alpha_2 \geq 50$.

В периоде $T = 3$ агент A, максимизируя свой потенциальный выигрыш, предлагает агенту B сумму $\alpha_2 \le 50$. При любом другом значении α_2 агент A может увеличить свой выигрыш, уменьшив α_2. Если $\alpha_2 \le 50$, независимо от последующего решения B, агенты A и B получают по $50\tau^2$ долл. Следовательно, для A будет выгодно принять предложенную агентом B сумму β, только если это принесет ему выигрыш не меньше $50\tau^2$, т.е. если $\beta\tau \ge 50\tau^2$ (или $\beta \ge 50\tau$).

В периоде $T = 2$ агент B, максимизируя свой выигрыш, предложит агенту A самую маленькую сумму, которую тот готов принять, т.е. $\beta = 50\tau$. Предлагать $\beta < 50\tau$ агенту не выгодно, так как выигрыш при $\beta = 50\tau$ равен $(100-\beta)\tau = 50\tau(2-\tau)$, а выигрыш при $\beta < 50\tau$ равен $50\tau^2$, и $50\tau(2-\tau) > 50\tau^2$. Агент B примет сумму α_1, предложенную агентом A, только если $\alpha_1 \ge 50\tau(2-\tau)$.

В периоде $T = 1$ агенту A выгодно предложить B сумму $\alpha_1 = 50\tau(2-\tau)$: сумма больше $50\tau(2-\tau)$ принесет A меньший выигрыш, а сумму меньше $50\tau(2-\tau)$ агент B просто не примет. Если A предлагает агенту B сумму $\alpha_1 = 50\tau(2-\tau)$, то B соглашается с предложением и A получает $100-\alpha_1 = 100-50\tau(2-\tau) = 50(2-2\tau-\tau^2)$ долл. В противном случае B отказался бы от предложения A и агент A получил бы $\beta\tau = 50\tau^2$ долл., а $50\tau^2 < 50(2-2\tau-\tau^2)$.

Следовательно, *в условиях равновесия* A предлагает B сумму $\alpha_1 = 50\tau(2-\tau)$ в периоде $T = 1$ и B в периоде $T = 2$ соглашается с предложением A. Агент A получает $50(2-2\tau-\tau^2)$ долл. и B получает $50\tau(2-\tau)$ долл. Вычитая выигрыш агента B из выигрыша агента A, имеем

$$50(2-2\tau-\tau^2) - 50\tau(2-\tau) = 100(\tau-1)^2 > 0,$$

откуда следует, что в условиях равновесия агенту A достается бóльшая сумма.

6.2. ОЛИГОПОЛИЯ

◆ **Задача 6.5.** На некотором рынке существует олигополия, состоящая из n одинаковых фирм. Функция издержек для фирмы $i = 1, ..., n$ имеет вид $cq_i - F$, где q_i — объем выпуска i-й фирмы; $F > 0$ — постоянные издержки; $c > 0$ — предельные издержки. Обратная функция спроса для данного рынка задана уравнением $p = A - \sum_{j=1}^{n} q_j$, где $A > c$. Фирмы конкурируют между собой по модели Курно:

а) выпишите функцию прибыли фирмы i. Покажите, что если $n \to \infty$, то прибыль каждой из фирм стремится к $-F$. Определите, к какому значению стремится общий объем выпуска $\sum_{j=1}^{n} q_j$ и рыночная цена p;

б) предполагая, что фирмы будут вступать в рынок до тех пор, пока их прибыль неотрицательна, вычислите максимальное количество фирм на рынке, объем выпуска каждой фирмы и рыночную цену.

Решение.

А. Функция прибыли для фирмы i имеет вид

$$\pi_i = pq_i - cq_i - F = \left(A - \sum_{j=1}^{n} q_j \right) q_i - cq_i - F.$$

Находим условие первого порядка:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - \sum_{j=1}^{n} q_j - q_i - c = 0.$$

Так как фирмы одинаковы, при равновесии они будут производить одинаковое количество товара, т.е. $\sum_{j=1}^{n} q_j = nq_i$. Переписывая условие первого порядка, имеем

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - q_i(n+1) - c = 0,$$

откуда следует, что *оптимальный объем выпуска* каждой фирмы равен

$$q_i^* = (A - c)/(n+1),$$

и общий объем выпуска задан уравнением

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* = \frac{n(A-c)}{n+1} = \frac{A-c}{1 + 1/n}.$$

Если $n \to \infty$, то $\sum_{j=1}^{n} q_j^* \to A - c$. Подставляя значение $\sum_{j=1}^{n} q_j^*$ в уравнение обратной функции спроса, находим *рыночную цену товара*:

$$p^* = A - \frac{n(A-c)}{n+1} = \frac{A+nc}{n+1} = \frac{(A/n)+c}{1+1/n}.$$

Если $n \to \infty$, то $p^* \to c$ — рыночной цене товара при условиях совершенной конкуренции. Следовательно, прибыль фирмы i стремится к $-F$, так как $\pi_i \to cq_i^* - cq_i^* - F = -F$.

Б. Условие, что прибыль каждой фирмы неотрицательна, эквивалентно выражению

$$\pi_i = p^* q_i^* - cq_i^* - F = q_i^*(p^* - c) - F \geq 0.$$

Если на рынке присутствует максимальное количество фирм, прибыль каждой из них должна равняться нулю, т.е. $\pi_i = 0$. Тогда, если дополнительная фирма вступит в рынок, ее прибыль будет отрицательной. Подставляя значения p^* и q_i^* в функцию прибыли фирмы π_i и приравнивая ее к нулю, имеем

$$\pi_i = \frac{A-c}{n+1}\left(\frac{A+nc}{n+1} - c\right) - F = 0.$$

Выражая n, получаем *максимальное количество фирм на рынке*:

$$n^* = \frac{A-c}{\sqrt{F}} - 1.$$

Подставляя значение n^* в уравнения q_i^* и p^*, находим *объем выпуска фирмы* i и *рыночную цену*:

$$q_i^* = \frac{A-c}{n^*+1} = \sqrt{F}, \qquad p^* = \frac{A+n^*c}{n^*+1} = \sqrt{F} + c.$$

◆ **Задача 6.6.** Две фирмы с предельными издержками, равными c, и с постоянными издержками, равными нулю, обслуживают один рынок, который характеризуется обратной функцией спроса $p = A - q_1^2 - q_2$, где $A > c$; q_1 — объем товара, предложенный первой фирмой; q_2 — объем товара, предложенный второй фирмой:

а) пусть фирмы конкурируют по модели Курно. Вычислите прибыль первой фирмы π_1^C и прибыль второй фирмы π_2^C в условиях равновесия;

б) пусть фирмы конкурируют по модели Штакельберга и первая фирма делает первый ход. Вычислите прибыль первой фирмы π_1^S и прибыль второй фирмы π_2^S в условиях равновесия;

в) предположите, что первая фирма является монополистом. Вычислите монополистическую прибыль первой фирмы π_1^M;

г) сравните π_1^C, π_1^S и π_1^M, а также π_2^C и π_2^S.

Решение.

Напомним, что **по модели дуополии Курно** конкурирующие фирмы одновременно решают задачу максимизации прибыли и одновременно устанавливают оптимальные объемы выпуска. **По модели дуополии Штакельберга** первая фирма, являясь лидером, устанавливает свой объем выпуска раньше второй, а вторая фирма в свою очередь наблюдает объем выпуска первой фирмы и последовательно принимает решение.

А. Функции прибыли первой и второй фирмы имеют вид

$$\pi_1 = pq_1 - cq_1 = (A - q_1^2 - q_2)q_1 - cq_1,$$

$$\pi_2 = pq_2 - cq_2 = (A - q_1^2 - q_2)q_2 - cq_2.$$

Условием первого порядка является равенство нулю частных производных $\partial\pi_1/\partial q_1$ и $\partial\pi_2/\partial q_2$. Выписывая равенства, имеем

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial q_1} = A - 3q_1^2 - q_2 - c = 0, \qquad \frac{\partial\pi_2}{\partial q_2} = A - q_1^2 - 2q_2 - c = 0.$$

Решая эту систему из двух уравнений, находим *оптимальный объем выпуска* каждой фирмы:

$$q_1^* = \sqrt{(A-c)/5}, \qquad q_2^* = 2(A-c)/5.$$

Подставляя значения q_1^* и q_2^* в обратную функцию спроса, вычисляем *рыночную цену*

$$p^* = A - (q_1^*)^2 - q_2^* = (2A + 3c)/5.$$

Подставляя значения q_1^*, q_2^* и p^* в функции π_1 и π_2, находим прибыли фирм в условиях равновесия при конкуренции по модели Курно:

$$\pi_1^C = p^* q_1^* - cq_1^* = \frac{2(A-c)^{3/2}}{5\sqrt{5}}, \qquad \pi_2^C = p^* q_2^* - cq_2^* = \frac{4(A-c)^2}{25}.$$

Б. Используя метод обратной индукции, первая фирма вычисляет, что вторая фирма определяет объем своего выпуска по формуле $q_2 = (A - q_1^2 - c)/2$, следующей из условия первого порядка для максимизации ее прибыли:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = A - q_1^2 - 2q_2 - c = 0.$$

Первая фирма будет максимизировать свою прибыль, учитывая ограничение $q_2 = (A - q_1^2 - c)/2$ на объем выпуска второй фирмы. Подставляя выражение q_2 в функцию прибыли первой фирмы, получаем уравнение

$$\pi_1 = \left(A - q_1^2 - \frac{A - q_1^2 - c}{2}\right) q_1 - cq_1 = \frac{q_1(A - c - q_1^2)}{2}.$$

Чтобы найти максимум функции π_1, рассчитаем и приравняем к нулю частную производную

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{A - 3q_1^2 - c}{2} = 0.$$

Решением этого уравнения будет значение q_1^*, максимизирующее прибыль фирмы. Выражая q_1, получаем $q_1^* = \sqrt{(A-c)/3}$ и, следовательно, $q_2^* = (A - (q_1^*)^2 - c)/2 = (A-c)/3$. При таких объемах выпуска цена $p^* = A - (q_1^*)^2 - q_2^* = (A + 2c)/3$.

Подставляя значения q_1^*, q_2^* и p^*, находим прибыли фирм в условиях равновесия при конкуренции по модели Штакельберга:

$$\pi_1^S = p^* q_1^* - cq_1^* = \frac{(A-c)^{3/2}}{3\sqrt{3}}, \qquad \pi_2^S = p^* q_2^* - cq_2^* = \frac{(A-c)^2}{9}.$$

В. Если первая фирма — это единственная фирма, которая поставляет товары на рынок, то объем выпуска второй фирмы равен нулю. Прибыль монополиста задана уравнением $\pi_1 = (A - q_1^2)q_1 - cq_1$, откуда вытекает условие первого порядка

$\partial\pi_1/\partial q_1 = A - 3q_1^2 - c = 0$. Выражая q_1, получаем оптимальный монополистический объем выпуска $q_1^* = \sqrt{(A-c)/3}$. Используя обратную функцию спроса, находим $p^* = (2A + c)/3$. Прибыль первой фирмы в условиях монополии имеет вид

$$\pi_1^M = p^* q_1^* - c q_1^* = \frac{2(A-c)^{3/2}}{3\sqrt{3}}.$$

Г. Сравнивая значения прибыли первой фирмы при разных условиях, делаем вывод, что $\pi_1^M > \pi_1^S > \pi_1^C$, так как

$$\frac{2(A-c)^{3/2}}{3\sqrt{3}} > \frac{(A-c)^{3/2}}{3\sqrt{3}} > \frac{2(A-c)^{3/2}}{5\sqrt{5}}.$$

Рассматривая значения прибыли второй фирмы при разных условиях, отмечаем, что $\pi_2^S < \pi_2^C$, так как

$$\frac{(A-c)^2}{9} < \frac{4(A-c)^2}{25}.$$

◆ **Задача 6.7.** Две одинаковые фирмы конкурируют по модели дуополии Бертрана. Фирмы решают сотрудничать, чтобы получить положительную прибыль. Пусть $\pi > 0$ — совместная прибыль фирм в этом случае. Фирмы делят совместно полученную прибыль пополам, т.е. при сотрудничестве каждая фирма получает прибыль $\pi/2$. Пусть цена, установленная фирмами, $p^M > MC$, где MC — предельные издержки фирм. Рассмотрите следующую пусковую стратегию (*trigger strategy*), применяемую любой из сотрудничающих фирм:

- если в периоде $T = n$ одна из фирм устанавливает цену p^M, то в периоде $T = n + 1$ другая фирма устанавливает цену p^M;
- если в периоде $T = n$ одна из фирм устанавливает цену $p < p^M$, то во всех периодах после $T = n$ другая фирма устанавливает цену, равную MC.

Покажите, что, если с каждым периодом, начиная со второго, прибыль фирм умножается на положительную величину τ, $1/2 < \tau < 1$, фирмы всегда будут сотрудничать.

Решение.

Напомним, что **модель дуополии Бертрана** рассматривает повторяющуюся игру между фирмами. В каждом периоде фирмы одновременно устанавливают ц е н ы на свои товары с целью максимизации прибыли.

Проблема заключается в том, что при конкуренции по модели дуополии Бертрана кооперация невозможна, так как каждой фирме выгодно немного снизить цену и тем самым захватить весь рынок. Однако если учитывать, что прибыль со временем падает, при данной стратегии две фирмы все-таки могут сотрудничать в долгосрочной перспективе.

Пусть G — прибыль, полученная фирмой при условии, что она всегда устанавливает цену p^M. Тогда имеем

$$G = \frac{\pi}{2} + \tau\frac{\pi}{2} + \tau^2\frac{\pi}{2} + \ldots = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\tau^i.$$

Назовем $G_{T=n}$ прибыль, получаемую фирмой при условии, что она в периоде $T = n$ установила цену $p < p^M$. В этом периоде фирма полностью захватывает рынок и получает прибыль, равную π. Во всех последующих периодах прибыль фирмы равна нулю, так как пусковая стратегия второй фирмы заставляет первую устанавливать цену, равную MC.

Например, $G_{T=1} = \pi$ и $G_{T=3} = \pi/2 + \tau\pi/2 + \tau^2\pi$. Вычислим разность между $G_{T=1}$ и G:

$$G_{T=1} - G = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\tau^i = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty}\tau^i\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\tau}{1-\tau}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1-2\tau}{1-\tau}\right).$$

Так же можно вычислить разность между $G_{T=3}$ и G:

$$G_{T=3} - G = \frac{\pi\tau^2}{2}\left(\frac{1-2\tau}{1-\tau}\right).$$

Заметим, что разность между $G_{T=n}$ и G задана уравнением:

$$G_{T=n} - G = \frac{\pi\tau^{n-1}}{2}\left(\frac{1-2\tau}{1-\tau}\right).$$

Если $G_{T=n} - G < 0$, у фирмы не будет побуждающих мотивов устанавливать цену $p < p^M$. Так как $\pi > 0$ и $0 < \tau < 1$, то $G_{T=n} - G < 0$, если $1 - 2\tau < 0$, т.е. если $1/2 < \tau < 1$.

7. РИСК И ИНФОРМАЦИЯ

7.1. РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА

◆ **Задача 7.1.** Функция полезности рационального предпринимателя $u(w) = w$, где w — его чистый доход после уплаты налогов. Он зарабатывает 100 тыс. руб. в месяц, налог составляет 20%. Предприниматель размышляет, надо ли платить налог вообще, поскольку вероятность того, что налоговые органы проведут проверку, он оценивает в 50%, т.е. как $p = 1/2$. Определите:

а) если за неуплату налога нет штрафа и в случае проверки надо будет просто заплатить причитающуюся сумму налога, будет ли предприниматель платить налог;

б) если в случае обнаружения неуплаты налога предпринимателю придется заплатить штраф в размере X, будет ли он платить налог;

в) каков должен быть минимальный размер штрафа, чтобы побудить рационального предпринимателя платить налог.

Решение.

А. При налоге в 20% от 100 тыс. руб. чистый доход предпринимателя w составит $100 - 20 = 80$ тыс. руб. Поскольку предприниматель рациональный, он стремится максимизировать свою полезность и будет сравнивать полезность, которую он может извлечь из своего дохода, до и после уплаты налогов. Варианты выбора, имеющиеся у предпринимателя в условиях риска, могут быть представлены в форме таблицы (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Действия налогового органа	Чистый доход, тыс. руб., при выборе предпринимателя	
	платить налог	не платить налог
Проводить проверку $\left(p = \frac{1}{2}\right)$	80	80
Не проводить проверку $\left(1 - p = \frac{1}{2}\right)$	80	100

Ожидаемую полезность можно вычислить по принципу лотереи:

$$\mathrm{E}u(\mathbf{w}) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2).$$

Следовательно, ожидаемая полезность от уплаты налога составляет

$$\mathrm{E}u^* = \frac{1}{2}u(80) + \frac{1}{2}u(80) = \frac{1}{2}\cdot 80 + \frac{1}{2}\cdot 80 = 80.$$

Аналогично ожидаемая полезность от неуплаты налога составляет

$$\mathrm{E}u^{**} = \frac{1}{2}u(80) + \frac{1}{2}u(100) = \frac{1}{2}\cdot 80 + \frac{1}{2}\cdot 100 = \frac{1}{2}(80+100) = 90.$$

Поскольку ожидаемая полезность от неуплаты налога больше, т.е. $\mathrm{E}u^{**} > \mathrm{E}u^*$, предприниматель не будет платить налог.

Б. При необходимости платить штраф в размере X варианты выбора, имеющиеся у предпринимателя в условиях риска, можно записать следующим образом (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Действия налогового органа	Чистый доход, тыс. руб., при выборе предпринимателя	
	платить налог	не платить налог
Проводить проверку $\left(p = \frac{1}{2}\right)$	80	$80 - X$
Не проводить проверку $\left(1 - p = \frac{1}{2}\right)$	80	100

Ожидаемая полезность от уплаты налога составляет

$$\mathrm{E}u^* = \frac{1}{2}u(80) + \frac{1}{2}u(80) = \frac{1}{2}\cdot 80 + \frac{1}{2}\cdot 80 = 80.$$

Аналогично ожидаемая полезность от неуплаты налога составляет

$$\mathrm{E}u^{**} = \frac{1}{2}u(80-X) + \frac{1}{2}u(100) =$$

$$= \frac{1}{2}(80-X) + \frac{1}{2}\cdot 100 = \frac{1}{2}(180 - X) = 90 - \frac{X}{2}.$$

Следовательно, предприниматель будет добровольно платить налог, если $80 \geq 90 - \frac{X}{2}$.

В. Минимальный размер штрафа должен удовлетворять следующему условию: ожидаемая полезность от уплаты налога должна быть равна ожидаемой полезности от его неуплаты. Следовательно, $80 = 90 - \frac{X}{2}$, откуда $X = 20$, т.е. при штрафе не менее 20 тыс. руб. предприниматель будет платить налог.

◆ **Задача 7.2.** Полный доход предпринимателя составляет Y, его доход после уплаты налогов, из которого он извлекает полезность в потреблении, составляет $u(w) = w$; T — ставка налога в процентах от дохода; TY — размер налога; F — ставка штрафа за неуплату налога в процентах от дохода; FY — размер штрафа за неуплату налога; вероятность налоговой проверки составляет p:

а) рассчитайте аналитически ставку штрафа, которая побудит предпринимателя платить налог;

б) объясните интуитивно, что выгоднее — увеличить частоту налоговых проверок или ставку штрафа, чтобы заставить предпринимателя платить налоги.

Решение.

А. Варианты выбора, имеющиеся у предпринимателя в условиях риска, можно записать следующим образом (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Действия налогового органа	Чистый доход при выборе предпринимателя	
	платить налог	не платить налог
Проводить проверку (p)	$Y - TY$	$Y - TY - FY$
Не проводить проверку $(1-p)$	$Y - TY$	Y

Приравняем ожидаемую полезность от уплаты налога к ожидаемой полезности от его неуплаты:

$$p(Y - TY) + (1 - p)(Y - TY) = p(Y - TY - FY) + (1 - p)Y.$$

Выпишем F — ставку штрафа, которая заставит предпринимателя платить налог:

$$Y - TY = pY - pTY - pFY + Y - pY,$$

откуда $pFY = TY - pTY$. Следовательно,

$$F^{*} = \frac{T - pT}{p} = \frac{T}{p} - T.$$

Б. Из $F^{*} = \dfrac{T}{p} - T$ видно, что вероятность налоговой проверки p находится в обратной зависимости от ставки штрафа F. Поскольку издержки на увеличение количества проверок высоки (надо дополнительно нанимать инспекторов, нести транспортные и административные расходы), чтобы побудить предпринимателя платить налог, государству выгоднее просто увеличить ставку штрафа.

◆ **Задача 7.3.** Зимой автомобильная авария может произойти с вероятностью p. Водитель может сократить вероятность аварии, установив зимние шины, но они будут стоить ему $C(p) = A(1-p)^2$, где $A > 0$. В случае аварии водитель, нейтральный к риску, понесет материальные потери в размере $M > 0$. Определите:

а) если у водителя нет автомобильной страховки, какая вероятность аварии будет для него приемлемой;

б) если водитель купил, заплатив премию Q, страховку, которая возмещает потери M в случае аварии, какая вероятность аварии будет приемлемой для него в этом случае;

в) какую премию должна установить страховая компания, чтобы не нести убытков (чтобы ее выплаты водителю в случае аварии хотя бы равнялись размерам премии);

г) выгодно ли водителю покупать страховку;

д) о наличии какого риска свидетельствуют результаты, полученные в п. Б?

Решение.

А. Поскольку водитель нейтрален к риску, его задача заключается в выборе вероятности риска p для минимизации полных издержек $C(p) + pM$, т.е. $\min\limits_{p} A(1 - p)^2 + pM$.

Условия первого порядка составляют

$$\frac{\partial[C(p)+pM]}{\partial p} = -2A(1-p)+M = 0,$$

откуда приемлемая для водителя вероятность аварии будет равна $p^* = 1 - \frac{M}{2A}$.

Условие второго порядка для задачи минимизации удовлетворяется:

$$\frac{\partial^2[C(p)+pM]}{\partial p^2} = 2A > 0.$$

Б. Если водитель купил страховку, заплатив премию Q, то он должен минимизировать уравнение $C(p)+Q = A(1-p)^2+Q$ по p.

Условия первого порядка составляют

$$\frac{\partial[C(p)+Q]}{\partial p} = -2A(1-p) = -2A+2Ap = 0,$$

откуда приемлемая для водителя вероятность аварии будет равна в этом случае $p^* = 1$.

Условие второго порядка для задачи минимизации удовлетворяется:

$$\frac{\partial^2[C(p)+Q]}{\partial p^2} = 2A > 0.$$

В. Ожидаемая прибыль страховой компании составляет $p(Q-M) + (1-p)Q$.

Чтобы выплаты страховой компании водителю в случае аварии хотя бы равнялись размерам премии, должно выполняться условие

$$p(Q-M) + (1-p)Q = 0, \qquad \text{откуда} \qquad Q = pM.$$

Если водитель выбирает степень риска $p = 1$, то страховая компания должна выбрать размер премии, который точно покрывает ее потенциальные выплаты водителю в случае аварии, т.е. $Q = M$.

Г. Если водитель не покупает страховку, выбирая тем самым вероятность риска $p = 1 - \dfrac{M}{2A}$, то его издержки составят

$$C(p) + pM = A\left(\frac{M}{2A}\right)^2 + \left(1 - \frac{M}{2A}\right)M = M - \frac{M^2}{4A}. \qquad (1)$$

Если водитель покупает страховку и выбирает тем самым вероятность риска $p = 1$, то его издержки составят

$$C(1) + M = M. \qquad (2)$$

Сравниваем (1) и (2): очевидно, что $M - \dfrac{M^2}{4A} < M$. Следовательно, водителю невыгодно покупать страховку.

Д. Результаты, полученные в п. Б, о том, что приемлемая для водителя вероятность аварии составляет $p^* = 1$, свидетельствуют о существовании *проблемы морального риска*. Водитель, купив страховку на полную сумму потенциального ущерба от аварии, ведет себя рискованно, поскольку любой его ущерб от аварии все равно будет покрыт страховкой. Поэтому страховые компании никогда не гарантируют возмещения ущерба в полном размере, предусматривая, что в случае аварии некоторая часть ущерба должна в любом случае приходится на долю водителя.

◆ **Задача 7.4.** Предпочтения агента описываются элементарной функцией полезности $u(w) = \ln w$, где w — его доход. Агенту предлагают участвовать в следующей игре. Называется вероятность выигрыша $p = 1/n$, где n — любое целое число, $n \geq 2$. Агент выплачивает из своего дохода ставку x. В случае выигрыша он получает сумму, равную $\beta n x$, где $\beta > 1$ — известная фиксированная величина, а в случае проигрыша не получает ничего. Пусть начальное благосостояние агента равно K:

а) выпишите уравнение, описывающее доход агента в случаях выигрыша и проигрыша. Найдите значение гарантированного эквивалента данной игры. Определите, каково вознаграждение за риск и при каком условии над K агенту выгодно участвовать в игре;

б) полагая, что агент принимает участие в игре, найдите выражение суммы x^*, приносящей ему наибольший доход;

в) выясните, как повышение в уровне начального благосостояния агента влияет на x^* и как на x^* влияет увеличение значения n.

Решение.

А. Пусть w_1 — доход агента в случае выигрыша. Агент платит x за участие и получает βnx за выигрыш. Следовательно, $w_1 = K - x + \beta nx$. В случае проигрыша агент обладает доходом $w_2 = K - x$. Чтобы найти гарантированный эквивалент игры, выпишем функцию ожидаемой полезности агента:

$$\mathrm{E}u(\mathbf{w}) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2) =$$

$$= \frac{1}{n}\ln(K - x + \beta nx) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln(K - x).$$

Гарантированным эквивалентом набора $\mathbf{w}$ называется доход w^*, при котором $\mathrm{E}u(\mathbf{w}) = u(w^*)$. Имеем

$$\frac{1}{n}\ln(K - x + \beta nx) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln(K - x) = \ln w^*.$$

Преобразуя это уравнение, узнаем, что

$$w^* = (K - x + \beta nx)^{\frac{1}{n}}(K - x)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Вознаграждением за риск называется разность ожидаемого дохода агента и гарантированного эквивалента игры.

Ожидаемый доход вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{E}\mathbf{w} = \frac{1}{n}(K - x + \beta nx) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(K - x) = K + x(\beta - 1).$$

Уравнение вознаграждения за риск имеет вид

$$\Delta w = \mathrm{E}\mathbf{w} - w^* = K + x(\beta - 1) - (K - x + \beta nx)^{\frac{1}{n}}(K - x)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Участие в игре сравнимо с получением суммы w^* ровно. Если агент не участвует в игре, его благосостояние равно K. Следовательно, агенту выгодно принимать участие в игре, если сумма w^* превосходит его начальное благосостояние, т.е. если $w^* > K$.

Б. Задача агента заключается в максимизации своей ожидаемой полезности. Условием первого порядка является приравнивание к нулю частной производной функции ожидаемой полезности по x:

$$\frac{\partial \mathrm{E}u(\mathbf{w})}{\partial x} = \frac{\beta n - 1}{n(K - x + \beta n x)} + \frac{1 - n}{n(K - x)} = 0.$$

Выражая x, находим значение ставки, приносящей агенту наибольший доход. Узнав n, агент должен назначить ставку

$$x^* = K(1 - \beta)/(1 - \beta n).$$

В. Вычислим производную x^* по K:

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta n} > 0,$$

$\partial x^*/\partial K$ имеет положительное значение, так как $\beta > 1$ и $\beta n > 2$. Следовательно, ставка агента увеличивается с ростом начального благосостояния.

Производная x^* по n имеет вид

$$\frac{\partial x^*}{\partial n} = \frac{K\beta(1 - \beta)}{(1 - \beta n)^2} < 0.$$

Так как $\partial x^*/\partial n < 0$, ставка агента уменьшается с падением вероятности выигрыша $1/n$, несмотря на одновременный рост призовой суммы $\beta n x$.

◆ **Задача 7.5.** Рассмотрите следующие элементарные функции полезности, где α, β — положительные параметры:

- $u(x) = \alpha x - \beta x^2$, где $x < \alpha/(2\beta)$;
- $u(x) = -\alpha x^{-\beta}$;
- $u(x) = \alpha - e^{-\beta x}$;
- $u(x) = \alpha + \beta \ln x$.

а) вычислите меру абсолютной и относительной несклонности к риску для каждой из функций. Охарактеризуйте меры несклонности к риску как возрастающие, убывающие или постоянные;

б) для двух последних функций найдите значение гарантированного эквивалента и вознаграждения за риск, если всего n возможных исходов, каждый с вероятностью p_i, где $i = 1, \ldots, n$.

Решение.

Напомним, что меры несклонности к риску позволяют охарактеризовать предпочтения агента, не любящего риск. ***Абсолютная несклонность к риску*** обозначается $\rho(x)$ и рассчитывается по формуле $\rho(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$, где $u(x)$ — элементарная функция полезности агента. ***Относительная несклонность к риску*** обозначается $r(x)$ и рассчитывается по формуле $r(x) = x\rho(x)$.

А.

- Для $u(x) = \alpha x - \beta x^2$

Находим первую и вторую производную функции полезности:

$$u'(x) = \alpha - 2\beta x, \qquad u''(x) = -2\beta.$$

Подставляя значения $u'(x)$ и $u''(x)$ в уравнение *абсолютной несклонности к риску*, имеем

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{2\beta}{\alpha - 2\beta x}.$$

Чтобы охарактеризовать поведение функции $\rho(x)$, вычислим ее производную:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \left(\frac{2\beta}{\alpha - 2\beta x}\right)^2 > 0.$$

Так как производная $d\rho(x)/dx$ имеет положительное значение, делаем вывод, что $u(x)$ обладает возрастающей мерой абсолютной несклонности к риску.

Используя значение $\rho(x)$, найденное выше, находим *относительную несклонность к риску*:

$$r(x) = x\rho(x) = \frac{2\beta x}{\alpha - 2\beta x}.$$

Так как производная $r(x)$ имеет положительное значение:

$$\frac{dr(x)}{dx} = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha - 2\beta x)^2} > 0,$$

функция $u(x)$ обладает возрастающей мерой относительной несклонности к риску.

- Для $u(x) = -\alpha x^{-\beta}$

Вычисляем первую и вторую производную функции полезности:

$$u'(x) = \alpha\beta x^{-\beta-1}, \qquad u''(x) = \alpha\beta(-\beta-1)x^{-\beta-2}.$$

Следовательно, *мера абсолютной несклонности к риску* имеет вид

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = (\beta + 1)x^{-1}.$$

Вычисляя производную $\rho(x)$, имеем

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{-\beta - 1}{x^2} < 0,$$

откуда делаем вывод, что функция $u(x)$ обладает убывающей мерой абсолютной несклонности к риску.

Находим выражение *меры относительной несклонности к риску*:

$$r(x) = x\rho(x) = \beta + 1.$$

Заметим сразу, что $\beta + 1$ — константа, и относительная несклонность к риску при данной функции полезности имеет постоянное значение.

- Для $u(x) = \alpha - e^{-\beta x}$

Находим первую и вторую производную функции полезности:

$$u'(x) = \beta e^{-\beta x}, \qquad u''(x) = -\beta^2 e^{-\beta x}.$$

Используя формулу для вычисления *меры абсолютной несклонности к риску*, обнаруживаем, что

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \beta.$$

Отсюда ясно, что $\rho(x)$ не зависит от значения x. Мера абсолютной несклонности к риску п о с т о я н н а я.

Отметим, что *мера относительной несклонности к риску* равна

$$r(x) = x\rho(x) = \beta x.$$

Так как β — положительный параметр, то $r(x)$ увеличивается при росте x. Приходим к выводу, что функция полезности $u(x)$ обладает в о з р а с т а ю щ е й мерой относительной несклонности к риску.

- Для $u(x) = \alpha + \beta \ln x$

Вычисляем первую и вторую производную данной функции полезности:

$$u'(x) = \frac{\beta}{x}, \qquad u''(x) = -\frac{\beta}{x^2}.$$

Находим *меру абсолютной несклонности к риску*:

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{x}.$$

Очевидно, что при увеличении x значение $\rho(x)$ падает, т.е. функция полезности обладает у б ы в а ю щ е й мерой абсолютной несклонности к риску.

Мера относительной несклонности к риску равна единице, так как

$$r(x) = x\rho(x) = 1.$$

Следовательно, функция полезности отражает п о с т о я н н у ю относительную несклонность к риску.

Б.

- Для $u(x) = \alpha - e^{-\beta x}$

Выпишем функцию ожидаемой полезности:

$$\mathrm{E}u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\alpha - \exp\{-\beta x_i\}\right) = \alpha - \sum_{i=1}^{n} p_i \exp\{-\beta x_i\}.$$

Гарантированный эквивалент x^* находится при условии $\mathrm{E}u(\mathbf{x}) = u(x^*)$.

Приравнивая функцию ожидаемой полезности к значению элементарной функции полезности в точке x^*, получаем уравнение

$$\alpha - \sum_{i=1}^{n} p_i \exp\{-\beta x_i\} = \alpha - \exp\{-\beta x^*\}.$$

Выражая x^*, находим гарантированный эквивалент:

$$x^* = -\frac{1}{\beta} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \exp\{-\beta x_i\}\right).$$

Вознаграждение за риск — это разность между ожидаемым доходом при данной функции полезности и гарантированным эквивалентом набора $\mathbf{x}$. *Ожидаемый доход* — это математическое ожидание дохода.

Находим, что выражение вознаграждения за риск имеет вид

$$\Delta x = \mathrm{E}\mathbf{x} - x^* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \frac{1}{\beta} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \exp\{-\beta x_i\}\right).$$

- Для $u(x) = \alpha + \beta \ln x$

  Функция ожидаемой полезности имеет вид

$$\mathrm{E}u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i (\alpha + \beta \ln x_i) = \alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i.$$

Используя условие $\mathrm{E}u(\mathbf{x}) = u(x^*)$, выписываем уравнение, решением которого является значение гарантированного эквивалента набора $\mathbf{x}$:

$$\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i = \alpha + \beta \ln x^*.$$

Выражая x^*, находим гарантированный эквивалент

$$x^* = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}.$$

Следовательно, вознаграждение за риск задано уравнением

$$\Delta x = \mathrm{E}\mathbf{x} - x^* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}.$$

◆ **Задача 7.6.** Предположите, что $u(x)$ и $v(x)$ — возрастающие, вогнутые функции полезности. Пусть k и l — фиксированные величины, а C_1 и C_2 — произвольные константы:

а) пусть $u(x)$ обладает свойством постоянной абсолютной несклонности к риску, т.е. известно, что $\rho(x) = k$. Покажите, что функция полезности имеет вид

$$u(x) = C_2 - \frac{C_1}{k} e^{-kx};$$

б) пусть $v(x)$ обладает свойством постоянной относительной несклонности к риску, т.е. известно, что $r(x) = l$. Покажите, что функция полезности имеет вид

$$v(x) = \frac{C_1}{1-l} x^{1-l} + C_2, \qquad \text{если} \qquad l \neq 1;$$

$$v(x) = C_1 \ln x + C_2, \qquad \text{если} \qquad l = 1.$$

Решение.

А. Абсолютная несклонность к риску определяется уравнением

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = k.$$

Пусть $f(x) = \ln u'(x)$. Тогда

$$f'(x) = u''(x)/u'(x) = -\rho(x) = -k.$$

Интегрируя $f'(x)$, имеем

$$f(x) = \ln u'(x) = -kx + C_0,$$

где C_0 — некая константа. Преобразуя уравнение $\ln u'(x) = -kx + C_0$, находим выражение первой производной функции полезности:

$$u'(x) = C_1 e^{-kx}.$$

Интегрируя $u'(x)$, получаем нужный результат:

$$u(x) = C_2 - \frac{C_1}{k} e^{-kx}.$$

Б. Относительная несклонность к риску определяется уравнением

$$r(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)} = l.$$

Действуя так же, как в п. А, обозначим $f(x) = \ln v'(x)$. Тогда производная функции $f(x)$ имеет значение

$$f'(x) = v''(x)/v'(x) = -r(x)/x = -l/x.$$

Интегрируя $f'(x)$, получаем выражение логарифма производной функции полезности:

$$f(x) = \ln v'(x) = -l\ln x + C_0,$$

где C_0 — произвольная константа. Отсюда следует, что

$$v'(x) = C_1 x^{-l}.$$

Интегрируя $v'(x)$, получаем нужный результат:

- если $l \neq 1$, функция полезности имеет вид

$$v(x) = \frac{C_1}{1-l}x^{1-l} + C_2;$$

- если $l = 1$, функция полезности задана уравнением

$$v(x) = C_1\ln x + C_2.$$

7.2. АСИММЕТРИЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

◆ **Задача 7.7.** Рассмотрите следующую проблему взаимоотношений между владельцем фирмы (B) и рабочим (A). Рабочий выбирает уровень усилий s, где $0 < s < 1$. Объем выпуска фирмы равен q_1 с вероятностью s и q_0 с вероятностью $1-s$, где $q_1 > q_0$. Владелец выплачивает рабочему зарплату w_1, если выпуск достигает q_1, и зарплату w_0, если выпуск достигает q_0. Функции ожидаемой полезности рабочего и владельца имеют вид

$$u^A = sw_1 + (1-s)w_0 - s^2,$$

$$u^B = s(q_1 - w_1) + (1-s)(q_0 - w_0),$$

где u^A — ожидаемая полезность рабочего, а u^B — ожидаемая полезность владельца:

а) используя метод обратной индукции, охарактеризуйте равновесные значения w_1, w_0, s, u^A и u^B при условии, что усилие s ненаблюдаемо;
б) вычислите значение s, максимизирующее совместную полезность рабочего и владельца;
в) сравните максимально возможную совместную полезность рабочего и владельца с суммой значений u^A и u^B, найденных в п. А.

Решение.

А. В условиях равновесия рабочий выбирает значение s, максимизирующее его ожидаемую полезность. Дифференцируя u^A по s и приравнивая результат к нулю, имеем $\partial u^A/\partial s = w_1 - w_0 - 2s = 0$. Функция ожидаемой полезности рабочего достигает максимального значения при уровне $s = (w_1 - w_0)/2$. При любых значениях w_1 и w_0 рабочий выбирает уровень усилий, следуя этому выражению.

Владелец максимизирует свою функцию ожидаемой полезности, учитывая ограничение $s = (w_1 - w_0)/2$. Так как значение u^B уменьшается с ростом w_0, оптимальная зарплата $w_0^* = 0$. Тогда функция ожидаемой полезности владельца задана уравнением

$$u^B = s(q_1 - w_1) + (1 - s)(q_0 - w_0^*) = \frac{w_1}{2}(q_1 - w_1) + \left(1 - \frac{w_1}{2}\right)q_0.$$

Условием первого порядка является равенство нулю частной производной u^B по w_1:

$$\frac{\partial u^B}{\partial w_1} = \frac{q_1 - q_0}{2} - w_1 = 0.$$

Выражая w_1, получаем, что при равновесии $w_1 = w_1^* = (q_1 - q_0)/2$ и $s = s^* = (q_1 - q_0)/4$. Подставляя найденные значения w_1^*, w_0^* и s^* в u^A и u^B, находим ожидаемую полезность для рабочего и для владельца:

$$(u^A)^* = s^* w_1^* - (s^*)^2 = \frac{(q_1 - q_0)^2}{16},$$

$$(u^B)^* = s^*(q_1 - w_1^*) + (1 - s^*)q_0 = \frac{(q_1 - q_0)^2}{8} + q_0.$$

Б. Вычислим сумму функций ожидаемой полезности $u^A + u^B$:

$$u^A + u^B = sq_1 + (1-s)q_0 - s^2.$$

Выпишем условие первого порядка:

$$\frac{\partial(u^A + u^B)}{\partial s} = q_1 - q_0 - 2s = 0.$$

Из этого уравнения вытекает значение s, максимизирующее совместную ожидаемую полезность рабочего и владельца. Получаем $s = s^* = (q_1 - q_0)/2$. При $s = s^*$

$$(u^A + u^B)^* = s^*q_1 + (1 - s^*)q_0 - (s^*)^2 = \frac{(q_1 - q_0)^2}{4} + q_0.$$

В. Вычисляя сумму $u^A = (u^A)^*$ и $u^B = (u^B)^*$, получаем выражение

$$(u^A)^* + (u^B)^* = \frac{(q_1 - q_0)^2}{16} + \frac{(q_1 - q_0)^2}{8} + q_0 = \frac{3(q_1 - q_0)^2}{16} + q_0.$$

Делаем вывод, что $(u^A + u^B)^* > (u^A)^* + (u^B)^*$, так как

$$\frac{(q_1 - q_0)^2}{4} + q_0 > \frac{3(q_1 - q_0)^2}{16} + q_0.$$

Следовательно, максимально возможная совместная ожидаемая полезность владельца и рабочего превышает сумму максимально возможных ожидаемых полезностей владельца и рабочего раздельно.

◆ **Задача 7.8.** Наниматель предлагает рабочему следующий контракт: при производительности q_1 рабочий получает зарплату $w = w_1$, а при производительности q_2 — зарплату $w = w_2$, где $q_1 > q_2$. Рабочий прикладывает усилие $r = r_H$, r_L, где $r_H > r_L$. Если $r = r_H$, производительность рабочего равна q_1 с вероятностью p_H, а если $r = r_L$, его производительность равна q_1 с вероятностью p_L, где $p_H > p_L$. Предпочтения рабочего заданы элементарной функцией полезности $u(w, r) = \ln(w + 1) - r$. Ожидаемая прибыль нанимателя при усилии рабочего r_H имеет вид $\pi_H = p_H(q_1 - w_1) + (1 - p_H)(q_2 - w_2)$, а при усилии r_L — соответственно $\pi_L = p_L(q_1 - w_1) + (1 - p_L) \times \times (q_2 - w_2)$. Если рабочий отказывается от работы, он извлекает нулевую полезность:

а) предполагая, что усилие рабочего наблюдаемо, вычислите оптимальные зарплаты w_H и w_L в случаях, если рабочий прикладывает усилия r_H и r_L соответственно. Найдите ожидаемую прибыль нанимателя при различных уровнях усилия рабочего. Определите, какой должна быть величина $q_1 - q_2$, чтобы усилие r_H было оптимальным;

б) предполагая, что усилие рабочего ненаблюдаемо, вычислите оптимальные зарплаты w_1^* и w_2^*. Найдите ожидаемую прибыль нанимателя при различных уровнях усилия рабочего. Определите, какой должна быть величина $q_1 - q_2$, чтобы усилие r_H было оптимальным.

Решение.

А. В случае полной (симметричной) информации наниматель предложит рабочему с высоким уровнем усилий зарплату $w_H = w_1 = w_2$, не зависящую от его итоговой производительности.

Пусть PC_H — уравнение ограничения, описывающего условие заинтересованности рабочего принять работу. Если полезность, полученная от работы, не меньше нуля, рабочий согласится с предложенной ему зарплатой. Условие согласия на выполнение работы для рабочего, выбравшего уровень усилий r_H, описывается неравенством

$$PC_H = p_H \ln(w_1 + 1) + (1 - p_H)\ln(w_2 + 1) - r_H \geq 0.$$

Прибыль нанимателя в этом случае имеет вид

$$\pi_H = p_H(q_1 - w_1) + (1 - p_H)(q_2 - w_2).$$

Так как π_H убывает при росте значений w_1 и w_2, нанимателю выгодно выплачивать по возможности самую низкую зарплату, т.е. зарплату, получаемую при приравнивании функции ожидаемой полезности рабочего к нулю. Подставляя $w_1 = w_2 = w_H$ и приравнивая PC_H к нулю, получаем

$$\ln(w_H + 1) - r_H = 0,$$

откуда следует *равновесная зарплата рабочего с усилием* r_H:

$$w_H = \exp\{r_H\} - 1.$$

Ожидаемая прибыль нанимателя в этом случае имеет вид

$$\overline{\pi}_H = p_H(q_1 - w_H) + (1 - p_H)(q_2 - w_H) =$$
$$= p_H(q_1 - q_2) + q_2 - \exp\{r_H\} + 1.$$

Подобным способом найдем равновесную зарплату рабочего, выбравшего уровень усилий r_L. Условием согласия на выполнение работы для такого рабочего является неравенство

$$PC_L = p_L \ln(w_1 + 1) + (1 - p_L)\ln(w_2 + 1) - r_L \geq 0.$$

При наблюдении уровня усилий r_L наниматель предложит рабочему зарплату $w_L = w_1 = w_2$. Задача максимизации прибыли нанимателя эквивалентна решению равенства $PC_L = 0$. Подставляя $w_1 = w_2 = w_L$ в выражение PC_L, имеем

$$\ln(w_L + 1) - r_L = 0.$$

Отсюда вытекает *равновесная зарплата рабочего с усилием* r_L:

$$w_L = \exp\{r_L\} - 1.$$

Ожидаемая прибыль нанимателя в этом случае имеет вид

$$\overline{\pi}_L = p_L(q_1 - w_L) + (1 - p_L)(q_2 - w_L) =$$
$$= p_L(q_1 - q_2) + q_2 - \exp\{r_L\} + 1.$$

В условиях симметричной информации усилие r_H является оптимальным тогда, когда $\overline{\pi}_H > \overline{\pi}_L$, т.е. при условии

$$p_H(q_1 - q_2) + q_2 - \exp\{r_H\} + 1 > p_L(q_1 - q_2) + q_2 - \exp\{r_L\} + 1.$$

Преображая это выражение, получаем условие для величины $q_1 - q_2$, при котором высокий уровень усилий будет оптимальным:

$$q_1 - q_2 > \frac{\exp\{r_H\} - \exp\{r_L\}}{p_H - p_L}.$$

Б. В случае асимметричной информации наниматель предложит рабочему зарплату, зависящую от его производительности: при итоговой производительности q_1 наниматель в условиях равновесия выплатит рабочему зарплату w_1^*, а при итоговой производительности q_2 — зарплату w_2^*.

Так как усилие рабочего ненаблюдаемо, нанимателю нужно выбрать w_1^* и w_2^* так, чтобы у рабочего, выбравшего уровень усилий r_L, не было желания делать вид, что он предпринимает усилие r_H. Представим это дополнительное условие в виде ограничения, подтверждающего, что ожидаемая полезность рабочего выше, если он работает с усилием r_H:

$$p_H \ln(w_1+1) + (1-p_H)\ln(w_2+1) - r_H \geq$$
$$\geq p_L \ln(w_1+1) + (1-p_L)\ln(w_2+1) - r_L.$$

Преображая, напишем это ограничение в следующем виде и назовем его IC_H:

$$IC_H = (p_H - p_L)[\ln(w_1+1) - \ln(w_2+1)] - r_H + r_L \geq 0.$$

Вспомним, что условие согласия на выполнение работы для рабочего, выбравшего уровень усилий r_H, имеет вид

$$PC_H = p_H \ln(w_1+1) + (1-p_H)\ln(w_2+1) - r_H \geq 0.$$

Задача нанимателя заключается в максимизации ожидаемой прибыли при наличии ограничений $IC_H \geq 0$ и $PC_H \geq 0$. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид $L = \pi_H + \lambda(PC_H) + \mu(IC_H)$, где $\pi_H = p_H(q_1 - w_1) + (1-p_H)(q_2 - w_2)$ и λ, μ — множители Лагранжа. Вычисляя и приравнивая к нулю частные производные L по w_1 и w_2, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = -p_H + \lambda\left(\frac{p_H}{w_1+1}\right) + \mu\left(\frac{p_H - p_L}{w_1+1}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = p_H - 1 + \lambda\left(\frac{1-p_H}{w_2+1}\right) - \mu\left(\frac{p_H - p_L}{w_2+1}\right) = 0.$$

Проверим обязательность соблюдения ограничений $IC_H \geq 0$ и $PC_H \geq 0$. Условиями Куна — Таккера являются неотрицательность множителей λ, μ и равенство нулю выражений $\lambda(PC_H)$ и $\mu(IC_H)$.

Преображая уравнение $\partial L/\partial w_2 = 0$, имеем

$$\frac{\lambda(1-p_H) - \mu(p_H - p_L)}{w_2+1} = 1 - p_H,$$

$$\lambda = w_2 + 1 + \frac{\mu(p_H - p_L)}{1 - p_H} > 0.$$

Следовательно, чтобы условие $\lambda(PC_H) = 0$ удовлетворялось, необходимо, чтобы $PC_H = 0$.

Теперь предположим, что $\mu = 0$. Из уравнений $\partial L/\partial w_1 = 0$ и $\partial L/\partial w_2 = 0$ следует, что $w_1 = w_2 = \lambda - 1$, но эти значения w_1 и w_2 не удовлетворяют условию $IC_H > 0$. Тогда $\mu > 0$, и условие $\mu(IC_H) = 0$ соблюдается, только если $IC_H = 0$.

Решая систему уравнений $PC_H = 0$ и $IC_H = 0$, находим значения w_1^* и w_2^*, максимизирующие ожидаемую прибыль фирмы в условиях асимметричной информации:

$$w_1^* = \exp\{\alpha\} - 1, \qquad w_2^* = \exp\{\beta\} - 1,$$

где $$\alpha = r_H + \frac{(r_H - r_L)(1 - p_H)}{p_H - p_L}, \qquad \beta = r_H - \frac{(r_H - r_L)p_H}{p_H - p_L}.$$

При этих зарплатах ожидаемая прибыль фирмы при усилии рабочего $r = r_H$ имеет вид

$$\hat{\pi}_H = p_H(q_1 - w_1^*) + (1 - p_H)(q_2 - w_2^*) =$$
$$= p_H(q_1 - \exp\{\alpha\}) + (1 - p_H)(q_2 - \exp\{\beta\}) + 1,$$

а при усилии рабочего $r = r_L$ она задана уравнением

$$\hat{\pi}_L = p_L(q_1 - w_1^*) + (1 - p_L)(q_2 - w_2^*) =$$
$$= p_L(q_1 - \exp\{\alpha\}) + (1 - p_L)(q_2 - \exp\{\beta\}) + 1.$$

В условиях асимметричной информации усилие r_H является оптимальным тогда, когда $\hat{\pi}_H > \hat{\pi}_L$, т.е. при условии

$$p_H(q_1 - \exp\{\alpha\}) + (1 - p_H)(q_2 - \exp\{\beta\}) + 1 >$$
$$> p_L(q_1 - \exp\{\alpha\}) + (1 - p_L)(q_2 - \exp\{\beta\}) + 1.$$

Преображая это неравенство, получаем

$$q_1 - q_2 > \exp\{\alpha\} - \exp\{\beta\}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1

Докажите, что если предпочтения удовлетворяют свойствам рефлексивности, полноты и транзитивности, то для любых наборов A и B, если кривая безразличия, которой принадлежит набор A, пересекается с кривой безразличия, которой принадлежит набор B, эти кривые безразличия совпадают.

Задача 2

Рассмотрите функции полезности в потреблении благ X и Y, где x и y — количество каждого из благ соответственно:

- $U(x, y) = \ln x + y$;
- $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$;
- $U(x, y) = e^{xy}$.

Для каждой из функций требуется выполнить следующее.

1. Определите, монотонна ли функция и является ли она квазивогнутой.
2. Запишите уравнение кривой безразличия и определите ее наклон. Является ли кривая безразличия выпуклой?
3. Определите, является ли функция полезности однородной.
4. Найдите маршаллианские функции спроса на блага X и Y.
5. Выведите косвенную функцию полезности.
6. Подтвердите справедливость равенства Роя.
7. Выведите хиксианские функции спроса на блага X и Y. Симметричны ли они?
8. Найдите функцию расходов и определите, является ли она вогнутой по ценам.
9. Подтвердите справедливость леммы Шепарда.
10. По функции расходов восстановите функцию косвенной полезности.
11. По функции косвенной полезности восстановите функцию расходов.

Задача 3

Рассмотрите функцию полезности $U(x, y) = \min\{x, y\}$.

1. Изобразите графически кривые безразличия. Используя рисунок, покажите, что предпочтения слабо монотонные.
2. Найдите маршаллианские функции спроса на блага X и Y.
3. По функции спроса объясните, увеличивается ли при общем росте дохода потребителя часть его расходов на благо X (т.е. $\frac{x^m P_x}{M}$).
4. Выпишите функцию косвенной полезности.
5. Найдите функцию расходов.

Задача 4

Рассмотрите функцию полезности $U(x, y) = \alpha x + \sqrt{y}$, где $\alpha > 0$.

1. Определите, является ли функция полезности однородной? Если да, то какого порядка? Если нет, является ли она гомотетичной?
2. Выведите уравнение кривой безразличия. Имеет ли она отрицательный наклон и является ли выпуклой? Объясните.
3. Найдите маршаллианские функции спроса на блага X и Y.
4. Установите порядок однородности маршаллианских функций спроса. Как свойства эластичности функций спроса зависят от установленного порядка их однородности?

Задача 5

Рассмотрите функцию расходов $e(P_x, P_y, u) = 2\sqrt{P_x P_y \exp\{u\}}$.

1. Является ли функция расходов однородной по ценам? Если да, то какого порядка?
2. Является ли функция расходов вогнутой по ценам? Объясните.
3. Найдите хиксианские функции спроса для благ X и Y.
4. Выведите косвенную функцию полезности V, используя условие $V(P_x, P_y, e(P_x, P_y, u)) = u$.
5. Является ли косвенная функция полезности однородной по ценам?
6. Выведите маршаллианские функции спроса для благ X и Y.

Задача 6

Предположите, что существуют два блага X и Y. Маршаллианский спрос x^m на благо X не зависит от цены P_y блага Y (т.е. $\frac{\partial x^m}{\partial P_y} = 0$). Если спрос на благо X эластичен по цене, какова его эластичность по доходу?

Задача 7

Полезность потребителя, который покупает только товары G и услуги S, задана следующей функцией: $U(G, S) = \alpha \ln(G-20) + (1-\alpha)\ln(S-10)$, где $0 < \alpha < 1$.

1. Выведите спрос потребителя на товары как функцию от цены P_G, цены услуг P_S и его дохода M.
2. Если цена единицы товара составляет 10 тыс. руб., а единицы услуги — 20 тыс. руб., сколько единиц товаров может купить потребитель за год при доходе 1 млн руб. в год?
3. Если доход потребителя возрастет на некоторую величину, насколько увеличится его спрос на товары? Рассчитайте эффект дохода.
4. Если цена единицы товара снизится на некоторую величину, насколько увеличится спрос потребителя на товары? Рассчитайте эффект замещения.

Задача 8

Рассмотрите функцию полезности $U(x, y) = \ln x + y$. Задача максимизации полезности имеет касательное решение, в результате чего при изменении цены блага X с P_1 до P_2 эффект дохода отсутствует. Эквивалентная вариация EV измеряется областью под хиксианской кривой спроса в интервале между P_1 и P_2 после изменения полезности потребления вследствие изменения цены. Компенсирующая вариация CV измеряется областью под хиксианской кривой спроса в интервале между P_1 и P_2 до изменения полезности потребления. Излишек потребителя CS измеряется областью под маршаллианской кривой спроса в интервале между P_1 и P_2.

1. Выведите хиксианскую функцию спроса.
2. Выведите маршаллианскую функцию спроса.
3. Установите, зависят ли обе функции спроса от дохода.
4. Покажите, что в случае изменения цены блага X справедливо следующее равенство: $EV = CV = CS$.

Задача 9

Рассмотрите производственные функции $F(L, K)$ и $G(L, K)$, где труд L и капитал K — факторы производства. Известно, что $G(L, K)$ является монотонной трансформацией $F(L, K)$.

1. Покажите, что F и G обладают одинаковой эластичностью замещения.
2. Покажите, что эластичность замещения труда капиталом равна эластичности замещения капитала трудом.

Задача 10

Средние издержки фирмы равны предельным издержкам при любом объеме выпуска. Покажите, что в этом случае функция издержек фирмы имеет вид $C = ky$, где k — константа.

Задача 11

Производственная функция фирмы задана уравнением

$$y = f(x_1, x_2) = (\alpha x_1^\sigma + \beta x_2^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}},$$

где x_1, x_2 — количество факторов производства; α, β и σ — положительные параметры, притом что $\sigma < 1$.

1. Найдите функции условного спроса на факторы производства и выпишите функцию издержек фирмы. Покажите, что $AC = MC$ при любом значении y.
2. Предположите, что фирма является единственной на рынке и рыночная цена равна P. Опишите функцию предложения фирмы при разных значениях $P > 0$.

Задача 12

Объясните, почему условием максимизации прибыли монополиста является равенство предельной выручки и предельных издержек.

Задача 13

Монополист имеет функцию издержек $C = ky^\beta + F$, где y — объем выпуска, F — постоянные издержки, константа $k > 0$ и параметр $\beta > 1$. Уравнение $P = k/y^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, описывает обратную функцию спроса для рынка, обслуживаемого монополистом.

1. Вычислите цену P^*, максимизирующую прибыль монополиста. Чему равна прибыль монополиста при этой цене?

2. Предположите, что фирма не является монополистом. Найдите цену $\hat{P}$, которую установит фирма в условиях совершенной конкуренции.
3. Государство дает монополисту грант размером Ay, где A — постоянная величина. Найдите значение A, при котором оптимальная цена, установленная монополистом, будет равна $\hat{P}$.

Задача 14

Используя закон Вальраса, объясните, как можно вычислить функцию избыточного спроса на благо n, если известны функции избыточного спроса на блага $1, \ldots, n-1$.

Задача 15

Экономика обмена состоит из двух потребителей и двух благ. Функции полезности потребителей имеют вид

$$U^A = \min\{\alpha_1 x_1^A, \alpha_2 x_2^A\}, \qquad U^B = \min\{\beta_1 x_1^B, \beta_2 x_2^B\},$$

где x_i^A и x_i^B $(i = 1, 2)$ — количество блага i, приобретаемое потребителями A и B соответственно. Параметры α_1, α_2, β_1 и β_2 — положительные. Потребители владеют начальными запасами $\omega^A = (R_1^A, R_2^A)$ и $\omega^B = (R_1^B, R_2^B)$. Пусть P — цена первого блага, выраженная через цену второго.

1. Найдите уравнение кривой предложения (*offer curve*) потребителя A. Вычислите спрос потребителя A на блага 1 и 2. Как изменение значений α_1, α_2, R_1^A, R_2^A и P влияет на спрос?
2. Вычислите спрос потребителя B на блага 1 и 2. Напишите уравнение, решением которого является равновесное значение параметра P.

Задача 16

Рассмотрите экономику обмена, состоящую из двух потребителей (A и B) и двух товаров. Потребление второго товара потребителем B влияет на уровень полезности потребителя A. Предпочтения потребителей заданы функциями полезности

$$U^A = -\frac{\alpha_1}{x_1^A} - \frac{\alpha_2 x_2^B}{x_2^A}, \qquad U^B = \beta \ln x_2^B,$$

где x_i^A и x_i^B $(i = 1, 2)$ — количество блага i, потребляемое участниками A и B соответственно; α_1, α_2 и β — положительные параметры. Начальные запасы заданы векторами $\omega^A = (0, 1)$ и $\omega^B = (1, 0)$.

1. Вычислите относительную цену P, обеспечивающую равновесие рынков в данной экономике.
2. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Найдите равновесное количество товаров при обмене.

Задача 17

Рассмотрите следующую игру в нормальной форме:

Игрок B / Игрок A	b_1	b_2
a_1	(5; 3)	(0; 1)
a_2	(1; 0)	(3; 5)

1. Охарактеризуйте равновесие в чистых и смешанных стратегиях.
2. Игрок B может добавить стратегию b_3. Набор $(a_1;\ b_3)$ соответствует выигрышам (2; 4), а набор $(a_2;\ b_3)$ — выигрышам (3; 1). Покажите, что если игрок B добавит к своим стратегиям b_3, то набор $(a_2;\ b_2)$ будет равновесием в чистых стратегиях.
3. Пусть игроки выбирают стратегии последовательно. Представьте игру в экстенсивной форме в случае, когда игрок A делает первый ход, и в случае, когда игрок B делает первый ход. Охарактеризуйте совершенное в подыграх равновесие в обоих случаях.

Задача 18

Две фирмы обслуживают один рынок. Обратная функция спроса задана уравнением $P = A - q_1 - q_2$. Функции издержек имеют вид: $C_1 = cq_1$ и $C_2 = cq_2$. Величина q_i — объем выпуска фирмы, $i = 1, 2$. Параметр c — положительная величина, и $A > c$.

1. Вычислите совместную прибыль фирм, если они конкурируют по моделям Курно и Штакельберга. Какова была бы прибыль первой фирмы, если бы она являлась монополистом?

2. Объясните, какую цену устанавливают фирмы в долгосрочном периоде, если они конкурируют по модели Бертрана.
3. Пусть π_1^M — прибыль первой фирмы в том случае, если она является монополистом. Рассмотрите игру по модели Бертрана, состоящую из бесконечного количества периодов. В каждом периоде фирмы делят монополистическую прибыль пополам при условии, что ни одна из них не назначает цену ниже монопольной. С каждым периодом, начиная со второго, прибыль фирм умножается на положительную величину $\tau < 1$, т.е. после n периодов прибыль первой фирмы равна $\frac{\pi_1^M}{2}\sum_{i=1}^{n}\tau^{i-1}$. Найдите ограничение на τ, при котором первая фирма не будет устанавливать цену меньше монопольной в каждом периоде.

Задача 19

Предпочтения агента заданы элементарной функцией полезности $u(w) = -w^{-\beta}$, где w — его доход и $\beta \neq 0$. Агент принимает участие в следующей игре: с вероятностью p_1 он получает сумму, равную Z_1, и с вероятностью $(1-p_1)$ — сумму, равную Z_2.

1. Выпишите функцию ожидаемой полезности агента. Найдите значение гарантированного эквивалента и вознаграждение за риск.
2. Предположите, что $Z_2 = 0$. Используя уравнение вознаграждения за риск, определите, при каких значениях β агент не склонен к риску.

Задача 20

Пусть $u(x)$ — элементарная функция полезности. Покажите, что $u(x)$ и $v(x) = ku(x) + l$, где k и l — константы, обладают одинаковой мерой абсолютной и относительной несклонности к риску.

Задача 21

Рассмотрите взаимоотношения между экономистом (A) и фирмой (B). Фирма нанимает экономиста, предлагая ему зарплату $w = w_1, w_2$. В зависимости от опыта экономиста фирма получает прибыль $q = q_1, q_2$. Экономист может быть опытным

$(s = 1)$ или неопытным $(s = 0)$. Если он опытный, фирма получает прибыль q_1 с вероятностью p_H и прибыль q_2 с вероятностью $1 - p_H$, а если неопытный, фирма получает прибыль q_1 с вероятностью p_L и прибыль q_2 с вероятностью $1 - p_L$. Элементарные функции полезности экономиста и фирмы имеют вид

$$u^A = \ln w - C(s), \qquad u^B = q - w,$$

где $C(s)$ — везде дифференцируемая и возрастающая функция.

1. Предполагая, что степень опытности экономиста известна фирме, выпишите условие, при котором фирме выгоднее нанимать опытного экономиста. Какие зарплаты w_1 и w_2 будет предлагать фирма опытным и неопытным экономистам соответственно?
2. Предполагая, что степень опытности экономиста неизвестна фирме, найдите зарплату w_1, при которой экономист, который примет должность, будет опытным.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учебники, используемые в ведущих российских экономических вузах (ГУ-ВШЭ, МГУ, РЭШ, СПбГУ, НГУ)

■ *Переводные учебники*

Вэриан Х.Р. Микроэкономика: Промежуточный уровень: Современный подход. — М.: ЮНИТИ, 1997.

Долан Э.Дж., Линдсей Д.Е. Рынок. Микроэкономическая модель. — СПб.: Копирайт, 1992.

Пиндайк Р., Рабинфельд Д. Микроэкономика: Учебник для вузов. — М.: Дело, 2000; Питер, 2003.

■ *Учебники российских авторов*

Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономика. Третий уровень. — Новосибирск: НГУ, 2009.

Чеканский А.Н., Фролова Н.Л. Микроэкономика. Промежуточный уровень: Учебник. — М.: ИНФРА-М, 2008.

Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень: Учебник. — М.: ИНФРА-М, 2008.

Фридман А.А. Лекции по микроэкономике продвинутого уровня. — М.: ГУ-ВШЭ, 2007.

■ *Сборники задач с решениями*

Афанасьев М.Ю., Данилин В.И. Сборник задач по микроэкономике. — М.: ТЭИС, 2005.

Бусыгин В.П., Покатович Е.В., Фридман А.А. Сборник задач по курсу микроэкономики продвинутого уровня. — М.: ГУ-ВШЭ, 2009.

Покатович Е.В., Левина Е.А. Микроэкономика: задачи и решения. — М.: ГУ-ВШЭ, 2008.

2. Учебники, используемые в американских университетах (Университет Чикаго, Принстон, Гарвард, Массачусетский технологический институт)

Jehle G.A., Reny P.J. Advanced Microeconomic Theory. — N.Y.: Addison-Wesley, 2009.

Kreps D. A Course in Microeconomic Theory. — Princeton University Press, 1990.

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. — N.Y.: Oxford University Press, 1995.

Nicholson W. Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions. — South-Western College Pub, 2001.

Varian H.R. Microeconomic Analysis. — W.W. Norton & Company: College Books, 2008.

3. Учебники, используемые в европейских университетах (Кембридж, Лондонская школа экономики, Оксфорд)

Cowell F.A. Microeconomics: Principles and Analysis. — L., 2008.

Perloff J.M. Microeconomics: Theory and Applications with Calculus. — L., 2008.

СОДЕРЖАНИЕ